

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİKSEL SOYUTLAMA VE GENELLEME SÜREÇLERİNDE
GÖRSELLEŞTİRME VE ROLÜ

DOKTORA TEZİ

Rezan YILMAZ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Ziya ARGÜN
Yrd. Doç. Dr. Melike ÖZER KESKİN

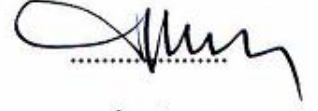
Ankara
Ocak, 2011

Rezan Yılmaz'ın 'Matematiksel Soyutlama ve Genelleme Süreçlerinde Görselleştirme ve Rolü' başlıklı tezi 11.01.2011 tarihinde, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda jürimiz tarafından Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

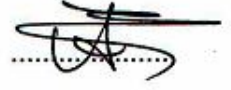
Adı Soyadı

İmza

Üye: Prof. Dr. Ziya Argün (Tez Danışmanı)



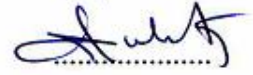
Üye: Prof. Dr. Ahmet Arıkan



Üye : Prof. Dr. Aysun Umay



Üye : Doç Dr. Safure Bulut



Üye : Doç. Dr. Musa Sarı



ÖNSÖZ

Doktora çalışmamın tüm aşamalarında bana değerli yardımlarıyla destek olan sayın danışmanım Prof. Dr. Ziya Argün hocama sonsuz teşekkür ediyorum. Ayrıca çalışmamın veri toplama ve analiz kısmındaki destekleriyle yanımda olan sayın hocam Yrd. Doç Dr. Melike Özer Keskin'e ve tez izleme süreçlerinde verdikleri fikirleriyle yardımcı olan sayın hocalarım, Prof. Dr. Ahmet Arıkan ve Doç Dr. Safure Bulut'a teşekkür ediyorum.

Doktora eğitiminin en başından itibaren her zaman yanımda olan sevgili eşim Ömer Yılmaz, abim Rıdvan Kızılkaya, annem Şükriye Kızılkaya, babam İsmail Kızılkaya ve canım çocuklarım Ömer Sina ve Mehmet Bera'ya çok teşekkür ediyorum.

Araştırmaya katılan Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğrencilerine çalışma sırasında verdikleri bilgiler ve gösterdikleri anlayış için teşekkür ediyorum.

Rezan YILMAZ

2011, Ankara

ÖZET

MATEMATİKSEL SOYUTLAMA VE GENELLEME SÜREÇLERİNDE GÖRSELLEŞTİRME VE ROLÜ

YILMAZ, Rezan

Doktora, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Tez Danışmanları: Prof. Dr. Ziya Argün ve Yrd. Doç. Dr. Melike Özer Keskin

Ocak 2011, 290 sayfa

Bu araştırmanın amacı, matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirmelerin yerini ve verilen görselleştirmelerin bu süreçlerdeki etkisini incelemektir. Bunun için, önce katılımcılara soyutlama ve genelleme yapmaya uygun matematiksel durumlar oluşturulmuş ve daha sonra görselleştirme olarak matematik eğitiminde çok kullanılan bir geometri yazılımı kullanılmıştır. Böylece katılımcıların bu süreçlerde hangi görselleştirmelere yer verdiği, bunları nasıl ortaya koydukları, ne tür görsel imajlara sahip oldukları ve son olarak kullanılan görselleştirmelerin bu süreçlere etkisi ve görsel imajlardaki değişim araştırılmıştır.

Araştırma, nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması (case study) ile yapılmıştır. Ders içi gözlemler ve yarı yapılandırılmış görüşmeler veri toplama metotları olarak kullanılmıştır. Çalışma pilot ve asıl uygulama şeklinde iki basamakta gerçekleşmiştir. Pilot uygulama, 2008-2009 öğretim yılı güz döneminde 4. sınıf öğrencisi 24 öğretmen adayının gözlenmesi sonucu 13 katılımcı ile yürütülmüştür. Asıl uygulama ise pilot uygulama sonucu seçilen 5 kişi ile yürütülmüştür.

Araştırmada her katılımcı ile dört görüşme yapılmıştır. İlk görüşmede, soyutlama sürecinde yer verilen görselleştirmeleri ve görsel imajları incelemek için katılımcılara 4 aşama içinde 9 durum, ikinci görüşmede genelleme süreci için 3 aşama içinde 4 durum verilmiştir. Üçüncü görüşmede soyutlama sürecinde, dördüncü görüşmede ise genelleme sürecinde kullanılan görselleştirmelerin etkisi ve görsel

imajlardaki değişimi görmek için durumlarla ilgili görselleştirmeler verilmiştir. Kullanılan görselleştirmelerde Geometers' Sketch Pad ve Maple bilgisayar programlarından faydalanılmıştır. Toplanan veriler kodlama teknikleri kullanılarak içerik analiziyle değerlendirilmiştir.

Bulgular, soyutlama ve genelleme yaparken görselleştirmelere sıklıkla ve farklı şekillerde başvurulduğunu ve farklı görsel imajlara sahip olunduğunu göstermektedir. Kullanılan görselleştirmeler kavramlar ve aralarındaki ilişkileri tamamlamada önemli bir role sahip olmuş, süreçlerin gelişimine gözle görünür olumlu etkilerde bulunduğu tespit edilmiş ve katılımcıların görsel imajlarını istenilen yönde güçlendirdiği ortaya çıkmıştır.

Bunların ışığında bu süreçleri daha anlaşılır hale getirmek için, görselleştirme ve görsel imajlarla ilgili matematik öğretimine yönelik ve ileride yapılacak bilimsel araştırmalara dair öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Soyutlama, genelleme, görselleştirme, görsel imaj, matematik, matematik eğitimi

ABSTRACT

VISUALIZATION IN MATHEMATICAL ABSTRACTION AND GENERALIZATION PROCESSES AND ITS ROLE

YILMAZ, Rezan

Doktorate, Mathematics Education

Thesis Advisors: Prof. Dr. Ziya Argün ve Assist. Prof. Dr. Melike Özer Keskin

January 2011, 290 pages

The purpose of this study was to investigate visualizations and their roles in mathematical abstraction and generalization processes. Therefore, this study examines which kinds of visualizations were utilized, what were the formats of these visualizations and what were the ways of using these visualizations, what types of visual images were presented by participants and finally, what were the effects of used visualizations on these processes along with the changes in the visual images.

The study employed case study technique which was a quantitative research method. Classroom observations and semi-structured interviews were data collection methods. The study was performed in two steps consisting of a pilot and main research. The pilot study was carried out with 13 participants selected from 24 undergraduate students during the Fall term in 2008-2009. The main research was conducted with 5 participants selected at the end of the pilot study.

Four interviews were conducted with each participant. In the first round, 9 cases were presented in four stages during the abstraction process and in the second round, 4 cases were presented in 3 stages during the generalization process to investigate which visualizations and visual images were employed. In the third round, visualizations were presented to determine the effects of visualizations and variations in the visual images in the abstraction process and the fourth round investigated the effects of visualizations and variations of visual images in the generalization process. Geometers' Sketch Pad

and Maple software were used for the visualizations. The collected data were coded and content analysis was performed.

The results of this study showed that the visualization was widely employed but in different styles and different visual images were presented in these processes. Visualizations had an important role on the relations between concepts, had positive effects on the development of both processes and caused significant variations in visual images.

In the light of the results, some suggestions were given about visualization and visual images to make clear these processes for mathematics learning and future academic researches.

Key words: Abstraction, generalization, visualization, visual image, mathematics, mathematics education

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
JÜRİ ÜYELERİNİN İMZA SAYFASI	ii
ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TABLolar LİSTESİ	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
 I. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Araştırmanın Amacı	3
1.3. Araştırmanın Önemi	4
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları	7
1.5. Araştırmanın Varsayımları	7
1.6. Araştırmadaki Tanımlar	8
 II. BÖLÜM	
İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	11
2.1. Soyutlama	11
2.1.1. Empirik Soyutlama	20
2.1.2. Sözde (Psodö) Empirik Soyutlama	21
2.1.3. Reflektif Soyutlama	21
2.2. Genelleme	28
2.2.1. Empirik Genişleme	30
2.2.2. Matematiksel Genişleme	30
2.2.3. Matematiksel Buluş	31
2.2.4. Genelleştirme Seviyeleri	32
2.2.4.1. Seviye-1 (Prosedürel Aktiviteler)	32
2.2.4.2. Seviye-2 (Prosedürel Anlama, Lokal Genelleştirme)	32
2.2.4.3. Seviye-3 (Kavramsal Anlama, Global Genelleştirme)	32
2.2.5. Genelleme Sınıflandırması	33
2.2.5.1. Genelleme Eylemleri	33
2.2.5.2. Refleksiyon Genellemeleri	37
2.3. Görselleştirme	41
2.3.1. İzomorfik Görselleştirme	51
2.3.2. Homomorfik Görselleştirme	52
2.3.3. Analogik Görselleştirme	53
2.3.4. Diagramatik Görselleştirme	54

III. BÖLÜM

YÖNTEM	56
3.1. Araştırma Modeli	56
3.1.1. Durum Çalışması (Case Study)	58
3.2. Katılımcılar	61
3.3. Verilerin Toplanması	65
3.3.1. Gözlemler	65
3.3.2. Görüşmeler	66
3.4. Verilerin Analizi	73
3.4.1. İçerik Analizi	73
3.4.2. Verilerinin Analizi Nasıl Yapıldı?	78

IV. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUM	89
4.1. Soyutlama ve Genelleme Süreçlerinde Başvurulan Görselleştirmeler ve Sahip Olunan Görsel İmajlar İle İlgili Bulgular ve Yorumlar	89
4.1.1. Soyutlama Süreci İle İlgili Bulgular ve Yorumlar	89
4.1.1.1. 1. Aşama	89
4.1.1.2. 2. Aşama	95
4.1.1.3. 3. Aşama	123
4.1.1.4. 4. Aşama	137
4.1.2. Genelleme Süreci İle İlgili Bulgular ve Yorumlar	140
4.1.2.1. 1. Aşama	140
4.1.2.2. 2. Aşama	161
4.1.2.3. 3. Aşama	163
4.2. Soyutlama ve Genelleme Süreçlerinde Kullanılan Görselleştirmelerin Etkileri İle İlgili Bulgular ve Yorumlar	166
4.2.1. Soyutlama Süreci İle İlgili Bulgular ve Yorumlar	166
4.2.1.1. 1. Aşama	166
4.2.1.2. 2. Aşama	169
4.2.1.3. 3. Aşama	179
4.2.1.4. 4. Aşama	183
4.2.2. Genelleme Süreci İle İlgili Bulgular ve Yorumlar	185
4.2.2.1. 1. Aşama	185
4.2.2.2. 2. Aşama	193
4.2.2.3. 3. Aşama	194

V. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER	197
5.1. Sonuçlar	197
5.1.1. Matematiksel Soyutlamada Görselleştirmelere Nasıl Başvurulmaktadır? ..	198
5.1.2. Matematiksel Soyutlama Sürecinde Ortaya Çıkan Görsel İmajlar Nelerdir?	201
5.1.3. Matematiksel Genellemede Görselleştirmelere Nasıl Başvurulmaktadır? ..	203
5.1.4. Matematiksel Genelleme Sürecinde Ortaya Çıkan Görsel İmajlar Nelerdir?	204
5.1.5. Matematiksel Soyutlamada Görselleştirmenin Etkileri Nelerdir?	205
5.1.6. Matematiksel Genellemede Görselleştirmenin Etkileri Nelerdir?	207
5.2. Öneriler	208
KAYNAKÇA	210

EKLER	217
EK 1 Soyutlama Süreci için Aşamalar İçinde Katılımcılara Verilen Durumlar...	217
EK 2 Genelleme Süreci İçin Aşamalar İçinde Katılımcılara Verilen Durumlar....	221
EK 3 Soyutlama Süreci İçin Katılımcılara Verilen Durumlara Ait Görselleştirme Örnekleri	224
EK 4 Genelleme Süreci İçin Katılımcılara Verilen Durumlara Ait Görselleştirme Örnekleri	229
EK 5 Reel Eksende Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Doğru Parçaları İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	230
EK 6 Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Doğru Parçaları İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	231
EK 7 Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Üçgenler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	232
EK 8 Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Dörtgenler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	233
EK 9 Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Çemberler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	234
EK 10 Uzayda Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Küreler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	235
EK 11 Uzayda Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Silindir Parçaları İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	236
EK 12 Uzayda Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Piramitler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	237
EK 13 Soyutlama Sürecinde Katılımcıların Başvurduğu Görselleştirme Çeşitleri	238
EK 14 Soyutlama Sürecinde Katılımcıların Sahip Olduğu Görsel İmaj Çeşitleri...	239
EK 15 Soyutlama Sürecinde Başvurulan Görselleştirme Çeşitlerinin Frekansları	240
EK 16 Soyutlama Sürecinde Sahip Olunan Görsel İmaj Çeşitlerinin Frekansları ..	241
EK 17 Birinci Görüşme Örnekleri	242
EK 18 Genelleme Süreci İçin Oluşturulan Şemanın Organizasyonu	253
EK 19 Genelleme Sürecinde Katılımcıların Başvurduğu Görselleştirme Çeşitleri	254
EK 20 Genelleme Sürecinde Katılımcıların Sahip Olduğu Görsel İmaj Çeşitleri ..	255
EK 21 Genelleme Sürecinde Başvurulan Görselleştirme Çeşitlerinin Frekansları	256
EK 22 Genelleme Sürecinde Sahip Olunan Görsel İmaj Çeşitlerinin Frekansları ..	257
EK 23 İkinci Görüşme Örnekleri	258
EK 24 Üçüncü Görüşme Örnekleri	264
EK 25 Dördüncü Görüşme Örnekleri	271

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. Genelleme Eylemleri (Ellis, 2007)	36
Tablo 2.2. Refleksiyon Genellemeleri (Ellis, 2007)	39
Tablo 3.1. Katılımcılara Ait Bilgiler	62
Tablo 3.2. Katılımcıların Lisans Öğrenimi Süresince Aldığı Dersler	63
Tablo 3.3. Katılımcıların Lisans Öğrenimi Süresince Aldığı Derslerdeki Başarıları ...	64
Tablo 3.4. Veri Toplama Süreci	65

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Soyutlama Sürecine Ait Şema ve Yapılanmaları (Dubinsky, 2000)	26
Şekil 2.2. Genelleme Sınıflandırması Şeması	40
Şekil 2.3. VA (Görselleştirme-Analiz) Modeli (Zazkis ve ark., 1996)	44
Şekil 2.4. Homomorfik Görselleştirme Örneği (Guzman, 2002)	53
Şekil 2.5. Çalışma Analizinin Organizasyon Şeması	69
Şekil 2.6. Soyutlamanın Aşamalı Organizasyonu	84
Şekil 4.1.1. Gönül'ün Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri	91
Şekil 4.1.2. Gönül'ün Soyutlamadaki 1. Durum Görüntüsü	91
Şekil 4.1.3. Özge'nin Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri	92
Şekil 4.1.4. Mert'in Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri	93
Şekil 4.1.5. Filiz'in Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri	94
Şekil 4.1.6. Filiz'in Soyutlamadaki 1. Durum Görüntüsü	94
Şekil 4.1.7. Tarık'ın Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri	95
Şekil 4.1.8. Özge'nin Soyutlamadaki 2. Durum Temsilleri	96
Şekil 4.1.9. Mert'in Soyutlamadaki 2. Durum Temsilleri	97
Şekil 4.1.10. Tarık'ın Soyutlamadaki 2. Durum Temsilleri	98
Şekil 4.1.11. Gönül'ün Soyutlamadaki 2. Durum Temsilleri	99
Şekil 4.1.12. Gönül'ün Soyutlamadaki 2. Durum Görüntüsü	100
Şekil 4.1.13. Filiz'in Soyutlamadaki 2. Durum Temsilleri	101
Şekil 4.1.14. Özge'nin Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri	102
Şekil 4.1.15. Özge'nin Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü	103
Şekil 4.1.16. Mert'in Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri	103
Şekil 4.1.17. Mert'in Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü	104
Şekil 4.1.18. Tarık'ın Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri	104
Şekil 4.1.19. Gönül'ün Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri	105
Şekil 4.1.20. Gönül'ün Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü	105
Şekil 4.1.21. Filiz'in Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri	106

Şekil 4.1.22. Özge'nin Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri	108
Şekil 4.1.23. Mert'in Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri	109
Şekil 4.1.24. Tarık'ın Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri	109
Şekil 4.1.25. Gönül'ün Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri	110
Şekil 4.1.26. Gönül'ün Soyutlamadaki 4. Durum Görüntüsü	111
Şekil 4.1.27. Filiz'in Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri	111
Şekil 4.1.28. Özge'nin Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri	113
Şekil 4.1.29. Mert'in Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri	114
Şekil 4.1.30. Tarık'ın Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri	115
Şekil 4.1.31. Gönül'ün Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri	116
Şekil 4.1.32. Filiz'in Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri	117
Şekil 4.1.33. Özge'nin Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri	118
Şekil 4.1.34. Özge'nin Soyutlamadaki 6. Durum Görüntüsü	119
Şekil 4.1.35. Mert'in Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri	120
Şekil 4.1.36. Gönül'ün Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri	121
Şekil 4.1.37. Filiz'in Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri	122
Şekil 4.1.38. Tarık'ın Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri	122
Şekil 4.1.39. Özge'nin Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri	124
Şekil 4.1.40. Mert'in Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri	124
Şekil 4.1.41. Mert'in Soyutlamadaki 7. Durum Görüntüsü	125
Şekil 4.1.42. Tarık'ın Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri	125
Şekil 4.1.43. Gönül'ün Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri	126
Şekil 4.1.44. Gönül'ün Soyutlamadaki 7. Durum Görüntüsü	127
Şekil 4.1.45. Filiz'in Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri	128
Şekil 4.1.46. Özge'nin Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri	129
Şekil 4.1.47. Mert'in Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri	130
Şekil 4.1.48. Mert'in Soyutlamadaki 8. Durum Görüntüsü	130
Şekil 4.1.49. Gönül'ün Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri	131
Şekil 4.1.50. Filiz'in Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri	132
Şekil 4.1.51. Tarık'ın Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri	132
Şekil 4.1.52. Özge'nin Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri	134
Şekil 4.1.53. Mert'in Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri	134
Şekil 4.1.54. Tarık'ın Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri	135
Şekil 4.1.55. Gönül'ün Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri	136

Şekil 4.1.56. Filiz'in Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri	137
Şekil 4.1.57. Özge'nin Genellemedeki 1. Durum Temsilleri	141
Şekil 4.1.58. Mert'in Genellemedeki 1. Durum Temsilleri	141
Şekil 4.1.59. Mert'in Genellemedeki 1. Durum Görüntüsü	142
Şekil 4.1.60. Tarık'ın Genellemedeki 1. Durum Temsilleri	142
Şekil 4.1.61. Gönül'ün Genellemedeki 1. Durum Temsilleri	143
Şekil 4.1.62. Gönül'ün Genellemedeki 1. Durum Görüntüsü	144
Şekil 4.1.63. Filiz'in Genellemedeki 1. Durum Temsilleri	145
Şekil 4.1.64. Filiz'in Genellemedeki 1. Durum Görüntüsü	145
Şekil 4.1.65. Özge'nin Genellemedeki 2. Durum Temsilleri	146
Şekil 4.1.66. Mert'in Genellemedeki 2. Durum Temsilleri	147
Şekil 4.1.67. Mert'in Genellemedeki 2. Durum Görüntüsü	148
Şekil 4.1.68. Tarık'ın Genellemedeki 2. Durum Temsilleri	149
Şekil 4.1.69. Gönül'ün Genellemedeki 2. Durum Temsilleri	150
Şekil 4.1.70. Gönül'ün Genellemedeki 2. Durum Görüntüsü	150
Şekil 4.1.71. Filiz'in Genellemedeki 2. Durum Temsilleri	151
Şekil 4.1.72. Filiz'in Genellemedeki 2. Durum Görüntüsü	152
Şekil 4.1.73. Özge'nin Genellemedeki 3. Durum Temsilleri	154
Şekil 4.1.74. Özge'nin Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü	154
Şekil 4.1.75. Mert'in Genellemedeki 3. Durum Temsilleri	155
Şekil 4.1.76. Tarık'ın Genellemedeki 3. Durum Temsilleri	157
Şekil 4.1.77. Tarık'ın Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü	157
Şekil 4.1.78. Gönül'ün Genellemedeki 3. Durum Temsilleri	158
Şekil 4.1.79. Gönül'ün Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü	159
Şekil 4.1.80. Filiz'in Genellemedeki 3. Durum Temsilleri	160
Şekil 4.1.81. Filiz'in Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü	160
Şekil 4.1.82. Özge'nin Genellemedeki 4. Durum Temsilleri	162
Şekil 4.1.83. Özge'nin Genellemedeki 5. Durum Görüntüsü	164
Şekil 4.2.1. Özge'nin Soyutlamadaki 1. Durum Görüntüsü	167
Şekil 4.2.2. Özge'nin Soyutlamadaki 2. Durum Görüntüsü	169
Şekil 4.2.3. Filiz'in Soyutlamadaki 2. Durum Görüntüsü	171
Şekil 4.2.4. Özge'nin Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü	172
Şekil 4.2.5. Özge'nin Soyutlamadaki 5. Durum Görüntüsü	176
Şekil 4.2.6. Filiz'in Soyutlamadaki 5. Durum Görüntüsü	177

Şekil 4.2.7. Filiz'in Soyutlamadaki 7. Durum Görüntüsü	180
Şekil 4.2.8. Filiz'in Genellemedeki 2. Durum Görüntüsü	189
Şekil 4.2.9. Övgü'nün Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü	190
Şekil 4.2.10. Mert'in Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü	191

I. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde araştırma probleminin durumu, araştırmanın amacı, önemi, varsayımları, sınırlılıkları ile araştırmada geçen temel tanımlar verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Matematiksel düşünmenin ne olduğu, matematikçilerin zihinlerinde nasıl fonksiyonlaştığı, öğrencilerin nasıl teşvik edilip bu çeşit düşüncenin zihinlerindeki gelişiminin ilerletilebileceği matematik eğitimi içinde ciddi şekilde tartışılmıştır (Tall, 1991). Matematiğin öğretiminde matematiksel düşünmenin önemi ile ilgili matematik eğitimi araştırmalarında artan bir ilgi görülmektedir. İleri matematik öğrenen öğrencilerde gözlenen ortak güçlük, matematiksel kavramların “çok soyut” olmasından şikayet etmeleridir. Çoğu öğrenci soyut matematiksel kavramları ve ilişkileri anlamakta zorluk çekmektedirler. Bunun en önemli sebeplerinden birisi ise genelleme ve soyutlamanın doğasının yanlış anlaşılmasından kaynaklanmaktadır (Ferrari, 2003; Hampton, 2003; Mitcelmore, 2002).

Genelleme bireysel bilgi yapısının gelişmesini içerirken, soyutlama zihinsel yapılanmanın yeniden kurulmasını içerir. Öğrencinin kavramın ne olduğunu anlayabilmesi için sayılara değil, sayılar arasında var olan ilişkiye odaklanma gereksinimi vardır ve benzer durum fonksiyon, grup ve vektör uzayı gibi diğer kavramlar içinde geçerlidir (Tall, 1991).

Soyutlama her şeyden önce yapısal bir süreçtir, matematiksel yapılardan zihinsel yapıların kurulması ve zihinsel yapılardan matematiksel yapıların kurulmasıdır. Bu süreç, uygun özelliklerin ve ilişkilerin ayrımına bağlıdır. Odaklanmayı nesnelerin

kendisinden nesnelerin özellik ve ilişkilerinin yapısına kaydırma yeteneğini gerektirir. Görsel imajlar (bireyin duyularına ve algılama birikimine bağlı olarak yapılanan, nesnelerin ve olayların zihindeki karşılıkları) genelde globaldir ve yapısal yönleri vurgularlar. Bu yüzden eğer uygun görsel imaj oluşturulabilirse, bu imajların, öğrencilerin soyutlama ile meşgul olmasına yardım etmesi mümkündür. İyi bilinen sonsuz sıralı domino taşlarının ki bu bir görsel araçtır, matematiksel tümevarım için uygun bir model olduğu ifade edilmektedir (Tall, 1991). Bütün tümevarım süreçleriyle tamamen ortak özellikleri içerir ve bunu yaparken de bunların yapısındaki ortak özellikleri sergiler. Mesela, bir taş düştüğünde, diğerini de düşürür ve bu bütün sıralı taşlardaki herhangi bir yer olabilir. Bu yüzden birisi düştüğünde sadece ondan sonra gelen düşmez, onu takip eden bütün taşlar düşer ve her biri bir sonrakinin düşmesine neden olur. Domino taşları resmi, tümevarımla ilgili elemanları içerir; burada konu dışı özelliklerin çoğu yoktur. Bütün süreçlerin yapısına global tek bir varlık olarak egemen olur. Hiç kuşkusuz böyle bir görsel imaj, öğrencilerin zihinsel temsil çıkarımlarını inşa etmelerine yardım eder ve güçlendirir. Bununla birlikte soyut matematiksel kavramlar için uygun görsel modellerin olmadığı, eksik olduğu veya yanıltıcı olduğu durumlarda vardır ve böyle durumlarda alıştırmaya yapmaya özen gösterilmek zorundadır. Görsel olarak desteklenmiş soyutlamanın ayrıntılı bir incelemesi Kautschitsch (1988) tarafından rapor edilmiştir.

Matematik, gerçek durumlardan soyutlananları betimleme ve nesnelleme ile ilgilenen bir alandır ve deneyimlerle anlamlı olduğu bilinen betimlemelerin çoğu görsel olarak ortaya çıkmaktadır (Bishop, 1989). Görselleştirme, matematiksel anlamada, kavramada ve muhakemede önemli bir bakıştır. Dolayısıyla görselleştirme sadece verileri anlamlı yapılar olarak organize etmekle kalmaz aynı zamanda çözümün analitik gelişimine rehberlik etmesi bakımından da önemli bir faktördür (Fishbein, 1987). Tall (1991), matematikte başarılı olmada kavramların zengin zihinsel temsillerine sahip olmanın çok önemli katkısı olduğunu vurgulamaktadır.

Görselleştirme, matematiksel düşünmenin sadece doğuşunda değil aynı zamanda matematiksel objeler arasındaki yeni ilişkilerin keşiflerinde ve tabi ki, matematiksel aktivitelere uygun iletim ve iletişim süreçlerinde bu anlamda tamamiyle doğal bir süreçtir (Guzman, 2002).

Görsel düşünme her zaman matematikçilerin düşünmesinde, öğrencilerin matematiksel deneyimlerindeki kadar olmasa da önemli bir bölüm olarak yer almıştır (Hadamard, Thornton 2000 de). Hershkowitz (1989), problem çözme esnasında bazı matematikçilerin kelime, cebirsel veya diğer sembolleri kullanmaktan sakındıkları, bunun yerine sezgilerinin temelinde uzamsal ve diğer imajları biraraya getirip daha sonra bunları sembolik terimler olarak kodladıklarını ifade etmiştir.

Einstein, (Hadamard, 1954):

‘Kelimeler ve dil, yazılı veya sözlü olarak benim düşünmemde hiçbir rol oynamamaktadır. Benim için düşünmenin elemanları olan az veya çok netlikteki psikolojik yapılanmalar, özgürce üretilen ve biraraya getirilen belirli işaret ve resimler önemlidir.’

demektedir.

Matematiksel güç hem matematiksel objeler ve kavramlar arasında hem de matematik ve fiziksel dünya arasında ilişki kurma kapasitesini gerektirmektedir. Görsel düşünme her ne kadar somut imajlar, örüntü imajları ve dinamik imajlar şeklinde olsa da, öğrencilerin matematiksel güçlerinin gelişiminde önemli bir role sahiptir (Thornton, 2000).

Okul matematiğinde, son zamanlarda dile getirilen ve görselleştirmenin rolünün yeniden değerlendirilmesi gerektiği ile ilgili en az üç neden bulunmaktadır (Thornton, 2000). Bunlardan ilki, matematiksel düşünmeyi geliştirme potansiyeline sahip ve matematiği örüntü çalışmak olarak gören akımdır. İkincisi, matematiğin farklı alanlarında ilişki kurma sürecinde, problem çözme ve matematiksel sonuçların gelişiminde basit, şık ve güçlü yaklaşımları görselleştirmenin sağlamasıdır. Üçüncüsü ve sonuncusu ise, matematiksel durumlara bakış için tekniklerin bir repertuarını geliştirmede öğrenenlere yardım etmek ve farklı öğrenme stillerini farkedip değerlendirmedeki önemidir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada, matematik yaparken sık sık zihnimizde gerçekleşen süreçlerden *‘matematiksel soyutlama ile genelleme yaparken başvurulmuş görselleştirmelerin neler*

olduğu, bu süreçte katılımcıların görseleştirmeyi ne derecede ve nasıl kullandıkları, hangi görsel imajlara yer verdikleri ve bu süreçlerin gelişiminde verilen görseleştirmenin etkilerinin neler olduğu' araştırılacaktır. Bunun için

- Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde başvurulanan görseleştirmeler ve sahip olunan görsel imajlar,
- Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde kullanılan görseleştirmelerin etkileri

incelenecektir.

Belirlenen problem cümlesi doğrultusunda araştırmanın alt problemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- Matematiksel soyutlama sürecinde görseleştirmelere nasıl başvurulmaktadır?
- Matematiksel soyutlama yapılırken sahip olunan görsel imajlar nelerdir?
- Matematiksel genelleme sürecinde görseleştirmelere nasıl başvurulmaktadır?
- Matematiksel genelleme yapılırken sahip olunan görsel imajlar nelerdir?
- Matematiksel soyutlama yapılırken kullanılan görseleştirmenin etkileri varsa nelerdir ve bu etkiler ne şekilde gerçekleşmektedir?
- Matematiksel genelleme yapılırken kullanılan görseleştirmenin etkileri varsa nelerdir ve bu etkiler ne şekilde gerçekleşmektedir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Matematik öğretiminin etkili yollarından birisinin matematik yaptırma olduğu matematik eğitimcileri tarafından ifade edilmektedir. Matematik yaptırma yöntemlerinin ise soyutlama, genelleme, sembolleştirme, modelleme ve ispat olduğu belirtilmektedir. Bu yöntemlerden soyutlama ve genellemenin öğretimdeki önemi ise bilinmektedir. Önemli fakat bir o kadar da öğrenciler tarafından zor kabul edilen bu süreçlerin incelenip geliştirilebilmesi ve böylece yaşanan zorlukların azaltılabilmesi matematik eğitimi açısından gereklidir.

Matematiksel soyutlamanın ve genellenmenin kalıcı olarak yerleşmesi ve bunun için uygun yöntemlerin belirlenmesi için pek çok çalışma yapılmıştır. Ancak, hakkında bilgi sahibi olunması gereken bu meseleye teorik bir cevap hala bulunamamıştır. Bulunabilecek bir cevap, araştırmacılar ve öğretmenler için büyük değer teşkil edecektir (Mitcelmore ve White, 2004).

Herhangi bir matematiksel nesne veya süreç hakkında konuşulurken ya da düşünülürken, zihinde bir şeylerle ilişkilendirilir. Bunlar o nesne ya da kavramın zihnimizdeki temsilleridir. Bu nedenle kavramların çok sayıda bağlantılı görüntülerini içeren zengin temsillerine sahip olmak matematikte başarıyı artıracaktır. Bir öğrenci matematiksel durumlardan bilinçlice soyutlamalar yapma yeteneğini geliştirirse ileri matematiksel düşünmeyi geliştirmiştir denebilir. Soyutlama, matematiksel nesneler arasındaki ilişkileri belirleyip, belirlenen bu ilişkileri matematiksel nesnelerden bağımsız hale getirerek zihinde uygun bir şekilde yapılandırma süreci olduğuna göre eğer uygun görseller bulunabilirse bu görseller öğrencilerin soyutlama ile meşgul olmasına kesinlikle yardım edecektir. Bu tür görseller, öğrencilerin zihinsel temsil ve çıkarımlarını inşa etmelerine yardım edip güçlendirecektir (Tall, 1991).

Krutetski (1976) üstün yetenekli öğrenciler üzerinde yaptığı çalışmada, matematiksel görselleştirmenin öğrencilerce çokça tercih edildiğini ve aynı zamanda görsel metodların öğrencilerin matematiksel problemleri çözmeleri sırasında başvurdukları bir yöntem olduğunu ileri sürmektedir. Görsellemeyi kullanan öğrencilerin bazen soyut ve somut arasındaki sentezi sadece bu şekilde yaptıklarından ve görsel bir imajın belirli bir genellemesinin bu şekilde olduğundan bahsetmektedir. Bu şekilde düşünen öğrencilerin bir problemi genel bir düzlem üzerinde yorumlama ihtiyacı hissettiklerini ve bu düzlemi de bu şekildeki imajlarla desteklediklerin bahsetmektedir. Ayrıca yetenekli öğrencilerin daha az yetenekli öğrencilere göre görsel imajlarını düşünmeleri ile bağdaştırdıklarını, bunları somut bir düzleme taşıyıp problemin yorumlamasını genel bir formda ele aldıklarını söylemektedir.

Görselleştirme betimleme yapmak amacıyla resimlerin, imajların, diyagramların zihnimizde, kağıt üzerinde veya teknolojik araçlarla yansıması, kullanımı, yorumlanması, yaratımının bir ürünü, süreci ve yeteneği, yapılandırmanın, temsillemenin ve zihinsel imajlar dönüşümünün karmaşık bir sürecidir (Bishop, 2003;

Zimmermann ve Cunningham, 1991; Hershkowitz, 1989; Wheatley 1998). Daha önceden bilinmeyen fikirler ve düşünme sırasında ortaya çıkabilecek anlamalar hakkında bilgiler arasında bağlantı kurma sırasında ortaya çıkabilir.

Matematik öğreniminde görselleştirmenin önemli bir rol oynadığı ile ilgili genel ve yaygın bir kanı vardır. Ben-Chaim ve arkadaşları (1989), indüktif, dedüktif ve orantılı usa vurmanın gelişiminde görselleştirmenin rolüne dikkat çekmişlerdir. Bu rol görselleştirmenin, düşünmenin somuttan soyuta dönüşümünü gerçekleştirmek için çoğu süreçlerin bir merkezi bileşeni olduğu şeklindedir. Wheatly (1991), süreçlere dayalı imgelerin matematiksel bilgileri ve fikirleri kullanmada önemli bir rolü olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ona göre, görselleştirmenin diğer bir faydası da bireylerde çok boyutlu düşünebilme yetisini geliştirmesidir. Bu anlamda, kişiler olaylara farklı açıdan bakarak fikir alışverişi yapabilme ile toplu tartışma bilinci de kazanacaklardır.

Matematik problemlerinin çözümünde görsel imajların rolü, eğitim araştırmaları içinde aktif bir yere sahiptir (Stylianou, 2001). Sadece matematiksel problemleri çözmede değil aynı zamanda her seviyedeki matematiğin öğrenimi ve öğretiminde görselleştirme üzerinde yapılan araştırmalara büyük gereksinim vardır (Presmeg, 2006).

Matematik eğitiminde görselleştirme konusunda fazla olmamakla beraber çalışmalar yapılmaktadır. Ancak, ulaşılabilen çalışmalar arasında matematiksel düşünme süreçlerini soyutlama ve genelleme açısından inceleyen bir araştırmaya rastlanmamıştır. Presmeg, görselleştirme konusunda yaptığı çalışmalar sonucunda bu süreçlerin gelişiminde görselleştirmeyi incelemenin önemli bir araştırma problemi olacağını vurgulamış ve dikkat çekmiştir (Presmeg, 2006). Bu nedenle, nitel şekilde yapılan bu araştırmada düşünme süreçlerinin bütüncül bir yaklaşımla incelenmesi, matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirmenin yerini, ilişkilerini ve etkilerini görmek adına matematik eğitimindeki bu boşluğu dolduracak ve önemli bir basamak olacaktır. Bu çalışmadan elde edilebilecek sonuçların matematik eğitimcilerinin görselleştirme konusunda bilinçlerinin artmasına ve böylece öğrencilerini matematiksel düşünme konusunda daha verimli şekilde desteklemelerine katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

- Araştırmanın çalışma grubunu, Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimi alan dördüncü sınıf öğrencileri arasından, 2008-2009 Eğitim ve Öğretim yılı Güz döneminde açılan bir derste gözlemlenmiş öğrencilerden gönüllülük ilkesine göre seçilenler oluşturmaktadır.
- Araştırma, gözlemlerin yapıldığı derse devam eden katılımcılardan seçilmiş 5 öğrencinin gösterdikleri performanslar ile sınırlıdır.
- Araştırma, katılımcıların cevaplaması için seçilen sorularla sınırlıdır.
- Dersteki sınıf ortamı yani katılımcıların birbirleriyle ve araştırmacıyla olan etkileşimleri, onların performanslarını olumlu ya da olumsuz yönde etkilemiş olabilir. Bu nedenle araştırma, bu ortam ile sınırlıdır. Benzer şekilde görüşme ortamındaki etkileşimler de katılımcıların performansını olumlu ya da olumsuz etkilemiş olabilir.
- Katılımcıların düşünme süreci ders saatiyle ve görüşme saatiyle sınırlıdır. Bazı katılımcılar daha fazla sürede daha farklı performanslar gösterebilirler.
- Araştırma, katılımcıların motivasyonları ile sınırlıdır.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

- Araştırmada katılımcıların derslerde ve görüşmelerde samimi, bilgileri ve düşünceleri dahilinde cevap verdikleri kabul edilmektedir. Katılımcıların istenmeyen etkenlerden eşit düzeyde etkilendikleri düşünülmektedir.
- Katılımcıların performanslarını olabildiğince iyi derecede sergiledikleri düşünülmektedir.
- Seçilen problemlerin öğrencilerin soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirmeyi ne derece ve nasıl kullandıklarını gösterecek ve etkilerini ortaya çıkaracak nitelikte olduğu varsayılmaktadır.
- Araştırmacının veri toplama ve analiz süreçlerinde yansız davrandığı, katılımcıların düşüncelerini etkilemekten kaçınmış olduğu varsayılmaktadır.

1.6. Araştırmadaki Tanımlar

Soyutlama: Yapısal bir süreç olup, matematiksel yapılardan zihinsel yapıların ve zihinsel yapılardan matematiksel yapıların kurulmasıdır. Nesnelerin sahip olduğu ortak bir özelliği veya özellikleri nesnelerden ayırma ve bu özelliğe veya özelliklere isim verme sürecidir. Bir kavramın spesifik niteliklerinden izolasyonu şeklinde gerçekleşir ve sürecin yönü, bağlamlar (contexts) kümesinden bir kavrama (concept) doğrudur (Mitchelmore, 2002; Sierpinska 1994; Tall, 1988).

Empirik Soyutlama: Deneyimlerimizden gelen benzerliklerin farkındalığı ile ilgili olan soyutlama çeşidi olup, objelerin yaygın özelliklerinin çıkarımlarına ve birkaçından tümüne, spesifikten genele olan genellemelere öncülük eder. Genel özelliklerin temelini oluşturan tanımlamalara odaklanılır ve daha derinden anlamayı geliştirebilen öğretme teorilerine öncülük eder (Mitchelmore ve White, 1995; Piaget ve Garcia, 1983; Skemp, 1986; White ve Mitchelmore, 2002)

Sözde (Psodö) Empirik Soyutlama: Empirik ve reflektif soyutlama arasında kalır ve özellikleri inceler. Deneysel şekilde objelerle yapılmak zorundadır ancak ilişkileri anlama kişi tarafından gerçekleştirilen içsel yapılandırmaların bir sonucudur. (Piaget, 1985).

Reflektif Soyutlama: Bireyin bilişsel gelişimi sırasında lojiko-matematiksel yapıların yapılandırılmasıdır. Bazı teorilerin içindeki kavramların oluşumuna bağlı olup, bu kavramların objeler arasındaki bağlantılar ve ilişkilerle zihinsel ve sistematik analize dayalı olarak ortaya çıkarılmasıdır. Hareketlerin genel koordinasyonu olarak adlandırılmış ve kaynağı özne olarak ve içsel şekilde bahsedilmiştir. (Beth ve Piaget, 1966; Davydov, 1990; Piaget, 1980).

Genelleme: Ayrıntılardan elde edilen veya ayrıntıları içeren, topluluğu tanımak ve geçerlilik alanını genişletmek adına teoremlerin formülasyonuna öncülük eden ve makul örüntülerin ortaya çıkarıldığı örneklerin yapılandırılmaları ile başlayan muhakemelerin ve yanıtların bir zigzaglı indüktif yolunun sonucu olup belirli durumlardan sağlanan veya belirli durumlara neden olan bir süreçtir (Davydov, 1990; Krutetski, 1976; Polya, 1954; Sriraman, 2004; Tall, 1991).

Empirik Genişleme: Bir konunun mevcut bir taslağının uygulanabilirlik alanını yeniden yapılandırmadan genişletilmesi durumunda ortaya çıkan genelleme şeklidir (Harel ve Tall, 1989).

Matematiksel Genişleme: Matematiksel nesnelerin bir sınıfı, farklı benzeşimlere dayalı daha geniş bir sınıfta gömülü olduğunda ortaya çıkan genelleme şeklidir (Mitchelmore, 2002).

Matematiksel Buluş: Daha genel bir kavram oluşturmak için bilinen bir kavramın bir veya daha fazla tanımlayıcı özelliklerini önceden düşünerek değiştirildiği veya çıkartıldığı zaman meydana gelen genelleme şeklidir (Mitchelmore, 2002).

Görselleştirme: Yapılandırma, temsilleme ve zihinsel imajların dönüşümünün karmaşık bir süreci olup daha önceden bilinmeyen fikirler ve ilerleyen anlamalar hakkında bilgiler arasında bağlantı kurmanın ve betimleme yapmak amacıyla resimlerin, imajların, diyagramların zihnimizde, kağıt üzerinde veya teknolojik araçlarla yansımaları, kullanımı, yorumlanması, yaratımının bir ürünü, süreci ve yeteneğidir (Bishop 2003; Hershkowitz, 1989; Wheatley 1998; Zimmermann ve Cunningham, 1991).

İzomorfik Görselleştirme: Objelerin görsel manipülasyonunun soyut matematiksel ilişkilere dönüştürülebildiği temsiller şeklindeki görselleştirmedir (Guzman, 2002).

Homomorfik Görselleştirme: Soyut objeler arasındaki ilişkileri yeterince taklit eden, belirli karşılıklı ilişkilere sahip bazı elemanların tahmin, araştırma, ispat gibi süreçlerdeki imajların oluşumuna destek sağladığı subjektif şekildeki görselleştirmedir (Guzman, 2002).

Analojik görselleştirme: Daha önce incelendiği için davranışını daha iyi bildiğimiz veya daha kolay elde ettiğimiz ve analojik (benzeşim kurduğumuz) bir yoldan birbirleri ile ilişkili olan objeleri zihinsel olarak yerine koyarak yaptığımız görselleştirmedir (Guzman, 2002).

Diagramatik Görselleştirme: Düşünme süreçlerimize yardımcı olan ve diyagramlarla temsil edilmiş zihinsel objelerimizin ve karşılıklı ilişkilerin görsellenmesidir (Guzman, 2002).

Görsel İmaj : Görsel veya uzamsal bilgiyi tasvir eden zihinsel bir tasavvur olup, zihin gözünün gördüğü resimler şeklindeki imajdır (Presmeg, 1986).

Somut İmaj: Günlük objelerin parçalarının zihinde biraraya gelip oluşturduğu bütünsel (holistik) bir resim şeklindeki imaj çeşitidir (Presmeg, 1986).

Örüntü İmajı: Görsel-uzamsal şema içinde resmedilen saf ilişkiler olup, kişilerin konfigürasyonları ve konfigürasyonların önemli özelliklerini hatırlamaya imkan veren imaj şeklidir (Presmeg, 1986).

Formül İmajı: Genellikle zihin gözüyle gördüğümüz ve tahta veya defterde yazılı şekildeki formüllerin hafızamızda oluşturduğu imajdır (Presmeg, 1986).

Kinestetik İmaj: Objelerin bir aktivite içinde hareket ettirilerek resimlendirildiği, kas gücü aktiviteleri gerektiren imaj şeklidir (Presmeg, 1986).

Dinamik İmaj: Bir kavramı farklı somut imajlarla bağdaştırarak oluşturulan, şekillerin yeni ilişkili şekiller içinde değişebildiği imaj şeklidir (Presmeg, 1986).

APOS Teorisi: Matematiksel düşünme sürecini, eylemler (actions), süreçler (processes) ve objeler (objects) ile çözümleyip anlamlandırma ve problemleri çözmede şemalar (schemas) içinde bunları organize etme şeklinde ifade edilen, zihinsel yapılanmaları ve bireyin eğilimini açıklamak adına ortaya konulan teoridir (Dubinsky ve McDonald, 2001).

II. BÖLÜM

İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde, araştırmada yer alan kavramsal çerçeve; soyutlama, soyutlamanın çeşitleri, APOS Teorisi, genelleme, genellenenin çeşitleri, genellenenin seviyeleri, genellenenin sınıflandırılması, görselleştirme, görselleştirme çeşitleri, görsel imaj çeşitleri hakkında yapılan araştırmalar kısaca açıklanacaktır.

2.1. Soyutlama

Soyutlama, bir süreç veya özel bir amaç için konu ile ilgili olan sade bilgiye sahip olmada gözlenebilir bir fenomenin veya bir kavramın içerik bilgisini indirgeyerek yapılan genellenenin bir sonucudur. Örneğin ‘deri bir futbol topu’nu ‘top’a soyutlamak, sadece genel top vasfı ve davranışı ile ilgili bilgileri saklamaktır. Benzer şekilde, ‘duygusal bir durum’u ‘mutluluk’a soyutlamak, duygusal durum hakkında nakledilen bilginin miktarını indirmektedir. Felsefi terminolojide soyutlama, objelerden ayrılan fikirlerin yer aldığı düşünme sürecidir.

Soyutlama, eski yoğun detayların belirsizleştirildiği veya tanımsızlaştırıldığı bir yalınlaşma stratejisi kullanır. Örneğin, bir gazete kadar yalın birşey, altı seviyede belirlenebilir.

- (1) bir yayın,
- (2) bir gazete,
- (3) The San Francisco Chronicle,
- (4) Chronicle 18 Mayıs basımı,
- (5) Chronicle 18 Mayıs basımının kopyası,
- (6) Chronicle 18 Mayıs basımının kopyasının ilk seçilmiş olanı.

Soyutlama böylece genelliğinden birşey kaybetmeden detayın tüm seviyelerinin her birinin enkapsülasyonudur. Başka bir örnek olarak, kedi-memeli-hayvan soyutlaması verilebilir (Hofstadter, 1979).

Soyutlama fikrinin aslında kendisi oldukça soyuttur ve ‘soyut’ terimi bir çok algılamaları içerir. Örneğin, somut şeyleri soyut isimlerden fiziksel veya fiziksel olmayan nesneleri ima edip etmemesine göre ayırırız. Sadakat veya boyut gibi soyut kavramlarla direkt duyuşal deneyimlerle bağlantılı olmayan fiziksel durumları ima ederiz (Hampton, 2003). Tecrübe, geçmişteki benzer deneyimlerimizin bazı generik temsilleri ile bağlantılı olarak tanımlandığından bu durum soyutlamayı gerektirir. Hafızamız nesneyi veya durumu bir benzerini farketmesiyle harekete geçer ve buna göre cevap verir (Millikan, 1984).

Soyutlama matematikte, matematiksel bir kavramın temelini oluşturan niteliklerin özünü çıkarma, gerçek dünya nesneleri ile olan herhangi bir bağılılığını kaldırma ve daha geniş uygulamalar için genelleştirme sürecidir. Matematiğin çoğu alanı, soyut yapıları belirleyen ve tanımlayan kurallar ve kavramlardan önce gerçek dünya problemleri ile ilgili çalışmalarla ortaya çıkmıştır. Örneğin geometrinin kökeni, gerçek hayattaki uzaklıklar ve alanların hesaplanması; istatistiğin kökeni, kumar oyunlarındaki olasılıkların hesaplanması ve cebir, aritmetikte problemlerin çözüm metodları ile başlamıştır (Kline, 1990).

Soyutlama, matematikte devam eden bir süreç olup çoğu matematiksel başlık tarihsel gelişiminde somuttan soyuta doğru bir ilerleme göstermektedir. Eğer geometrinin tarihsel gelişimini ele alacak olursak, geometrideki soyutlamaların ilk basamakları Eski Yunanlar tarafından yapılmış ve düzlem geometrisi aksiyomlarını ilk ortaya koyan kişi (ulaşabildiğimiz bilgiler kadarıyla) Euclid’tir. 17. yy. da, analitik geometrinin gelişimini sağlayan Cartesian koordinatlarını Descartes ortaya koymuştur. Soyutlamadaki ileri basamaklar Lobachevsky, Bolyai ve Gauss tarafından geometrideki kavramların genelleştirilmesi ile oluşan Öklidyen olmayan geometrinin gelişimidir. 19. yy. matematikçileri geometriyi daha da genelleştirerek, projektif geometri, afin geometrisi ve sonlu geometrinin gelişimini sağlamışlardır. Son olarak Felix Klein verilen bir simetrik grup altında değişmezlik özelliklerinin çalışması olarak tanımladığı tüm bu geometrilerin temelini oluşturan ‘Erlangen Programı’nı ortaya koymuştur.

Soyutlamanın bu seviyesi geometri ve soyut cebir arasındaki derin ilişkileri açığa çıkarmaktadır. Modern matematiğin en yüksek seviyedeki soyut iki alanı kategori teorisi ve model teorisidir (Kline, 1990).

Matematik ve matematiksel öğrenmede soyutlama kavramı, matematik eğitimi araştırma komiteleri tarafından çokça dikkat çekilen bir kavram olmuştur. Soyutlama bir çok yöne sahip kompleks bir kavramdır. Aslında, genel bir bağlamda birçok psikolog ve eğitimcinin dikkatini çekmiştir (örneğin, Beth ve Piaget, 1966). Matematik eğitimi araştırmalarına özgü yapılan çalışmalarda, soyutlama birçok farklı bakışla incelenmiştir (örneğin; Frorer ve ark. 1997; Noss ve Hoyles, 1996; Tall, 1991). Soyutlamanın tek bir anlamına yönelik bir konsensüs oluşmamış ancak kavramların belirli çeşitlerinin diğerlerine göre daha soyut olması ve soyutlama yeteneğinin matematikte anlamlı bağlantılar kurmada önemli bir biliş olmasından dolayı bu kavramın farklı perspektiflerden incelenebileceğine dair ortak bir düşünce vardır (Hazzan ve Zaskis, 2005).

Soyutlamanın bir çok tanımı yapılmıştır. Aristotle'ye kadar giden bir tanımı 'somut deneyimlerden gelen niteliklerin ihmalı' şeklindedir (Damerow, 1996). Sierpinska (1994), nesnelerin sahip olduğu ortak bir özelliği veya özellikleri nesnelerden ayırma ve bu özelliğe veya özelliklere isim verme sanatı olarak tanımlamıştır. Başka bir ifade ile soyutlama bir kavramın spesifik özelliklerinden izolasyonudur (Tall, 1988). Soyutlama yeni yapıları ortaya çıkarmak için konsolide edilmiş bir yapılanmadır (Monaghan ve Ozmantar, 2006). Tüm bu tanımlardan anlaşılıyor ki, soyutlama bir süreçtir. Sürecin yönü, bağlamlar (contexts) kümesinden soyut bir kavrama (concept) doğrudur (Mitcelmore, 2002).

Soyutlama üç çeşit bilginin saklanması gerektirir:

- (i) Durumların hangi boyutlarının uygun olduğu ile ilgili bilgi (örneğin, bir anahtarın şekli veya boyutundan daha ziyade rengi),
- (ii) Nasıl davranmamız gerektiğini güvenilir olarak tahmin eden boyutlar hakkındaki bilgi (örneğin renk boyutunda kırmızı veya sarı değerler),
- (iii) Tahmin edilebilir değerlerin çeşitliliğinin oranı hakkındaki bilgi (Hampton, 2003).

Ayrıca soyutlama bunlardan başka hiçbir bilgiyi depolamamayı da kapsamaktadır. Böylece, sadece önemli ve uygun bilgilerin depolanması ve diğerlerinin atılması temsilleri daha da soyut hale getirmektedir. Örneğin üçgen kavramı için (üç köşesi ve üç düzgün kenarı olan kapalı bir eğri), genel elemanlarını seçip çıkarıp ve açılarının detaylarını veya üçgenin ölçülerini ihmal edip hayalimizde canlandırırsak soyut bir temsil oluşturabiliriz (Hampton, 2003).

Bilişsel perspektiften bakıldığında, sayılar sayma sürecinden soyutlanarak oluşturulmuşlardır. Çocuklar için sayılar, gerçekten kullanılabilir nesneler kümesinin tüm elemanlarını sayarak elde edilen gerçek bir süreçtir ve bu süreç daha sonraları matematiksel nesneler haline gelmişlerdir (Ferrari, 2003). Bu anlamda yeni nesne tanımlanması soyutlamanın temel bir özelliğidir. Özellikleri ve süreçleri soyutlaştırma, sonraki aşamalarındaki soyutlamalara temel teşkil eden yeni nesnelerin kullanımı ile devam eder. Doğal sayılar sayma veya eşleştirme süreçlerinden soyutlanmış ve yine soyutlanabilme ile tam sayıların inşasında kullanılmıştır. Daha sonra rasyonel sayılar, reel sayılar, kompleks sayılar başarılı bir şekilde soyutlama ile inşa edilmiştir (Ferrari, 2003).

Matematikteki soyutlamanın karmaşıklığı soyut matematiksel kavramların öğretiminde de görülmektedir. 1960 ve 1970 lerdeki sözde ‘yeni matematik’ denilen çerçevede, soyut matematiksel kavramların öğretimi ile ilgili öneriler tam bir başarısızlıktır (Ferrari, 2003). Bu önerilere göre, öğrencilere küme teorisi, cebirsel yapılar veya topoloji öğretilmiş, temel kavramları daha çabuk öğrenme ve öğrenilenleri herhangi bir kontekste uygulamaları beklenmiştir. Bu tabiki, öğrenciler için oldukça güç olmuştur. Aynı zamanda, daha fazla örneklerin verilmesi de başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Örneğin ilköğretimde sayıların notasyonu ile ilgili öğretimde, öğrencilere farklı tabanların (en azından onluk ve ikilik taban) temsilleri gösterilmiş, farklı notasyonlarla onların ortak özellikleri kavrayacaklarını beklemişlerdir. Bu tabiki oldukça güç gerçekleşmiştir. Bugünlerde bu fikir yerini, öğrencilerin soyut kavramaları özel temsilleri ile basitçe biraraya getirerek soyut düşünme kazanabileceği fikrine bırakmıştır. Son on yıldır yapılan araştırmalar anlamların, amaçların ve içeriklerin matematik öğrenimindeki rolüne odaklanmıştır. Örneğin Lesh (1985), iyi problem çözen öğrencilerin, genel metodları benimseyen öğrenciler değil aksine, kapsam içindeki ipuçlarını ve tüm bilgileri kullanan öğrenciler olduğunu göstermiştir.

Matematik öğrenimindeki araştırmalar; dil, bilişötesi, etkiler, inançlar ve tutumlar gibi çeşitli faktörlerin önemini vurgulamaktadır. Tüm bunlar matematik eğitiminin hedeflerinden soyutlamanın bertaraf edilemeyeceğini, ancak öğrencileri soyut matematik ile tanıştırmmanın kolay bir iş olmadığını ve kullanılan matematiğin içeriklerinin çeşitliliğini hesaba katmanın gerekli olduğunu göstermiştir (Ferrari, 2003).

Soyutlama bir kavramın spesifik niteliklerinden izolasyonu olduğundan diğer niteliklerden ayrı olarak düşünülebilir. Soyutlama çoğunlukla genelleme ile ikili olarak düşünülür. Ancak bunlar eş anlamlı değildirler. Örneğin iki değişkenli lineer denklemlerin çözümü, üç değişkenli lineer denklemlerin çözümüne bir genelleme sürecidir. Ancak bu bir soyutlama değildir.

Soyutlama genellikle iki amaca hizmet eder:

- (a) Soyutlanan özellikleri uygulayan herhangi bağımsız değişken, soyutlanan özelliklere sahip diğer örnekleri de uygular. Böylece bağımsız değişkenler daha geneldir.
- (b) Soyutlanan özelliklerin biraraya getirilip diğerlerinin ihmali ile soyutlama daha az bilişsel zorlukları içerir (Tall, 1988).

Matematiksel fikirlerin gelişimine baktığımızda soyutlama sürecinin derin bir kavramsal organizasyon gerektirdiği ortaya çıkmaktadır. Bu durum genellikle yeni nesnelerin oluşturulması ile sonuçlanır. Aynı zamanda soyutlama süreci dili de gerektirmektedir. Konuşma dilinden soyut matematiksel yazılımlara geçiş basit olmamakla beraber, yeni kelimelerin olduğu spesifik bir sözlük ve yazının organizasyonundaki değişiklikleri de gerektirir (Ferrari, 2003).

Hiyerarşik soyutlama teorisi üzerine yapılan ilk temel çalışmalar, Dienes'in (1961) yaptığı çalışmalar üzerine devam ederek Skemp (1986) tarafından yapılmıştır. 1971'deki *matematik öğrenmenin psikolojisi* adlı kitabının ikinci basımında, çalışmalara etkilerde bulunmuş ancak yerleşik bilişsel hareketlere yaygın bir tesirde bulunamamıştır. Skemp'in soyutlama anlayışı, yeni bir zihinsel objedeki benzerliklerin somutlaştırılmasını izleyen benzerliklerin farkındalığını içerir.

Soyutlama, deneyimlerimizden gelen benzerliklerin farkındalığı ile ilgili bir aktivitedir. *Sınıflandırma*, bu benzerlikler üzerine kurulu deneyimlerimizin bir araya getirilmesi anlamına gelmektedir. Soyutlama (abstraction), soyutlama sürecinin (abstracting) bir sonucu olup, daha önce sınıfını oluşturduğumuz benzerliklere sahip yeni deneyimlerimizin farkındalığına imkan vermektedir. Soyutlama yapma (abstracting) bir aktivite ve soyutlama (abstraction) ise bu aktivite sonucu elde edilen son nesne olarak düşünüldüğünde, elde edilen bu nesne bir kavram olarak adlandırılmaktadır (Skemp, 1986).

Piaget ve arkadaşları soyutlamayı *empirik soyutlama* ve *reflektif (teorik) soyutlama* olarak ayırmışlardır (1977). *Empirik soyutlama*, yüzeysel benzerliklere dayanır ve günlük kavram bilgilerini gerektiren bir soyutlama çeşididir. Örneğin, köpek kavramı bir çocuğun tecrübelerinde belirli hayvanlar arasındaki benzerliğin bir enkapsülasyonudur. Empirik soyutlama üçgen, simetri ve çember gibi birçok uzamsal kavramların gelişimlerinin ilk basamaklarında görülür (Mitcelmore, 2002). *Reflektif soyutlama* Piaget'e göre kişinin hareketlerindeki yansımayı temel alır. Örneğin, bir nesnenin yanına iki nesneyi getirdiğinizde daima üç nesne gözlemlemeniz gerçeğine dayalı olan yansıma, bir değişmezliğin farkına varmayı getirir (daha sonra $1+2=3$ olarak ifade edilir). Nesnelerin değişmezliği, kavram halini alır (1, 2 ve 3 sayıları) ve değişmez eylem bu kavramlar arasındaki ilişki şeklini alır (toplama). Reflektif soyutlamada kavramlar ve ilişkiler seri bir şekilde biraraya getirilerek soyutlanır.

Mitcelmore ve White, Skemp'in soyutlama hakkındaki fikrinin, deneyimlerimize dayandığı için empirik soyutlama olarak adlandırılabilceğini söylemişlerdir (2007). Ancak, Piaget tarafından tanımlanan ve objelerin yaygın özelliklerinin çıkarıldığı ve renk ve ağırlık gibi uzantısal genellemelerin bahsedildiği terim olarak düşündüğümüzde, bu durum empirik soyutlamadan daha derin şeyler ifade etmektedir (Piaget ve ark., 1977). Skemp'in bahsettiği benzerlik, yüzeysel görünüşlerle ilgili olmayan ama yapıların temelini oluşturan benzerliklerdir. Dahası, benzerlik farkındalığı, benzer görünen şeylerin rastgele tanımlaması değil, genellikle seçici ilgilerin amaçlı olarak yönlmesiyle oluşmaktadır. Örneğin, bir ebeveyn çocuğuna el ve ayak kelimelerini öğretmek için çeşitli elleri ve ayakları gösterebilir. Matematik dersinde ise yönlme genellikle öğretmen tarafından gelmektedir. Bu nedenden dolayı,

benzerliklerin somutlaştırılması, amaçlı olarak tanımlanan benzerliklerin genellemesine dayanan yapıcı bir süreçtir (Mitchelmore ve White, 2007).

Soyutlama, bilişsel çevrelerce yapılmış eleştiriler nedeniyle bazı çevrelerde yanlış önem görmüştür (Mitchelmore ve White, 2007). Bu hareketlere göre, “okullardaki birincil ilgi, çoğunlukla soyut, bağlamı dışında düşünülen kavramların.... transferi olarak görülmüştür” (Brown, Collins ve Duguid, 1989: 32). Bu ise “tüm içeriklerdeki genel uygulamalar için varsayılan ‘bağımsız içerik’li (context-free) müfredatlarda kazanılan bilgi” teorisine dayanmaktadır (Lave, 1988: 9). Her nasılsa, “öğretilen şeylerin çoğu neredeyse pratikte kullanışsız olarak görülmektedir” (Brown ve ark., 1989: 32) ve bu “(bilişsel psikolojide) için çok sağlam temelden kazanılan transfer için yetersiz bir kanıt” ile hemfikirdir (Lave, 1988: 32).

Nesnellenmeler, soyutlamaya geleneksel yaklaşım yapmak için süregelenmiştir. Noss ve Hoyles (1996), soyutlamanın hiyerarşik ve bağlamı (içerik) dışında düşünme şekline karşı çıkmışlardır. Bu kişiler, “soyutlamayı yüksek seviyeye çıkıştan daha çok ilişkilendirme süreci” (s.48) olarak karakterize etmişler ve soyut kelimesini kırmaya çalışmak için “dehümanist imalarından bağımsız” şeklinde bahsetmişlerdir (s.49). Kurulan ağı, “öğrencilerin, matematiğin bir kısmında anlamlandırmayı inşa etmek için yapılan çabalarında uygun olanı seçme yoluyla destek sağlamadaki yeniden yapılanmalar ve düzenlemeler bütünü” şeklinde tanımlamışlardır (s.108).

Van Oers (1998) bağlam dışında düşünme fikrini soyutlamanın temeli olarak vurgulamış ve içeriğin daima bireyle ilgili, içerik dışı düşünmenin ise bireye uzak olduğunu öne sürmüştür. Aynı zamanda, içeriğin uzaklaştırılmasından bir kavramı zenginleştirmek yerine onu fakirleştirdiğinden bahsetmiştir.

Hiebert ve Carpenter (1992) matematik eğitimi üzerine yaptıkları önemli bir araştırmada soyutlamadan bahsetmeksizin matematiği anlayarak öğrenme ile ilgili bir bölüm yazmışlardır. Araştırmada anlamayı “fikirler, olaylar veya prosedürler arasında bağlantılar kurma” şeklinde tanımlamışlar (s.67) ve bunu yapmak için iki metot üzerinde tartışmışlardır: benzerlikleri ve farklılıkları araştırma ve içindeki ilişkileri belirleme. Buradaki her iki bahsedilen ifade de soyutlama ile öğrenme de çok önemlidir.

Zihindeki soyutlama terimini kullanmakta olup bunun adı hakkında çok da üzerlerinde durmamışlardır.

Yapılandırmacı teoriler, soyutlama seviyesi ile ilgili terimleri desteklemişlerdir. Hiebert and Lefevre (1986: 4-5) bundan şöyle bahsetmiştir;

Matematiksel bilginin parçaları arasındaki ilişkilerdeki iki seviyenin farklılığını ortaya koymak yararlı olacaktır. İlk seviyeyi ‘birincil’ (primary) olarak adlandırabiliriz. Bu seviyede, bilgi ile bağlantı kuran ilişki, bilginin kendisini gösterdiği seviyeden ziyade, soyutlukla aynı seviyede (veya daha az soyut seviyede) inşa edilir. Bu, ilişkinin bilginin bağlantı kurmasından daha soyut olmadığı anlamına gelmektedir.

Bazı ilişkiler, bağlantı kurduğu bilginin parçalarından daha yüksek ve soyut seviyede inşa edilirler. Bunu reflektif (ileri düşünülmüş, yansımali veya teorik) soyutlama olarak adlandırıyoruz. Bu seviyede ilişkiler, spesifik içeriklere (kontekslere) daha az bağlıdır. Bunlar çoğunlukla, görünüşte farklı olan bilgi parçalarındaki benzer ana özelliklerin farkındalığı ile oluşturulmuşlardır. İlişkiler, bilginin temsillenmesi, bilginin farklı görünüşteki parçacıklarının yaygın özelliklerinin çekip çıkarılması ve bir araya getirilmesi ile bu seviyeyi aşarlar.

Burada ilgiyi çeken iddialar; “daha yüksek ve soyut seviye” deki ilişkilerin “benzer ana özelliklerin farkındalığı ile oluşmuş” ve “spesifik ilişkilere daha az bağlı” olduğudur. Bu özellikler, çoğunlukla soyutlamanın hiyerarşik ve bağlamı dışında düşünme şeklindeki ifadeleridir.

Soyutlamayı indirgeme teması Hazzan (1999) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmış ve bu tema literatürde tartışılan soyutlamanın seviyeleri ile ilgili üç farklı yorumlamaya dayanmaktadır:

- (a) Düşünen kişi ile düşüncedeki obje arasındaki ilişkilerin niteliği olarak soyutlama seviyesi,
- (b) Süreç-nesne ikilisinin yansıması olarak soyutlama seviyesi,
- (c) Düşüncedeki kavramın komplekslik derecesi olarak soyutlama seviyesi.

Bu yorumlamalar ne çokça ayrıcalıklı ne de çokça ayrıntılıdır. Bu yorumlamaları Hazzan şu şekilde açmıştır:

(a) Düşünen kişi ile düşüncedeki obje arasındaki ilişkilerin niteliği olarak soyutlama seviyesi şeklindeki yorumlama, Wilensky'in (1991) bir şeyin doğal bir özelliği olmayan, "aslında bir objeyle bir kişinin ilişkisinin özelliği" (s.198) olan ve o şeyin soyut veya somut olup olmadığı ile ilgili iddiasından şekillenmiştir. Diğer bir ifade ile, her bir kavram ve her bir kişi için ikisi arasındaki önceki empirik bağlantıyı yansıtan soyutlamanın farklı seviyelerini gözlemleyebiliriz. Bir kişinin bir nesneye olan yakınlığı ve onu oluşturması için daha fazla olan bağlılık, kişinin o nesne hakkında daha somut (yada daha az soyut) düşünmesini sağlar. Bu perspektifin temelinde, bazı öğrencilerin zihinsel süreçlerinde aşına olunmayan fikirleri daha aşına yapma veya diğer bir ifade ile soyutu somut yapma eğilimine dayandırılabilir.

Bu bakış açısı spesifik olarak Davydov'un teoremine (1990) dayanarak, "yeni bir yapı inşa edildiği zaman, gelişmemiş formda önceden ortaya çıkar ve öğrencinin önceden inşa ettiği diğer yapılar içinde gelişir" (s.219) şeklinde ifade edilmiştir. Bu nedenle, soyutlama "daha önceden inşa edilen matematiğin dikey olarak yeni bir matematiksel yapıya yeniden organizasyon aktivitesidir." şeklinde tanımlanmıştır. Dikey matematizasyon "matematiksel elemanların çoğunlukla orijinallerinden daha somut veya formal şekilde diğer elemanlarla bir araya getirilme, yapılanma, organize edilme, geliştirilme aktivitesidir" (Herskowitz ve ark., 1996, Herskowitz ve ark., 2001: 203)

(b) Süreç-nesne ikilisinin yansıması olarak soyutlama seviyesi olan yorumlama, matematik eğitiminde kavram gelişiminin çeşitli teorilerini ileri sürmektedir (Beth ve Piaget, 1966; Dubinsky, 1991; Sfard, 1991, 1992; Thompson, 1985). Bu teorilerin bazıları APOS (action, process, object ve scheme) teorisi gibi daha fazla ayrıntılı bir hiyerarşi öne sürerler. Bu ikiliye dayanan teoriler, matematiksel terimlerin süreç kavramsallaşması ve nesne kavramsallaşması arasında farklılık ortaya koyar. Ve farklılıklara rağmen, bir matematiksel kavram öğrenildiği zaman onun bir süreç olarak kavramsallaşması önde gelir ve nesne olarak kavramsallaşmasından daha az soyuttur (Sfard, 1991). Böylece, bir matematiksel kavramın süreç olarak kavramsallaşması nesne olarak kavramsallaşmasından daha az soyutlama seviyesindedir (örn. indirgenmiştir) şeklinde yorumlanabilir.

(c) Üçüncü yorumlama, düşüncedeki matematiksel kavramın komplekslik derecesi olarak soyutlama seviyesidir. Örneğin, bir elemanlar kümesi, kümedeki belirli bir elemandan daha bileşik bir matematiksel birimdir. Bu, bileşik nesneler terimi olarak düşünme anlamında daha zor olmaktadır. Buradaki varsayım, bir birimin daha bileşik olması, daha soyut olması anlamına gelmesidir. Çünkü, detayların fazla miktarda olması, birim bir bütün olarak analiz edildiğinde önemsenmemelidir. Bu bağlamda, soyutlamanın bu şekildeki yorumu, öğrencilerin bir kümeyi o kümenin elemanlarından birisi yerine koyarak, dolayısı ile daha az bileşik nesne ile çalışarak soyutlama seviyesini indirgemeleri üzerine odaklanmaktadır.

2.1.1. Empirik soyutlama

Empirik soyutlama, objelerin özelliklerinden bilginin türemesidir (Beth ve Piaget, 1966). Bu, subjenin dışsal olarak görüldüğü deneyimlerle olması şeklindedir. Bu özelliklerin bilgisi her nasılsa, içseldir ve kişi tarafından içsel olarak oluşturulan yapılanmaların bir sonucudur. Piaget'e göre, bu çeşit soyutlama objelerin yaygın özelliklerinin çıkarımlarına ve birkaçından tümüne, spesifikten genele olan genellemelere öncülük eder (Piaget ve Garcia, 1989). Örneğin bir objenin rengini veya ağırlığını göz önüne alırsak bu özelliklerin objede tamamen bulunabileceği düşünülebilir. Ancak kişi herhangi bir şey yaparak (belirli bir ışıktaki bakarak veya tartarak) bilgi sahibi olabilir ve farklı kişiler farklı şartlar altında bu özelliklerle ilgili farklı sonuçlara ulaşabilirler.

