

**GEÇİŞ ŞARTLI SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
ÖZDEĞERLERİ VE ÖZFONKSİYONLARI
İÇİN ASİMPTOTİK AÇILIM FORMÜLLERİ**

HÜLYA GÜLTEKİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEÇİŞ ŞARTLI SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
ÖZDEĞERLERİ VE ÖZFONKSİYONLARI
İÇİN ASİMPTOTİK AÇILIM FORMÜLLERİ

HÜLYA GÜLTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

SAMSUN – 2010

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**Bu çalışma jürimiz tarafından 14 / 07 / 2010 tarihinde yapılan sınav ile
Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.**

Başkan : Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Üye : Prof. Dr. İmanverdi EKBERLİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

... / ... / 2010

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ

GEÇİŞ ŞARTLI SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZFONKSİYONLARI İÇİN ASİMPTOTİK AÇILIM FORMÜLLERİ

ÖZET

Bu çalışmada, ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemler için bir süreksiz sınır değer problemi incelenmiştir. Diferansiyel denklem, süreksiz katsayı ve süreksizlik noktasındaki geçiş şartlarını içerir. Ayrıca özdeğer parametre hem diferansiyel denklemde hem de sınır ve geçiş şartlarında bulunması bakımından farklılıklar göstermektedir.

Bu tezde, araştırdığımız sınır değer problemine uygun olarak özel bir Hilbert uzayı ve bu uzayda tanımladığımız problem ile aynı özdeğere sahip olan bir operatör tanımlanmıştır. Böylece sınır değer problemi operatör denklem şeklinde ifade edilmiştir. Daha sonra diferansiyel denkleme ait özdeğer ve özfonksiyonların bazı temel özellikleri verilmiş ve de bu özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik açılım formülleri elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Süreksiz sınır değer problemi, özdeğer ve özfonksiyon, asimptotik açılım, geçiş şartı

**ASYMPTOTIC EXPANSION FORMULAS FOR EIGENVALUES AND
EIGENFUNCTIONS OF THE DISCONTINUOUS BOUNDARY VALUE
PROBLEM WITH TRANSMISSION CONDITION**

ABSTRACT

In this study, consideration is given to the second order linear differential equation for boundary value transmission problem. Differential equations include, discontinuous coefficients and discontinuity point at the transmission conditions. Also, the eigenvalue parameter shows differences in terms of both differential equation, boundary and transmission conditions.

In this thesis, we investigate the boundary value problems according to a special Hilbert space and define an operator which has the same eigenvalue with the problem defined in this Hilbert space. Therefore the boundary value problem is expressed in the form of operator equation. After than some basic properties of the eigenvalues and eigenfunctions of differential equations are given and asymptotic expansion formulas of eigenvalues and eigenfunctions are obtained.

Key words: Discontinuous boundary value problem, eigenvalue and eigenfunction, asymptotic expansion, transmission condition

TEŞEKKÜR

Tez danışmanlığımı üstlenen, yüksek lisans öğretimim boyunca her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen, değerli bilgilerinden faydalandığım, çok kıymetli hocam , sayın Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans derslerini aldığım Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm öğretim üyelerine teşekkürü borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	6
3. GENEL BİLGİLER.....	8
3.1 Regüler Sınır Değer Problemi.....	8
3.2. Hilbert Uzayı ve Simetrik Operatör	9
3.3. $L_2(a, b)$ uzayı	10
3.4. Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özfonksiyonları	10
3.5. Rouché Teoremi	12
3.6. Asimptotik Eşitsizlikler.....	13
4. MATERYAL VE METOT.....	15
5. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	16
5.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi.....	16
5.2. Problemin Operatör-Teorik Yorumu	16
5.3. A Operatörünün Simetrikliği	18
5.4. Temel Çözümler ve Wronskiye Fonksiyonları	22
5.5. Temel Çözümler için İntegral Denklemler.....	30
5.6. $\omega(\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ Fonksiyonları için Asimptotik Açılımlar	36
5.7. Özdeğerlerin Asimptotik Açılımları.....	37
5.8. Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formüller.....	40
6.SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	47

1.GİRİŞ

İlk defa 1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ısı iletimi ile ilgili olarak araştırılan sınır-değer problemleri ve bu problemlerin daha da genelleştirilmesinden ortaya çıkan benzer problemler , Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılır.

Başlangıcı itibarı ile, ısı iletim problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisi günümüzde birçok fiziksel problemlerin araştırılmasında etkin bir yöntem oluşturmaktadır. Genel olarak bu teori,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1.1)$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (1.2)$$

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad (1.3)$$

biçimindeki kısmi diferansiyel denklemlerin farklı sınır ve başlangıç şartları altındaki çözümlerinin incelenmesinde uygulanmaktadır.

(1.1) denklemi sıcaklığı zamanla değişmeyen yani kararlaşmış sıcaklığı gösteren denklemdir. (1.2) denklemi homojen çubuktaki küçük titreşimlerle ilgili dalga denklemdir. (1.3) denklemi ise ısı ızalosyonu yapılmış homojen metal çubuktaki ısı akışı denklemdir. Burada c, çubuğun oluşturduğu maddenin ısı tutumuna, yoğunluğuna ve ısı iletkenliğine bağlı sabit bir sayıdır. $u(x, t)$ ise t zamanında x noktasında oluşan sıcaklıktır.

Sturm-Liouville teorisinin esas amacı diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını sağlayan çözümü araştırmaktır.

Sturm-Liouville teorisinin teorik ve pratik önemini açıklamak için (1.3) denkleminde uzunluğu ℓ olan homojen metal çubuğun başlangıç ve bitim noktalarındaki sıcaklığın sıfır olduğu,

$$u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0, t > 0 \quad (1.4)$$

$t = 0$ anında her noktadaki sıcaklığın $f(x)$ olduğu,

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \ell \quad (1.5)$$

matematik fizik problemini inceleyelim.

Bu problem bir başlangıç sınır değer problemidir. Bu (1.3) - (1.5) problemine matematik fizikte ısı iletim problemi denir.

Problemin $u(x, t)$ çözümü,

$$u(x, t) = Y(x)T(t) \quad (1.6)$$

şeklinde aranır. (değişkenlere ayırma yöntemi)

(1.6) denklemi (1.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$Y(x)T'(t) = c^2 Y''(x)T(t) \quad (1.7)$$

eşitliği elde edilir. (1.7) eşitliğinden

$$\frac{Y''(x)}{Y(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad (1.8)$$

eşitlikleri elde edilir. (Burada σ ayırma sabitidir.)

Birinci eşitlikten,

$$Y''(x) - \sigma Y(x) = 0 \quad (1.9)$$

adi diferansiyel denklemi bulunur. Diğer taraftan (1.6) ifadesinde (1.4) sınır şartları yazılırsa,

$$Y(0)T(t) = 0, \quad Y(\ell)T(t) = 0$$

olur. Buradan,

$$Y(0) = 0, \quad Y(\ell) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde ısı iletimi probleminden ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için

$$Y''(x) - \sigma Y(x) = 0 \quad (1.10)$$

$$Y(0) = 0 \quad (1.11)$$

$$Y(\ell) = 0 \quad (1.12)$$

şeklinde sınır değer problemi elde edilir. (1.11) ve (1.12) sınır şartlarına Dirichlet şartları denir. (1.10) - (1.12) sınır değer probleminin ancak $\sigma < 0$ olması durumunda aşikar olmayan $Y(x)$ çözümü vardır. $\lambda > 0$ özdeğer parametre olmak üzere $\sigma = -\lambda$ gösterimini kullanırsak (1.10) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$Y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (1.13)$$

şeklinde dir. (C_1, C_2 keyfi sabitlerdir.) $Y(x)$ çözümü (1.11) sınır şartını sağladığından

$C_1 = 0$ elde edilir. Bu nedenle (1.13) ifadesi

$$Y(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (1.14)$$

biçimine dönüşür. Sınır şartından,

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0 \quad (1.15)$$

ifadesi elde edilir. $C_2 = 0$ durumunda (1.14) den $Y(x) = 0$ aşıkâr çözümü elde edileceğinden $C_2 \neq 0$ kabul edilmelidir. O halde (1.15) den

$$\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$$

eşitliği bulunur. Buradan,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

özdeğerleri elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen (1.10) - (1.12) sınır değer probleminin özfonksiyonları

$$Y_n(x) = C_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.16)$$

biçimindedir.

(1.8) ifadesinin 2. eşitliğinden,

$$T'(t) - \sigma c^2 T(t) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin genel çözümü,

$$T_n(t) = D_n e^{-c^2 \lambda_n t} \quad (1.17)$$

şeklindedir. (1.16) ve (1.17) ifadeleri (1.6) da yerine yazılırsa elde edilen

$$u_n(x, t) = C_n D_n e^{-c^2 \lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.18)$$

çözüm fonksiyonları (1.10) denklemini ve (1.11) - (1.12) sınır şartlarını sağlar. Ancak bu çözümler genel olarak (1.5) başlangıç şartını sağlamaz. Hem (1.3) denklemini hem de (1.4) sınır şartları homojen olduklarından (1.18) ifadesinin sonlu sayıda toplamı da (1.3) denklemini ve (1.4) sınır şartlarını sağlar. (Süperpozisyon prensibi gereği). Ayrıca bazı gerekli ek şartlar altında,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2 \lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (C_n D_n = A_n) \quad (1.19)$$

serisinin toplamı da (1.3) denklemini ve (1.4) sınır şartlarını sağlar. (1.5) başlangıç şartını sağlaması için $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (1.20)$$

olacak şekilde A_n sabiti bulunmalıdır. Fourier serileri teorisinden bilindiği üzere (1.20) eşitliğinin sağlanabilmesi için A_n katsayılarının

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{\ell}\right) d\xi \quad (1.21)$$

biçiminde seçilmelidir. (1.21) ifadesi (1.19) da yerine yazılırsa, (1.3) - (1.5) probleminin çözümü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{\ell}\right) d\xi \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

serisi biçiminde bulunur.

Günümüzde hem matematik fiziğin ortaya koyduğu yeni somut problemlerin araştırılması hem de teorik matematiğin gelişme ihtiyacı klasik sınır değer problemlerinin yanında standart olmayan sınır değer problemlerinin de incelenmesini gerektirmektedir. Buna, araştırdığımız geçiş şartlı süreksiz sınır değer problemi örnek olarak gösterilebilir.

Bu problem; süreksiz katsayılı ve geçiş şartlı olması, özdeğer parametrenin hem denklemden hem de sınır ve geçiş koşullarında olması bakımından klasik problemlerden farklılıklar göstermektedir. Böyle problemlerin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması matematiksel fizik problemlerinin çözümünde etkin bir yöntemdir. Örneğin kuantum fiziğinde $\psi(x, t)$ dalga fonksiyonu olmak üzere tek boyutlu zamandan bağımsız

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi \quad (1.22)$$

Schrödinger denklemi yazılabilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (1.23)$$

Hamiltonien operatörü olmak üzere

$$H\psi = E\psi \quad (1.24)$$

özdeğer denklemi şeklinde yazılır. Burada E kuantum fiziğinde parçacığın enerjisini, h Planck sabitini, m parçacığın kütlesini göstermektedir. E , (1.24) özdeğer probleminin özdeğeri, $\psi(x)$ ise özfonksiyonudur. (1.22) Schrödinger denklemi ele aldığımız

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)u = \lambda u$$

denklemine benzemektedir. Yine (1.3) denkleminin çözümünde ortaya çıkan (1.10)-(1.12) sınır değer problemi de incelediğimiz problemin özel haline benzemektedir. Bu nedenle bu tip denklemleri içeren sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarının incelenmesi uygulama açısından büyük önem arz etmektedir.