Empirik soyutlama genel özelliklerin temelini oluşturan tanımlamalara odaklandığı için empirik tanımlar soyut-genel (abstract-general) olarak adlandırılmıştır (Mitchelmore ve White, 1995; White ve Mitchelmore, 2002). Buradaki düşünce, öğrencilerin soyut kavramları, soyutlama süreciyle değil, izolasyon içinde öğrendikleridir. Soyut-apart (abstract-apart) kavramlar azlıkla anlaşılakta, kolay unutulmakta ve nadiren uygulanabilir olmaktadır. Empirik soyutlamanın avantajı şudur; daha derinden anlamayı geliştirebilen öğretme teorilerine öncülük eder. Mitchelmore ve White (2000, 2004a) 'soyutlama için öğretim' diye adlandırdıkları bir teori geliştirmişler ve burada öğrenciler:

- a. ilişkili içeriklerin çeşitliliğinin yapılarını kendileri tanıtmışlar;
- b. buradaki farklı içerikler arasındaki benzerliklerin farkına varmışlar;
- c. genel bir kavram oluşturmak için benzerlikleri somutlaştırmışlar ve sonra,
- d. kavramı yeni durumlarda uygulamışlardır.

2.1.2. Sözde (Psödö) Empirik Soyutlama

Sözde (Psödö)-Empirik soyutlama, empirik ve reflektif soyutlama arasında kalır ve özellikleri didikler (Piaget, 1985). Örneğin, sıraya konulmuş objelerin iki kümesi arasındaki birebir bir eşleme düşünelim. Bu durumun bilgisi empirik olarak düşünülebilir çünkü objelerle yapılmak zorundadır ancak uzaydaki görünüşleri ve ilişkileri ve tabii ki bu iki küme arasındaki birebir bir ilişki olduğunu anlama kişi tarafından gerçekleştirilen içsel yapılandırmaların bir sonucudur.

2.1.3. Reflektif Soyutlama

Empirik soyutlamanın karşıtı teorik soyutlama fikridir. Reflektif soyutlama Piaget tarafından tanımlanan bir kavram olup, bireyin bilişsel gelişimi sırasında lojiko-matematiksel yapıların yapılandırılması olarak ifade edilmiştir. Piaget'nin yaptığı iki önemli gözlemden ilki, reflektif soyutlamanın mutlak bir başlangıcının olmadığı ancak, sensori-motor yapının koordinasyonun ilk yaşlarında mevcut olduğu (Beth ve Piaget, 1966), ikincisi ise ilk çağlardan günümüzdeki yüksek matematiğe kadar matematiğin gelişim tarihinde devam etmesinin reflektif soyutlama sürecine bir örnek olduğudur (Piaget, 1985).

Bu fikrin gelişimi Sovyet psikologlara, özellikle Vygotsky ve Davydov'a borçludur. Reflektif soyutlama, bazı teorilerin içindeki kavramların oluşumuna bağlıdır. Davydov (1990), teorik kavramlar “objeler arasındaki bağlantılar ve ilişkiler zihinsel ve sistematik analize dayalı olarak ortaya çıkarılmıştır” (s.25) ve oysa, “temel kavramlar objelerin sınıflandırılması ve tanımlanmasını sağlamaktadır ve fenomenler ve teorik olanlar objelerin belirli niteliklerinin çeşitli görünüşlerinin açıklamalarına izin verirler” (s.27) demiştir.

Vygotsky (1987), günlük ve bilimsel kavramlar arasındaki farkların bir karşılaştırmasını yapmıştır. Günlük kavramlar empirik soyutlama ile oluşmuştur ancak bilimsel kavramların oluşumunun üç özelliği vardır: kavramlar arasındaki ilişkiler sisteminin kuruluşu kişinin kendi zihinsel aktivitesinin bir farkındalığı ve “objenin esasını kavrama...kavramın içindeki realiteyi güçsüzleştirmekten ziyade bir zenginleştirmedir” (s.185). “Teorik bir fikir veya kavram benzemeyen, farklı, çok yönlü, tesadüfi olmayan şeyleri bir araya getirmeli ve bütündeki payını belirtmelidir... Böyle bir kavram, empirik olanın tersine, bir sınıftaki her belirli objede özdeş bir şey bulamaz fakat bütünü ve oluşumdaki sistem içinde belirli objelerin birbirleriyle bağlantılarını belirtir” (s.225).

Reflektif soyutlama, empirik soyutlamadan oldukça farklı görünmektedir. “Bilimsel bilgi, kişilerin günlük tecrübelerinin basit yayılımları, yoğunlaşmaları ve genişlemeleri değildir. Soyutlamanın belirli anlamlarının işlenmesini, belirli bir analizini ve yerleşik bilişin objelerinin belirli idealleşme yollarına izin veren genellemelerini gerektirir” (Davydov, 1990: 8). Reflektif soyutlamanın önemli bir safhası bir fikrin temelini tanımlanmasıdır. “Bir şeyin temeli, diğer şeylerle etkileşiminde ortaya çıkan değişikliklerin hepsi için temel teşkil etmeyebilir” (Davydov, 1990: 194). Reflektif bir soyutlamadan sonra, bir obje “zihinsel olarak diğeriyle yer değiştirir” (Davydov, 1990: 250).

Reflektif ve empirik soyutlama arasındaki farkı bazı örnekler açıklayabilir. Bir doğrunun temel geometrik kavramını çocuklar nasıl öğrenirler? Empirik soyutlama teorisine göre, sadece kabaca lineer olan gerçek objeler arasındaki benzerliklere temel teşkil eden durumların farkına varırlar. Reflektif soyutlama teorisine göre ise, noktaların ve doğruların teorik fikirleri uzamsal incelemelerden çıkan genellemelere ihtiyaç duyar (örneğin, iki doğru bir noktada kesişir.) İkinci bir örnek, gerekli değişkenleri ve ilişkileri belirlemek (reflektif soyutlama) için bir problemin derin bir analizinde çalışılan çeşitli alıştırmaların (empirik soyutlama) incelemesiyle öğrenmenin gerçekleşeceğidir. Matematiğin öğrenilmesinde daha fazla etkili bir yöntem veya daha tatmin edici açıklama elde etmede bir hüküm vermek için az nihai empirik delil olduğundan araştırmalar devam etmektedir (Mitchelmore ve White, 2007).

Reflektif soyutlamanın birçok örneğini görebiliriz. Verilebilecek ilk örneklerden birisi, çocuğun ikililer, üçlüler vb. (seriasyon) oluşturmak için çeşitli bireysel hareketler yapması ve daha sonra toplam sıralama yapmak için içselleştirmesi ve koordine etmesidir (Piaget, 1971). Bu çeşit soyutlama, “yeni anlam elde edilen belirli kurallar arasındaki yeni sentezler” olarak sonuçlanan yapısal birçok farklı genelleme çeşidine öncülük eder (Piaget ve Garcia, 1983). Öklidyen halkası kavramı soyutlama ve genellemeye örnek olarak verilebilir. Sözde (psödo) empirik ve reflektif soyutlamaya öncülük eden hareketler, empirik soyutlamadan geldiği bilinen özelliklere sahip objeler üzerinde yapılır. Diğer taraftan empirik soyutlamayı, sadece reflektif soyutlama tarafından yapılandırılan asimilasyon şemaları içinde yapmak mümkündür (Piaget, 1985).

Empirik ve sözde empirik soyutlama, bilgiyi hareketlerin objelerin üzerinde yapılmasıyla (ya da hayal edilmesiyle) şekillendirir. Reflektif soyutlama, bu hareketleri yeni hareketler ve en sonunda yeni objeler (artık fiziksel olmayan ama bir fonksiyon veya bir grup gibi matematiksel olan) oluşturmak için içselleştirir ve koordine eder. Empirik soyutlama verileri bu yeni objelerden bunlar üzerindeki zihinsel hareketlere genişletir ve böylece devam eder.

Empirik soyutlamada kişi belli sayıdaki objeleri gözlemler ve yaygın bir özelliği soyutlar. Sözde empirik soyutlama ise obje üzerinde yapılan hareketlerden sonra aynı şekilde gelişir. Reflektif soyutlama ise biraz daha karmaşıktır. Piaget’e göre ‘bilişsel yapıların gelişimi reflektif soyutlama nedeniyle olur...’ (Piaget, 1985: 205), “lojiko-matematiksel yapılanmaların büyük kısmını destekler” (Piaget, 1980: 92).

Piaget’e göre reflektif soyutlamanın ilk bölümü, düşünmenin belirli bir seviyesindeki zihinsel yada fiziksel hareketlerden şekillendirilen özellikleri içerir (Beth ve Piaget, 1966). Bu, diğer şeyleri, hareketlerin farkındalığını ve şuurluluğunu gerektirir. Aynı zamanda, içeriğinden bir formu ayırıştırma davranışını da içerir (1972). Bu da soyutlanmanın düşünmenin yüksek bir alanında planlandığı anlamına gelir (1985).

Piaget, reflektif soyutlamanın yapılanma görünümünün, soyutlamadan (ya da genişlemesinden) daha önemli olduğunu düşünmektedir. Sadece onu desteklemek için

değil daha önceden gözlemlere göre bu çeşidin yapılanmasının matematiksel gelişimin özünde olduğu ve formal yapıların birleşiminde düşünmenin gelişiminin doğal bir genişlemesi olduğu söylenebilir (Beth ve Piaget, 1966).

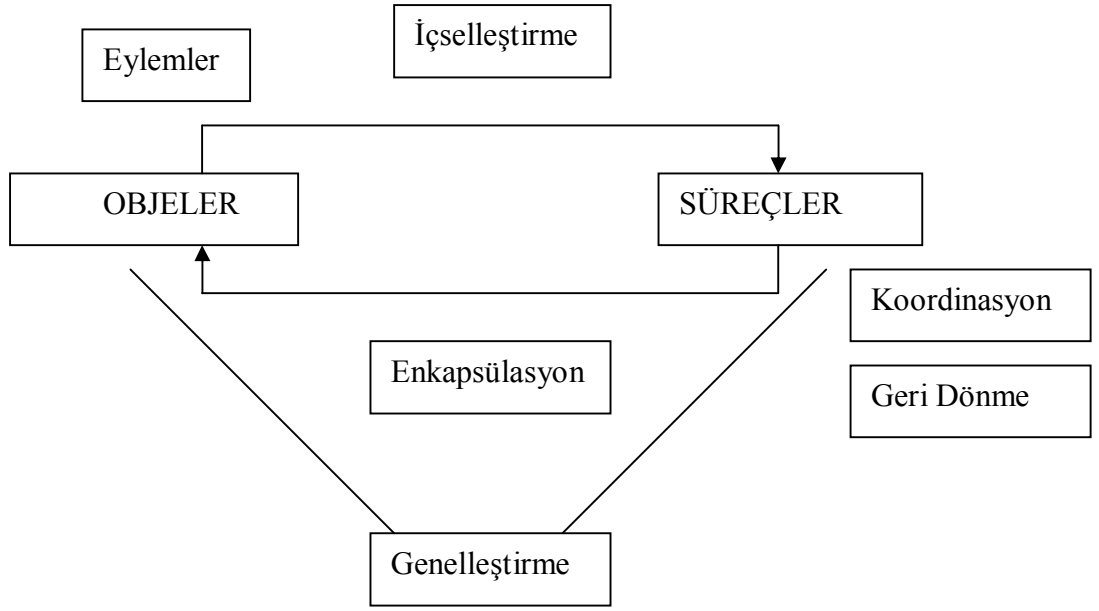
Dubinsky (2000), reflektif soyutlama hakkında yaptığı çalışmalarda Piaget'nin reflektif soyutlama düşüncelerini şekillendirmiştir. Dubinsky reflektif soyutlamayı, *içselleştirme*, *koordinasyon*, *enkapsülasyon*, *genelleme* ve *geri dönme* şeklinde adımsal olarak aşağıdaki gibi çeşitlendirmiştir:

- Semboller, dil, resimler ve zihinsel imajların kullanımındaki yeteneğin ortaya çıkmasıyla, çocuk temsili yani algılanan fenomenin bir anlamlandırma yolu gibi içsel süreçleri yapılandırmayı gerçekleştirebilmek için reflektif soyutlamayı yapar (Piaget, 1970a). Piaget bunu *içselleştirme* (*interiorization*) olarak adlandırmış ve buna “içselleştiriliş, operasyonların bir sistemi içine materyal hareketlerin bir dizisini çevirme” gibi başvurmuştur (Beth ve Piaget, 1966: 206). Örneğin kişi ‘ispatın tüm basamaklarını anlıyorum ancak tüm resmi göremiyorum’ derse süreçler birikiminin içselleştirilmesinin gerekliliğini ifade etmektedir. Tüm süreçlerin içselleştirilmesi, son basamaktaki ‘kendi ispatımızı yapabilme’ olmalıdır.
- Bazı durumlar iki veya daha fazla sürecin yeni bir tanesini yapılandırmak için kompozisyonunu yada *koordinasyonunu* gerektirir. Bu, Piaget'nin yeni hareketler veya objeler yapılandırmada bir veya daha fazla kullanılan yollara başvurulduğu “hareketlerin genel koordinasyonu” ifadesinden ayrılabilir. Örneğin, iki fonksiyonun bileşkesini düşündüğümüzde, bileşke işlemi iki objeden üçüncüyü oluşturma hareketidir. Bu nedenle iki fonksiyonu objeler olarak düşünerek başlamak gereklidir. Kişi, bu objeleri ‘açmalı’, uygun süreçlerle yansıtmalı ve onları içselleştirmelidir. Daha sonra bu iki süreç, bileşke ile sonuçlanan fonksiyon olan bir obje içine enkapsüle edilebilen yeni bir süreç oluşturmak için koordine edilebilir.
- Çarpma ve oran gibi belki de (matematikte) çok önemli ve (öğrenciler için) çok zor örnekler, (dinamik) bir sürecin (statik) bir objeye *enkapsülasyonu* veya konversiyonu olarak söylenebilir. Piaget (1985: 149) bunu “... hareketler veya operasyonlar, düşünmenin veya asimilasyonun tematize edilmiş objeleri olurlar” şeklinde ifade etmiştir. Ona göre “matematiğin tümü bu nedenle yapıların

inşasındaki terimlerin içinde olarak düşünülebilir, ...matematiksel varlıklar bir seviyeden diğerine hareket ederler; bu varlıklar üzerindeki operasyonlar teorisinin bir objesi üzerinde olurlar ve bu süreç alternatif yapılar veya daha güçlü yapıları elde edene kadar tekrar eder” (Piaget, 1970b: 70). Yine Piaget, “...önceki formlarla ilgili olan ve onları içerik olarak ihtiva eden yeni formlar oluşturmak” ve “daha temelden şekillendirilen reflektif soyutlamaların yeni formları yapılandırmak için kullanılan elemanları oluşturur” (Piaget, 1985: 140) olduğundan bahsetmektedir. Örneğin $\{4, \{-3, 2, -1/7\}, \{\{17, 5\}\}\}$ gibi bir kümenin kardinalitesini belirlemede öğrenciler bu kümenin 6 elemana (3 ten daha çok) sahip olduğunu düşüneceklerdir. Buradaki zorluk öğrencilerin $\{-3, 2, -1/7\}$, $\{17, 5\}$ kümelerini objeler olarak enkapsüle edememelerinden kaynaklanmaktadır.

- Eğer kişi oluşan bir şemayı daha geniş fenomenler birikiminde uygulamayı öğrenirse, bu şema *genelleştirilmiş* tir denir. Kişi şemanın daha geniş uygulanabilirliği için bunu yapabilir. Aynı zamanda bu, bir süreç bir obje olarak enkapsüle edildiğinde olabilir. Örneğin iki miktarın oranını veya toplamayı düşünürsek, eşitlik veya toplam elde edebilmek için uygulanabilirlik sırasıyla orantı veya çarpma şeklinde gelir. Şema, daha fazla uygulanabilir olmadığında aynı şekilde sonuçlanır. Piaget tüm bunları çoğalan veya genelleşen asimilasyon olarak belirtmiş ve *genişleyen* genelleme olarak adlandırmıştır (Piaget ve Garcia, 1983). Örneğin iki ve üç bileşenli vektörler daha yüksek ve beklide sonsuz bileşenli vektörlere genellenebilir.
- Eğer bir süreç içsel olarak beliriyoorsa, kişi onu *geridönme* (reverse) olarak düşünebilir ve orijinal süreç içinde geri dönme (reversing), içerikteki yeni bir sürecin yapılanması gibi bir aracı düşünür. Örneğin bir eşitsizliği düşünürken kişinin düşünmeye sonuçtan başlaması, doğru olarak gözlemlediği bir şeye kadar manipule etmesi ve daha sonra argümanın geri dönüşüp dönüşmediğini görmesi gibi.

Soyutlama sürecinin yapılanmasına dair şema Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1. Soyutlama Sürecine Ait Şema ve Yapılanmaları (Dubinsky, 2000)

APOS Teorisi

Dubinsky ve McDonald (2001), matematiksel bilgiyi, *eylemler* (actions), *süreçler* (processes) ve *objeler* (objects) ile anlamlandırma ve problemleri çözmek için *şemalar* (schemas) içinde bunları organize etme şeklinde ele alıp, zihinsel yapılanmaları ve bireyin eğilimini açıklamak adına bir teori geliştirmişler ve bu yapılanmaları açıklamak için teorinin adını APOS Teorisi olarak adlandırmışlardır. Buradaki fikirler Piaget'nin çocukların öğrenmesindeki reflektif soyutlamaları üzerine yaptığı çalışmalar üzerine kurulmuştur. Teoriyi oluşturan terimler şu şekilde açıklanabilir:

Eylem, algılanan objelerin kişi tarafından operasyonunun nasıl yapılacağı ile ilgili talimatlarının adım adım ya açıktan veya hafızasındaki dönüşümüdür.

Eylem tekrarlanırsa ve kişide yansıması oluşursa, kişi artık dışarıdan uyarıcıların gerekmediği, benzer türdeki eylemleri yaparak *süreç* olarak adlandırılan bir içsel zihinsel yapılanmayı gerçekleştirir. Kişi, bir sürecin gerçekleşmesi sırasında *geri dönme* düşünebilir ve bunu diğer süreçlerle bir araya getirebilir.

Obje, kişinin süreci bir toplam olarak gördüğü ve üzerinde dönüşümlerin yapılabileceğini fark ettiği zamandaki sürecin inşasıdır. Belirli bir matematiksel kavram için bir *şema*, eylemler, süreçler, objeler ve bu kavramı gerektiren bir problem durumunda ilgili olmayı getiren, kişinin zihnindeki bir çatıyı oluşturmak için bazı genel prensiplerle bağlantılı diğer şemaların bir birikimidir.

Burada eylem, süreç, obje ve şema sıralı şekilde hiyerarşik olarak verilmiştir ve buradaki asıl amaç ise bu kompleks yapının küçük bölümlerini izole etmek ve şemalar arasındaki mümkün ilişkilerin açık bir tanımlamasını vermektir. Bu belirli kavramlar için yapılabılırsa, kavramın *genetik çözümlemesi* (*genetic decomposition*) olarak adlandırılır Dubinsky (2000).

Şemaların Organizasyonu

Yapılanmalara öncelikle objelerle başlanır. Bunlar tüm matematiksel objeler dizisini kapsar (sayılar, değerler, fonksiyonlar, topolojik uzaylar, gruplar, vektörler, vektör uzayları...vb.) ki bunların her biri kişinin matematiksel gelişiminin bazı noktalarında yapılandırılmış olmalıdır.

Herhangi bir zamanda kişi, bu objelerle hesaplamalar yapabilmek için eylemleri kullanabilir. Bu eylemler nümerik cevaplarla sonuçlanan nümerik hesaplamalarla başarılı olurlar. Kişinin eylemlerle çalışması sadece onları objelerle uygulamasından daha mümkündür. Öncelikle bir eylem içselleştirilmelidir. Bu, bazı içsel yapılanmaların eylemlerle ilişkili yapılması anlamına gelir. İçselleştirilmiş bir eylem bir süreçtir. İçselleştirme kişiye eylem üzerinde şuurlu olmasına, yansıma yapabilmesine ve diğer eylemlerle bir araya gelmesine izin verir.

Eylemleri içselleştirme, süreçlerin yapılanmasının bir yoludur. Diğer bir yol ise ortaya çıkan süreçlerle yeni olanları oluşturmak için çalışmaktır. Bu, örneğin geri dönme (reversal) ile yapılabilir.

2.2. Genelleme

Genelleme mantık ve insan muhakemesinin temel bir elemanıdır. Genelleme, bir bilgi alanının veya elemanlar kümesinin varlığını öne sürer ve bu elemanlarca bir veya daha fazla yaygın karakteristikler paylaşılır. Aslında, tüm geçerli dedüktif çıkarımların temelini oluşturur. Doğrulama süreci, verilen herhangi bir durum için genellemeyi sağlayıp sağlamadığını belirlemek için gereklidir. Genelleme kavramı çoğu ilişkili disiplinde geniş uygulamalara sahiptir.

A ve B herhangi iki ilişkili kavram olmak üzere, A'nın B kavramının bir genellemesi olarak düşünülebilmesi için gerek ve yeter şart:

- B kavramının her durumdaki örneklerinin aynı zamanda A kavramında örnekleri olması, ve
- A kavramının örnekleri arasında B kavramının örneklerinin olmadığı örneklerin olmasıdır.

Örneğin 'hayvan', 'kuş' un bir genellemesidir. Çünkü her kuş bir hayvandır ve kuş olmayan başka hayvanlar da vardır. Hypernym, eşit sıralı bir parçalar grubuna veya sınıfına karşılık gelen bir generiktir. Örneğin; ağaç, kayın ve meşe için bir hypernym veya gemi, kruvazör ve vapur için bir hypernym dir. Hyponym, generikte içerilen parçalardan birisidir. Örneğin; zambak ve papatya, çiçek içinde yer alır veya kuş ve balık, hayvan içinde yer alır. Bir hypernym, hyponym in üstü (superordinate) ve bir hyponym, hypernymin altı (subordinate) dır (Hume, 1910).

Matematikte genellemeler, teoremlerin formülasyonuna öncülük eden ve makul örüntülerin ortaya çıkarıldığı örneklerin yapılandırılmaları ile başlayan muhakemelerin ve yanılgıların bir zigzaglı indüktif yolunun sonucudur (Sriraman, 2004). Matematik eğitimi literatürü, genellemeyi belirli durumlardan sağlanan veya belirli durumlara neden olan bir süreç olarak tanımlamaktadır (Davydov, 1990; Krutetski, 1976; Polya, 1954).

Piaget (1970), genellemeyi üst sıra operasyon olarak görmüş ve reflektif soyutlamayı geliştiren bir süreç olarak tanımlamıştır. Rotman (1977), reflektif soyutlama üzerine olan araştırmasında, Piaget'in Cantor'un birebir eşleme fikrine dayalı

sonsuz kümeler teorisini bulduğu örneğini vermiştir. Bir çocuğun düşüncesi kadar basit ve oldukça ilkel olan yani birebir eşleme ile objeleri yerleştirme aktivitesi, üstlere reflekte olmak adına uzak matematiksel öneme sahiptir. Tarihte Galileo, çift tam sayılarla tüm tam sayıları birebir eşlemenin paradoksal bulmuştur. Ancak, eğer kişi sonsuz bir kümenin eleman sayısının kendisinin bir özalt kümesinin eleman sayısı ile aynı sayıya sahip olduğu gerçeğini kabulederse, o zaman çocuğun sonlu ötesi (transfinite) sayıları tanımlamada yapılan eşleme kavramını kullanabilir (Sriraman, 2004).

Dubinsky (1991), genelleme sürecinden ‘mevcut bir şema, bir öncekinden farklı olan yeni bir durumda kullanılır ve temsil edilir’ diyerek bahsetmiştir. Böylece genelleme, konunun parçasının yüksek derecede bir farkındalık gerektiren süreçlerin ve objelerin kombinasyonuna ihtiyaç duyar (Sriraman, 2004).

Skemp (1986), matematiksel genellemenin sofistike ve güçlü bir aktivite süreci olduğunu söylemektedir. Ona göre sofistikedir, çünkü içeriğini geçici olarak ihmal ederek metodunun şekli üzerinde yansımayı gerektirir. Güçlüdür, çünkü sadece karşılaşılan yeni durumların özümlemesi talebine cevap vermez aynı zamanda bu taleplerin ilerisi için de, ortaya konulan şemaların tam, şuurlu ve bilinçli olarak yeniden yapılanmalarını oluşturur.

Krutetski (1976), öğrencilerin genellemeleri doğru formüle edebilmeleri için spesifik içeriklerden soyutlamaları, benzerlikleri, yapıları ve ilişkileri seçmeleri gerektiğini ileri sürmektedir. Polya (1954), belirli durumlarla çalışmakla genellemelerin ortaya çıkacağına kesinlikle inandığını söylemektedir. Aynı zamanda matematikçilerin, tamamen farklı durumlardaki örüntüler arasında genelliğin formülleştirmesine doğru induktif bir sıçrayış yapmalarına izin veren bağlantılar oluşturabileceklerini söylemektedir.

Soyutlama gibi genelleme terimininde birçok anlamları vardır. Mitchelmore (2002), bunları G1, G2 ve G3 olacak şekilde üç kategoride gruplamıştır:

G1: Soyutlama veya kavram ile anlamdaşlık,

G2: Mevcut bir kavramın genişlemesi:

Empirik genişleme,

Matematiksel genişleme,

Matematiksel buluş,

G3: Mevcut olan kavramla ilgili bir teorem.

Çoğu matematik eğitimcisi genellemeyi soyutlama ile eşanlamlı olarak kullanmışlardır (G1). Örneğin Davydov (1990), benzer nesnelerin sınıfındaki tüm özelliklerin bulunması ve yalınlanması olarak tanımlamıştır. Dreyfus (1991) ise soyutlamanın ilk basamağı olarak düşünmüştür.

2.2.1. Empirik Genişleme

Empirik genişleme, Dienes (1963) tarafından primitif genelleme olarak, Harel ve Tall (1991) tarafından genişleyen genelleme olarak adlandırılmıştır. Empirik genişleme de kişi mevcut bir kavramın uygulandığı diğer içeriklerin farkına vardığında meydana gelir (Mitchelmore, 2002). Bir konunun mevcut bir taslağının uygulanabilirlik alanını yeniden yapılandırmadan genişletilmesi durumunda ortaya çıkar (Harel ve Tall, 1991). Örneğin, küçük bir çocuk küçük, kahverengi, düz tüylü köpeklerle ilgili bir deneyimi olduğunda büyük, beyaz, kabarık tüylü bir hayvanı bir köpek olarak algılar. Veya daha büyük bir çocuk, ders kitabında sadece eşkenar ve ikizkenar üçgenin şekilleri olduğunda bile çeşitkenar bir üçgeni üçgen olarak kabul eder.

2.2.2. Matematiksel Genişleme

Matematiksel genişleme, Dienes (1963) tarafından matematiksel genelleme olarak, Harel ve Tall (1991) tarafından yapılandırılmış genelleme olarak adlandırılmıştır. Matematiksel genişlemede, matematiksel nesnelerin bir sınıfı (ör. doğal sayılar) farklı benzeşimlere dayalı daha geniş bir sınıfta (ör. tam sayılar) gömülü olduğunda ortaya çıkar (Mitchelmore, 2002). Bir konu mevcut bir taslağının

uygulanabilirlik alanını genişletmek için yapılandırıldığı zaman meydana gelir (Harel ve Tall, 1991).

2.2.3. Matematiksel Buluş

Matematiksel buluş, Damerow (1996) tarafından kartezyen soyutlama olarak, Fishbein (1987) tarafından yaratıcı genelleme olarak adlandırılmıştır. Matematiksel buluş, bir matematikçinin daha genel bir kavram oluşturmak için bildiği bir kavramın bir veya daha fazla tanımlayıcı özelliklerini önceden düşünerek değiştirdiği veya çıkarttığı zaman meydana gelir (Mitchelmore, 2002). Bu duruma en bilindik örnek ise paralellik aksiyomlarını çeşitlendirerek keşfedilen öklidyen olmayan geometridir.

Genelleme terimi bazı nesneler kümesinin tüm elemanları arasındaki ilişkilere başvuran genelleme (G3) olarak da geçebilir. Bu anlama gelen genelleme ile ilgili tipik örnek olarak ‘köpekler insanlar kadar uzun yaşamazlar’ verilebilir.

Genellemeyi bir bakıma soyutlamadan farklı kullanmak çoğu zaman tercih edilmiştir. Bu nedenle G1 ihmal edilebilir. G2 ve G3, yeni bir kavrama yol açmaya gerek olmadan ya bir kavramın (G2) ya da bir ilişkinin (G3) alanını genişletme fikrini içerir. Nerede yeni bir kavram oluşturuluyorsa orada soyutlama içerilmelidir (Mitchelmore, 2002).

Genelleme ve soyutlamaya lineer cebirden bir örnek vermek gerekirse, R nin R^n genişlemesi, R nin özelliklerinin soyutlanmasına gerek olmadan ve n defa R nin kendisiyle kartezyen çarpımından oluşmaktadır. Bir F cismi üzerinde inşa edilen herhangi bir V vektör uzayı, R cismi üzerinde vektör uzayı olan R^n nin özelliklerinin soyutlanmışıdır. Görünüşte her ikisi de aynı fikirlere sahiptir: lineer denklemlerin çözümü, lineer bağımsızlık, kümelerden kümelere geçiş, boyut, alt uzay, lineer dönüşüm, izomorfizma, determinantlar vb. Genelleme, daha fazla koordinatlara sahip olunarak karmaşılaşan ve böylece artan detaylar içinde problemlere neden olan R^2 deki veya R^3 deki benzer fikirleri gerektirir ve bilişsel yapıdaki bir genişlemedir.

Soyutlama, kavramların tanımlarındaki çıkarımları, güç ve genellik vermeyi gerektiren, kavramsal yapılanmanın bilişsel problemlerini yaratan bir süreçtir (Tall, 1988).

2.2.4. Genelleme Seviyeleri

Garcia-Cruz ve Martinon (1998) lineer örüntülerde genelleme seviyelerini belirlemişler ve üç seviyeyi ortaya koymuşlardır.

2.2.4.1. Seviye-1 (Prosedürel Aktiviteler)

Bu seviyede, kişi ardışık (iteratif) ve yinelemeli (rekursif) karakterlerin farkına varmaktadır. Bu stratejiler genelleştiremezler ancak bu rutin davranışlar daha sonra (diğer seviyede) geliştirilen kuralların değerlendirmelerini kontrol ederken kullanılmaktadır.

2.2.4.2. Seviye-2 (Prosedürel Anlama, Lokal Genelleme)

Bu seviyede kişi lokal bir genelleme tespit etmektedir. Bu, problemde farklılık göstermesine rağmen verilen yeni bir problem içindeki nümerik veya resim dizisinde yerine getirilen bir hareketten değişmeyi elde etmek anlamına gelmektedir. Burada değişimin elde edilmesi demek spesifik bir terimin hesaplamasındaki hareketlerden türetilen benzer hesaplama kurallarının, benzer problem veya durum içindeki diğer herhangi bir hesaplamada uygulamak demektir.

2.2.4.3. Seviye-3 (Kavramsal Anlama, Global Genelleme)

Bu seviyede kişi bir strateji geliştirir. Bu, onun yeni ama benzer bir problemde benzer değişimi elde etmesi ve benzer hareketi uygulaması anlamına gelmektedir. Geliştirilen ve daha önceki problemde kullanılan kural artık hareket için uyarıcı olacak şekilde bir obje olmuştur. Bu seviyede genelleme diye bahsedilen şey, kişinin bu durumlarla ilgilenirkenki tüm performansı olup bu, strateji olarak adlandırılmıştır. Artık bu strateji yeni ama benzer bir durumda kullanılmaktadır. Sabit elemanlar eğer varsa süreç içindeki değişkenleri elde eder çünkü bunlar değişmeyen

karakterlerini artık kaybetmişler ve farklı sayılar için de yerini almışlardır. Kişilerin bilişsel davranışları artık kavramsal anlamalar olarak düşünülebilmektedir.

2.2.5. Genelleme Sınıflandırması

Ellis (2007) tarafından genellenenin bir sınıflandırması yapılmıştır. Ellis, genellemeyi genelleme eylemleri ve refleksiyon genellemeleri şeklinde sınıflandırmış ve bunları alt sınıflara ayırmıştır. Genelleme eylemleri kişilerin aktiviteleri ve konuşmaları içinde sonuçlanan zihinsel aktiviteler olarak tanımlanmaktadır. Kişilerin açıkladıkları ifadeler refleksiyon genellemeleri olarak adlandırılmıştır. Ellis (2007), genelleştirme sınıflandırmasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

2.2.5.1. Genelleme Eylemleri

Kişinin bir problemle çalışırken kullandığı matematiksel işlemler gibi problem çözme davranışının bir incelemesi, görünür matematiksel odaklanması, kullandığı ilişkiler ve özellikler veya belirlediği stratejiler, genelleme girişimlerinde kişinin kullandığı görünür zihinsel hareketlerin çeşitlerinin bir tanımlamasıdır. Davranışların kendisi genelleme eylemlerini oluşturmaz ancak kişinin hangi genelleme eylemini yerine getirdiğini belirlemede araştırmacıya katkıda bulunur. Buradaki anlamıyla zihinsel eylemler fiziksel eylemlerden ayrılmaktadır ama eylem terimi, kişilerin tecrübesel dünyaları ile etkileşim içindeki bilgilerini yapılandıran pasif olmayan adaptif oluşumlarını vurgulamaktadır. Genelleme eylemleri Tablo 2.1 de verilmiştir.

İlişkilendirme. *Durumları ilişkilendirme* ile iki veya daha fazla durum arasında bir çağrışım oluşur. *Geri bağlantı* ile mevcut bir durum ve daha önce karşılaşılan bir durum arasında bir bağlantı oluşur. Kişi, daha önceden karşılaşılan bir problem veya durumla bağlantı kurar. Aslında iki senaryo arasında önemli matematiksel farklılıklar vardır. Kişi aynı zamanda önceki durumdan, benzer bir özelliği hatırlatan mevcut durumdaki bir özelliği fark ettiğinde veya diğer bir problemdeki benzer bir özelliği algıladığı bir probleme odaklandığında tekrar geriye döner. Ya da *yeniye oluşturma* ile mevcut duruma benzer olan yeni bir durumu ortaya çıkarılır.

Objeleri ilişkilendirme ile iki veya daha fazla mevcut obje arasındaki benzerliklerin bir çağrışımı oluşur. Kişi eşitlikler, grafikler veya diğer temsiller gibi iki ya da daha fazla mevcut matematiksel objeler arasında çağrışım kurar. Durumların ilişkilendirilmesi diye adlandırılan önceki kategorinin aksine kişi, farklı bağlam veya durumlarla çağrışım yapmak için objeleri göz önünde bulundurmaz ve sorudaki objeleri ilişkilendirir. Örneğin bir eşitliğin farklı bir eşitlikle aynı yapıya sahip olduğunun veya iki grafiğin benzer *özellik* lere sahip olduğunun farkına varır.

Araştırma. *Araştırmada* kişi, benzer bir unsurun ortaya çıkıp çıkmadığını belirleme teşebbüsü içinde aynı tekrarlanan hareketi ortaya koyar. Eğer kişi iki nesne arasındaki matematiksel bir ilişkiye odaklanırsa, bu hareketler *benzer ilişki için araştırma* olarak adlandırılır. Araştırmada kişi bir oran hesaplama gibi benzer eylemleri ortaya koyar. Araştırma eylemleri çoğunlukla kişilerin birçok sayı çiftlerini içeren tablolarla çalıştıkları zaman ortaya çıkar. Kişiler araştırma yaparken *prosedürler*, *örüntüler* veya *çözümler* üzerinde odaklandıklarında bunların ilişkileri üzerine odaklanırlar.

Genişletme. Eğer kişi sadece bir benzerlik ilişkisi veya bir örüntünün farkına varmakla kalmaz aynı zamanda bu ilişki veya örüntüyü daha genel bir yapı içine genişletirse genelleştirme eylemi *genişletme* kategorisi içinde yer alır. Genişletme sırasında kişi akıl yürütmesini genişletir ve böylece orijinaldeki problemin veya durumun ötesine ulaşır. Bu hareket içinde kişi, örneğin geçerli yeni bir tanım kümesi, bir sınıfın yeni elemanları, yeni bir ilişki, yeni bir yapı veya genel bir fenomenin yeni bir tanımlaması gibi yeni bir şeyi üretir. İlişkilendirme kategorisinde kişi bazen yeni durumları üretir. Eğer kişi, herhangi bir veya birkaç örnek, problem veya durumun ötesine genişleterek bir fikrin genelliğine odaklanıyorsa bu eylemleri genişletme eylemleri olarak kategorilendirilir. Ancak kişinin dikkati öncelikli olarak iki durum arasındaki bir çağrışımın oluşumuna odaklanırsa genelleştirme eylemi ilişkilendirme olarak adlandırılır.

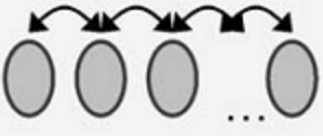
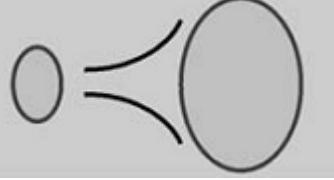
Ayrıntıları uzaklaştıran kişiler, belirli bir problem içinde genelleştirdiklerini alıp daha sonra bir özellik, ilişki veya diğer bir fenomen tanımlamalarından global bir durum

elde etmek için bazı bağlamsal detayları uzaklaştırırlar. Aynı zamanda belirli objelerin bir sınıfını ve sınıftaki her obje için doğru olabilecek genel bir fenomeni tanımlamak için devam edilir.

Kişi bir fenomenin yeni örneklerini geliştirmek için bir ilişki veya bir örüntü üzerinde bir işlem uygularsa işlem ile genişletme yapar. Eğer işlemler ilişkiyi, örüntüyü veya temsilleri değiştiriyorsa kişinin eylemleri *işlemle ile genişletme* olarak kategorilendirilir. Örneğin verilen bir $a:b$ oranını kişi c gibi bir sabitle çarpıyorsa mevcut oranın temsilini değiştirmiş ve $ca:cb$ şeklinde ifade etmiş olur.

Kişi, bir örüntüyü değiştirmeksizin tekrarlırsa *devam ettirme* ile genişletir. Bu sırada kişinin odaklanması işlemle genişletmedeki odaklanmasından kısmen daha farklıdır. İşlemde kişinin odaklanması oranla veya diğer ilişkilerle kalır ama devam ettirme de kişinin odaklanması örüntüye neden olan ilişkiden daha çok örüntünün kendisi ile kalır.

Tablo 2.1. Genelleme Eylemleri (Ellis, 2007)

İLİŞKİLENDİRME 	1. Durumları ilişkilendirme: İki veya daha fazla durum arasındaki bir çağrışımın oluşması 2. Objeleri ilişkilendirme: İki veya daha fazla mevcut obje arasındaki benzerliklerin bir çağrışımının oluşması	Geri Bağlantı: Mevcut bir durum ve daha önce karşılaşılan bir durum arasındaki bir bağlantının oluşumu Yeni oluşturma: Mevcut duruma benzer olan yeni bir durumun ortaya çıkarılması Özellik: Her ikisine benzer özellikler üzerine odaklanarak objelerin çağrışımı Form: Benzer formları üzerine odaklanarak objelerin çağrışımı
ARAŞTIRMA 	1. Aynı İlişkiyi Araştırma: İki veya daha fazla obje arasındaki sabit ilişkiyi belirlemek için tekrarlayan bir hareketin performansı 2. Aynı Prosedürü Araştırma: Tüm durumlar için geçerli olup olmadığını test etmek için bir prosedürün tekrarlanan performansı 3. Aynı Örüntüyü Araştırma: Belirlenmiş bir örüntünün karşılıklı tüm durumlar için geçerli olup olmadığını kontrol etmek için tekrarlanan performans 4. Aynı Çözüm veya Sonucu Araştırma: Hareketin sonucunun her zaman eşit olup olmadığını belirlemek için tekrarlanan bir hareketin performansı	
GENİŞLETME 	1. Uygulanabilirlik Alanını Genişletme: Bir fenomenin, durumların orijinalinden daha geniş bir alanda uygulanması 2. Ayrıntıları Uzaklaştırma: Global bir durum elde etmek için aynı içeriksel detayların uzaklaştırılması 3. İşlem: Yeni durumlar ortaya çıkarmak için bir obje üzerinde işlem hareketi 4. Devam ettirme: Yeni durumlar ortaya çıkarmak için ortadaki bir örüntüyü tekrarlama hareketi	

2.2.5.2. Refleksiyon Genellemeleri

Eğer kişi açıkça bilinen bir özellik, örüntü veya benzerliklerin ilişkilerini belirtiyorsa, bu durum refleksiyon genellemesi şeklinde sınıflandırılmıştır. Ayrıca, eğer kişi sözlü veya yazılı olarak bir durumu ortaya koymuyor ancak yeni bir problem için önceki durumlardan edindiği bir fikri uyguluyorsa yani bir genelleştirmenin sonucunu kullanıyorsa bu süreç de refleksiyon genellemesi olarak sınıflandırılmıştır. Yani her iki durumda da kişi tanımlamada bulunuyor veya ortaya çıkardığı bir genelleştirmeyi kullanıyorsa bu davranışlar ve durumlar refleksiyon genellemesi olarak tanımlanmıştır. Bu anlamda refleksiyon genellemeleri kişilerin genelleştirmedeki son durumlarını anlatmaktadır. Refleksiyon genellemeleri Tablo 2.2 de verilmiştir.

Belirleme veya Açıklama. Kişi, bir genelleştirmeyi belirlediği zaman genel bir örüntü, özellik, kural veya stratejiyi adlandırabilir veya karşılıklı olarak farklı durumlar ya da problemlerdeki yaygın bir unsuru belirleyebilir. Saptamaları veya durumları üreten kişiler genelleştirmelerini bir tanımlama veya matematiksel bir durum olarak sözlü veya yazılı olarak açıklarlar.

Kişi *devam eden bir fenomenin açıklamasını* yaptığında tipik olarak spesifik bir örneğin ötesinde genişleyen özellikleri tanımlar. Bu tanımlamalar nicelikler arasındaki devamlılık, hareket veya dinamik ilişkinin bir anlamı ile karakterize edilirler. Örneğin ‘böyle sürer’, ‘her durumda ortaya çıkar’, ‘her a için b yi görürüz’... gibi.

Özdeşlik hakkında açıklamalar ortaya koyulduğunda iki veya daha fazla problemler, durumlar veya objelerle bağlantılar kurarak oluşan algılamaları ile bir özelliği açıkça tanımlarlar. Bazen benzer olarak algılanan *özellik* üzerinde odaklanılır ve bazen de aynı olarak algılanan gerçek *objeler*, *temsiller*, *problemler* veya *durumlar* üzerinde odaklanılır.

Genel bir prensip olarak genel kurallar, örüntüler, stratejiler ve global kurallar tanımlanır. Genel kuralların açıklamaları matematiksel ilişkileri tanımlayan sözlü tanımlamalar, yazılı açıklamalar ve cebirsel tanımlamalar şeklinde ortaya çıkabilir.

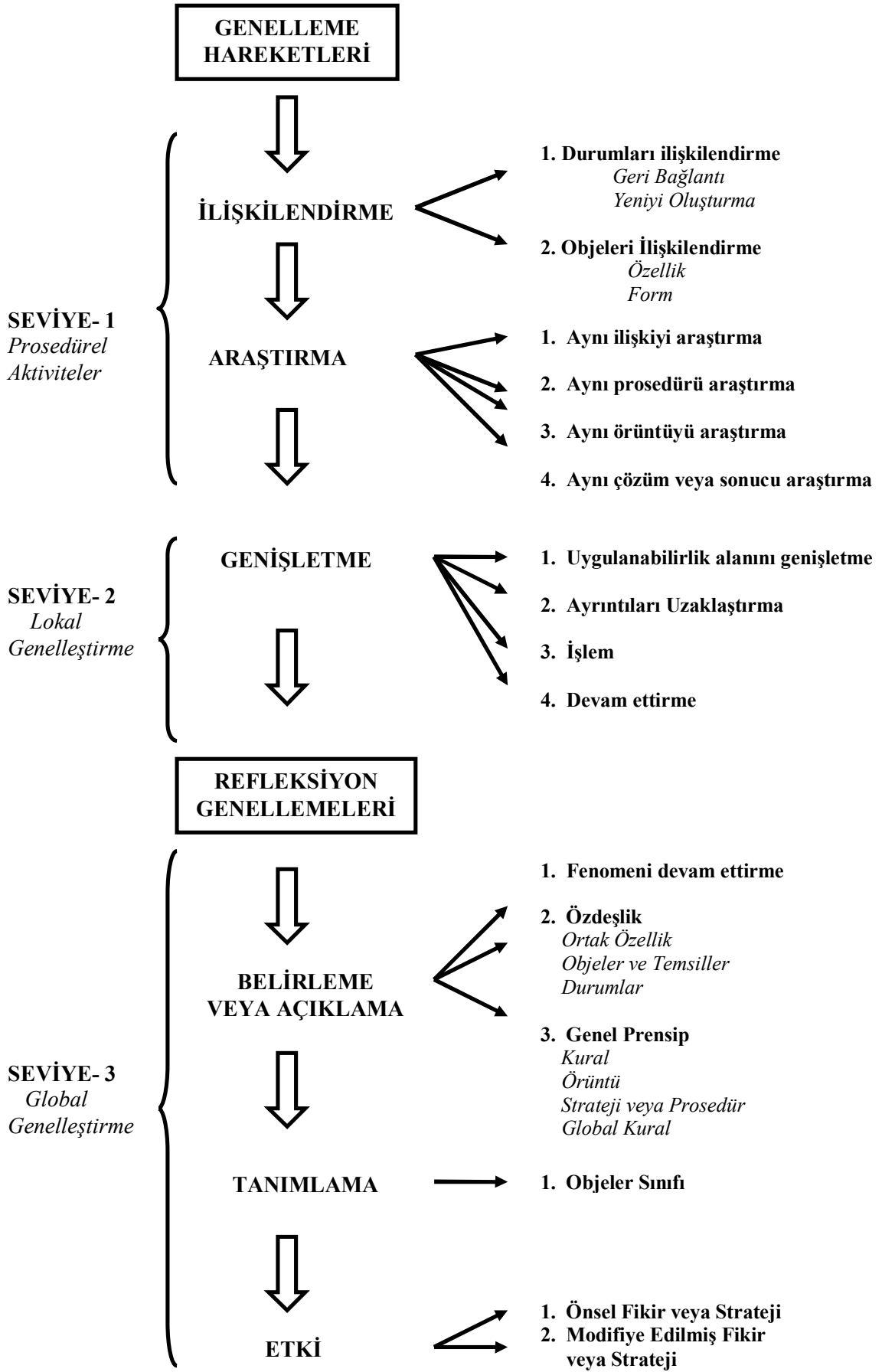
Genel stratejiler veya prosedürlerin tanımlanması, artık spesifik bir durumda ortaya çıkarılan hareketlerle sınırlı kalmayan yollardaki stratejilerle açıklanır. Global kuralların açıklamaları ise matematiksel objeler veya fikirlerin anlamları hakkındaki genelleştirmelerdir. Global kurallar spesifik durumlar veya durumların çeşitleri ile sınırlı olmayıp aksine lineerliği neyin oluşturduğu gibi bir fikrin daha genel anlamalarını ortaya koyar.

Tanımlama. Kişinin bir örüntü, ilişki, sınıf veya diğer fenomenin temel karakterini ifade ederken yaptığı açıklamalar *tanımlama* olarak karakterize edilir.

Etki. Daha önceden geliştirilen genelleştirmenin yeni aktivite üzerindeki *etkisi* refleksiyon genelleştirmesi olarak kategorilendirilmiştir. Önsel aktivitenin etkisini görmek eğer kişinin geçmişi veya önsel öğrenimlerine aşinalık yoksa oldukça zor olmaktadır.

Tablo 2.2. Refleksiyon Genellemeleri (Ellis, 2007)

BELİRLEME VEYA AÇIKLAMA	1. Fenomeni Devam Ettirme: Spesifik bir durumun ötesinde dinamik bir özelliğin genişlemesinin saptanması	
	2. Özdeşlik: Benzerlik veya ortaklık durumu	Ortak Özellik: Objeler veya durumlar için ortak özellik saptanması
		Objeler veya Temsiller: Benzer veya özdeş olan objelerin saptanması
		Durumlar: Benzer veya özdeş olan durumların saptanması
	3. Genel Prensipten: Genel bir fenomen durumu	Kural: Genel bir formül veya olay tanımlaması
		Örüntü: Genel bir örüntü tanımlaması
		Strateji veya Prosedür: Spesifik bir durumun ötesinde bir metot genişlemesinin tanımlaması
TANIMLAMA	Global Kural: Bir obje veya fikrin anlamının durumu	
	1. Objeler Sınıfı: Verilen bir ilişki, örüntü veya diğer fenomenlerin tümünü sağlayan bir objeler sınıfının tanımlanması	
ETKİ	1. Önsel Fikir veya Strateji: Daha önce geliştirilen bir genellenmenin uygulaması	
	2. Modifiye Edilmiş Fikir veya Strateji: Ortadaki bir genellenmenin yeni bir problem veya duruma uyarlanması	



Şekil 2.2. Genelleme Sınıflandırması Şeması

2.3. Görselleştirme

Görselleştirme, matematiksel anlama, kavrama ve muhakemede önemli bir bakıştır. Görselleştirme terimi yaklaşık olarak son yirmi yıldan beri araştırmaların literatürlerinde bir çok yerde kullanılmaktadır. Kişi uzamsal bir düzenleme (matematiksel yazılımları içeren) oluşturduğu zaman kişinin zihninde bu oluşuma rehberlik yapan bir görsel imaj bulunmaktadır. Bu nedenle görselleştirme, matematikle uğraşıda hem uzamsal bir doğanın tüm yazılımları ve hem de görsel olan zihinsel imajların yapılanma ve dönüşüm süreçlerini içerir (Presmeg, 1997b).

Hershkowitz (1989), problem üzerinde düşünürken bazı matematikçilerin kelime, cebirsel veya diğer sembolleri kullanmaktan sakındıkları ve aksine, sezgilerine temel oluşturan uzamsal ve diğer imajları içeren görsel düşünceleri kullanıp daha sonra onları sembolik terimler olarak kodladıklarından bahsetmektedir. Guzman (2002), aşağıdaki hikaye ile bu durumdan bahsetmektedir. Burada hikayede bahsedilen kişi matematikçi Norbert Wiener'dır. Şüphesizdir ki çoğu matematikçi de benzer durumlarla öğrenciliği veya öğretmenliği zamanında karşılaşmıştır. Wiener, birçok izleyenin önünde bir konferans vermektedir ve karışık bir ispatın detaylarından bahsetmektedir. Tahta birçok formülle dolmuştur ve sonuca ulaşmasına ramak kala aniden tıkanır. Bir dakika, iki dakika,... Öğrencilere göre bu durum dünyanın sonudur. Usta Winner ispatta tıkanmıştır. Bu inanılmaz bir durumdur. Formüllere bakmakta, saçlarını karıştırmakta ve kendi kendine homurdanmaktadır, ta ki ne yapacağına karar verene kadar. Tahtanın boş köşelerinde bir yerde gizemli bazı resimler çizene dek biraz beklemiştir. Tek bir kelime bile söylememektedir. Geniş omuzları neler yapığını herkesten gizlemektedir. Sonunda gerçeği görmüş ve yazdıklarını dikkatlice silmiştir. Daha sonra tahtada kaldığı yere girmiş ve hiçbir tereddüt sergilemeden ispatını tamamlamıştır.

Matematik nesnelendirme, gerçek durumlardan soyutlamaları temsillendirme ve bu temsillerin çoğunun görsel olduğuyla ilgilenir (Bishop, 1989). Bu anlamda, görselleştirme bilgiyi anlamlı yapılar olarak organize etmekle kalmaz aynı zamanda bir çözümün analitik gelişimine rehberlik eden önemli bir faktördür.

Görselleştirme, yapılandırma, temsilleme ve zihinsel imajların dönüşümünün karmaşık bir sürecidir (Wheatley, 1998). Daha önceden bilinmeyen fikirler ve ilerleyen

anlamalar hakkında bilgiler arasında bağlantı kurmanın ve betimleme yapmak amacıyla resimlerin, imajların, diyagramların zihnimizde, kağıt üzerinde veya teknolojik araçlarla yansımaları, kullanımı, yorumlanması, yaratımının bir ürünü, süreci ve yeteneğidir (Bishop 2003; Hershkowitz, 1989; Zimmermann ve Cunningham, 1991).

Bu tanım matematik öğreniminde görselleştirmenin, matematiksel problemleri araştırmak ve matematiksel kavramlara ve aralarındaki ilişkilere anlam vermede güçlü bir araç olduğunu vurgulamaktadır. Görselleştirme, bilginin çokluğu durumunda karmaşıklığı azaltmaya imkan vermektedir. Ancak görselleştirme hakkındaki sınırlılıklar ve zorluklar ve görselleştirmeye karşı olan gönülsüzlük çokça tartışılmıştır (Arcavi, 2003; Eisenberg, 1994; Stylianou ve Silver, 2004).

Görselleştirme, matematiğin bir örüntü bilimi olarak tanımından tarif edilmiştir (Zimmermann ve Cunningham, 1991). Matematikçi, örüntüleri sayı, uzay, bilim, bilgisayar ve hayalgücü içinde araştırır. Eğer matematik bir örüntü bilimi ise anlamak için bir araç olarak görselleştirmeyi yaratıcı olarak kullanmak ve bu örüntüleri görselleştirmenin etkili bir yolunu bulmaya çalışmak doğaldır. Presmeg (1992) görselleştirmeden, anlamak için bir destek veya sonuca ulaşmak için bir araç olarak bahsetmiş ve bu nedenle de bir diyagramın değil, bir kavramın ya da bir problemin görselleştirilmesinden bahsedilebileceğini söylemiştir. Bir kavramın veya bir problemin görselleştirilmesinde, problemin zihinsel bir imajına başvurulur ve bir problemi görselleştirme diyagram veya görsel imaj terimlerinde problemi anlama manasına gelir. Böylece, görselleştirme süreci çözüm metodunun gerekli bir parçası olarak diyagramlı veya diyagramsız görsel imajı içermektedir (Presmeg, 1985). Matematiksel görselleştirme, imaj oluşturma veya zihinsel temsilleri yapılandırma süreci (zihinsel veya kalem ve kağıt ile veya teknoloji ile) ve matematiksel keşif ve anlama için bu imajları etkili olarak kullanmadır.

Grafikler, diyagramlar, resimler ve geometrik şekiller veya modeller, matematikte soyut kavramların görselleştirilmesinde birer araçtır. Bu araçların yardımıyla öğrenciler fiziksel dünya ve soyut kavramlar arasında ilişkileri inşa edebilirler. Görselleştirme terimi matematik eğitimcileri arasında farklı anlamlarda kullanılmaktadır. Zazkis, Dubinsky ve Dautermann (1996) tarafından verilen tanıma göre görselleştirme bireyin içsel bir yapılanma ve hisleri ile kazanıma eriştiği bir şey

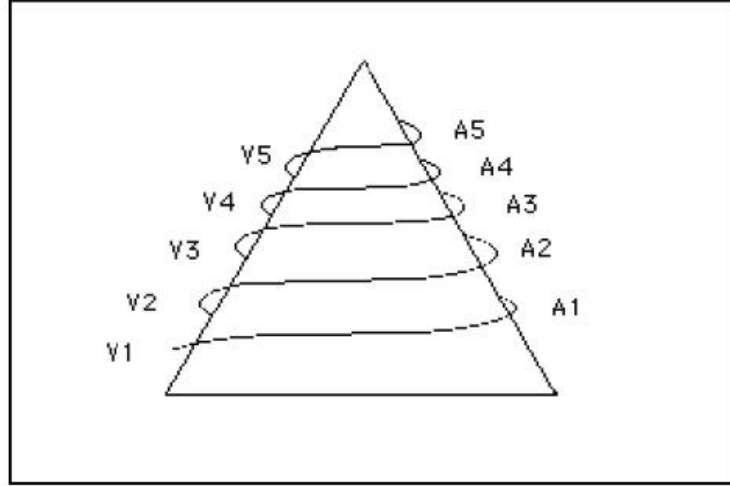
arasında güçlü bir bağlantı kurma davranışıdır. Böyle bir bağlantı iki yönde olabilir. Görselleştirme hareketi, bireyin harici (dışarıdan gelen) olarak algıladığı objeler veya olaylarla ilişkilendirdiği objeler veya süreçlerin herhangi zihinsel yapılanmalarından meydana gelebilir. Buna alternatif olarak, görselleştirme hareketi bireyin kendi zihnindeki objeler veya süreçlerle tanımladığı objeler veya olayların kağıt, tahta, bilgisayar ekranı gibi bazı harici ortamlarda yapılanmasından meydana gelebilir.

Görselleştirmenin yapılan şeyin ürününü değil, yapılmasını içerdiğini söylemektedir. Bu nedenle, bir karenin çizimi veya kartondan yapılmış bir kare tek başına görselleştirmeyi oluşturmaz. Aynı zamanda kişinin sadece bir resme bakması değil, onun zihninde yapabildiğidir. Yani görselleştirme, kişinin resimle veya kesilen şeyle zihnindeki şey arasında yatmaktadır. Örneğin bir düzlemde iki doğrunun kesişimi olarak yorumlanan iki bilinmeyenli iki lineer denklemin çözümü, iki kesişen doğrunun çizilmiş basit bir resmi olduğunda bir görselleştirme hareketidir denebilir. Diğer taraftan eğer bir matematikçi hiçbir çizim ya da potansiyel çizim olmaksızın sağ ve sol alt grupların yapılanmasını hayal ettiğinde ve bunların daima eşit olup olmadığı düşüncesine daldığında veya iki bilinmeyenli iki lineer denklemin çözümü için bir algoritma uyguladığında bu görselleştirme hareketi olmamaktadır. (Zazkis ve ark., 1996).

Bu nedenle, görselleştirme zihinsel ve diğer ortamlar arasındaki dönüşümün yapılanmasıdır. Görselleştirme, zihinsel imajların tümüyle harici ortamın yokluğundaki diğer zihinsel imajlara dayandığı yapılanmalar değildir. Aynı zamanda bir resmi bir kağıt parçasından diğerine kopyalamak eğer kağıt, imajları ile ilgili zihinsel yapılanmaları içermiyorsa da görselleştirme değildir.

Zazkis ve arkadaşları VA (Visualization/Analysis) modelini ileri sürmüşlerdir (1996). Bu model, görsel ve analitik düşünmenin kesikli seviyeleri ile ilgili terimleri içermektedir. Burada seviyelerin kesikli olmasından bahsedilmesine rağmen yaklaşım oldukça süreklidir. Bu süreklilikteki belirli noktalar oldukça önemlidir. Sürekliliğin kesikli yaklaşımları matematikte ve fenin çoğu dalında oldukça yararlı olmaktadır. Örneğin, bir fizikçi düzgün olmamasına rağmen aslında tüm pozisyonlarda bulunabilen anlayışın aksine bir atomun çekirdeğindeki kesikli uzaklıklardaki orbitallerde bulunan elektronları tanımlamaktadır.

Aşağıda verilen Şekil 2.5 deki düşünme, V_1 diye adlandırılan görselleştirmenin bir hareketi ile başlamaktadır. Bu, bir bilgisayar ekranına bakmayı veya bir şekli veya diğer bazı resimleri ve yapılandırılan zihinsel süreçleri veya objeleri içerebilir. Ya da bir resim çizmeyi veya diğer bazı zihinsel objeler veya süreçlerin harici birikimlerini içerebilmektedir.



Şekil 2.3. VA (Görselleştirme-Analiz) Modeli (Zazkis ve ark., 1996)

Sonraki basamak, V_1 basamağında yapılandırılan süreçlerin ve objelerin koordinasyonunun (Piaget nin reflektif soyutlamasındaki) bazı çeşitlerini içeren A_1 analizi hareketidir.

Görselleştirmenin sonraki basamağı V_2 de, öğrenci V_1 de kullanılan aynı ‘resme’ döner ancak A_1 deki analizin bir sonucu olarak bu değişmiştir. Burada V_2 resmi yeniden yorumlamak için A_1 in uygulamasının eş durumudur veya eskisinin yerine geçmek için yeni bir resmin yapılmasına öncülük eder. Her durumda da sonuç, orijinal durumun daha zengin bazı anlamalarını başarmadaki harici bir yorumlamadır. Modelde yatay hareket tekrarladığında her analiz hareketi görselleştirmenin daha önceki hareketinin sonucuna dayanarak sonradan daha sofistike bir analizin adını koyan daha zengin ve yenisini üretmede kullanılır. Böylece, şekildeki gibi görselleştirme ve analiz

hareketleri kişiye başarılı olarak daha yakınlaşır. Bu, ilk başta görselleştirme ve analiz hareketlerinin kişi tarafından oldukça ayrı ve farklı görüldüğüdür. Gitgide, düşünmenin iki şekli daha ilişkili ve aralarındaki hareket daha sıkı olur. Başlangıçta kişi, analizi kendisine özgü düşünürken görselleştirmeyi harici olaylar olarak yorumlar. Hareket devam ettikçe, her iki düşünme şekli kişinin zihninde çok daha fazla içselleşir. Belirli bir süre sonra, VA üçgeninin tepesinde yakınlaşır, analiz ve görsel anlamalar sentezleşir. Böylece, kişinin ya da gözlemcinin bunu ayırması artık çok güç olmaya başlar.

Bu yaklaşım, bir tepeye slalom yaparak çıkan bir kayakçıya benzemektedir. A_i analizindeki durum V_i deki görselleştirmeye dayanmakta ve V_{i+1} deki görselleştirme, A_i deki analizle zenginleştirilmektedir.

Matematiğin önemli bir bakışı olan görselleştirme gerçeği, insan zihninin yapısı ve matematiksel aktivitelerin anlamları ile ilgili konuşuyorsak pek tabiki oldukça anlamlıdır. Matematiksel aktivite içinde kişi, gerçeğin birçok farklı yapısını keşfetmeye çalışırken, aşağıdaki şekilde matematizasyon diye adlandırılan süreci ele alırlar. Başlangıçta, algılarımızın soyutlanmasında yardımcı olan gerçek objelerin belirli benzerliklerin algılarına sahibizdir. Aritmetik, örneğin gerçek hayatta var olan çoklukların rasyonel olarak hakimiyeti için ortaya çıkmıştır. Geometri, uzaydaki form ve uzanımların özelliklerini rasyonelleştirmeye çalışır. Cebir, sayıların arkasındaki yapıları ve onlarla ilgili olan işlemleri araştırır. Bir nevi sembollerin sembolleri ile ilgilidir. Matematik analiz, zamandaki ve uzaydaki gerçek şeylerin değişimlerindeki yapılarla ilgilidir (Guzman, 2002).

Soyutlama ile ilgili matematiksel aktivitelerde, maddesel vizyonu daha anlaşılır hale getirmek için matematikçiler sembolik süreçleri, görsel diyagramları ve çalışmalarına eşlik eden hayal güçlerini gerektiren zihinsel süreçlerin birçoğunu sıklıkla kullanırlar. Zihinsel yansımaların bir kümesi ve düşüncelerdeki farklı objeler arasındaki ilişkilerin holistik, birimsel ve genişlemiş vizyonu olan eldeki nesnenin özel bir aşinalığı gibi soyut ifadenin belirli bir önsezisi diye adlandırdığımız durumları elde etmeye yardımcı olurlar. Bu farklı objelerin yapılarının bazı kısımlarındaki uygun bazı değişiklikleri tanımada nasıl davranacakları ile ilgili bu anlamda ileriye bilmeye

çalışırlar (Guzman, 2002).

Görselleştirme görsel imge, görsel hafıza, görsel uygulama, görsel ilişkiler, görsel dikkat ve görsel tasavvur aracılığı ile karakterize edilen veya bunları kullanan zihinsel süreçleri veya bilişsel süreçleri içerir. Bunun nedeni, bilişsel süreçlemenin hazır bulunuşluluk, algılama, dinleme, bakma, görsel imajlama, kavramsallaştırma, sezgisel düşünme ve buluşsal süreçlemeyi kapsamasıdır. Bishop (1989), görsel süreçleme yeteneğinin biçimsel olmayan bilginin ve soyut ilişkilerin görsel terimlere dönüşümünü ve görselleştirmeyi gerektirdiğinden bahsetmiştir. Aynı zamanda, görsel temsillerin ve görsel imgelerin dönüşümünü ve manipulasyonunu içerdiğini söylemiş ve bir süreç yeterliliği olup uyarıcı malzemelerin mevcudluğu ile ilgili olmadığını belirtmiştir.

Presmeg (1985), görsel imgelerin zihinde yer aldığını söylemektedir. Ona göre, görsel imaj, görsel veya uzamsal bilgileri resmeden zihinsel şemadır ve bu zihinsel şema, görselleştirilmiş algılamanın var olduğu veya olmadığında ortaya çıkar. Presmeg (1986), lise eğitiminde görselleştirme üzerine yaptığı çalışmada okul seviyesinde düşünmenin sözel-mantıksal (verbal-logical) gücü, matematik yeteneğinin gücünün seviyesini belirlerken, görsel-uzamsal (visual-spatial) bileşeni bunun çeşidini belirlemektedir demektedir. Presmeg'e göre görsel imaj, görsel veya uzamsal bilgiyi tasvir eden zihinsel bir şemadır.

Literatürdeki görsel imaj ile ilgili çoğu tanımlar algısal objenin olmadığı şeklindedir ki Hebb'in imaj tanımında "zihinsel aktivite olayı bir nesnenin (duyu organı ile ilgili olmayan) algılanması ile ilgilidir" denmektedir (Suwarsono, 1982: 270). Yukarıdaki tanımda Presmeg kasıtlı olarak imajın "zihindeki resim" (Clements, 1982: 36) terimini onaylamaksızın şekil, örüntü veya formu tasvir eden imaj çeşitlerini içeren genel tanımı vermiştir. Ancak burada bir resmin canlılık ve netliğini ifade eden imaj ifadesinin de bu tanımda içerildiğini söylemektedir. Tanım aynı zamanda sözel (verbal), nümerik veya matematiksel sembollerin, imajın Paivio (1971: 482) tarafından adlandırılan 'sayı formları' şeklindeki çeşidini oluşturmada uzamsal olarak düzenlenebildiğine imkan vermektedir.

Presmeg yaptığı çalışmada, çözümün görsel bir metodunun diyagramlı veya diyagramsız düşünme veya cebirsel metotlarının bile kullanıldığı, çözümün metodunun

gerekli bir parçası olarak görsel imajları gerektirmesinden bahsetmektedir. Çözümün görsel olmayan bir metodunun ise çözümün metodunun gerekli bir parçası olarak hiçbir görsel imajı gerektirmeyen şekli olduğunu söylemektedir (1986).

Aynı çalışmada Presmeg, bir kişinin matematiksel görselliğini, kişinin hem görsel hem görsel olmayan metotlarla çözülebilen matematiksel problemleri denerken görsel metotları kullanmayı tercih etmesi şeklinde ifade etmiştir. Ona göre görsellemeciler hem görsel olarak hem de görsel olmayarak çözülebilen matematiksel problemleri denerken görsel metotları kullanmayı tercih eden kişilerdir. Görsellemece olmayanlar ise bu problemleri denerken görsel metotları kullanmayı tercih etmeyen kişilerdir. Zazkis ve arkadaşları görsellemece olmayanları analizci (analyzer) veya analitik düşünen (analytic thinking) olarak adlandırmışlardır (1986).

Krutetski'nin (1976) modelinde düşündüğü gibi pozisyon tüm matematiksel problemlerin çözümlerinde düşünme veya lojik durumları gerektirir. Bu sonucun yanında, çalışmanın gerekli olan parçası olarak görsel imajın varlığı ya da yokluğu metodun görsel olmasını yada görsel olmamasını belirler.

Presmeg öğrencilerde saptadığı beş farklı çeşitte görsel imajları şu şekilde sıralamaktadır: somut-resimsel imajlar (zihindeki resimler), örüntü imajları (görsel-uzamsal şemada tasvir edilen sade ilişkiler), formüllerin hafıza imajları, kinestetik imajlar (kaslarla ilgili aktiviteleri içeren) ve dinamik (hareketli) imajlar. Öğrenciler doğal olarak farklı durumlarda farklı görsel imajlar kullanmaktadırlar (1986). Presmeg görsel imaj çeşitlerini şu şekilde açıklamaktadır:

Somut imaj. Günlük objelerin parçalarının zihinde biraraya gelip oluşturduğu bütünsel (holistik) bir resim şeklindeki imaj çeşitidir (Presmeg, 1986). Örneğin fincana benzeyen bir şekil sadece fincan olarak adlandırılır.

Örüntü imajı. Görsel-uzamsal şema içinde resmedilen saf ilişkilerdir. Bu imaj öğrencilerin konfigürasyonları ve konfigürasyonların önemli özelliklerini hatırlamaya imkan verir. Aynı zamanda, önemli notasyonları soyutlamaya da imkan verir. Örüntü

imajı, somut imajların ilişkilerinin örüntü formunda olduğunda ve özelliklerinin bazılarının şuurlu bir farkındalığı olduğunda kullanılır (Presmeg, 1986). Örneğin büyük bir üçgen dört küçük üçgenin bir birleşimi olarak görülebilir. Yada başka bir örnek olarak birim çemberde dört bölgeye göre sinüs, kosinüs ve tanjantın pozitif veya negatifliği için; sinüs $++--$ şeklinde gider, kosinüs $+-+--$ şeklinde gider, tanjant $+-+--$ şeklinde gideceği verilebilir.

Formül imajı. Genellikle zihin gözüyle gördüğümüz ve tahta veya defterde yazılı şekildeki formüllerin hafızamızda oluşturduğu imajdır (Presmeg, 1986).

Kinestetik imaj. Kas gücü aktiviteleri gerektiren imajlardır. Kişi, objeleri bir aktivite içinde hareket ettirerek resimlendirir. Yani imaj kaslarla ilgili bir aktiviteyi gerektirir (Presmeg, 1986). Örneğin kişinin bir açının tanjantının nerede negatif olduğunu belirlemek için parmağıyla bölge imajında gezinmesi söylenebilir.

Dinamik imaj. Bir kavramı farklı somut imajlarla bağdaştırarak oluşturulan, şekillerin yeni ilişkili şekiller içinde değişebildiği imaj şeklidir (Presmeg, 1986). Örneğin kişinin doğru parçasını zihninde yer değiştirmesi söylenebilir.

Görselleştirme uzamsal yetenekle doğrudan ilişkilidir. Geometride uzamsal yetenek, zihinsel imajları formüle edebilme ve zihinde bu imajları manipule edebilme yeteneğidir (Lean ve Clements, 1981). Diğer taraftan görselleştirme temsillleme, dönüştürme, üretme, nakletme, belgeleme ve görsel bilgiler üzerine yansıtmadır (Hershkowitz, 1989). Dahası, görsel bir imaj somut olmasından dolayı kişisel ispat ve yakınlık hissinin yaratılmasında gerekli bir faktördür (Fischbein, 1987). Bu nedenledir ki görselleştirme ve uzamsal his arasında oluşan yakın ilişkinin farkında olmak oldukça önemlidir.

Sofistike matematikçiler ‘görme’nin, karmaşıklığına aldırmandan sembolik formlardan geçtiğini iddia etmektedirler. Diğerleri ve tabi ki matematik öğrencileri görselleştirmenin güçlü bir tamamlayıcı rolü olduğunu düşünmektedir (Arcavi, 2003).

Guzman (2002), kişinin görselleştirmesinin, sadece gözlerimizin optik süreçlerini gerektiren bir süreç değil, psikolojik duyunun da içinde olduğu vizyon diye adlandırdığımız daha yüzeysel bir fenomen olduğundan bahsetmektedir. Ona göre beynimizin aktivitesi olan önemli bir form gerektirdiğinden çok daha kompleksir. Belki de yeni doğmuş bir çocukta yer alan fenomen, fotografik kameradaki yapıya çok daha benzer bir durumdur. Ancak beyinsel süreçler hızlı bir şekilde beyinde yer almaya başlar ve kısa bir zaman sonra, dış dünyasındaki objeleri araştırdıktan sonra önceleri basit bir fiziksel optik fenomen olan vizyonunu doğru bir zihinsel yorumlamaya dönüştürür.

Farklı bir bağlamda, görselleştirme sözde “kavram imajlarının” önemli bir parçası olarak da düşünülebilir (Tall ve Vinner, 1981). Kavram imajları, matematiksel bir kavramla ilgili görsel imajları, özellikleri ve tecrübeleri içerir. Formal bir matematiksel kavramı anlamak için kişi onunla ilgili bir kavram imajı üretme ihtiyacı hisseder.

Uygun şekilde görsellemek için yüksek bilişsel beceriye ihtiyaç vardır. Larkin ve Simon (Presmeg, 1989 da), diyagramla ilgili temsillerin özel bilgiye sahip olmayan kişiler arasında hemen anlaşılır olmadığından bahsetmektedir.

Görsellemedeki zorluklar Eisenberg ve Dreyfus (1991) tarafından ‘bazı görünmeyenleri görmeye başlıyoruz’ başlığı altında sınıflandırılmış ve üç kategoriye ayrılmıştır: kültürel, bilişsel ve sosyolojik. Kültürel zorluk olarak, matematikçilerin mantıklı veya akla yatkın olan ya da olmayan inançları ve değerlerinden bahsetmektedir. Matematik topluluklarının ‘bu matematik değildir’ (Sfard, 1994) şeklindeki anlaşmazlıkları müfredata ait materyaller kanalıyla sınıfların içine girmekte ve öğretmen eğitimi yönlendirmekte ve önemini, ruhunu şekillendirmektedir. Presmeg (1997) bunu ‘görselleştirmenin devalüasyonu’ olarak adlandırmakta ve bu durumun matematik yapmanın önemli bir parçası olarak görselleştirmeye önem verme adına sınıflardaki çalışmalar için az bir kısım ayrılması olduğundan söz etmektedir. Ne zaman ki görselleştirme kavramsal olarak zengin imajlar barındırırsa, bilişsel talebin pek tabi daha yüksek olacağını söylemektedir. Bilinçli veya bilinçsizce bu durumlar oldukça kaygan, riskli ve uygunsuz kabul edilmektedir. Ayrıca öğrenciler için çoklu temsilleri elde etmede yetenekli olma ve öğrenmeyi anlama, uzun ve sıkıcı, içerikten bağımsız,

doğrusal olmayan ve çetrefilli bir süreç olabilmektedir (Arcavi, 2003). Sosyolojik zorluklar olarak Eisenberg ve Dreyfus (1991), ‘öğretmenin zorlukları’ olarak düşündükleri şeyle öğretmenin ‘didaktik aktarım’ından bahsetmektedirler. Çoğu öğretmenin pedagojik olarak daha uygun ve etkili görünen analitik temsilleri kullandığını söylemektedir.

Presmeg (1986), görsellemeciler tarafından yaşanan zorlukları şu şekilde sıralamıştır:

- Bir imajın veya diyagramın birebir somutluluğu, düşünceleri alakasız detaylarla bağlayabilir veya yanlış veri ile karşılaşılmasına neden olabilir.
- Standart bir şeklin imajı, standart olmayan bir diyagramdaki bir kavramın farkındalığını önleyen esnek olamayan düşünmeyi getirebilir.
- Kontrol edilemeyen bir imaj düşüncenin daha verimli yollarını açmayı önleyebilir. (Eğer imaj parlaksa bu zorluk keskin olur).
- Özellikle eğer imaj bulanıksa, sıkı analitik düşünme süreçleri ile bağlanmamış imajların yardımı olmaz.

Görselleştirme tecrübesi daha çok yorumlamaya ağırlık vermektedir. İnceleyeceğimiz görselleştirmenin çoğu formunda, matematiksel aktivitelerin tarihine sıkıca bağlanmış kişisel ve sosyal değişimlerin tüm dünyasına can alıcı şekilde müdahale eden doğru bir kodifikasyon ve dekodifikasyon süreci izlememiz gerekmektedir.

Bu, matematiğin sosyal ve tarihi içeriğinde kültürleşmesine ve yoğunlaşmasına ve de çevremizdeki çoğu insanla etkileşimine dayanan görselleştirme sürecini ortaya çıkarır. Görselleştirme bu nedenle sadece ilişkilerin bir vizyonu olmayıp aynı zamanda düşüncelerimizin bir yorumudur. Herhangi bir görselleştirmedeki dekodifikasyon sürecinin şekli, matematiksel görselleştirmenin aslında tek anlamlı bir terim olmadığını da ortaya koymaktadır. Temsilin soyut bir ifadesi ve matematiksel durum arasındaki eşleşmenin derecesine göre bu az yada çok yakın, doğal, sembolik, kişisel ve belki de anlatılamaz olabilir. Bu nedenledir ki, görselleştirmenin bir çok farklı çeşidi olabilecektir.

Guzman (2002), bu anlamda görselleştirmeyi dört çeşitte sınıflandırmıştır: *İzomorfik görselleştirme, homomorfik görselleştirme, analogik görselleştirme, diagramatik görselleştirme.*

2.3.1. İzomorfik Görselleştirme

Objeler, yaptığımız temsillerle tam bir eşleşmeye sahip olabilirler. Bu, prensipte bizim görsel temsillerimizin elemanlarının ve objelerin temsil ettiği matematiksel ilişkileri dönüştüren kurallar kümesini belirlemenin mümkün kılınması anlamına gelir. Bu anlamda objelerin görsel manipülasyonu eğer istersek soyut matematiksel ilişkilere dönüştürülebilir. Temsillerin bu çeşidi izomorfik görselleştirme olarak adlandırılabilir (Guzman, 2002). İzomorfik görselleştirmeye Guzman şu örneği vermiştir:

“Romalılar bir şehri kuşatmışlar. Josephus ve diğer 40 müridi şehrin yanında bir mağaraya sığınmışlar ve teslim olmak yerine kendilerini öldürmeye karar vermişler. Josephus ve bir arkadaşına göre bu durum onları pek de memnun etmemiştir. Bu işlemi belirli bir sırayla yapmayı ileri sürmüşler. Tüm adamlar çember şeklinde sıralanacaklar, herkesin hayran olacakları birisi ile intihara başlanacak ve süreç üçerli sayarak devam edecektir. Josephus’un fikri tabiki kendinin ve arkadaşının bu sıralamada son iki kişi olmaları ve böylece diğerlerinin katliamından sonra bunu durdurmaya karar vermeleridir. Bu fikri gerçekleştirmek için Josephus ve arkadaşının hangi sırada yer almaları gerekmektedir?”

Bu sorunun cevabı oldukça kolaydır. 41 tane taş parçası alınır, 1,2,3,...,41 şeklinde işaretlenir. Daha sonra taşlarla katliam canlandırılır ve sonda kalan iki taş belirlenir. Problemin cevabını elde etmedeki görselleştirme açıkça izomorfiktir. Bu problem bu şekilde çözülebilir ancak örneğin 41 yerine 47 tane taş parçası olsaydı ve üçerli yerine beşerli sayılsaydı durum değişecekti. Buradaki görselleştirme belirli problemi çözer ancak matematikçiler eğer m tane taş parçasının alınıp, çember üzerine konulduğu ve belirli bir n . taşın çıkartılarak başlanıldığı durumla ilgilenirler. Matematikte çoğunlukla kullanılan görselleştirme çeşitlerinden birisi izomorfik görselleştirmedir ve matematikçiler bunları nesnellendirmeler yapmadan oldukça fazla kullanmaktadırlar.”

Bir matematik probleminin bir çok durumunun içinde mümkün olabileceği bir modelizasyon, bir izomorfik görselleştirmenin birçok durumu içinde olabilir. Bunun yararı oldukça aşikardır. Objelerin duyularımızla veya hayal gücümüzle algıladığımız manipülasyonu, kendi yapısı içinde daha komplike olan soyut objelerden normalde daha direkt ve daha kolaydır. Herhangi bir durumda, görselleştirmemizin gelenek, sözsüz kararlar ve konsensüs ile yapılmış görüntüler içerdiğinin farkında olmamız gerekmektedir. Bu durum onları, anlaşılması için tüm kodların kullanımına bağımlı kılar (Guzman, 2002). “Bir resim bin kelimeye değer” (Thornton, 2000) sözü doğrudur, ancak bu ifade önemli bir şartı da varsaymaktadır: imaj doğru olarak anlaşılmalı ve yorumlanmalıdır. Aksi taktirde, imaj hiçbirşey ifade etmez.

2.3.2. Homomorfik Görselleştirme

Bu çeşit görsellemede, soyut objeler arasındaki ilişkileri yeterince taklit eden belirli karşılıklı ilişkilere sahip belirli elemanlar bulunmaktadır. Böylece, bu elemanlar bize tahmin, araştırma, ispat, ...ların matematiksel süreçlerindeki imajlandırmalarımıza rehberlik etmede bazen çok önemli destekler sağlamaktadırlar. Çoğu durumlarda, bu görselleştirmeler oldukça kişisel ve subjektif süreçler olup, bazen kolay anlaşılamayan ancak neler yaptığını anlamaya değer etkiler elde etmeye yaramaktadırlar (Guzman, 2002).

Guzman, homomorfik görselleştirme için aşağıdaki örneği vermiştir:

“(Schröder-Bernstein Teoremi): A ve B iki küme olmak üzere f , A dan B ye ve g , B den A ya birer injektif (1-1) fonksiyonlar olsunlar. O halde, A dan B ye bijektif (1-1 ve örten) bir h fonksiyonu vardır.

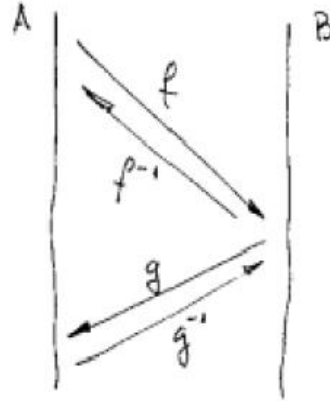
Aşağıdaki gibi iki doğru ile A ve B kümelerini gösterelim (Şekil 2.6). f ve g aşağıya doğru inen oklarla temsillensin. Bunların ters fonksiyonları f^{-1} ve g^{-1} ise de eşdeğer olarak yukarıya çıkan ok zinciriyle temsillendirilsin Birleşen okların aşağıya inen zincirlerini düşünelim ve aşağıdaki gibi sınıflandıralım:

1. sınıf: A da biten, aşağıya inen zincirler
2. sınıf: B de biten, aşağıya inen zincirler
3. sınıf: hiç bitmeyen zincirler

Zincirlerin bu sınıflamasının, A'nın (ve B'nin) noktalarının bir sınıflanmasının buradan geçen zincir çeşidine göre üç ayrık kümeye neden olduğu kolayca görülür.

İstenilen $h(x)$ bijeksiyonu ise kolayca şu şekilde tanımlanabilir:

$$h(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{if } x \text{ is of type 2} \\ g^{-1}(x) & \text{if } x \text{ is of type 1} \\ f(x) & \text{if } x \text{ is of type 3} \end{cases}$$



Şekil 2.4. Homomorfik Görselleştirme Örneği (Guzman, 2002)

2.3.3. Analogik Görselleştirme

Daha önce incelendiği için davranışını daha iyi bildiğimiz veya belki de daha kolay elde ettiğimiz ve analogik (benzeşim kurduğumuz) bir yoldan birbirleri ile ilişkili olan objeleri zihinsel olarak yerine koyarak çalışılan görselleştirme çeşitidir.

Bu görselleştirme veya analogik modelizasyon çeşidi Arşimed'in kullandığı sıradan keşif metodlarından birisi olan ve "The Method" olarak bilinen ünlü yazısında arkadaşı Erastostenes'e bahsettiği gibidir. Arşimed'in birçok muhteşem keşifleri vardır

ki örneğin kürenin hacmini hesaplamada analogilerin ilk yolları ortaya çıkmış ve mekanik doğanın deneylerini düşünmüştür.

Analojik metodların kullanımı matematikçileri şaşırtmamalıdır. Bunu sadece Arşimed değil, örneğin Johann Bernoulli de tüm dünyadaki akut matematikçilere “Acta Eruditorum” da brachistocrone problemine analojik çözüm getirerek farklı öneri getirmiştir. Çoğu köklü formalistlere rağmen, bu şekildeki analogilere dayalı alanlarda eğer kişi isterse çokça gelişimler gösterebilirler (Guzman, 2002).

Guzman analojik görselleştirmeye aşağıdaki örneği vermiştir:

Düzlemde a, b, c, d kenar uzunluklarına sahip konveks bir dörtgen oluşturacak sırasıyla uzunlukları a, b, c, d olan dört doğru parçası alalım. Eğer bir tane oluşturabilirsek birçok farklı konveks dörtgen oluşturabileceğimiz açıktır. Bunların arasında maksimum alana sahip olanı bulalım.

Bir düzlem ve konveks bir dörtgen elde etmek için dört ince çubuk alalım. Dörtgeni iç bölgesinde kalacak şekilde büyük bir sabun filmi ile kapatalım. Dörtgenin içindeki bir noktadan filmi delelim. Çubukların denge noktası, filmin geriliminin (tension) minimum olduğu dolayısıyla dörtgenin alanının maksimum olduğu noktadır. Bu nedenle problem, çubukların denge noktasını bulmaya indirgenmiş olacaktır.

2.3.4. Diagramatik Görselleştirme

Bu görselleştirme çeşidinde, bizim düşünme süreçlerimize iyi şekilde yardımcı olan diyagramlarla temsil edilmiş zihinsel objelerimiz ve karşılıklı ilişkileri ile ilgilenilmektedir. Bu diyagramların mnemoteknik (belletmece) kurallarına benzer olduğu söylenebilir.

Kombinasyon teorisinde veya olasılıkta kullandığımız ağaç diyagramı ve her matematikçinin kendisinin kullandığı oldukça kişisel doğaya sahip diğer diyagramlar da bu çeşit içindedir. Böyle sembolleştirmeler ve diyagramlar bazı durumlarda genelleştirilmiş kullanımlar olur fakat çoğu durumlarda oldukça kişisel olduklarından

diğerleri ile kolaylıkla karşılaştırılmazlar.

Fakat çoğu durumlarda, oldukça faydalı olabilecek diğer durumları etkililemede bu görselleştirmeler kullanılır olabilir. Her nasılsa bazen insanlar böyle imajların, diyagramların,... ispatlarımızın formal açıklamaları bakımından matematikteki bireysel gelişimler için gerçek bir engel teşkil edeceğini düşünmektedirler (Guzman, 2002).

III. BÖLÜM

YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, evren ve örneklem, araştırmanın uygulama basamakları ve verilerin toplanması ve verilerin analizi hakkında bilgiler verilmektedir.

3.1. Araştırma Modeli

Bu araştırmada algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği, nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Nitel araştırma yönteminin kullanılmasının sebebi araştırmada detaylı bilgiler toplamaya çalışarak derinlemesine bilgi elde etmektir. Zira bu yöntem aynı zamanda araştırılan konuyu katılımcıların bakış açısından görebilmeye ve bu bakış açılarını oluşturan yapıyı ve süreçleri ortaya koymaya imkan vermektedir. Araştırma bütüncül ve derinlemesine olduğu için uzun sürmekte ve bu nedenle katılımcıların sayısı nicel araştırma yöntemine göre daha az olmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Nitel araştırmada araştırmanın konusunu oluşturan olgu ya da olay, içinde bulundukları doğal ortamda incelenmektedir (Patton, 1987). Ayrıca araştırmacı bizzat alanda zaman harcayan, katılımcılarla doğrudan görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan kişi olup, alanda kazandığı bakış açısını ve deneyimleri, toplanan verilerin analizinde kullanır. Bu anlamda araştırmacının rolü nicel araştırmacınıninkinden farklıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Nitel araştırmada toplanan verilerin bütüncül olması temel ilkelerdendir. Bir bütünün, onu oluşturan parçaların toplamından daha fazla bir anlam ifade ettiği

gerçeğinden hareketle araştırma konusu bütüncül bir yaklaşımla belirlenir ve toplanan veriler bütüncül bir yaklaşımla analiz edilir (Bogdan ve Biklen, 1992).

Nitel araştırmada önemli amaçlardan birisi de araştırmaya dahil edilen bireylerin algılarının ve deneyimlerinin ortaya konmasıdır. Araştırmaya katılan bireylerin algılamalarının nasıl olduklarını ve nasıl yorumladıklarını anlamak amacıyla onlarla konuşulur ve gözlem yapılır. Araştırmaya dahil edilen bireyler önemli veri kaynakları olarak kabul edilir ve onların vereceği yanıtlar daha önceden oluşturulan sorularla sınırlandırılmaz. Bunun yerine açık ve esnek bir tutum izlenir ve ilgili araştırma konusuna ilişkin mümkün olduğunca ayrıntılı ve derinlemesine veri toplanılmaya çalışılır. Bu anlamda araştırmacı bireylere yakın olmalı ve gerekirse onlarla birlikte aynı ortamı paylaşmalıdır (Miles ve Huberman, 1994).

Nitel araştırma, sonuç ve ürünlerden ziyade süreçle ilgilenmektedir. Bunun nedeni araştırmada bazen her bir madde ve süreçteki her bir detayın önemli olabildiğidir. Araştırmadaki katılımcı, tüm becerileri, deneyimleri, geçmişi, bilgileri ve hatta önyargıları ile tüm veri toplama ve analiz aşamalarında bir kaynak konumundadır (Maykut ve Morehouse, 1994).

Nitel araştırmada yaygın şekilde kullanılan üç tür veri toplama yöntemi vardır: görüşme (yarı (esnek) yapılandırılmış, yapılandırılmamış), gözlem (doğal ortam-doğrudan gözlem: yapılandırılmış, yapılandırılmamış ve yapay ortam-katılımcı gözlem: yapılandırılmış, yapılandırılmamış) ve yazılı doküman incelemeleri (anketlerdeki açık uçlu maddeler, aile albümleri, filmler, video kayıtları, portreler, fotoğraflar, mektuplar, hayat hikayeleri, günlükler, program kayıtları, kişisel dokümanlar ve sözlü biyografiler) (Yıldırım ve Şimşek, 2006; Patton, 1987, Bogdan ve Biklen, 1992).

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen veri toplama tekniklerinden gözlem ve görüşme incelemesinden yararlanılmıştır. Katılımcılara yapılan sınıf ortamındaki gözlemler süreçlerdeki görselleştirmelerine ilişkin yapılandırılmamış gözlemlerdir. Katılımcıların durumlarını belirleyen dört oturumda gerçekleştirilen yarı (esnek) yapılandırılmış görüşmeler ise görüşmeleri oluşturmaktadır.

Katılımcıların soyutlama ve genelleme süreçlerindeki görselleştirmelerini araştırmak adına yapılan bu çalışmada görselleştirmeleri neden, nasıl ve ne kadar kullandıklarını ve ayrıca görselleştirmenin bu süreçlere etkisini görmek için yapılan incelemeler hem sürece odaklanmak hem de süreçteki çeşitlerini ve seviyelerini görmek adına bu anlamda nitel araştırmaya çok daha uygun düşmektedir.

3.1.1. Durum Çalışması (Case Study)

Nitel araştırma desenlerinden birisi durum çalışmasıdır. Farklı kaynaklarda örnek olay incelemesi, vaka çalışması ve İngilizce adıyla ‘case study’ olarak da anılmaktadır. Örnek olay incelemesi, bir ya da birkaç olayı veya durumu derinlemesine incelemek demektir. Genellikle durum çalışması ‘neden’ veya ‘nasıl’ sorularına cevap arandığında tercih edilen yöntem olup bazı gerçek hayata ilişkin içeriklerde güncel fenomenlere odaklanıldığında kullanılmaktadır (Yin, 2003). Durum çalışması, bir karar veya kararlar kümesini açığa çıkarmak için tercih edilir: neden kullanıldıkları, nasıl gerçekleştirildiği ve hangi sonuçla tamamlandığı (Schramm, 1971). Bu tür araştırmalarda her çeşit bilgi toplama yöntemine baş vurulabilir. Burada da olayı anlamak ve açıklamak amacı güdülmektedir. Araştırmanın planlanması, elde edilen verilerin analizi ve yorumlanması diğer alan araştırmalarında olduğu gibidir. Durum çalışması araştırmacısının amacı, örneğin bir kurumun genel ve kişiye özel özelliklerini belirlemek, bunun sistemlerin uygulanışının nasıl etkilediğini göstermek ve örgütün işlevlerini etkileme durumunu saptamaktır (McMillan ve Schumacher, 1989).

Durum çalışmasında araştırmacı araştırma yapmayı planladığı bir ortama girer. Geniş olarak bir ağ çizer ve araştırmanın yapılabilirliğini inceler. Nasıl ilerleyeceğine ilişkin ipuçları arar. Verileri toplamaya başlar, gözden geçirir, keşfeder ve araştırmaya nasıl devam edeceğine karar verir. Zamanını nasıl yayacağına, araştırmayla nereye gideceğine, kiminle görüşeceğine, neyi derinlemesine inceleyeceğine karar verir (Yin, 2003).

Durum çalışması yaparken izlenebilecek belli başlı aşamalar şunlardır (Yıldırım ve Şimşek, 2006; Yin, 2003):

- Araştırma sorularının geliştirilmesi: Nitel araştırmada şu beş soru alanı önemlidir: kim, ne, nerede, nasıl ve neden. Bunlar arasında durum çalışmaları için en uygun olanları, “nasıl” ve “neden” sorularıdır. Bu sorulara ek olarak “ne” sorusu da durum çalışması incelemeleri için gereklidir.
- Araştırmanın alt problemlerinin geliştirilmesi: Her alt problem araştırmacının ilgisini odaklaştıracağı bir alana işaret eder. Bir araştırmanın problem cümlesi genel bir alana işaret eder. Bazı araştırma problemleri açısından, bu genel alan alt alanlara bölünmedikçe, araştırma problemine ilişkin ayrıntılı yanıtlar bulmak mümkün olmayabilir. Bu nedenle araştırma probleminin yapı taşları olabilecek alt boyutları veya alanları ortaya koymak gerekir.
- Analiz biriminin saptanması: Pek çok araştırmacı için sorun kaynağı olan “durum”un ne olduğunu tanımlamaya ilişkin bir boyuttur. Klasik anlamdaki durum çalışmalarında “durum” bir birey olabilir. Bir hasta, başarılı bir öğrenci veya bir lider durum çalışmaları incelemelerine konu olabilir. Bu tür çalışmalarda, çalışmaya konu olan bireyin kendisi analiz birimini oluşturur. Birey veya bireyler durum olarak alındığında, analize konu birim hakkında pek sorun görünmemektedir. Oysa, kararlar veya karar verme süreçleri, programlar, belirli uygulama süreçleri veya örgütsel değişim konuları da, durum çalışması incelemeleri arasında yer alabilir. Dikkat edilecek olursa, bu konuların başlangıç ve bitiş noktaları veya sınırları bir bireyde olduğu ölçüde kesin hatlarıyla belirlenmemektedir.
- Çalışılacak durumun belirlenmesi: Araştırma problemini, bu probleme ilişkin olarak varsa alt problemlerini ve analiz birimini belirleyen araştırmacı, araştırma problemini en iyi çalışabileceğini düşündüğü durumu veya durumları saptar. Hangi durumların araştırma problemine uygun olup olmadığını ve düşünülen durumların araştırma için mümkün olup olamayacağını, araştırmacı öncelikle dikkate almak zorundadır.
- Araştırmaya katılacak bireylerin seçimi: Çalışabileceği durum veya durumlar konusunda karar veren bir araştırmacı, bu aşamada seçtiği durum veya durumlardan hangi bireylerin araştırmaya dahil edileceğini de saptamalıdır. Pek çok nitel araştırma yönteminde olduğu gibi, durum çalışmasında da katılımcı sayısı veya örneklem büyüklüğü göreceli olarak küçük olacaktır. Bu ilke, durum çalışması incelemelerinin ayrıntılı ve derinlemesine bir araştırma yöntemi

olmasından kaynaklanmaktadır. Kimlerin araştırmaya dahil edileceğine karar veren araştırmacı, araştırmaya dahil edilen bu kişi veya gruplarla veri toplama zamanına, yani veri toplamanın başlangıç ve bitiş zamanlamasına karar vermelidir. Bütün bu aşamalarda da, araştırma problemiyle ilgili literatür etkili bir şekilde kullanılmalıdır.

- Verinin toplanması ve toplanan verinin önermelerle veya alt problemlerle ilişkilendirilmesi: Veri toplama yöntemi veya yöntemleri, araştırmanın başında oluşturulmuş olan alt problemler dikkate alınarak belirlenir. Bu şekilde araştırmacının, veri toplama sürecinde alt problemlerle ilgisiz olabilecek verileri toplamaktan kaçınması mümkün olacaktır. Veri toplamada dikkat edilmesi gereken üç nokta daha vardır. Birincisi, durum çalışması yapan araştırmacı verisini toplarken, mümkün olduğu ölçüde birden fazla veri kaynağını ya da türünü kullanmalıdır. Durum çalışması incelemelerinde mümkün olduğu ölçüde birden fazla veri toplama yöntemini kullanmak önerilen bir durumdur. Çünkü, böylece araştırmanın veri tabanı zenginleşmiş olacak, araştırmanın sonunda ulaşılabilecek sonuçların daha zengin bir perspektifle yapılması veya alternatif yorumlara ulaşılması mümkün olacaktır. Sonuç olarak, araştırmanın güvenilirliği ve geçerliği önemli ölçüde artacaktır.
- Verinin analiz edilmesi ve yorumlanması: Alt problemler, veri analizinde de önemli bir işleve sahiptir. Veriler, araştırmanın başında oluşturulmuş olan alt problemler temel alınarak düzenlenip, yorumlanabilir. Araştırma sürecinde bir şekilde toplanmış, fakat herhangi bir alt problemle ilişkisi olmayan gereksiz veriler, verilerin analizi ve yorumlanması aşamasında böylece dışarıda bırakılmış olur. Bunların yanı sıra, verinin analiz edilmesi ve yorumlanmasında, araştırmacının çalıştığı problemle ilgili literatürü etkili bir şekilde kullanılması beklenir. İlgili literatürden alıntılar yapmak, yorumların başka araştırma sonuçlarıyla ne derece uyduğu veya çeliştiği konusunda tartışmalar açmak, veri analizini ve yorumlamayı zenginleştirecektir.
- Durum çalışmasının raporlaştırılması: Durum çalışması, diğer nitel araştırma yöntemleri gibi şişkin ve kabarık bir veri setiyle sonuçlanır. Bu tür bir veri setinden genellikle uzun ve zor bir süreçten sonra anlamlı bütünler veya sonuçlar çıkaran araştırmacıyı bekleyen diğer bir sorun, çalışmasını nasıl raporlaştıracığıdır. Araştırma yönteminin doğasından kaynaklanan gerekçelerle, durum çalışması raporları, genellikle geniş açıklama ve betimlemelerle doludur.

Bu anlamda, araştırmacının burada uğraşması gereken konu, “doğru bir betimleme ve analiz dozu”nu tutturmasıdır. Yani, durum çalışması raporu hem araştırmacının başlangıcında oluşturulmuş olan problem ve alt problemlere doyurucu yanıtlar vermeli, hem de bunu yaparken gereksiz bilgi ve betimlemelerden kaçınmalıdır. Üretilen raporların, başkalarının yararlanabileceği ölçüde öz ve aynı zamanda da, içerikten ödün vermeyecek tarzda betimsel olması gereklidir. Durum çalışması raporlarını zenginleştirecek, sunumu ve araştırmacının başkaları tarafından okunmasını cazip hale getirecek bazı önlemlerin alınması gereklidir.

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen konular göz önüne alındığında durum çalışması yapılmasının araştırma için daha uygun olacağı düşünülmüştür. Zira, soyutlama ve genelleme süreçleri sırasında görselleştirmeyi neden, nasıl ve ne kadar kullandıkları sorusu araştırmacının ana çatısını oluşturmaktadır. Görselleştirmenin rolünün araştırılması sırasında gözlem ve görüşmeler oldukça kapsamlı ve uzun olduğu ve bu süreçlerde katılımcıların süreçlerinin derinlemesine incelenmesi ve bütüncül bir çerçevede yorumlanması gerektiği için durum çalışmasının daha anlamlı sonuçlar vereceği düşünülmüştür. Ayrıca farklı veri toplama yöntemleri kullanılarak veri çeşitlenmesi sağlanılmaya çalışılmış ve araştırmacının geçerlik ve güvenilirliğinin artırılması amaçlanmıştır. Böylece zengin bir veri tabanı oluşması durumlara zengin bir açıdan bakılmasını sağlamıştır.

3.2. Katılımcılar

Araştırmacının örneklemini, Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimi alan dördüncü sınıf öğrencileri arasından, 2008-2009 eğitim öğretim yılı güz döneminde açılmış bir dersi alan öğrencilerden gönüllülük ilkesine göre seçilenler oluşturmaktadır. Katılımcılarla matematiksel geçmişleri hakkında öngörüşmeler yapılmış, kendilerinin transkriptleri incelenmiş ve matematiksel altyapıları hakkında bilgi edinilmeye çalışılmıştır (Tablo 3.1). Öncelikle öğrencilerin derste soyutlama ve genelleme süreçlerindeki durumları incelenerek bu süreçlerdeki yorumlamaları ve bu yorumlamalardaki görselleştirmeleri dikkate alınmıştır. Daha sonra derse katılan 13 öğrenci ile bir pilot çalışması yapılmış ve bu çalışma sonucunda

veriler değerlendirilerek ikisi erkek 5 öğrenci ile çalışmaya başlanılmıştır. Katılımcıların seçiminde aşırı ve aykırı durum örneklemesinden yararlanılmıştır. Bu örnekleme tekniği, derin bir incelemeye tabi tutulacak sınırlı sayıda ancak aynı ölçüde de bilgi bakımından zengin durumların çalışmasını öngördüğü için tercih edilmiştir. Burada önemli olan nokta şudur: Aşırı veya aykırı durumlar normal durumlara göre daha zengin veri ortaya koyabilir ve araştırma problemini derinlemesine ve çok boyutlu bir biçimde anlamamıza yardımcı olabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Tablo 3.1. Katılımcılara Ait Bilgiler

Katılımcı	Cinsiyeti	Mezun Olduğu Lise	Fakülte Not Ortalaması
Özge	Kız	Anadolu Lisesi	2,98
Mert	Erkek	Genel Lise	2,48
Tarık	Erkek	Genel Lise	2,28
Gönül	Kız	Genel Lise	2,98
Filiz	Kız	Genel Lise	2,74

Seçilen katılımcıların fakülte not ortalamaları seçimlerinde etkili olmamış ve de görüşme sonrasında katılımcılar fakülteden mezun olmuşlardır. Katılımcılardan Özge, Mert, Gönül ve Filiz lisans eğitimlerini dört yılda Tarık ise beş yılda tamamlamıştır. Seçilen katılımcıların transkriptleri incelendiğinde aldıkları ortak ve farklı olan dersler Tablo 3.2. de, derslerdeki başarıları ise Tablo 3.3. de verilmiştir.

Tablo 3.2. Katılımcıların Lisans Öğrenimi Süresince Aldığı Dersler

Aldığı Dersler	Katılımcılar				
	Özge	Mert	Tarık	Gönül	Filiz
ANALİZ 1	√	√	√	√	√
ANALİZ 2	√	√	√	√	√
ANALİZ 3	√	√	√	√	√
ANALİZ 4	√	√	√	√	√
LİNEER CEBİR 1	√	√	√	√	√
LİNEER CEBİR 2	√	√	√	√	√
SOYUT MATEMATİK 1	√	√	√	√	√
SOYUT MATEMATİK 2	√	√	√	√	√
ANALİTİK GEOMETRİ 1	√	√	√	√	√
ANALİTİK GEOMETRİ 2	√	√	√	√	√
DİFERANSİYEL DENKLEMLER 1	√	√	√	√	√
DİFERANSİYEL DENKLEMLER 2	√	√	√	√	√
TOPOLOJİ 1	√	√	√	√	√
TOPOLOJİ 2	√	√	√	√	√
TEMEL BİLGİ TEKNOLOJİLERİ 1	√	√	√	√	√
TEMEL BİLGİ TEKNOLOJİLERİ 2	√	√	√	√	√
DİFERANSİYEL GEOMETRİ 1	√	√	√	√	√
DİFERANSİYEL GEOMETRİ 2	√	√	√	√	√
CEBİR 1	√	√	√	√	√
CEBİR 2	√	√	√	√	√
KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER 1	√	√	√	√	√
NÜMERİK ANALİZE GİRİŞ	√	√	√	√	√
KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ 1	√	√	√	√	√
KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ 2	√	√	√	√	√
BİLGİSAYAR PROGRAMLAMA 1	√	√	√	√	√
BİLGİSAYAR PROGRAMLAMA 2	√	√	√	√	√
SAYILAR TEORİSİ 1	√	√	√	√	√
FONKSİYONEL ANALİZ	√	√	√	√	√
UYGULAMALI MATEMATİK	√	√	√	√	√
İLERİ LİNEER CEBİR	√	√	√	√	√
ÖLÇÜM TEORİSİ	√	√	√		
KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER 2		√		√	√
OLASILIK VE İSTATİSTİK			√	√	√
HAREKET GEOMETRİSİ 1	√		√		
HAREKET GEOMETRİSİ 2	√				
REEL ANALİZ			√	√	√
DEĞİŞMELİ CEBİR				√	√
NÜMERİK ANALİZ				√	√
MATRİSLER TEORİSİ	√				
ALT MANİFOLDLAR GEOMETRİSİ 1		√			
İLERİ PROGRAMLAMA 2		√			
KUATERNİYONLAR TEORİSİ			√		

Tablo 3.3. Katılımcıların Lisans Öğrenimi Süresince Aldığı Derslerdeki Başarıları

	AA	BA	BB	CB	CC
ÖZGE	Nümerik Analize Giriş İleri Lineer Cebir Fonksiyonel Analiz Hareket Geometrisi II Matrisler Teorisi,	Lineer Cebir I Lineer Cebir II Topoloji I Temel Bilgi Tek. I Analiz IV Topoloji II Dif. Geo. II Ölçüm Teorisi Hareket Geometrisi I	Dif. Denk. II Temel Bilgi Tek. II Cebir I Kompleks Fon. Teo. II Bilg. Prog. II Uygulamalı Mat. Cebir II	Soyut Matematik I Analiz II Dif. Denk. I Analitik Geo. II Dif. Geo. I Kompleks Fon. Teo. I Sayılar Teorisi I	Analiz I Soyut Matematik II Analiz III Analitik Geo. I Kısmi Dif. Denk. I Bilg. Prog. I
MERT		Temel Bilgi Tek. II Uygulamalı Mat. Kısmi Dif. Denk. II	Topoloji I Analiz II	Dif. Denk. II Kompleks Fon. Teo. I Topoloji II Dif. Geo. II Ölçüm Teorisi İleri Lineer Cebir Kompleks Fon. Teo. II Fonksiyonel Analiz	Analiz I Lineer Cebir I Soyut Matematik I Lineer Cebir II Soyut Matematik I Analitik Geo. I Dif. Denk. I Analiz IV Analiz III Temel Bilgi Tek. I Dif. Geo. I Kısmi Dif. Denk. I Analitik Geo. II Nümerik Analize Giriş Cebir I Bilg. Prog. I Sayılar Teorisi I Alt Man.Geo. I Cebir II Bilg. Prog. II İleri Prog. II
TARIK		Lineer Cebir II Analiz III Cebir I		Soyut Matematik II Temel Bil. Tek. I Temel Bil. Tek. II Lineer Cebir I Kompleks Fon. Teo. I Kompleks Fon. Teo. II Dif. Geo. II Nümerik Analize Giriş Bilg. Prog. I Topoloji II Fonksiyonel Analiz Ölçüm Teorisi Cebir II Olasılık Ve İst.	Soyut Matematik I Analitik Geo I Analitik Geo II Analiz I Dif. Denk. I Topoloji I Dif. Geo. I Kısmi Dif. Denk. I Analiz II Dif. Denk. II Kuaterniyonlar Teo. İleri Lineer Cebir Bilg. Prog. II Hareket Geometrisi I Analiz IV Uygulamalı Mat. Reel Analiz
GÖNÜL	Analiz IV Dif. Denk. II Dif. Geo. II Nümerik Analize Giriş Kompleks Fon. Teo. II Reel Analiz Uygulamalı Mat. İleri Lineer Cebir	Analiz III Topoloji I Topoloji II Kısmi Dif. Denk. I Değişmeli Cebir Olasılık ve İstatistik Kısmi Dif. Denk. II	Analitik Geo. II Temel Bil. Tek. II Dif. Geo. I Kompleks Fon. Teo. I Cebir II Bilg. Prog. I Nümerik Analiz Fonksiyonel Analiz	Analiz II Lineer Cebir II Soyut Mat. II Dif. Denk. I Cebir I Sayılar Teo. I Bilg. Prog. II	Analiz I Lineer Cebir I Soyut Mat. I Analitik Geo. I Temel Bil. Tek. I
FİLİZ	Topoloji I Topoloji II Dif. Geo. I Fonksiyonel Analiz Uygulamalı Mat. İleri Lineer Cebir	Kısmi Dif. Denk. I Nümerik Analize Giriş	Dif. Denk. I Temel Bil. Tek. I Analiz IV Analitik Geo. II Dif. Denk. II Dif. Geo. II Cebir II Bilg. Prog. I Nümerik Analiz Olasılık ve İstatistik	Soyut Mat. I Lineer Cebir II Analiz III Temel Bil. Tek. II Kompleks Fon. Teo. I Cebir I Kompleks Fon. Teo. II Değişmeli Cebir Reel Analiz Bilg. Prog. II Kısmi Dif. Denk. II	Analiz I Lineer Cebir I Analiz II Soyut Mat. II Analitik Geo. I Sayılar Teo. I

3.3. Verilerin Toplanması

Çalışmada konu hakkında derinlemesine bilgi edinmek amacıyla gözlem ve görüşme şeklindeki veri toplama metodları kullanılmıştır (Tablo 3.4).

Tablo 3.4. Veri Toplama Süreci

Tarih	Veri toplama metodu	Katılımcılar
2008-2009 Eğitim- Öğretim Yılı Güz Dönemi	Gözlem (yapılandırılmamış)	24
	Pilot çalışma	13
Bahar Dönemi	Görüşme(yarı-yapılandırılmış)	5

3.3.1. Gözlemler

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemine uygun olarak süreç ve algılara ilişkin olmak üzere veri toplaması yapılmıştır. Öncelikle katılımcıların açılan seçmeli dersteki süreçleri gözlenmiştir. Gözlem süreci 2008-2009 eğitim öğretim yılının güz dönemindeki bir ders boyunca devam etmiştir. Katılımcılarla soyutlama ve genelleme süreçlerindeki görselleştirmelerini gözlemlemek adına onlar süreçleri yaşarken zaman zaman düşünme şekilleri hakkında bilgi alınmıştır. Bu anlamda yapılan gözlem, görselleştirmelerine odaklı yapılandırılmamış gözlemlerdir. Bu sebeple katılımcıların bu süreçlerdeki görselleştirmeleri ile ilgili düşünceleri dikkate alınarak önemli görülen kısımlar not edilmiştir. Gözlemler sonucunda seçmeli dersi alan 13 öğrenci ile bir pilot çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma araştırmadaki katılımcıların seçilip görüşmeye alınması ve aşamaların belirlenmesi ve araştırmaya yön vermesi açısından verimli olmuştur. Çalışmada katılımcılara yarı-yapılandırılmış durumlar verilmiş ve bunlardan bazıları açık uçlu sorular şeklinde olmuştur. Katılımcılardan ‘herhangi üçü doğrudan olamayan n tane noktadan $\frac{n(n-1)}{2}$ tane nokta geçer’ genellemesini elde edebilmeleri beklenmiştir. Bunu yaparlarken kendilerine 2 nokta için, 3 nokta için, 4 nokta için, 5 nokta için aşamalar verilmiş ve bu aşamaların sonunda diğer aşamaları görüp n nokta

için genellemeleri beklenmiştir. Katılımcıların bu süreçlerdeki görselleştirmeleri incelenmiştir (Yılmaz, Argün ve Özer, 2009).

3.3.2. Görüşmeler

Katılımcıların soyutlama ve genelleme süreçlerindeki görselleştirmelerini daha detaylı incelemek için seçmeli derse devam eden öğrenciler arasından gözlem değerlendirmelerine ve yapılan pilot çalışmaya göre seçilen beş öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır.

Görüşmeler öncesinde katılımcılara kimliklerini saklı kalacağı ve süreçteki katılımlarının ilgili seçmeli derste hiçbir etkisinin olmayacağı anlatılmıştır. Burada yapılan görüşmelerde kendilerinden olabildiğince samimi olmalarının beklendikleri belirtilmiş ve süreçlerin gelişiminde işe yarasın veya yaramasın düşündükleri her şeyi detaylı olarak çalışma kağıtlarında belirtmeleri istenmiştir. Kendilerine veri kaybını önlemek için silgi kullanmamaları gerektiği anlatılmıştır. Ayrıca katılımcılara süreçlerle ilgili verileri tam ve eksiksiz toplamak ve görselleştirme ile ilgili durumlarını tam olarak incelemek adına sesli kamera kaydı yapılacağı söylenmiş ve bu kayıtların sadece veri analizi yapılırken araştırmada kullanılacağı anlatılmıştır. Böylece katılımcıların kameraya karşı olumsuz bakışları önlenmeye çalışılmıştır.

Öncelikle matematiksel soyutlama, genelleme ve görselleştirme konusu ile ilgili literatür taraması ve yazılı doküman incelemesi yapılmıştır. Araştırmada kullanılan görüşme soruları kendilerine soyutlama ve genelleme süreçlerini yaşayabilecekleri şekilde araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Araştırma grubuna dahil olan bireylerin bu süreçler hakkında neler düşündüklerine, bu süreçleri nasıl yaşadıklarına ve bu süreçler sırasında görselleştirmeyi ne kadar ve nasıl kullandıklarına ilişkin algılarını, stratejilerini derinlemesine belirlemek amacıyla durumları oluşturabilmek ve durumları anlayabilmek için hazırlanan sorularla ilgili olarak uzmanların görüşleri alınmıştır. Uzman görüşleri alınarak oluşturulan durumlar, pilot çalışma sonucu elde edilen bilgilerin ve ilgili literatürün yönlendirilmesi ile ortaya çıkmıştır. Herbir katılımcı ile dört kez görüşülmüş ve her bir görüşme ortalama olarak bir ile bir buçuk saat arasında sürmüştür. Görüşmeler üniversite kütüphanesinin özel odasında sessiz bir ortam içinde,

olabildiğince rahat düşünebilecekleri şekilde gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Katılımcılara rahat düşünmeleri sağlamak için zaman tanınmış, süreçler içinde görselleştirmeleri detaylı incelemek adına görüşmenin seyrine göre ekstra sorular da (yapılandırılmamış sorular) sorulmuştur.

İlk görüşmede katılımcıların matematiksel soyutlama süreci içinde görselleştirmeyi nasıl ve ne kadar kullandıkları araştırılıp, bu süreç içinde ne tür görsel imajlara yer verdikleri ve bu imajları nasıl kullandıkları incelenmeye çalışılmıştır. Bunun için soyutlama sürecini görmek adına 4 aşama içinde toplam 9 durum verilmiştir.

İkinci görüşmede katılımcıların matematiksel genelleme süreci içinde görselleştirmeyi nasıl ve ne kadar kullandıkları araştırılıp, bu süreç içinde ne tür görsel imajlara yer verdikleri ve bu imajları nasıl kullandıkları incelenmeye çalışılmıştır. Bunun için genelleme sürecini görmek adına 3 aşama içinde toplam 4 durum verilmiştir.

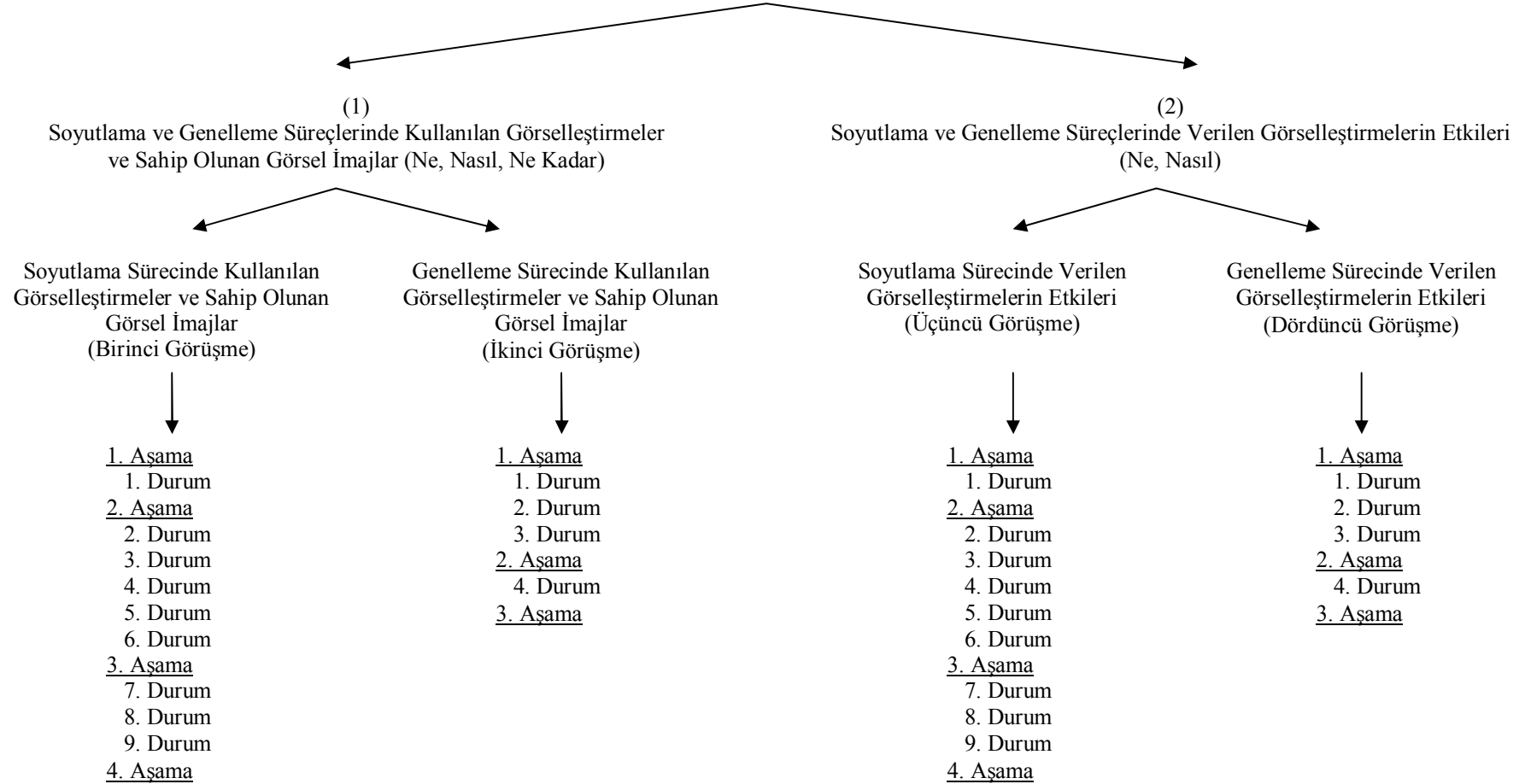
Üçüncü görüşmede katılımcıların matematiksel soyutlama yaparken sürece görselleştirmenin etkilerinin varsa neler olduğunu ve bunların nasıl gerçekleştiği ile görselleştirmeler sonucundaki sahip oldukları görsel imajlardaki olabilecek değişimi araştırmak adına kendilerine ilk görüşmede verilen durumların bilgisayar ortamındaki görselleştirilmeleri verilmiş ve bunları kendilerinin adım adım görmeleri sağlanılmaya çalışılmıştır. Bu süreçte araştırmaya Geometer's Sketch Pad ve Maple bilgisayar programları yardımcı olmuştur.

Dördüncü görüşmede katılımcıların matematiksel genellemeler yaparken sürece görselleştirmenin etkilerinin varsa neler olduğu ve bunların nasıl gerçekleştiği ile görselleştirmeler sonucundaki sahip oldukları görsel imajlardaki olabilecek değişimi araştırmak adına kendilerine ilk görüşmede verilen durumların bilgisayar ortamındaki görselleştirilmeleri verilmiş ve bunları kendilerinin adım adım görmeleri sağlanılmaya çalışılmıştır. Bu süreçte araştırmaya Geometer's Sketch Pad bilgisayar programı yardımcı olmuştur.

Şekil 2.5 de yapılan çalışma analizinin organizasyon şeması verilmektedir.

Görüşmeler sırasında katılımcıların düşünme süreçleri sırasında isteyebilecekleri düşünülen kareli kağıt, renkli kalemler, cetvel, pergel, ip, üç boyutlu cisimler (küre, silindir, piramit, prizma, koni, küp...) gibi materyaller bir kenarda hazır bekletilmiştir. İhtiyaç hissedenden katılımcılara talepleri halinde verilmiştir.

Matematiksel Soyutlama ve Genelleme Süreçlerinde Görselleştirme ve Rolü



Şekil 2.5. Çalışma Analizinin Organizasyon Şeması

Birinci görüşmede katılımcıların matematiksel sayutlama süreçlerinde hangi görsel imajlara sahip oldukları, görselleştirmeleri nasıl ve ne kadar yaptıkları ve görselleştirmeleri soyutlama sürecinin hangi durumlarında kullandıklarını derinlemesine incelemek için kendilerinden

‘Uzayda bir cisim dört hareketin birisiyle (öteleme-translasyon, dönme-rotasyon, yansıma-refleksiyon, ötelemeli yansıma- transfleksiyon) diğer bir cisme dönüştürülebiliyorsa bu iki cisim eştir’

soyutlamasını yapmaları beklenmiştir.

Bu inceleme yapılırken soyutlama sürecinin yaşanması için katılımcılara verilen aşamalar içinde görselleştirmeleri araştırılmaya çalışılmıştır. Bunun için aşağıdaki yol izlenmiştir;

Reel Eksende (1. Aşama)

Doğru parçalarının eşliği (1. Durum)

Düzlemde (2. Aşama)

Doğru parçalarının eşliği (2. ve 3. Durum)

Üçgenlerin eşliği (4. Durum)

Dörtgenlerin eşliği (5. Durum)

Çemberlerin eşliği (6. Durum)

Üç Boyutlu Uzayda (3. Aşama)

Piramitlerin eşliği (7. Durum)

Silindirlerin eşliği (8. Durum)

Kürelerin eşliği (9. Durum)

Uzayda iki cismin eşliği (4. Aşama)

Görüşmede verilen durumlara baktığımızda ‘...hareketlerden birisi yardımıyla diğeri elde edilebilir mi?’ soruları yapılandırılmış, ‘Neler düşünüyorsunuz?’, ‘Neden?’, ‘Bütün bunların sonucunda farkına vardığınız bir şey var mı?’ soruları ise yarı yapılandırılmış açık uçlu sorulardır. Aşamalarda durumların seçimi sürecinde araştırmacı tarafından pek çok durum oluşturulmuştur. Katılımcıların soyutlama sürecinde görselleştirmeleri hem kullanarak hem de kullanmayarak düşünebilecekleri

durumlar oluşturulmaya dikkat edilmiştir. Buradaki amaç görselleştirmeye gerek duyup duymamalarını görebilmektir. Ayrıca açık uçlu soruların tercih edilmesi soyutlamanın aşamalarının daha iyi görülüp bu aşamalarda görselleştirmelerin yerini ve çeşidini belirlemektir. Araştırmada kullanılmak üzere belirlenmiş olan durumlar, uzman görüşleri alınarak son halini almıştır (EK-1).

Katılımcılar görüşme sırasında bu durumları aşama aşama yaşarlarken süreç içindeki görselleştirmelerinin yerini ve çeşidini incelemek adına her bir durumda soyutlama sürecinin *içselleştirme, koordinasyon, enkapsülasyon, genelleme ve geri dönme* (Dubinsky, 2000) şeklindeki düşünme parçaları veri analizi yapılırken incelenmiştir. Bu süreçte zihinsel yapılanmaları açıklamak adına APOS Teorisi (*eylem, süreç, nesne, şema*) (Dubinsky ve McDonald 2001) kullanılmıştır. Araştırmanın amaçlarından birisi soyutlama sürecindeki görselleştirmenin rolü olduğu için süreçler derinlemesine incelenmiştir. Bu süreçler yaşanırken katılımcıların süreçler içinde görsel imajlar olarak *somut imaj, örüntü imajı, formüllerin hafıza imajı, kinestetik imaj ve dinamik imaj* (Presmeg, 1986) çeşitlerinden hangilerine sahip oldukları ve görselleştirme çeşitleri olarak *izomorfik görselleştirme, homomorfik görselleştirme, analogik görselleştirme, diagramatik görselleştirme* (Guzman, 2002) çeşitlerinden hangisi ile görselleştirme yaptıkları yine veri analizi yapılırken incelenmiştir.

İkinci görüşmede, katılımcıların matematiksel genelleme süreçlerinde hangi görsel imajlara sahip oldukları, görselleştirmeleri nasıl ve ne kadar yaptıkları ve görselleştirmeleri genelleme sürecinin hangi durumlarda kullandıklarını derinlemesine incelemek için kendilerinden

Karşılıklı kenarları paralel olan herhangi $A_1A_2A_3...A_{2n}$ ($n \geq 2$) şeklindeki $2n$ -genler için n -genlerin ağırlık merkezleri, verilen $2n$ -geni $A_1A_2A_3...A_n, A_2A_3A_4...A_{n+1}...vb.$ alt parçalara böler ve buradaki oluşacak çokgenler yine $2n$ -gen şeklinde olup karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir (Villiers, 2007)

genellemesini yapmaları beklenmiştir.

Bu inceleme yapılırken genelleme sürecinin yaşanması için katılımcılara çeşitli durumlar verilmiş ve bu durumlar içinde görselleştirmeleri araştırılmaya çalışılmıştır (EK-2). Bu süreçte aşağıdaki yol izlenmiştir;

1. Aşama

Dörtgen için oluşturulacak yeni dörtgen (1. Durum)

Altıgen için oluşturulacak yeni altıgen (2. Durum)

Sekizgen için oluşturulacak yeni sekizgen (3. Durum)

2. Aşama

Ongen ve onikigen için oluşturulacak yeni ongen ve onikigen (4. Durum)

3. Aşama

2n-gen için oluşturulacak yeni 2n-gen nin genellenmesi.

İzlenen yola göre, genelleme sürecinde katılımcılara her bir durum toplam 3 aşama içinde verilmiştir. 1. aşamada dörtgen, altıgen ve sekizgen için üç durum, 2. aşamada ongen ve onikigen için bir durum verilmiş, 3. aşamada ise genelleme ve tanımlamayı yapmaları beklenmiştir.

Katılımcılar görüşme sırasında bu durumları yaşarlarken süreç içindeki görselleştirmelerinin yerini ve çeşidini incelemek adına her bir durumda genelleme sürecinin *Seviye- 1: Prosedürel Aktiviteler (İlişkilendirme, Araştırma)*, *Seviye- 2: Lokal Genelleştirme (Genişletme)*, *Seviye- 3: Global Genelleştirme (Belirleme veya Açıklama, Tanımlama, Etki)* (Garcia-Cruz ve Martinon, 1998; Ellis, 2007) şeklindeki düşünme parçaları veri analizi yapılırken incelenmiştir. Bu durumlar bireysel bilgi yapısının gelişmelerini açıklamak için kullanılmıştır. Araştırmanın amaçlarından birisi de genelleme sürecindeki görselleştirmenin rolü olduğu için süreçler derinlemesine incelenmiştir. Bu süreçler yaşanırken katılımcıların süreçler içinde görsel imajlar olarak yine *somut imaj*, *örüntü imajı*, *formüllerin hafıza imajı*, *kinestetik imaj* ve *dinamik imaj* (Presmeg, 1986) çeşitlerinden hangilerine sahip oldukları ve görselleştirme çeşitleri olarak da yine *izomorfik görselleştirme*, *homomorfik görselleştirme*, *analojik görselleştirme*, *diagramatik görselleştirme* (Guzman, 2002) çeşitlerinden hangisi ile görselleştirme yaptıkları veri analizi yapılırken incelenmeye çalışılmıştır.

Üçüncü görüşmede, katılımcılara ilk görüşmede soyutlama ile ilgili verilen durumların Geometer's Sketch Pad ve Maple bilgisayar programları kullanılarak görselleştirmeleri sağlanılmaya çalışılmış ve her şekil adım adım elde edilerek şekillerle ilgili özelliklerini inceleme fırsatı verilmiştir. Ayrıca bu görüşme sırasında önceki görüşmede verilen durumların yanında daha fazla örnekleri incelemek için imkan verilmiştir (EK-3). Katılımcılar birinci görüşmede kendilerine verilen durumları düşünürlerken süreç içinde görselleştirmeleri kendileri gerek duyduğu zaman yapmışlardır. Bu görüşmede ise kendilerine verilen durumların görselleştirilmiş şekilde ifade edilmesi sonucunda soyutlama süreçlerinin nasıl ve ne kadar değiştiği incelenmek istenmiştir. İlk görüşmedeki gibi soyutlama sürecinin düşünme parçaları incelenip bunları açıklamak için APOS Teorisi kullanılıp veri analizi yapılmaya çalışılmıştır.

Dördüncü görüşmede, katılımcılara ikinci görüşmede genelleme ile ilgili verilen durumların Geometer's Sketch Pad bilgisayar programı kullanılarak görselleştirmeleri sağlanılmaya çalışılmış ve her şekil adım adım elde edilerek şekillerle ilgili özelliklerin incelenme fırsatı verilmiştir. Ayrıca bu görüşme sırasında önceki görüşmede verilen durumların yanında daha fazla örneği incelemek için imkan verilmiştir (EK-4). Katılımcılar üçüncü görüşmede kendilerine verilen durumları düşünürlerken süreç içinde görselleştirmeleri kendileri gerek duyduğu zaman yapmışlardır. Bu görüşmede ise kendilerine verilen durumların görselleştirilmiş şekilde ifade edilmesi sonucunda genelleme süreçlerinin nasıl ve ne kadar değiştiği incelenmek istenmiştir. Üçüncü görüşmedeki gibi genelleme sürecinin düşünme parçaları incelenip bu durumların ve bu durumları görselleştirmelerin aşamalara etkisinin veri analizi yapılmaya çalışılmıştır.

3.4. Verilerin Analizi

3.4.1. İçerik Analizi

Literatürde verilerin analizi konusunda farklı kavramlar ve yaklaşımlar ortaya konulmaktadır. Ancak, tüm bu yaklaşımlarda göze çarpan en önemli nokta, verilerin betimlenmesine ve temaların ortaya çıkarılmasına verilen önemdir. Bunun yanında,

araştırmacının yorumları ve ortaya çıkan temaların anlamlı bir biçimde ilişkilendirilmesi de ön plana çıkmaktadır. Her ne kadar literatür farklı veri analiz yaklaşımları ortaya koyuyorsa da, yapılan analizin derinliğine göre veri analizini iki grupta incelemek mümkündür: betimsel analiz ve içerik analizi (Strauss ve Corbin, 1990).

Betimsel analizde elde edilen veriler, daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir. Betimsel analizde, görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde ortaya koymaktır. Bu amaçla elde edilen veriler, önce sistematik ve açık bir biçimde betimlenir. Daha sonra yapılan bu betimlemeler açıklanır ve yorumlanır, neden sonuç ilişkileri irdelenir ve bir takım sonuçlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Betimsel analiz, içerik analizine göre daha yüzeyseldir ve daha çok araştırmanın kavramsal yapısının önceden açık biçimde belirlendiği araştırmalarda kullanılır. İçerik analizi, toplanan verilerin derinlemesine analiz edilmesini gerektirir ve önceden belirgin olmayan temaların ve boyutların ortaya çıkmasına imkan verir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Bu çalışmada soyutlama ve genelleme süreçlerindeki görselleştirmenin rolünü ve etkisini araştırmak için derinlemesine ve detaylı bir çalışma yapıldığından ve ortaya belirli durumlar konulup süreçlerin bu durumlar içindeki gelişimi sırasında görselleştirmenin yeri incelendiğinden veri analizi türü olarak içerik analizini yapmanın daha gerekli olduğu düşünülmüştür.

Çalışmada içerik analizi yoluyla verileri tanımlamaya, verilerin içinde saklı olabilecek gerçekleri ortaya çıkarmaya çalışılmıştır. Temelde yapılan işlem birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları düzenleyip yorumlanmaktır.

İçerik analizinin yapılışında bir takım aşamalar vardır. İçerik analizinin ilk aşaması verilerin kodlanmasıdır. Bu aşamada elde edilen veriler incelenerek anlamlı

bölmelere ayrılır ve her bölümün kavramsal olarak ne ifade ettiği bulunmaya çalışılır. Bu bölümler bazen bir sözcük bazen bir cümle ya da paragraf, bazen de bir sayfalık veri olabilir. Kendi içinde anlamlı bir bütün oluşturan bu bölümler isimlendirilir diğeri bir deyişle kodlanır. Bu aşamada önemli olan anlamlı bölümlere tanımlayıcı isimler yani kodlar bulmaktır. Tüm veriler bu şekilde kodlandıktan sonra, bir kod listesi oluşturulur ve bu liste verilerin incelenmesinde ve düzenlenmesinde anahtar görevi görür (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Strauss ve Corbin (1998) kodlama sürecini kolay hale getirmek için iki analitik araçtan bahsetmektedir. Bunlar soru sorma, kelime, deyim ve cümlelerin analizi ve karşılaştırma yapmadır. Bunların analiz sırasında tutarlı ve sistematik şekilde kullanılması gerektiğinden bahsetmektedirler. Burada amaç hisleri kuvvetlendirmek, belli düzeye kadar önyargılarını farkettilmek ve yine engellerin üstesinden gelmeye yardımcı olmaktır. Bu anlamda analitik araçlar bir kategorinin özellik ve boyutlarına karşı olan duyarlılık açısından kullanışlıdır.

Soru sorarken, araştırmacının nereden başlayacağı ile ilgili ilk baştaki engeli aşmaya çalışılır. Burada kullanılabilecek sorular genellikle ‘Kim?, Ne zaman?, Nerede?, Ne?, Nasıl?, Ne kadar?’ şekillerinde olabilir.

Kelime, deyim ve cümlelerin analizi ise varsayılan ya da planlanan mümkün olabilecek anlamlarla ilgili soruların artmasını sağlar. Ayrıca araştırmacıya farklı anlamların ve yorumlamaların olduğunu gösterir ve nelerin söylendiğini ve nelerin gözlemlendiğı ile ilgili araştırmacının varsayımlarının farkında olmasına yardımcı olabilir. Kelimenin, deyim ve cümlelerin analizini yapmak, dökümanın veya hiç olmazsa birkaç sayfasının gözden geçirilmesinden ve sonrasında araştırmacıya önemli ve analitik olarak ilginç gelen yani araştırmacının dikkatini çeken, gözüne ilışen kelime veya kelime gruplarına geri dönmesinden oluşur. Daha sonra araştırmacı kelimenin aklına gelen bütün olası anlamlarını listelemeye başlar. Aklındaki bu listeyle araştırmacı dökümana geri dönebilir ve anlamı çağrıştıracak olayları ve kelimeleri arayabilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Kategorilerin belirlenmesinde ve bu kategorilerin geliştirilmesinde diğeri bir analitik araç olan karşılaştırmalar yapmak oldukça gerekli ve şarttır. İlgili

karşılaştırmalardan ilki olay-olay veya nesne-nesne karşılaştırılmasıdır. Bu karşılaştırmada olayların veya nesnelerin özellikleri arasında benzerliklerine ve farkındalıklarına bakarak ve araştırarak sınıflandırma yapılmaktadır. İkinci tip karşılaştırma teorik karşılaştırmalar yapmaktır. İkinci tip karşılaştırma mümkün özellikler ve boyutlar araştırmacı için aşikar olmadığında benzer ya da farklı kavramlarla kategorileri karşılaştırmayı içerir (Strauss ve Corbin, 1998).

İlk karşılaştırmalı teknik iki durumlu tekniğidir. Bu teknik olay, nesne ve hareket için farklı bir bakış açısı elde etmek amacıyla bir kavramı altüst etmeyi göstermektedir. Diğer bir ifade ile kayda değer özellikleri ortaya çıkarmak için karşıt durumlara veya uç değerlere bakmaktır. Diğer karşılaştırmalı teknik ise sistematik bir karşılaştırma yapmaktır. Bunun anlamı, verideki bir olayı yine bu olayın hatırlattığı geçmişteki bir deneyimle ya da literatürle karşılaştırmaktır. Bunun amacı araştırmacıyı gözden kaçırabileceği verideki özellik ve boyutlara karşı daha duyarlı hale getirmektir. Çünkü araştırmacı ne aradığını bilmemektedir. Bütün bunlar araştırmacıyı özellikler ve boyutların terimleri içinde düşünmesi için teşvik eder (Strauss ve Corbin, 1998).

Aşağıda üç tür kodlama biçimi verilmektedir (Strauss ve Corbin, 1998):

Açık kodlama. Veri içindeki kavramların belirlenip, özellik ve boyutlarının keşfedildiği analitik süreçtir. Açık kodlama boyunca veriler farklı parçalara ayrılır ve yakından incelenilerek benzerlikleri ve farklılıkları açısından karşılaştırılır. Kavramsal olarak benzer olan veya anlamca ilişkili bulunan durumlar, olaylar, nesneler ve eylemler/etkileşimler; “kategoriler” olarak adlandırılan daha soyut kavramlar altında gruplandırılır. Veriyi hem farklılık hem de benzerlikler açısından yakından incelemek, kategoriler arasında iyi ayırım yapmaya ve ayırt etmeye imkan sağlar. Daha sonraki analitik adımlarda veriler, çeşitli kategoriler ve bunların alt kategorileri arasındaki ilişkilerin doğası hakkındaki ifadeler yeniden düzenlenir. Kavramlar yığılmaya başladığında, analizi yapan, onları daha soyut ve açıklayıcı terimler yani kategoriler altında grupta ya da kategorileştirme sürecine başlar. Kategori tanımlandıktan sonra onu hatırlamak, hakkında düşünmek ve en önemlisi onu, özelliklerine ve boyutlarına göre geliştirmek ve ayrıca alt kategorilerine ayırmak (ne zaman, nerede, neden, nasıl vb.nin açıklanması yoluyla) daha kolay hale getirir.

Eksensel kodlama. Kategorileri, alt kategoriler ile ilişkilendirme sürecidir. Kodlama bir kategorinin ekseni çevresinde gerçekleşir, kategoriler özellik ve boyutları seviyesinde birbirleri ile ilişkilendirilir. Eksensel kodlamanın amacı açık kodlamada bölünen verilerin tekrar bir araya toplanması sürecine başlamaktır. Bu süreçte, fenomenler hakkında daha kesin ve tam açıklamalar oluşturabilmek için kategoriler alt kategorileri ile ilişkilendirilir. Eksensel kodlama, açık kodlamadan amaç yönünden farklılaşsa da, bunlar birbiri ardına gelen analitik aşamalar olmak zorunda değildir; bu fark, etiketlemenin açık kodlamadan ayrı oluşu kadar da değildir. Bu kodlama, analistin bazı kategorilere sahip olmasını gerekli kılar ancak çoğu kez kategorilerin birbirleri ile nasıl ilişkili olduğu fikri, açık kodlama boyunca ortaya çıkar. Eksensel ve açık kodlama birbirinin ardışığı olan iki eylem değildir. Biri kavramlar arasındaki ilişkiyi kurarken diğeri özellik ve boyutları kodlamayı kesmez, eşzamanlı olarak ilerlerler. Boyutlar ve ilişkilerin her ikisi de teoriye büyük bir açıklayıcılık kazandırır ve analiz boyunca ortaya çıkmaya devam ederler. Kodlama boyunca yeni bir bilgi, veride görülen yeni özellikler, yeni boyutlar, yeni koşullar, yeni etkileşimler veya sonuçlar ortaya çıkmadığı sürece bir kategori doymuş kabul edilir. Ancak, bu ifade bir derece meselesidir. Gerçekte ise kişi yeterince uzun ve dikkatli bakarsa, her zaman yeni özellikler ve boyutlar bulabilir. “Yeni”nin ortaya çıkması için bir olasılık her zaman vardır. Doygunluk daha ziyade, araştırmada ek veri toplamanın üretkenliğe bir katkı sağlamadığı noktaya ulaşmaktır. Bulunan “yeni”; açıklamaya artık bir katkı sağlamamaktadır.

Seçici kodlama. Eldeleri bütünleştirme ve geliştirme sürecidir. Seçici kodlama, analizdeki son aşamayı temsil eder, bu da kavramların bir ana kategori çevresinde bütünleşmesi ve daha fazla gelişim ve düzeltme ihtiyacı içinde olan kategoriler doldurulur. Bu aşamada kısa not ve şemalar geliştirilen düşüncenin derinliğini ve karmaşıklığını yansıtır. Bütünleştirmedeki ilk adım, ana kategoriye karar vermektir. Ana kategori, araştırmanın ana temasını temsil eder. Ana kategori araştırmadan çıkarılsa da; aslında bir soyutlamadır. Ana kategori, “araştırmanın ne hakkında olduğunu açıklıyor gibi görünen birkaç kelime” ile özetlenen bütün analiz ürünlerini içerir.

İlk aşamada ortaya çıkan kodlarda yola çıkarak verileri, genel düzeyde açıklayabilen ve kodları belirli kategoriler altında toplayabilen temaların bulunması gerekmektedir. Bu anlamda kodlar arasındaki ortak yönler bulunmaya çalışılır. Bu bir

anlamda tematik kodlama işlemidir ve toplanan verilerin kodlar aracılığı ile kategorize edilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2009).

İlk aşamadaki ayrıntılı kodlama ve ikinci aşamadaki tematik kodlama sonucunda, araştırmacı topladığı verileri düzenleyebileceği bir sitem oluşturur. Üçüncü aşamada ise araştırmacı, bu sisteme göre elde edilen verileri düzenler ve bu şekilde belirli olgulara göre verileri tanımlamak ve yorumlamak mümkün olabilir. Bu aşamada verilerin, anlaşılabilir bir dille tanımlanması, açıklanması ve sunulması önemlidir (Yıldırım ve Şimşek, 2009).

Veri analizinin üçüncü aşamasında araştırmacının mümkün olduğu ölçüde tanımlayıcı olması ve elde edilen bulguları ilk elden sunması önemlidir. Bu aşamada araştırmacı kendi görüş ve yorumlarına yer vermez ve toplanan bilgileri işlenmiş bir biçimde sunar (Yıldırım ve Şimşek, 2009).

Ayrıntılı bir biçimde tanımlanan ve sunulan bulguların araştırmacı tarafından yorumlanması ve bazı sonuçların çıkarılması bulguların yorumlanması kısmında son aşama olarak yapılır. Bu bilgilerin ışığı altında araştırmada yapılan verilerin analizi aşağıda açıklanmıştır.