2.LİTERATÜR ÖZETİ

İlk olarak 19. yüzyılın ortalarında C. Sturm ve J. Liouville, literatürde Sturm-Liouville olarak adlandırılan özdeğer parametresine bağlı ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemini araştırmışlardır.

Matematik fiziğin ortaya koyduğu yeni somut problemlerin araştırılması ihtiyacı klasik Sturm-Liouville teorisini daha da geliştirmek ihtiyacını doğurmuştur.

Bu alandaki ilk ciddi sonuçlar Birkhoff (1908)' un çalışmalarından elde edilmiştir. Birkhoff çalışmalarında regüler sınır şartlarını tanımlayarak, özdeğer parametresine bağlı lineer diferansiyel operatörler için temel çözüm sistemini oluşturan çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemiştir.

Tamarkin (1928), çalışmasında güçlü regülerlik kavramını tanımlamıştır. Güçlü regüler sınır şartları altında özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonların seriye açılım özelliklerini incelemiştir. Sonraki yıllarda bu tip problemler birçok matematikçi tarafından araştırılmış ve bu alanda çok sayıda makale ve kitap yazılmıştır.

Walter (1973), hem ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemde hem de sınır koşullarının her ikisinde özdeğer parametre bulunduran sınır değer problemini incelemiştir. Bu problem için yeni bir μ ölçümü tanımlanmış ve bu probleme uygun $(L_2[a, b], \mu)$ Hilbert uzayında probleme uygun operatör tanımlayarak problemin operatör teorik yorumunu vermiştir.

Schneider (1974), çalışmasında özfonksiyonlar üzerine seri açılımını düzgün ve mutlak yakınsaklığı için yeter koşullar belirlemiştir. Ancak açılım teoremini sadece düzgün fonksiyonlar için ispatlamıştır.

Fulton (1977), çalışmasında fonksiyonel analiz yöntemlerinin yanı sıra Titchmarsh' ın klasik yöntemlerinden yararlanarak sınır şartlarında da özdeğer parametre bulunduran problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller bulmuştur. Ayrıca çalışmasında rezolvent operatörü ve Green fonksiyonunu incelemiş, özfonksiyonlar üzerine açılım teoremlerini ispatlamış ve de Fourier serileri ile eş yakınsaklık teoremini vermiştir.

Russakovskiy (1975), farklı olarak sınır şartları polinom biçiminde özdeğer parametresi içeren problemlerin operatör teorik yorumunu vermiştir. Bu durumda uygun Hilbert uzayı olarak $(L_2[a, b], \mu) \oplus C$ yerine $(L_2[a, b], \mu) \oplus C^n$ uzayı almıştır.

Kerimov ve Mamedov (1999),

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1 \quad (2.1)$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2)u(0) + u'(0) = 0 \quad (2.2)$$

$$(\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2)u(1) + u'(1) = 1 \quad (2.3)$$

problemine uygun

$$A(\lambda)\lambda^2 + B(\lambda)\lambda + C(\lambda) = 0$$

biçiminde operatör demetini kurarak (2.1) – (2.3) problemine farklı bir yaklaşımla operatör-teorik yorum getirmişlerdir. Bu çalışmada özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik davranışları incelenmiş ve ayrıca özfonksiyonların sıfır yerleri hakkında klasik sorulara benzer sonuçlar bulmuşlardır.

Daha sonraki yıllarda bu konuda yapılmış en önemli çalışmalar Shkalikov (1983), Yakubov (1994), Yakubov ve ark. (1999, 2000), Hinton (1979), Kobayashi (1989) şeklinde sıralanabilir.

Tez konumuza en yakın çalışmalar ise Muhtarov (1990, 1994, 1998), Altınışık (1998), Altınışık ve ark. (2004), Kadakal (2000), Tunç (2001) ve Hıra (2009) tarafından araştırılmıştır. Bu yapılan çalışmalarda süreksiz katsayılı diferansiyel denklem ve geçiş şartlarını içeren süreksiz sınır değer problemi incelenmiştir. Ancak bu çalışmalarda özdeğer parametresi denklemde ve sınır şartlarında bulunmasına rağmen geçiş şartlarında bulunmamaktadır.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında özdeğer parametre geçiş şartlarında da bulunmaktadır.

3. GENEL BİLGİLER

3.1 Regüler Sınır Değer Problemi

λ bir parametre olmak üzere $[a, b]$ aralığında

$$a_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2(x) \frac{dy}{dx} + (a_3(x) + \lambda) y = 0 \quad (3.1.1)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde eğer

$$p(x) = \exp \left(\int^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)} dt \right), \quad q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)} p(x), \quad s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)} \quad (3.1.2)$$

değişimleri yapılırsa (3.1.1) denklemi

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda s(x)) y = 0 \quad (3.1.3)$$

denklemine indirgenmiş olur. Bu denklem

$$L := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

operatörü yardımıyla

$$L(y) + \lambda s(x) y = 0 \quad (3.1.4)$$

olarak yazılabilir. (3.1.4) denkleminde Sturm-Liouville denklemi denir. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $s(x)$ reel değerli fonksiyonlardır. $[a, b]$ aralığında $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonlarının sürekli, $p(x)$ fonksiyonunun türevlenebilir olması durumunda (3.1.4) denkleminin çözümü vardır.

Eğer $p(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında pozitif iseler (3.1.3) denkleminin $[a, b]$ aralığında regülerdir veya düzgündür denir.

3.1.1. Tanım: Verilen $[a, b]$ aralığında tanımlı

$$L(y) + \lambda s(x) y = 0 \quad (3.1.5)$$

denkleminin

$$\left. \begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

olarak verilen sınır koşulları ile birlikte bir regüler sınır değer problemi tanımlar. Bir başka deyişle (3.1.9) denkleminin (3.1.10) sınır koşullarını sağlayan çözümlerinin araştırılması problemine regüler sınır değer problemi denir. Burada a_1, a_2, b_1, b_2 reel sabitler olup $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ ve $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ dır.

3.1.1. Teorem: Eğer $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [a, b]$$

diferansiyel denklemi ve

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha \quad (u(a) = f(\lambda), u'(a) = g(\lambda))$$

homogen olmayan sınır şartlarından oluşan sınır değer probleminin $u = u(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve her bir $x \in [a, b]$ için $u(x, \lambda)$ fonksiyonu λ parametresinin tam fonksiyonudur. (Titchmarsh, 1939)

3.2. Hilbert Uzayı ve Simetrik Operatör

H kompleks lineer uzayı verilsin. Her $x, y \in H$ elemanları çiftine

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad (x_1, x_2, y \in H)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
4. $(x, x) \geq 0$
5. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

koşullarını gerçekleyen ve (x, y) ile göstereceğimiz kompleks sayısının karşılık getirildiğini kabul edelim. Bu halde (x, y) kompleks sayısına x ve y elemanlarının iç çarpımı; H lineer uzayına ise iç çarpım uzayı denir. H iç çarpım uzayında

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formülü bir norm tanımladığı için iç çarpım uzayına bu norma göre lineer normlu uzay denir.

Eğer bu lineer normlu uzay tam ve sonsuz boyutlu ise H uzayına Hilbert uzayı denir.

3.2.1.Tanım: H Hilbert uzayında tanım bölgesi $D(A) \subset H$ olan $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer operatörü verilsin. Eğer her $x, y \in D(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir. Burada $\langle , \rangle_H$ H uzayında bir iç çarpımdır.

H_1 ve H_2 Hilbert uzayları verilsin.

$$H_1 \times H_2 := \{(x, y) \mid x \in H_1, y \in H_2\}$$

kümesi alışılmış yöntemle lineer uzaya dönüştürülebilir. Bu lineer uzayda

$X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in H_1 \times H_2$ elemanları için

$$\langle X, Y \rangle_{H_1 \oplus H_2} := \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}$$

eşitliği bir iç çarpım tanımlar ve bu iç çarpıma göre

$$H_1 \oplus H_2 := (H_1 \times H_2, \langle , \rangle_{H_1 \oplus H_2})$$

bir Hilbert uzayıdır. (Marçenko, 1972)

3.3. $L_2(a, b)$ uzayı

Verilmiş $[a, b]$ aralığında tanımlı ve Lebesque anlamında ölçülebilir olan $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesque anlamında integrallenebilir ise $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir.

Karesi integrallenebilir fonksiyonların lineer uzayında

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

formülü bir iç çarpım tanımlar. Bu şekilde tanımlanan iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. Bu uzay $L_2(a, b)$ ile gösterilir.

3.4. Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özfonksiyonları

H kompleks Hilbert uzayında $A: H \rightarrow H$ lineer operatörü ve λ kompleks parametresi verilsin. Eğer herhangi bir $\lambda = \lambda_0$ için $Au = \lambda_0 u$ operatör denkleminin

$u_0 \neq 0$ çözümü varsa λ_0 sayısına A operatörünün özdeğeri; $u_0 \in D(A)$ elemanına ise λ_0 özdeğerine uygun özfonksiyonu (özelemanı) denir.

3.4.1. Örnek:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (3.4.1)$$

Legendre diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0 \quad (3.4.2)$$

şeklinde yazılır.

$$\lambda = n(n+1) \quad (3.4.3)$$

özdeğerleri için (3.4.1) Legendre diferansiyel denkleminin

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.4.5)$$

şeklinde polinom çözümü vardır. Burada $P_n(x)$ Legendre polinomları $\lambda = n(n+1)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

3.4.2. Örnek:

$$y^{(4)} = -k^2 y'' \quad (3.4.6)$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, y''(0) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 0 \quad (3.4.7)$$

sınır şartları verilsin. (3.4.6) denkleminin $k \neq 0$ için genel çözümü, A, B, C, D keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x) = A + Bx + C \cos(kx) + D \sin(kx) \quad (3.4.8)$$

dir. (3.4.8) in (3.4.7) sınır şartlarını sağlamasından $A = C = 0$ ve

$$\tan k = k \quad (3.4.9)$$

denklemi elde edilir. (3.4.9) denkleminin kökleri olan k değerleri (3.4.6), (3.4.7) sınır

değer probleminin özdeğerleridir. Bu özdeğerler $y = \tan x$, $y = x$ fonksiyonlarının grafiklerinin kesiştiği noktaların apsisleridir ve basittirler. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$y(x, k) = \sin(kx) - x \sin k$$

olur. $k = 0$ için (3.4.6) denkleminin genel çözümü ise,

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \quad (3.4.10)$$

dir. (3.4.7) sınır şartlarından $A = B = C = D = 0$ olur. Yani, $k = 0$ için (3.4.6) denkleminin (3.4.7) şartını sağlayan çözümü sadece $y(x) = 0$ aşıkâr çözümü olduğundan $k = 0$ problemin özdeğeri değildir.

Eğer (3.4.7) sınır şartları yerine

$$y''(0) = y'''(0) = y(1) = y'(1) = 0$$

sınır şartları alınırsa, bu durumda $k = 0$ için (3.4.10) da ve $k \neq 0$ için (3.4.8) de $A = B = C = D = 0$ olduğundan bu sınır değer problemin özdeğeri yoktur.

Eğer (3.4.7) sınır değer şartları yerine

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0 \quad (3.4.11)$$

alınırsa, bu durumda da $k = 0$ için özdeğer yoktur. Ancak $k \neq 0$ için (3.4.11) sınır şartlarından k özdeğerleri için

$$\sin k = k$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin sıfırdan başka reel kökü yoktur. Yani, bu sınır değer problem sıfır hariç reel olmayan özdeğere sahiptir.

3.5. Rouché Teoremi

Bütün kompleks düzlemde analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir. $f(z)$ tam fonksiyonu verildiğinde

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

ise $z = z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun k -katlı sıfır yeri denir. Tam fonksiyonların sıfır yerlerinin sonlu veya sayılabilir sayıda olduğu (veya hiç olmadığı) kompleks analizden iyi bilinmektedir.

3.5.1. Teorem (Rouche Teoremi): Kabul edelim ki $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks fonksiyonları herhangi bir γ kapalı düzgün Jordon eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olsun ve her $z \in \gamma$ için $|f(z)| > |g(z)|$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda γ eğrisinin içinde $f(z) + g(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı ile $f(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı eşittir (her bir sıfır yeri mertebesi sayıda hesaplanır).

3.6. Asimptotik Eşitsizlikler

$x \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(x, \lambda)$ fonksiyonunun $\lambda \rightarrow \infty$ için davranışı $g(x, \lambda)$ fonksiyonunun $\lambda \rightarrow \infty$ için davranışından yararlanılarak ifade edilebilir. Böyle durumlarda $f(x, \lambda)$ ve $g(x, \lambda)$ fonksiyonlarının $\lambda \rightarrow \infty$ için davranış yakınlığı incelenirken “o”, “O”, “~” gibi simgelerden yararlanılır.

3.6.1. Tanım (“O” Asimptotik Simgesi):

$x \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ değişkenlerine bağlı $g(x, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. $f(x, \lambda)$ fonksiyonu için öyle $M > 0$ ve $R > 0$ sabitleri için $\left| \frac{f(x, \lambda)}{g(x, \lambda)} \right| \leq M$ eşitsizliği bütün

$x \in [a, b]$ ve $|\lambda| > R$ geçerli oluyorsa, o halde

$$f(x, \lambda) = O(g(x, \lambda)), \lambda \rightarrow \infty$$

veya kısaca

$$f(x, \lambda) = O(g(x, \lambda))$$

şeklinde gösterilir.

3.6.2.Tanım (“o” Asimptotik Simgesi):

Eğer $[a, b]$ aralığında düzgün olarak $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, \lambda)}{g(x, \lambda)} \right| = 0$ oluyorsa o halde

$$f(x, \lambda) = o(g(x, \lambda)), \lambda \rightarrow \infty$$

şeklinde gösterilir.

3.6.3 Tanım (Asimptotik Yaklaşım):

Eğer $[a, b]$ aralığında düzgün olarak $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, \lambda)}{g(x, \lambda)} \right| = 1$ oluyorsa, o halde

$\lambda \rightarrow \infty$ için $f(x, \lambda)$ fonksiyonu asimptotik olarak $g(x, \lambda)$ ya yaklaşıyor denir. Ve bu durum $f(x, \lambda) \sim g(x, \lambda), \lambda \rightarrow \infty$ biçiminde gösterilir.

4.MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında incelenen sınır-değer problemi klasik Sturm-Liouville sınır-değer probleminden farklılıklar içermektedir. Bu farklılıklar özdeğer parametrenin sadece diferansiyel denklemde değil, aynı zamanda sınır ve geçiş şartlarında da bulunması, diferansiyel denklemin katsayı fonksiyonunun bir noktada süreksiz olması, buna bağlı olarak süreksizlik noktasında iki geçiş şartının eklenmiş olmasıdır.

Bu çalışmada materyal olarak kaynaklar kısmında verilen kitap ve makalelerden yararlanılmıştır. Bu kaynaklardaki uygulanan yöntemler incelenerek tez konumuzdaki probleme uygulanabilir hale dönüştürülmüştür. Ayrıca klasik Sturm-Liouville teoremi ve yöntemleri, özdeğer problemin çözüm yöntemleri, fonksiyonel ve reel analizden bilinen yöntemler, tam fonksiyonların Rezidü teorisi ve Rouché teoremi, diferansiyel denklemlerde integral denklemleri teorisi, çözüm fonksiyonlarının asimptotik seriye açılım yöntemleri uygulanmıştır.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu bölümde $x = 0$ noktası hariç $[-1, 1]$ aralığında tanımlı

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u \quad (5.1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminde,

$$L_1(u) := u(-1) + u'(-1) = 0 \quad (5.1.2)$$

$$L_2(u) := \lambda \alpha u(1) + (\lambda - \beta)u'(1) = 0 \quad (5.1.3)$$

sınır şartlarından ve

$$L_3(u) := u(0+) - u(0-) = 0 \quad (5.1.4)$$

$$L_4(u) := \gamma_1 u'(0-) - \gamma_2 u'(0+) = (\lambda \delta_1 + \delta_2)u(0) \quad (5.1.5)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenecektir. Burada $q(x)$ fonksiyonu $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında sürekli ve $x = 0$ noktasında $q(0\pm)$ sonlu limit değerlerine sahip olan fonksiyondur. $\alpha, \beta, \gamma_i, \delta_i$ ($i = 1, 2$) katsayıları reel, λ kompleks özdeğer parametresidir. $\alpha\beta > 0$ dır.

5.2. Problemin Operatör-Teorik Yorumu

Bundan sonra her yerde $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 > 0$ kabul edilecektir. Üç bileşenli

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \mid f(x) \in L_2[-1, 1] \text{ ve } f_1, f_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

biçiminde olan elemanların lineer uzayında yani $H = L_2[-1, 1] \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ direkt toplamında,

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ ve } G = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in H \text{ elemanları için}$$

$$\langle F, G \rangle = \gamma_1 \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + \gamma_2 \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\delta_1} f_1 \overline{g_1} + \frac{\gamma_2}{\alpha \beta} f_2 \overline{g_2} \quad (5.2.1)$$

eşitliği ile tanımlı ifade H da bir iç çarpım tanımlar. Bu H iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. Verilmiş (5.1.1) – (5.1.5) sınır-değer problemine uygun olan, $A: H \rightarrow H$ lineer operatörünün tanım kümesi

$$D(A) := \left\{ \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} f \text{ ve } f' \text{ fonksiyonların } [-1,0) \text{ ve } (0,1] \text{ da mutlak} \\ \text{sürekli ve } f(0\pm), f'(0\pm) \text{ sonlu limitleri mevcuttur.} \\ \tau f \in L_2[-1,1], \quad f(-1) + f'(-1) = 0, \quad f(0+) = f(0-) = f(0) \\ f_1 = \delta_1 f(0), \quad f_2 = \alpha f(1) + f'(1) \end{array} \right. \right\} \quad (5.2.2)$$

olmak üzere A operatörünü, $F \in D(A)$ için

$$AF := A \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(x) \\ \delta_1 f(0) \\ \alpha f(1) + f'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'' + q(x)f \\ \gamma_1 f'(0-) - \gamma_2 f'(0+) - \delta_2 f(0) \\ \beta f'(1) \end{pmatrix} \quad (5.2.3)$$

biçiminde tanımlayalım. O halde, $AF = \lambda F$ olmak üzere (5.2.3) eşitliğinden,

$$-f'' + q(x)f = \lambda f$$

$$\gamma_1 f'(0-) - \gamma_2 f'(0+) - \delta_2 f(0) = \lambda \delta_1 f(0)$$

$$\beta f'(1) = \lambda (\alpha f(1) + f'(1))$$

elde edilir.

$$\text{Ayrıca } F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(A) \text{ olduğu için,}$$

$$L_1(f) := f(-1) + f'(-1) = 0$$

$$L_3(f) := f(0+) - f(0-) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. O halde araştırdığımız (5.1.1) – (5.1.5) sınır-değer geçiş problemi

$$U = \begin{pmatrix} u(x) \\ \delta_1 u(0) \\ \alpha f(1) + f'(1) \end{pmatrix} \in D(A) \quad \text{olmak üzere}$$

$$AU = \lambda U$$

biçiminde yazılabilir. Bu yazılımdan (5.1.1) - (5.1.5) sınır değer probleminin özdeğeri ile A operatörünün özdeğerinin aynı olduğu görülür.

5.3. A Operatörünün Simetrikliği

5.3.1. Teorem: Yukarıda (5.2.2), (5.2.3) şeklinde tanımlanan $A: H \rightarrow H$ lineer operatörü için, $\langle AF, G \rangle = \langle F, AG \rangle$ ($F, G \in D(A)$) bağıntısı sağlanır. Yani A operatörü simetriktir.

$$\textbf{İspat:} \quad \text{Keyfi } F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in D(A) \quad \text{elemanları verilsin. } D(A) \text{ nın}$$

tanımı gereği,

$$f_1 = \delta_1 f(0)$$

$$g_1 = \delta_1 g(0)$$

$$f_2 = \alpha f(1) + f'(1)$$

$$g_2 = \alpha g(1) + g'(1)$$

dir. (5.2.1) iç çarpımını kullanırsak,

$$\langle AF, G \rangle = -\gamma_1 \int_{-1}^0 f''(x) \overline{g(x)} dx - \gamma_2 \int_0^1 f''(x) \overline{g(x)} dx + \gamma_1 \int_{-1}^0 q(x) f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_2 \int_0^1 q(x) f(x) \overline{g(x)} dx + \gamma_2 f'(1) \overline{g(1)} + \frac{\gamma_2}{\alpha} f'(1) \overline{g'(1)} \\
& + \left(\gamma_1 f'(0-) - \gamma_2 f'(0+) - \gamma_2 f(0) \right) \overline{g(0)}
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

olur. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının wronskiyeni

$W(f, g; x) := f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ şeklinde gösterilmek üzere yukarıdaki integrale iki kez kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned}
\langle AF, G \rangle &= \gamma_1 W(f, \bar{g}; 0-) - \gamma_1 W(f, \bar{g}; -1) + \gamma_2 W(f, \bar{g}; 1) \\
& - \gamma_2 W(f, \bar{g}; 0+) - \gamma_1 \int_{-1}^0 f(x) \overline{g''(x)} dx + \gamma_1 \int_{-1}^0 f(x) q(x) \overline{g(x)} dx \\
& - \gamma_2 \int_0^1 f(x) \overline{g''(x)} dx + \gamma_2 \int_0^1 f(x) q(x) \overline{g(x)} dx \\
& + \gamma_2 f'(1) \overline{g(1)} + \frac{\gamma_2}{\alpha} f'(1) \overline{g'(1)} \\
& + \left(\gamma_1 f'(0-) - \gamma_2 f'(0+) - \delta_2 f(0) \right) \overline{g(0)}
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.2.1) deki iç çarpımdan

$$\begin{aligned}
\langle F, AG \rangle &= -\gamma_1 \int_{-1}^0 f(x) \overline{g''(x)} dx + \gamma_1 \int_{-1}^0 f(x) q(x) \overline{g(x)} dx \\
& - \gamma_2 \int_0^1 f(x) \overline{g''(x)} dx + \gamma_2 \int_0^1 f(x) q(x) \overline{g(x)} dx + \gamma_2 f(1) \overline{g'(1)} \\
& + \frac{\gamma_2}{\alpha} f'(1) \overline{g'(1)} + \left(\gamma_1 \overline{g'(0-)} - \gamma_2 \overline{g'(0+)} - \delta_2 \overline{g(0)} \right) f(0)
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

elde edilir.