3.4.2. Verilerin Analizi Nasıl Yapıldı?

Verilerin analizinde yukarıda bahsedilen veri analizi çeşidi olan içerik analizi yapılmıştır. Bunun için öncelikle görüşmede toplanan video kaydı şeklindeki veriler yazılı metinler haline getirilmiştir. Daha sonra görüşme metinlerinde bulunan cümleler kelime kelime analiz edilmiştir. Bu süreçte araştırmacının konusu olan görselleştirmeyi ve görsel imajları derinlemesine incelemek adına video kayıtları içinde bulunabilecek görsel verileri analiz etmek adına görüntü kayıtları tekrar tekrar izlenmiştir. Metinlerin tek tek analizi ve görüntülerin tekrar tekrar izlenmesi farklı zamanlarda yinelenerek veri kaybını önlemeye çalışılmıştır. Görüşme metinlerinin yanında gözlemler ve araştırma süresince tutulan notlar da kodlama sürecine dahil edilmiştir. Buradaki amaç farklı verileri elde edebilmek ve zengin bir veri tabanı oluşturmaktır. Bu süreçlerin gelişiminde farklı uzman kişilerin yardımına başvurulmuştur.

Birinci görüşme verilerinin analizi için yazılı metinler haline getirilen video kaydı şeklindeki görüşmeler (EK-17), ilk olarak ilgili literatüre dayalı şekilde açık kodlama ile kodlanmıştır. Bu süreçte kavramlar belirlenerek bu kavramların özellik ve boyutları anlaşılmasına çalışılmıştır. Bunun için soyutlama süreçleri içinde anlamlı olabilecek kavramsallaştırmalar ve görselleştirmeler ile ilişkili bulunan durumlar kategorilendirilerek alt gruplara ayrılmıştır. Katılımcıların soyutlama süreçleri içindeki görselleştirmeleri karşılaştırmalı olarak incelenmeye çalışılmıştır. Daha sonra eksensel kodlama ile elde edilen kategoriler ve bunların alt kategorileri ilişkilendirilmeye çalışılmıştır.

Bu süreçlerin gelişiminde katılımcıların soyutlama sürecindeki görsel imaj ve görselleştirme çeşitlerinin yeri belirlenmeye çalışılmıştır. Bu şekilde oluşturulan tablolarda her bir katılımcının soyutlama süreçleri içindeki görselleştirmelerinin ve görsel imajlarının çeşitliliği ve yeri ortaya net bir şekilde çıkmıştır. Bu durum katılımcının tüm katılımcılar içindeki durumunu görmeye de yardımcı olmuştur.

Kodlamalar ve kategorileri ile ilişkilendirilmeleri sırasında öncelikle soyutlama sürecindeki görselleştirmenin yerini görmek için APOS Teorisi kullanılarak katılımcıların düşüncelerinin genetik bir çözümlemesi yapılmıştır. Bunun için süreci incelemek adına kullanılan ‘uzayda cisimlerin hareketler sonucu eşliği’ kavramının soyutlanması sürecinde katılımcıların transkriptleri, seçmeli derslerdeki performansları ve öngörüşmeleri dikkate alındığında aşağıdaki durumları daha önceden geliştirmiş olmaları beklenmektedir.

- Sayı kavramını bir obje ve aritmetik ve cebirsel işlemleri süreçler olmayı gerektiren reel sayıların bir şeması,
- Nokta kavramını bir obje ve ilişkilerini süreçler olarak gerektiren Kartezyen düzlem şeması,
- Reel eksen kavramı ile ilgili eylemler,
- Kartezyen düzlem ile ilgili eylemler,
- Üç boyutlu uzay ile ilgili eylemler,
- Reel ekseninde hareket (bir boyutlu hareketler), düzlemde hareket (iki boyutlu hareketler) ve uzayda hareket (üç boyutlu hareketler), (öteleme, dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma) kavramlarını süreçler olarak

içeren ve eylemlerle ilgili işlemlerin koordinasyonunu gerektiren “dönüşüm” şeması.

Katılımcıların soyutlama süreçlerini incelerken verilen durumlar aşamalı olarak irdelenmiş ve her aşamanın çözümlemesi aşağıdaki gibi yapılmaya çalışılmıştır.

- Reel ekseninde bir doğru parçasının başka bir doğru parçasına bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki doğru parçasının eş olduğu ile sonuçlanan bir şema. Burada öncelikle nokta kavramı reel ekseninde *obje* olarak alınmış ve iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* reel ekseninde nokta kavramı *içselleştirilmiş*, doğru parçasının uzunluklarını düşünme süreci gerçekleşerek, bir boyutlu hareket (reel ekseninde hareket) kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda doğru parçalarının eş olduğunu *enkapsüle ederek* eş doğru parçalarının *obje* olarak sonuçlanması ile ilgili şemanın elde edilmesi (EK-5).
- Düzlemde (iki boyutlu hareket);

(i) Bir doğru parçasının başka bir doğru parçasına bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki doğru parçasının eş olduğu ile sonuçlanan şema. Burada öncelikle nokta kavramı düzlemde *obje* olarak alınmış, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* düzlemde doğru parçası kavramı *içselleştirilmiş*, doğru parçalarının uzunluklarını düşünme süreci gerçekleşerek düzlemsel hareket kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda bu iki doğru parçasının eş doğru parçaları olduğunu *enkapsüle ederek* eş doğru parçalarının *obje* olarak sonuçlanmasıyla şema oluşturulmuştur (EK-6).

(ii) Bir üçgenin başka bir üçgene bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki üçgenin eş olduğu ile sonuçlanan şema. Burada öncelikle nokta kavramı düzlemde *obje* olarak alınmış, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* düzlemde doğru parçası kavramı ile üçgen kavramı *içselleştirilmiş*, doğru parçalarının uzunluklarını düşünme süreci gerçekleşerek düzlemsel hareket kavramı ile üçgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda (hareket kavramının doğrudan olma ve olmama, arada olma bağıntısını koruma gibi bazı genel

özelliklerini düşünme sürecinde içselleştirerek) bu iki üçgenin eş üçgenler olduğunu *enkapsüle ederek* eş üçgenlerin *obje* olarak sonuçlanmasıyla şema oluşturulmuştur. Şemanın enkapsülasyon süreçleri, hareketlerin açıları, kenar uzunluklarını ve alanları koruması gibi eylemleri gerektirmektedir (EK-7).

(iii) Bir dörtgenin başka bir dörtgene bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki dörtgenin eş olduğu ile sonuçlanan şema. Burada öncelikle nokta kavramı düzlemde *obje* olarak alınmış, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* düzlemde doğru parçası kavramı ile dörtgen kavramı *içselleştirilmiş*, doğru parçalarının uzunluklarını düşünme süreci gerçekleşerek düzlemsel hareket kavramı ile dörtgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda (hareket kavramının doğrudan olma ve olmama, arada olma bağıntısını koruma gibi bazı genel özelliklerini düşünme sürecinde içselleştirerek) bu iki dörtgenin eş dörtgenler olduğunu *enkapsüle ederek* eş dörtgenlerin *obje* olarak sonuçlanmasıyla şema oluşturulmuştur. Şemanın enkapsülasyon süreçleri, hareketlerin açıları, kenar uzunlukları ve alanları koruması gibi eylemleri gerektirmektedir (EK-8).

(iv) Bir çemberin başka bir çembere bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki çemberin eş olduğu ile sonuçlanan şema. Burada öncelikle nokta kavramı düzlemde *obje* olarak alınmış, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* düzlemde doğru parçası kavramı ile çember kavramı *içselleştirilmiş*, doğru parçalarının uzunluklarını düşünme süreci gerçekleşerek düzlemsel hareket kavramı ile çember kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda (hareket kavramının doğrudan olma ve olmama, arada olma bağıntısını koruma gibi bazı genel özelliklerini düşünme sürecinde içselleştirerek) bu iki çemberin eş çemberler olduğunu *enkapsüle ederek* eş çemberlerin *obje* olarak sonuçlanmasıyla şema oluşturulmuştur. Şemanın enkapsülasyon süreçleri, hareketlerin yarıçapları ve dolayısıyla çevreleri ve alanları koruması gibi eylemleri gerektirmektedir (EK-9).

Oluşturulan şemalar sonucunda, düzlemde geometrik bir şeklin başka bir geometrik şekle bir hareketle dönüşümü ile bu iki şeklin eş olduğunu enkapsüle etme ve düzlemde hareketler sonucunda eş geometrik şekiller objesiyle sonuçlanan bir şema oluşturulmuştur.

- Üç boyutlu uzayda;

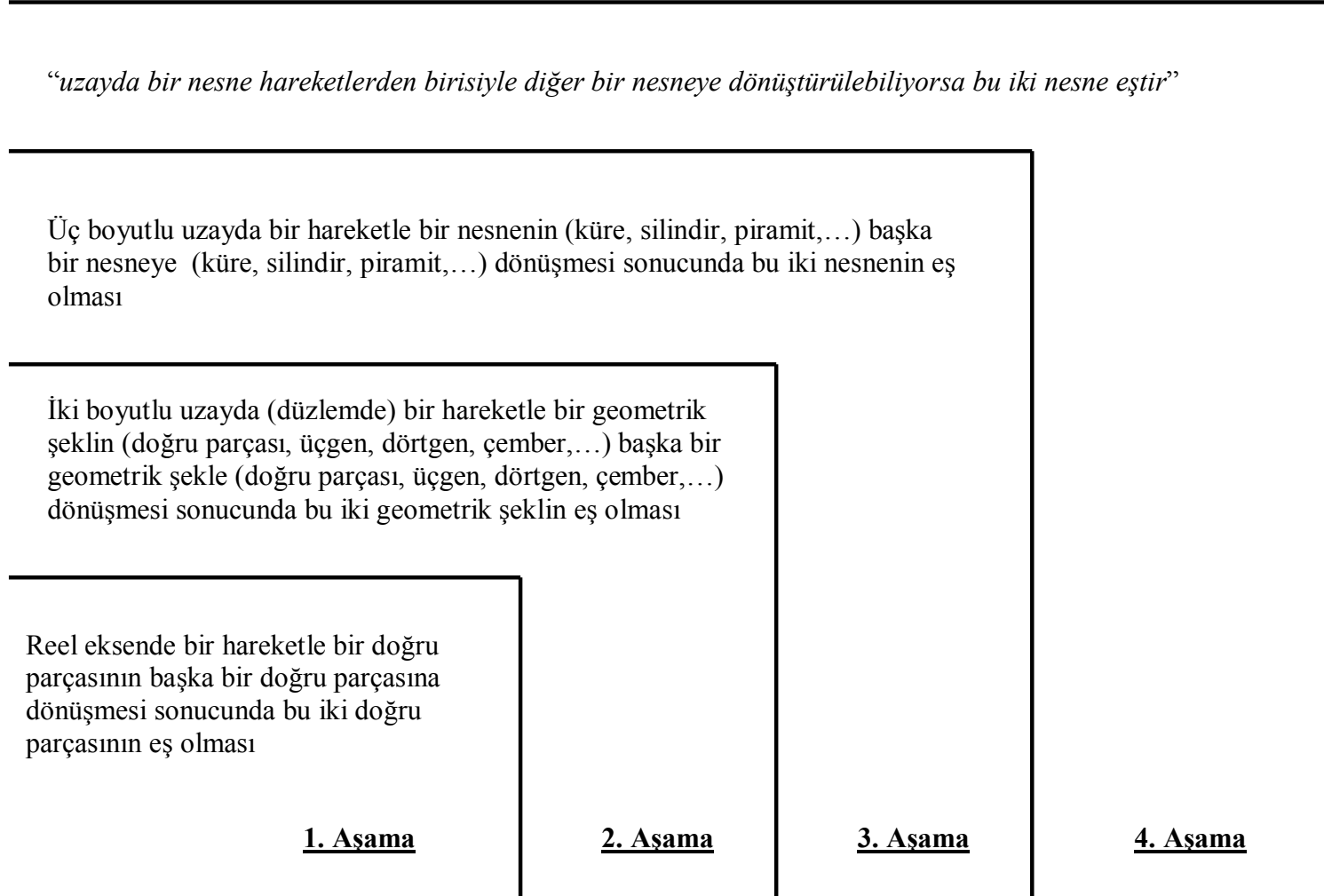
(i) Bir kürenin başka bir küreye bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki kürenin eş olduğu ile sonuçlanan şema. Burada öncelikle nokta kavramı uzayda *obje* olarak alınmış, uzayda iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* uzayda küre kavramı *içselleştirilmiş*, uzayda kürenin alanını, hacmini... düşünme süreci gerçekleşerek üç boyutlu hareket kavramı ile küre kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda bu iki kürenin eş küreler olduğunu *enkapsüle ederek* eş kürelerin *obje* olarak sonuçlanmasıyla şema oluşturulmuştur. Şemanın enkapsülasyon süreçleri, hareketlerin açıları, kenar uzunluklarını ve alanları, hacimleri koruması gibi eylemleri gerektirmektedir (EK-10).

(ii) Bir silindir parçasının başka bir silindir parçasına bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki silindir parçasının eş olduğu ile sonuçlanan şema. Burada öncelikle nokta kavramı uzayda *obje* olarak alınmış, uzayda iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* uzayda silindir parçası kavramı *içselleştirilmiş*, uzayda silindir parçasının alanını, hacmini... düşünme süreci gerçekleşerek üç boyutlu hareket kavramı ile silindir parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda bu iki silindir parçasının eş silindir parçaları olduğunu *enkapsüle ederek* eş silindir parçalarının *obje* olarak sonuçlanmasıyla şema oluşturulmuştur. Şemanın enkapsülasyon süreçleri, hareketlerin açıları, kenar uzunluklarını ve alanları, hacimleri koruması gibi eylemleri gerektirmektedir (EK-11).

(iii) Bir piramidin başka bir piramide bir hareketle dönüşmesi sonucunda bu iki piramidin eş olduğu ile sonuçlanan şema. Burada öncelikle nokta kavramı uzayda *obje* olarak alınmış, uzayda iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* uzayda piramit kavramı *içselleştirilmiş*, uzayda piramidin alanını, hacmini... düşünme süreci gerçekleşerek üç boyutlu hareket kavramı ile piramit kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda bu iki piramidin eş piramitler olduğunu *enkapsüle ederek* eş piramitlerin *obje* olarak sonuçlanmasıyla şema oluşturulmuştur. Şemanın enkapsülasyon süreçleri, hareketlerin açıları, kenar uzunluklarını ve alanları, hacimleri koruması gibi eylemleri gerektirmektedir (EK-12).

Bu şemalar oluşturulurken küre, silindir parçası ve piramit gibi geometrik nesnelerin eş geometrik nesnelere dönüşümü süreçlerinde düzlemsel hareketlerin şemaları içinde enkapsüle edilen eylemler sonucundaki eş doğru parçaları, eş üçgenler, eş dörtgenler, eş çemberler gibi eş geometrik şekil objelerinin özellikleri ve yükseklik, alan, hacim hesabı gibi eylemlerle içselleştirilerek oluşan süreçlerle koordinasyonu gerekmektedir.

Soyutlamanın gerçekleşmesi sürecinde süreç içinde durumlar aşamalı olarak ortaya çıkmıştır (Şekil 2.6). Araştırmada bu sürecin analizi kısmındaki yapılan çalışmalarda bütün bu aşamaların ilerlemesi sırasında katılımcıların görselleştirmelerine, görselleştirme çeşitlerine, görsel imaj çeşitlerine ve bunların süreçteki yerlerinin incelenmesine dikkat edilmiştir (EK-13, EK-14). Bu sırada, katılımcıların kullandığı görselleştirmeler ve görsel imajları ile ilgili frekanslara dikkat edilmiş ve bunlar EK-15 ve EK-16 te verilmiştir. Bunlar verilirken görselleştirmelerin ve görsel imajların soyutlama sürecindeki yapılanmalarında bulundukları yerlere göre dağılımları da verilmiştir. Bu şekilde yapılan analiz sonucu elde edilen görselleştirme ve görsel imajlarla ilgili bulgular, bulgular ve yorumlar bölümünde derinlemesine verilmiştir.



Şekil 2.6. Soyutlamanın Aşamalı Organizasyonu

İkinci görüşme verilerinin analizi için, ilk olarak yazılı döküman haline getirilen video kaydı görüntülerine ait veriler (EK-23), ilgili literatüre dayalı olarak açık kodlama ile kodlanmıştır. Bu süreçte kavramlar belirlenerek bu kavramların özellik ve boyutları anlaşılmasına çalışılmıştır. Bunun için genelleme süreçleri içinde anlamlı olabilecek kavramsallaştırmalar ve görselleştirmeler ile ilişkili bulunan durumlar kategorilendirilerek alt gruplara ayrılmıştır. Katılımcıların genelleme süreçleri içindeki görselleştirmeleri karşılaştırmalı olarak incelenmeye çalışılmıştır. Daha sonra eksensel kodlama ile elde edilen kategoriler ve bunların alt kategorileri ilişkilendirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca bunlar incelenirken frekanslarına da dikkat edilmiştir.

Bu süreçlerin gelişiminde katılımcıların genelleme sürecindeki görsel imaj ve görselleştirme çeşitlerinin yeri belirlenmeye çalışılmıştır. Bu şekilde oluşturulan tablolarda her bir katılımcının genelleme süreçleri içindeki görselleştirmelerinin ve görsel imajlarının çeşitliliği ve yeri ortaya net bir şekilde çıkmıştır. Bu durum katılımcının tüm katılımcılar içindeki durumunu görmeye de yardımcı olmuştur.

Katılımcıların genelleme süreçlerini incelerken verilen aşamalar irdelenmeye çalışılmış ve her aşamanın çözümlemesi yapılmaya çalışılmıştır. EK-18 de genelleştirme süreci için oluşturulan şemanın organizasyonu verilmektedir.

Kodlamalar ve kategorileri ile ilişkilendirilmeleri sırasında öncelikle genelleme sürecindeki görselleştirmenin yerini görmek için katılımcıların düşüncelerinin genetik bir çözümlemesi yapılmıştır. Bunun için süreci incelemek adına kullanılan ‘karşılıklı kenarları paralel olan herhangi $2n$ -genler için içinde oluşan n -genlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu $2n$ -gen şeklindeki çokgenlerin karşılıklı kenarlarının eşit ve paralelliği’ kavramının genellenmesi sürecinde katılımcıların transkriptleri, seçmeli derslerdeki performansları ve öngörüşmeleri dikkate alındığında aşağıdaki durumları daha önceden geliştirmiş olmaları beklenmektedir.

- Çokgenlerin kenar orta noktalarının ve köşegenlerinin obje olarak ele alınması ile bu objelerin ilişkilendirilmesi,
- Üçgen, dörtgen ve beşgen gibi çokgenlerin ağırlık merkezlerinin objeler olarak ele alınması ve ilişkilendirilmesi,
- Temel Orantı Teoreminin uygulanması

Katılımcıların genelleme süreçlerini incelerken verilen durumlar aşamalı olarak irdelenmiş ve her aşamanın çözümlemesi aşağıdaki gibi yapılmaya çalışılmıştır.

1. Seviye (1. Aşama):

- (i) Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenin, kenar orta noktalarını birleştiren doğruyu *obje* olarak ele alıp, köşegenlerin de *objeler* olarak ele alınması ve bu *objelerin ilişkilendirilmesi* ile ilgili şemanın elde edilmesi.

(ii) Dörtgendeki durumu Thales *durumu ile ilişkilendirilmesi* ile ilgili şemanın elde edilmesi.

Böylece karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenle kenarların orta noktalarının oluşturduğu karşılıklı kenarları paralel ve eşit olan dörtgenin *ilişkilendirilmesi*.

- (i) Dörtgendeki düşünce ile altıgende oluşacak düşüncede *aynı ilişkiyi araştırma* ile ilgili şemanın elde edilmesi.

(ii) Altıgende oluşan düşünceyle sekizgende oluşacak düşüncede *aynı ilişkiyi araştırma* ile ilgili şemanın elde edilmesi.

(iii) Verilen dörtgenin köşegeninin oluşturduğu üçgen ve orta noktalarla ilişkilendirilen Thales Teoremi ile *benzer çözümü* altıgende oluşan şekil için de *araştırma* ile ilgili şemanın elde edilmesi

(iv) Verilen altıgenin köşegeninin ve kenar orta noktasının oluşturduğu üçgen ve orta noktalarla ilişkilendirilen oran ile *benzer çözümü* sekizgende oluşan şekil için de *araştırma* ile ilgili şemanın elde edilmesi.

Böylece karşılıklı kenarları paralel olan altıgenin köşelerinde oluşacak üçgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel ve eşit olduğunun *araştırılması*. Benzer şekilde karşılıklı kenarları paralel olan sekizgenin köşelerinde oluşacak dörtgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu sekizgenin karşılıklı kenarlarının paralel ve eşit olduğunun *araştırılması*.

2. Seviye (2. Aşama):

- (i) Altıgen ve sekizgen için elde edilen durumların ongen ve onikigen için *uygulanabilir* olması ile ilgili şemanın elde edilmesi.

(ii) Altıgende oluşan $1/3$ oranı ve sekizgende oluşan $1/4$ oranını, ongen için $1/5$ ve onikigen için $1/6$ oranına *genişletme* ile ilgili şemanın elde edilmesi

Böylece karşılıklı kenarları paralel olan ongenin köşelerinde oluşacak beşgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu ongenin karşılıklı kenarları paralel ve eşit olduğu *genişletmesi*. Benzer şekilde karşılıklı kenarları paralel olan onikigenin köşelerinde oluşacak altıgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu onikigenin karşılıklı kenarları paralel ve eşit olduğu *genişletmesi*

3. Seviye (3. Aşama):

- (i) Kenar sayısı 4,6,8,10,12 olan çokgenlerde elde edilen ortak özelliklere göre tüm çift sayıdaki çokgenlerde de benzer oranı *belirleme* ile ilgili şemanın elde edilmesi.
- (ii) Karşılıklı kenarları paralel olan $2n$ sayılı kenara sahip çokgenlerin köşelerinde oluşacak olan n kenarlı çokgenlerin ağırlık merkezleri karşılıklı kenarları paralel ve eşit $2n$ kenarlı çokgenler oluşturacağı kuralını elde etme ile ilgili şemanın elde edilmesi.

Böylece kenar sayısı $2n$ olan karşılıklı kenarları paralel çokgenin köşelerinde oluşacak n -kenarlı çokgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu çokgen de $2n$ sayıda kenara sahip olduğu ve karşılıklı kenarları paralel ve eşit olduğunun *belirlenmesi*

- (i) Karşılıklı kenarları paralel olan $2n$ -kenarlı çokgenlerin n -kenarlı çokgenlerin ağırlık merkezleri ile alt parçalara bölünmesi sonucu oluşacak $2n$ -kenarlı çokgenlerin oluşturduğu *objeler sınıfı* ile ilgili şemanın elde edilmesi.

Böylece karşılıklı kenarları paralel olan herhangi $A_1A_2A_3...A_{2n}$ ($n \geq 2$) şeklindeki $2n$ -genler için n -genlerin ağırlık merkezleri, verilen $2n$ -geni $A_1A_2A_3...A_n$, $A_2A_3A_4...A_{n+1}...$ vb. alt parçalara böler ve buradaki oluşacak çokgenler yine $2n$ -gen şeklinde olup karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir şeklindeki *tanımlamanın* yapılması...

Araştırmada bu sürecin analizi kısmındaki yapılan çalışmalarda bütün bu aşamaların ilerlemesi sırasında katılımcıların görselleştirmelerine, görselleştirme çeşitlerine, görsel imaj çeşitlerine ve bunların süreçteki yerlerinin incelenmesine dikkat edilmiştir (EK-19, EK-20). Bu sırada, katılımcıların kullandığı görselleştirmeler ve görsel imajları ile ilgili frekanslara dikkat edilmiş ve bunlar EK-21 ve EK-22 de verilmiştir. Bunlar verilirken görselleştirmelerin ve görsel imajların soyutlama

sürecindeki yapılanmalarında bulundukları yerlere göre dağılımları da verilmiştir. Bu şekilde yapılan analiz sonucu elde edilen görselleştirme ve görsel imajlarla ilgili bulgular, bulgular ve yorumlar bölümünde derinlemesine verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü verilerin analizi için soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleşmenin rolünü araştırmak adına veriler analiz edilmiştir. Üçüncü görüşme verilerinin analizi için birinci görüşmedeki verilerin analizine benzer bir yol izlenmiştir. Bunun için yazılı metinler haline getirilmiş video kayıtları ile ilgili elde edilen veriler (EK-24) için literatüre dayalı olarak açık kodlamalar yapıp kavramların özellik ve boyutları incelenmeye ve kategoriler oluşturulup alt gruplara ayrılmaya çalışılmıştır. Eksensel kodlama ile kategoriler ve alt kategoriler ilişkilendirilmiştir. Böylece soyutlama sürecindeki görselleştirmenin rolü belirlenmeye çalışılmıştır.

Bu süreçlerin gelişiminde katılımcıların soyutlama sürecinde verilen görselleştirmeler sonucu değişen veya gelişen görsel imajları ve soyutlama süreçlerindeki farklılıklar belirlenmeye çalışılmıştır. Bu şekilde yapılan analizle, her bir katılımcının verilen görselleştirmeler sonucu soyutlama süreçleri içindeki farklılık net bir şekilde görülmeye çalışılmıştır. Ayrıca her katılımcının tüm katılımcılar içindeki durumu görülmeye çalışılmıştır.

Bu şekilde yapılan analiz sonucu elde edilen görsel imajlara dair değişim ve gelişimle ilgili bulgular, bulgular ve yorumlar bölümünde derinlemesine verilmiştir.

Dördüncü görüşme verilerinin analizi yapılırken ikinci görüşmedeki veri analizine benzer bir yol izlenmiştir. Bunun için yazılı metinler haline getirilmiş video kayıtları ile ilgili elde edilen veriler (EK-25) için literatüre dayalı olarak açık kodlamalar yapıp kavramların özellik ve boyutları incelenmeye ve kategoriler oluşturulup alt gruplara ayrılmaya çalışılmıştır. Eksensel kodlama ile kategoriler ve alt kategoriler ilişkilendirilmiştir. Böylece genelleme sürecindeki görselleştirmenin rolü belirlenmeye çalışılmıştır. Bu süreçlerin gelişiminde katılımcıların genelleme sürecinde verilen görselleştirmeler sonucu değişen veya gelişen görsel imajları ve genelleme süreçlerindeki farklılıklar belirlenmeye çalışılmıştır. Bu şekilde yapılan analiz sonucu elde edilen görsel imajlara dair değişim ve gelişimle ilgili bulgular, bulgular ve yorumlar bölümünde derinlemesine verilmiştir.

IV. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde araştırmada yapılan verilerin analiziyle elde edilen bulgulara ve yorumlara yer verilecektir.

Verilen alt başlıklarda soyutlama ve genelleme süreçleri içindeki aşamaların bulguları ve yorumları belirtilecektir. Alt başlıklarda sırasıyla soyutlama ve genelleme süreçleri gerçekleşirken görselleştirmelerin nasıl ve ne kadar yapıldığı ve ne tür görsel imajlara sahip olduğu ve soyutlama ve genelleme süreçleri gerçekleşirken görselleştirmelerin etkisinin nasıl olduğu ile ilgili bulgular ve yorumlar verilmiştir. Her iki alt başlık için soyutlama ve genelleme süreçlerine dair aşamalar ayrı alt başlıklar şeklinde verilmiştir. Soyutlama süreci için 4 aşama içinde 9 durum ve genelleme süreci için 3 aşama içinde 5 durum bulunmaktadır. Her durumda bulgular ve yorumlar verilirken katılımcıların kullandığı ifadeler tırnak işareti içinde, bu ifadelerin süreçlerdeki parçalanmaları ise italik şekilde yazılarak verilmiştir.

4.1. Soyutlama ve Genelleme Süreçlerinde Başvurulan Görselleştirmeler ve Sahip Olunan Görsel İmajlar İle İlgili Bulgular ve Yorumlar

4.1.1. Soyutlama Süreci ile İlgili Bulgular ve Yorumlar

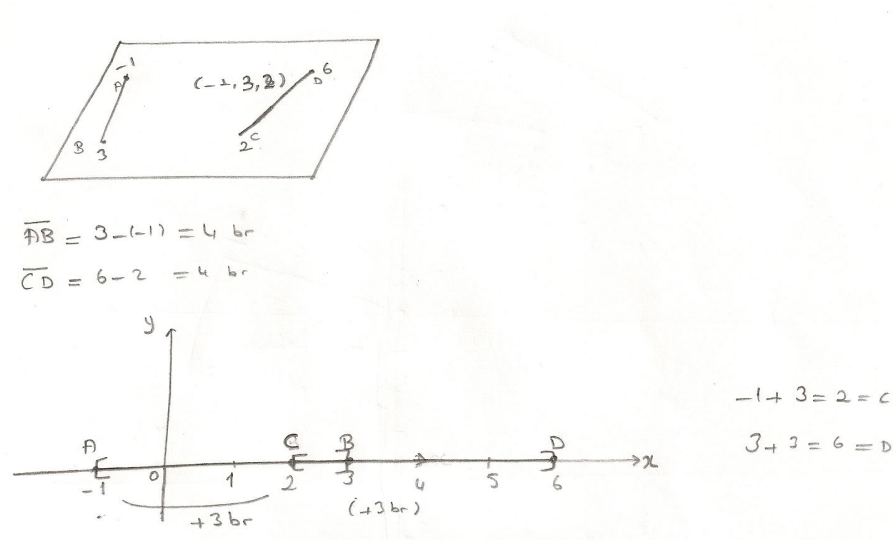
4.1.1.1. 1.Aşama

1. Durum. Bu durumda katılımcılar *homomorfik* ve *izomorfik* görselleştirmeler kullanmışlardır. Tarık ve Filiz sadece *izomorfik* görselleştirme kullanırken Özge, Mert

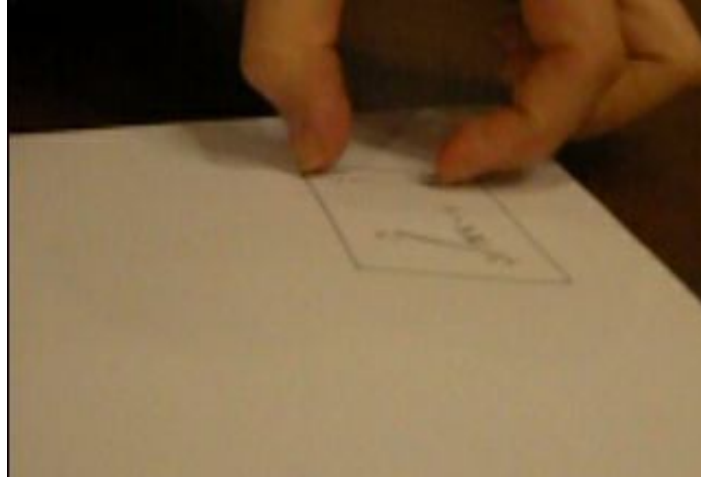
ve Gönül hem *izomorfik* hem de *homomorfik* görselleştirme kullanmışlardır. Her iki görselleştirmeyi kullanan katılımcılar *başlangıç objesi* olarak ele aldıkları noktaları *somut imajları* şeklinde ifade ederken öncelikle *homomorfik* şekilde görselleştirmişlerdir. *İzomorfik* şeklindeki görselleştirmeler ise *içselleştirme* veya *koordinasyon* süreçlerinde ortaya çıkmıştır.

Katılımcılar görsel imaj çeşitleri olarak *somut imaj*, *kinestetik imaj*, *dinamik imaj* ve *formül imajlarını* kullanmışlardır. Tarık, Gönül ve Filiz’de *somut*, *kinestetik*, *dinamik* ve *formül imajları* görünürken, Özge ve Mert’te *somut*, *dinamik* ve *kinestetik imajları* görünmüştür.

Gönül, *somut imajı* olarak ifade ettiği görselleştirmesi sırasında noktaları sayı doğrusu yerine ‘düzlem’de almıştır (Şekil 4.1.1). Doğru parçası kavramını *içselleştirmeye* çalışırken ‘doğru parçasının uzunluğu’nu düşünme sürecinde *kinestetik imaj* olarak doğru parçalarını parmaklarıyla tutmuştur (Şekil 4.1.2). Ayrıca ‘Yani B noktasını C noktasına getirmek için belli bir birim oranında’ diyerek *dinamik imajını* kullanmış ve görselleştirdiği şekil üzerine odaklanarak ‘Şimdi şöyle noktanın koordinatlarını karşılaştırayım.’ demiştir. Bu süreçte *formül imajını* kullanarak doğru parçalarının ‘bileşenler’ine bakmış ve ‘eşit uzunlukta’ olduğunu görmüştür. Hareket kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyonu* kurmaya çalışırken hareketin ‘öteleme’ olduğunu farketmiş ve bunu ‘ilerletme’ olarak ifade etmiştir. Bu da yine *dinamik imajı* göstermektedir. Ancak görselleştirdiği şekil üzerinde düşünürken noktaları *homomorfik* şekilde çizdiği için oluşan şekil, noktaların yanlış ötelenmesine neden olmuştur. Hareketin öteleme olduğunu düşünme sürecinde *geri dönme* sırasında noktaları ‘koordinat eksenleri’ üzerinde *izomorfik* olarak görselleştirmesi ona hareketin reel ekseninde olduğunu kavramasına yardımcı olmuştur (Şekil 4.1.1). Şekil üzerinde ‘öteleme miktarı’ni görmüş ve doğru parçalarını ‘getirerek’ ‘çakıştırmış’tır.



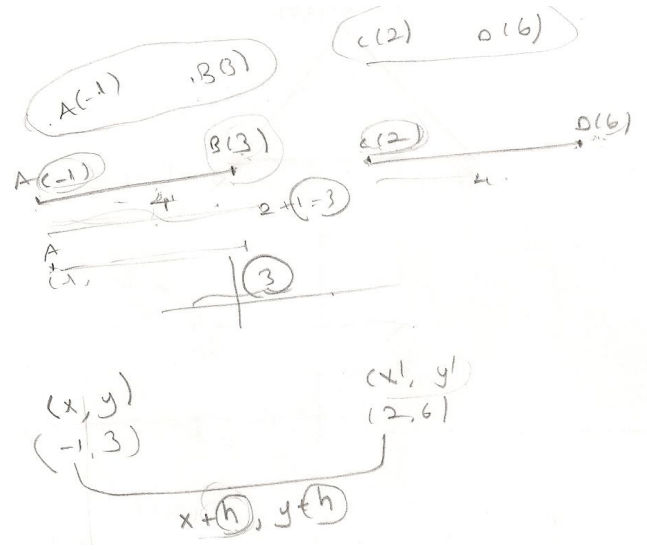
Şekil 4.1.1. Gönül'ün Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.2. Gönül'ün Soyutlamadaki 1. Durum Görüntüsü

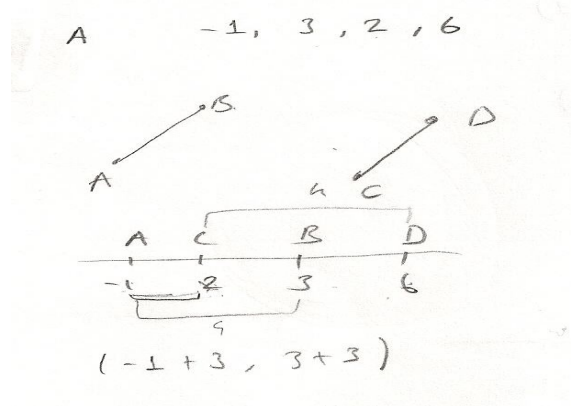
Özge ise doğru parçası kavramını *içselleştirmeye* çalışırken elleri ile noktaları hareket ettirerek *kinestetik imajını* kullanmıştır. Bu süreçte 'B noktasını düşünürsek B noktası da 3 noktasından 6 noktasına gelmiş' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Bu düşüncelerini *homomorfik* görselleştirmesi sırasında yapmıştır. Doğru parçalarının uzunluğunu düşünme sürecinde bir boyutlu hareket kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyonu* sırasında *izomorfik* görselleştirme ortaya çıkmıştır (Şekil 4.1.3). Ancak bir boyutlu hareket olarak sayı doğrusu üzerinde ötelemeyi ifade ederken

geri dönme sırasında sayı doğrusunu ‘düzlem’ olarak düşünmüş ve noktaları iki boyutlu olarak ele almıştır. Zihinsel kavramalarını ifade ederken doğru parçasının *somut imaj* olarak kağıt üzerinde şekiller çizmiştir. Bu onun doğru parçasının ne kadar ‘ötelendi’ğini düşünmesinde yararlı olmuştur. ‘A noktasının 3 birimlik ilerlemesiyle B noktası elde edilmiş diye düşünüyorum’ diyerek *dinamik imajını* kullanmış ve doğru parçası ile ötelenmiş için ‘Baktığımızda bu iki doğrunun uzunlukları da eşit’ demiş ve bunları kıyaslarken ‘İki doğru için sadece yerleri farklıdır, eşdeğerdir diyebilirim’ şeklinde belirtmiştir.



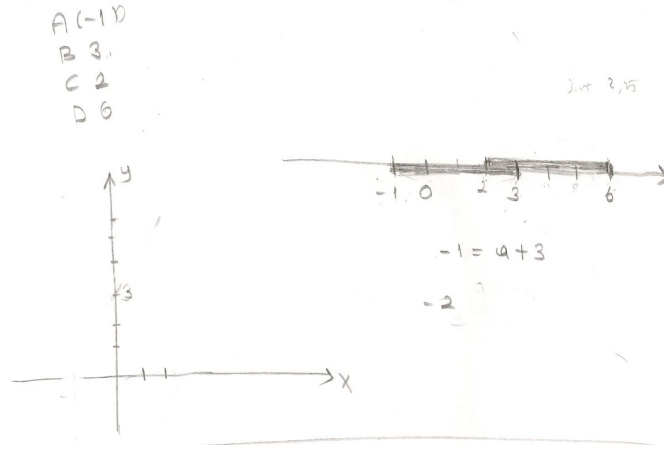
Şekil 4.1.3. Özge'nin Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri

Mert, sayı doğrusu üzerinde *somut imaj* olarak ifade ettiği doğru parçalarını ilk önce *homomorfik* şekilde görselleştirmiş daha sonra *içselleştirme* sırasında *izomorfik* görselleştirme yapmıştır (Şekil 4.1.4). Bir boyutlu hareket kavramı ve doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyonu* oluştururken *kinestetik imaj* olarak ‘öteleme’ hareketini ifade etmek adına kalemiyle noktaları belirleyerek bunları hareket ettirmiştir. Ayrıca ‘Her birine yani -1 e 3 eklersem yani 3 birim kaydıracağım sağa doğru’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Ötelemeyi düşünme sebebini ise ‘Zaten doğrusaldı. O yüzden öteleme yolunu tercih ettim’ şeklinde açıklamıştır. Bu süreçte yine *kinestetik imaj* şeklinde doğru parçalarını eliyle kaldırıp karşılaştırmasıyla göstermiştir.



Şekil 4.1.4. Mert'in Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri

Sadece *izomorfik* görselleştirmeyi kullanan Filiz, yanlış görselleştirme yaptığının farkına vararak noktaların sayı doğrusu üzerinde olması gerektiğini söylemiştir (Şekil 4.1.5). Bu arada ‘doğru denklemi’ni elde etmeyi düşünmüş ancak bundan vazgeçmiştir. Daha sonra ‘doğru parçasının uzunluğu’ kavramını düşünme sürecinde *izomorfik* olarak görselleştirdiği şekilde, bir boyutlu hareket kavramı ve doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyonu* kurmuş ve ‘-1 e 3 eklersek 2 olur. O da şuraya gelir. 2 ye de yine 3 eklersek... Hım... Yani bitiş noktasının 6 ya gelmesi gerekiyor. Şu noktada şuraya gelecek’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Bu sırada *geri dönme* yaparak doğru parçalarının ne kadar ötelendiğinin bulmak için *somut imajı* şeklinde ifade ettiği doğru parçalarını eliyle tutup ‘çakıştırmış’tır. Bu, *kinestetik imajını* göstermektedir. Doğru parçalarının uzunluğunun eşit olmasını ise görselleştirdiği şekil üzerinde ‘Birbirine eşittir. İki nokta arasındaki uzaklıktan...’ şeklinde ifade etmiş ve ilgili *formül imajını* kullanarak doğrulamıştır. Bu arada uzunluklarının ‘cetvel’le de ölçülebileceğinden bahsetmiştir (Şekil 4.1.6). Böylece ‘Bu doğru parçalarının uzunlukları eşit. Uzaklıklar değişmedi, hareket uzaklığı korudu’ demiş ve ‘Bunlar bence eş doğru parçaları. Uzunlukları birbirine eşit. Birinden diğeri elde edilebilen doğru parçaları’ diye ekleyerek süreci bitirmiştir.



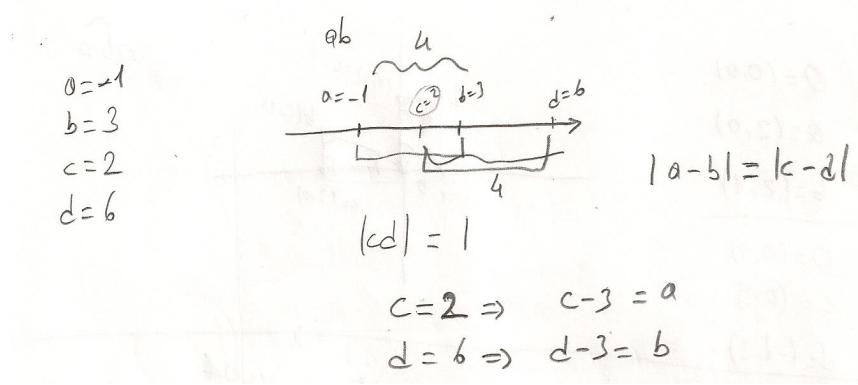
Şekil 4.1.5. Filiz'in Soyutlamadaki 1.Durum Temsilleri



Şekil 4.1.6. Filiz'in Soyutlamadaki 1. Durum Görüntüsü

Tarık, *başlangıç objesi* olarak aldığı noktalar için 'Verilen noktalar tek bileşenli. O zaman bunları ben reel eksende düşünürsem...' demiş ve doğru parçası kavramını *içselleştirmiştir*. Bunu yaparken *izomorfik* görselleştirmeyi kullanmıştır (Şekil 4.1.7). 'Bunun uzunluğu dört birimdir. Bu uzunluk da dört birimdir. O halde ben C yi tutup 3 birim sola kaydırırsam aynı şekilde D yi de 3 birim sola kaydırırsam bu iki doğru parçası döner.' şeklindeki ifadesinde doğru parçalarının uzunluğunu düşünme sürecinde doğru parçası kavramı ile bir boyutlu hareket kavramı arasındaki

koordinasyonu sağlamış ve hareketin *somut imajı* olarak çizdiği resim üzerinde *dinamik imajını* ifade etmiştir. Ayrıca bunu açıklarken *kinestetik imajı* olarak eliyle hareket ettirmiştir. Öteleme hareketini elde ederken ‘doğru parçası kavramının tanımı’ na *geri dönme* yapmıştır. Doğru parçalarının ne kadar ötelendiğini görüp öteleme denklemini elde etmeye çalışmıştır. Bu arada doğru parçalarının ‘uzunluklarının eşit’ olmasını açıklarken kağıt üzerinde *somut imajı* olarak ifade ettiği şekil üzerinde uzunluklarını yazmış ve *formül imajını* kullanarak ‘Uzunluk olarak baktığımızda yani mutlak değer a-b mutlak değer c-d ye eşit olduğundan bunların uzunlukları birbirine eşittir’ demiştir.



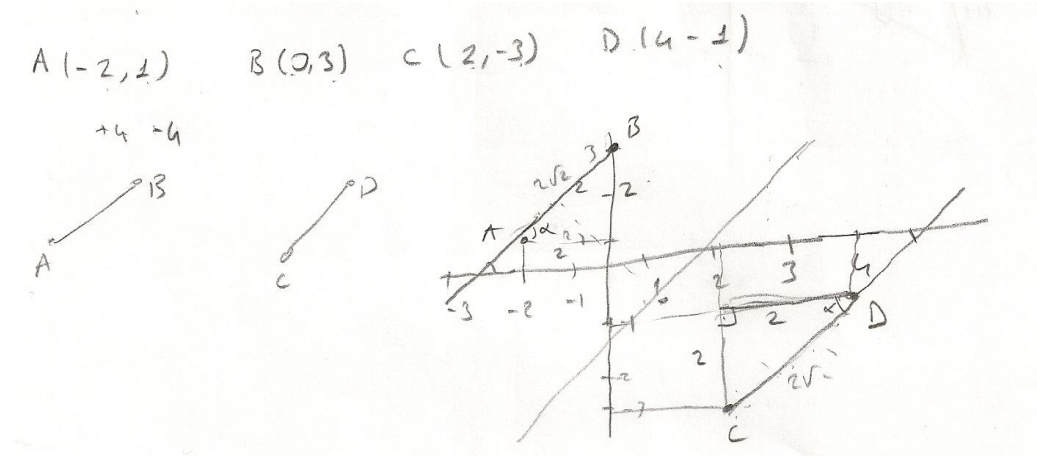
Şekil 4.1.7. Tarık'ın Soyutlamadaki 1. Durum Temsilleri

Katılımcılar, reel eksende doğru parçalarının eş olmasını *enkapsüle etmiş* ve buradan ötelemeye bir doğru parçası ile görüntüsü olan doğru parçasının eş olduğu *genellemesine* ulaşmıştır. Sonuçta *bitiş objesini* oluşturmuşlardır. Özge, *bitiş objesi* olarak elde ettiği doğrular için ‘eşdeğer’ ifadesini, Mert ise ‘eşit’ ifadesini kullanmıştır. Gönül, ‘eşit, aynı’ ifadelerini, Filiz ve Tarık ise ‘eş’ ifadesini kullanmıştır.

4.1.1.2. 2. Aşama

2. Durum. 2. durumda katılımcılar *homomorfik* ve *izomorfik* görselleştirmeler kullanmışlardır. Katılımcılardan Özge sadece *homomorfik* görselleştirme, Tarık, Gönül ve Filiz sadece *izomorfik* görselleştirme kullanırken Mert ise hem *izomorfik* hem de

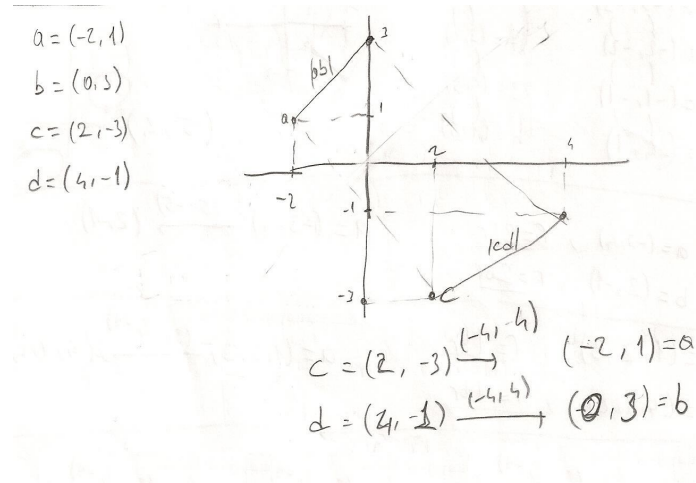
Mert, verilen noktaları *başlangıç objesi* olarak almış ve doğru parçalarını oluştururken *somut imajı* olarak bunları öncelikle *homomorfik* şekilde görselleştirmiştir. Daha sonra noktaları koordinat düzleminde *izomorfik* olarak görselleştirmiş ve düzlemde doğru parçası kavramını *içselleştirmiştir* (Şekil 4.1.9). ‘Yine AB ve CD aynı uzunlukta’ demiş ve çizdiği şekil üzerindeki dik üçgenlerin kenar uzunluklarını bularak görmüştür. Doğru parçalarının birbirlerine dönüşümünü düşünürken bunları *kinestetik imajı* şeklinde eliyle ilerletmiştir. Ayrıca ‘Yani kaydırabilir miyim diye düşüneceğim’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. İlk önce doğru parçalarının ‘aynı eğim’e sahip olduklarından ‘paralel’ olacaklarını düşünmüş ve ‘simetrik’ şeklinde ifade ettiği doğru parçalarının ‘yansıma’ hareketiyle elde edilebileceğini ifade etmiştir. Ancak zihnindeki *formül imajı* olarak gerekli değerlerin elde edilemeyeceğini düşünmüş ve hareketin ‘öteleme’ olduğuna karar vermiştir. Bu sırada noktalar arasındaki uzaklıkları düşünmüş ve öteleme vektörünü elde etmiştir. Düzlemde hareket ve düzlemde doğru parçası kavramları arasındaki *koordinasyon* sırasında bu doğru parçaları için ‘vektörler’ ifadesini kullanmış ve daha sonra bunların ‘eş’ oldukları *enkapsülasyonunu* elde etmiştir. Mert, *bitiş objesi* olarak eş doğru parçalarını elde etmiş ve eşlik kavramı yerine ‘denk’ ifadesini kullanmıştır.



Şekil 4.1.9. Mert’in Soyutlamadaki 2.Durum Temsilleri

Tarik, *başlangıç objesi* olarak ele aldığı noktaları ‘İki bileşenli olduğu için düzlemde çizelim’ diyerek düzlemde *izomorfik* olarak görselleştirmiştir. *Somut imajı*

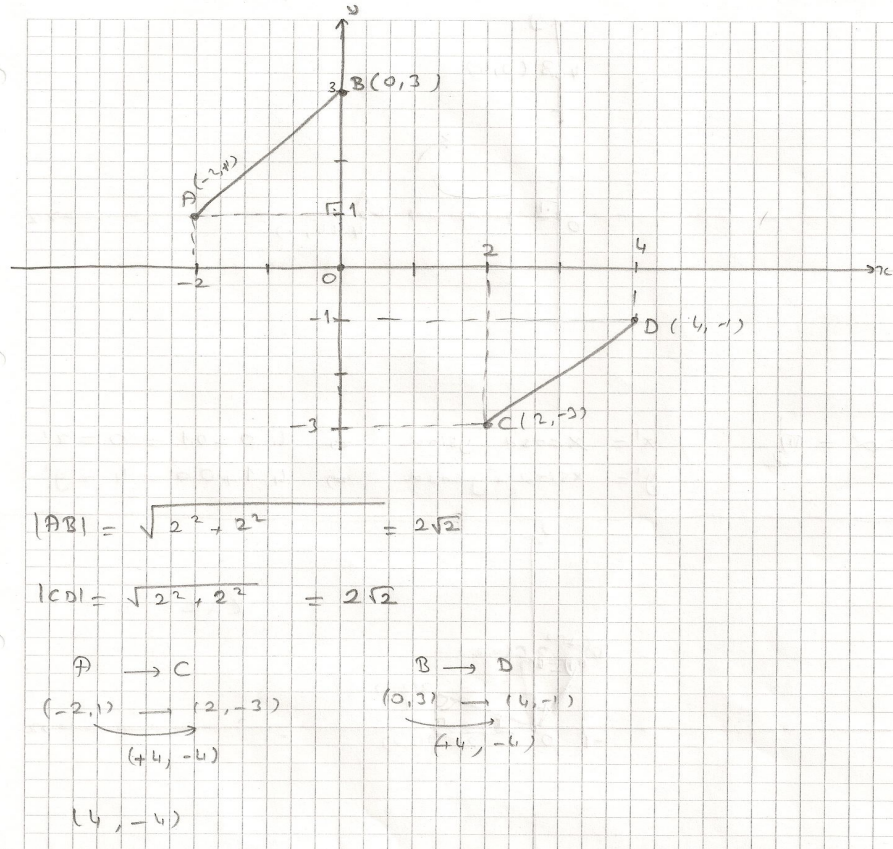
olarak ifade ettiği şekil üzerinde öncelikle hareketin ‘yansıma’ olduğu düşüncesi ile doğru parçalarının ‘simetri eksenini’ni belirlemeye çalışmıştır. Ancak şekil üzerinde düşündüğünde bunun olamayacağını fark edip düşüncesini değiştirmiştir. Daha sonra düşüncesini iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle içselleştirmiş* ve doğru parçalarının uzunluklarını düşünmüştür (Şekil 4.1.10). Düzlemsel hareket kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında zihnindeki *formül imajı* ile öteleme vektörünü bulmuş ve doğru parçaları için ‘Yani C noktasını bir şekilde A noktasına eşit kılmak ve D noktasını da B noktasına bir şekilde eşit kılmaya çalıştım’ demiştir. ‘Yine uzunlukları eşit olan iki doğru düzlemde farklı yerde de olsalar birbirlerine eşlerdir’ diyerek bunların eş doğru parçaları olduğunu *enkapsüle ederek* süreci ‘eş’ doğru parçalarının *bitiş objesi* olarak elde edilmesi ile tamamlamıştır.



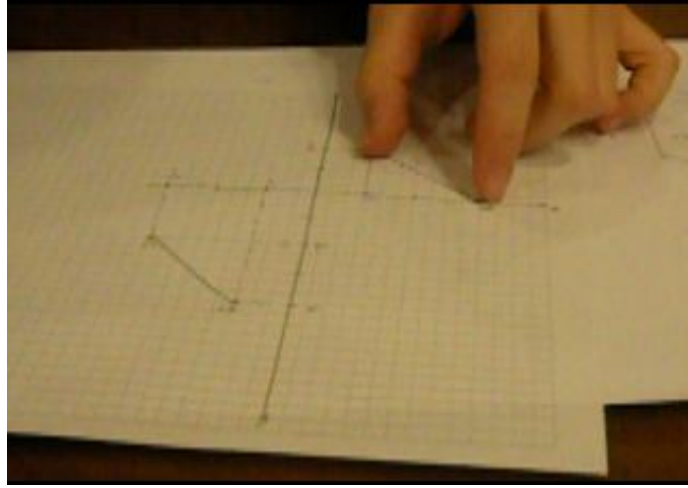
Şekil 4.1.10. Tarık’ın Soyutlamadaki 2.Durum Temsilleri

Gönül, *başlangıç objesi* olarak noktaları almayı düşündüğünde görüşmeciden ‘kareli kağıt’ istemiştir. Bunu ‘Burada ben birimleri tam ayarlayamıyor olabilirim. O yüzden kareli kağıt alabilir miyim?’ ve ‘Görmem açısından kareli kağıt daha iyi oluyor.’ şeklinde ifade etmiştir. Bu durum zihnindeki imajların yansıması olan görüntülerin düzgün ifade edilmesinin onun için önemli olduğunu göstermektedir. Daha sonra ‘iki nokta arasındaki uzaklık’ *eylemiyle* düzlemde doğru parçası kavramını *izomorfik* olarak

görselleştirerek içselleştirmiştir (Şekil 4.1.11). Doğru parçalarının ‘uzunluklarının eşit’ olup olmadığını *somut imajı* olarak ifade ettiği şekil üzerinde ölçerek görmeye çalışmış daha sonra zihnindeki *formül imajı* ile bu iki doğru parçasının ‘uzunluklarının eşit’ olması gerektiği halde eşit olmadığını ifade etmiştir. Eşit olmasının gerektiğini ise görselleştirdiği şekle göre söylemiş ve ‘öteleme’ hareketinin ‘uzaklık koruması’ gerektiğini yorumunu yapmıştır. Zihnindeki *formül imajını* kağıda döktüğünde ise yanlışını fark etmiş ve ‘öteleme vektörü’nü bularak hareketin uzaklık koruduğunu görmüştür. Düzlemsel hareket ve doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında noktaları ve daha sonra doğru parçalarını *kinestetik imajı* şeklinde hareket ettirmiştir (Şekil 4.1.12). ‘Yani kaydırıyormuşuz gibi’ diyerek ise *dinamik imajını* kullanmıştır. Doğru parçası ile ötelenmişinin uzunluklarının eşit olduğu düşüncesiyle ‘eş’ doğru parçalarını *enkapsüle etmiş* ve sonuçta *bitiş objesi* olarak eş doğru parçalarını elde etmiştir.



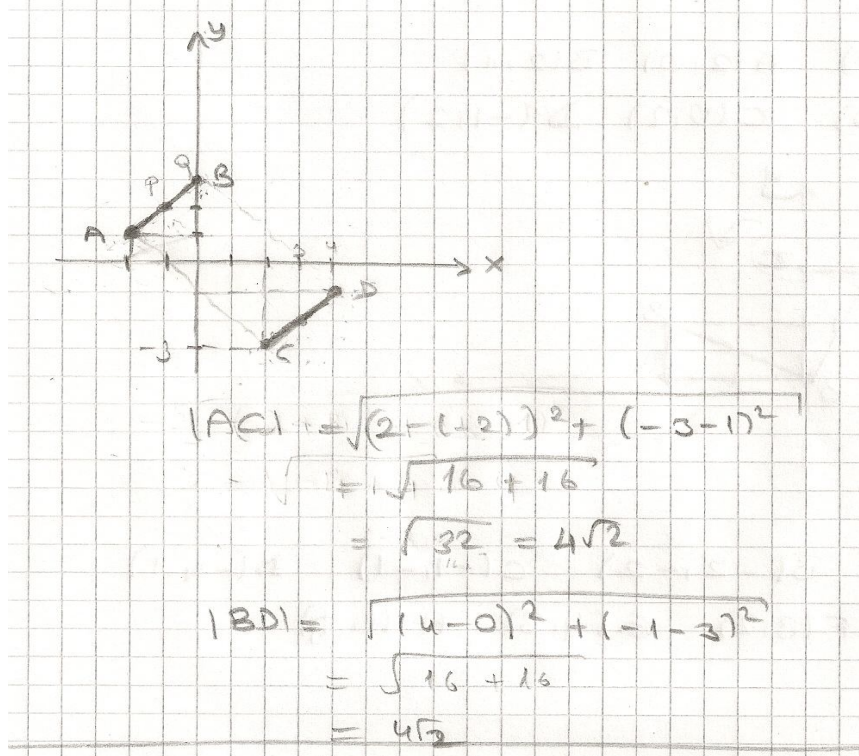
Şekil 4.1.11. Gönül’ün Soyutlamadaki 2. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.12. Gönül'ün Soyutlamadaki 2. Durum Görüntüsü

Filiz, noktaları *başlangıç objesi* olarak almadan önce görüşmeciden ‘kareli kağıt’ istemiş ve bunu ‘Doğru çizebilmek için ve ötelemeyi ya da dönmedeki elde edeceğim doğru parçalarını net olarak görebilmek için’ şeklinde ifade etmiştir. Kağıdına *başlangıç objesi* olarak aldığı noktaları ve doğru parçalarını *izomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.13). Düzlemde görselleştirdiği ve *somut imajı* olarak ifade ettiği doğru parçası kavramını *içselleştirmiş* ve ‘Şimdi doğru parçaları arasındaki uzunlukların birbirine eşit olduklarını görebiliyoruz. Şu anda kareli kağıtta çizim yaptığım için birbirine eşit olduğunu net şekilde görebiliyorum’ demiştir. Dönüşümün ‘öteleme’ hareketi olduğunu düzlemsel hareket ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sonucunda ifade etmiştir. ‘Yani AB doğru parçasının yönünü ve uzunluğunu hiç değiştirmeden paralel olarak CD doğru parçasına taşımış oluruz. Sanki bu bunun resmi gibi... A noktası C noktasına çakışır. B noktası D noktasına çakışır.’ diyerek *dinamik imajını* kullanmış ve bu süreçte açıklama yaparken *kinestetik imajı* olarak elleriyle doğru parçalarını hareket ettirmiştir. *Geri dönme* sürecinde hareketin öteleme veya ‘dönme’ olduğuna karar verirken *formül imajı* olarak ‘iki nokta arasındaki uzaklığı’ hesaplamış ve bu arada hareketin ‘uzaklığı koruduğu’ nu görmüştür. Filiz aslında ‘öteleme denklemi’nin elde edilmesinin gerekli olduğu düşüncesine sahiptir. Ancak ona göre, çizerek ifade ettiği *somut imajı* hareketin öteleme olduğu konusundaki düşüncesini açıklamaktadır. Bunu ‘...Ötelemeyi bulamıyorum şu anda ama görsel olarak şu anda, sadece şekil yardımıyla ...’ diye açıklamıştır.

Sonuçta doğru parçası ile ötelenmişinin eş olduğu *enkapsülasyonuna* sahip olmuş ve *bitiş objesi* olarak ‘eşit’ olarak ifade ettiği eş doğru parçalarını elde etmiştir.



Şekil 4.1.13. Filiz’in Soyutlamadaki 2. Durum Temsilleri

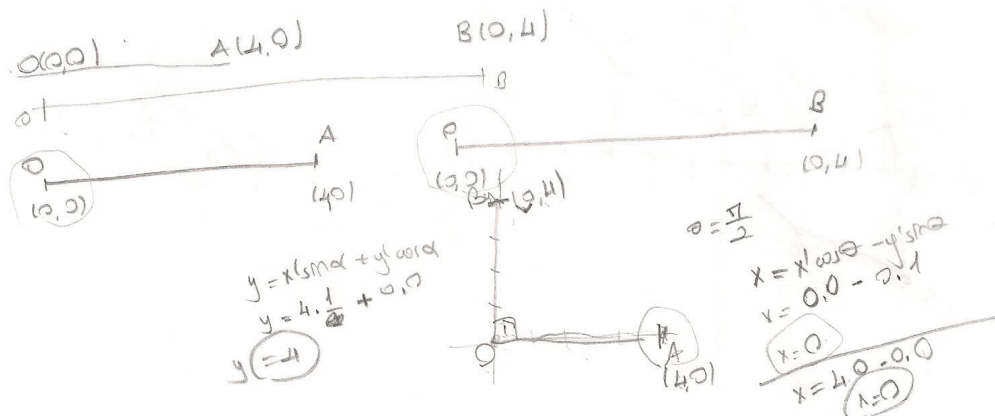
Katılımcılar, düzlemde doğru parçalarının eş olmasını *enkapsüle etmiş*, buradan ötelemeyle bir doğru parçası ile görüntüsü olan doğru parçasının eş olduğu *genellemesine* ulaşmış ve sonuçta eş doğru parçalarını *bitiş objesi* olarak oluşturmuşlardır. Özge, bitiş objesi olarak elde ettiği doğrular için ‘eşdeğer’ ifadesini, Mert ise ‘denk’ ifadesini kullanmıştır. Filiz, ‘eşit’ ifadesini, Gönül ve Tarık ise ‘eş’ ifadesini kullanmıştır.

3. Durum. 3. Durumda katılımcılardan Özge *homomorfik* ve *izomorfik* görselleştirmeler kullanırken, diğer katılımcılar sadece *izomorfik* görselleştirme kullanmışlardır. Özge, Tarık ve Gönül düzlemde doğru parçası kavramını

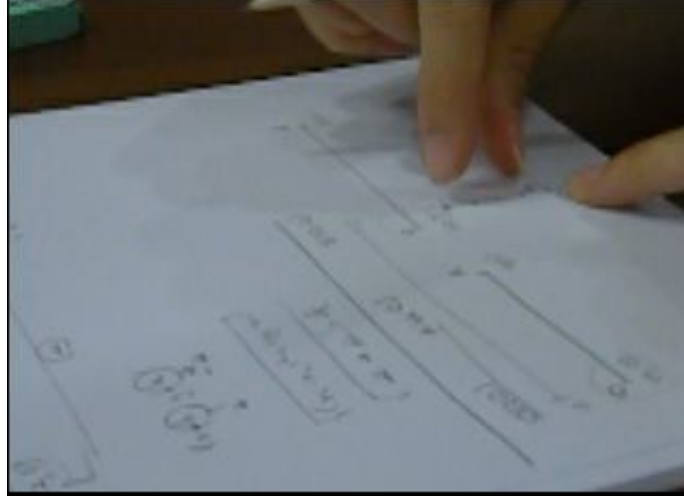
içselleştirirken görselleştirme kullanırken Mert ve Özge, düzlemde noktayı *başlangıç objesi* olarak aldıklarında görselleştirmeyi kullanmışlardır.

Katılımcılardan Tarık sadece *somut imaj* kullanırken diğerleri *somut, kinestetik ve formül imajlarını*, Özge ve Filiz ise bunların yanında *dinamik imajını* kullanmışlardır.

Özge, öncelikle *başlangıç objesi* olarak ele aldığı noktaları ve bu noktaların oluşturduğu doğru parçalarını *homomorfik* olarak görselleştirmiş, görselleştirdiği bu ilk şekle göre doğru parçasının diğer doğru parçasına dönüşemeyeceğini düşünmüştür (Şekil 4.1.14). ‘Burada elde edemem. Yani şimdi orijin noktası değişmemiş...’ şeklinde ifade etmiştir. Buradaki görselleştirmesi yanlış düşünmesine neden olmuştur. Daha sonra koordinat düzleminde iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* düzlemde doğru parçası kavramını *içselleştirmiştir*. Doğru parçalarını *izomorfik* olarak görselleştirmiş ve *kinestetik imajı* olarak parmaklarıyla ilk doğru parçasını tutarak ‘döndürüp’ ikinci doğru parçası üzerine getirmiştir (Şekil 4.1.15). Düzlemsel hareket kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *izomorfik* olarak görselleştirdiği şekle göre dönme açısının 90 derece olduğunu görmüş ve zihnindeki *formül imajı* ile ‘dönme hareketinin denklemini’ elde etmeye çalışmıştır. Bu süreç sonucunda doğru parçasından döndürülmüş doğru parçasını elde etmiş ve ‘Sadece işte yeri değişiyor olarak fark ettim’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır.

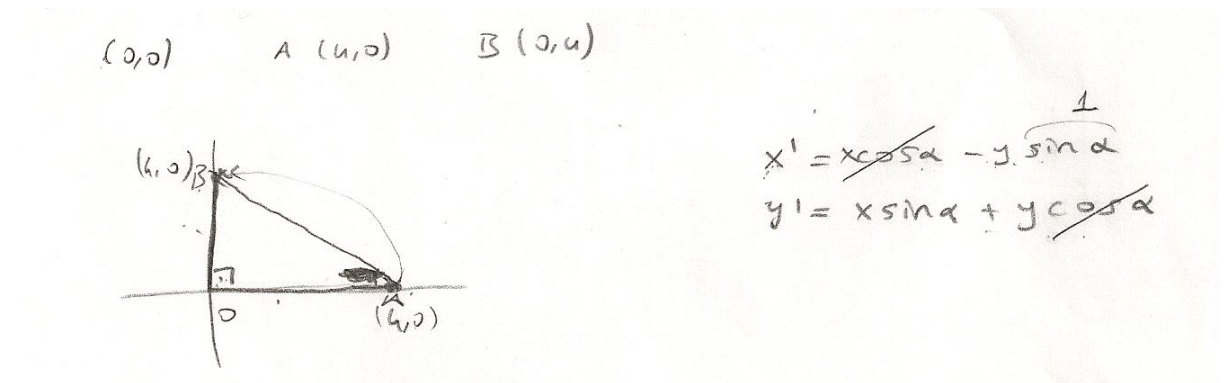


Şekil 4.1.14. Özge'nin Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri

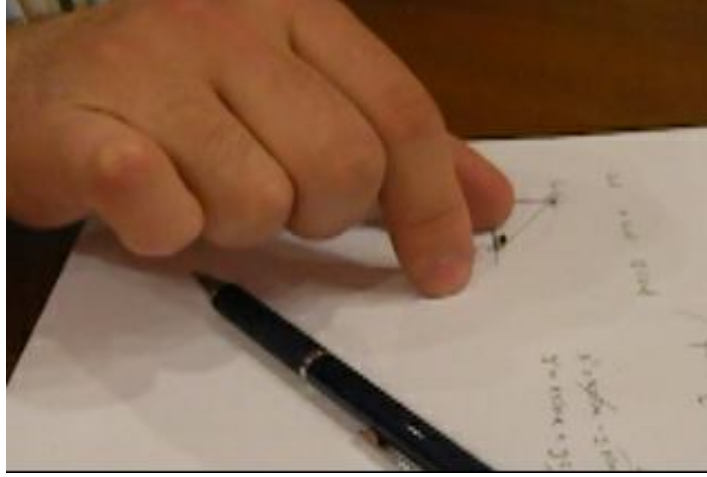


Şekil 4.1.15. Özge'nin Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü

Mert, noktaların oluşturduğu doğru parçalarını, görselleştirdiği koordinat düzlemi üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* belirlemiştir. Düzlemde doğru parçası kavramını *içselleştirmiş*, düzlemsel hareket kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında hareketin 'öteleme' olduğunu düşünmüştür. *Somut imajı* olarak ifade ettiği görselleştirmesi üzerinde doğru parçaları dik kenarları olacak şekilde bir üçgenin iç açılarının trigonometrik değerlerini kullanarak öteleme denklemini elde etmeye çalışmıştır (Şekil 4.16). Bu sırada hafızadaki *formül imajı* olarak denklemini elde etmeye çalışırken *kinestetik imajı* olarak, görselleştirdiği şekil üzerinde doğru parçalarını hareket ettirmeye çalışmış ve hareketin aslında 90 derecelik bir 'dönme' hareketi olduğunu fark etmiştir (Şekil 4.17). Daha sonra doğru parçası ile döndürülmüşünün 'uzunluklarının eşit' olduğunu belirtmiştir.

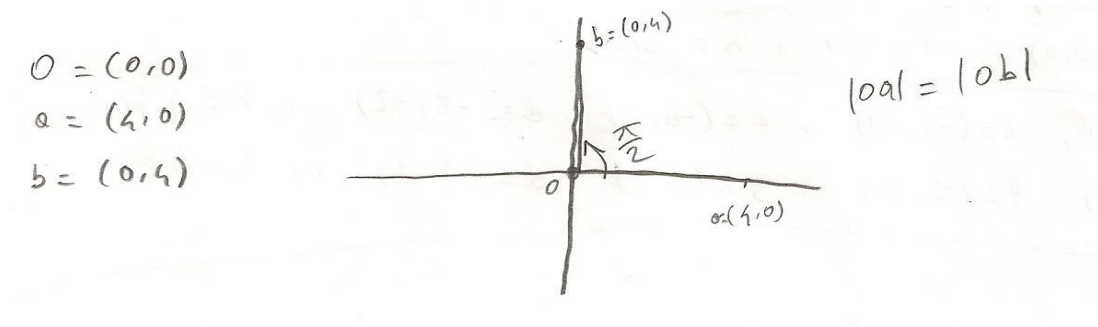


Şekil 4.1.16. Mert'in Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.17. Mert'in Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü

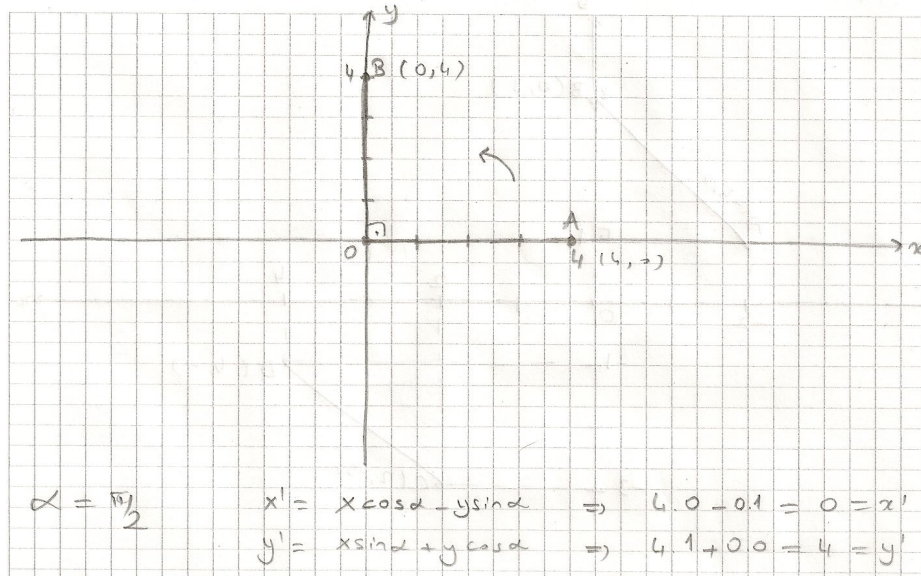
Tarık, 90 derecelik 'dönme' hareketini düşünmüş ve dönme hareketi kavramı ve doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak çizdiği şekle göre doğru parçalarının 'boylarının eşit' olduğunu ifade ederek bunların 'çakışacaklarını' belirtmiştir (Şekil 4.1.18).