(5.3.2) ve (5.3.3) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
 \langle AF, G \rangle - \langle F, AG \rangle &= \gamma_1 W(f, \bar{g}; 0-) - \gamma_1 W(f, \bar{g}; -1) + \gamma_2 W(f, \bar{g}; 1) \\
 &\quad - \gamma_2 W(f, \bar{g}; 0+) + \gamma_2 \left(f'(1) \overline{g(1)} - f(1) \overline{g'(1)} \right) \\
 &\quad + \gamma_1 \left(f'(0-) \overline{g(0)} - f(0) \overline{g'(0-)} \right) \\
 &\quad + \gamma_2 \left(f(0) \overline{g'(0+)} - f'(0+) \overline{g(0)} \right)
 \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

elde edilir. $F, G \in D(A)$ olduğundan,

$$f(-1) + f'(-1) = 0, \quad g(-1) + g'(-1) = 0$$

$$f(0-) = f(0+) = f(0), \quad g(0-) = g(0+) = g(0)$$

eşitlikleri sağlanır. Buna göre yukarıdaki (5.3.4) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşit olur.

Dolayısıyla her $F, G \in D(A)$ için, $\langle AF, G \rangle = \langle F, AG \rangle$ dir. Yani A operatörü simetriktir.

5.3.1.Sonuç: Verilmiş (5.1.1) – (5.1.5) sınır değer probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat : λ bir özdeğer ve Φ de bu özdeğere karşılık gelen özeleman olsun. A operatörü simetrik olduğundan,

$$\langle A\Phi, \Phi \rangle = \langle \Phi, A\Phi \rangle$$

$$\langle \lambda\Phi, \Phi \rangle = \langle \Phi, \lambda\Phi \rangle$$

$$\lambda \langle \Phi, \Phi \rangle = \bar{\lambda} \langle \Phi, \Phi \rangle$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle \Phi, \Phi \rangle = 0$$

ve $\langle \Phi, \Phi \rangle \neq 0$ olduğundan

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

bulunur. O halde A operatörünün dolayısıyla (5.1.1) - (5.1.5) sınır değer probleminin bütün λ özdeğerleri reeldir.

5.3.2. Sonuç: A operatörünün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özelemanları ortogonaldır.

İspat : A operatörünün λ_1 ve λ_2 gibi iki farklı özdeğerine karşılık gelen özelemanları sırasıyla Φ_1 ve Φ_2 olsun. Buna göre

$$A\Phi_1 = \lambda_1\Phi_1, A\Phi_2 = \lambda_2\Phi_2$$

eşitlikleri sağlanır. A operatörünün simetrik olduğu kullanılırsa,

$$\langle A\Phi_1, \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1, A\Phi_2 \rangle$$

$$\langle \lambda_1\Phi_1, \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1, \lambda_2\Phi_2 \rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$$

bulunur. Böylece Φ_1 ve Φ_2 özelemanlarının ortogonallığı gösterilmiş olur.

A operatörünün özelemanını $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_\lambda(x) \\ \delta_1\phi_\lambda(0) \\ \alpha\phi_\lambda(1) + \phi'_\lambda(1) \end{pmatrix}$ şeklinde gösterebiliriz.

5.3.3 Sonuç: Verilmiş (5.1.1) – (5.1.5) probleminin iki farklı λ ve μ özdeğerlerine uygun özfonksiyonları $\phi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \mu)$ arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_{-1}^0 \phi(x, \lambda) \psi(x, \mu) dx + \gamma_2 \int_0^1 \phi(x, \lambda) \psi(x, \mu) d\mu = & - \left[\frac{\gamma_2 \alpha}{\beta} \phi(1, \lambda) \psi(1, \mu) + \frac{\gamma_2}{\beta} (\phi(1, \lambda) \psi'(1, \mu) + \phi'(1, \lambda) \psi(1, \mu)) \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_2}{\alpha \beta} \phi'(1, \lambda) \psi'(1, \mu) + \delta_1 \phi(0, \lambda) \psi(0, \mu) \right] \quad (5.3.5) \end{aligned}$$

İspat : Fonksiyonel analizden çok iyi bilinen teorem gereği simetrik A operatörünün $\lambda \neq \mu$ özdeğerlerine uygun olan

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi(x, \lambda) \\ \delta_1 \phi(0, \lambda) \\ \alpha \phi(1, \lambda) + \phi'(1, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi(x, \mu) \\ \delta_1 \psi(0, \mu) \\ \alpha \psi(1, \mu) + \psi'(1, \mu) \end{pmatrix}$$

özelemanları H Hilbert uzayında ortogonal olacak, yani,

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = 0 \quad (5.3.6)$$

H uzayındaki iç çarpımının (5.2.1) tanımından yararlanılırsa, (5.3.6) eşitliğinin (5.3.5) eşitliği ile eşdeğer olduğu görülür.

5.4. Temel Çözümler ve Wronskiyen Fonksiyonları

$\phi_{1\lambda}(x) := \phi_1(x, \lambda)$ ile (5.1.1) denkleminin $[-1, 0]$ aralığında

$$u(-1) = 1, \quad u'(-1) = -1 \quad (5.4.1)$$

şartlarını sağlayan çözümünü, bu çözüme bağlı olarak $\phi_{2\lambda}(x) := \phi_2(x, \lambda)$ ile (5.1.1) denkleminin $[0, 1]$ aralığında

$$u(0) = \phi_1(0, \lambda) \quad (5.4.2)$$

$$u'(0) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \phi_1'(0, \lambda) - \frac{(\lambda \delta_1 + \delta_2)}{\gamma_2} \phi_1(0, \lambda) \quad (5.4.3)$$

şartlarını sağlayan çözümünü gösterelim, öyle ki bu çözüm teorem 3.1.1 e göre vardır.

Böylece $\phi_\lambda(x) := \phi(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} \phi_{1\lambda}(x), & x \in [-1, 0) \\ \phi_{2\lambda}(x), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

olmak üzere (5.1.1) denkleminin $[-1,0) \cup (0,1]$ aralığındaki (5.1.2) sınır şartı ile birlikte (5.1.4) ve (5.1.5) geçiş şartlarını sağlayan çözümü olur.

Benzer şekilde (5.1.1) denkleminin $[0,1]$ aralığındaki

$$u(1) = \beta - \lambda, \quad u'(1) = \lambda\alpha \quad (5.4.4)$$

şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_{2\lambda}(x) := \chi_2(x, \lambda)$ ile, bu çözüme bağlı olarak (5.1.1) denkleminin $[-1,0]$ aralığındaki

$$u(0) = \chi_2(0, \lambda) \quad (5.4.5)$$

$$u'(0) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \chi_2'(0, \lambda) + \frac{\lambda\delta_1 + \delta_2}{\gamma_1} \chi_2(0, \lambda) \quad (5.4.6)$$

şartlarını sağlayan çözümünü ise $\chi_{1\lambda}(x) := \chi_1(x, \lambda)$ ile gösterelim. Böylece

$\chi_\lambda(x) := \chi(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$\chi_\lambda(x) = \begin{cases} \chi_{1\lambda}(x), & x \in [-1, 0) \\ \chi_{2\lambda}(x), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

olmak üzere (5.1.1) denkleminin $[-1,0) \cup (0,1]$ aralığındaki (5.1.3) sınır şartı ile birlikte (5.1.4) ve (5.1.5) geçiş şartlarını da sağlayan çözümü olur. Bu $\phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ çözüm fonksiyonları $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için λ parametresinin tam fonksiyonudurlar.

5.4.1. Sonuç: Tanımlanan $\phi_{i\lambda}(x)$ ve $\chi_{i\lambda}(x)$ çözüm fonksiyonları uygun $x \in [-1,0]$ ve $x \in [0,1]$ değişkenlerinin her bir değeri için λ parametresinin tam fonksiyonudurlar. Buna bağlı olarak, $W(\phi_{i\lambda}, \chi_{i\lambda}; x)$ wronskiyen fonksiyonu da λ parametresinin tam fonksiyonudur.

5.4.1. Lemma: $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ ($j=1,2$) fonksiyonlarının wronskiye x değişkeninden bağımsızdır.

$$\text{İspat: } W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) = \phi_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}'(x) - \phi_{j\lambda}'(x) \chi_{j\lambda}(x)$$

eşitliğinde türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) &= \phi_{j\lambda}'(x) \chi_{j\lambda}'(x) + \phi_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}''(x) \\ &\quad - \phi_{j\lambda}''(x) \chi_{j\lambda}(x) - \phi_{j\lambda}'(x) \chi_{j\lambda}'(x) \end{aligned}$$

$$= \phi_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}''(x) - \phi_{j\lambda}''(x) \chi_{j\lambda}(x)$$

ve $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonlarının (5.1.1) denkleminin çözümü olduğu kullanılırsa

$$\frac{d}{dx} W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonlarının wronskiyeininin x değişkeninden bağımsız olduğunu verir.

Buna göre

$$\omega_j(\lambda) := W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) = \phi_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}'(x) - \phi_{j\lambda}'(x) \chi_{j\lambda}(x)$$

şeklinde gösterilebilir.

5.4.2. Lemma: Her $\lambda \in \mathbf{C}$ için $\gamma_1 \omega_1(\lambda) = \gamma_2 \omega_2(\lambda)$ eşitliği sağlanır.

İspat: $\omega_1(\lambda) = \omega(\phi_{1\lambda}, \chi_{1\lambda}; x)$

$$= \omega(\phi_{1\lambda}, \chi_{1\lambda}; 0)$$

$$= \phi_{1\lambda}(0) \chi_{1\lambda}'(0) - \phi_{1\lambda}'(0) \chi_{1\lambda}(0)$$

(5.4.2), (5.4.3), (5.4.5), (5.4.6) eşitlikleri kullanılırsa,

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \omega(\phi_{2\lambda}, \chi_{2\lambda}; 0)$$

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \omega_2(\lambda)$$

olur. O halde,

$$\gamma_1 \omega_1(\lambda) = \gamma_2 \omega_2(\lambda)$$

$\omega(\lambda) := \gamma_1 \omega_1(\lambda) = \gamma_2 \omega_2(\lambda)$ eşitliği ile tanımlı $\omega(\lambda)$ fonksiyonuna (5.1.1) -

(5.1.5) sınır-değer probleminin karakteristik fonksiyonu denilecektir.

5.4.1 Sonuç: $\omega_1(\lambda)$ ve $\omega_2(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfır yerleri çakışıktır.

5.4.1. Teorem: (5.1.1) - (5.1.5) sınır-değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\omega(\lambda)$ ve $\omega(\lambda) + (\lambda \delta_1 + \delta_2) \phi(0, \lambda) \chi(0, \lambda)$ fonksiyonlarının sıfır yerlerinden ibarettir.

İspat: Kabul edelim ki $\lambda = \lambda_0$ (5.1.1)-(5.1.5) sınır değer probleminin özdeğeri ve $\omega(\lambda_0) = 0$ olsun. O halde,

$$\omega(\lambda_0) = \gamma_j \omega_j(\lambda_0) = 0 \Rightarrow \omega(\phi_{j\lambda_0}, \chi_{j\lambda_0}; x) = 0 \quad \text{dır. } (j = 1, 2)$$

Buna göre $\phi_{j\lambda_0}(x)$ ile $\chi_{j\lambda_0}(x)$ lineer bağımlı olacağından,

$$\phi_j(x, \lambda_0) = k_j \chi_j(x, \lambda_0) \quad (5.4.7)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $k_j \neq 0$ sabit sayısı vardır.

$\chi_j(x, \lambda_0)$ fonksiyonu (5.1.1) denkleminin (5.1.3), (5.1.4), (5.1.5), sınır ve geçiş şartını sağladığı açıktır. (5.4.7) eşitliği gereği $\chi_j(x, \lambda_0)$ fonksiyonu (5.1.2) sınır şartını da sağlar. Dolayısıyla $\chi_j(x, \lambda_0)$ fonksiyonu (5.1.1) - (5.1.5) sınır değer probleminin çözümü olur. Bu ise $\lambda = \lambda_0$ sayısının özdeğer olduğunu gösterir.