Şekil 4.1.18. Tarık'ın Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri

Gönül, *somut imajını* kullanmak için 'kareli kağıt' kullanmayı tercih etmiştir (Şekil 4.1.19). İçselleştirme sürecinde hareketin 'dönme' hareketi olduğunu *kinestetik imajı* şeklinde eliyle doğru parçasını 90 derece döndürerek göstermiştir. Düzlemsel hareket kavramı ve düzlemde doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *formül imajını* şeklinde ifade ettiği 'dönme denklemleri'ni elde ederek doğru

parçasından döndürülmüş doğru parçasına ulaşmıştır. Görselleştirdiği şekil üzerinde doğru parçalarının ‘uzunluklarının eşit’ olduğunu *kinestetik imajı* olarak bunları parmaklarıyla eşit şekilde tutarak ifade etmiştir (Şekil 4.1.20). Hareketin ‘uzaklıkları koruduğu’nu da belirtmiştir.

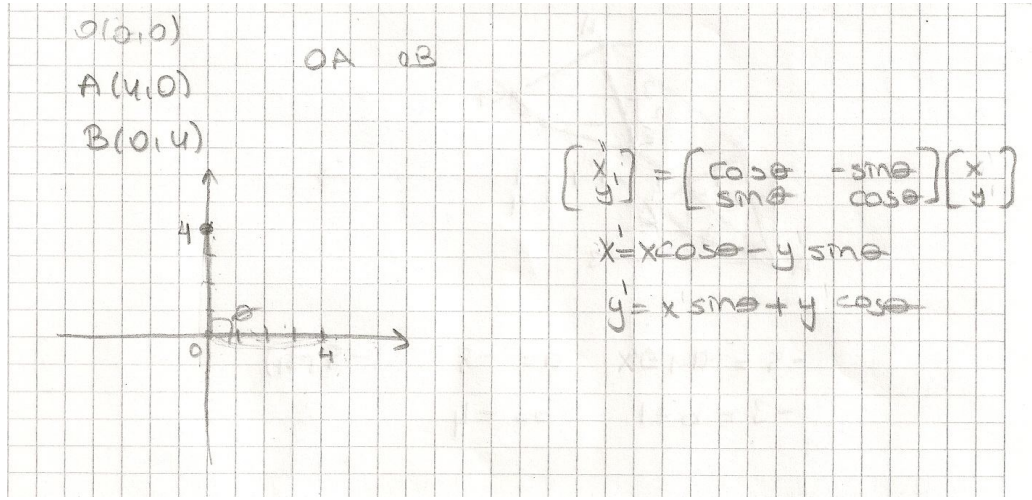


Şekil 4.1.19. Gönül’ün Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.20. Gönül’ün Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü

Filiz de ‘kareli kağıt’ kullanmayı tercih etmiştir. Düzlemsel hareketle doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak görselleştirdiği şekle göre hareketin 90 derecelik ‘dönme’ hareketi olduğunu ifade etmiştir (Şekil 4.1.21). Bunun açıklaması olarak *formül imajı* olarak belirttiği dönme hareketi ‘denklemini’ elde etmeye çalışmış ancak bu ona zor gelmiştir. Bunun yerine ‘Aslında ben bunu elde etmesem de görsel olarak gördüğümü söylesem olur mu?’ diyerek açıklamayı tercih etmiştir. Verilen doğru parçalarını şekil üzerinde *kinestetik imajı* olarak elleriyle göstererek ‘uzunluklarının eşit’ olduğunu belirtmiş ve ‘...bunların sadece konumları değişir’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır.



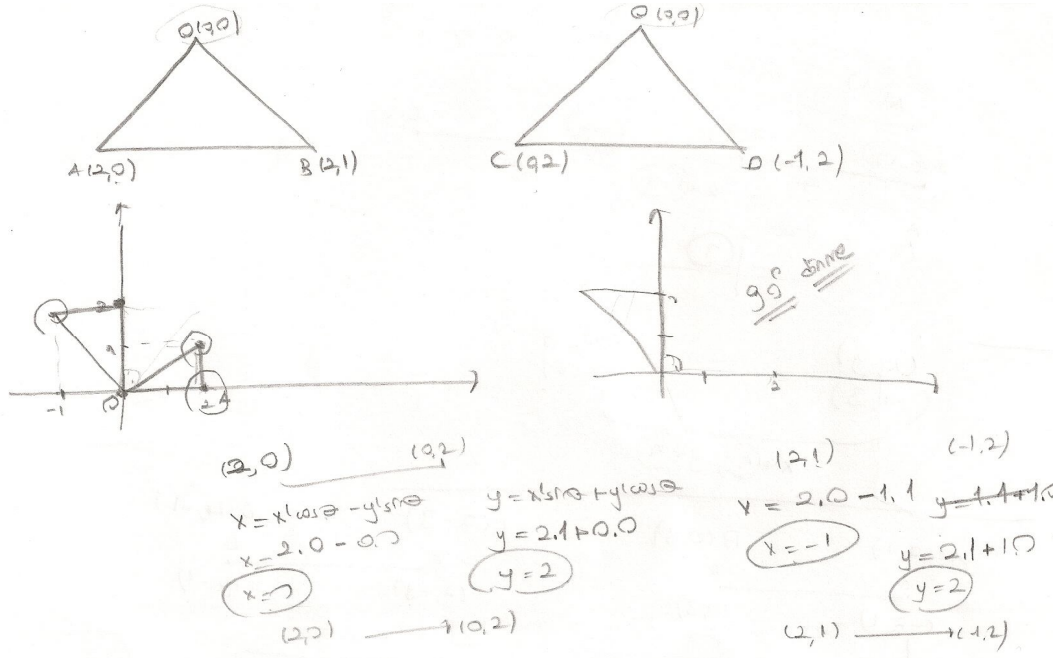
Şekil 4.1.21. Filiz’in Soyutlamadaki 3. Durum Temsilleri

Katılımcılar, düzlemde doğru parçalarının eş olmasını *enkapsüle etmiş*, buradan ötelemeyle bir doğru parçası ile görüntüsü olan doğru parçasının eş olduğu *genellemesine* ulaşmış ve sonuçta eş doğru parçalarını *bitiş objesi* olarak oluşturmuşlardır. Özge, bitiş objesi olarak elde ettiği doğrular için ‘eşit’ ifadesini, Mert ise ‘eşit’ ve ‘aynı’ ifadelerini kullanmıştır. Filiz ise ‘denk’ sonra ‘eş’ ifadesini, Gönül, ‘özellığinin değişmemesi’ ve Tarık ise ‘eş’ ifadesini kullanmıştır.

4. Durum. 4. durumda katılımcılardan Özge *homomorfik* ve *izomorfik* görselleştirmeler kullanırken, diğer katılımcılar sadece *izomorfik* görselleştirme kullanmışlardır. Özge, Mert ve Filiz düzlemde üçgen kavramı ve düzlemsel areket kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında görselleştirme kullanırken Tarık ve Gönül, düzlemde üçgen kavramını *içselleştirirken* kullanmıştır. Ayrıca Özge noktaları *başlangıç objesi* olarak aldığı anda görselleştirme kullanmıştır.

Katılımcılardan Özge *somut, kinestetik, dinamik ve formül imajı* kullanırken Mert ve Gönül *somut, kinestetik ve formül imajlarını*, Tarık ve Filiz ise *somut, kinestetik ve dinamik imajlarını* kullanmışlardır.

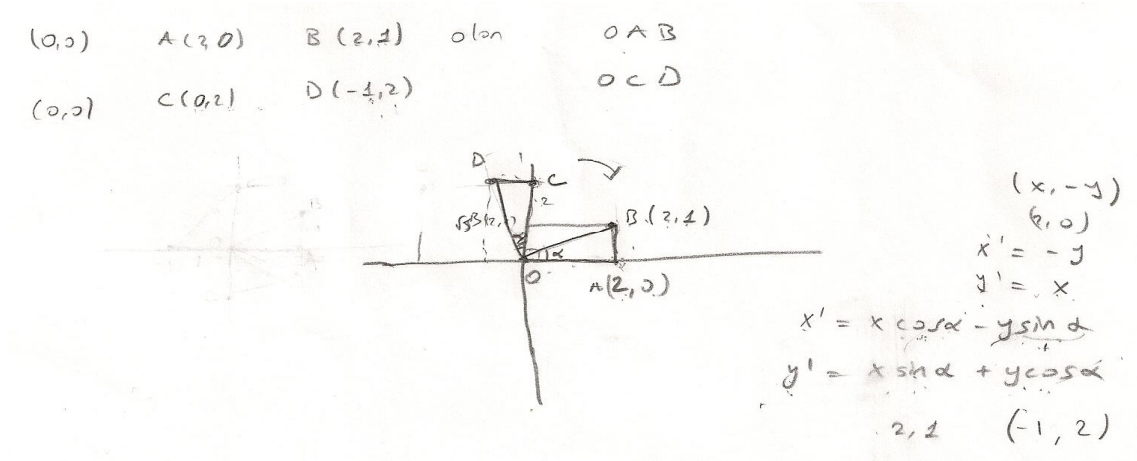
Özge, düzlemde *başlangıç objesi* olarak aldığı noktaları öncelikle *somut imajı* olarak *homomorfik* şekilde görselleştirmiştir. Daha sonra, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* düzlemde üçgen kavramını *içselleştirmiştir*. Düzlemsel hareket kavramı ile üçgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında ‘Şimdi koordinat sistemini çizelim’ diyerek üçgenleri *izomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.22). Düzlemsel hareketi belirlemek için ‘Şimdi aradaki farklara bakmaya çalışıyorum’ demiş, *somut imajı* olarak çizdiği şekil üzerinde ilk üçgeni *kinestetik imajı* olarak kalemiyle ikinci üçgene hareket ettirmiş ve 90 derecelik ‘dönme’ hareketini elde etmiştir. Bu arada ‘...şu tarafa getirsek, ...şu üste çıkardığımızda, ...buraya gelir...’ gibi ifadelerle *dinamik imajını* belirtmiştir. Bunu açıklarken *formül imajıyla* ortaya koyduğu dönme hareketi denkleminde üçgenin köşe noktalarından döndürülmüşünün köşelerini elde ederek noktaların ‘çakıştı’ğını ifade etmiştir. Sonuçta hareket üçgenlerin açılarının, kenarlarının ve alanlarının ‘değişmedi’ğini ifade etmiş ve ‘yerlerinin değiştiği’ni söylemiştir.



Şekil 4.1.22. Özge'nin Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri

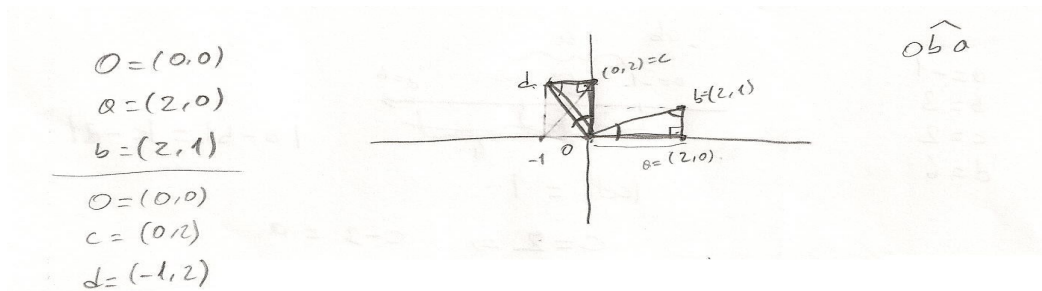
Mert, *başlangıç objesi* olarak düzlemde noktaları almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* düzlemde doğru parçası ve daha sonra üçgen kavramını *içselleştirmiştir*. Düzlemsel hareket ve üçgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında 'Yine şekilden faydalanmak lazım' diyerek öncelikle verilen üçgenleri koordinat düzleminde *izomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.23). *Somut imajı* olarak çizdiği şekle göre ilk önce üçgenlerin 'simetrik' verildiğinden bahsetmiştir. Ancak daha sonra verilen noktalarla görselleştirilmişlerini karşılaştırdığında şekli 'yanlış çizdiği'ni fark etmiş ve çizdiği şekli düzelterek yeniden görselleştirmiştir. Fakat yine noktaları yanlış alması sonucunda şekle göre hareketin 'dönme', 'öteleme' ve 'yansıma' olacağı ile ilgili yorumlar yapmıştır. Mert, düşündüğünde tekrar yanlış çizdiğini fark edip silerek yeniden *izomorfik* olarak görselleştirmiştir. Sonuçta üçgenlerin iç açılarının eşit olduğunu şekilden görmüş ve hareketin dönme hareketi olduğunu belirtmiştir. Dönme hareketinin denklemini için *formül imajı* olarak belirttiği denklemlerde noktaların bileşenlerini kontrol etmiş ve bunu 'Ama formülle sağlamak lazım aslında.' şeklinde belirtmiştir. Formülle sağlamaya çalışırken hata yapmış ve dolayısıyla çelişkiye düşmüştür. Ancak *kinestetik imajı* olarak elleriyle üçgenlerin kenarlarını teker teker

döndürmüş ve üçgenin ‘kenar uzunluklarının eşit’ olması sonucuyla hareketin doğru olduğunu düşünerek işlemlerini kontrol edip yanlışını farketmiştir. Sonuçta üçgenlerin açılarının, kenarlarının ‘aynı’ olduğunu ve ‘değişmedi’ğini söylemiştir.



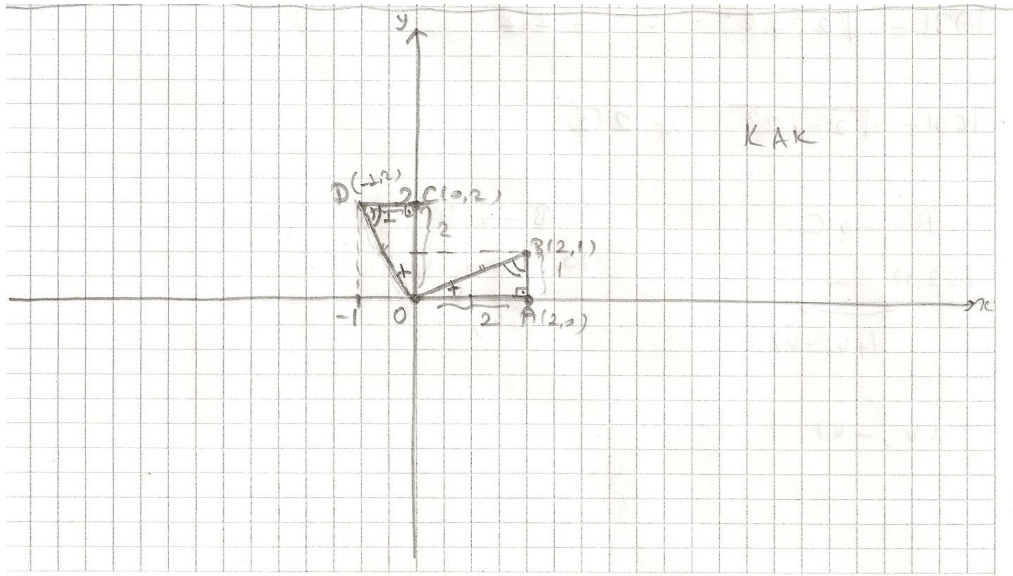
Şekil 4.1.23. Mert'in Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri

Tarık, *başlangıç objesi* olarak aldığı düzlemdeki noktaları iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme eylemiyle *içselleştirirken izomorfik* görselleştirme yapmıştır (Şekil 4.1.24). Düzlemsel hareket kavramı ile üçgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında hareketin ‘dönme’ hareketi olacağını belirtmiş, *kinestetik imajı* olarak kalemiyle üçgenin kenarlarını taşıyarak hareket ettirmiş ve ‘OA uzunluğu OC uzunluğuna OB uzunluğuna OD uzunluğuna ve BA uzunluğu BC uzunluğuna eşit olduğundan bu iki üçgen çakışır’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Bu iki üçgenin ‘çakışacağı’nı belirtmiştir. *Somut imajı* olarak ifade ettiği şekil üzerinde üçgenin açılarının ve kenarlarının eşit olduklarını söylemiştir.

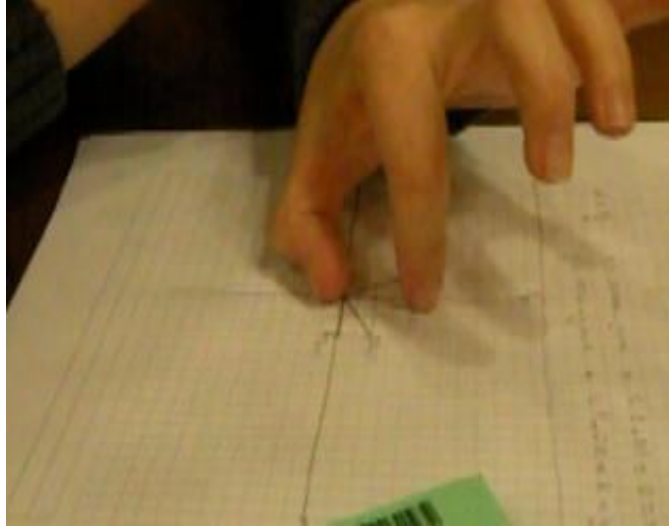


Şekil 4.1.24. Tarık'ın Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri

Gönül, *başlangıç objesi* olarak düzlemde noktaları almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* doğru parçası kavramı ve üçgen kavramını *içselleştirmiştir*. Bunu *somut imajı* olarak ifade ettiği *izomorfik* şekildeki görselleştirmesi üzerinde belirtmiştir (Şekil 4.1.25). Düzlemsel hareket kavramı ile üçgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında ‘Şimdi şöyle şekil olarak gördüğümüzde, bunu döndürdüğümüzde bu şekil elde ediliyor görebiliriz’ diyerek *kinestetik imajıyla* parmaklarıyla üçgeni, döndürülmüşünün üzerine getirmiş ve hareketin ‘dönme’ hareketi olduğunu söylemiştir (Şekil 4.1.26). Düzlemsel hareket kavramının bazı genel özelliklerini düşünerek, üçgenlerin kenar uzunluklarını ‘kareli kağıt’ ta çizdiği şekil üzerinde ‘bunları önce kıyaslamamız gerekir’ demiştir. Böylece kenarlarının ve açılarının ‘eşit’ olduğunu belirtmiş ve ‘kenar açı kenar benzerliği’ni ifade ederek zihnindeki formül imajına göre ‘benzerlik oranı’nın bir birim olduğunu söylemiştir.

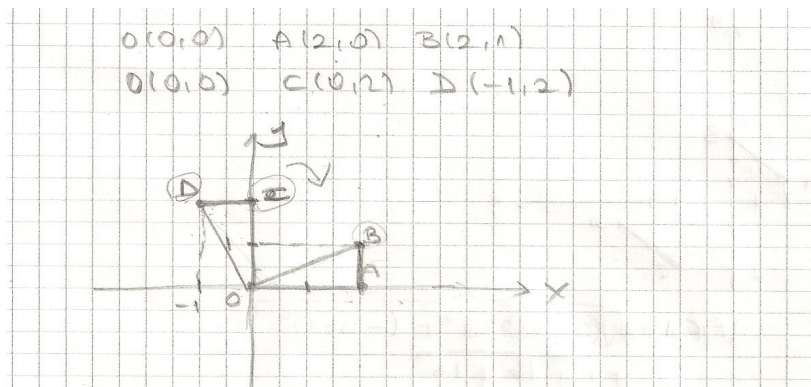


Şekil 4.1.25. Gönül’ün Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.26. Gönül'ün Soyutlamadaki 4. Durum Görüntüsü

Filiz, *başlangıç objesi* olarak düzlemde noktaları almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* düzlemde doğru parçası ve üçgen kavramını *içselleştirmiştir*. Düzlemsel hareket ve üçgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında öncelikle verilen üçgenleri koordinat düzleminde *izomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.27). *Somut imajı* olarak 'kareli kağıt'ta ifade ettiği şekil üzerinde '...Buradaki B noktası D noktasıyla çakışır, A noktası C noktasıyla çakışır' diyerek *dinamik imajını* belirtmiştir. *Kinestetik imajı* olarak kalemiyle üçgenlerin üzerinde kenarlarının 'eşit' olduğunu ve böylece üçgenlerin kenarlarının, açılarının ve alanlarının 'korunacağı'nı ifade etmiştir. Dönme hareketinin 'denklemini' elde edemeyeceğini ama çizdiği şekle göre dönmenin nasıl olduğunu ve özelliklerini 'görebildiği'ni söylemiştir.



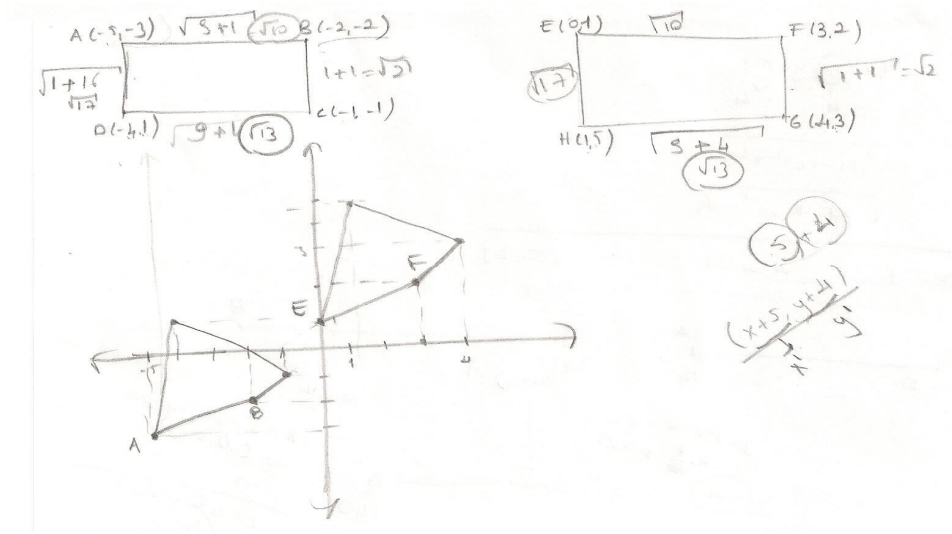
Şekil 4.1.27. Filiz'in Soyutlamadaki 4. Durum Temsilleri

Katılımcılar sonuçta, bu üçgenlerin eş üçgenler olduklarını *enkapsüle etmiş* ve süreci *bitiş objesi* olarak elde ettikleri eş üçgenlerle tamamlamıştır. Özge, Tarık, Gönül ve Filiz bitiş objesi olarak elde ettiği üçgenler için ‘eş’ ifadesini, Mert ise önce ‘benzer’ sonra ‘eş’ ifadesini kullanmışlardır.

5. Durum. 5. durumda katılımcılardan Özge *homomorfik* ve *izomorfik* görselleştirmeler kullanırken, diğer katılımcılar sadece *izomorfik* görselleştirme kullanmışlardır. Özge ve Tarık düzlemde dörtgen kavramı ve düzlemsel hareket kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında görselleştirme kullanırken Mert, Gönül ve Filiz düzlemde dörtgen kavramını *içselleştirirken* kullanmıştır. Ayrıca Özge noktaları *başlangıç objesi* olarak aldığı görselleştirme kullanmıştır.

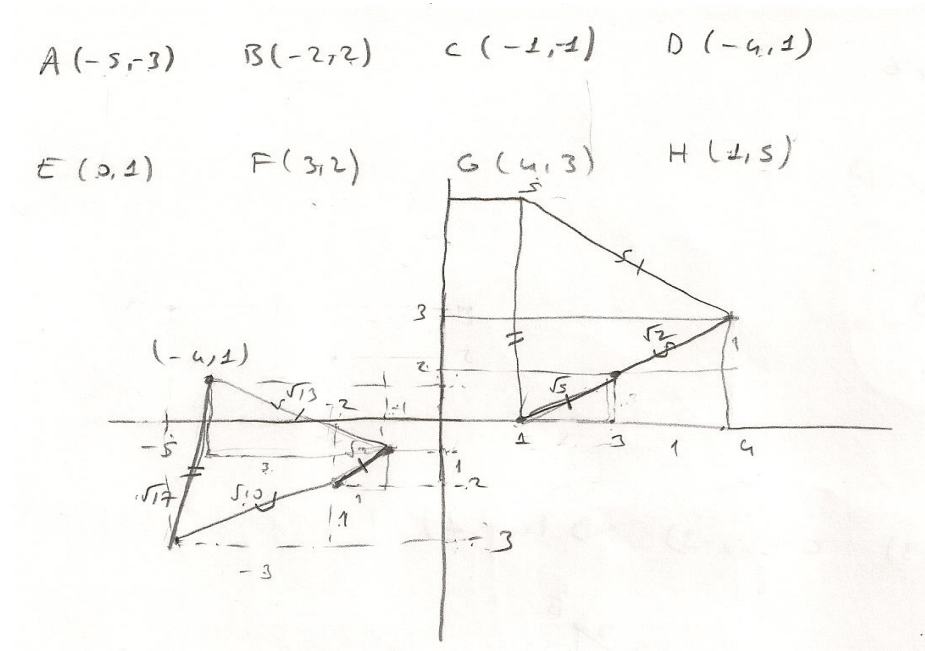
Katılımcılardan Özge, Mert ve Gönül *somut, kinestetik, dinamik ve formül imajı* kullanırken Filiz *somut, dinamik ve kinestetik imaj* kullanmış, Tarık ise *somut ve dinamik imaj* kullanmıştır.

Özge, düzlemde nokta kavramını *başlangıç objesi* olarak ele almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* doğru parçası kavramı ile dörtgen kavramını *içselleştirmiştir*. Bunları düşünme sürecinde öncelikle dörtgenleri *homomorfik* olarak görselleştirmiş, düzlemsel hareket kavramı ile dörtgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında ‘Koordinat düzlemini düşünecek olursak...’ diyerek *somut imajı* olarak ifade ettiği dörtgenleri *izomorfik* olarak görselleştirmeye başlamıştır (Şekil 4.1.28). ‘Şöyle yapsak yani aralarındaki uzaklıkları ben bulsam da onlara göre bir eşleştirme yapsam?...’ diye düşünmüş ancak hareketin nasıl bir hareket olduğunu anlamada bunun yeterli olmayacağı düşüncesi ile *izomorfik* görselleştirmesine devam etmiştir. Daha sonra *homomorfik* olarak görselleştirdiği şekilde *formül imajını* kullanarak dörtgenlerin kenar uzunluklarını bulmuştur. Düzlemsel hareketin ‘dönme’ ya da ‘öteleme’ olduğunu düşünme sürecinde *izomorfik* olarak görselleştirdiği şekle dönerek *kinestetik imajı* şeklinde parmaklarıyla dörtgenin kenarlarını hareket ettirmiş ve ‘...sonuçta belli bir kenarın kayması’ diyerek ise *dinamik imajını* kullanmıştır. Daha sonra ‘öteleme miktarı’nı düşünmüş ve sağladığını görmüştür. Dörtgenlerin köşelerini oluşturan ‘noktaların bileşenleri’nin ‘aynı miktar’da değiştiği için kenarlarının açılarının ve alanlarının da ‘değişmeyerek’ ‘eşit’ olacağını belirtmiştir.



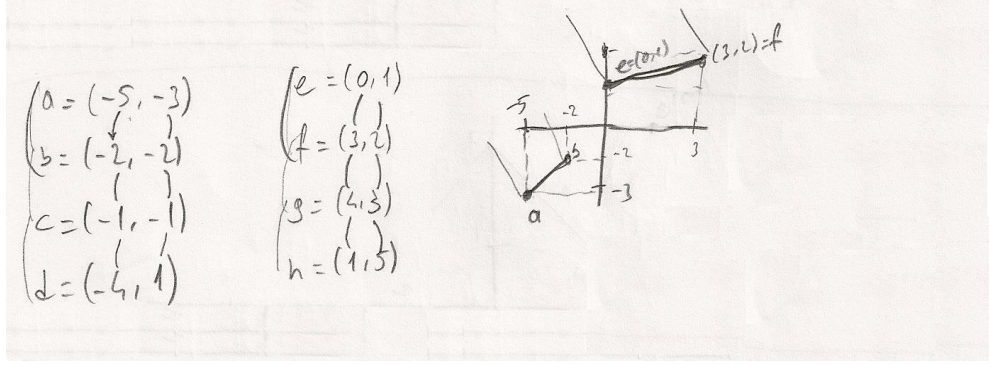
Şekil 4.1.28. Özge'nin Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri

Mert, düzlemde nokta kavramını *başlangıç objesi* olarak ele almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* doğru parçası kavramı ile dörtgen kavramını *içselleştirmiştir*. Önce ‘çizmeyle görülecek gibi gözüküyor’ demiş daha sonra bu dörtgenleri koordinat düzleminde *izomorfik* olarak görselleştirmeye başlamıştır (Şekil 4.1.29). *Somut imajı* olarak düşündüğü şekle göre dörtgenlerin birbirine ‘benzemediği’ni belirtmiş ve bu dörtgenlerin ‘kenar uzunlukları’ni *formül imajını* kullanarak hesaplamıştır. Ancak kenar uzunluklarını farklı bulması sonucunda çizdiği şeklin yanlış olduğu düşüncesiyle ‘şekilleri tam çizmek’ adına ‘kareli kağıt’ta yeniden *izomorfik* olarak görselleştirme yapmıştır. Burada dörtgenlerin kenar uzunluklarının ‘aynı’ olduğunu görmüş ve düzlemsel hareket kavramı ile dörtgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *kinestetik imajı* olarak ilk dörtgeni alıp hareket ettirerek ikinci dörtgeni elde etmiştir. Ayrıca ‘Yani şöyle alıp koyarsam üstüne aynısı oluyorlar, yani eş oluyorlar’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Verilen dörtgenin köşe noktalarına ‘öteleme miktarı’ni eklemiş ve ötelenmişini elde etmiştir.



Şekil 4.1.29. Mert'in Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri

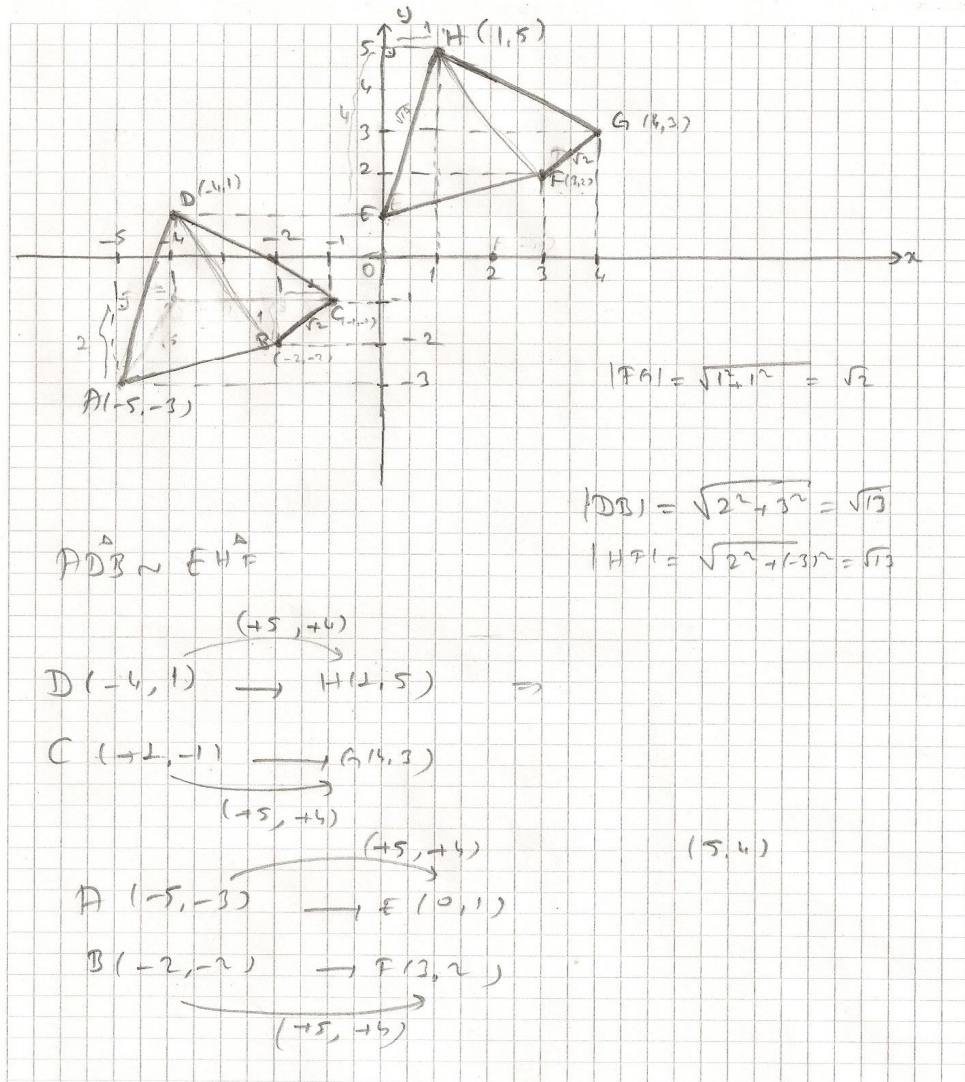
Tarık, *başlangıç objesi* olarak aldığı düzlemdeki noktaları bileşenler halinde kağıda yazmış ve düşünme sürecinde 'Bu sefer şekli çizmesem' demiştir. İki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* noktaların 'bileşenleri arasındaki fark'lara bakmış, 'eşit' olduğunu görmüştür. Önceki aşamada soyutladığı doğruların bir hareketle birbirine dönüştürülebileceği yorumuyla bu iki dörtgenin de bir hareketle birbirine 'eş kılınabileceği'ni belirtmiştir. Ancak düzlemsel hareket kavramı ile dörtgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında düşündüğü hareketin ne olduğunu anlayabilmek için koordinat düzleminde dörtgenin bir kenarıyla dönüşümü olan dörtgenin eşit olacağını düşündüğü kenarını *izomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.30). Hareketin 'öteleme' olacağını görmüş, *somut imajı* olarak ifade ettiği şekle göre kenarlarının 'paralel' olduğunu ve bunların belirttiği 'öteleme miktarı' kadar bir hareketle 'çakıştırılabileceği'ni söylemiştir. Daha sonra ise 'öteleme vektörü'nü bulmuştur. İki dörtgenin kenar uzunluklarının, açılarının ve alanlarının 'aynı' olduğunu belirtmiş ve 'Bu iki dörtgen bir ötelemeye birbirleriyle çakıştırılabilir' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır.



Şekil 4.1.30. Tarık'ın Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri

Gönül, düzlemde nokta kavramını *başlangıç objesi* olarak almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* doğru parçası kavramı ile dörtgen kavramını *içselleştirmiştir*. Dörtgenleri koordinat düzleminde *izomorfik* olarak görselleştirmiş ve bunu 'kareli kağıt' kullanarak yapmıştır. Düzlemsel hareket kavramı ile dörtgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak ifade ettiği şekle göre hareketin 'öteleme' olacağını söylemiştir (Şekil 4.1.31). *Kinestetik imajı* olarak parmaklarıyla gösterdiği dörtgenin kenarlarını oluşturan doğru parçalarını hareket ettirmiş ve 'Bir anlamda bunu böyle bir öteledik gibi, kaydardık gibi geldi...' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Ancak çizdiği şekle göre tereddüte düşmüştür. Dörtgenlerin kenar uzunluklarına bakıp karar vermenin doğru olacağı düşüncesiyle *formül imajı* olarak ifade ettiği 'iki nokta arasındaki uzaklık kavramı' ile doğru parçalarının uzunluklarını hesaplamaya başlamıştır. Bu sırada dörtgenlerin kenarlarını dik üçgenlere tamamlamayı ve Pisagor bağıntısından kenar uzunluğunu hesaplamayı düşünmüştür. Fakat burada da tereddüte düşmüş ve aslında çizdiği şekilden, şeklin kaydırılarak ötelenebileceğini düşündüğü halde bir doğru parçasının bunu sağlamadığını ifade etmiştir. Bu sırada verilen bir noktayı koordinat düzleminde yanlış gösterdiğini fark etmiş, şekli düzelterek 'uzunluklarının eşit' olduğunu belirtmiş ve bunun açıklaması olarak 'zaten birim kare olarak aldığım için kareli kağıttan uzunluklarının da eşit olduğunu görebiliriz buradan.' demiştir. Ayrıca yine *formül imajı* olarak ifade ettiği iki nokta arasındaki uzaklık ile bunları doğrulamıştır. Bunların sonucunda 'uzaklıkların korunduğu'nu belirtmiştir. Dörtgenlerin açılarını düşünürken üçgenlere parçalamış, kenar açı kenar benzerliğini düşünmüş ve 'benzerlik' oranının 1'e eşit olacağı düşüncesiyle bu üçgenlerin eş üçgenler olacağını ve kenarları arasındaki açılarında eşit

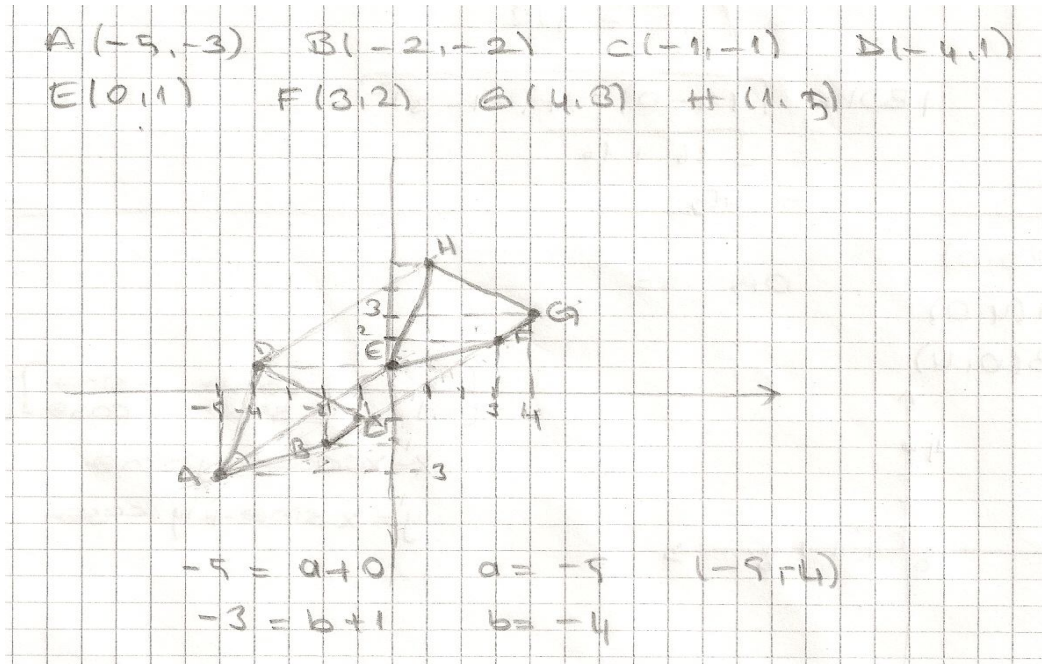
olacağını ifade etmiştir. Ayrıca dörtgenin köşesi ile ötelenmişinin köşesi arasındaki farklara bakarak ‘öteleme miktarı’ nı düşünmüş ve ‘öteleme vektörü’ nü bulmuştur. Dörtgenlerin kenar uzunluklarının, açıların ve alanlarının ‘aynı’ olduğunu ve dolayısıyla bunların ‘çakışacak’ ları için ‘eş’ dörtgenler olacağını belirtmiştir.



Şekil 4.1.31. Gönül’ün Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri

Filiz, düzlemde nokta kavramını *başlangıç objesi* olarak ele almış, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık kavramı *eylemiyle* düzlemde doğru parçası kavramı ile dörtgen kavramını *içselleştirmiştir*. ‘Kareli kağıt’ ta dörtgenleri koordinat düzleminde *izomorfik* olarak görselleştirmiş (Şekil 4.1.32), düzlemsel hareket kavramı ile dörtgen kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında dörtgenin köşeleri ile ötelenmişinin köşelerini

hareket ettirmiştir. Bunu yaparken *somut imajı* olarak ifade ettiği şekil üzerinde *kinestetik imajını* kullanarak kalem ucuyla noktaları taşımıştır. Ayrıca ‘Şuradaki BC köşesi FG ye çakışacak şekilde...’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Noktalar arasındaki uzaklıkları çizdiği şekle göre düşünmüş, ‘kenar uzunluklarının eşit’ olduğunu ifade ederek ‘öteleme miktarı’ nı görmüş ve ‘öteleme vektörü’ nü söylemiştir. Ayrıca bu dörtgenlerin açılarının ‘değişmeyip’ ‘korunacağı’ nı belirtmiş ve alanlarının da ‘eşit’ olacağını söylemiştir.



Şekil 4.1.32. Filiz’in Soyutlamadaki 5. Durum Temsilleri

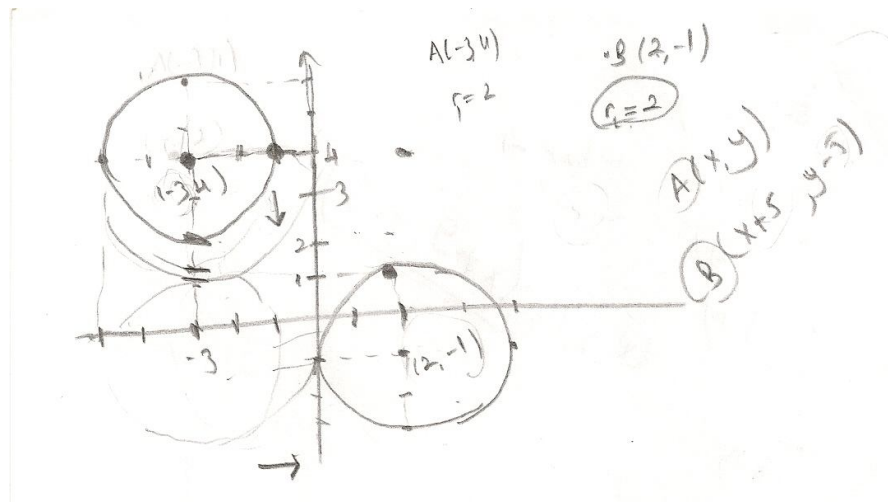
Katılımcılar sonuçta, bu iki dörtgenin eş dörtgenler olduğunu *enkapsüle ederek* süreci eş dörtgenlerin *bitiş objesi* olarak elde etmesiyle tamamlamıştır.

6. Durum. 6. durumda Tarık haricindeki tüm katılımcılar *izomorfik* görselleştirme kullanmışlardır. Tarık ise görselleştirme kullanmamıştır. Özge görselleştirmeyi düzlemde noktaları *başlangıç objesi* olarak aldığıında, Mert, Gönül ve Filiz ise çember kavramını *içselleştirirken* görselleştirme kullanmışlardır.

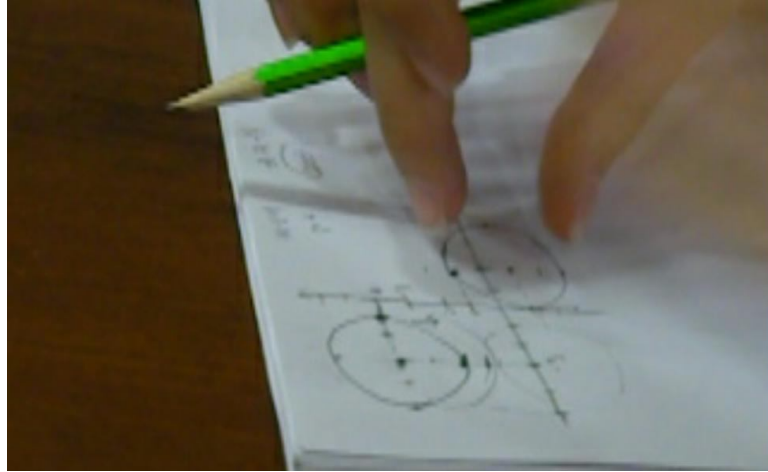
Katılımcılar *somut, kinestetik, dinamik ve formül imajlarını* kullanmışlardır. Filiz sadece *somut imajını* kullanırken Tarık *dinamik ve formül imajını*, Özge ve Mert *somut, kinestetik ve dinamik imajlarını* kullanmışlardır. Gönül ise *somut, kinestetik, formül ve dinamik imajını* kullanmıştır.

Tarık haricindeki katılımcılar, çemberlerin merkezlerini düzlemde nokta kavramı olarak *başlangıç objesi* şeklinde almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme eylemiyle çember kavramını *içselleştirmiş* ve bunları koordinat düzleminde *izomorfik* görselleştirme yapmışlardır.

Özge, düzlemsel hareket kavramı ile çember kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak ifade ettiği şekline göre hareketin ‘öteleme’ olacağını ifade etmiştir (Şekil 4.1.33). Bu süreçte ‘...şunu bir birim aşağıya indirsek, yani ötelesek bir birim aşağıya gitti, sonra merkezi şuraya kayd ama şöyle bir şey oldu... Sonra şöyle bir çevirsek bu sefer buraya geldi. Yani şöyle bir çember elde ettik. Bir birimde şöyle şu tarafa getirsek yani ötelesek aynı çemberi elde etmiş oluruz. Sonuçta şöyle çemberi döndürdüğümüzde çemberler çakışır diye düşünüyorum’ diyerek *dinamik imajını* belirtmiş ve bu arada *kinestetik imajı* olarak ise çemberleri parmakları ile taşımıştır (Şekil 4.1.34). Bunu birim birim eksenler üzerinde sayarak gerçekleştirmiştir. Bu şekilde öteleme hareketinin nasıl olduğunu görmüş ve ‘öteleme vektörü’nü elde etmiştir. Bu iki çemberin yarıçaplarının ve dolayısı ile çevrelerin ve alanlarının da ‘eşit’ olacağını belirterek bunların ‘her şeylerinin aynı olacağı’ni ifade etmiştir.

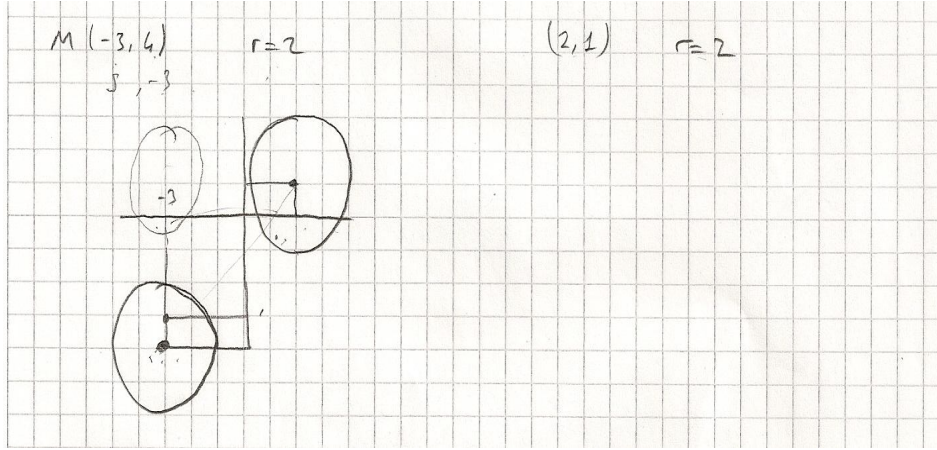


Şekil 4.1.33. Özge'nin Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri



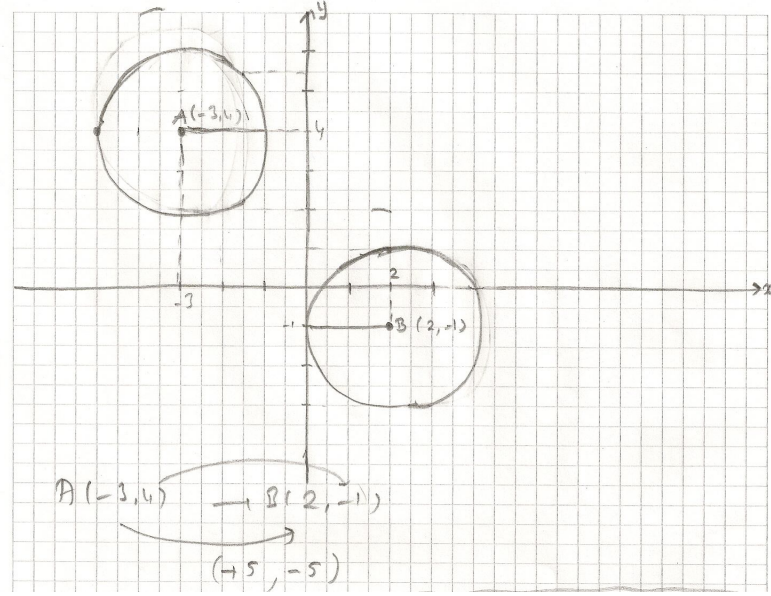
Şekil 4.1.34. Özge'nin Soyutlamadaki 6. Durum Görüntüsü

Mert şekli çizmeden önce düzlemsel hareket kavramını elde edebileceğini söylemiş ancak daha sonra 'Çizersem daha iyi konuşabilirim' demiştir. Düzlemsel hareket kavramı ile çember kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak ifade ettiği şekle göre hareketin 'öteleme' olacağını ifade etmiştir. Çemberin 'merkezini öteleyerek' ötelenmişinin merkezini elde edeceğini söylemiştir (Şekil 4.1.35). *Somut imajı* olarak ifade ettiği şekle göre 'Yani x üzerinde derken... x üzerinde 5 birim derken -3 tü, 2 ye getirmek için x ekseninden 5 birim kaydırarak şuradaki bir tane çemberi elde etmiş olacağım öteleme yaparak' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Bu süreçte yine *kinestetik imajı* olarak 'kareli kağıt' üzerinde eliyle çemberi birim birim taşıyarak yapmıştır. Çemberlerin yarıçaplarının ve dolayısı ile çevrelerin ve alanlarının da 'eşit' olacağını belirtmiştir.



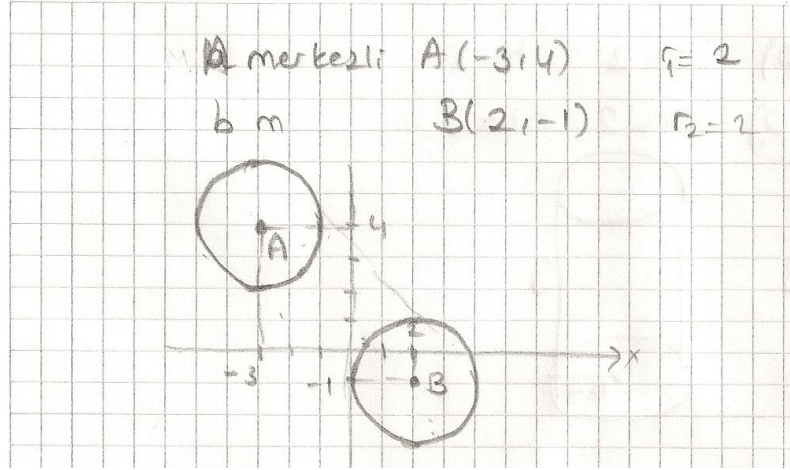
Şekil 4.1.35. Mert'in Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri

Gönül, düzlemsel hareket kavramı ile çember kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak ifade ettiği şekline göre bir süre düşünerek hareketin 'öteleme' olacağını ifade etmiştir (Şekil 4.1.36). Çizdiği şekle göre hareketin 'dönme olup olamayacağını göremediğini' belirtmiş ve sonra *kinestetik imajı* olarak eliyle çemberi alıp hareket ettirmiştir. Bu sırada 'Şöyle şunu alıp şuradan şuraya taşımışız. Kaydırdık gibi geldi hani şekil olarak düşündüğümde... Yine noktalarını karşılaştıracak olursam hani zaten yarıçapları eşit. Merkez noktaları çakışacak şekilde... Çember üzerindeki her bir nokta da diğer çember üzerindeki bir noktaya dönüşür. Çünkü merkezleri çakıştığı için ve yarıçapları eşit olduğu için bu çemberler aynı çemberlerdir' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Ayrıca iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemine* gerçekleştirmiş ve *formül imajı* ile destekleyerek bulduğu öteleme vektörünü de elde etmiştir. Çemberlerin yarıçaplarının ve dolayısı ile çevrelerin ve alanlarının da 'eşit' olacağını belirtmiş ve 'korunacağı'nı söylemiştir.



Şekil 4.1.36. Gönül'ün Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri

Filiz, düzlemsel hareket kavramı ile çember kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak ifade ettiği şekle göre bir süre düşünerek hareketin 'öteleme' olacağını ifade etmiştir (Şekil 4.1.37). Bunu 'buradaki bir noktanın diğer çember üzerindeki bir noktayla uzaklıkları yine bu çember üzerinde alınan bir noktayla diğer çember üzerinde alınan bir nokta, iki nokta arasındaki uzaklıktan bunların eşit olması gerekir. Ama nasıl elde edeceğimi bilemiyorum. Sadece şekle göre öyle görünüyor.' şeklinde açıklamıştır. Çemberler üzerinde alınan 'iki nokta için uzaklık'ların eşit olacağını belirtmiştir. Filiz, öteleme vektörünü elde edememiş ancak şekle göre hareketin öteleme olacağını söylemiştir. Yarıçap uzunlukları 'eşit' olduğu için bu iki çemberin 'eş' olacağını ifade ederek bu iki çemberin sadece farklı konumlarda olduklarını belirtmiştir.



Şekil 4.1.37. Filiz'in Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri

Tarık, görselleştirme gereği duymamıştır (Şekil 4.1.38). Düzlemsel hareket kavramı ve çember kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında 'Merkezin ne olduğu önemli değil. Yarıçapı 2 olduğu için iki çemberinde sadece merkezlerine bir öteleme uygularsam bu iki çember düzlemde çakışır. Örneğin burada işte eğer A noktasını öteleme uygularsam bu nokta -1 noktası olacağından dolayı yarıçapları da aynı olduğundan dolayı bu iki çember çakışırlar.' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Bu süreçte *formül imajıyla* da öteleme vektörünü elde etmiştir. Bu iki çemberin yarıçaplarının ve dolayısı ile çevrelerin ve alanlarının da 'eşit' olacağını belirtmiştir.

$$\begin{aligned}
 a &= (-3, 4) , \quad r = 2br \\
 b &= (2, -1) , \quad r = 2br
 \end{aligned}
 \qquad
 a = (-3, 4) \xrightarrow{(5, -5)} (2, -1)$$

Şekil 4.1.38. Tarık'ın Soyutlamadaki 6. Durum Temsilleri

Katılımcılar, sonuçta bu çemberlerin eş çemberler olduğunu *enkapsüle etmiş* ve *bitiş objesi* olarak eş çemberlerin elde edilmesiyle süreci tamamlamıştır.

4.1.1.3. 3.Aşama

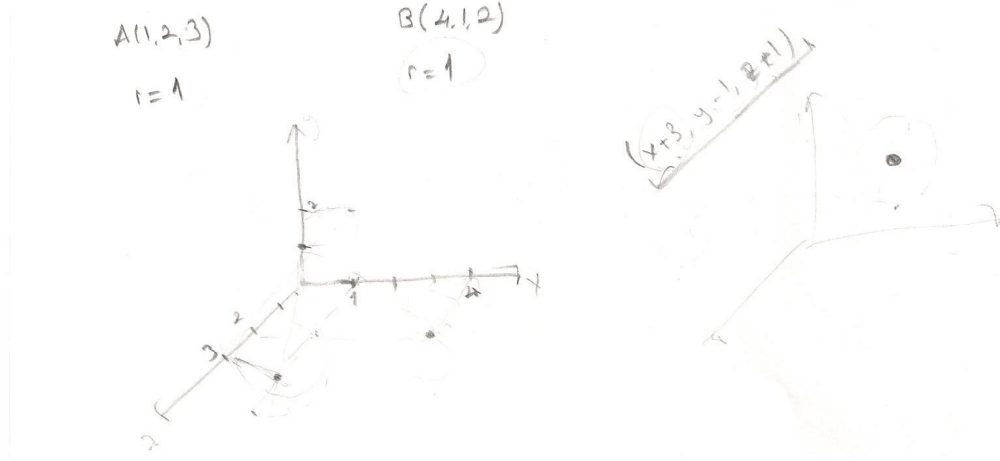
7. Durum. 7. durumda Tarık haricindeki tüm katılımcılar görselleştirme kullanmışlardır. Tarık ise görselleştirme kullanmamıştır. Özge ve Filiz *homomorfik* görselleştirmeyi küre kavramını uzayda *içselleştirirken*, Mert ve Gönül ise küre kavramı ve üç boyutlu hareket kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *izomorfik* görselleştirmeyi kullanmışlardır.

Katılımcılar *somut, kinestetik, dinamik ve formül imajlarını* kullanmışlardır: Özge, *somut ve kinestetik imajını*, Tarık ise *formül ve dinamik imajını*, Filiz *somut, formül ve dinamik imajını* kullanırken, Mert ve Gönül *somut, kinestetik, dinamik ve formül imajlarını* kullanmışlardır.

Tarık haricindeki katılımcılar, kürelerin merkezlerini uzayda nokta kavramı olarak *başlangıç objesi* şeklinde almış, iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* küre kavramını *içselleştirmiş* ve bunları üç boyutlu uzayda görselleştirerek yapmışlardır.

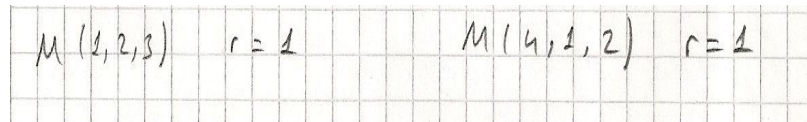
Özge, üç boyutlu hareket kavramı ile küre kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında küreleri *somut imajı* olarak ifade edememesi ve bu durumun onu zorlaması, hareketin nasıl olacağı hakkındaki düşüncelerini de ifade etmesinde güçlüğü sokmuştur. *İzomorfik* görselleştirmeye çalışmış ancak bunu yapamamış, ‘yarıçap uzunluklarının eşit’ olduğunu düşünerek kürelerin merkezlerinin bileşenleri arasındaki farklara bakmış ve hareketin ‘öteleme’ hareketi olabileceği yorumunu yapmıştır (Şekil 4.1.39). ‘Açıkçası ben bunları çok iyi çizemediğimden yani gözümde canlandıramadığımdan yani herhalde öteleme de olacağını düşünüyorum ama nasıl anlatabilirim ki... Yani... Üç boyutluya geçmesi beni zorladı. Yani şöyle doğru çizip çizemediğimi anlayabilsem. Nasıl söyleyim... Elimde bir şey olsa onu nasıl... Nasıl yapabilirim ki...’ diyerek düşüncelerindeki tereddütleri açıklamıştır. Hareketi açıklamak için *homomorfik* olarak ikinci kez şekil çizmeye çalışmış ve ‘Yani eksenler üzerinden... Noktaların eksenlere göre kaydırılması olduğunu düşünüyorum.’ demiş ve *dinamik imajını* kullanmıştır. Sonuçta ‘Yarıçapları eşit olduğu için alanları da eşit olur diye düşünüyorum. Hacimlerini düşünürsek hacimleri de eşit. Yani bunların her şeyleri eşit. Ama göremediğim için emin olamıyorum... Sadece öyle olur gibi geliyor...’ şeklindeki

ifadesi görselleştirememesi onun düşüncelerinden tam olarak emin olamadığını anlatmaktadır. Bu da görselleştirmenin düşünme sürecindeki önemini vurgulamaktadır.



Şekil 4.1.39. Özge'nin Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri

Mert, üç boyutlu hareket kavramı ile küre kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında kağıt üzerinde herhangi bir görselleştirme kullanmamış (Şekil 4.1.40), bunun yerine *kinestetik imajı* olarak 'üç parmağını' havada üç boyutlu uzayın baz vektörleri olacak şekilde yapmış, parmaklarını x,y ve z eksenleri gibi düşünmüş, zihnindeki *somut imajını* öteleyerek uzayda hareket ettirmiştir (Şekil 4.1.41). Bunu yaparken küre merkezinin bileşenlerini dikkate almış, ne kadar ötelendiğini görmüş ve birim birim öteleyerek öteleme vektörünü elde etmiştir. *Formül imajını* kullanarak kürelerin yarıçapları 'eşit' olduğu için hacimlerinin ve alanlarının da eşit olacağını belirtmiş ve 'Merkezin bir önemi yok yani 3 boyutlu uzayda bir yere bir küre koysam, onun hacmi, alanı hiçbir şeyi değişmiyor' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır



Şekil 4.1.40. Mert'in Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri



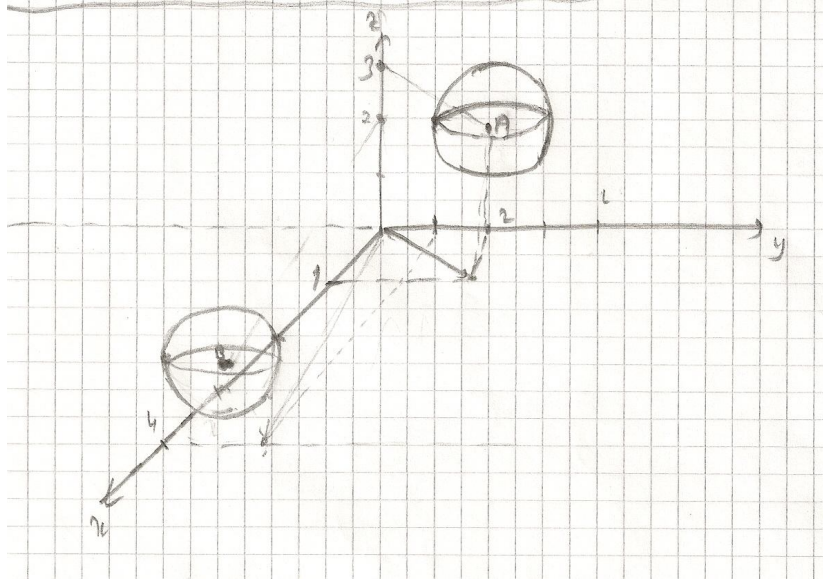
Şekil 4.1.41. Mert'in Soyutlamadaki 7. Durum Görüntüsü

Tarık, üç boyutlu hareket kavramı ile küre kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında kağıt üzerinde herhangi bir görselleştirme kullanmamıştır (Şekil 4.1.42). Önceki aşamada çemberin ötelenmesindeki düşüncelerine paralel olarak ‘Yine benzer şekilde yarıçapları aynı olduğundan bu iki kürenin sadece merkezlerine uygulayacağımız bir ötelemeyle bu iki küreyi eş yapabiliriz yani çakıştırabiliriz.’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. *Formül imajı* olarak ifade ettiği iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* ne kadar ötelendiğini görmüş ve öteleme vektörünü elde etmiştir. Yine kürelerin merkezlerinin eşit olması sonucunda bu kürelerin alanlarının ve hacimlerinin ‘eşit’ olacağı yorumuyla bu kürelerin ‘çakışacağı’¹ nı belirtmiştir.

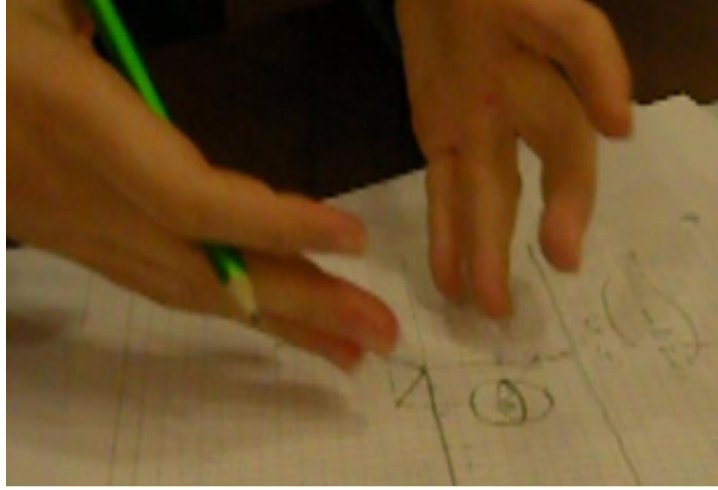
$$\begin{array}{lcl}
 a = (1, 2, 3) & , & r = 1br \\
 b = (4, 1, 2) & , & r = 1br
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lcl}
 a = (1, 2, 3) & \xrightarrow{(3, -1, -1)} & b = (4, 1, 2) \\
 \textcircled{R} & &
 \end{array}$$

Şekil 4.1.42. Tarık'ın Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri

Gönül, üç boyutlu hareket kavramı ile küre kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *somut imajı* olarak ifade ettiği küreleri üç boyutlu uzayda ‘kareli kağıt’ üzerinde *izomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.43). Hareketin ‘öteleme’ olacağını ‘...şekilden dolayı...’ diye belirtmiş ve bunu *kinestetik imajı* olarak hareket ettirerek göstermiştir (Şekil 4.1.44). Bu sırada ‘Yani sanki şunu almışım şuradan şöyle taşımışım’ diyerek *dinamik imajını* ifade etmektedir. Çizdiği şekle göre hareketin öteleme olacağını düşünmüş olmasına rağmen bundan emin olamamıştır. Düzlemsel hareketlerdeki düşünme süreçlerine paralel olarak *formül imajı* olarak ifade ettiği alan ve hacim formüllerine göre üç boyutlu uzayda da kürelerin yarıçapları eşit olduğu için alanları ve hacimlerinin de eşit olacağını düşünmüş ve bunların ‘korunacağı’ nı ifade etmiştir. Bunu ‘buraya kadar yaptıklarımızı düşünecek olursak hani; doğru, üçgen, çember, küre,... Yani ötelemelerde işte alanlarının çevre uzunluklarının ya da doğru için uzunlularının değişmediğini gördük. Hani şimdi çemberde de yaptığımız gibi alanı değişmemiş oluyor. Belli bir birim öteleme vektörümüz de sabit olduğu için her bir noktası için, yani bu küre üzerindeki her bir nokta, bu küre üzerindeki bir noktaya dönüşecek öteleme sonucunda. Dolayısı ile alan da korunmuş olacak ama alanı hatırlayamadım.’ şeklinde ifade etmiştir.

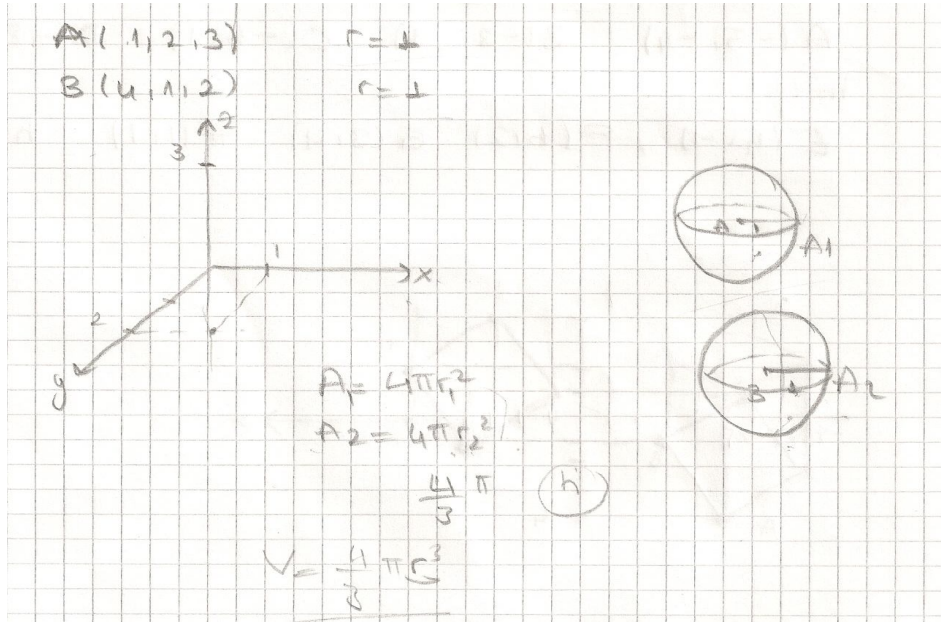


Şekil 4.1.43. Gönül’ün Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.44. Gönül'ün Soyutlamadaki 7. Durum Görüntüsü

Filiz, *izomorfik* olarak görselleştirme yapmaya çalışmış ancak üç boyutlu uzayda küreleri temsil edecek bir şekil çizmek ona zor gelmiş ve *homomorfik* olarak *somut imajını* temsil edecek küreler çizmiştir (Şekil 4.1.45). Üç boyutlu hareket kavramı ile küre kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında kürelerin yarıçap uzunluklarının 'eşit' olmasından dolayı zihnindeki *formül imajından* hareketle bu kürelerin 'eş' küreler olacağını söylemiş ve '...üç boyutlu uzayda eksenin farklı köşelerine koyulmuş birer küre olarak düşünebiliriz' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Bunun açıklaması olarak ise 'Bilmiyorum sadece görselliğinden.', 'Ama şekilden öteleme gibi geliyor' demiş, öteleme denklemlerini elde edemese de kürelerin şekline göre 'öteleme' olacağını ifade etmiştir. Ayrıca yarıçap uzunluklarının eşit olması sonucunda bu kürelerin eşit alan ve hacme sahip olmaları düşüncesiyle ve hareketlerin alan ve hacimlerini 'koruyacağı' yorumunu yapmıştır.



Şekil 4.1.45. Filiz'in Soyutlamadaki 7. Durum Temsilleri

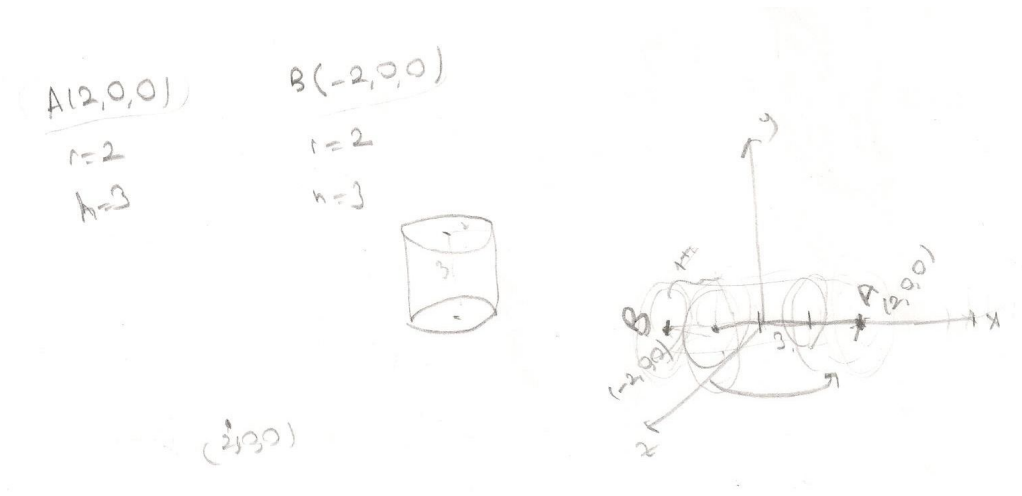
Katılımcılar kürelerin eş küreler olacağını *enkapsüle ederek* süreci eş kürelerin *bitiş objesi* olarak elde edilmesiyle tamamlamıştır.