$\omega(\lambda_0) \neq 0$ olsun. Bu taktirde $\phi_1(x, \lambda_0)$ ile $\chi_1(x, \lambda_0)$ ve $\phi_2(x, \lambda_0)$ ile $\chi_2(x, \lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar.

Bu fonksiyonların $[-1, 1]$ aralığına sıfırla devamlarını uygun olarak $\tilde{\phi}_i(x, \lambda)$ ve $\tilde{\chi}_i(x, \lambda)$ ile gösterilirse ($i=1, 2$) yani,

$$\tilde{\phi}_{1\lambda}(x) = \begin{cases} \phi_{1\lambda}(x), & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}_{2\lambda}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0) \\ \phi_{2\lambda}(x), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_{1\lambda}(x) = \begin{cases} \chi_{1\lambda}(x), & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_{2\lambda}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0) \\ \chi_{2\lambda}(x), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

olur. Buna göre (5.1.1) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$u(x, \lambda) = C_1 \tilde{\phi}_1(x, \lambda) + C_2 \tilde{\chi}_1(x, \lambda) + C_3 \tilde{\phi}_2(x, \lambda) + C_4 \tilde{\chi}_2(x, \lambda)$$

şeklindedir. Dolayısıyla λ_0 özdeğerine uygun olan her bir $u_0(x)$ özfonksiyonu için,

$$u_0(x) = C_{1,0} \tilde{\phi}_1(x, \lambda_0) + C_{2,0} \tilde{\chi}_1(x, \lambda_0) + C_{3,0} \tilde{\phi}_2(x, \lambda_0) + C_{4,0} \tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)$$

olacak şekilde en az biri sıfırdan farklı olan, $C_{1,0}, C_{2,0}, C_{3,0}, C_{4,0}$ sayıları bulunur.

Diğer taraftan $u_0(x)$ özfonksiyon olduğundan (5.1.2) - (5.1.5) koşullarını sağlar.

Yani, $L_v(u_0(x)) = 0 \quad (v = \overline{1,4})$ dir. $C_{i,0} (i = \overline{1,4})$ katsayılarının en az biri sıfırdan farklı olduğu için buradan,

$$\Delta(\lambda_0) := \begin{vmatrix} L_1(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0))L_1(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))L_1(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0))L_1(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) \\ L_2(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0))L_2(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))L_2(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0))L_2(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) \\ L_3(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0))L_3(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))L_3(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0))L_3(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) \\ L_4(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0))L_4(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))L_4(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0))L_4(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4.8)$$

elde edilir. $\tilde{\phi}_1(x, \lambda)$ ve $\tilde{\chi}_1(x, \lambda)$ fonksiyonlarının tanımı ve (5.1.2) sınır koşulu gereği,

$$L_1\left(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\phi}_1(-1, \lambda_0) + \tilde{\phi}_1'(-1, \lambda_0) = \phi_1(-1, \lambda_0) + \phi_1'(-1, \lambda_0) = 0$$

ve

$$L_1\left(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\chi}_1(-1, \lambda_0) + \tilde{\chi}_1'(-1, \lambda_0) = \chi_1(-1, \lambda_0) + \chi_1'(-1, \lambda_0)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\omega_1(\lambda_0) = \phi_1(x, \lambda_0)\chi_1'(x, \lambda_0) - \phi_1'(x, \lambda_0)\chi_1(x, \lambda_0) \quad \text{wronskiye} \quad x \in [-1, 0) \text{ dan}$$

bağımsız olduğundan $x = -1$ için,

$$\begin{aligned} \omega_1(\lambda_0) &= \phi_1(-1, \lambda_0)\chi_1'(-1, \lambda_0) - \phi_1'(-1, \lambda_0)\chi_1(-1, \lambda_0) \\ &= \chi_1'(-1, \lambda_0) - (-1)\chi_1(-1, \lambda_0) \\ &= \chi_1'(-1, \lambda_0) + \chi_1(-1, \lambda_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$L_1\left(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)\right) = \omega_1(\lambda_0) = \frac{1}{\gamma_1} \omega(\lambda_0)$$

bulunur. $\tilde{\phi}_{2\lambda}(x)$, $\tilde{\chi}_{2\lambda}(x)$ fonksiyonlarının tanımı gereği,

$$L_1\left(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\phi}_2(-1, \lambda_0) = 0$$

$$L_1\left(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\chi}_2(-1, \lambda_0) = 0$$

olur. Yine, (5.1.3) sınır koşulu gereği,

$$L_2\left(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\phi}_1(1, \lambda_0) = 0$$

$$L_2\left(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\chi}_1(1, \lambda_0) = 0$$

$$L_2\left(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0)\right) = \lambda\alpha\tilde{\phi}_2(1, \lambda_0) + (\lambda - \beta)\tilde{\phi}_2'(1, \lambda_0) = \lambda\alpha\phi_2(1, \lambda_0) + (\lambda - \beta)\phi_2'(1, \lambda_0)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\omega_2(\lambda_0) = \phi_2(x, \lambda_0)\chi_2'(x, \lambda_0) - \phi_2'(x, \lambda_0)\chi_2(x, \lambda_0)$$

wronskiyeini $x = 1$ değeri için hesaplırsak,

$$\begin{aligned}\omega_2(\lambda_0) &= \phi_2(1, \lambda_0)\chi_2'(1, \lambda_0) - \phi_2'(1, \lambda_0)\chi_2(1, \lambda_0) \\ &= \phi_2(1, \lambda_0)\lambda\alpha - \phi_2'(1, \lambda_0)(\beta - \lambda) \\ &= \lambda\alpha\phi_2(1, \lambda_0) + (\lambda - \beta)\phi_2'(1, \lambda_0)\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$L_2\left(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0)\right) = \omega_2(\lambda_0) = \frac{1}{\gamma_2}\omega(\lambda_0)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}L_2\left(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)\right) &= \lambda\alpha\tilde{\chi}_2(1, \lambda_0) + (\lambda - \beta)\tilde{\chi}_2'(1, \lambda_0) = \lambda\alpha\chi_2(1, \lambda_0) + (\lambda - \beta)\chi_2'(1, \lambda_0) \\ &= \lambda\alpha(\beta - \lambda) + (\lambda - \beta)\lambda\alpha = 0\end{aligned}$$

$$L_3\left(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\phi}_1(0+, \lambda_0) - \tilde{\phi}_1(0-, \lambda_0) = -\phi_1(0-, \lambda_0)$$

$$L_3\left(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\chi}_1(0+, \lambda_0) - \tilde{\chi}_1(0-, \lambda_0) = -\chi_1(0-, \lambda_0)$$

$$L_3\left(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\phi}_2(0+, \lambda_0) - \tilde{\phi}_2(0-, \lambda_0) = \phi_2(0+, \lambda_0)$$

$$L_3\left(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)\right) = \tilde{\chi}_2(0+, \lambda_0) - \tilde{\chi}_2(0-, \lambda_0) = \chi_2(0+, \lambda_0)$$

$$\begin{aligned} L_4\left(\tilde{\phi}_1(x, \lambda_0)\right) &= \gamma_1 \tilde{\phi}_1'(0-, \lambda_0) - \gamma_2 \tilde{\phi}_1'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \tilde{\phi}_1(0, \lambda_0) \\ &= \gamma_1 \phi_1(0-, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_1(0, \lambda_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4\left(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)\right) &= \gamma_1 \tilde{\chi}_1'(0-, \lambda_0) - \gamma_2 \tilde{\chi}_1'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \tilde{\chi}_1(0, \lambda_0) \\ &= \gamma_1 \chi_1'(0-, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \chi_1(0, \lambda_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4\left(\tilde{\phi}_2(x, \lambda_0)\right) &= \gamma_1 \tilde{\phi}_2'(0-, \lambda_0) - \gamma_2 \tilde{\phi}_2'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \tilde{\phi}_2(0, \lambda_0) \\ &= -\gamma_2 \phi_2'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_2(0, \lambda_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4\left(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)\right) &= \gamma_1 \tilde{\chi}_2'(0-, \lambda_0) - \gamma_2 \tilde{\chi}_2'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \tilde{\chi}_2(0, \lambda_0) \\ &= -\gamma_2 \chi_2'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \chi_2(0, \lambda_0) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler (5.4.8) de yerine konulursa,

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\gamma_1} \omega(\lambda_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_2} \omega(\lambda_0) & 0 \\ -\phi_1(0, \lambda_0) & -\chi_1(0, \lambda_0) & \phi_2(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ a_1(\lambda_0) & a_2(\lambda_0) & a_3(\lambda_0) & a_4(\lambda_0) \end{vmatrix} = 0$$

olur. Burada,

$$a_1(\lambda_0) = \gamma_1 \phi_1'(0-, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_1(0, \lambda_0)$$

$$a_2(\lambda_0) = \gamma_1 \chi_1'(0-, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \chi_1(0, \lambda_0)$$

$$a_3(\lambda_0) = -\gamma_2 \phi_2'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_2(0, \lambda_0)$$

$$a_4(\lambda_0) = -\gamma_2 \chi_2'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \chi_2(0, \lambda_0)$$

dır. Yukarıdaki determinant ikinci satıra göre açılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_0) &= \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \omega^2(\lambda_0) \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \gamma_1 \phi_1'(0-, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_1(0, \lambda_0) & -\gamma_2 \chi_2'(0+, \lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \chi_2(0, \lambda_0) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \omega^2(\lambda_0) \left\{ \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \gamma_1 \phi_1'(0-, \lambda_0) & -\gamma_2 \chi_2'(0+, \lambda_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ -(\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_1(0, \lambda_0) & -(\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \chi_2(0, \lambda_0) \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. $\Delta(\lambda_0) = 0$ ve $\omega(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan, buradan

$$\begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \gamma_1 \phi_1'(0-, \lambda_0) & -\gamma_2 \chi_2'(0+, \lambda_0) \end{vmatrix} - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4.9)$$

elde edilir. Şimdi (5.4.9) ifadesindeki determinantlar ayrı ayrı aşağıdaki biçimde ifade edilsin. Birinci determinant için $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonlarının tanımlarından yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \gamma_1 \phi_1'(0-, \lambda_0) & -\gamma_2 \chi_2'(0, \lambda_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \gamma_1 \phi_1'(0-, \lambda_0) & -\gamma_1 \chi_1'(0-, \lambda_0) + (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \chi_2(0, \lambda_0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \gamma_1 \phi_1'(0-, \lambda_0) & -\gamma_1 \chi_1'(0-, \lambda_0) \end{vmatrix} - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_1(0, \lambda_0) \chi_2(0, \lambda_0) \\ &= \gamma_1 \omega_1(\lambda_0) - (\lambda_0 \delta_1 + \delta_2) \phi_1(0, \lambda_0) \chi_1(0, \lambda_0) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. İkinci determinant için ise,

$$= \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\phi_1(0, \lambda_0) & \chi_2(0, \lambda_0) \\ \phi_1(0, \lambda_0) & \chi_1(0, \lambda_0) \end{vmatrix} = -2\phi_1(0, \lambda_0)\chi_1(0, \lambda_0)$$

ifadesi bulunur. Bunlar (5.4.9) de yerin yazılırsa ve $\omega(\lambda_0)$ ın tanımı kullanılırsa, $\omega(\lambda_0) + (\lambda_0\delta_1 + \delta_2)\phi_1(0, \lambda_0)\chi_1(0, \lambda_0) = 0$ denklemi bulunur. Demek ki, $\omega(\lambda_0) \neq 0$ olduğu durumda, $\lambda = \lambda_0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\omega(\lambda_0) + (\lambda_0\delta_1 + \delta_2)\phi_1(0, \lambda_0)\chi_1(0, \lambda_0) = 0 \text{ olmasıdır.}$$

5.5. Temel Çözümler için İntegral Denklemler

Burada kesim 5.4. de tanımlanan $\phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ fonksiyonlarının $|\lambda| \rightarrow \infty$ için asimptotik davranışları incelenecektir.