8. Durum. 8. durumda, Tarık haricindeki tüm katılımcılar görselleştirme kullanmışlardır. Tarık görselleştirme kullanmamıştır. Özge uzayda nokta kavramını *başlangıç objesi* olarak aldığı *homomorfik* görselleştirme, silindir parçası kavramını uzayda *içselleştirirken* ise *izomorfik* görselleştirme yapmıştır. Mert ve Gönül silindir parçası kavramı ve üç boyutlu hareket kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *izomorfik* görselleştirmeyi, Filiz ise *homomorfik* görselleştirmeyi kullanmışlardır.

Katılımcılar *somut, kinestetik, dinamik ve formül imajlarını* kullanmışlardır: Tarık *formül ve dinamik imajını*, Filiz ise *somut ve dinamik imajını* kullanırken Özge ve Mert *somut, kinestetik ve dinamik imajlarını*, Gülnur ise *somut, formül, kinestetik ve dinamik imajını* kullanmışlardır.

Özge, silindir parçalarının merkezlerini *başlangıç objesi* olarak düşünmüş, üç boyutlu uzayda iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* silindir parçası kavramını *homomorfik* olarak görselleştirip *içselleştirmiştir*. İçselleştirmeye çalışırken

izomorfik görselleştirme yapmaya çalışmış ancak şekli tamamlayamamıştır (Şekil 4.1.46). Üç boyutlu uzayda hareket kavramı ve üç boyutlu uzayda silindir parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında, hareketin ‘öteleme’ olduğunu düşünmüş, *kinestetik imajı* olarak parmaklarıyla silindir parçalarını hareket ettirmiştir. ‘...bunu bir birim kaydırmakla elde ederiz’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Somut imajını yanlış şekillendirmesine rağmen silindirlerin merkezlerinin bileşenleri arasındaki farkları göz önüne alarak ‘kaydırmanın’ x ekseninde olacağını belirtmiş ve ‘öteleme vektörünü’ doğru elde etmiştir. Öteleme vektörü ‘doğrultusu’na kaydıracağı silindir parçasının diğeri ile ‘çakıştığı’ nı belirtmiştir.



Şekil 4.1.46. Özge'nin Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri

Mert, Gönül, Filiz ve Tarık silindir parçalarının merkezlerini *başlangıç objesi* olarak ele almış, üç boyutlu uzayda iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* silindir parçası kavramını *içselleştirmiştir*. Mert, önce verilen silindir parçalarını kağıtta *izomorfik* olarak görselleştirmeyi düşünmüş sonra vazgeçmiştir (Şekil 4.1.47). Üç boyutlu uzayda hareket kavramı ve silindir parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *kinestetik imajı* olarak ‘üç parmağını’ havada üç boyutlu uzayın baz vektörleri olacak şekilde yapmış, parmaklarını x,y ve z eksenleri gibi düşünmüş ve *somut imajını* parmaklarıyla *izomorfik* olarak görselleştirmiştir. Daha sonra ortamdaki hazır bulunan somutlaştırılmış üç boyutlu uzayın baz vektörlerini ve silindir parçasını istemiş ve bunları kullanarak düşüncelerini açıklamıştır (Şekil 4.1.48). Silindir parçasının sadece merkezini hareket ettirmek suretiyle x ekseninde alıp ‘taşıyarak’ ötelenmişinin

yerine ‘koymuş’tur. Böylece *dinamik imajını* kullanmıştır. Yarıçaplarının ‘eşit’ olduğu için bunların aynı silindir parçaları olacağını söylemiş ve alanlarının ve hacimlerinin eşit olacağını, ‘hiçbir şeylerinin değişmeyeceğini’ ve ‘uzaydaki yerlerinin farklı olacağı’ nı ifade etmiştir.



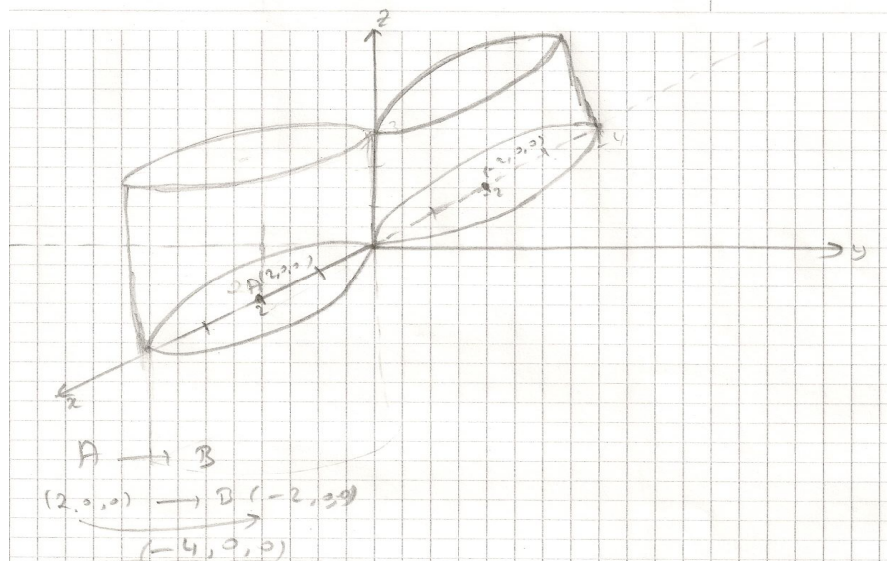
Şekil 4.1.47. Mert’in Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.48. Mert’in Soyutlamadaki 8. Durum Görüntüsü

Gönül, üç boyutlu hareket kavramı ile silindir parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında ‘kareli kağıt’ isteyerek *izomorfik* olarak görselleştirmeye çalışmıştır (Şekil 4.1.49). Bunu ‘Noktaların birimlerini daha iyi alabilirim. Yani, iki noktanın arasındaki uzaklıklara baktığım zaman hem şekil olarak görünüyor hem de dik üçgen vasıtasıyla daha rahat görebiliyorum ölçmek açısından şöyle... Göz kararı ile onu daha iyi görebilirim diye düşündüm. Kareli kağıt daha uygun benim için.’ şeklinde

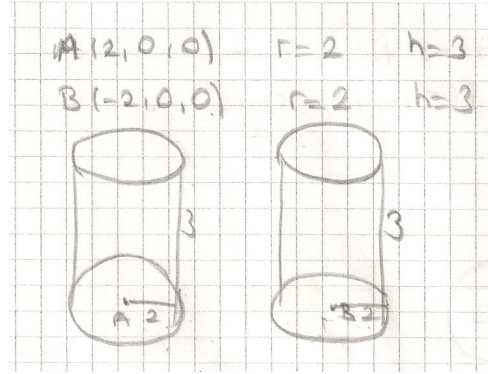
açıklamıştır. Daha sonra *somut imajı* olarak ifade ettiği şekle göre *kinestetik imajı* olarak silindir parçasını elleriyle hareket ettirmiş ve ‘Yani sanki şunu almışım şuradan şöyle taşımışım.’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır. Silindir parçasının merkezi ile ötelenmişinin merkezi arasındaki uzaklığı *formül imajı* olarak ifade etmiş, ‘öteleme vektörünü’ elde ederek bu doğrultuda cisimleri ‘kaydırmış’tır. Silindir parçalarının yarıçaplarının ‘eşit’ olması sonucunda bunların alanlarının ve hacimlerinin eşit olacağı ve bu değerlerin ‘korunacağı’ yorumunu yapmıştır.



Şekil 4.1.49. Gönül’ün Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri

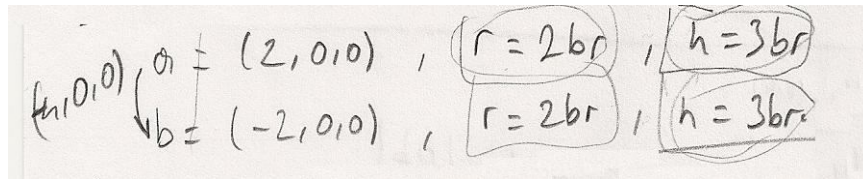
Filiz, üç boyutlu hareket kavramı ile silindir parçası kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında ‘kareli kağıt’ kullanmış ve ‘Silindirleri şöyle düşünürsek merkezi A... Ben bunları taslak olarak çizsem ama bakalım...’ diyerek *homomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.50). *Somut imajı* olarak görselleştirdiği şekle göre hareketin ‘öteleme’ olacağını belirtmiştir. Bunun açıklamasını ise ‘Burada kürede olduğu gibi yine merkezlerinin pek bir önemi olmadı. Sadece yarıçaplarına ve yüksekliklerine baktığımız zaman eşit. Öteleme için yeterli. Çünkü ötelemede korunan değerler korunuyor. Yani uzaklıklar falan... Merkezlerini öteledim yani ... şeklinde’ diyerek ifade etmiştir. Ancak hareketin dönmeden farkını çok da ayırt edememiş ve ayrıca öteleme vektörünü de bulmaya çalışmamıştır. Düşüncesini ‘Öteleme şey gibi

paralel kaydırma belli bir mesafe kadar... O şekli alıp diğer silindire oturtmak gibi. Yani eş silindirler sonuçta. Merkezlerine göre sadece bulundukları konumlar farklı.’ şeklinde açıklamış ve *dinamik imajını* kullanmıştır.



Şekil 4.1.50. Filiz’in Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri

Tarık, kağıt üzerinde herhangi bir görselleştirme kullanmamıştır (Şekil 4.1.51). Önceki aşamalara göre düşüncelerini ‘Az önce gösterdik. Yarıçapı aynı olan, yarıçapı r olan iki tane eşit çemberi bir ötelemeye birbirine dönüştürebiliyorduk. Yine uzunlukları eşit olan iki tane doğruyu da bir ötelemeye veya bir dönmeyle birbirlerine eşit kılabilirdik. O halde bu silindirleri herhangi bir öteleme hareketiyle birbirlerine eşit yapabiliriz.’ şeklinde açıklamıştır. Bunu yaparken merkez noktaları için *formül imajı* olarak ifade ettiği iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme eylemiyle ‘öteleme miktarı’¹nı görmüş ve ‘öteleme vektörü’²nü elde etmiştir. Silindir parçaları için ‘...bu iki silindir parçası çakışır’ diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır ve yarıçaplarının eşit olması sonucunda alanlarının ve hacimlerinin eşit olacağı yorumunu yapmıştır.



Şekil 4.1.51. Tarık’ın Soyutlamadaki 8. Durum Temsilleri

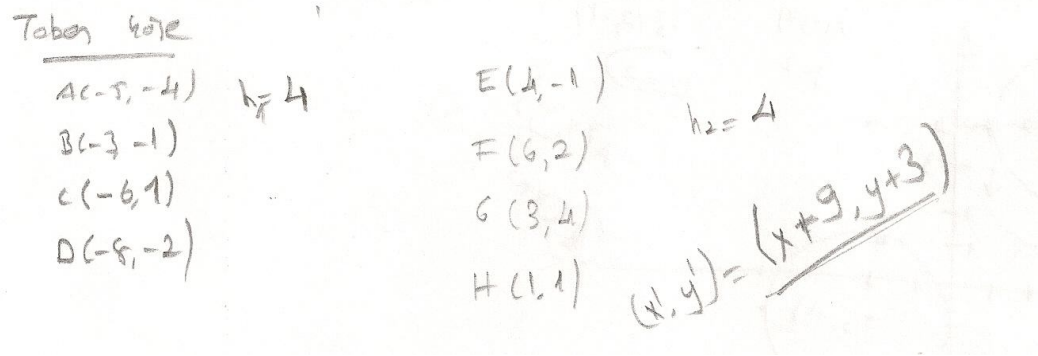
Katılımcılar, bu silindir parçalarının ‘eş’ silindir parçaları olacağını *enkapsüle etmiş* ve *bitiş objesi* olarak eş silindir parçalarının elde edilmesiyle süreci tamamlamıştır.

9. Durum. 9. durumda Özge ve Tarık görselleştirme kullanmamışlardır. Mert ve Filiz piramit kavramı ve üç boyutlu hareket kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında *izomorfik* görselleştirme, Gönül ise *homomorfik* görselleştirme kullanmışlardır.

Katılımcılar *somut, kinestetik, dinamik* ve *formül imajlarını* kullanmışlardır: Özge sadece *formül imajını*, Tarık *formül* ve *dinamik imajını*, Mert ise *somut* ve *dinamik imajını* kullanırken, Filiz *somut, kinestetik* ve *dinamik imajını* Gönül ise *somut, kinestetik, formül* ve *dinamik imajını* kullanmıştır.

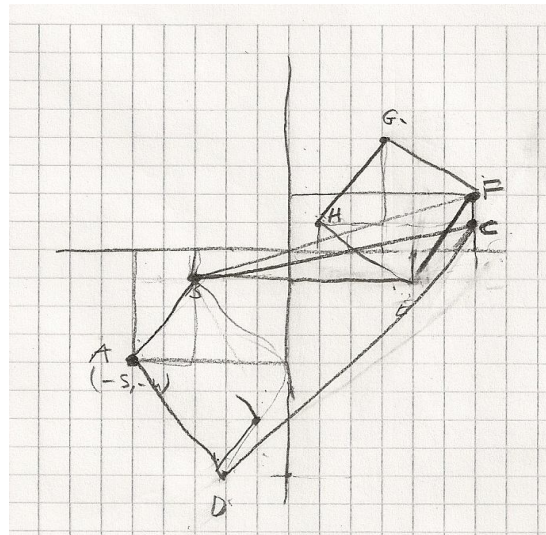
Katılımcılar, piramitlerin tabanlarının köşe noktalarını *başlangıç objesi* olarak ele almış, üç boyutlu uzayda iki nokta arasındaki uzaklığı düşünme *eylemiyle* piramit kavramını *içselleştirmiştir*.

Özge, piramitlerin taban köşe noktaları için *formül imajı* olarak ifade ettiği iki nokta arasındaki uzaklık kavramını düşünme *eylemiyle* öteleme vektörünü elde etmiştir (Şekil 4.1.52). ‘Burada birinci bileşenler 9 birim değişmiş. İkinci bileşenler de 3 birim değişmiş. Bence bu bir öteleme hareketi. Çizsem mi? Aslında bileşenlerine göre belli oluyor. Öteleme hareketi bu. Sonuçta yükseklikleri de eşit. O zaman bunların her şeyleri eşit olur. Kapladıkları alan da, hacim de... Bunlar da eşler’ diyerek görselleştirme kullanmamış ve ilk piramitten ‘öteleme’ hareketi sonucunda ikinci piramidin elde edilebileceğini belirtmiştir.



Şekil 4.1.52. Özge'nin Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri

Mert, üç boyutlu hareket kavramı ile piramit kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında 'kareli kağıt'ta *somut imajı* olan piramitleri *homomorfik* olarak görselleştirmeyi düşünmüştür. 'Yükseklikleri aynı' olduğu için piramitlerin taban köşelerini 'karşılaştırma'yı düşünmüş ve bunun için noktalar arasındaki farklara bakmak gerektiğini ifade etmiştir. Ancak daha sonra bundan vazgeçmiş ve *izomorfik* görselleştirmeye başlamıştır (Şekil 4.1.53). Piramit ile ötelenmişinin taban köşeleri arasındaki farkları çizdiği şekle göre söylemeye çalışmış fakat görselleştirmeyi yanlış yapması sonucunda 'O zaman bu şekilleri karşıtıramadığım için bu şekiller eşitir diyemem' diyerek *dinamik imajını* kullanmıştır.



Şekil 4.1.53. Mert'in Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri

Tarık, ‘...bu taban köşelerinin her birini (9,3) kadar ötelersem bu iki piramidin tabanları, tabanlarını meydana getiren kareler veya dörtgenler çakışır. Bu yüzden yükseklikleri de aynı olduğundan dolayı bu iki piramit çakışmış olur. Yani sadece bir ötelemeye bunlar birbirine eş kılınabilir.’ derken *dinamik imajını* kullanmış ve piramitlerin taban köşe noktaları için *formül imajı* olarak ifade ettiği iki nokta arasındaki uzaklık kavramını düşünme *eylemiyle* öteleme vektörünü elde etmiştir. Tarık, herhangi bir görselleştirmeye gerek duymamıştır (Şekil 4.1.54).

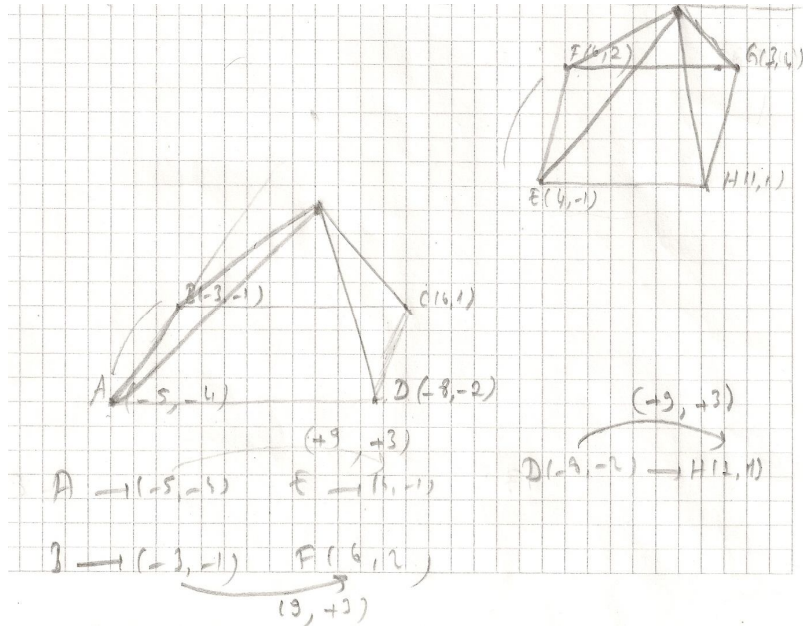
Handwritten mathematical expressions for vector coordinates and height h . The expressions are arranged in two rows, with a vertical arrow pointing downwards between them, indicating a transformation or mapping.

$$\begin{aligned} & a = (-5, -4), \quad b = (-3, -1), \quad c = (-6, 1), \quad d = (-8, -2), \quad h = 4 \text{ br.} \\ & e = (4, -1), \quad f = (6, 2), \quad g = (3, 4), \quad d = (1, 1), \quad h = 4 \text{ br.} \end{aligned}$$

Şekil 4.1.54. Tarık’ın Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri

Gönül, üç boyutlu hareket kavramı ile piramit kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında öncelikle görselleştirme kullanmak istememiş daha sonra *homomorfik* görselleştirme yapmıştır. Bunu ‘Çizince birebir biraz yanılgıya düştüm. Aslında şekil çizdiğim zaman daha iyi görüyorum. Ama üç boyutluda olunca kağıda dökmeye çalıştığımda kafamdakilerin karşılığını birebir çizemeyince biraz tuhaf oldu...’ diyerek açıklamış ve ‘Ama gene niyeyse aklım yine koordinata geçiyor. Keyfi alamıyorum dolayısıyla...’ diyerek devam etmiş ve ‘Bilmiyorum tam çizmeyip keyfi alsam şöyle gibi herhalde yanlış olur ama... Sonuçta şu noktaların yerleşmesi önemli. Ben yine koordinatı çizsem daha iyi olacak ama... Ya da şurada alayım bakalım en azından ne olduğunu görmüş oluruz...’ diye eklemiştir. Gönül, zihnindeki resimleri *somut imajı* olarak ifade etmekte zorlanmıştır. Bunun nedeni düşüncelerinin karşılığını kağıtta tam olarak çizip görselleştirememesidir. Bu durum ise onun düşüncelerinde karışıklığa neden olmaktadır. Gönül görselleştirme ihtiyacı hissetmiş, bunda zorlandığı için öncelikle *homomorfik* görselleştirme yapmayı tercih etmiştir. Çizdiği şekle göre hareketin öteleme olabileceğini düşünmüştür. Dönme hareketinin incelenmesi için *izomorfik görselleştirme* yapması gerektiğini belirtmiştir (Şekil 4.1.55). Dönme açısının hareket denklemlerinden zor bulunabileceğini ve ‘şekle göre daha rahat görülebileceği’ni söylemiştir. Bu nedenle öncelikle piramitlerin taban köşe noktaları

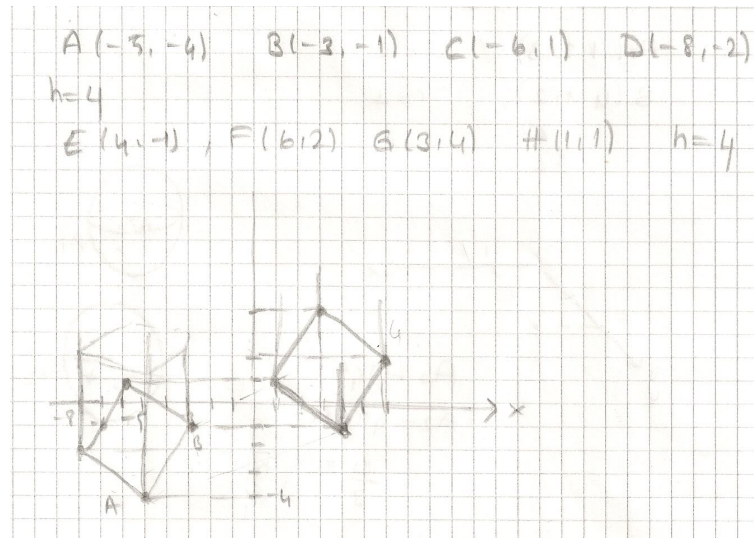
arasındaki uzaklığa bakmış ve bunları karşılaştırmayı denemiştir. *Formül imajı* olarak ifade ettiği noktaların bileşenleri arasındaki farkları bulmuş ve hareketin ‘uzaklığı koruması’ gerekliliği düşüncesiyle ‘öteleme vektörünü’ elde etmiştir. ‘A noktası E noktası ile çakışacak şekilde...’ derken *dinamik imajını* kullanmıştır. Önceki aşamalardaki düşüncelerine paralel olarak ‘Sonuçta şöyle düşünecek olursam hani AB noktası şuna dönüştü. Benzer şekilde yükseklikleri de aynı olduğu için şuradaki tepe noktalarını düşündüğümüzde, şu uzunluklar eşit... Şu üçgenlerin... Yine kısım kısım düşünersek uzunlukları korunduğundan ötelemeden dolayı eş üçgenler elde edilmiş oldu. Ve dolayısıyla ötelemede hani üçgenlerin dönüşürken bir üçgen diğer bir üçgene, üçgenlerin alanları korunduğu için burada da bu alanlar korunmuş olur. Dolayısıyla bu tamamını düşündüğümüzde, komple alan korunmuş olur. Yükseklikleri aynı zaten... Hacimde yükseklikle alakalı... Yüksekliği aynı... O da korunmuş olması lazım...’ demiş ve *kinestetik imajı* olarak piramitlerin hareketini elleriyle taşıyarak göstermiştir.



Şekil 4.1.55. Gönül’ün Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri

Filiz, üç boyutlu hareket kavramı ile piramit kavramı arasındaki *koordinasyon* sırasında ‘kareli kağıt’ta somut imajı olan piramitlerin tabanlarını *izomorfik* olarak görselleştirmiştir (Şekil 4.1.56). Çizdiği şekle göre iki nokta arasındaki uzaklık

kavramını düşünme eylemiyle piramidin tabanını oluşturan doğru parçalarının uzunluklarının ötelenmişini oluşturan doğru parçalarının uzunluklarına eşit olduğunu görmüş ve ‘eş tabanlı’ olduklarını ifade ederek piramitlerin yüksekliklerinin eşit olması yorumuyla hareketin ‘öteleme’ olduğunu düşünmüştür. ‘Yani ötelediğimiz zaman şunlar çıkışacak...’ diyerek *dinamik imajını* kullanmış ve öteleme vektörünü bulmaya gerek duymayarak kalemiyle çizdiği şekillerin kenarlarını göstererek *kinestetik imajı* şeklinde bunların ‘çakışacaklar’ını belirtmiştir.



Şekil 4.1.56. Filiz’in Soyutlamadaki 9. Durum Temsilleri

Mert haricindeki tüm katılımcılar bu piramitlerin ‘eş’ piramitler olacağını *enkapsüle etmiş, bitiş objesi* olarak eş piramitlerin elde edilmesiyle süreci tamamlamıştır. Mert’in *somut imajını* yanlış görselleştirmesi yanlış sonucu elde etmesine neden olmuştur. Dolayısıyla ‘şekilleri çakıştıramadı’ğı için görselleştirme bu adımda yanlış düşünmesiyle sonuçlanmıştır.

4.1.1.4. 4. Aşama

Önceki aşamaların sonunda katılımcılar “Üç boyutlu uzayda bir nesne dört hareketin (öteleme, dönme, yansıma, ötelemeli yansıma) birisiyle diğer bir nesneye

dönüştürülebiliyorsa bu iki nesne eş (kongruent) tir” soyutlamasına ulaşmış ve bu süreçte görselleştirmelere yer vermiştir.

Özge için bu aşamaya ulaşmada görselleştirme önemlidir. Aşamalarda genellikle *başlangıç* sürecinde *objeleri* ele aldığında *homomorfik* görselleştirme, *içselleştirme* ya da *koordinasyon* süreçlerinde ise *izomorfik* görselleştirme yapmıştır. Üç boyutlu uzayda kağıt üzerinde görselleştirmede zorluk çekmesi, düşüncelerinden emin olmamasına neden olmuştur. ‘Tam olarak gözümde canlandırabilsem tam olarak bir şey söyleyebilecektim ama canlandıramadığım için olmadı’ şeklindeki ifadesi bunu açıklamaktadır. Ayrıca ‘Canlandıramadığım için de bunları yorumlamakta zorlandım aslında... Zihnimde oluşturamadım tam olarak.’ diyerek görselleştirmenin zihninde oluşacak düşünmelere etkisini anlatmaktadır. Görsel imajlarına ise genellikle *koordinasyon* sürecinde yer vermiş çoğunlukla *somut imaj* olmak üzere *kinestetik*, *dinamik* ve *formül imajı* kullanmıştır.

Mert, bu aşamaya kadar olan durumların çoğunda görselleştirmelere yer vermiş ve ‘Çizersem daha iyi konuşabilirim.’ demiştir. Diğer katılımcılardan farklı olarak görselleştirmeleri sadece kağıt üzerinde yapmamış, ‘Aslında şuradaki şekli alsam...’ diyerek ortamda bulunan somut geometrik cisimlerle süreç içindeki düşünmelerini desteklemiştir. Ayrıca cisimleri uzayda ifade edebilmek için somut eksenler oluşturmuştur. Bunlar Mert’in farklı görsel imajlarını göstermektedir. Sonuçta hemen hemen her aşamada görselleştirme kullanmıştır. Ayrıca ‘Ama formülle sağlamak lazım aslında...’ diyerek görselleştirmelerle geliştirdiği düşünme süreçlerini cebirsel işlemlerle de desteklemek gerektiğini ifade etmiştir. 3. aşamada görselleştirmeyi yanlış yapması hareketi yanlış yorumlamasına neden olmuştur. Ancak bu durum onun soyutlama sürecini tamamlamasına engel olmamıştır. 4. aşamada bunu ‘Öteleme yaparken noktalar arasındaki uzunlukların aynı olması gerekiyor. Sabit kalması gerekiyor. Burada sabit kalmadı. Diğer örneklerde sabit kaldı ama mesela burada uzaklık korumadı. Ama uzaklık koruması gerekiyordu.’ diyerek ifade etmiştir. Mert genellikle *izomorfik* görselleştirmeyi *içselleştirme* ve bazen de *koordinasyon* süreçlerinde yapmıştır. Ağırlıklı olarak *somut* ve *kinestetik imajlara* yer verirken *dinamik* ve *formül imajlarını* da kullanmıştır.

Tarık, önceki aşamalarda diğer katılımcılara göre daha az görselleştirme kullanmış ve görsel imaj çeşitlerine daha az yer vermiştir. Kullandığı görselleştirme çeşidi ise *izomorfik* görselleştirmedir. Cebirsel işlemlerle düşüncelerini açıklamış ve çoğunlukla *dinamik* ve *formül imajına* yer vermiştir. Ancak, 4. aşamada başarılı şekilde soyutlama sürecini tamamlamıştır. Bunu ‘Yani bize verilen herhangi iki doğru parçası veya herhangi iki geometrik şekil aslında birbirleriyle aynı özellikleri sağlayabilirler.’ ve ‘Bir ötelemeyle veya bir dönmeyle birbirlerine eş kılınabilir, bunların eğer varsa yükseklikleri, alanları, hacimleri, her şeyleri aynıdır.’ diyerek ifade etmiştir.

Gönül, önceki aşamalarda görselleştirmeyi çokça kullanmış ve *izomorfik* görselleştirmenin kendi düşünme süreci için daha gerekli olduğunu açıkça belirtmiştir. Ayrıca her çiziminde kareli kağıt kullanmayı tercih etmiştir. Çizimlerini cebirsel işlemlerle de doğrulamıştır. Katılımcılar içinde görsel imajlarını en çok kullanan kişidir. Gönül soyutlama sürecini başarı ile tamamlamış ve bunu 4. aşamada ‘Bir cisme bir hareket uyguladığımızda, öteleme veya dönme, bu takdirde o cismin özellikleri korunuyor. Yani o cisimden diğerine eş bir şekil elde etmiş oluyoruz.’ diyerek belirtmiştir.

Filiz, önceki aşamalarda hareket denklemlerini elde etme gibi bazı cebirsel işlemleri yapmaktan çekinmiş ve sadece durumlar için kullandığı görselleştirmelere göre yorumlar yapmıştır. Çizimleri için kareli kağıt kullanmayı tercih etmiştir. Görselleştirme yapmak Filiz için de önemlidir. Filiz de soyutlama sürecini başarı ile tamamlamış ve ‘Şimdiye kadar yaptığımız hareketlerin hepsinde hiç bir şeklin özelliğinin değişmediğini gördük. Bütün bu cisimler eş oldular.’ diyerek görüşmeyi bitirmiştir.

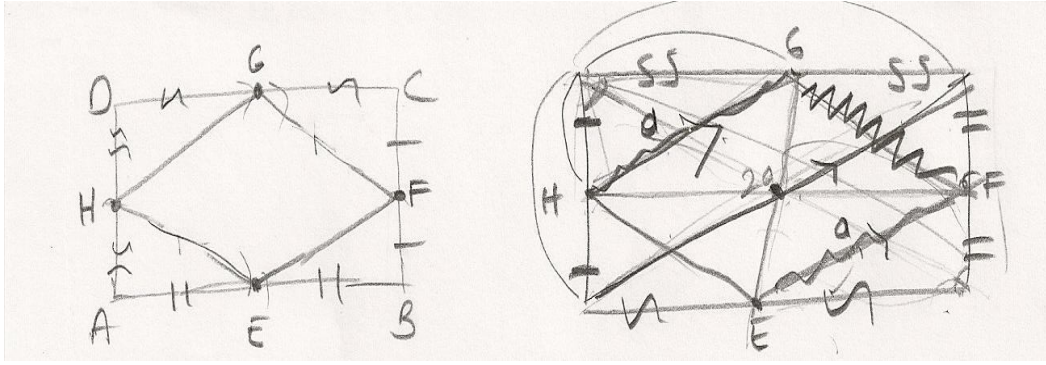
Sonuçta, katılımcıların soyutlama sürecinde kullandıkları görselleştirmeler *izomorfik* ve *homomorfik* görselleştirme olup, kullanılan görsel imajlar ise *somut*, *kinestetik*, *formül*, *dinamik* imaj şeklindedir.

4.1.2. Genelleme Süreci ile İlgili Bulgular ve Yorumlar

4.1.2.1. 1.Aşama

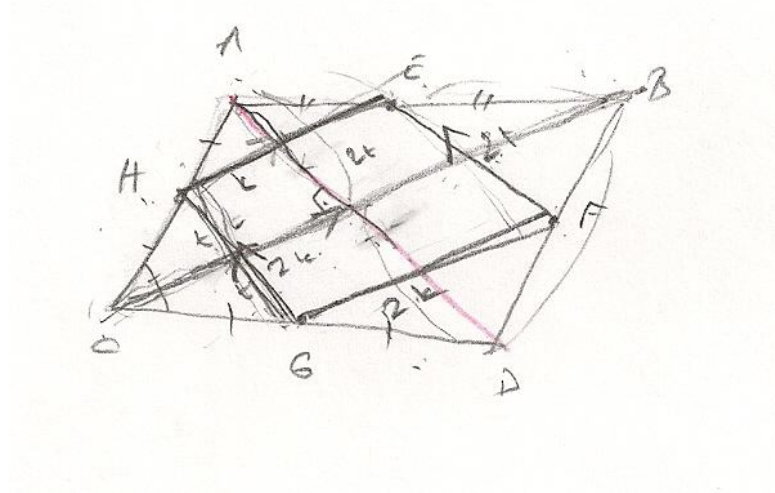
1. Durum. 1. durumda katılımcıların hepsi dörtgeni *izomorfik* olarak görselleştirmiş ve buna göre oluşacak şeklin dörtgen olacağını söylemişlerdir. Ayrıca, tüm katılımcılar *objeleri ilişkilendirme* sürecinde *somut imajlarını* kullanırlarken Özge, Mert ve Filiz *durum ile ilişkilendirme* sürecinde *formül imajlarını*, Gönül ise hem *formül imajını* hem de *kinestetik imajını* kullanmıştır. Mert renkli kalem, Filiz ise cetvel kullanmıştır.

Özge, karşılıklı kenarları için paralel olacağı yorumunu yapmıştır. Ancak bundan emin olmamış ve *somut imajı* olarak ifade ettiği şekli daha düzgün çizmek istemiştir (Şekil 4.1.57). *Objeler* olarak ele aldığı dörtgenin kenar orta noktalarını *ilişkilendirmiştir*. Oluşan dörtgenin karşılıklı kenarlarının öncelikle eşit olmadığını düşünmüş ancak daha sonra köşegenleri *obje* olarak aldığı anda bu objeleri ilişkilendirerek *geri bağlantı kurmuş* ve ‘Şu köşegeni düşünsek... Bu bunu ikiye bölmüş, bu bunu ikiye bölmüş. O zaman Thales’ten bunlar da paralel olur. O zaman bu da zaten paralel oluyor. Bu a ise burası 2a. Burası 2a ise burası orta nokta olduğu için a oluyor. O zaman bunlar birbirine eşit ve paralel. Aynı şey şunlar için de geçerli. Şu karşılıklı kenarları düşünecek olursak köşegeni çizeriz. Yine Thales’ten burası b ise burası 2b. Şurası da 2b. Sonuçta karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir.’ diyerek Thales Teoremi ile buradaki *durumu ilişkilendirmiştir*. Zihnindeki *formül imajına* göre kenar ve köşegen objeleri arasındaki oranları düşünerek karşılıklı kenarların hem paralel ve hem de eşit olacağı yorumunu yapmıştır.

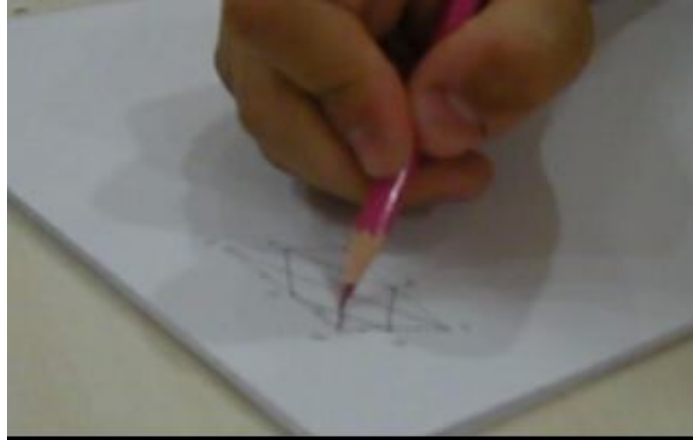


Şekil 4.1.57. Özge'nin Genellemedeki 1. Durum Temsilleri

Mert, *somut imajı* türüne giren ifadeye göre göre (Şekil 4.1.58), ‘Açıları, benzerlikleri düşündüm. E orta noktaydı. 1 e 2 oranı vardır. Burası da orta noktaydı. Burada da 1 e 2 oranı olacaktır. Daha doğrusu şu küçük üçgenle büyük üçgen birbirine benzer olacaktır. 1 e 2 oranı olacak. Alan benzerliği mi kursam yoksa... Şu k birim uzunluğunda dersek bu 2k birim uzunluğunda olur.’ diyerek *objeler* olarak ele aldığı kenar orta noktaları ile yine *objeler* olarak ele aldığı köşegenleri *ilişkilendirmiş* ve *formül imajına* göre kenar ve köşegen objeleri arasındaki oranları düşünerek karşılıklı kenarların hem paralel ve hem de eşit olacağı yorumuyla ‘Paralelkenar içinde paralelkenar oluşturduk. Kenarlar eşit ve paraleldir.’ demiştir. Mert ayrıca görselleştirdiği şekilde renkli kalem kullanmayı tercih etmiştir (Şekil 4.1.59).

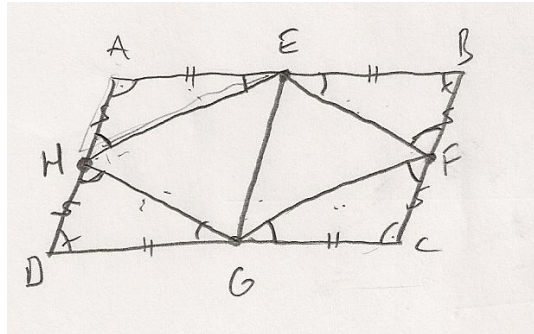


Şekil 4.1.58. Mert'in Genellemedeki 1. Durum Temsilleri



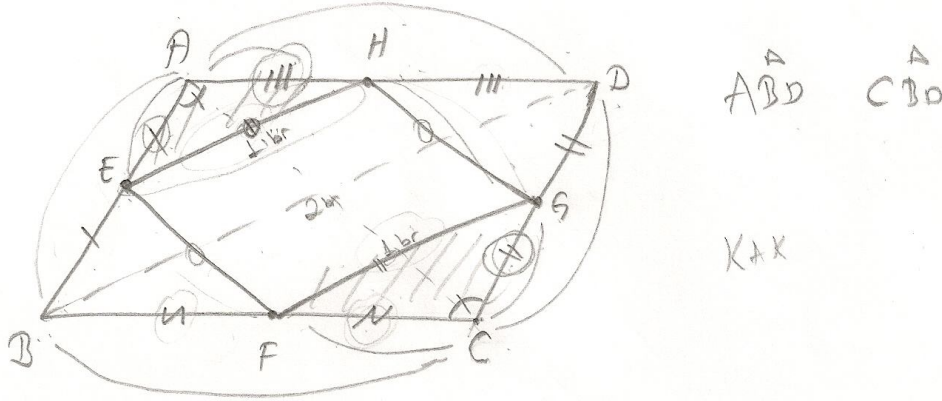
Şekil 4.1.59. Mert'in Genellemedeki 1. Durum Görüntüsü

Tarık, öncelikle çizim yapmamayı düşünmüş daha sonra *somut imajını* gösteren çizime göre oluşacak dörtgenin paralelkenar olacağı yorumunu yapmıştır (Şekil 4.1.60). Bunun sebebi olarak ise 'Bu orta nokta olduğu için, bu üçgen bu üçgenin, bu üçgende bu üçgenin aynısıdır. Yani, birbirlerine eşittirler. Dolayısıyla bu uzunluk bu uzunluğa, bu uzunlukta bu uzunluğa eşittir. Açılarda da yine aynı şekilde düşünersek yani şu açıyla şu açı, bu açıyla bu açı, şunla şu, bunla da bu birbirine eşittir. Bu yüzden bu oluşan şekil yine paralelkenar olur.' demiştir. Tarık verilen dörtgenin köşegenini *obje* olarak ele almamış, kenarlarda oluşan üçgenleri *objeler* olarak düşünmüş, bunların açıları ve kenarlarını *ilişkilendirerek* karşılıklı olarak eş oldukları yorumuyla süreci tamamlamıştır.

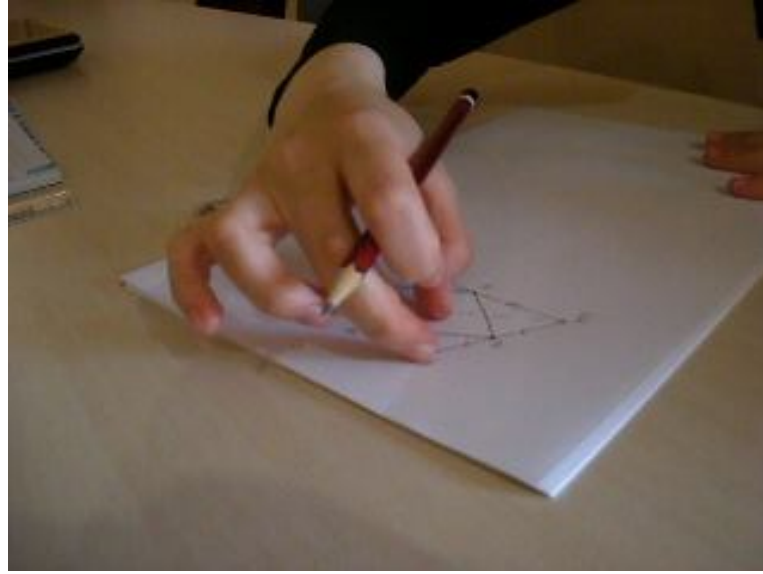


Şekil 4.1.60. Tarık'ın Genellemedeki 1. Durum Temsilleri

Gönül, görselleştirdiği *somut imajına* göre ‘ABCD nin köşegen uzunluğunu çizecek olursam eğer ... ABCD yi iki eş üçgene ayırmış olurum. Bunlar eş üçgendir... Şimdi burada ABD üçgenine bakarsak, AE ve EB kenarı birebir, AH, HD kenarı birebir orantıda. Burada temel benzerlik teoremine göre 1 e 2 oranı var. Thales teoreminden dolayısıyla şu EH kenarı orta taban olmuş oldu. Yani şuranın uzunluğu 2 birimse buranın ki 1 birim.’ diyerek *obje* olarak ele aldığı kenar orta noktaları ile yine *obje* olarak ele aldığı köşegenleri *ilişkilendirmiş* ve bunu *Thales durumu ile ilişkilendirmiştir* (Şekil 4.1.61). Ayrıca, *formül imajına* göre ifade ettiği benzerlik oranlarını söylemiş ve ‘ABD üçgeniyle CBD üçgeninin kenar uzunlukları aynı olduğundan bu üçgenler benzer üçgenler olup EH kenarıyla FG kenarı eşit olmuş olur.’ derken *kinestetik imajına* göre eşit olan kenarları parmakları ile ölçerek göstermiştir (Şekil 4.1.62). Sonuçta Gönül ‘başlangıçta verilen karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimde elde ettiğim yeni şekil başta herhangi bir dörtgen gibi gözüküyordu. Bu da karşılıklı kenarları paralel ve eşit olan bir paralelkenar olur.’ diyerek iki dörtgen arasındaki *ilişkilendirmeyi* yapmıştır.

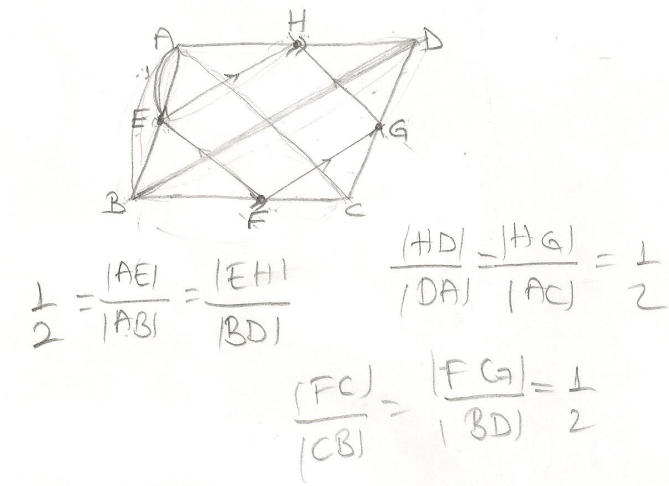


Şekil 4.1.61. Gönül’ün Genellemedeki 1. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.62. Gönül'ün Genellemedeki 1. Durum Görüntüsü

Filiz, *somut imajı* olarak görselleştirdiği şekli çizerken cetvel kullanmayı tercih etmiştir (Şekil 4.1.63, Şekil 4.1.64). Oluşan dörtgenin karşılıklı kenarlarının paralel olacağını söylemiş ve bunu ‘Bunların orta noktalarının... Şöyle köşegenini çizersek, bunun buna paralel olduğunu gösterelim. EH nin BD ye paralel olduğunu söylemek için de şunun şuna oranı, bunun buna oranına eşit olmalı... Teorem kullanmaya çalışıyorum ama... Paralelliklerini söylemek için... Şunlar eşit... Uzunluk olarak söyleyemediğim için... Ama bu tarafı içinde aynı şekilde... Paralel onlarda... Şöyle diğer köşegen için de söyleyebilirim... Yani EFGH dörtgeninde EH ın FG ye paralel olduğunu, HG nin de EF ye paralel olduğunu...’ şeklinde açıklamıştır. Buna göre *obje* olarak ele aldığı kenar orta noktaları ile yine *obje* olarak ele aldığı köşegenleri *ilişkilendirmiş* ve bunu *Thales durumu ile ilişkilendirmiştir*. Ayrıca *formül imajı* olarak ifade ettiği oranları da eşit olarak görmüş ve ‘Karşılıklı kenarları paralel olan bir dörtgen. Uzunlukları da eşit.’ diyerek verilen dörtgenle orta noktalarının oluşturduğu dörtgen arasındaki *ilişkilendirmeyi* elde etmiştir.



Şekil 4.1.63 Filiz'in Genellemedeki 1. Durum Temsilleri

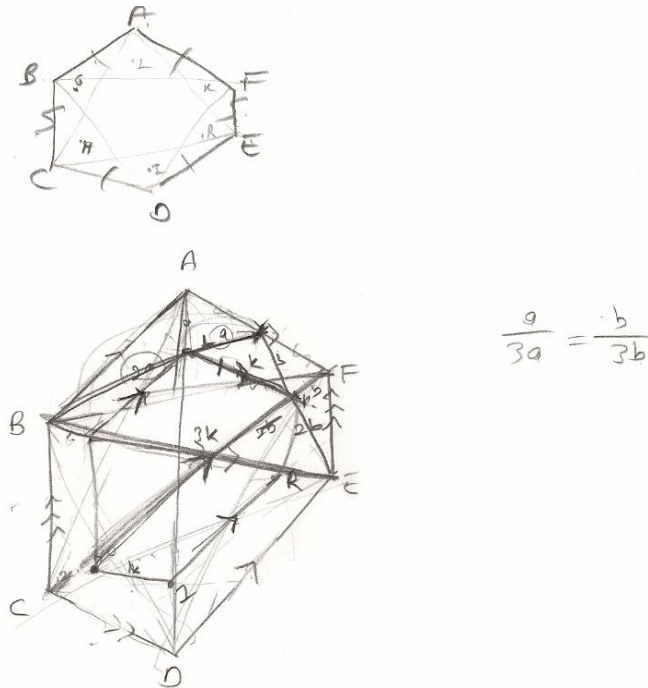


Şekil 4.1.64 Filiz'in Genellemedeki 1. Durum Görüntüsü

2. Durum. 2. durumda katılımcıların hepsi verilen altıgeni *izomorfik* olarak görselleştirmişler ve bu çizimlerinden elde edilecek şeklin altıgen olacağı yorumunu yapmışlardır. Ayrıca, tüm katılımcılar ilk durum ile *aynı ilişkiyi arama* sürecinde *somut imajlarını* kullanırlarken Özge ve Filiz ilk durum ile *aynı çözümü veya sonucu arama* sürecinde *formül imajlarını*, Mert ve Gönül ise hem *formül imajını* hem de *kinestetik*

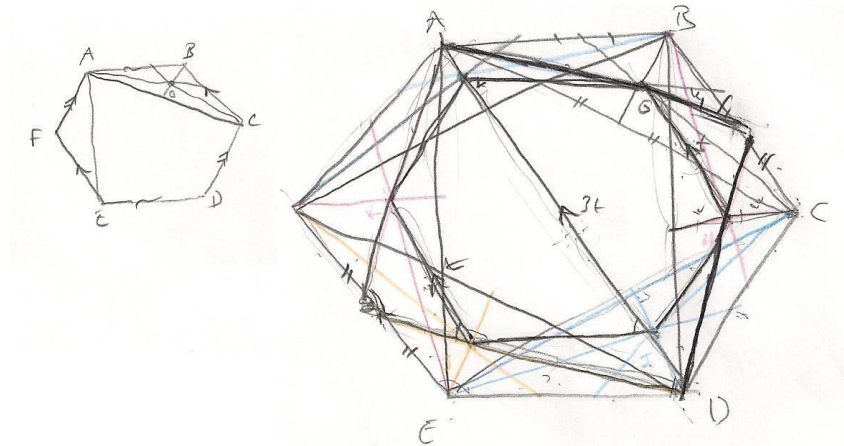
imajını kullanmıştır. Tarık, bu süreçte görsel imaj kullanmamıştır. Gönül ve Mert renkli kalem, Filiz ise renkli kalem ve cetvel kullanmıştır.

Özge, oluşturduğu şekle göre ‘Ben bunu biraz daha büyük yapsam... Böyle hiçbir şey anlayamam. Şöyle bir şey çizelim...’ diyerek yeniden zihnindeki şekli görselleştirmiş ve *somut imajı* olarak ifade ettiği şekil üzerinde düşünmeye başlamıştır (Şekil 4.1.65). Oluşturduğu altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel olacağını ifade etmiş ve bunun açıklarken ‘burada bir şeyi kullanmamız gerekiyor ama...’ diyerek ilk durumda düşündüğü dörtgene *geri bağlantı* yapmıştır. Düşündüğü altıgenle bu dörtgen arasında ‘Hani buradaki gibi paralellikleri kullanabilir miyim?... Yine Thales’i kullanarak...’ diyerek *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışmış ve ‘Şu uzunlukla şu uzunluk arasındaki bağlantıyı kurabilir miyim diye düşünüyorum.’ demiştir. ‘Yine buradaki gibi Thales in yardımcı olacağını düşünüyorum. Yani aynen buradaki gibi şunların paralel olacağını düşünüyorum...’ diyerek ilk dörtgenle *aynı çözüm veya sonucu araştırmaya* çalışmıştır. Ağırlık merkezi kavramını düşündüğünde zihnindeki *formül imajının* sonucu olarak ‘1 e 3 oranında. Yani şöyle şu kestiği parçanın bir birimi tüm üçgenin kenarı. Şu da b ye 3b oranı. Yani bir oran varsa yine Thales’i kullanarak... Mesela burası k ise burası 3k dır. O zaman paraleldir.’ diyerek buradan 1/3 oranını elde etmiştir. Daha sonra oluşacak altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel ve eşit olacağı yorumunu yapmıştır.



Şekil 4.1.65. Özge’nin Genellemedeki 2. Durum Temsilleri

Mert, ilk olarak görselleştirmeye başladığı şekli ‘Biraz daha büyük çizeyim. Küçük çizdim... Kenarortayını çiziyorum. G dersek... H, I, J, K, L dersek... İçinde yine altıgen oluşturur.’ diyerek yeniden görselleştirmiştir. ‘Şuradan kalem alabilir miyim? Şekli daha net görmek için.’ diyerek *somut imajı* olarak ifade ettiği şekli çizerken renkli kalemler kullanmayı tercih etmiştir (Şekil 4.1.66). ‘Benzerlik oranlarını düşünerek paralelliklerini söylesem.’ diyerek oluşturduğu altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel olduğunu düşündüğünü ifade etmiş ve ilk durumda verilen dörtgendeki düşünceyle burada *aynı ilişkiyi araştırmaya* başlamıştır. ‘Ağırlık merkezindeki 2 ye 1 oranını kullanmak istiyorum.’ diyerek *formül imajı* şeklinde belirttiği teoremi düşünmüştür. ‘Bir tane büyük üçgen görmem lazım ama onu da göremedim. Şu üçgene baksam...’ diyerek *kinestetik imajı* şeklinde eliyle üçgenin kenarlarını taşıyarak uzunlukları ile ilgili oranı görmeye çalışmıştır (Şekil 4.1.67). Ayrıca çizdiği şekil üzerinde düşünürken şeklin karışık olması üzerine ‘O kadar çok şey çizmişim ki bu çizdiğim şey G den geçer mi? Çizdiğim şey ne idi diye düşünüyorum şu anda...Tükenmezle geçicem çünkü göremiyorum.... Bir daha büyük çizeceğim şekli.’ demiştir. ‘Burada da aynı şekilde 2 ye 1 oranı var. Dolayısıyla paralel olduğunu şimdi söyleyebilirim.’ diyerek ilk durumda verilen dörtgenin oluşturduğu üçgen ve orta noktalarla ilişkilendirilen Thales Teoremi ile *aynı çözümü* burada oluşan şekil için *araştırmıştır*. Mert, ‘1 e 3 oranı vardır. Şimdi burada da 1 e 3 oranı vardır. Dolayısıyla aynı olacak. Karşılıklı kenarları hem paralel hemde aynı derim.’ diyerek karşılıklı kenarları paralel olan altıgenin köşelerinde oluşacak üçgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu altıgenin de karşılıklı kenarlarının paralel ve aynı zamanda eşit olacağı yorumuyla süreci tamamlamıştır.

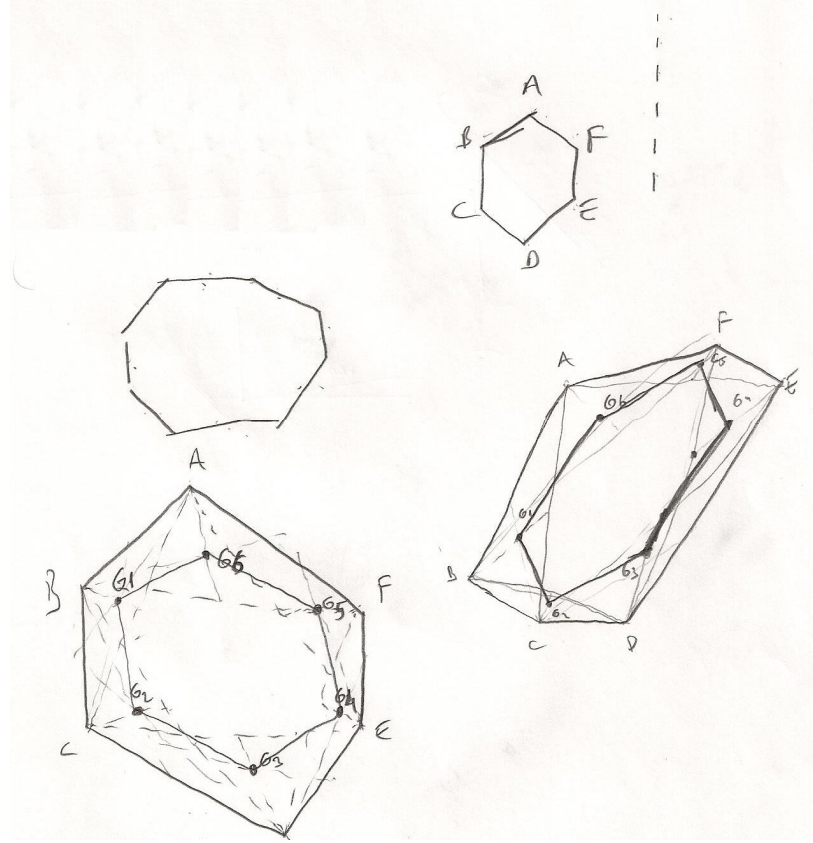


Şekil 4.1.66. Mert’in Genellemedeki 2. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.67. Mert'in Genellemedeki 2.Durum Görüntüsü

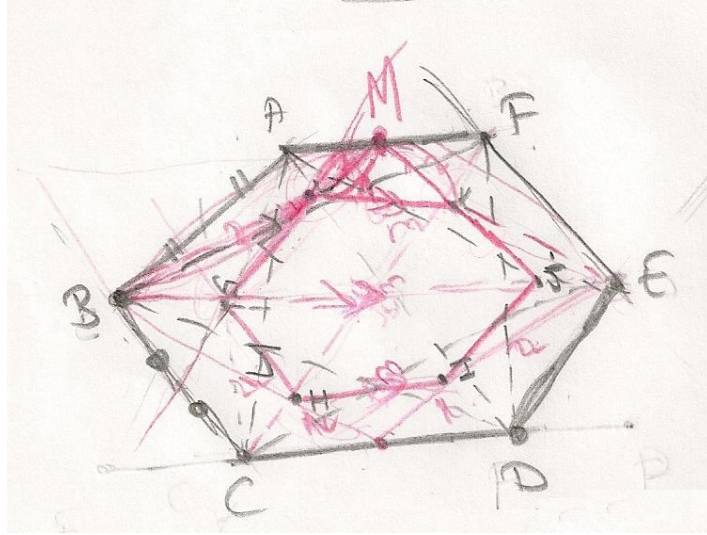
Tarık, verilen altıgeni görselleştirirken önce 'İlk önce temsili birşey çizeyim o zaman.' diyerek sekizgen çizmiş daha sonra şeklin kenar sayısının yanlış olması sonucu altıgen çizmiştir. *Somut imajını izomorfik* olarak görselleştirdiği üçüncü şekle göre öncelikle köşelerde oluşan üçgenleri sayarken çetele tutmuş ve buna göre 'Oluşacak şekil bir altıgen olur.' demiştir (Şekil 4.1.68). İlk yorumuna göre altıgenin 'Karşılıklı kenarları birbirine paralel olur ama eşit olması gerekmez.' demiş ve bunun sebebinin ise 'Yani üstteki altıgene bağlı olarak.' diyerek verilen altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel ama eşit olmamasına bağlamıştır. Paralel olduğundan emin olduğunu ancak eşitliklerinden emin olmadığını ifade etmiş ve 'Farklı bir altıgen daha çizeyim şuraya... Çizeyim de içim rahat etsin...' diyerek karşılıklı kenarları paralel ama eşit olmayan yeni bir şekil çizmiştir. Buna göre 'Galiba hem paraleller, hem de karşılıklı kenarları eşit. Ama emin değilim.' diyerek sonuca ulaşmıştır. Tarık, cebirsel olarak hiçbir işlem yapmamış ve ilk durumdaki düşüncelerine paralel olacak, *aynı ilişkiyi veya çözümü araştırarak* ifadeler kullanmamıştır. *İzomorfik* olarak görselleştirdiği şekillere göre cebirsel işlem yapmadığı için sadece görsel yorumlamalarına göre emin olmamasına rağmen doğru yorumuyla süreci tamamlamıştır.



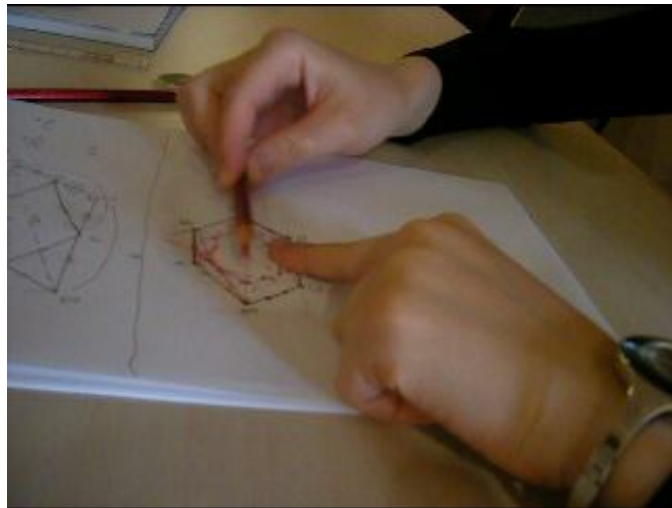
Şekil 4.1.68 Tarık'ın Genellemedeki 2. Durum Temsilleri

Gönül, 'Çizmesem acaba... Direk çizsem aslında, şu paralel, şu paralel,...' diyerek verilen altıgeni önce görseleştirmemeyi düşünmüş daha sonra *somut imajının* ifadesi olarak *izomorfik* şekilde görseleştirmiştir (Şekil 4.1.69). Çizdiği şekil üzerinde düşünürken şekli daha iyi görebilmek için 'Şöyle biraz karıştıda, kırmızı kalemi alsam?' diyerek renkli kalem kullanmayı istemiştir. Buna göre 'Şimdi gördüğümüz gibi bir altıgen' diyerek elde edilecek şeklin altıgen olduğu yorumunu yapmıştır. 'Kenar uzunluklarını kıyaslamak için az önce yaptığımız gibi birşey, köşegen uzunluğunu baz alabiliriz.' diyerek önceki adımda verilen dörtgenle *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışmıştır. 'Şimdi şu L üçgenin ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktasını 2 ye 1 oranında bölüyor.' diyerek *formül imajı* şeklinde ifade ettiği düşüncesiyle yine ilk durumda verilen dörtgendeki *aynı çözümü araştırmaya* çalışmış ve 'Dolayısıyla bu iki kenar paraleldir... Şurada da 1 e 3 oranı var. Dolayısıyla, bu LK doğrusuyla BE doğrusu paralel olmuş olur.' diyerek karşılıklı kenarlarının paralel olacağı yorumunu yapmıştır. Altıgen içinde oluşturduğu oranlar üzerinde düşünürken önce 'Şimdi başlangıçta verilen

şekil düzgün altıgen olmadığından yani kenar uzunlukları aynı olmadığından eşittir diyemeyiz gibi geliyor bana.’ demiş daha sonra kalemini doğru parçaları gibi taşıyıp hareket ettirerek *kinestetik imajı* şeklinde ‘Karşılıklı kenarları da eşit çıkar...’ diyerek süreci tamamlamıştır (Şekil 4.1.70).

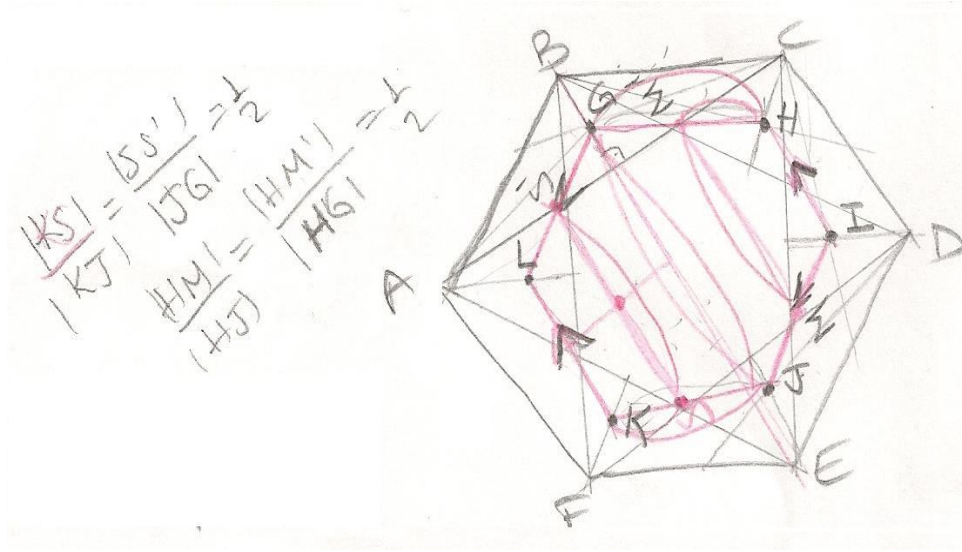


Şekil 4.1.69. Gönül’ün Genellemedeki 2. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.70. Gönül’ün Genellemedeki 2. Durum Görüntüsü

Filiz, *somut imajı* şeklinde ifade ettiği *izomorfik* görselleştirmesi üzerinde düşünürken ‘Bunları birleştirdiğimiz taktirde bir altıgen elde ederiz. Birleştireyim ben bunları ama renkli kalem alabilir miyim? Şekil için...’ diyerek renkli kalem ve cetvel kullanmış ve elde edilecek şeklin altıgen olacağı yorumunu yapmıştır (Şekil 4.1.71, Şekil 4.1.72). Çizdiği şekle göre öncelikle ‘Yine karşılıklı kenarları paralel ama eşit olmayan bir altıgen elde ederiz.’ deyip bunu ‘Görsellik olarak düşündüm şu anda.’ diye açıklamasına rağmen ilk durumdaki dörtgenle *aynı ilişiyi araştırmaya* başlamış ve ‘Yine ayrı ayrı ağırlık merkezlerini... Teorem uygulayalım...’ demiştir. Bu düşüncesine göre *formül imajı* şeklinde ifade ettiği oranlara göre yine ilk durumdaki *aynı çözümü araştırmaya* çalışarak ‘Şuna S diyelim. KS nin KJ ye oranı, Şuna S' dersek, SS' nün JG ye oranı ... Orta nokta seçtiğimiz için yine 1 e 2 oranı var...’ demiştir. Filiz sonuçta ‘Bana öyle geliyor. Paralel ve eşit oması gerektiğini düşünüyorum şu anda...’ demiş ve süreci tamamlamıştır.



Şekil 4.1.71. Filiz'in Genellemedeki 2. Durum Temsilleri

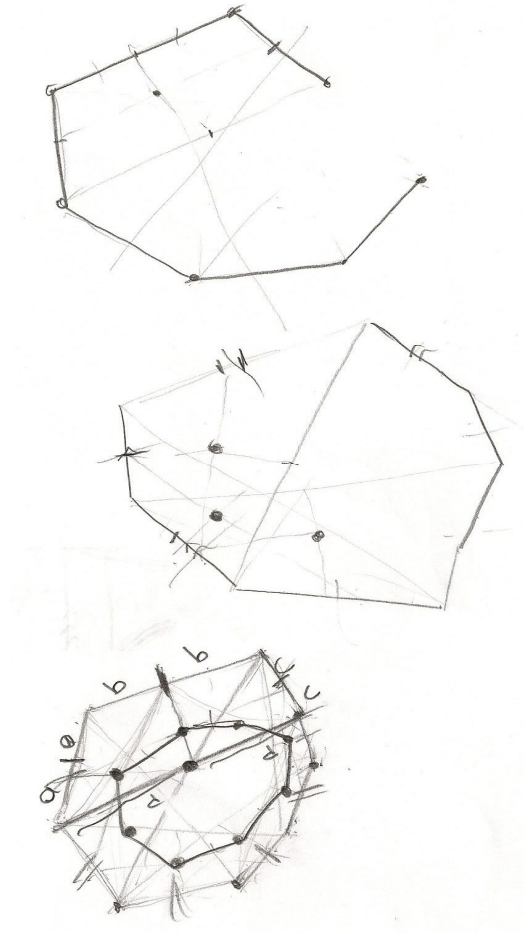


Şekil 4.1.72. Filiz'in Genellemedeki 2. Durum Görüntüsü

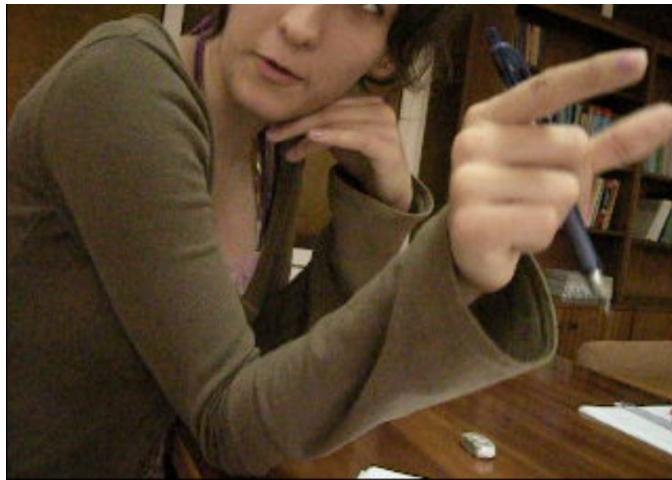
3. Durum. 3. durumda katılımcıların hepsi verilen sekizgeni *izomorfik* olarak görselleştirmişler ve bu çizimlerinden elde edilecek şeklin sekizgen olacağı yorumunu yapmışlardır. Ayrıca, tüm katılımcılar ilk ve ikinci durum ile *aynı ilişkiyi arama sürecinde somut imajlarını* kullanırlarken, Özge *kinestetik imajını* ve Filiz ilk ve ikinci durum ile *aynı çözümü veya sonucu arama sürecinde formül imajını*, Gönül ise hem *formül imajını* hem de *kinestetik imajını* kullanmıştır. Gönül ve Mert renkli kalem, Filiz renkli kalem ve cetvel, Tarık ise cetvel ve kareli kağıt kullanmıştır.

Özge, üçüncü durumda önce zihnindeki *somut imajı* olan sekizgeni kağıtta görselleştirmeye çalışmış ve aslında kendisinden düşünülmesi istenen şeyi anlamasına rağmen görselleştirme konusunda oldukça zorlanmıştır. Bu durumu 'Sekizgeni nasıl çizeceğim...', 'Anladım ama ben şekli oluşturamıyorum.' şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra sekizgenin köşe noktalarının oluşturduğu dörtgenleri düşünme sürecinde 'şekli güzel çizemeyince onun üzerinde yorum da yapamıyorum. Şekli çizsem yorum yapacağım.' şeklinde ifade etmiştir. Düşündüğü sekizgeni kağıtta görsel olarak birkaç kez ifade etmeye çalışmıştır (Şekil 4.1.73). Ancak kağıt üzerinde görselleştiremediği şekli havada çizerek düşünmeye başlamış ve '4 tane köşede 1 tane dörtgen oluşur. 1,2,3,4,5,6.' diyerek parmaklarıyla *kinestetik imajı* yoluyla sekizgeni ve köşelerde oluşacak dörtgenleri sayarak çizmeye çalışmıştır (Şekil 4.1.74). Bunu yaparken yine sayısından emin olamamış ve tekrar kağıt üzerinde düşünerek 'Şu bir dörtgen,...

dörtgenlerden yola çıkarak bir şeyler yaparsak... Şimdi şekli tam çizemedim ama, bu şekil üzerinde konuşalım mı?’ diyerek *izomorfik* görselleştirme yapmış ve sekizgeni ve bu sekizgen içinde oluşacak diğer sekizgeni elde etmiştir. ‘Şimdi şekli güzel çizemeyince onun üzerinde yorum da yapamıyorum da. Şekli çizsem yorum yapacağım da...’ demiş ve daha sonra elde ettiği sekizgenin karşılıklı kenarlarını düşünürken ikinci durumda düşündüğü altıgene *geri bağlantı* yaparak *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışmıştır. Bunu ‘Yani yapmak istediğim aynı şu altıgen de olduğu gibi. Bir yerde üçgen bulup şu kenarların oranlarını bulmak. O oranları kullanarak paralelliği görmeye çalışıyorum.’ demiş ve daha sonra ‘altıgende yaptığımızda paralel çıktığına göre sekizgende de yaparsak bence paralel diye düşünüyorum. Yani 6 dan 8 e genelleştirirsek, paralel çıkacağını düşünüyorum’ şeklinde ifade etmiştir. Benzer şekilde karşılıklı kenarların eşitliğini düşünme sürecinde ise yine altıgende düşündüğü oranları ele alıp zihnindeki *formül imajı* ile bu oranlara benzer oranlar elde etmeye çalışmıştır. Böylece önceki durumla *aynı çözümü ve sonucu belirlemeye çalışarak araştırma* yapmıştır. Bunun sonucunda ise ‘Karşılıklı kenarların uzunlukları da birbirine eşit çıkacaktır. Çünkü altıgende yaptığımızda eşit çıktı. Altıgende gördüğüm için böyle düşünüyorum. Bunun bu şekilde olacağını hissedebiliyorum dersek daha iyi olur. Altıgende olduğu için sekizgende de olacağını hissediyorum.’ demiştir. Düşüncelerinden çok da emin olamamış ve ‘Sezinleyebiliyorum ama mantıksal olarak göstermek gerekiyor.’ demiştir.

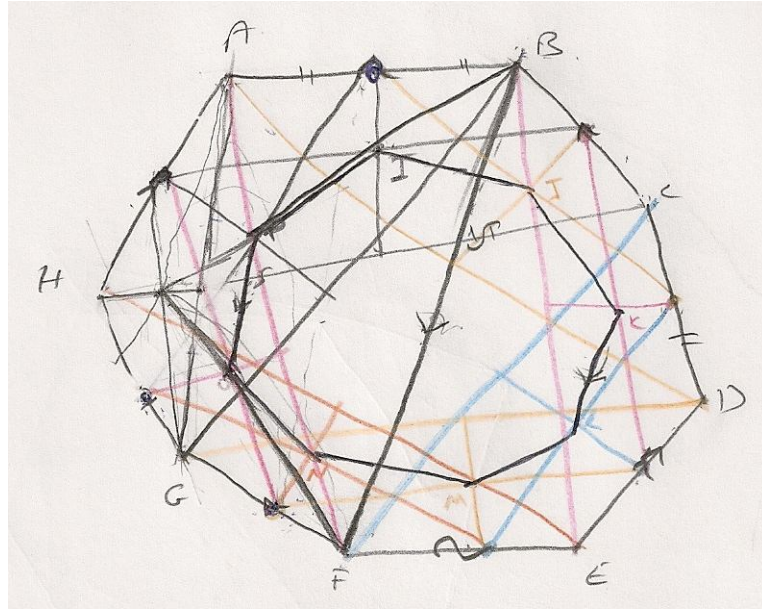


Şekil 4.73. Özge'nin Genellemedeki 3. Durum Temsilleri



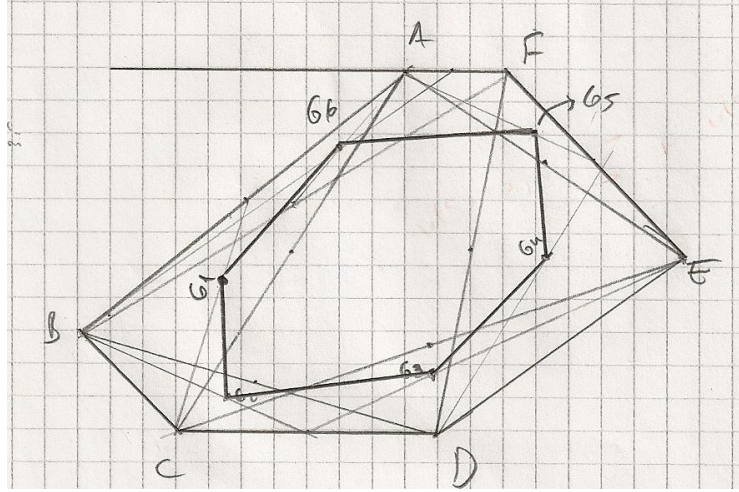
Şekil 4.1.74. Özge'nin Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü

Mert, renkli kalem kullanarak *somut imajı* olarak ifade ettiği şekli üzerinde düşünürken oluşacak şekilde yine bir sekizgen olacağını söylemiş ve bunu önceki durumlardan dolayı ‘Bekliyordum zaten.’ şeklinde ifade etmiştir (Şekil 4.1.75). Ancak karşılıklı kenarları paralel olan sekizgeni çizerken oldukça zorlanmıştır. Oluşturduğu şekil üzerinde düşünürken ikinci durum ile *aynı ilişkiyi aramaya* çalışmıştır. Bunu ‘Yine paralellik kuracağım diye düşündüm. Öncekilerden dolayı, bir de kenarortayları birleştirip yaptığımız için yine bir benzerlik kurmak gerektiğini düşündüm.’ diyerek ifade etmiştir. Ayrıca şeklin karşılıklı kenarları için ‘Paralel olduğu kesinde...’ diyerek önceki durum ile *aynı çözümü aramaya* başlamıştır. Ayrıca karşılıklı kenarların uzunlukları ile ilgili olarak ise ‘Şu durumda, zaten eğer karşılıklı kenarların paralel olduğunu söylersem uzunluklarında aynı olduğunu söyleyebilirim. Tek şey burada şunların paralelliğini söylemem lazım. Benzerlik söylemem lazım. Şurada çizeceğim üçgenle bir bağıntı bulacağım ki aynı olacak. Tek şey şunla şunun, şunla şunun arasında bir oran bulmam. Bunu aslında dörtgenlerden bulmam lazım ama çok karıştırdığım için göremedim.’ demiş, cebirsel şekilde gösterip açıkça göremese de önceki durumlarla aynı sonucu elde edeceğini düşünüp şekil için ‘Hem karşılıklı kenarlarının birbirine paralel hem de uzunluklarının aynı olduğunu söyleyebilirim.’ diyerek süreci tamamlamıştır.

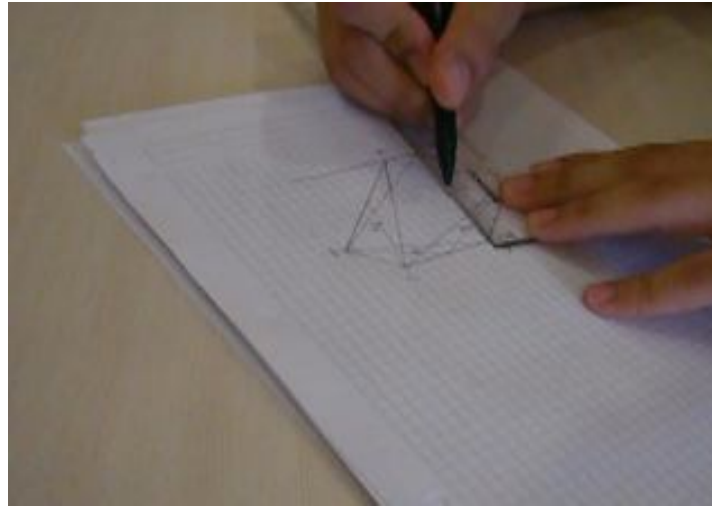


Şekil 4.1.75 Mert’in Genellemedeki 3. Durum Temsilleri

Tarık, üçüncü durumda verilen sekizgen için yorum yapmadan önce ‘Onun için daha birşey söyleyemem çünkü altıgeni daha düzgün yapamadığım için, yani aslında altıgendeki sonuçla büyük bir ihtimalle çakışır.’ diyerek ikinci durumdaki altıgene *geri bağlantı* yaparak ‘Karşılıklı kenarları paralel ama eşit olması gerekmeyen altıgenin köşelerinde oluşacak üçgenleri ağırlık merkezlerinin oluşturduğu altıgenin kenarları paralel ve eşit se, büyük bir ihtimalle sekizgenin de oluşturacağı sekizgenin de kenarları paralel ve eşit olur.’ demiştir. Böylece önceki durumdaki altıgende oluşan düşünceyle verilen sekizgende oluşacak düşüncede *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışmıştır. Ancak altıgen için düşüncelerinden tam emin olamadığı için ‘Altıgenin de karşılıklı kenarlarının paralel olduğu büyük bir ihtimalle de eşit olduğunu gördük.’ demiş ve buradaki durum içinde *aynı çözümü araştırma* yaparak ‘Sekizgen için de aynı şeyi söyleyebiliriz büyük bir ihtimalle. Yani sekizgenin o köşelerinden alınan dörtgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu sekizgenin de karşılıklı kenarlarının da paralel olduğu söylenebilir galiba.’ demiştir. Altıgen için düşüncelerinden emin olamaması sebebiyle sekizgen için de kesin yorum yapamamış ve bu nedenle ‘Şu anda bilmiyorum...tam bir şekil çizsem olur mu?’ diyerek *izomorfik* olarak altıgen için görselleştirme yapmaya başlamıştır (Şekil 4.1.76). Bunun için kareli kağıt ve cetvel kullanmayı tercih etmiştir. *Somut imajı* şeklinde ifade ettiği çizimini yapmış ve içinde oluşturduğu altıgenin karşılıklı kenarlarını cetvelle ölçerek ‘Şimdi ölçeceğim. 3,2 ve 3,2. karşılıklı kenarları eşit çıktı. 1,8 ve 1,8. hı hı. karşılıklı kenarları eşit üstelik paralel.’ demiştir (Şekil 4.1.77). Bu şekilde düzgen biçimde oluşturduğu şekil onun düşüncelerinden emin olmasını sağlamış ve sekizgen için de ‘O zaman onunda köşelerinde oluşan ve karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenlerin oluşturduğu ağırlık merkezlerini alırsak onların da karşılıklı kenarları eşit ve paralel olan bir sekizgen oluşturur.’ diyerek süreci tamamlamıştır.



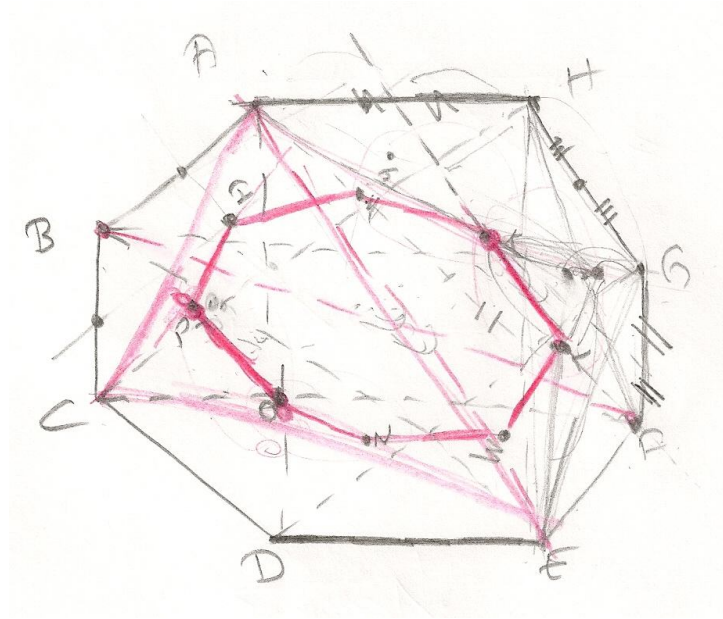
Şekil 4.1.76. Tarık'ın Genellemedeki 3. Durum Temsilleri



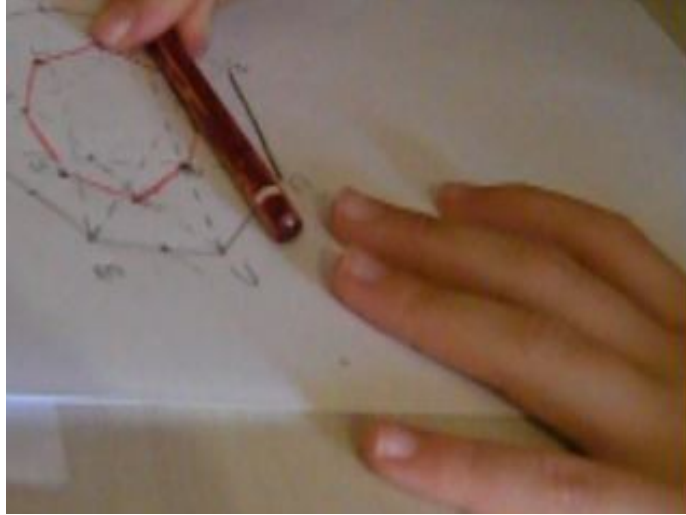
Şekil 4.1.77. Tarık'ın Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü

Gönül, verilen sekizgeni *izomorfik* olarak görselleştirerek içinde oluşacak şeklin de '8 kenarı var.' diyerek sekizgen olduğunu söylemiştir. *Somut imajı* olarak ifade ettiği şekli çizerken kareli kağıt ve renkli kalem kullanmıştır (Şekil 4.1.78). 'PO ile KL yi kıyaslayacağım...' diyerek *kinestetik imajı* olarak kalemiyle doğru parçasını özdeşleştirmiş ve bunları kalemini taşıyarak kıyaslamıştır (Şekil 4.1.79). Altıgende oluşan düşüncesiyle sekizgende de *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışarak 'Üçgene tamamlarım, benzerlikten yola çıkmak istiyorum. Kenarlarının orantısına eşit midir ya

da orantılı mıdır diye o yüzden... Deminki yaptığım gibi düşünmeye çalışıyorum.’ demiştir. Benzer şekilde önceki durum ile *aynı çözümü araştırmaya* çalışırken ‘Çünkü en başta paralel kenarda o şekilde gördüm. Bunda da hani daha ne diyeyim bu şekilde de olacağını düşünüyorum.’ demiş ve *formül imajını* kullanarak ‘Üçgenin ağırlık merkezi olduğu için şuralar orta nokta 1 e 2 oranında böler. Tamam. Yani Şuradaki üçgenin ağırlık merkezini baz aldığında bu AE KL doğru parçalarını içeren üçgeni göz önüne aldığında bunların arası 1 e 3 oranı olmakta.’ şeklinde belirtmiş, oluşacak sekizgenin karşılıklı kenarlarının paralel olacağını söylemiştir. Aynı düşünceyle ‘Uzunlukları da... Genel baktığımızda bu oranı 1 e 3 oranı taşıdığından... Hani k ise 3k olacağından ve benzer şekilde buradaki oranda mevcut olduğundan paralellik olan bir oranı taşıdığından kenarların oranı tabanların oranını taşıdığından eşit olmuş olur.’ diyerek süreci tamamlamıştır. Gönül, düşünceleri doğru olmasına karşın ‘Emin değilim şekil de çok karışık gerçi ama...’ diyerek yaptığı görselleştirmelere göre bundan emin olmadığından bahsetmiştir.

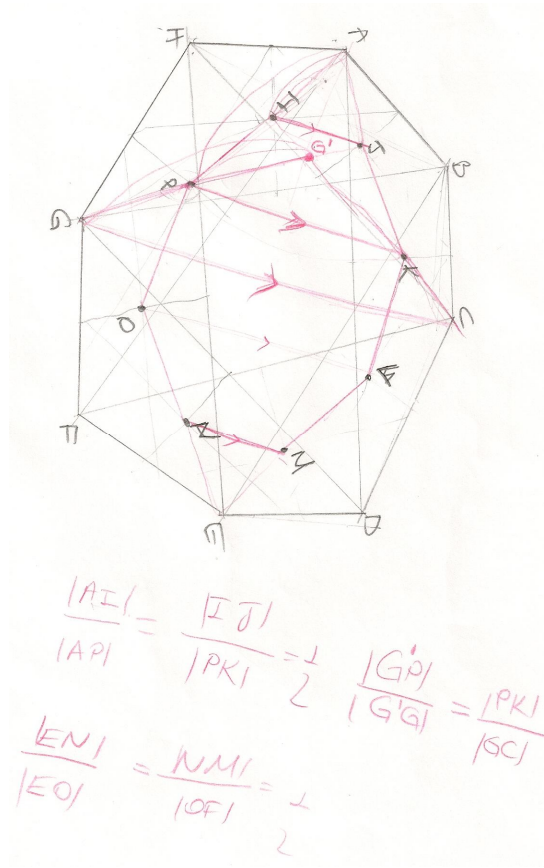


Şekil 4.1.78. Gönül’ün Genellemedeki 3. Durum Temsilleri



Şekil 4.1.79. Gönül’ün Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü

Filiz, renkli kalem ve cetvel kullanarak oluşturduğu görselleştirmesi üzerinde elde edilecek şeklin ‘Sekizgen’ olduğunu söylemiş, *somut imajı* olarak ifade ettiği şekle göre önce, karşılıklı kenarlarının paralel ama eşit olmadıklarını belirtmiştir (Şekil 4.1.80, Şekil 4.1.81). Daha sonra önceki durumlardaki düşüncelerine *geriye bağlantı* yaparak ‘Aslında dörtgen için orta noktalarını birleştirip, içerisinde yeni bir dörtgen elde ettik. Karşılıklı kenarları birbirine paralel ve karşılıklı kenarları eşit bir dörtgen elde ettik... Altıgende bunu denedik. Altıgende de karşılıklı köşeleri birleştiren üçgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu altıgeni bulduk. Oranlarına baktım. 1 e 2 oranı olduğunu söyledik.’ diyerek *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışmıştır. Hani karşılıklı kenarlarının paralel olduğunu söyleyebilirim. Ama niye söyleyemiyorum... Uzunluk olarak eşit olmadığını söylemiştim ama sanki şimdi bir çelişki oldu. Öncekilerde eşitmiş. Eşit olduğunu söyledim. Öyle buldum...’ diyerek bu durumda da *aynı çözümü araştırmaya* başlamıştır. ‘IJKP dörtgeninde, üçgen olarak düşünersek... Ağırlık merkezi, buna göre Tales teoremini kullanırsak, AI nın AP ye oranı, IJ nin PK ya oranına eşit...’ diyerek *formül imajı* ile ifade ettiği düşüncelerine göre karşılıklı kenarlarının paralel ve eşit olacağı yorumuyla süreci tamamlamıştır.



Şekil 4.1.80. Filiz'in Genellemedeki 3. Durum Temsilleri

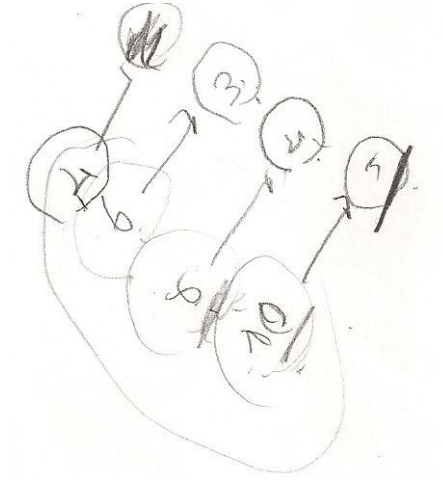


Şekil 4.1.81. Filiz'in Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü

4.1.2.2. 2.Aşama

4. Durum. 4. durumda katılımcılar görselleştirme yapma gereği duymamışlar, önceki durumlarda yaptıkları görselleştirmelere dönerek yorum yapmışlardır. Katılımcılardan Özge, devam ettirerek *genişletme* sürecinde *örüntü imajını* kullanmıştır.

Özge, benzer durumların ongen ve onikigen için de geçerli olup olmadığı düşüncesini ‘Eğer sekizgen için sezgi yoluyla hissedebiliyorsam ongen içinde düşünebilirim.’ şeklinde ifade etmiş ve buradaki durumların orijinalinden daha geniş bir alanda uygulanması sürecine bağlı olarak *uygulanabilirlik alanını genişletmiştir*. Bunu, ‘Ongen için düşündüğümde, sadece sekizgen için değil, ondan önce altıgen içinde geçerli idi, dörtgen içinde yaptık. Dörtgen içinde karşılıklı kenarlar paralel ve eşit çıktı. Altıgen için yaptığımızda da eşit ve paralel çıktı. Bunu sekizgene genelleştirebilirsek, sekizgen içinde aynı şeyleri söyleyebiliriz. Genelleştirmeyi kullanarak.’ şeklinde belirtmiştir. Ayrıca ‘Hep çift şeylerden bahsediyoruz burada, 4, 6...’ diyerek alınan çokgenin çift sayıda kenara sahip olması gerektiğini düşünmüş ve yeni durumları ortaya çıkarmak adına elde ettiği düşüncüyü tekrarlayıp *devam ettirerek* onikigen içinde geçerliliğini ifade ederek *genişletme* yapmıştır. ‘Ongen için... Şimdi altıgen için üçgenler oluşturduk, sekizgen için dörtgenler oluşturduk, ongen için de acaba beşgenler mi oluşturacağız? Bence ongen içinde beşgen oluşturacağız.’ demiş ve *genişletme* yaparken önceki durumlarla ilgili düşüncelerine paralel olarak *örüntü imajını* kullanarak aralarındaki ilişkiyi elde etmeye çalışmıştır (Şekil 4.1.82). Özge, ilk üç durumdaki gibi düşüncelerinden emin olmak için cebirsel olarak bunu görme gereği duymamış, bu durumda önceki durumlara göre *genişletme* yapmayı yeterli görmüştür. Ayrıca düşüncelerini önceki durumlarla *ilişkilendirirken*, yapmış olduğu görselleştirmelere dönerek bu düşüncelerinden bahsetmiştir.



Şekil 4.1.82. Özge'nin Genellemedeki 4. Durum Temsilleri

Mert, 'Önce dörtgende orta noktalarını birleştirdik... Diğerlerinde de ağırlık merkezlerini birleştirdik... Şöyle söyleyebilirim. Karşılıklı kenarları aynı uzunlukta olmasalar bile içinde karşılıklı kenarları birbirine paralel ve aynı uzunluğa sahip, dörtgense dörtgen beşgense beşgen, altıgense altıgen oluşturabiliyorum diye bir sonuca ulaşabilirim...' diyerek önceki durumlardaki düşüncelerinin *ayrıntılarını uzaklaştırmıştır*. 'Bunu beşgen için yapamam çünkü tek kenarlı.' diyerek bu durumun çift sayıda kenara sahip çokgenler için geçerli olduğunu düşünmüş ve yeni durumları ortaya çıkarmak adına elde ettiği düşüncüyü tekrarlayıp *devam ettirerek* aynı durumların ongen ve onikigen içinde geçerliliğini ifade ederek *genişletme* yapmıştır. Mert bu düşüncelerini önceki durumlarda yaptığı görselleştirmelere dönerek onlar üzerinde belirtmiş, ayrıca bir görselleştirme yapmamıştır.

Tarık, 'Bir ongenin köşelerinde oluşturduğumuz beşgenleri alsak, bu beşgenlerin ağırlık merkezlerini bulsak ve bu içerde oluşacak olan ongenin karşılıklı kenarlarına baksak bunun içinde aynı şeyler olur. Yani birbirlerine eşit ve paraleldir. Onikigende de aynı şeyleri söyleyebilirim.' diyerek önceki durumlardaki düşüncelerindeki *ayrıntılarını uzaklaştırarak* buradaki *durumla ilişkilendirmiş* ve aynı durumu ongen ve onikigen içinde geçerli olacağı yorumuyla *genişletme* yapmıştır. Tarık, bu durumda herhangi bir görselleştirme gereği duymamış ve cebirsel olarak da herhangi bir işlem yapmamıştır.

Gönül, ‘Şimdi önce bize bir dörtgen verildi. Karşılıklı kenarları paralel bir dörtgen. Bunun kenarlarının orta noktalarını birleştirerek yeni bir şekil elde ettik. Bu şeklin kenarları paralel mi yani ilk dörtgenle kıyaslıyoruz... Yani aynı özelliğe sahip mi diye. Şimdi birincisini gördük paralel kenar verilmişti ikinci elde ettiğimiz şekil de bir paralel kenar oldu ve karşılıklı kenarları eşit ve paralel kenar olan. İkinci şekilde herhangi bir altıgen verilmişti. Bu sefer bu altıgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimizde yeni elde ettiğimiz şekil de bir altıgen oldu ve bunun da karşılıklı kenarları paralel ve eşit çıktı.’ diyerek ilk iki durumdaki düşüncelerine geri dönmüş ancak ‘Sekizgen için de paralelliği söz konusu ancak karşılıklı kenarlarının eşitliğinde açıkçası çok ta emin değilim.’ diyerek üçüncü durumdaki düşüncelerinden emin olamadığından bahsetmiştir. Bunun sonucu olarak da ‘O yüzden aslında ongen ve onikigen içinde aynı şey geçerli olabilir ama emin değilim.’ demiş ve cebirsel işlemler yapıp bu durumu görememesi nedeniyle düşüncelerinin *uygulanabilirlik alanını genişletme* sürecinde düşüncelerinden emin olamamıştır. Gönül, bu durumda herhangi bir görselleştirme yapma gereği duymamıştır.

Filiz, önceki durumdaki düşüncelerine geri dönmüş ve ‘Şimdi... Dörtgen için orta noktalarını birleştirdiğimizde yeni bir dörtgen elde ettik. Karşılıklı kenarlarının paralel ve uzunluklarının eşit olduğunu söyledik. Altıgendeyse bu üçgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu şekilde de yine aynı şekilde, karşılıklı kenarlarının birbirine paralel ve birbirine eşit olduğunu söyledik. Sekigende yine aynı oluyor. Yine ağırlık merkezlerinin oluşturduğu bir sekizgen ve karşılıklı kenarları paralel ve yine karşılıklı kenar uzunlukları birbirine eşit. Genelleme yaparsak... aynı şeyleri söyleyebilirim heralde.’ demiştir. Buna göre Filiz, önceki durumlardaki *ayrıntıları uzaklaştırmış* ve bu durumda diğer durumların *uygulanabilirlik alanını genişleterek genişletme* yapmıştır. Bu süreçte herhangi bir görselleştirme yapmamış ancak önceki durumlardaki yaptığı görselleştirmelere geri dönerek yorum yapmıştır.

4.1.2.3. 3.Aşama

Bu aşamada katılımcılar görselleştirme yapmamışlar, önceki durumlarda yaptıkları görselleştirmelere dönerek yorum yapmışlardır. Katılımcılardan Özge, *genel bir prensibe ulaşma* sürecinde *kinestetik imajını* kullanmıştır.

Özge, önceki durumda tanımladığı örüntü üzerindeki yorumlamasına göre ‘Karşılıklı kenarları paralel olan ve çift sayıda kenarlı olan geometrik şeklimizde içinde oluşturulan, mesela altıgensen üçgen, sekizgensen dörtgen, yani yarısını aldık, kenar sayısının yarısı kadar oluşturulan geometrik şekillerin ağırlık merkezlerini hesaba katarak ilk başta alınan şeklin içinde oluşturulan geometrik şeklin karşılıklı kenarları birbirine paralel olur ve ayrıca diğer ilk başta alınan şekilden farklı olarak ta eşit olur.’ ifadesini kullanmış ve ‘Biz bunu genelleştiriyoruz. Dörtgen için, altıgen için sekizgen içinde söyledik. Sonuçta gittikçe genele doğru gidince $2n$ için düşünsek $2n$ için de ben söyleyebilirim. $2n$ sayıda kenarlı olan geometrik şeklimizde, köşelerini hesaba katarak oluşturulan n kenarlı geometrik şekilde ağırlık merkezlerini hesaba katarak oluşturulan $2n$ kenarlı geometrik şeklin karşılıklı kenarları birbirine eşit ve paralel olacaktır.’ diyerek düşündüğü genellemenin kuralını elde etmiş ve böylece *genel bir prensibe* ulaşmıştır. Özge bunu söylerken *kinestetik imajı* olarak elini havada çokgenin kenarlarını çiziyormuş gibi hareket ettirmiştir (Şekil 4.1.83). Daha sonra sezgisel olarak elde ettiği genellemeyi *tanımlamıştır*.



Şekil 4.1.83. Özge’nin Genellemedeki 5. Durum Görüntüsü

Mert, ‘Önce dörtgende orta noktalarını birleştirdik. Diğerlerinde de ağırlık merkezlerini birleştirdik.’ diyerek önceki durumlardaki düşüncelerine geri dönmüş ve ‘ $2n$ kenarlı çokgenler için eğer karşılıklı kenarları paralelse, içlerinde karşılıklı kenarları birbirine paralel ve aynı uzunlukta çokgeni oluşturabiliyorum. Burada da aynı şeyi yaptık.’ diyerek *genel bir prensip* elde etmiştir. Bunlardan bahsederken önceki

durumlarda yaptığı görselleştirmelere dönerek yorum yapmıştır. ‘Ongen için de çizip yapabilirim.’ diyerek aynı *fenomeni devam ettirebileceğini* düşünmüş ve bunu çizim yaparak gösterebileceğinden bahsetmiştir. Ayrıca önceki durumlardaki düşüncelerinden bahsederken ‘Burada çizdiğim şey onu tahmin etmekten oluştu. Ama başka bir nokta mı var tam emin değilim de. Ama kenarortayı çizdiğim zaman olmadı onu gördüm.’ demiştir. Bu onun emin olmadığı düşüncelerinden çizim yaparak görmesi ile emin olmasını anlatmaktadır. Sonuçta Mert, ‘Çift kenarlı çokgenler için karşılıklı kenarları paralel olsun ama eşit olmasına gerek yok, içinde öyle bir çokgen bulabilirim ki karşılıklı kenarları aynı uzunluğa sahip ve paraleller.’ diyerek elde ettiği durum için *belirleme veya açıklama* yapmıştır.

Tarık, ‘Kenar sayısı çift olan çokgenler için bunu yapabiliriz. Yani karşılıklı kenarları paralel olan çift sayıda kenarlı çokgenler için köşelerde oluşacak kenar sayısının yarısı olan sayıdaki çokgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu çokgenler baştaki çokgenin kenar sayısına sahip olup, karşılıklı kenarları hem paralel hem de eşittir.’ diyerek *genel bir prensip elde etmiş, belirleme veya açıklama* yapmıştır.

Gönül, ‘Yani çift sayılı kenar uzunluğuna sahip çokgenlerin kenarortaylarının kesim noktalarını birleştirdiğimizde elde ettiğimiz yeni şekil de gene ilk verilen çokgenle aynı kenar sayısına sahip yeni bir çokgen olmuş oluyor ve bu çokgenin de karşılıklı kenarları paralel olmuş oldu bunu gördük şekilde. Paralel kenarda da gördük altıgende de gördük ama sekizgende göremedik. Ben mi göremedim yoksa var mıydı onu da bilemiyorum şimdi ama çift sayıda olanlar için söyleyebiliriz heralde...’ diyerek *genel bir prensip* elde etmeye çalışmış ancak bu düşüncelerinden emin olamamıştır. Bunun nedenini ise üçüncü durumda sekizgen için paralel olduğunu görmesine ama eşitliğini görememesine bağlamaktadır. Böylece Gönül genelleme için *belirleme veya açıklama* yapmaya çalışmış ancak bundan emin olamamıştır.

Filiz, ‘Burada n kenarlı bir çokgen içinde yine ağırlık merkezlerinin oluşturduğu, yine n kenarlı bir çokgen olur. Bu taktirde yine karşılıklı kenarları paralel ve uzunlukları birbirine eşit olur.’ diyerek *genel bir prensip* elde etmeye çalışmış ancak bu durum tek sayılı kenara sahip çokgenler için doğru olup olmadığını ‘Şimdi... n eşittir 4 için yaptık, sonra 6 için, sonra 8 için yaptık. Beşgen için olmayabilir. Beşgen için söyle diyebiliriz. Burada karşılıklı kenarları hep birbirine paralel ama eşit olma şartı yoktu. Ama beşgen

de diğer kenarının karşısına paralel bir doğru çizmeyeceğimiz için bu şekilde genelleme yapamayız. Kenar sayısının çift olması durumunda bu söylediklerimiz geçerlidir. Karşılıklı kenarları birbirlerine paralel ve uzunlukları eşit olduğu...’ diyerek görmüştür. Buradaki düşüncelerini anlatırken önceki durumlara geri dönerek ‘Bunu dörtgende gördüm, altıgende de gördüm ama sekizgende biraz zorlandım.’ demiştir. ‘Şekil çiziminde tam görülüyor zaten aslında ama ispatlamam gerekiyor belki...’ diyerek görselleştirme ile sonuca ulaştığından bahsetmiş ve cebirsel olarak bunu doğrulama gereğini hissetmemiştir. Böylece süreci *belirleme ve açıklama* yaparak tamamlamıştır.

Kısaca katılımcıların genelleme sürecinde kullandıkları görselleştirmeler *izomorfik* görselleştirme olup, kullanılan görsel imajlar ise *somut, kinestetik, formül, örüntü imajı* şeklindedir.

4.2. Soyutlama ve Genelleme Süreçlerinde Kullanılan Görselleştirmelerin Etkileri İlgili Bulgular ve Yorumlar

4.2.1. Soyutlama Süreci ile İlgili Bulgular ve Yorumlar

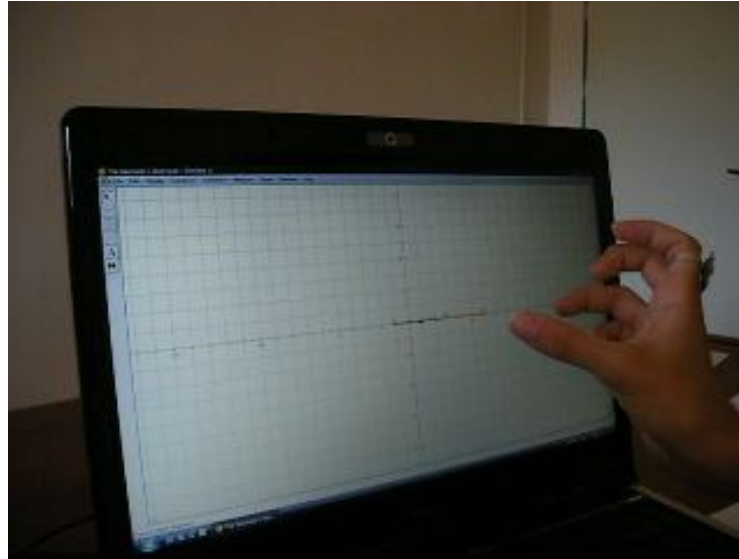
Katılımcılara soyutlama sürecinde Geometers’ Sketch Pad ve Mapple bilgisayar programları ile önceki görüşmedeki sorular ve farklı örneklerin görselleştirmeleri verilmiş, böylece katılımcıların soyutlama sürecindeki görselleştirmenin etkileri ve görsel imajlarındaki değişim incelenmeye çalışılmıştır.

4.2.1.1. 1.Aşama

1. Durum. Katılımcılar 1. durumda verilen doğru parçalarını bilgisayar ekranında görmüşler ve içlerinden Özge, ilk görüşmede eksik şekilde ifade ettiği somut imajını bu aşamada tamamlama fırsatı bulmuştur. Özge, *kinestetik imajlarını* bu aşamada da kullanarak ekran üzerinde doğru parçalarını elleriyle hareket ettirmiştir.

Katılımcılar bilgisayar programı yardımıyla doğru parçalarını ve hareketi net şekilde görmüşler ve önceki görüşmede sahip oldukları düşüncelerini desteklemişlerdir.

Özge, ilk görüşmede bir boyutlu hareket kavramı ile doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyonu* sırasında *somut imajı* olarak ifade ettiği doğru parçalarını reel eksen yerine düzlemde düşünmüş ve koordinatları iki bileşenli almıştır. Bu görüşmede ise verilen doğru parçalarını ekranda oluşturduğunda reel ekseninde olduklarını görmüş ve bunu bilgisayar programında yazarken ‘Hım... x ekseninde üç birim, y yönünde o zaman sıfır yazdık...’ şeklinde ifade etmiştir. Bu durumda da yine ilk görüşmedeki gibi doğru parçasını *içselleştirme* sürecinde ekranda eliyle *kinestetik imajı* olarak taşımıştır (Şekil 4.2.1). Ancak daha sonra verilen komut sonucu bunların çakıştıklarını görmüş ve bunu ‘Evet çakışıyor.’ diye ifade etmiştir. Bu ise sahip olduğu *dinamik imajını* desteklediğini göstermektedir. Ayrıca verilen doğru parçalarının özelliklerini inceleme fırsatı bulmuş ve ‘Evet uzunluklarını ölçelim mesela. AB doğru parçasının uzunluğu 4 birim, CD ye bakalım. 4 birim.’ demiştir. Özge, süreci ‘Hiç bir şey değişmedi. Yani uzunlukları aynı. Her şeyleri aynı. Aynılar, eşler.’ diyerek tamamlamıştır. Böylece bilgisayar ortamında verilen görselleştirme Özge’nin eksik olan *somut imajını* tamamlamasına ve *dinamik imajını* desteklemesine yardımcı olmuştur.



Şekil 4.2.1. Özge’nin Soyutlamadaki 1. Durum Görüntüsü

Mert, ilk görüşmede *içselleştirme* sürecinde ifade ettiği *somut imajını* ekranda görmüş ve bir boyutlu hareket kavramı ve doğru parçası kavramı arasındaki *koordinasyonu* oluştururken doğru parçalarının ekranda çakıştıklarını görerek ‘Ötelediğimiz zaman aynı yere geldi... Doğru ötelemişiz. Birbirine denk oldu, eş oldu. Yani üst üste geldi ve oturdu, aynı doğrular...’ demiştir. Bu, *dinamik imajını* desteklediğini göstermektedir. Böylece bilgisayar ortamındaki görselleştirme onun düşüncelerini destekler şekilde olmuştur.

Tarık, önceki görüşmede *koordinasyon* sürecinde ifade ettiği *somut imajını* bu görüşmede ekranda görmüş, ‘AB doğru parçası üzerinden herhangi bir noktayı alıp diğer noktalarla beraber mesela AB doğru parçası sağa doğru yani x eksenin artış yönüne doğru eğer 3 birim kaydırırsak bu CD doğru parçasıyla aynı olur.’ diyerek *dinamik imajıyla* hareket ettirdiği doğru parçalarını ve *formül imajı* ile de uzunluklarını ifade ettiği düşüncelerini bu aşamada ekranda görerek doğrulamıştır. Böylece ‘Çakışmış oldu. Bir ötelemeye birbirine eşit olmuş oldu. Uzunluklarına baktığımız zaman birbirine eşitler.’ diyerek süreci tamamlamış ve düşüncelerini bu ortamdaki görselleştirme desteklemiştir.

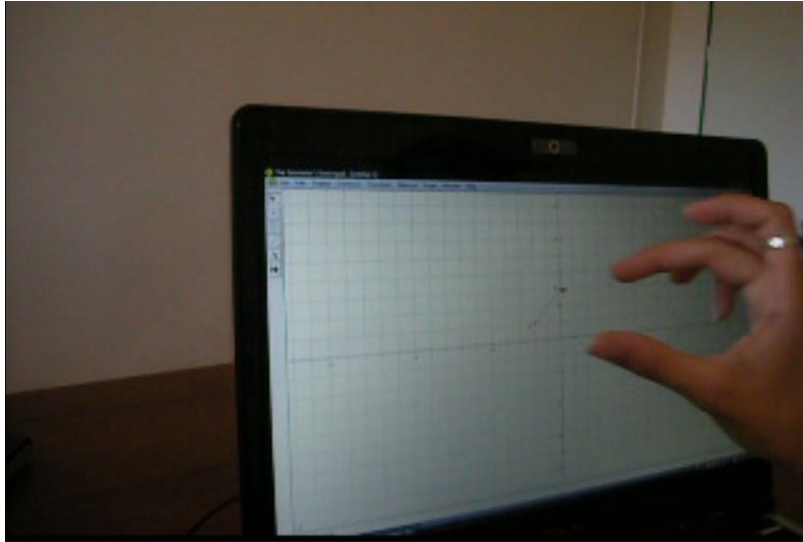
Gönül, ilk görüşmedeki *somut imajını içselleştirirken formül imajı* ve *kinestetik imajı* ile ifade ettiği *izomorfik* görselleştirmesini bu aşamada ekranda gördüğünde ‘Ötelenerek AB doğru parçası CD ye gelmiş oldu, eş doğrular olmuş oldu...’ demiş ve *dinamik imajını* ifade etmiştir. ‘Uzunluklarına bakabiliriz... Evet aynı uzunlukta, AB nin uzunluğu 4 birim, CD nin uzunluğu evet 4 birim. Bunlar eşit diyebiliriz.’ diyerek ise *formül imajını* desteklemiştir.

Filiz, önceki görüşmede sahip olduğu *somut imajını* daha sonra geri dönme sırasında *kinestetik ve formül imajı* ile ifade ederek *izomorfik* şekilde görselleştirmiş ve bu görüşmede ise bu düşüncelerini ekranda görüp, ‘AB doğru parçasını 3 birim ötelediğimizde CD yani A noktası C noktasına gelecek şekilde CD doğru parçası elde edebiliriz ya da tam tersi AB doğru parçası elde edebiliriz...’ diyerek *dinamik imajını* ifade etmiştir. ‘Evet... x üzerinde 3 birim. y üzerinde 0 birim... Uzunluklarının eşit olduğunu söyleyebiliriz... Evet uzunlukları eşit. Eş doğru parçaları diyebiliriz...’ diyerek ise *formül imajını* desteklemiştir.

4.2.1.2. 2.Aşama

2. Durum. Katılımcılar 2. durumda verilen doğru parçalarını bilgisayar ekranında oluşturmuşlardır. Böylece sahip oldukları *somut imajlarını* ekranda ifade etmişlerdir. Özge ve Filiz, *kinestetik imajlarını* bu görüşmede de kullanarak ekran üzerinde doğru parçalarını elleriyle hareket ettirmişlerdir. Katılımcılar, bilgisayar programı yardımıyla oluşturdukları doğru parçalarının hareketini net şekilde görmüşler ve özelliklerini inceleyerek önceki görüşmede sahip oldukları düşüncelerini desteklemişlerdir.

Özge, ilk görüşmede *homomorfik* şekilde görselleştirdiği *somut imajını* bu süreçte *izomorfik* şekilde görselleştirilmişini görmüş ve *koordinasyon* sırasında *kinestetik imajı* ve *formül imajı* ile ifade ettiği düşüncelerini benzer şekilde bilgisayar ekranında da görerek desteklemiştir. Bunu ‘Çakıştılar... Koordinatlarına bakalım isterseniz. Evet... Uzunluklarına bakalım... Evet eşitler. Aynı uzunlukta.’ şeklinde belirtmiştir. Bu şekildeki ifadesi aynı zamanda *dinamik imajını* göstermektedir. Ayrıca ilk görüşmedeki gibi bilgisayar ekranında da doğru parçalarını *kinestetik imajının* ifadesi olarak taşımıştır (Şekil 4.2.2).



Şekil 4.2.2. Özge'nin Soyutlamadaki 2. Durum Görüntüsü

Mert, önceki görüşmede *somut imajı* olarak görselleştirdiği doğru parçalarını bu görüşmede ekranda gördüğünde ‘4 birim x üzerinde, -4 birim y üzerinde ötele dersek...’ diyerek *koordinasyon* sürecine geçmiş ve bu süreçte *formül imajı* olarak ifade ettiği doğru parçalarının uzunluklarını ve *kinestetik imajı* olarak ifade ettiği yer değiştirmesini yine ekranda görmüş ve ‘Öteleme yoluyla bu elde ettiğimiz doğru eş doğrulardır...’ diyerek düşüncelerini desteklemiştir.

Tarık, ilk görüşmede *içselleştirme* sürecinde *somut imajı* olarak görselleştirdiği doğru parçaları için ekranda öteleme hareketini görerek ‘x ekseninde 4 birim y eksenine de -4 birim ötelesek...’ demiş ve bunun sonucunda *formül imajı* ile ifade ettiği doğru parçalarının uzunluklarının eşit olmasını yine ekranda görerek ‘Evet bir öteleme sonucu eşit doğrular elde edebildik, doğrular çakışmış oldu. Boyları yine aynı uzunlukta... Eşit.’ diyerek düşüncelerini desteklemiştir. Ayrıca çakışmış olduklarını söylemesi ise *dinamik imajını* göstermektedir.

Gönül, önceki görüşmede sahip olduğu *somut imajını* bilgisayar ekranında görmüş ve ‘x ekseni üzerinde 4 birim, y de -4 birim öteleyelim...’ diyerek öteleme hareketini uygulamıştır. Ayrıca ‘Buraya geldi... Çakıştı. Uzunluklarına bakabiliriz... Evet, uzunlukları eşit.’ diyerek önceki görüşmede *içselleştirme* sürecindeki *formül imajına* paralel olarak hareketin uzaklık koruduğu fikrini desteklemiştir. Bu aynı zamanda *dinamik imajını* da göstermektedir. Yine benzer şekilde ekranda doğru parçalarını program yardımıyla hareket ettirmiş ve ‘Evet... Aynılar... Çakışmış oldular.’ diyerek süreci tamamlamıştır. Böylece bu süreç önceki görüşmedeki düşüncelerine paralel olarak gelişmiş ve düşüncelerini desteklemiştir.

Filiz, ilk görüşmedeki *içselleştirme* sürecindeki *somut imajını* bilgisayar ekranında görmüş, ‘AB parçasını CD ye yani A, C ye gelecek B de D ye gelecek şekilde yapalım... Öteleme hareketiyle yani.’ diyerek düşündüğü öteleme hareketini *dinamik imajı* ile ifade etmiştir. Ekranda *koordinasyon* sırasında *kinestetik imajı* olarak eliyle birim birim sayarak öteleme vektörünü elde etmiş ve bunu ‘4 birim x ekseninde,... Bakalım 1,2,3,4 buraya geliyor. y de 1,2,3 yine 4 birim ama ters yönde, doğru o zaman -4. x üzerinde 4 y üzerinde -4 dersek...’ şeklinde ifade etmiştir (Şekil 4.2.3). Önceki görüşmede *formül imajı* ile ifade ettiği uzaklık kavramını burada görerek ‘Uzunlukları

da aynı evet. eş... eş doğru parçalardır.’ şeklinde belirtmiş ve düşüncelerini desteklemiştir.

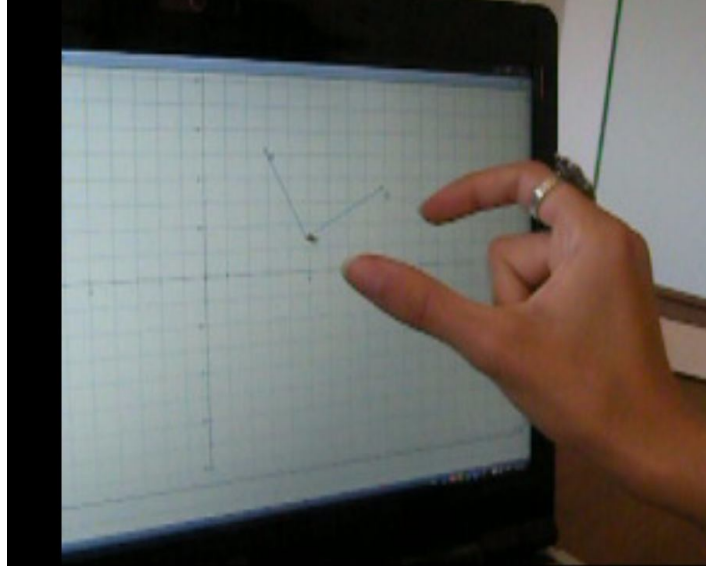


Şekil 4.2.3. Filiz’in Soyutlamadaki 2. Durum Görüntüsü

3. Durum. Katılımcılar 3. durumda verilen doğru parçalarını bilgisayar ekranında oluşturmuşlar ve *somut imajlarını* ekranda görerek desteklemişlerdir. Özge, *kinestetik* imajını bu durumda da kullanarak ekran üzerinde doğru parçalarını elleriyle döndürmüştür. Katılımcılar, bilgisayar programı yardımıyla görselleştirilen doğru parçalarının dönme hareketini ve özelliklerini incelemişler, ayrıca başka doğru parçaları içinde inceleyerek düşüncelerini desteklemişlerdir.

Özge, ilk görüşmede sahip olduğu *somut imajını* bilgisayar ekranında oluşturmuş ve ‘Şimdi bu öteleme değil. Sonuçta öteleme olsa belli bir yerden kaydırma olurdu. Bu 90 derece dönmedir... Orijin etrafında dönecek. 90 derece... Evet... Çakıştılar.’ diyerek hem *dinamik imajını* ifade etmiş hem de önceki görüşmede *formül imajı* ve *kinestetik imajı* ile belirttiği düşüncelerini burada görmüş ve desteklemiştir. Özge ayrıca başka doğru parçaları için de dönme hareketini bilgisayar programında yaptırmış ve bunları inceleme fırsatı bulmuştur. Bunu yaparken yine ekranda *kinestetik imajı* olarak parmakları ile doğru parçalarını döndürmüş ve hareketi kavramaya

çalışmıştır (Şekil 4.2.4). ‘Uzunluklar korundu... Aynılar...’ diyerek süreci tamamlamıştır.



Şekil 4.2.4. Özge’nin Soyutlamadaki 3. Durum Görüntüsü

Mert, önceki görüşmede sahip olduğu *somut imajını* bilgisayarda görmüş ve ‘Eş doğrulardır diye düşünüyorum... Dönmeyle elde ettim.’ demiştir. *Koordinasyon* sürecinde *kinestetik imajı* ile döndürdüğü ve *formül imajı* ile uzunluklarını hesapladığı doğru parçalarını burada bilgisayar programı ile incelemiş ve ‘Büyükliklerine bakalım... Evet... Orijine göre çevirdik 90 derecelik açıyla... Açığı ölçelim... 90 derece... Eş doğrular oluyor...’ demiştir. Ayrıca Mert başka doğru parçaları için de hareketleri incelemiş ve düşüncelerini desteklemiştir.

Tarık, önceki görüşmede sadece *somut imajını* kullanmış ve dönüşümü elde etmiştir. Bu görüşmede sahip olduğu *somut imajını* ekranda görmüş ve ‘Aynı doğru parçaları oldular... Uzunlukları da aynı...’ demiştir. Tarık ayrıca başka doğru parçalarını bilgisayar programı ile döndürmeyi denemiş ve hareketlerini incelemiştir. Doğru parçalarının uzunluklarını görmüş ‘Bir döndürme eksenini belirledikten sonra mesela döndüreceğimiz doğru parçasının herhangi bir noktasını aldığımız zaman yani döndürmeyi o eksen etrafında yaptığımızda elde edeceğimiz doğru parçası kendisine

dönüşmüş oluyor yani aynı, eş bir doğru parçasına dönüştü.’ demiş ve *dinamik imajını* belirterek süreci tamamlamıştır.

Gönül, ilk görüşmede sahip olduğu *somut imajını* burada bilgisayar ekranında oluşturmuş, ve *kinestetik imajı* olarak elleriyle dönme hareketini yapmak yerine program yardımıyla hareketi görmüştür. Benzer şekilde *formül imajı* ile hesaplamak yerine yine program yardımıyla ‘Uzunlukları aynı’ demiştir. Ayrıca başka doğru parçaları için de dönme hareketini incelemiş ve ‘Noktaları şöyle alalım... Şimdi bu doğru parçasını bu nokta etrafında kaç derece döndürelim... 90 derece olsun. Evet... Uzunluklarına bakalım. Aynı. Eş doğru parçalarıdır diye düşünüyorum.’ diyerek düşüncelerini desteklemiştir.

Filiz, önceki görüşmede verilen doğru parçaları için sahip olduğu *somut imajı* burada da görsel şekilde incelemiş, ‘OA yı 90 derece döndürerek OB yi elde edebiliriz, tersine yine OB den de OA elde edebiliriz.’ demiştir. *Koordinasyon* sırasında *kinestetik* olarak elleriyle gösterdiği hareketin bilgisayarda oluşturulmuşunu ve *formül imajı* ile elde ettiği uzunluk değerlerini burada görmüş ve bunu ‘Uzunluklarına da bakalım... Aynı evet. Eş doğru parçalarıdır.’ diyerek belirtmiştir. Düşüncelerinin başka doğru parçaları içinde geçerli olduğunu farkederek ‘Evet. Bu iki doğru parçasının uzunluklarının eşit olduğunu görebiliyorum. Hareket ettirsem doğru parçasını... Evet diğeri de aynen değişiyor. Yani uzunluk aynı kalıyor. Açıya baksam... Evet açı 45 derece açı da korundu. Yani eşler evet.’ diyerek hem *dinamik imajını* ifade etmiş hem de düşüncelerini desteklemiştir.

4. Durum. Katılımcılar 4. durumda verilen üçgenleri bilgisayar programı yardımıyla ekranında oluşturmuşlar ve *somut imajlarını* ekranda görerek desteklemişlerdir. Önceki görüşmede Özge, Tarık ve Filiz *formül imajlarını* kullanmamış ve kendi görselleştirdikleri çizimlere göre eşlik kavramını yorumlamışlardır. Bu görüşmede, görselleştirilen üçgenlerin dönme hareketini ve özelliklerini incelemişler, ayrıca başka üçgenler için de inceleyerek düşüncelerini desteklemişlerdir.

Özge, bu görüşmede önceki görüşmede verilen üçgenleri bilgisayar ortamında gördüğü zaman sahip olduğu *somut imajını* desteklemiş ve ‘O merkezli bir dönme yaptığımız zaman 90 derecelik... Dönme hareketi ile dönüşebilir.’ demiştir. İlk görüşmede *koordinasyon* sırasında *kinestetik imajı* şeklinde eliyle yaptığı dönme hareketini ve *formül imajıyla* ifade ettiği dönme denklemlerini burada bilgisayar programı sayesinde görsel olarak incelemiş ve ‘Dönme sonucunda aynı üçgeni elde ederiz. Eş üçgenler olur.’ diyerek düşüncelerini tamamlamıştır. Ayrıca başka üçgenler için başka dönüşümleri inceleme fırsatı bulmuş ‘Bu iki üçgeni kıyaslarsam. Uzunluklarına bakarsam... AC uzunluğu ile... AB uzunluğuyla... CD uzunluğuyla bakarsam... Evet, eşit.’ diyerek bu üçgenlerin kenar uzunluklarını kıyaslayabilmiştir. ‘ABC üçgeninin alanına bakarsam. Evet. Diğerine bakalım... Eşit alanlı. Açısına bakalım. Evet... Diğer açılar için aynı şeyi söyleyebilir miyiz. Evet...’ diyerek alan ve açılarını da inceleme fırsatı bulmuş ve süreci tamamlamıştır.

Mert, ilk görüşmedeki düşüncelerine paralel düşüncelere sahip olmuştur. *Koordinasyon* sırasındaki *somut imajını* bilgisayar ortamında görerek desteklemiş ve *kinestetik imajı* olarak ifade ettiği hareketi ve *formül imajı* olarak gösterdiği dönme denklemlerini bu süreçte bilgisayarda görerek desteklemiştir. Bu düşüncelerini farklı üçgenler ve hareketler için de görme fırsatı bulmuş ve üçgenle dönüşümü olan diğer üçgeni kıyaslayarak ‘İlk önce uzaklıklar aynı olmalı. Kontrol edelim. AC uzaklığına bakalım... AC ve BC. Evet yan yana getirelim aynı olduğunu görüyoruz. Diğerlerine de bakalım... Evet uzaklık aynı... Açıları da aynı. Alanları da aynı. Çevresi için de aynı diyebilirim...’ diyerek *dinamik imajını* tamamlayarak süreci bitirmiştir.

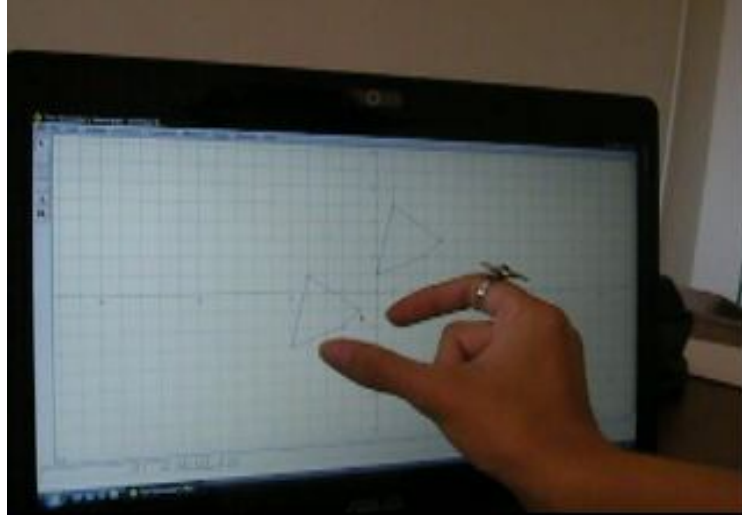
Tarik, önceki görüşmede *koordinasyon* sırasında ifade ettiği *kinestetik imajını* ve *somut imajını* destekleyici düşüncelere sahip olmuştur. Bunu ‘seçtiğimiz üçgenin orijin merkezinde yani merkezi orijin olan noktada 90 derece döndürürsek bunlar aynı üçgenler olurlar.’ şeklinde belirtmiştir. Ayrıca verilen görselleştirme üzerinde üçgenleri karşılaştırma fırsatı bulmuş ve ‘Bütün karşılıklı kenarların uzunlukları eşit. Bir de açılar da aynı... Alanları da birbirine eşit. Çevreleri de eşit.’ demiştir. Bu düşüncelerini oluşturduğu farklı üçgenler üzerinde de incelemiş ve benzer düşüncelere sahip olmuştur.

Gönül, ilk görüşmedeki sahip olduğu *somut imajını* ekranda görselleştirilmiş şekilde görmüş ve *koordinasyon* sırasında *kinestetik imajı* ve *formül imajı* şeklinde

belirttiği düşüncelerini burada desteklemiştir. ‘Uzunluktan mesela AO ile OB aynı, ölçelim... Evet. Üçgenin çevre uzunluğuna bakabiliriz... Aynı... Alana bakabiliriz, açılarına bakabiliriz. Evet açıları da aynı... Bu iki üçgen eşit.’ diyerek süreci tamamlamıştır.

Filiz, önceki görüşmede ifade ettiği *somut imajını* bu görüşmede ekranda görmüş ve *koordinasyon* sırasında *kinestetik imajı* ile belirttiği dönme hareketini burada bilgisayar yardımıyla görmüştür. Ayrıca ‘Şu anda görsel olarak görüyorum... Uzunluklarına bakalım. Evet, uzunluklarına baktığımız zaman eşit olduğunu görüyorum. Alanları eşit. Açıları için bakalım, açıları eşit. Eş üçgenler diyebiliriz.’ diyerek verilen üçgenin ve döndürülmüşünün özelliklerini inceleme fırsatı bulmuştur. Filiz benzer incelemeyi ‘Herhangi bir düzlemde her hangi bir yerde üç tane nokta alalım... Bir de merkez belirleyelim her hangi bir yerde.’ diyerek rastgele oluşturduğu üçgenler için de görmüş ve ‘Eşit olduğunu görüyorum...’ diyerek süreci tamamlamıştır.

5. Durum. Özge, bu görüşmede, ilk görüşmede verilen dörtgenler için sahip olduğu *somut imajını* bilgisayar programı ile verilen görselleştirme ile desteklemiştir. Öncelikle ekran üzerinde *koordinasyon* sırasında *kinestetik* olarak parmaklarıyla öteleme hareketini yapmış, daha sonra program yardımıyla öteleme hareketini uygulamış ve ‘Şekiller çakıştı.’ demiştir (Şekil 4.2.5). Bu aynı zamanda *dinamik imajını* da göstermektedir. Ayrıca program yardımıyla dörtgenlerin özelliklerini incelemiş, *formül imajı* ile ifade ettiği düşüncelerini burada desteklemiş ve ‘Bu iki dörtgen ötelenmesi sonucu elde edildiği için özellikleri korunuyor...’ demiştir. Özge benzer şekilde program yardımıyla kendi oluşturduğu dörtgen için de hareketleri oluşturmuş ve özellikleri incelemiştir.



Şekil 4.2.5. Özge'nin Soyutlamadaki 5. Durum Görüntüsü

Mert, bu görüşmede önceki görüşmedeki düşüncelerine paralel olarak *koordinasyon* sürecinde sahip olduğu *somut imajını* görsel olarak incelemiş ve *kinestetik* olarak, oluşan şekli birim birim sayarak hareketi yorumlamıştır. Ayrıca hareketin sonucunda oluşan dörtgenlerin özelliklerini inceleyerek eş oldukları yorumunu yapmıştır. Bu düşüncelerini başka dörtgen ve başka hareket için de desteklemiştir.

Tarık, önceki görüşmede *koordinasyon* sırasında sadece *somut imajını* kullanmıştır. Bu görüşmede bu imajını destekler şekilde oluşturulan görselleştirmeyi incelemiş ve kenar uzunluğu, açı, alan gibi kavramların korunduğunu görmüştür. Bunu kendi oluşturduğu farklı bir dörtgen içinde incelemiş ve *formül imajını* tamamlayarak düşüncelerini desteklemiştir.

Gönül, bu görüşmede önceki görüşmede verilen dörtgenle ilgili sahip olduğu *somut imajını* destekler görselleştirmeyi görmüş ve hareket sonucunda ‘Az önceki şeklimiz bakalım kontrol edelim ilk şeklimizle ikinci şeklimiz çakıştı.’ demiş ve *dinamik imajını* ifade etmiştir. *Formül imajı* ile belirttiği düşüncelerini bilgisayar yardımıyla görmüş ve ‘Kenar uzunluklarına bakabiliriz... Evet eşit. Açılara bakabiliriz... Evet eşit. Başka alanlarına bakabiliriz. Alanları da aynı.’ demiştir. Ayrıca bilgisayar programı yardımıyla kendisinin oluşturduğu dörtgenin dönme hareketi için ‘Yani o ilk şekil ikinci şekille bire bir olarak resmedilmiş oldu. Bir nokta aldığımızda o

nokta diğer noktaya 45 derecelik bir açıyla dönmüş oldu. Eş olmuş oldu birebir olarak resmetmiş oldu her bir noktayı doğru parçasını...' diyerek düşüncelerini desteklemiştir. Burada yapılan görselleştirme için ise 'Bu düzlemin herhangi bir yerinde dörtgen. Az buçuk üçgen de rahat bir şekilde görmüştük 90 derece dönmüştü. Elimizde de rahatlıkla bunu yapabiliyorduk, görebiliyorduk da burada 45 derece dönme daha zor hem şekilden hem açıdan dolayı.' yorumunu yapmıştır. Ayrıca herhangi bir dörtgen için hareketi ve özelliklerini görmek ile ilgili 'Düşünmem zor olurdu yani göremezdim... Düzlemde herhangi bir yerde özelliği olmayan bir dörtgen düşündüğün zaman çok daha zor olurdu gerçekten bu şekil kolaylık sağlıyor...' demiştir. Bu da görselleştirmenin düşüncelerini ifade etmede önemini göstermektedir.

Filiz, ilk görüşmedeki *somut imajını* burada ekranda gördüğünde düşüncelerini desteklemiştir. Oluşan görselleştirme üzerinde dörtgenlerin özelliklerini inceleme fırsatı bulmuş (Şekil 4.2.6) ve 'Öteleme yardımıyla birinden diğerini elde edebiliriz. Kenar uzunlukları birbirine eşit mi bakalım... evet. Alanları eşit olmalı... Alanlarına bakalım diğer dörtgenin alanına bakalım Eşitler. Açılarına bakalım evet. Eş dörtgenler.' diyerek *formül imajını* da destekleyerek oluşturduğu farklı dörtgenler içinde düşüncelerini tamamlamıştır.



Şekil 4.2.6. Filiz'in Soyutlamadaki 5. Durum Görüntüsü

6. Durum. Özge, ilk görüşmede *koordinasyon* sırasında ifade ettiği *somut imajını* ekranda da benzer şekilde görmüş ve bu anlamda düşüncelerini desteklemiştir. Ayrıca *kinestetik imajı* olarak elleri ile yaptığı öteleme hareketini bilgisayar yardımı ile oluşturmuş, böylece ilk görüşmedeki düşüncelerini hareketli olarak görerek desteklemiş ve bunu ‘...ötelenmesi ile seçilen nokta da ötelendi. Hareket ettirince diğerinde de aynı şekilde hareket ediyor.’ şeklinde belirtmiştir. ‘Saklanmış olan çemberle üst üste çakıştı.’ diyerek de *dinamik imajından* bahsetmektedir. Özge ilk görüşmedeki kendi görselleştirmesi üzerinde yaptığı çevrelerinin ve alanlarının eşit olması yorumunu bu görüşmede bilgisayarın hesaplayıp göstermesi ile tamamlamıştır. Özge ayrıca kendi oluşturduğu farklı çemberler için farklı hareketler sonucu dönüşümleri inceleme fırsatı bulmuştur.

Mert, ilk görüşmedeki düşüncelerine paralel şekilde bu görüşmede bilgisayarca oluşturulan görselleştirme ile *somut imajını* desteklemiş ve kendisinin *kinestetik* olarak elleri ile yaptığı hareketi bilgisayar tarafından yapılmışını incelemiştir. ‘Aynı olduklarını görüyorum...’ diyerek süreci tamamlamış ve farklı çemberler için de hareketi inceleme imkanı bulmuştur.

Tarık, ilk görüşmede görselleştirme yapmamış ve *somut imajından* bahsetmemiştir. Bu görüşmede düşüncelerinin bilgisayarca görselleştirilmesi doğru düşüncelere sahip olduğu fikrini kuvvetlendirmiştir. Ayrıca *formül imajı* olarak belirttiği düşüncelerini burada bilgisayarca hesaplanan değerlerle de desteklemiştir. ‘Bunlar aynı çemberler, çakışmış çemberler...’ diyerek *dinamik imajını* ifade etmektedir. Tarık başka çemberler için hareketleri ve özelliklerini inceleme imkanı bulmuştur.

Gönül bu görüşmede ilk görüşmedeki imajlarını destekleyen görselleştirmeleri incelemiştir. ‘Evet çakıştılar’ diyerek *dinamik imajından* bahsetmekte, ‘Önce yarıçaplarına bakarım.. Evet. Eşit. Alanlarına bakabilirim... Alanları seçersek evet. Alanlar aynı. Çevresine bakalım. Evet aynı...’ diyerek ise *formül imajını* desteklemektedir. Gönül, bilgisayar ortamında farklı çemberlere farklı hareketleri uygulayarak çemberlerin özelliklerini görerek *somut imajını* tamamlayarak süreci bitirmiştir.

Filiz de benzer şekilde düşüncelerini görselleştirme imkanı bulmuş ve ilk görüşmede kullandığı *somut imajını* desteklemiştir. ‘Şu noktası şuraya gelecek...’ diyerek *kinestetik imajını* kullanmakta, ‘Her iki şekilde aynı şekilde değişiyor... Aynı çember. C noktam çemberin çevresini dolandırken C’ noktam da diğer çemberin çevresini aynı şekilde dolandırıyor...’ derken *dinamik imajından* bahsetmektedir. ‘Kontrol edelim çevrelerini, alanlarını, yarıçapları. Birbirlerine eş. İki çember birbirine eş bütün değerleri aynı.’ diyerek sahip olduğu *formül imajını* desteklemektedir.

4.2.1.3. 3.Aşama

7. Durum. Özge, *izomorfik görselleştirme* için önceki görüşmede zorlanmış ve *homomorfik görselleştirme* yapmış ancak bu durum düşüncelerini açıklama konusunda kendisinin emin olamamasına neden olmuştur. Bu görüşmede bilgisayar tarafından verilen görselleştirme ve elde edilen kürelerin özelliklerini inceleme fırsatı Özge’nin düşüncelerinden emin olmasını sağlamıştır. Bunu ‘Evet üst üste geldiler... Çakışıyor. Her şeyleri birbirine eşit.’ şeklinde ifade etmiş ve ‘Gözümde canlandırmak kolaylaştı. Gözümde canlandıramamıştım. O yüzden de net konuşamamıştım... Evet çakıştılar ve eşler...’ diyerek belirtmiştir. Bu hem *somut* hem de *dinamik imajını* desteklemesine yardımcı olmuştur.

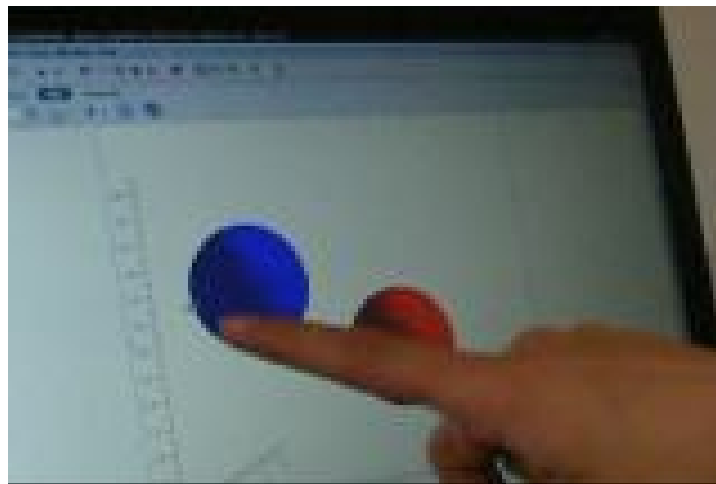
Mert, önceki görüşmede kürelerin hareketini yorumlarken *kinestetik* olarak üç parmağı ile havada baz vektörlerini oluşturmuş ve *izomorfik* şekilde düşüncelerini açıklamıştır. Bu görüşmede kendisine verilen bilgisayar ortamındaki görselleştirme bu düşüncelerini tamamlar nitelikte olmuştur. Kendisinin havada anlatmaya çalıştığı hareketi bilgisayarda görmesi sonucu ve ‘Evet üst üste geldiler. Tamamen aynılar... Eş olduklarını diyebiliriz.’ diyerek hem *somut* hem de *dinamik imajını* desteklemiş, öteleme hareketinin özelliklerini inceleyerek ise *formül imajını* desteklemiştir.

Tarık, önceki görüşmede herhangi bir görselleştirme kullanmamış ve sadece verilen kürelerin merkezlerindeki değişimi *formül imajı* ile elde etmiş ve *dinamik imajı* ile kürelerin eş olacakları yorumunu yapmıştır. Bu görüşmede ise görsel şekilde verilen kürelerin konumunu ve özelliklerini inceleyerek *formül imajını* desteklemiş ve

‘Çakışmış olur... Evet. Eş kürelerdir.’ diyerek *dinamik imajını* tamamlamıştır. Böylece bilgisayar ortamında verilen görselleştirme ve kürelerin özelliklerini inceleme imkanı Tarık’ın cebirsel olarak elde ettiği hareketi görsel olarak incelemesine yardımcı olmuştur.

Gönül, önceki görüşmede *somut imajı* olarak *izomorfik* şekilde görselleştirme yapmış ve hareketi *kinestetik* olarak açıklamaya çalışmıştır. Ayrıca *formül imajını* kullanarak da kürelerin alan ve hacimlerinin eşit olacağı yorumunu yapmıştır. Bu aşamada önceki görüşme ile ilgili olarak ‘Bayağı zorlanmıştık’ yorumunu yapmış, verilen görselleştirmeyi incelediğinde ilk görüşmedeki düşüncelerine paralel görüntüleri görmüştür. Böylece verilen kürelin özelliklerini inceleyip uzaydaki konumlarını görmüş ve hareketli şekilde kürelerin üst üste gelmesi sonucu ‘Evet çakıştılar. O zaman eştir’ demiştir. Verilen görselleştirme ile düşüncelerini desteklemiş ve emin olmuştur.