5.5.1.Lemma: $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ olmak üzere (5.1.1)denkleminin $\phi_{j\lambda}(x) = \phi_j(x, \lambda)$ ($j=1,2$) çözümü için aşağıdaki integraller denklemleri ($k=0$ ve $k=1$ için) geçerlidir.

$$\phi_{1\lambda}^{(k)}(x) = (\cos[s(x+1)])^{(k)} - \frac{1}{s}(\sin[s(x+1)])^{(k)} + \frac{1}{s} \int_{-1}^x (\sin[s(x-y)])^{(k)} q(y) \phi_{1\lambda}(y) dy \quad (5.5.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2\lambda}^{(k)}(x) &= \phi_{1\lambda}(0)(\cos(sx))^{(k)} + \frac{1}{\gamma_2 s} (\gamma_1 \phi_{1\lambda}'(0) - (s^2\delta_1 + \delta_2)\phi_{1\lambda}(0))(\sin(sx))^{(k)} \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^x (\sin[s(x-y)])^{(k)} q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

İspat: $\phi_{1\lambda}(x)$ fonksiyonu $[-1,0]$ aralığında (5.1.1) denkleminin çözümü olduğundan,

$$q(y)\phi_{1\lambda}(y) = \phi_{1\lambda}''(y) + s^2\phi_{1\lambda}(y)$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\int_{-1}^x \sin[s(x-y)]q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy = s^2 \int_{-1}^x \sin[s(x-y)]\phi_{1\lambda}(y)dy + \int_{-1}^x \sin[s(x-y)]\phi_{1\lambda}''(y)dy \quad (5.5.3)$$

yazılabilir. Sağ taraftaki ikinci integral için iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^x \sin[s(x-y)]\phi_1''(y, \lambda)dy &= \left\{ \sin[s(x-y)]\phi_1'(y, \lambda)dy \right\} \Big|_{-1}^x + s \int_{-1}^x \cos[s(x-y)]\phi_1'(y, \lambda)dy \\
&= -\sin[s(x+1)]\phi_1'(-1, \lambda) + s \left\{ \cos[s(x-y)]\phi_1(y, \lambda) \right\} \Big|_{-1}^x - s^2 \int_{-1}^x \sin[s(x-y)]\phi_1(y, \lambda)dy \\
&= \sin[s(x+1)] + s\{\phi_1(x, \lambda) - \cos[s(x+1)]\phi_1(-1, \lambda)\} - s^2 \int_{-1}^x \sin[s(x-y)]\phi_1(y, \lambda)dy \\
&= \sin[s(x+1)] + s\{\phi_1(x, \lambda) - \cos[s(x+1)]\} - s^2 \int_{-1}^x \sin[s(x-y)]\phi_1(y, \lambda)dy
\end{aligned}$$

olur. Sonuncu eşitlik (5.5.3)' de yerine yazılırsa,

$$\int_{-1}^x \sin[s(x-y)]q(y)\phi_1(y, \lambda)dy = \sin[s(x+1)] + s(\phi_1(x, \lambda) - \cos[s(x+1)])$$

eşitliği bulunur. Düzenlenirse,

$$\phi_{1\lambda}(x) = (\cos[s(x+1)]) - \frac{1}{s}(\sin[s(x+1)]) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x (\sin[s(x-y)])q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy$$

olur. Benzer şekilde $\phi_{2\lambda}(x)$ de hesaplanır. Elde edilen eşitliklerde x değişkenine göre türev alınırsa türev denklemleri de elde edilir.

5.5.2.Lemma: $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ olmak üzere (5.1.1) denkleminin

$\chi_{j\lambda}(x) = \chi_j(x, \lambda)$ ($j=1,2$) çözümü için aşağıdaki integraller denklemleri ($k=0$ ve $k=1$ için) geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\chi_{1\lambda}^{(k)}(x) &= \chi_{2\lambda}(0)(\cos(sx))^{(k)} + \frac{1}{\gamma_1 s} \left[\gamma_2 \chi_{2\lambda}'(0) + (s^2 \delta_1 + \delta_2) \chi_{2\lambda}(0) \right] (\sin(sx))^{(k)} \\
&\quad + \frac{1}{s} \int_0^x (\sin[s(x-y)])^{(k)} q(y) \chi_{1\lambda}(y) dy
\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{2\lambda}^{(k)}(x) &= s\alpha(\sin[s(x-1)])^{(k)} + (\cos[s(x-1)])^{(k)} (\beta - s^2) \\
&\quad - \frac{1}{s} \int_x^1 (\sin[s(x-y)])^{(k)} q(y) \chi_{2\lambda}(y) dy
\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

İspat: $\chi_{1\lambda}(x)$ fonksiyonu $[-1, 0]$ aralığında (5.1.1) denkleminin çözümü olduğundan,

$$q(y)\chi_{1\lambda}(y) = \chi_{1\lambda}''(y) + s^2 \chi_{1\lambda}(y)$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\int_x^0 \sin[s(x-y)]q(y)\chi_{1\lambda}(y)dy = s^2 \int_x^0 \sin[s(x-y)]\chi_{1\lambda}(y)dy + \int_x^0 \sin[s(x-y)]\chi_{1\lambda}''(y)dy \quad (5.5.5)$$

yazılabilir. Sağ taraftaki ikinci integral için iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa ve (5.4.5)- (5.4.6) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_x^0 \sin[s(x-y)]\chi_{1\lambda}''(y)dy &= \sin[s(x-y)]\chi_{1\lambda}'(y) \Big|_x^0 + s \int_x^0 \cos[s(x-y)]\chi_{1\lambda}'(y)dy \\ &= \sin(sx)\chi_{1\lambda}'(0) + s \left\{ \cos[s(x-y)]\chi_{1\lambda}(y) \right\} \Big|_x^0 - s^2 \int_x^0 \sin[s(x-y)]\chi_{1\lambda}(y)dy \\ &= \sin(sx) \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \chi_{2\lambda}'(0) + \frac{(s^2\delta_1 + \delta_2)}{\gamma_1} \chi_{2\lambda}(0) \right\} + s [\cos(sx)\chi_{1\lambda}(0) - \chi_{1\lambda}(x)] \\ &\quad - s^2 \int_x^0 \sin[s(x-y)]\chi_{1\lambda}(y)dy \end{aligned}$$

elde edilir. Sonucu eşitlik (5.5.5) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_x^0 \sin[s(x-y)]q(y)\chi_{1\lambda}(y)dy &= \sin(sx) \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \chi_{2\lambda}'(0) + \frac{(s^2\delta_1 + \delta_2)}{\gamma_1} \chi_{2\lambda}(0) \right\} \\ &\quad + s [\cos(sx)\chi_{2\lambda}(0) - \chi_{1\lambda}(x)] \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \chi_{1\lambda}(x) &= \chi_{2\lambda}(0)(\cos(sx)) + \frac{1}{\gamma_1 s} \left[\gamma_2 \chi_{2\lambda}'(0) + (s^2\delta_1 + \delta_2) \chi_{2\lambda}(0) \right] (\sin(sx)) \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^x (\sin[s(x-y)])q(y)\chi_{1\lambda}(y)dy \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\chi_{2\lambda}(x)$ de hesaplanır. Elde edilen eşitliklerde x değişkenine göre türev alınırsa türev denklemleri de elde edilir.

5.5.3. Lemma: Kabul edelim ki $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ olsun. $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ ve $|\lambda| \rightarrow \infty$ olduğunda $\phi_{j\lambda}(x)$ ($j=1,2$) fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir. ($k=0$ ve $k=1$ için)

$$\phi_{1\lambda}^{(k)}(x) = O(|s|^k e^{|t|(x+1)}) \quad (5.5.5)$$

$$\phi_{1\lambda}^{(k)}(x) = (\cos[s(x+1)])^{(k)} + O\left(|s|^{k-1} e^{|t|(x+1)}\right) \quad (5.5.6)$$

$$\phi_{2\lambda}^{(k)}(x) = O\left(|s|^{k+1} e^{|t|(x+1)}\right) \quad (5.5.7)$$

$$\phi_{2\lambda}^{(k)}(x) = -s \frac{\delta_1}{\gamma_2} \cos s (\sin(sx))^{(k)} + O\left(|s|^{-k} e^{|t|(x+1)}\right) \quad (5.5.8)$$

İspat: Burada sadece (5.5.7) ve (5.5.8) asimptotik ifadelerinin ispatları verilecektir:

(5.5.6) ifadesinden,

$$\phi_{1\lambda}(0) = \cos s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) \quad (5.5.9)$$

$$\phi'_{1\lambda}(0) = -s \sin s + O(e^{|t|}) \quad (5.5.10)$$

yazılabilir. Bu denklemler (5.5.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \phi_{2\lambda}(x) = & \cos s \cos(sx) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin s \sin(sx) - \left(\frac{(s^2 \delta_1 + \delta_2)}{\gamma_2 s} \cos s \sin(sx) \right) + \frac{1}{s} \int_0^x \sin[s(x-y)] q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy \\ & + \cos(sx) O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2 s} \sin(sx) O(e^{|t|}) - \frac{(s^2 \delta_1 + \delta_2)}{\gamma_2 s} \sin(sx) O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$F_{2\lambda}(x) = s^{-1} e^{-|t|(x+1)} \phi_{2\lambda}(x)$$

dersek ve kompleks analizden iyi bilinen

$$\sin(sx) = O(e^{|t|x}) \quad \cos(sx) = O(e^{|t|x})$$

asimptotik eşitliklerden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} F_{2\lambda}(x) = & \frac{1}{s} e^{-|t|(x+1)} \left\{ \cos s \cos(sx) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin s \sin(sx) - \left(\frac{(s^2 \delta_1 + \delta_2)}{\gamma_2 s} \cos s \sin(sx) \right) \right\} \\ & + \left| \frac{1}{s} \right| \int_0^x \sin[s(x-y)] q(y) e^{-|t|(x-y)} F_{2\lambda}(y) dy + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \end{aligned}$$

olur.

$$\text{Şimdi } F_2(\lambda) = \max_{0 \leq x \leq 1} |F_{2\lambda}(x)| \text{ dersek,}$$

$$F_2(\lambda) \leq \frac{1}{|s|} + \left| \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right| \frac{1}{|s|} + \frac{\delta_1}{|\gamma_2|} + \frac{\delta_2}{|\gamma_2|} \frac{1}{|s|^2} + \frac{1}{|s|^2} \int_0^1 |q(y)| F_2(\lambda) dy + \frac{M}{|s|}$$

elde edilir. Burada $M > 0$ olan bir sabittir. Buradan $F_2(\lambda) = O(1)$ olur. Dolayısıyla,

$$\phi_{2\lambda}(x) = O\left(|s| e^{|t|(x+1)}\right) \quad (5.5.11)$$

asimptotik ifadesi elde edilir.

Şimdi (5.5.8) ifadesini ispatlayalım:

(5.5.2) formülünün sağ tarafındaki terimler ayrı ayrı değerlendirilecektir. İlk terim için (5.5.9) formülünden yararlanılarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\begin{aligned} \phi_{1\lambda}(0) \cos(sx) &= \left(\cos s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) \right) \cos(sx) \\ &= \left(O(e^{|t|}) + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) \right) O(e^{|t|x|}) \\ &= O(e^{|t|(x+1)}) \end{aligned}$$

İkinci terim için (5.5.9)- (5.5.10) formüllerinden yararlanılarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_2 s} \left(\gamma_1 \phi_{1\lambda}'(0) - (s^2 \delta_1 + \delta_2) \phi_{1\lambda}(0) \sin(sx) \right) &= \frac{1}{\gamma_2 s} \left\{ \gamma_1 \left(-s \sin s + O(e^{|t|}) \right) - (s^2 \delta_1 + \delta_2) \left(\cos s + O(e^{|t|}) \right) \right\} \sin(sx) \\ &= -s \frac{1}{\gamma_2} \cos s \sin(sx) + O\left(e^{|t|(x+1)}\right) \end{aligned}$$

(5.5.11) asimptotik eşitliğinden,

$$|\phi_{2\lambda}(x)| \leq M |s| e^{|t|(x+1)}$$

olacak şekilde x ve λ dan bağımsız $M > 0$ sabiti mevcuttur. O halde,

$$\left| \frac{1}{s} \int_0^x \sin[s(x-y)] q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy \right| \leq \left\{ M \int_0^1 |q(y)| dy \right\} e^{|t|(x+1)}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan,

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin[s(x-y)] q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy = O(e^{|t|(x+1)})$$

olduğu görülür.

Asimptotik ifadeler (5.5.2) integral denkleminde ($k = 0$ için) yerine yazılırsa,

$$\phi_{2\lambda}(x) = -s \frac{\delta_1}{\gamma_2} \cos s \sin(sx) + O\left(e^{|t|(x+1)}\right)$$

eşitliği bulunur. Böylece (5.5.8) ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

5.5.4. Lemma: $\lambda = s^2$, $\text{Im } s = t$ olmak üzere $\chi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ çözüm fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir.

$$\chi_{1\lambda}^{(k)}(x) = O\left(|s|^{k+3} e^{|t|(1-x)}\right) \quad (5.5.12)$$

$$\chi_{1\lambda}^{(k)}(x) = -s^3 \frac{\delta_1}{\gamma_1} \cos(s) (\sin(sx))^{(k)} + O\left(|s|^{k+2} e^{|t|(1-x)}\right) \quad (5.5.13)$$

$$\chi_{2\lambda}^{(k)}(x) = O\left(|s|^{k+2} e^{|t|(1-x)}\right) \quad (5.5.14)$$

$$\chi_{2\lambda}^{(k)}(x) = -s^2 (\cos s(x-1))^{(k)} + O\left(|s|^{k+1} e^{|t|(1-x)}\right) \quad (5.5.15)$$

İspat: Burada sadece (5.5.14) ve (5.5.15) ifadelerinin ispatları verilecektir.

(5.5.4) ifadesinden,

$$\chi_{2\lambda}(x) = s\alpha \sin[s(x-1)] + \cos[s(x-1)](\beta - s^2) - \frac{1}{s} \int_x^1 \sin[(x-y)]q(y)\chi_{2\lambda}(y)dy \quad (5.5.16)$$

dir.

$$G_{2\lambda}(x) = s^{-2} e^{-|t|(1-x)} \chi_{2\lambda}(x) \text{ dersek,}$$

$$G_{2\lambda}(x) = s^{-2} e^{-|t|(1-x)} \left\{ s\alpha \sin[s(x-1)] + \cos[s(x-1)](\beta - s^2) \right\} \\ - \frac{1}{s} \int_x^1 \sin[(x-y)]q(y)e^{|t|(x-y)}G_{2\lambda}(y)dy$$

olur.

$$G_2(\lambda) = \max_{x \in [0,1]} |G_{2\lambda}(x)| \text{ alırsak,}$$

$$G_2(\lambda) \leq \left| \frac{\alpha}{s} \right| + \frac{\beta}{|s|^2} + 1 + \frac{1}{|s|} \int_0^1 |q(y)| G_2(\lambda) dy$$

elde edilir. Buradan $G_2(\lambda) = O(1)$ olur. Dolayısıyla,

$$\chi_{2\lambda}(x) = O\left(|s|^2 e^{|t|(1-x)}\right) \text{ asimptotik ifadesi elde edilir.} \quad (5.5.17)$$

Şimdi (5.5.15) ifadesini ispatlayalım:

(5.5.16) denklemindeki integral ifadesi değerlendirilecektir. (5.5.17) asimptotik eşitliğinden,

$|\chi_{2\lambda}(x)| \leq R|s|^2 e^{|t|(1-x)}$ olacak şekilde x ve λ dan bağımsız $R > 0$ sabiti mevcuttur. O halde,

$$\left| \frac{1}{s} \int_x^1 \sin[s(x-y)] q(y) \chi_{2\lambda}(y) dy \right| \leq R|s| \int_0^1 |q(y)| dy e^{|t|(1-x)} \text{ eşitsizliği bulunur. Buradan,}$$

$$\frac{1}{s} \int_x^1 \sin[s(x-y)] q(y) \chi_{2\lambda}(y) dy = O(|s| e^{|t|(1-x)}) \text{ olduğu görülür.}$$

Asimptotik ifadeler (5.5.16) ifadesinde dikkate alınırsa,

$\chi_{2\lambda}(x) = -s^2 (\cos s(x-1)) + O(|s| e^{|t|(1-x)})$ eşitliği bulunur. Bu ise (5.5.15) in ispatıdır. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

5.6. $\omega(\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ Fonksiyonları için Asimptotik Açılımlar

5.6.1. Teorem: $\omega(\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir.

$$\omega(\lambda) = -s^4 \delta_1 \cos^2 s + O(|s|^3 e^{2|t|}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.6.1)$$

$$\Delta(\lambda) = -2s^4 \delta_1 \cos^2 s + O(|s|^3 e^{2|t|}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.6.2)$$

Burada $\lambda = s^2$, $\text{Im}s = t$ gösterilmiştir.

İspat: $W(\phi_{1\lambda}, \chi_{1\lambda}; x)$ wronskiyeni x den bağımsız olduğu için,

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \gamma_1 \omega_1(\lambda) = \gamma_1 (\phi_{1\lambda}(x) \chi'_{1\lambda}(x) - \phi'_{1\lambda}(x) \chi_{1\lambda}(x)) \\ &= \gamma_1 (\phi_{1\lambda}(-1) \chi'_{1\lambda}(-1) - \phi'_{1\lambda}(-1) \chi_{1\lambda}(-1)) \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

eşitliği sağlanır. $\phi_{1\lambda}(x)$ fonksiyonu (5.4.1) başlangıç şartını sağladığı için

$$\phi_{1\lambda}(-1) = 1, \quad \phi'_{1\lambda}(-1) = 0 \quad (5.6.4)$$

olur.

Ayrıca (5.5.13) formülünde $x = -1$ yazmakla

$$\chi_{1\lambda}(-1) = s^3 \frac{\delta_1}{\gamma_1} \cos s \sin s + O(|s|^2 e^{2|t|}) \quad (5.6.5)$$

$$\chi'_{1\lambda}(-1) = -s^4 \frac{\delta_1}{\gamma_1} \cos^2 s + O(|s|^3 e^{2|t|}) \quad (5.6.6)$$

asimptotik eşitlikleri elde edilir..

(5.6.4) , (5.6.5) ve (5.6.6) eşitlikleri (5.6.3) ifadesinde yerine yazılırsa $\omega(\lambda)$ fonksiyonu için

$$\omega(\lambda) = -s^4 \delta_1 \cos^2 s + O(|s|^3 e^{2|t|}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

formülü elde edilir.

Şimdi ise $\Delta(\lambda)$ için (5.6.2) asimptotik ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

(5.4.2) ve (5.4.5) başlangıç şartları dikkate alınır, (5.5.6) ve (5.5.15) formüllerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(0)\chi_\lambda(0) &= \phi_{1\lambda}(0)\chi_{2\lambda}(0) \\ &= \cos s + O\left(\frac{1}{s} e^{|t|}\right) \left[-s^2 \cos s + O(|s| e^{|t|}) \right] \\ &= -s^2 \cos^2 s + O(|s| e^{2|t|}) \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

(5.6.1) ve (5.6.7) asimptotik eşitlikleri $\Delta(\lambda) = \omega(\lambda) + (\lambda\delta_1 + \delta_2)\phi(0, \lambda)\chi(0, \lambda)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\Delta(\lambda) = -2s^4 \delta_1 \cos^2 s + O(|s|^3 e^{2|t|}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

formülü elde edilir.

5.7. Özdeğerlerin Asimptotik Açılımları

5.7.1. Teorem: (5.1.1) - (5.1.5) probleminin λ_n ($\lambda_n = S_n^2$) özdeğerleri için

$n \rightarrow \infty$ olduğunda aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir.

$$S'_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (5.7.1)$$

$$S''_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (5.7.2)$$

İspat: $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ olmak üzere

$\omega(\lambda) = -s^4 \delta_1 \cos^2 s + O(|s|^3 e^{2|t|})$ ifadesinin ilk terimini $\omega_1(\lambda) = -s^4 \delta_1 \cos^2 s$ ile ikinci terimini ise $\omega_2(\lambda) = O(|s|^3 e^{2|t|})$ ile gösterelim.

Kompleks düzlemde,

$$C'_n = \{s' \in \mathbb{C} \mid |s'| = (\pi(n+1))\}$$

eğrisi üzerinde yeteri kadar büyük n değerleri için

$$|\omega_1(\lambda)| > |\omega_2(\lambda)|$$

olduğu görülür. Buna göre Rouché teoremi gereği C'_n eğrisi içinde

$$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) + \omega_2(\lambda)$$

fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısına, her sıfır yeri katı sayıda hesaplamak kaydıyla, eşittir. Diğer taraftan C'_n eğrisi içerisinde $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısının $4n + 6$ olduğu açıktır. (Bu sıfır yerleri $\left\{0, 0, 0, 0, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, \dots, -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, +\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, +\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$ dir.) O

halde C'_{n+1} eğrisi C'_n eğrisi arasında $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun tam 4 tane $(4(n+1)+6-(4n+6)=4)$ sıfır yeri mevcuttur. Bunlardan 2 tanesinin reel pozitif eksen üzerinde, diğer 2 sinin ise reel negatif eksen üzerinde yerleştiği açıktır. O halde $\omega(\lambda)$ fonksiyonunda Rouché teoremi gereği C'_{n+1} eğrisi ile C'_n eğrisi arasında 2 si reel pozitif eksen, diğer 2 si ise negatif reel eksen üzerinde olmak kaydıyla tam 4 tane sıfır yeri mevcuttur.

$\omega_1(\lambda)$ fonksiyonu s değişkeninin çift fonksiyonu olduğundan sadece pozitif reel eksen üzerinde yerleşen sıfır yerlerini incelemek yeterlidir. $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonun C'_{n+1} eğrisi ile C'_n eğrisi arasında kalan pozitif sıfır yerlerini aşağıdaki gibi numaralandıralım. (iki dizi biçiminde)

$$\tilde{S}_n' = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tilde{S}_n'' = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Rouche teoremi gereği $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun C'_{n+1} eğrisi ile C'_n eğrisi arasında kalan pozitif sıfır yerleri $\{S'_n\}$ ve $\{S''_n\}$ gibi öyle iki dizi biçiminde sıralanabilir.

$$\left| S'_n - \tilde{S}'_n \right| < \frac{\pi}{2}, \quad \left| S''_n - \tilde{S}''_n \right| < \frac{\pi}{2} \text{ olur.} \quad (5.7.3)$$

$$S'_n - \tilde{S}'_n = \delta'_n, \quad S''_n - \tilde{S}''_n = \delta''_n \quad (5.7.4)$$

şeklinde gösterirsek

$$S'_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \delta'_n, \quad S''_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right) + \delta''_n \quad (5.7.5)$$

formülleri elde edilir.

Ayrıca (5.7.3) ve (5.7.4)' den

$$\left| \delta'_n \right| < \frac{\pi}{2}, \quad \left| \delta''_n \right| < \frac{\pi}{2} \quad (5.7.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

S'_n ve S''_n , $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerleri olduğundan, (5.7.5) ifadeleri $\omega(\lambda)$ da yerine yazılırsa, buradan

$$-|S'_n|^4 \delta'_1 \cos^2 \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \delta'_n \right) + O(|S'_n|^3) = 0 \quad (5.7.7)$$

ve

$$-|S''_n|^4 \delta''_1 \cos^2 \left(\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) + \delta''_n \right) + O(|S''_n|^3) = 0 \quad (5.7.8)$$

eşitlikleri bulunur. (5.7.7) eşitliği düzenlenirse,

$$\cos^2 \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \delta'_n \right) = O \left(\frac{1}{|S'_n|} \right) \quad (5.7.9)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\cos^2 \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \delta'_n \right) = \sin^2 \delta'_n$$

ve

$$O \left(\frac{1}{|S'_n|} \right) = O \left(\frac{1}{n} \right)$$

eşitliklerinden yararlanılırsa, (5.7.9) ifadesinden

$$\sin^2 \delta_n' = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.7.10)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Buradan (5.7.6) eşitsizlikleri gereği

$$\delta_n' = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.7.11)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (5.7.8) eşitliğinden

$$\delta_n'' = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.7.12)$$

eşitliği bulunur.

O halde (5.7.11) ve (5.7.12) eşitlikleri, (5.7.5) ifadesinde yerine konulursa

$$S_n' = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad S_n'' = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.7.13)$$

asimptotik formülleri elde edilir. Benzer biçimde $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerleri içinde aynı asimptotik eşitliklerin sağlandığı görülür. ($\Delta(\lambda)$ fonksiyonu ile $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun esas terimleri birbirinden sadece sabit 2 çarpanı ile farklı olduğu için)

5.8. Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formüller

5.8.1. Teorem: S_n' özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları $\phi_n^1(x)$ ile S_n'' özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları $\phi_n^2(x)$ ile gösterirsek, $\phi_n^1(x)$ ve $\phi_n^2(x)$ özfonksiyonlarının $n \rightarrow \infty$ için asimptotik davranışları

$$\phi_n^1(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & , x \in [-1, 0) \\ O\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\right) & , x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.8.1)$$

$$\phi_n^2(x) = \begin{cases} (-1)^n \sin\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & , x \in [-1, 0) \\ O\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\right) & , x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.8.2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu asimptotik eşitlikler $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için düzgün olarak geçerlidir.

İspat: Kesim 5.5. de bulunan (5.5.6) ve (5.5.8) formüllerinde λ yerine $(S'_n)^2$ yazılırsa, sırasıyla

$$\phi_{1n}^1(x) := \phi_1\left(x, (S'_n)^2\right) = \cos[S'_n(x+1)] + O\left(\frac{1}{|S'_n|}\right) \quad (5.8.3)$$

ve

$$\phi_{2n}^1(x) := \phi_2\left(x, (S'_n)^2\right) = -S'_n \frac{\delta_1}{\gamma_2} \cos S'_n \sin(S'_n x) + O(1) \quad (5.8.4)$$

formülleri elde edilir.

5.7.1 teoremindeki (5.7.1) formülü gereği $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{S'_n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.8.5)$$

asimptotik eşitliği sağlanır.

(5.8.3) ifadesindeki $\cos[S'_n(x+1)]$ teriminin asimptotik açılımını hesaplayalım.

Bunun için (5.7.1) ifadesi gereği,

$$\begin{aligned} \sin(S'_n) &= \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \cos O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \sin O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cos\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= (-1)^n + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (5.8.6)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\cos S'_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.8.7)$$

olur.

$$\begin{aligned}\sin(S'_n x) &= \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\cos O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \sin O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cos\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\cos O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sin O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

asimptotik ifadeleri kullanılırsa ,

$$\sin(S'_n x) = \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.8.8)$$

asimptotik formülü elde edilir. Diğer taraftan

$$\cos[S'_n(x+1)] = \cos(S'_n x + S'_n) = \cos(S'_n x)\cos S'_n - \sin(S'_n x)\sin S'_n$$

ifadesinde (5.7.1), (5.8.6), (5.8.7) ve (5.8.8) asimptotik formülleri kullanılırsa

$$\cos[S'_n(x+1)] = (-1)^{n+1} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.8.9)$$

asimptotik ifadesi elde edilir. (5.8.5) ve (5.8.9) formülleri (5.8.3) de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\phi_{1n}^1(x) = (-1)^{n+1} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.8.10)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. (5.7.1), (5.8.7) ve (5.8.8) ifadelerini (5.8.4) de yerine yazarsak,

$$\phi_{2n}^1(x) = O\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\right) \quad (5.8.11)$$

asimptotik ifadesi bulunur. O halde (5.8.10) ve (5.8.11) formülleri gereği istenen

$$\phi_n^1(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & , x \in [-1,0) \\ O\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\right) & , x \in (0,1] \end{cases}$$

asimptotik formülü elde edilir. Benzer şekilde (5.8.2) formülü de ispatlanabilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmamızda diferansiyel denklemi Sturm-Liouville denklemine benzeyen yeni bir sınır değer problemi araştırılmıştır.

İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemde $q(x)$ fonksiyonu sıfır noktasında süreksiz olduğundan sınır şartlarına ek olarak süreksizlik noktasında geçiş şartlarına ihtiyaç vardır. Bu yüzden iki geçiş şartı eklenmiştir.

Araştırdığımız sınır değer probleminin esas farklı özelliği λ özdeğer parametresinin denklem ve sınır koşullarıyla birlikte geçiş şartlarında da bulunmasıdır. Bu tip problemler birçok matematik ve fizik problemlerinde ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmamızda elde ettiğimiz tüm sonuçlar orjinaldir ve süreksiz katsayılı regüler Sturm-Liouville teorisine önemli katkılar sağlamaktadır.

İncelediğimiz sınır değer probleminde sıfır süreksizlik noktası olmak üzere $[-1,1]$ aralığını almamız, hiçbir şekilde genelliği bozmamaktadır. Çünkü uygun bir değişken değiştirme ile bu aralık $[a,b]$ kapalı aralığına dönüştürülebilir. Ayrıca birden fazla sonlu sayıda süreksizlik noktası olan problemler için de benzer yöntemler uygulanabilir.

Bu tez çalışmamızda araştırdığımız sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerinde ilk terimler bulunmuştur. Bu problem birçok yönden geliştirilebilir. Örneğin, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin en yüksek teriminin katsayısı süreksiz bir fonksiyon alınabilir, ağırlık fonksiyonu eklenebilir, sınır ve geçiş şartlarının hepsinde özdeğer parametre olabilir. Araştırdığımız problemde bulduğumuz sonuçlara ek olarak problemin Green fonksiyonu ve Rezolvent operatörü incelenebilir ve özfonksiyonlar sistemine açılım teoremleri verilebilir.

7. KAYNAKLAR

- Altınışık, N., 1998. Sınır Şartlarında Özdeğer Parametre Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi, Doktora Tezi, Samsun.
- Altınışık, N., Kadakal, M., Mukhtarov, O. Sh., 2004. Eigenvalues and Eigenfunctions of Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Acta Math Hungar, 102 (1-2), p. 159-174.
- Birkhoff, G. D., 1908. On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, Trans.Amer.Math. Soc., 9, p. 219-231.
- Birkhoff, G. D., 1908. Boundary Value and Exponent Problems of Ordinary Linear Differential Equations, Trans.Amer.Math. Soc., 9, p. 372-395.
- Fulton, C.T., 1977. Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Condition, Proc, Soc.Edinburg, 77A, P.293-308.
- Hıra, F., 2009. Birleştirilmiş Geçiş Şartlı Süreksiz Sınır Değer Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonlarının Asimptotik Açılımları, Yüksek lisans Tezi, Samsun.
- Hinton, D. B., 1979. An Expansion Theorem for Eigenvalue Problem with Eigenvalue Boundary Condition, Quart. J. Math. Oxford (2),30, 33-42.
- Kadakal, M., 2000. Sınır Şartlarının Birinde Özdeğer Parametresi Bulunduran Regüler Sınır Değer-Geçiş Problemi, Doktora Tezi, Samsun.
- Kerimov, N. B., Mamedov, Kh. K., 1999. On a Boundary Value Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Sibirsk. Math. J. 40, No:2, 281-290.
- Kobayashi, M., 1989. Eigenvalue of discontinuous Sturm-Liouville Problems with

- Symmetric Potentials, computers Math aplic, Vol. 18, 357-364 Lang,S,1983 Real Analysis (Second edition), Addision-wesley, Reading Mass.
- Marçenko, V.A., 1972. Sturm–Liouville Operatörünün Spektral Teorisi, Kiev, Naukova. Dumka, (Rusça.)
- Mukhtarov, O. Sh., 1990. Düzgün Fonksiyonların Geçiş Probleminin Özfonksiyonları ve Hesaplanış Fonksiyonları Üzerine Açılımı, Nekotorie Voprosi Teor, Nelin. Analiz. Vıp II, p. 103-115.
- Mukhtarov, O. Sh., 1994. Discontinuous Boundary Value Problems with Spectral Parameter in Boundary Condition, Tr, J. Math., 18, p.183-192.
- Mukhtarov, O. Sh., 1998. Bir Geçiş Probleminin Bazı Spektral Özellikleri, Viniti, No.1773 (Moskow).
- Naimark, M.A., 1967. Linear Differential Operators, Ungar, New York.
- Russakoskiy, E.M., 1975. Sınır Şartlarında Özdeğer Parametresinden Polinomal Şeklinde Bağımlı olan Sınır Değer Probleminin Operatör Yorumu, Funk. Analizi Eko Priloj. 9 No:4, 91-92 (Rusça).
- Schneider, A., 1974. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math.Z. 156, 163-167.
- Shkalikov, A. A., 1983. Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Condition, Trudy., Sem., Imeny, I. G. Petrovsgo, 9, 190-229.
- Tamarkin, J.D., 1928. Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansions of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions, Math. Z.,1-54, 27.
- Titchmarsh, E. C., 1939. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order

- Differential Equations I, 2nd end, Oxford Univ. Press London.
- Tunç, E. 2001. Bir Adi Diferansiyel Operatörün Bazı Spektral Özellikleri, Doktora Tezi, Samsun.
- Walter, J., 1973. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z. 133, 301-312.
- Yakubov, S.Y., 1994. Completeness of Root Functions of Regular Boundary Value Problems, Longman, Scientific, Technical.
- Yakubov, S. and Yakubov, Y., 1999. Abel Basis of Root Functions of Regular Boundary Value Problems, Math. Machr. 197, p. 157 - 187.
- Yakubov, S.Y. and Yakubov, Y.Y., 2000. Differential Operator Equations, Ordinary and Partrol Differential Equations, CRS, Pres.
- Zayed, E.M.E., Ibrahim, S.F.M., 1992. Regular Eigenvalue Problem with Eigenparameter in the Boundary Conditions, Bull. Cal. Math. Soc. 84, 379-393.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hülya GÜLTEKİN

Doğum Yeri : Ünye / ORDU

Doğum Tarihi : 30.09.1984

Medeni Hali : Bekar

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ondokuz Mayıs Süper Lisesi , 1998-2002

Lisans : O.M.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü , 2003-2007

Yüksek Lisans: O.M.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı , 2007-2010

İletişim Bilgileri:

Cep Telefonu: 0 543 598 07 74

e-posta : hulyagultekin55@hotmail.com