Filiz ise, önceki görüşmede *izomorfik* olarak görselleştirme zor gelmiş ve düşüncelerini *homomorfik* olarak görselleştirmeye çalışmıştır. Bu nedenle *somut imajını* ifade ederken sadece verilen kürelerin merkezleri ve yarıçapları üzerine hareketin ne olacağı yorumunu yapmış ve yarıçapları eşit olduğu için eş küreler olacağını belirtmiştir. Bu görüşmede ise verilen görselleştirmede kürelerin konumlarını, özelliklerini hareketlerini incelemiş ve bunlar düşüncelerinden emin olmasını sağlamıştır (Şekil 4.2.7). Sonuçta ‘Şöyle çevirelim... Üst üste geliyorlar... Çakıştılar. Eşler.’ diyerek düşüncelerini tamamlamıştır.



Şekil 4.2.7. Filiz’in Soyutlamadaki 7. Durum Görüntüsü

8. Durum. Özge ilk görüşmede önce *homomorfik* görselleştirme yapmış daha sonra hareketi yorumlayabilmek için *içselleştirme* sürecinde *izomorfik* görselleştirmeye çalışmış ancak tamamlayamamıştır. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme Özge'nin eksik kalan düşüncelerini zihninde canlandırmasına yardımcı olmuş ve *somut imajını* tamamlamıştır. Özge verilen silindir parçalarının uzaydaki konumlarını incelemiş ve 'Birbirleri ile aynı. Yandan bakarsak... Evet çakıştılar... Eştir diyebiliriz. Aynı' diyerek *dinamik imajını* destekleyerek süreci bitirmiştir.

Mert, ilk görüşmedeki *izomorfik* şekilde ortamdaki hazır bulunan somutlaştırılmış üç boyutlu uzayın baz vektörlerini ve silindir parçasını kullanarak yaptığı görselleştirmeyi bu görüşmede bilgisayar tarafından görerek *somut imajını* desteklemiş, ekrandaki silindir parçalarının konumlarını inceleyerek 'x in üzerine gelmiş y si ve z si aynı. x ekseninde döndürmüştüz 180 derecelik bir açıyla dönme yapmışız' diyerek ise *dinamik imajını* desteklemiştir. 'Aynı uzunlukta olduklarını görüyorum, aynı yarıçapta olduklarını... Aynı silindirler, eş silindirler...' diyerek süreci tamamlamıştır.

Tarik, önceki görüşmede görselleştirme kullanmamış ve *formül imajı* ile cebirsel olarak dönüşümü elde ederek yorum yapmıştır. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme ile hareketi görsel olarak incelemiş ve silindir parçalarını hareket ettirerek *dinamik imajını* desteklemiştir. 'Hacimleri de aynı yükseklikleri de aynı. Bunlar eş silindirlerdir.' diyerek *formül imajını* tamamlayarak süreci bitirmiştir.

Gönül, ilk görüşmede kendisi *izomorfik* olarak *somut imajını* görselleştirmiş ve *kinestetik* olarak hareketi açıklamıştır. Bu görüşmede verilen görselleştirme hem *somut imajını* desteklemiş hem de ekranda bilgisayar programı tarafından cisimlerin hareket ettirilebiliyor olması *dinamik imajını* desteklemiştir. 'Çakışmış oldu' diyerek bunu belirtmiştir. *Formül imajı* ile belirttiği alan ve hacim kavramlarını ise yine ekranda cisimleri üst üste getirerek görmesi ile tamamlamıştır.

Filiz ise, ilk görüşmede *somut imajını* taslak olarak çizmek adına *homomorfik* görselleştirme yapmıştır. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme ile bu düşüncelerini tamamlamıştır. 'x eksenini için 4 birim... Aralarında 4 birim fark var. Şuradaki merkeze gelir... 4 birim kadar kaydırduğımızda şurası şuraya gelir' diyerek *dinamik imajını* ifade

etmiş, ayrıca hareketi ve silindir parçalarını inceleme imkanı bularak ‘Biri diğerini kapattı. Örtüştü. Yani eş biri diğerine.’ demiş ve süreci tamamlamıştır.

9. Durum. Özge ilk görüşmede piramitlerin ötelenmesi ile ilgili yorumunu yaparken görselleştirme kullanmamış ve *koordinasyon* sürecinde *formül imajı* ile hareketi yorumlayıp piramitlerin alan ve hacimlerinin eşit olduğundan bahsetmiştir. Bu görüşmede verilen görselleştirme ile piramitleri ve özelliklerini görsel olarak inceleyerek öteleme hareketini görmüş ve *dinamik imajını* da tamamlamıştır. Böylece düşüncelerini desteklemiştir.

Mert ilk görüşmede verilen piramitleri *izomorfik* şekilde görselleştirmeye çalışmış ancak yanlış çizim yapması sonucunda yorumu da yanlış olmuştur. Ancak bu görüşmede verilen görselleştirme ile yanlışını fark etmiş ve ‘Önceki görüşmemizde herhalde yanlış çizdiğim için öyle oldu. O yüzden de eş değiller demiştim. Ama burada bakıyorum... Taban uzunlukları eşit. Yükseklikler de eşit zaten. O zaman alanları da hacimleri de eşit olur. Aynı piramitler. Eş piramitler. Yanlış çizdiğim için öyle oldu.’ demiştir.

Tarık ilk görüşmede görselleştirme kullanmamış, *koordinasyon* sürecinde düşüncelerini *formül imajı* ile ifade etmiş ve piramitlerin öteleme sonucu eş oldukları yorumunu yapmıştır. Bu süreçte verilen görselleştirme ile düşüncelerini desteklemiştir.

Gönül, ilk görüşmede şekilleri tam ifade edemeyeceği düşüncesi ile *somut imajını* anlatmak adına *homomorfik* görselleştirme yapmış ve piramitleri *kinestetik imajı* ile elleri ile taşıyıp *formül imajı* ile de bileşenlerini incelemiştir. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme onun düşüncelerini tamamlamış ve ‘Şimdi görsel açıdan daha iyi oldu tabi, daha iyi akılda kalıyor... Burada gerçekten birebir şeklin çakıştığını gördük. Orada kağıtta düşündüğümüzde birebir olmuyordu. Ama burada birebir görsel açıdan daha iyi oldu ve silindiri, küreyi çizmek zor oluyordu o yüzden burada daha güzel olmuş oldu hakikaten. Daha anlaşılır oldu.’ şeklinde belirtmiştir.

Filiz, ilk görüşmede *izomorfik* şekilde görselleştirdiği *somut imajını kinestetik imajı* ile hareket ettirerek ifade etmiştir. Bu görüşmede düşüncelerini görsel olarak

desteklemiş ve sonuçta ‘Ötelemeler ve dönmeler alanları hacimleri uzunlukları değerleri korur. Bunu iki boyutlu yapmıştık. Üç boyutlularda da olduğunu gördük.’ genellemesini yapmıştır.

4.2.1.4. 4.Aşama

Özge bu aşamaya kadar olan süreçlere göre bu düşüncelerini tüm cisimler için ‘genelleştirebiliriz...’ demiştir. Ayrıca, ilk görüşme ile bu görüşmeyi kıyaslarken düşünceleri için ‘Değiştirdi...’ demiş ve şöyle devam etmiştir:

‘Geçen görüşmemizde çizimler yapmaya çalışmıştım ama küreyi gözümün önünde canlandıramamıştım. Öyle bir sıkıntı vardı yani şeklini tam yerine koyup da yerleştirememiştim. Ama şimdi gözümün önünde çizilmiş bir şeyler olunca problemler çok rahat ortadan kalktı. Yani gördüğüm zaman düşündüklerimi daha iyi oturtabildim. Bazı şeyler havada kalıyordu açıkçası. Yani görünce insan daha bir emin oluyor.’

Özge’nin düşünceleri hakkındaki yaptığı bu açıklamalar görselleştirmenin düşünmelerindeki önemini anlatmaktadır. Bu anlamda verilen görselleştirmeler Özge için eksik olan tarafların kapatılmasında yardımcı olmuş ve ilerleyen aşamaların birbiri ile koordinasyonunda bazen gerekli hale gelmiştir.

Mert bu aşamaya kadar olan düşüncelerini genelleştirerek ‘Yani şekli hareket ettirmek cisimlerin özelliklerini değiştirmiyor diye düşünüyorum. Yani bir şekli hareket ettirirsem yine aynı üçgen veya şekil olacak öteleme veya dönme yapmam düzeni değiştirmiyor. Uzaklıkları alanları açıları değişmiyor. Ötelemenin miktarı dönme açısının miktarı önemli değil sonuçta. Bir hareket yardımıyla bir cismi diğer bir cisme döndürebiliriz, öteleyebiliriz yani dönüştürebiliriz...’ diye eklemiştir. Mert ayrıca ilk görüşme ve bu görüşme ile ilgili düşüncelerini anlatırken şöyle devam etmiştir:

‘İlk görüşmemizde verilenleri burada görmek daha iyi oldu. Çünkü inceleme fırsatı buldum ve çoğu şeyi doğru düşündüğümü ama eksik kaldığını fark ettim. Mesela şimdi piramit için ben yanlış düşünmüştüm. Ama burada doğrusunu gördüm. Yani iyi oldu açıkçası. Daha iyi oturdu yani...’

Mert'in bu düşünceleri de görselleştirmenin eksik olan tarafları kapatmadaki önemini anlatmaktadır.

Tarık tüm bu aşamaların sonucunda '... Eğer iki geometrik şeklin tüm değerleri aynıysa yani alanları açıları uzunlukları aynıysa bunların uzaydaki yerleri önemli değildir. Bunlar bir şekilde birbirlerine eş duruma gelirler. Yani bunları birbirlerine dönüştürebiliriz. Her şeyleri de aynı olur. Eş duruma gelirler bir hareketle diğerine dönüştürülebilirler.' yorumunu yapmıştır. Tarık bu görüşmede verilen görselleştirmeler için ise 'Böyle daha açıklayıcı oldu.' ifadesini kullanmıştır.

Gönül için görselleştirme eksik kalan tarafları görmede ve düşünceleri desteklemede önemli olmuştur. Ayrıca bilgisayar programları için şöyle demiştir:

Gönül: *Evet kesinlikle çok hoşuma gitti. Çalışırken ya da ileride ders verirken göstersem mi diye düşündüm bile yani doğru parçalarını, çemberleri, küreleri falan... Güzel yani ve gerçekten öğrenciler açısından daha eğlenceli ve görsel olduğu için havada kalmaz diye düşünüyorum.*

G: *Senin için peki havada kalan bazı şeyler oturdu mu?*

Gönül: *Evet oturdu gerçekten.*

Filiz önceki görüşmede düşünceleri açıklarken zorlanması ve bu görüşmede cisimleri görsel olarak inceleyip yorumlaması üzerine 'Bilgisayarda daha da rahat gördük. Kağıt üzerinde görsel olarak görmeye çalıştım ama çiziminde zorlandım. Ama burada çok rahat. Net bir şekilde görülüyor.' demiştir.

Kısaca katılımcıların önceki görüşmelerde kullandığı görsel imajlar olan somut, kinestetik, formül ve dinamik imajlar, verilen görselleştirmeler sonucu bazen desteklenmiş, bazen de eksik kalan tarafları tamamlanmıştır.

4.2.2. Genelleme Süreci ile İlgili Bulgular ve Yorumlar

4.2.2.1. 1. Aşama

1. Durum. Bu görüşmede bilgisayarda Geometers' Sketchpad programı ile karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen oluşturulmuş ve kenarların orta noktaları birleştirilip oluşan şekil incelenmiştir. Oluşan şeklin paralelliğini anlamak için doğru parçalarının eğimlerine bakılmış ve kenar uzunlukları ölçülmüştür. Ayrıca dörtgenin köşegeni ile orta noktaların oluşturduğu oranlar incelenmiştir.

Özge önceki görüşmede dörtgenin karşılıklı kenarların orta noktalarını *objeler* olarak ele alıp *somut imajını izomorfik* şekilde görselleştirmiş ve Thales teoremi ile buradaki durumu *formül imajı* ile *ilişkilendirerek* ifade etmiştir. Bu görüşmede ise görselleştirilen şekil üzerinde eğimlerini ve kenar uzunluklarını incelemiş ayrıca oluşan şekli hareket ettirip dörtgenin paralelliği değişmeden içinde oluşacak dörtgenin karşılıklı kenarlarının eşitliklerini ve paralelliklerini görmüştür. Bunu 'değerlerine bağlı olarak değiştiğini görüyorum yine eğimler değişmeden uzunluklar zaten birbirine bağlı olarak aynı yani eşit değişiyor. Ama sonuçta eşit oluyor şekil ne olursa olsun yani ne kadar değişirse değişsin orta noktalarından oluşturulan dörtgenin kenarları birbirine paralel ve eşittir kalıyor. Her dörtgen için diyebiliriz. Tabi karşılıklı kenarları paralel olan.' diyerek açıklamıştır. Böylece *somut imajını* görselleştirme ile desteklemiş ve *formül imajını* ise programdaki hesaplamalarla doğrulamıştır.

Mert, önceki görüşmede karşılıklı kenarları paralel olan dörtgeni çizip kenarların orta noktalarını objeler olarak düşünüp *somut imajını izomorfik* şekilde görselleştirmiş ve bu şekil üzerinde oranları *formül imajı* ile ifade etmiştir. Bu görüşmede bilgisayarda karşılıklı kenarları paralel olan dörtgeni ve kenar orta noktalarının oluşturduğu şeklin karşılıklı kenar uzunluklarını ve paralelliklerini inceleyerek düşüncelerini desteklemiştir. Şekli hareket ettirerek değişimi görmüş ve 'Evet. Karşılıklı uzunlukların aynı olduğunu... Paralelliğin de aynı olduğunu görüyorum. Yani ilk şeklin paralelliğini bozmadan değiştirince oluşacak içerdeki şekli karşılıklı kenarları hem eşit uzunlukta hem de eğimleri eşit. Yani paraleller. Karşılıklı kenarları paralelse yeterli oluyor.'

diyerek süreci tamamlamıştır. Böylece görselleştirme ile oluşan şekil Mert'in *somut imajına* katkıda bulunmuş ve *formül imajı* ile ifade etmek istediği oranları doğrulamıştır.

Tarık, önceki görüşmede benzer şekilde *somut imajını izomorfik* görselleştirme ile ifade etmiş ve objeler olarak kenarlarda oluşan dörtgenleri *ilişkilendirmiştir*. Bu görüşmede verilen görselleştirme *somut imajını* destekler şekilde olmuş ve görselleştirme üzerinde hareket ettirerek gördüğü değişim üzerine 'Eğimler eşit şekilde değişiyor. Yani dışarıdakinin karşılıklı kenarları hep paralel. Yine içerde oluşan şekil bir paralel kenar kalıyor.' diyerek süreci tamamlamıştır.

Gönül, önceki görüşmede *objeleri ilişkilendirme* sürecinde *somut imajı* olarak *izomorfik* şekilde görselleştirdiği çizimi yapmış, bunun üzerinde *durum ile ilişkilendirme* sürecinde *formül imajı* ile benzerlik oranlarını, *kinestetik imajı* ile de kenarların uzunluklarını ölçerek ifade etmiştir. Bu görüşmede ise düşüncelerini verilen görselleştirme ile desteklemiş, şekli hareket ettirerek değişimi görmüş ve 'Dıştaki dörtgenin kenarlarının eğimleri aynı kalıp uzunlukları değişiyor. Ama içtekinin eğimleri de uzunlukları da eşit kalıyor... Kenarlarının orta noktaları birleştirdiğimizde yeni oluşan şeklin karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir.' demiştir. Böylece süreci düşüncelerini tamamlayarak bitirmiştir.

Filiz, önceki görüşmede objeleri *izomorfik* şekilde görselleştirerek *somut imajını* ifade etmiş, *formül imajı* ile de *durum ilişkilendirmesi* yapmıştır. Bu görüşmede düşüncelerine paralel olan görselleştirmeyi incelemiş ve karşılıklı kenarlarının hem paralel hem de eşit olacağını görmüştür. Verilen görselleştirmeyi hareket ettirdiğinde ise 'Evet... AB ve CD ile BC ve AD nin eşit olarak değişiyor. Ama içeride EF ve GH ile FG ve EH ın hem eğimleri hem de uzunlukları eşit olarak değişiyor... Kenarları paralel olan herhangi bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarını aldığımızda oluşan dörtgenlerin karşılıklı kenarları paralel ve uzunluklarının birbirine eşit oluyor.' yorumunu yaparak düşüncelerini destekler şekilde süreci tamamlamıştır.

2. Durum. Bu görüşmede program kullanılarak karşılıklı kenarları paralel olan bir altıgen oluşturulmuş, bu altıgenin köşelerinde bulunan üçgenlerin ağırlık merkezleri bulunup ağırlık merkezlerinin oluşturduğu şekil incelenmiştir. Oluşan şeklin karşılıklı kenarlarının paralelliği görülmüş ve eşitliğini görmek için uzunlukları hesaplanmıştır. Ayrıca altıgenin köşegeni çizilip bu köşegene göre kenar orta nokta ve ağırlık merkezinin oluşturduğu doğru parçası üzerindeki oranlar incelenmiştir.

Özge önceki görüşmede, *izomorfik* şekilde görselleştirdiği *somut imajı* üzerinde düşünmüş ve ilk aşama ile *aynı çözümü araştırırken, formül imajını* kullanmıştır. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme *somut imajını* destekler şekilde verilmiştir. Özge oluşan altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel ve eşit olduğunu görmüş ve şeklin hareket ettirilmesi ile değişimi incelemiştir. Bunun üzerine ‘Şekli değiştiriyoruz ama sonuçta uzunluklar yani kenarların uzunluğu değişiyor ama paralellik değişmiyor. Yani karşılıklı kenarlar paralel ama uzunlukları eşit değil...’ demiş ve ‘Karşılıklı kenarları eşit kalarak değişiyor... Paralellik de benzer şekilde aynı olacak şekilde değişiyor.’ diye eklemiştir. Bu incelemesini ise ‘Altıgen için eğer karşılıklı kenarları paralelse içinde oluşan altıgeninde karşılıklı kenarları paralel ve aynı zamanda eşittir diyebiliriz.’ diye yorumlamıştır. Özge ayrıca köşegenin oluşturduğu oran için ise ‘ $1/3$ ü verdi. Evet doğru düşünmüşüm...’ diyerek *formül imajını* desteklemiş ve süreci tamamlamıştır.

Mert önceki görüşmede *somut imajını izomorfik* şekilde görselleştirmiş ve bunu dörtgenle *aynı ilişkiyi araştırma* adına yapmıştır. Ayrıca dörtgendeki *aynı çözümü araştırırken* ise *formül imajını* ve *kinestetik imajını* kullanmıştır. Bu görüşmede öncelikle verilen görselleştirme ile sahip olduğu *somut imajı* desteklemiş ve eğimlerle uzunluk değerlerini inceleyerek karşılıklı kenarların paralelliğini eşit uzunlukta olduğunu görmüştür. Mert, verilen görselleştirmeyi hareket ettirerek ise ‘Karşılıklı uzunlukların aynı olduğunu görüyorum eğimlerin de aynı olduğunu görüyorum. Yani dışarıdaki altıgenin uzunlukları eşit olmadan değişirken eğimleri karşılıklı eşit şekilde değişiyor... İçeridekinin hem eğimleri hem de uzunlukları eşit şekilde değişiyor.’ yorumunu yapmıştır. Ayrıca köşegenin çizilmesiyle elde edilen oranlar üzerine sahip olduğu *formül imajını* destekleyerek ‘Evet... $1/3$.’ demiştir.

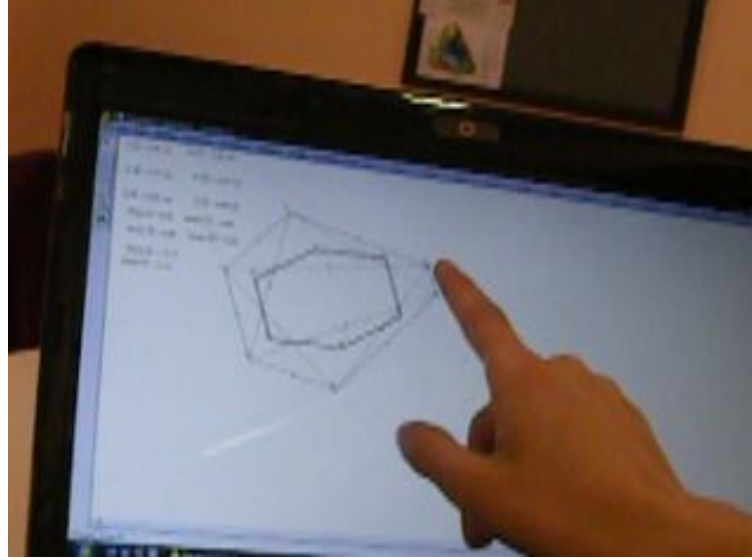
Tarık önceki görüşmede verilen altıgen hakkındaki *somut imajını izomorfik* olarak görselleştirmeye çalışmış ve bunun üzerinde yorumlar yapmıştır. Hiçbir cebirsel

işlem yapmaması ve sadece *aynı ilişkiyi arama* adına önceki aşamaya dayalı konuşması Tarık'ın düşüncelerinden emin olamamasına neden olmuştur. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme üzerinde karşılıklı kenarların paralel ve eşit olacağını görmesi düşüncelerinden emin olmasına neden olmuştur. Ayrıca verilen görselleştirmeyi hareket ettirerek eğim ve uzunluktaki değişimi görmesi düşüncelerinin eksikliklerini kapatmada etkili olmuştur. Tarık bunu 'Karşılıklı kenarların paralel olması durumunda içte oluşan altıgende, köşeleri üçgenlerin ağırlık merkezleri olan bu altıgenin karşılıklı kenarları paralel oluyor ve üstelik uzunlukları da hep aynı kalıyor.' şeklinde belirtmiştir. Verilen görselleştirme üzerinde köşegenin ortaya çıkardığı oranları görmüş ve '1/3 çıktı.' diyerek fark edemediği tarafları da tamamlama imkanı bulmuştur.

Gönül önceki görüşmede *izomorfik* olarak görselleştirdiği *somut imajı* üzerinde düşünürken *aynı ilişki araştırmış* ve önceki aşama ile *aynı çözümü araştırırken kinestetik imajı* ile kenarların paralellliğini *formül imajı* ile de oranlarını düşünmeye çalışmıştır. Bu görüşmede ise ilk görüşmede karşılıklı kenarları paralel olan altıgenin çiziminde zorlandığını ve bu görüşmede ise nasıl çizileceğini daha iyi anladığını ifade ederek 'Sıkıntı olmuştu altıgeni çizerken... Düzgün altıgen çizmeye alışık olduğumuz için yani zorlanmıştım. Gerçi sonra kenarlarını uzattım gibi bir şey. Aslında bu yaptığımız çok mantıklı ona göre paralelleri almak.' demiştir. Verilen görselleştirme Gönül'ün ilk görüşmedeki düşüncelerini destekler şekilde olmuş ve içeride oluşan altıgenin karşılıklı kenarlarının hem paralel hem de eşit olacağını görmüştür. Ayrıca verilen görselleştirmeyi hareket ettirerek bu durumun sadece paralellik şartına bağlı olduğunu görmüş ve 'O zaman bunu sadece karşılıklı kenarları paralel olan herhangi bir altıgen için yapabilirim. Yani uzunluklarının eşit olması gerekmiyor.' demiştir. Elde edilecek oranları da görerek 'Evet... Oranı 1/3 çıktı ikisinin de ...' demiştir.

Filiz önceki görüşmede *izomorfik* şekilde ifade ettiği *somut imajı* üzerine dörtgenle *aynı ilişkiyi aramaya* çalışmış ve *formül imajı* ile *aynı çözümü araştırmıştır*. Bu görüşmede ise *somut imajını* destekler düşüncelere sahip olmuş ve 'Karşılıklı kenarların paralel olduğunu görüyoruz eğimlerinden dolayı, başta uzunlukların eşit olduğunu gördük...' demiştir. Ayrıca hareket ettirdiği görselleştirme ile 'Bozulmuyor o zaman benim istediğim şart sağlanıyor... Yani paralel olması yeterli oluyor. Uzunluğunun eşit olması gerekmiyor.' diyerek istenen şartı elde etmiştir (Şekil 4.2.8). Önceki görüşmede *çözümü araştırırken formül imajı* ile oranları elde etmeye çalışmış

ancak tam bir sonuca ulaşamamıştır. Bu görüşmede bilgisayar yardımıyla hesaplanan oranları görerek ‘Oranlar aynı. İkisi de $1/3$... Herhalde $1/2$ bulmuştum. Ama benzer şeyi düşünmeye çalışmışım. Tam olarak elde edememişim. Şimdi anlamış oldum.’ diyerek eksik olan tarafını tamamlamıştır.

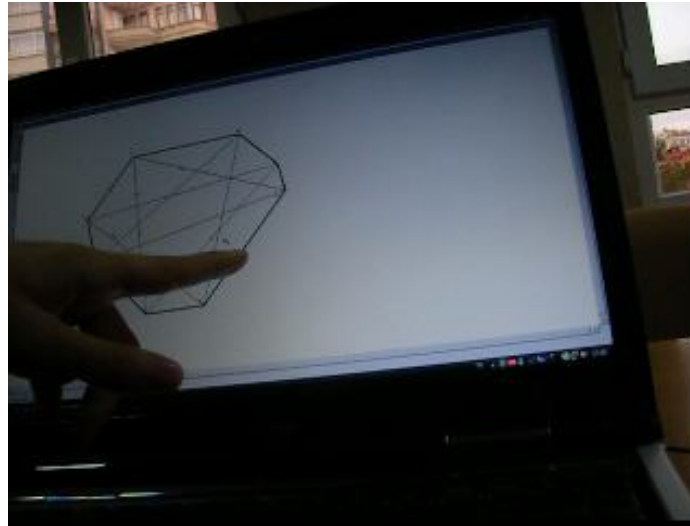


Şekil 4.2.8. Filiz’in Genellemedeki 2. Durum Görüntüsü

3. Durum. Bu görüşmede katılımcılarla beraber bilgisayar programı yardımıyla karşılıklı kenarları paralel olan bir sekizgen oluşturulmuştur. Bu sekizgenin köşelerinde oluşan dörtgenlerin ağırlık merkezleri alınıp, bunların oluşturduğu sekizgen incelenmiş ve oluşan sekizgenin karşılıklı kenarlarının hem paralel hem de eşit olduğu görülmüştür. Bunun için karşılıklı kenar uzunlukları ölçülüp uzunluklarına ve eğimleri ölçülüp paralelliklerine bakılmıştır. Ayrıca oluşturulan şekil üzerinde hareketli olarak kenar uzunluklarının ve paralelliklerinin değişimi incelenmiş ve çizilen köşegenin ağırlık merkezi ile oluşturduğu oranlar hesaplanmıştır.

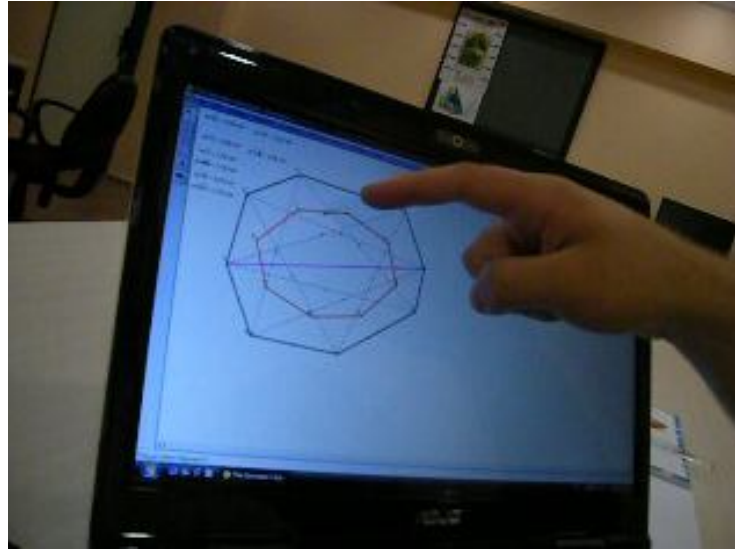
Özge önceki görüşmede *somut imajı* olarak karşılıklı kenarları paralel olan sekizgeni oluşturmakta oldukça zorlanmış ve sonunda *izomorfik* görselleştirme ile bunu yapmıştır. Oluşturduğu şekil üzerinde düşünürken altıgende düşündükleri ile *aynı*

ilişkiyi araştırırken kinestetik imajını kullanmış ve aynı çözümü araştırırken ise formül imajını kullanmıştır. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme *somut imajını* tamamlamış olup bunu şöyle ifade etmiştir: ‘Buradaki gibi dört tane kenarı çizmek ve daha sonra diğer kenarları buna paralel olacak gibi çizmek kolaymış... Ben bunları oluştururken zorlanmıştım... Şekli çizerken şekli göz önünde canlandıramayınca hiç bir şey yapamayıp düşünemiyorum...’ (Şekil 4.2.9). Özge oluşturulan sekizgeni hareket ettirip uzunluk ve eğimdeki değişimi gördüğünde ise ‘Aynı altıgendeki gibi baştaki sekizgenin karşılıklı olarak uzunlukları değişiyor ama eğimleri karşılıklı olarak eşit şekilde kalıyor. İçeride oluşan sekizgenin ise karşılıklı kenarlarının uzunlukları hem eşit şekilde hem de eğimleri eşit şekilde değişiyor. Yani paralel ve eşit oluyor.’ demiştir. Bu durum ise onun *kinestetik imajını* desteklemiş ve sezgisel şekilde yaptığı yorumları tamamlar nitelikte olmuştur. Sekizgendeki oranları hesapladığında ise *formül imajını* destekleyerek önceki görüşmede eksik kalan oranlarla ilgili düşüncelerini tamamlamıştır. Özge önceki görüşmede eksik kalan düşünceleri nedeni ile emin olamadığı tarafları verilen görselleştirme ile tamamlama fırsatı bulmuş ve ‘Aslında emin olamamıştım. Çünkü hem tam çizememiş hem de oranları tam görememişim. Öyle olunca da sezgisel olarak eşit ve paralel olmalı herhalde demiştim... Evet artık sekizgen konusunda eminim.’ demiştir.



Şekil 4.2.9. Övgü’nün Genellemedeki 3. Durum Görüntüsü

Mert önceki görüşmede *izomorfik* şekilde görselleştirdiği *somut imajı* üzerinde altıgendeki düşünceleri ile *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışmış ve bunun üzerinde *aynı çözümü* incelemiştir. Mert altıgendekine benzer bir oran elde etmeye çalışmış ancak bu oranı görememiştir. Bu nedenle düşüncelerinden emin olmadan eşit uzunluk ve paralellik ile ilgili yorumlar yapmıştır. Bu görüşmede ise, öncelikle verilen görselleştirme ile *somut imajını* desteklemiş ve içeride oluşan sekizgenin karşılıklı kenar uzunluklarını ve eğimlerini görmüştür. Daha sonra şekli hareket ettirmek istemiş ve verilen görselleştirmede değişimi görerek ‘Yine uzunluklarının da aynı olduklarını, karşılıklı kenarlarının aynı olduklarını görüyorum. Paralelliklerin de değişmediğini görüyorum. Yani şekilden bağımsız sadece tek başına karşılıklı kenarların aynı olduğunun olması gerektiğini görüyorum.’ demiştir (Şekil 4.2.10). Önceki durumlarda *aynı ilişkiyi görme* konusunda eksik kalan düşüncelerini tamamlamasına rağmen bu durumlarla *aynı çözümü araştırma* sürecindeki tereddütleri üzerine ‘Bir tane üçgen oluşturmak istemiştin paralel olduğunu söyleyebilmek için. Çünkü oran bulmak istemiştin. Buradan bir ağırlık merkezi falan olsaydı.’ demiştir. Bunun üzerine verilen görselleştirmede köşegen oluşturulmuş ve ağırlık merkezi ile birleştirildiğinde yeni sekizgenin köşegeninden geçtiğini görülmüştür. Mert, elde edilen oranların eşitliği üzerine ‘İkisinin de 4 çıkıyor.’ diyerek düşüncelerinden emin olarak süreci tamamlamıştır.



Şekil 4.2.10. Mert’in Genellemedeki 3.Durum Görüntüsü

Tarık önceki görüşmede sekizgen için yorum yaparken altıgene geri dönmüş ve altıgenden emin olmak için yeniden görselleştirme yapmış ve *somut imajı* üzerinde düşüncelerinden emin olduktan sonra *aynı ilişkiyi araştırma* adına sekizgen için de benzer durumun geçerli olacağı yorumunu yapmıştır. Sekizgen için herhangi bir görselleştirmeye veya cebirsel işlem yapmaya gerek duymamıştır. Bu görüşmede ise düşüncelerinden emin olduğunu ifade etmiştir. Verilen görselleştirmeyi incelediğinde ‘Sekizgen için de aynı sonuç geçerli oldu. Yani ilk sekizgenin karşılıklı kenarların eğimleri eşit kalacak şekilde uzunluklarını değiştirsek bile ikinci sekizgenin karşılıklı kenarların hem eğimleri hem uzunlukları eşit kalacak şekilde değişiyor.’ diyerek *somut imajını* desteklemiştir. Tarık önceki görüşmede sekizgenle ilgili herhangi bir işlem yapmadığı için oluşacak oranı elde etmemiştir. Bu görüşmede ise oluşan oranı görmüş ve ‘Evet. Demek ki oranı $1/4$ ü veriyormuş.’ demiştir.

Gönül önceki görüşmede altıgenle *aynı ilişkiyi araştırırken somut imajını izomorfik* şekilde görselleştirmiş, altıgenle *aynı çözümü araştırırken* oranları incelemek için *formül imajını* kullanmış ve paralellikleri incelerken ise *kinestetik imajını* kullanmıştır. Bu görüşmede verilen görselleştirme ile *somut imajını* desteklemiş ve şekli hareket ettirerek ‘Evet, başlangıçta aldığımız karşılıklı kenarları paralel olan herhangi bir sekizgenin köşelerinde oluşturduğumuz dörtgenlerin ağırlık merkezlerinin geometrik yeri olan oluşturmuş şekil yine bir dörtgen oluyor ancak ilkinden daha özel olup karşılıklı kenarları eşit ve paralel olmuş oldu. Yani az öncekinde sadece paralellik vardı bunun yanı sıra eşitlik de söz konusu olmuş oldu.’ demiştir. Daha sonra çizilen köşegenle oluşturulan oranları gördüğünde ise ‘Oranları eşit oldu. $1/4$. Nereden oran alamam gerektiğini anladım. Düşünmeye çok uğraştım ama karıştırdım. Burada kolayca belli oluyor.’ diyerek *çözüm için araştırdığı* ve eksik kaldığı düşüncelerini tamamlamış ve böylece hem *formül imajını* hem de *kinestetik imajını* tamamlayarak desteklemiştir.

Filiz önceki görüşmede verilenlerle ilgili *somut imajını izomorfik* şekilde görselleştirmiş, bunun üzerinde altıgenle ilgili *aynı ilişkiyi araştırmaya* çalışmıştır. Daha sonra karşılıklı kenarların paralelliği ve eşitliği üzerinde düşünürken altıgende yaptığı *aynı çözümü araştırmaya* çalışmış ve bu sırada oranlarla ilgili *formül imajını* kullanmıştır. Filiz tam bir oran elde etmekte zorlandığı için karşılıklı kenarların eşitliği ve paralellikinden emin olamamıştır. Bu görüşmede ise verilen görselleştirme ile öncelikle karşılıklı kenarların eşit olduğunu ve eğimlerinin eşit olması sebebiyle de

paralel olduğunu görmüş ve görüntüyü hareket ettirerek ‘Yine sekizgenimizin kenarları aynı oranda değişiyor, paralellikleri değişmiyor yani uzunlukları da karşılıklı olarak aynı oranda değişiyor. Paralelliklerini korumak şartıyla uzunlukları değişebiliyor şu anda onu görebiliyoruz ama uzunluklar farklı. Emin olmak için yeterli.’ demiştir. Bu da Filiz’in *somut imajını* desteklemiştir. Ayrıca, *formül imajı* ile elde etmeye çalıştığı önceki duruma benzer çözüm için bilgisayarda oranları görmesi ile ‘Oranlar birbirine eşit çıktı. $\frac{1}{4}$ ü verdi...’ demiş ve böylece eksik kalan düşüncelerini tamamlaması açısından görselleştirme önemli olmuştur.

4.2.2.2. 2.Aşama

4. Durum. Bu görüşmede, katılımcıların önceki durumlarda inceledikleri düşüncelerinin ongen veya onikigen içinde geçerli olup olmadığı görüşülmüş ve önceki görüşmeye göre nelerin değiştiği anlaşılmaya çalışılmıştır.

Özge, önceki durumlarda konuşulan düşüncelerin ongen veya onikigende de geçerli olup olmaması konusunda ‘Genelleyerek düşünürsem demiştim hani dörtgen için yaptık altıgen için yaptık sekizgen için de doğru olur diye düşünmüştüm ama içimde yine bir şüphe vardı. Şimdi o şüphe kalmadı. Artık sonuçta gördüm. Sekizgen için eminsem ongen için de ben bunu genelleştirebilirim diye düşünüyorum.’ demiştir. Bilgisayarda bunu görmek isteyip istememesine ise ‘Gerek yok herhalde. Artık eminim. Yani ongen veya onikigen içinde bunu söyleyebilirim.’ diyerek cevap vermiştir. Böylece Özge’ye verilen görselleştirme ve Özge’nin bunları incelemesi sonucu, birçok emin olamadığı kısımlar için artık emin olmuş ve zihninde eksik kalan tarafları tamamlamıştır.

Mert, önceki görüşmede ongen ve onikigen için bunları söyleyebileceğinden bahsetmiş ancak bu görüşmede ‘Ama sekizgen için çok da emin değildim. O yüzden eğer sekizgen için yaparsak ongen veya onikigen için de yapabiliriz diye düşünmüştüm.’ diyerek aslında çok da emin olamadığını dile getirmiştir. Bu görüşmede önceki aşamalarda verilen görselleştirmeler Mert’in de düşüncelerinden emin olmasına

neden olmuştur ve bunu ‘Yani sekizgen için emin olduğum için diğerleri için de bunu kesin söyleyebilirim.’ diye ifade etmiştir.

Tarık, önceki görüşmede ongen ve onikigen için bunların geçerli olacağını söylemiştir. Bu görüşmede ise verilen görselleştirmelerin düşüncelerinde ne değiştirdiği ile ilgili yorumu ise ‘Öyle olacağını düşünüyordum ama burada da görmüş olduk.’ şeklinde olmuştur.

Gönül, önceki görüşmede sekizgen için emin olmadığından ongen ve onikigen içinde benzer şeylerin geçerli olacağını düşünmesine rağmen bundan emin olmadığından bahsetmiştir. Bu görüşmede ise ‘Sekizgen için emin olamadığımdan dolayı ongen veya onikigen için söyleyebileceğimizden emin değilim açıkçası. Ama şimdi sekizgen için gördüm, oluyor. O zaman ongen veya onikigen içinde söyleyebiliriz.’ diyerek verilen görselleştirmelerin düşüncelerine etkisini anlatmaktadır.

Filiz ise bu durumu ‘Aslında öyle olacağını düşünüyordum zaten ama görmek daha iyi oldu tabii.’ şeklinde açıklamıştır.

4.2.2.3. 3. Aşama

Bu aşamada katılımcıların önceki aşamalara göre fark ettikleri şeyler konuşulmuştur.

Özge, ‘Kenar sayısı çift sayıda olanlar için 4 ve 4 ten fazla oluşacak olan şekilde, karşılıklı kenarları paralel olacak ve eşit olma gibi bir koşulu yok... Oluşacak olan çokgen de ilk çizdiğimiz çokgen kadar sayıda kenarı olacak, ondan farklı olarak karşılıklı kenarları eşit çıkacak ama aynı zamanda paralel olacak.’ diyerek *genel bir prensibe* ulaşmış ve önceki görüşmeden farklı olarak elde edilen oranlar için ‘O zaman $2n$ kenarlı çokgendeki oran için $1/n$ diyebiliriz.’ demiştir. Böylece görselleştirme Özge’nin genelleştirme sürecinde *genel bir prensip* elde etmesinde destekleyici, *belirleme ve açıklama* sürecinde ise tamamlayıcı olmuştur.

Mert, ‘Bunu kenar sayısı çift sayı olan çokgenler için söyleyebiliriz.’ diyerek *genel prensibi* elde etmiş ve elde edilen oranlar için ise ‘Sekizgende yarısı kadar çıkmıştı, altıgende yarısı kadar çıkmıştı. Dörtgende yarısı 2 oranında olmuştu. O zaman çokgenlere $2n$ li diyelim. Oran n kadar oluyor. Benzerlik oranı için de $1/n$ diyebilirim.’ diyerek ilk görüşmeden farklı olan bir *belirleme ve açıklama* yapmıştır.

Tarık, ‘Karşılıklı kenarlarından bahsettiğimiz için kenar sayısı çift olan çokgenler için bunu söyleyebiliriz.’ diyerek ilk görüşmedeki *genel prensibine* benzer bir prensip elde etmiş ve yine ilk görüşmedeki düşüncelerinden farklı bir *belirleme ve açıklama* yaparak ‘Altıgende $1/3$, sekizgende $1/4$ çıktı. O zaman $2n$ dersek $1/n$ olur.’ demiştir.

Gönül, önceki görüşmede *genel bir prensip* elde etmeye çalışmış ancak düşüncelerinden emin olmadığı için bunu kesin ifade edememiştir. Bu görüşmede ise düşüncelerinden emin olacak şekilde ‘Kenar uzunlukları çift sayı olan çokgenler için bakmış olduk. Kenar sayısı çift olan çokgenlerden oluşturduğumuz şekillerin ağırlık merkezlerini birleştirirsek, elde edilen şekillerin karşılıklı kenarları eşit ve birbirine paralel olur.’ diyerek *genel bir prensip* elde etmiş ve elde edilen oran için ise ‘Oran da altıgende $1/3$, sekizgende $1/4$. Yani $2n$ de $1/n$. diyerek farklı bir *belirleme ve açıklama* ile süreci tamamlamıştır.

Filiz de benzer şekilde ‘Kenar sayısının çift olması kaydıyla çokgenlerimizde paralellik şartı sadece yani uzunlukların eşit olması hiç önemli değil paralel olması kaydıyla bunların ağırlık merkezlerinin geometrik yerinde oluşan çokgenler için kenar uzunlukları karşılıklı olarak birbirine eşit ve paraleldir.’ diyerek elde ettiği *genel prensibi*, ‘Dörtgende $1/2$, altıgende $1/3$, sekizgende $1/4$. O zaman yarısı kadar. Yani $2n$ dersek $1/n$ diyebiliriz.’ şeklindeki ifadesi ile *belirleme ve açıklama* yaparak tamamlamıştır.

Bu aşama için genel olarak bakıldığında görselleştirme katılımcıların *genel bir prensip elde etmelerine* çoğu zaman yardımcı olmuştur. Katılımcıların hepsi ilk görüşmeden farklı olarak oranlarla ilgili farklı bir *belirleme ve açıklama* yapmışlardır.

Böylece verilen görselleştirmelerin genelleme sürecine anlamlı etkileri olmuştur. Katılımcılar, ilk görüşmede özellikle aşamalar ilerlediğinde kavramlar arasında ilişki kurmakta zorlanmışlardır. Kağıt üzerinde cebirsel işlemlerle *genel bir prensip* elde etmeye çalışmışlar ancak oranların elde edilmesi sırasında düşüncelerinden emin olamamışlardır. Bu görüşmede verilen görselleştirmeler hem cebirsel işlemlerini tamamlamış ve hem de görsel imajlarını olumlu yönde etkilemiştir.

V. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölüm, verilerin analizinden elde edilen bulgulara dayalı olarak ortaya çıkan sonuçlara ve sonuçlardan elde edilen önerilere ayrılmıştır.

5.1. Sonuçlar

Matematiksel düşünme süreci matematiksel kavramları tanımayı ve bu kavramlarla ilişkiler kurmayı gerektirmektedir. Bu nedenle, kurulacak ilişkiyi temsil eden doğru bir zihinsel imajın bu kavramların anlaşılmasında önemli bir paya sahip olduğunu araştırmalar vurgulamaktadır. Bu imajların anlamlı şekilde kurgulanmasında farklı bir bakış olarak görülebilecek olan görselleştirme ile ilgili yapılacak bir çalışmanın matematik eğitime önemli bir katkı sağlayacağı düşünüldüğünden bu araştırma soyutlama ve genellemede görselleştirmeyi konu edinmiştir.

Bu bağlamda, matematiksel soyutlama ve genelleme süreçleri içinde görselleştirmeyi incelemek amacıyla bir devlet üniversitesinde öğrenim gören ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına bu süreçler yaşatılmış ve buna paralel olarak ‘matematiksel genelleme ve soyutlama yaparken görselleştirmenin yeri ve etkileri nelerdir?’ sorusuna cevap aranmaya çalışılmıştır. Bunun için,

1. Matematiksel soyutlamada hangi görselleştirmelere başvurulmaktadır?
2. Matematiksel soyutlamada sahip olunan görsel imajlar nelerdir?
3. Matematiksel genellemede hangi görselleştirmelere başvurulmaktadır?
4. Matematiksel genellemede sahip olunan görsel imajlar nelerdir?
5. Matematiksel soyutlamada görselleştirmenin etkileri nelerdir?
6. Matematiksel genellemede görselleştirmenin etkileri nelerdir?

şeklindeki alt problemler cevaplandırılmaya çalışılmıştır.

2008-2009 Eğitim ve Öğretim yılı Güz döneminde 4. sınıf matematik öğretmen adaylarının almış oldukları bir derste, dönem süresince yapılan gözlemler sonucu gerçekleştirilen pilot çalışma neticesinde seçilen 5 kişi ile yürütülen bu çalışmada nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması (case study) yapılmıştır. Konu hakkında derinlemesine bilgi edinilmek amacıyla ders içi gözlemler ve yarı yapılandırılmış görüşmeler olmak üzere iki farklı veri toplama metodu kullanılmış ve verilerin analizi sonucunda şu sonuçlar elde edilmiştir:

5.1.1. Matematiksel Soyutlamada Hangi Görselleştirmelere Başvurulmaktadır?

Bu araştırmada, matematik öğretmen adaylarının soyutlama süreçlerinin farklı yerlerinde farklı görselleştirmeleri kullandıkları ve bunu sıkça yaptıkları ancak bazı aşamalarda görselleştirmeye gerek duymadıkları tespit edilmiştir.

Presmeg, bir kişinin matematiksel görselliğini, kişinin hem görsel hem görsel olmayan metotlarla çözülebilen matematiksel problemleri denerken görsel metotları kullanmayı tercih etmesi şeklinde ifade etmiştir. Ona göre görsellemeciler, matematiksel problemlerin çözümüyle uğraşırken görsel metotları kullanmayı tercih eden kişilerdir. Görsellemeçi olmayanlar ise bu problemleri çözerken görsel metotları kullanmayı tercih etmeyen kişilerdir (1986). Bu araştırmadaki katılımcılar genel olarak soyutlama süreci içinde görselleştirmeye yer verdiklerinden, görsellemeçi grubuna dahil edilebilirler.

Katılımcılar tarafından kullanılan görselleştirme çeşitlerinin tamamına yakını izomorfik ve homomorfik görselleştirmeler olmuş, yapılan 48 görselleştirmenin 35'inin izomorfik, 13'ünün homomorfik görselleştirme olduğu ortaya çıkmıştır. İzomorfik görselleştirmelerin 17'si içselleştirme, 13'ü koordinasyon ve 5'i başlangıç objesi ele alındığı sırada ortaya çıkarken, homomorfik görselleştirmelerin 9'una başlangıç objesinin ele alındığı zamanlarda, 2'sine koordinasyon ve 2'sine de içselleştirme süreçlerinde yer verilmiştir (bkz. EK 13-15).

Piaget'ye göre soyutlama, eylemlerin genel koordinasyonu olarak adlandırılmış ve kaynağının özne olduğundan ve içsel şekilde gerçekleştiğinden bahsetmiştir (1980). Yapılan araştırmada görselleştirmelere koordinasyon ve içselleştirme sırasında sıkça yer verilmesi sonucu, görselleştirmenin soyutlamanın gerçekleşmesi sürecinde önemli bir yeri olduğunu göstermektedir.

Araştırmada katılımcıların bu sürece kimi zaman görselleştirmeleri kullanarak ve kimi zaman cebirsel işlemlerle katıldıkları görülmüştür. Böylece sürece bütünsel olarak bakıldığında, katılımcılar sonraki aşamaya adım adım yaklaşırken kullandıkları görselleştirmeleri cebirsel işlemlerle desteklemeye ihtiyaç duymuşlar ve cebirsel şekilde elde ettikleri sonuçları ise görselleştirme ile yorumlamaya çalışmışlardır. Düşünmenin bu iki şekli arasındaki ilişki ve hareket, süreç içinde oldukça sıkı şekilde gerçekleşmiştir. Her bir aşama içinde o aşamaya ait soyutlanacak kavrama ulaşım yaklaştıkça, bu iki düşünme şekli kendi içinde sentezleşmiştir. Ortaya çıkan bu sonuç, Zazkis ve arkadaşlarının VA (Görselleştirme-Analiz) modelinin (1996) soyutlama sürecinin gelişimini destekler nitelikte olduğunu vurgulamaktadır.

Yapılan araştırmada, katılımcılar süreç içinde kimi zaman cebirsel şekilde belirttikleri düşüncelerini görselleştirme kullanarak açıklama veya destekleme ihtiyacı hissetmişler, kimi zaman ise sezgisel şekilde hissettikleri durumları formal şekilde ifade etmede görselleştirmenin yardımına başvurmuşlardır. Ayrıca, formal çözümlemelerle kolayca atlanabilen kavramsal desteklerin yeniden ele alınıp toparlanmasında görselleştirmelerden fayda ummuşlardır. Ortaya çıkan bu sonuçlar, katılımcıların yaptıkları görselleştirmelerin kavramlar ve aralarındaki ilişkileri desteklemede önemli olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır. Ayrıca bu sonuçlar, Arcavi'nin (2003) görselleştirmenin güçlü bir tamamlayıcı rolü olduğu fikri ile örtüşmekte ve soyutlamadaki görselleştirmelerin tamamlayıcı olma rolünü de vurgulamaktadır.

Eisenberg ve Dreyfus (1989) görsellemeye genel bir yönelim olmasına rağmen bazı öğrencilerin görsellemeden hoşlanmadıkları ve algoritmaları kullanmayı tercih ettiklerini, bu isteksizliğin en temel sebeplerinden birisinin ise görsel düşünmenin öğrenciler üzerinde yüksek bilişsel bir gereksinim getirmesi olduğunu belirtmişlerdir. Yapılan araştırmada, katılımcılardan süreç içinde ihtiyaç hissettiği halde görselleştirme yapmakta zorlanan ve bu nedenle düşüncelerini sadece formal şekilde açıklamaya

Çalışanlar olmuştur. Ayrıca bu durum, katılımcının ilişkiler kurmasında eksik kalmasına ve bazen de çelişkide olmasına neden olmuştur. Ortaya çıkan bu sonuç, Eisenberg ve Dreyfus'un bahsettiğı fikir ile uyumaktadır.

Araştırmada katılımcılar görselleştirmelerini çoğunlukla kağıt üzerinde yapmışlardır. Bazıları izomorfik görselleştirmelerini oluştururken kareli kağıt kullanmayı tercih etmiştir. Ayrıca, düzgün çizim yapmak için cetvel ve renkli kalem kullanmayı tercih edenler de olmuştur. Bu durum bize katılımcıların izomorfik görselleştirmelerinde düzgün çizim yapmaya eğilim gösterdiklerini anlatmaktadır.

Araştırmada, katılımcılardan uzaydaki cisimlerin görselleştirilmesi sırasında ortamda hazır bulunan somut geometrik cisimlerden kullanan ve somut temsiller oluşturmak için kalemlerle modelleme yapıp düşüncelerini açıklayan olmuştur. Bazıları ise üç boyutlu cisimleri kağıt üzerinde görselleştirmişlerdir. Guzman (2002), objelerin mümkün somut temsillerle ilgili olduğu durumlarda kimilerinin soyut ilişkilerle ilgili daha etkili bir yaklaşım elde ederken manipölasyonlar kullandıklarını, kimilerinin ise matematiksel görselleştirmeler yaptıklarını söylemiştir. Bu araştırmada, Guzman'ın bahsettiğı şekilde hem manipölatif temsiller hem de görselleştirmeler soyutlama sürecinde kullanılmıştır. Ancak üç boyutlu cisimleri görselleştirme konusunda zorluk çekenler, cisimlerin zihinlerindeki yansımalarını tam olarak oluşturamamışlardır. Ortaya çıkan bu durum, soyutlama sürecinin yapılması sırasında kişinin süreci tamamlamasında görselleştirmelerin önemini göstermektedir.

Bu çalışmada soyutlama süreci içinde ortaya çıkan sonuçlardan birisi de bazı katılımcıların cebirsel işlemlerde ve formüllerdeki eksiklikleri olmuştur. Bu sonuç Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus'un (2002) soyutlama süreci için "soyutlama, çözümle uğraşan kişinin, kişisel geçmişine dayanır" şeklinde vurguları ile örtüşmektedir. Ayrıca çalışmada bu durumda olan katılımcıların, sürecin gelişimi içinde kavramlarla ilişkiler kurma adına görselleştirmelere yer vererek eksik kaldıkları tarafları tamamlamaya çalıştıkları da ortaya çıkmıştır.

Araştırmada soyutlama süreci içinde kullanılan görselleştirmelerin görsel olmayan metotlara göre daha fazla zaman aldığı görölmüştür. Diğer taraftan, görselleştirme kullanan katılımcılardan birkaçı analitik çözümler için gerekli bazı

önemli ve anahtar noktaları hatırlayamamışlardır. Ayrıca yanlış görselleştirme yapan katılımcılar, uygun olmayan ilişkilendirmeler yapmışlar ve bu durum süreci olumsuz yönde etkilemiştir. Görselleştirme adına ortaya çıkan bu zorluklar birer dezavantaj olarak düşünülebilir.

5.1.2. Matematiksel Soyutlama Sürecinde Ortaya Çıkan Görsel İmajlar Nelerdir?

Araştırmada katılımcılar soyutlama süreçlerinin farklı yerlerinde farklı görsel imajlara yer vermişlerdir. Aşamalar içinde görsel imaj kullanılmayan aşama bulunmamaktadır. Kullanılan görsel imajlar ise somut, dinamik, kinestetik ve formül imajlar olmuştur.

Ortaya çıkan 142 görsel imajın 40'ı somut, 38'i dinamik, 35'i kinestetik ve 29'u da formül imajıdır. Görsel imajların 112'si koordinasyon, 21'i içselleştirme, 5'i geri dönme, 3'ü başlangıç objesi ve 2'si enkapsülasyon süreçlerinde görülmüştür. Koordinasyon sürecinde en çok dinamik imaj, içselleştirme sürecinde ise somut imaj daha fazla kullanılmıştır (bkz. EK 14-16).

Yapılan görselleştirmelerle ilişkilendirildiğinde, katılımcılar içinde fazla görsel imaja sahip olanların, görselleştirmeye daha çok yer verdikleri belirlenmiştir.

Araştırmada sahip olunan somut imajlar genellikle kavramlarla ilgili zihinlerindeki resimleri anlatan görüntüler şeklinde ortaya çıkmıştır. Bu zihinsel görüntüler katılımcıların kimi zaman süreç içinde başlangıç objesini ele aldığı durumlarda, kimi zaman kavramın içselleştirilmesinde, çoğunlukla da yapılandırma içinde hareketlerin genel koordinasyonu sırasında görülmüştür. Somut imajlar katılımcıların görselleştirmelerinde önemli bir paya sahip olmuş ve kavramla ilgili net bir somut imaja sahip olanlar, görselleştirme konusunda daha başarılı olmuşlardır. Aksine net bir somut imaja sahip olmayanlar, sürece görselleştirme destekli devam etmek istediklerinde bu durum onların düşüncelerini ifade ederken zorlanmalarına neden olmuştur. Ayrıca, yanlış bir somut imaja sahip olduğunda ise bu durum katılımcının süreci yanlış değerlendirmesine sebep olmuştur.

Kullanılan dinamik imajlar süreç içindeki ilgili kavramların zihinsel hareketleri şeklindedir. Bu hareketler bir kavramı farklı kavramlarla ilişkilendirmek adına zihinsel olarak alıp yer değiştirme, taşıma şeklinde yapılmıştır. Çoğunlukla koordinasyon süreçleri içinde ortaya çıkan bu imajlar bazen kavramın içselleştirildiği durumlarda da görülmüştür.

Kinestetik imajlar, katılımcılar tarafından kavramla ilgili objeleri havada veya kağıt üzerinde parmak, el veya kol hareketleri şeklinde ortaya çıkmış, çoğunlukla koordinasyon sırasında gerçekleşmiştir.

Katılımcıların zihinlerinde canlandırdıkları formül imajları ise ağırlıklı olarak koordinasyon süreci içinde kavramlarla ilgili hareketlerin ilişkilendirilmesi sırasında ortaya çıkmıştır. Yer yer içselleştirme sürecinde de kullanılmış, bazen süreç içinde gerçekleşen geri dönmeler sırasında yer almıştır. Katılımcıların çoğu süreç içinde görselleştirme kullansalar bile düşüncelerini cebirsel olarak destekleme gereği hissettiklerinden, formül imajı konusunda eksik kalan katılımcılar için bu durum düşüncelerinden bazen emin olamamalarına neden olmuştur. Aksine, net bir formül imajına sahip olanlar ise görselleştirmelerini cebirsel olarak desteklediklerinden sürece daha emin şekilde devam etmişlerdir.

Soyutlama sürecini bütünsel olarak ele aldığımızda, süreç içindeki yapılanmaların hemen hemen her aşamasında katılımcıların görsel imajlara yer vermeleri dikkat çeken bir sonuç olmuştur. Bu durum, Fischbein (1987) ın ‘görsel bir imaj sadece bilgileri anlamlı yapılar olarak oluşturmakla kalmayıp aynı zamanda çözümün analitik gelişimine rehberlik etmede önemli bir faktör’ olması fikrini desteklemekte ve tamamlamaktadır.

Yapılan araştırmada katılımcıların genellikle somut ve dinamik imajlara sahip olmaları ve bunlara çoğunlukla koordinasyon süreci içinde yer vermeleri, görsel imajların soyutlama süreci içindeki yerini ve önemini vurgulamakta ve bu sonuç, Presmeg’in (1986) somut imajın görsel olmayan soyut moddaki durumların alternasyonunda etkili olduğu, dinamik imajın ise potansiyel olarak etkili olduğu fikriyle örtüşmektedir.

İhtiyaç duyduklarında kullanabilsinler diye ortamda hazır bulundurulan somut cisimlerin katılımcılarca kullanılması kişilerin zihinsel imajlarını oluşturmada Duval'ın (1998), görsel algılama ile ilgili olarak görmenin matematikteki zihinsel imajlar için tek başına bir kaynak olmadığı, fiziksel nesneleri hissetmenin (başka deyimle dokunmanın) de aynı zamanda zihinsel imajın yapılandırılmasında diğer bir kaynak olduğu fikrini destekler nitelikte olmuştur.

5.1.3. Matematiksel Genellemede Hangi Görselleştirmelere Başvurulmaktadır?

Bu çalışmada, katılımcıların genelleme sürecinin ilk üç aşamasında görselleştirmelere başvurdukları ortaya çıkmıştır. Son iki aşamada görselleştirmeye gerek duymadıkları gözlenmiştir. Genelleştirme seviyeleri dikkate alındığında görselleştirmeler 1. seviyedeki ilişkilendirme ve araştırma süreçlerinde görülmüştür.

Katılımcıların araştırma içinde kullandıkları görselleştirme çeşidi izomorfik görselleştirme olmuş ve bunları genelleme hareketleri adının birinci seviyesinde prosedürel aktiviteler olarak kullanmışlardır (bkz. EK 18-19). Ortaya çıkan 15 izomorfik görselleştirmenin 5'inin ilişkilendirme süreci içinde objeleri ilişkilendirirken ve 10'unun araştırma süreci içinde aynı ilişkiyi araştırırken olduğu görülmüştür (bkz. EK 21).

Genelleme süreci içinde katılımcılardan bazıları öncelikle sezgisel şekilde düşüncelerini açıklamışlar ancak daha sonra yaptıkları görselleştirme sonucunda bu düşüncelerinin yanlış olduğunun farkına varmışlardır. Bu durum Vinner'ın (1997) bazı durumlarda sezgisel şekildeki düşünmelerin bizi sadece yanlış şekilde yönlendireceği fikrini vurgulamakta, yanlış olan düşüncelerini görsel şekilde tamamlamaları ise süreç içinde görselleştirmenin önemini göstermektedir.

Genelleştirme adımlarının ikinci seviyesi olan genişletme sürecinde lokal genelleştirme yaparken katılımcılardan birisi gerek duymadığından, diğeri ise kendisine yapmak zor geldiğinden görselleştirme kullanmamışlardır. Zor geldiği için görselleştirme yapmayan katılımcı ise düşüncelerini cebirsel işlemlerle de desteklememiş ve bu durum düşüncelerinden emin olamamasına sebep olmuştur.

Genelleştirme adımlarının üçüncü seviyesinde olan refleksiyon genellemelerinde ise katılımcıların global genelleştirmeler yaparken görselleştirme kullanmaya gerek duymadıkları ortaya çıkmıştır.

Katılımcılar görselleştirmelerini kağıt üzerinde yapmışlardır. İçlerinden kareli kağıt kullanmayı tercih eden de olmuştur. Ayrıca çizim yaparken cetvel ve renkli kalem kullanmayı tercih edenler de olmuştur.

Genelleme sürecine bütün olarak bakıldığında katılımcıların çoğu görselleştirme kullandıkları adımlarda genellikle çözüme görsel olarak başlamışlar daha sonra ilişkiler içinde cebirsel işlemlerle devam etmişlerdir. Bazen kullandıkları görselleştirmeyi cebirsel olarak doğrulanmadan sürece devam etmişler. Bu durum ise Arcavi'nin, (2003) prosedür olarak her zaman güvenilir olmayan görsel tekniklerin, analitik tekniklerden bilişsel olarak daha destekleyici olduğu fikri ile paralel şekilde düşünülebilir.

5.1.4. Matematiksel Genelleme Yaparken Ortaya Çıkan Görsel İmajlar Nelerdir?

Bu araştırmada katılımcılar genelleme sürecinin farklı yerlerde farklı görsel imajlara yer vermişlerdir. Aşamalar içinde görsel imaja yer verilmeyen aşama bulunmamaktadır. Kullanılan görsel imajlar ise somut, kinestetik, formül ve örüntü imajları şeklindedir.

Ortaya çıkan 33 görsel imajın 15'ini somut imaj, 11'ini formül imajı, 6'sını kinestetik imaj, 1'ini de örüntü imajı oluşturmaktadır. Görsel imajların 11'ine aynı ilişkiyi araştırma sürecinde yer verilmiş olup, 10'u aynı çözümü veya sonucu araştırma, 5'i objeleri ilişkilendirme, 5'i durum ile ilişkilendirme, 1'i devam ettirerek genişletme ve 1'i de genel prensibe ulaşma süreçlerinde de görülmüştür. Aynı ilişkiyi araştırma sürecinde en çok somut imajın, aynı çözümü veya sonucu araştırma sürecinde ise formül imajının daha fazla kullanıldığı sonucu görülmüştür (bkz. EK 20-22).

Katılımcıların yer verdiği somut imajlar, çoğunlukla kavramların zihinlerde oluşturduğu resimleri anlatan görüntüler şeklinde olmuştur. Zihinsel bu resimler katılımcıların kimi zaman iki ya da daha fazla mevcut obje arasındaki benzerliklerin bir

çağrışımını yaparken süreç içinde objelerin ilişkilendirilmesinde, kimi zaman iki veya daha fazla obje arasındaki sabit ilişkiyi belirlemek için aynı ilişkiyi araştırma süreci içinde ortaya çıkmıştır. Somut imajlar katılımcıların görselleştirmelerinde önemli bir paya sahip olduğundan, kavramla ilgili net bir somut imaja sahip olanlar görselleştirme konusunda daha başarılı olmuşlardır. Net bir somut imaja sahip olmayan katılımcılar ise düşüncelerinden emin olamamışlardır. Katılımcılardan yanlış somut imaja sahip olan kişi olmamıştır.

Katılımcıların zihinlerinde canlandırdıkları formül imajları ise ağırlıklı olarak yapılan eylemlerin sonucunun her zaman geçerli olup olmadığını belirlemek için aynı çözümün veya sonucun araştırılması sırasında ortaya çıkmıştır. Bu imaj iki ya da daha fazla durum arasında çağrışımı kurmak için durum ile ilişkilendirme sürecinde de kullanılmıştır. Katılımcılar süreç içinde düşüncelerinin devamını sağlamak adına aynı ya da benzer oranlar elde etmeye çalışmışlar ve formül imajını net şekilde ifade edemeyen katılımcılar için bu durum düşüncelerinden emin olamamalarına neden olmuştur.

Yapılan araştırmada sürece bütün olarak bakıldığında genellenmenin gelişiminde adayların farklı görsel imajlara sahip olmalarının, görselleştirmeleri daha fazla kullanmalarına neden olduğu sonucu elde edilmiştir. Böylece sezgisel anlamda sahip oldukları düşüncelerini görsel imajları ile bütünleştirerek bunları görselleştirmişler ve ileriki adımlardaki düşüncelerinin muhakemesinde kullanmışlardır. Ben-Chaim (1989) induktif, dedüktif ve orantılı muhakemenin gelişiminde görselleştirmenin rolünü vurgulamış ve belirli durumlardaki gözlemlerin bir örüntüsünden yapılan genellemeyle oluşturulan bir konjektür sürecinden ve induktif muhakemenin temel bileşen olduğundan bahsetmiştir. Ayrıca belirli bir alandaki araştırmacıların, çalıştıkları konudaki çoğu bilinen metodlar ve kavramların algılanmasında ve manipülasyonunda sezgisel yolların ve görsel imajların çeşitliliğinin ilgili olduğunu söylemektedir. Burada ortaya çıkan bu durum, Ben-Chaim'in düşüncelerine paralel şekilde gerçekleşmiştir.

5.1.5. Matematiksel Soyutlamada Görselleştirmenin Etkileri Nelerdir?

Yapılan çalışmada katılımcılara Geometers' SketchPad ve Maple bilgisayar

programları ile verilen görselleştirmelerin, soyutlama sürecinin gelişiminde önemli desteklere neden olduğu görülmüştür. Katılımcılar cebirsel olarak veya sezgisel şekilde geliştirdikleri yapılanmaları görselleştirme ile destekleme ve tamamlama imkanı bulmuşlardır.

Sürece bütünsel olarak bakıldığında, verilen görselleştirmeler öncelikle katılımcıların kavramla ilgili somut imajlarını tamamlama ve desteklemeye yardımcı olmuştur. Kavramla ilgili net bir somut imaja sahip olmayanlar için sürecin yapılmasında bu görselleştirmeler, özellikle içselleştirme ve koordinasyonda tamamlayıcı nitelikte olmuştur. Yanlış somut imaja sahip olanlar için ise bu durum katılımcının yanlış yapılandığı süreci değerlendirip yeniden yapılandırmasına sebep olmuştur.

Bahsedilen programların kavramların ilişkileri sırasında hesaplamalar yapabilmesi ve bunların verilen görselleştirmeler üzerinde incelenme imkanı, katılımcıların hem formül imajlarını desteklemiş hem de görsel olarak algıladıkları durumlar için cebirsel yollarla ilgili durumları ilişkilendirmeye yardımcı olarak sürecin anlamlı yapılar şeklinde ilerlemesinde etkili olmuştur. Ayrıca görselleştirmelerin gerek düzlemde ve gerekse uzayda dinamik betimlemeler şeklinde hareket ettiriliyor olması, katılımcıların kavramlarla ilgili zihinsel hareketlerini dinamik olarak desteklemiş ve kavramın farklı kavramlarla ilişkilendirilmesi adına yararlı olmuştur. Benzer şekilde bu durum kinestetik imajları üzerinde de etkili olmuştur. Katılımcıların süreç içinde görsel imajları ile ilgili ortaya çıkan bu sonuçlar, Presmeg'in (1997) kavramsal olarak zengin imajlar barındıran görselleştirmeler için bilişsel talebin daha yüksek olacağı fikrini de vurgulamaktadır.

Verilen görselleştirmeler katılımcıların kavramlarla ilgili eksik olan zihinsel imajlarının tamamlanmasında ve bazen de gözünde canlandıramadığı için sahip olamadığı zihinsel resimlerin oluşumunda etkili olmuştur. Dolayısıyla verilen görselleştirmeler katılımcıların kavramları tanıma, diğer kavramlarla ilişkilerini inceleyip anlama ve süreci bütün olarak değerlendirip yapılanmalarını oluşturma ortamı sağlamıştır. Ayrıca ortaya çıkan bu sonuçlar, Piaget'nin (1964) 'Bir nesneyi tanıma, o nesne üzerinde hareket edebilme; tanıma ise onu modifiye edebilme, dönüştürebilme, bu dönüşüm sürecini anlama ve sonuçta nesnenin yapılandığı yolu anlamadır'

şeklindeki düşüncesini desteklemektedir.

Araştırma içindeki görselleştirmede yararlanılan programların katılımcılarca süreç içinde benzer durumları incelerken kullanılması ve farklı görsellemelerin katılımcılar tarafından resimlendirilip oluşturulması, onların süreci daha anlamlı yapılar şekline getirmelerine katkıda bulunmuştur.

5.1.6. Matematiksel Genellemede Görselleştirmenin Etkileri Nelerdir?

Araştırmada katılımcıların genelleme süreci üzerindeki görselleştirmenin etkisini görmek için kullanılan Geometers' Sketch Pad bilgisayar programının, sürecin özellikle birinci ve ikinci seviyesindeki genelleme hareketlerinde önemli katkılar sağladığı sonucu elde edilmiştir.

Katılımcıların başlangıçta sahip oldukları kavramla ilgili somut imajın sonraki adımlarda bulanıklaşmaya başladığı durumlarda, verilen görselleştirme özellikle süreç içindeki kavramların ilişkilendirilmesi ve benzer çözümlerin araştırılması sırasında katılımcıların sürece daha emin adımlarla devam etmelerini sağlamış ve bu durum aynı zamanda onların genişletme sürecine de önemli katkıda bulunmuştur. Ayrıca verilen görselleştirmeler, uyguladıkları işlemlerle süreci devam ettirerek genişletme sırasında benzer oranları elde ederken katılımcıların sahip oldukları formül imajların desteklenmesinde önemli yararlar sağlamıştır. Diğer taraftan, genellenmenin her aşaması için verilen görselleştirmenin “dinamik” hareketleri sonucu oluşturduğu resimlerin katılımcılarca incelenmesiyle, kavramlarla ilgili dinamik imajın oluşumu sağlanmış ve bu durum aynı zamanda genişleyen yapıların anlamlı şekilde ilerlemesine neden olmuştur.

Verilen görselleştirmeler bazen başlangıç fikrinin oluşumunda, bazen gerekli şartların sağlanması ile ilgili kavramsal temsillerin oluşturulmasında yararlı olmuştur. Böylece, ilerleyen aşamalara doğru karmaşıklaşan durumlara ait kavramların görsel imajlarının çoğu zaman oluşumu sağlanmış ve zenginleşen imajlar sürecin genişlemesinde yararlı olmuştur. Bu durum ayrıca, Yakimanskaya'nın (1991) zengin ve daha çeşitli uzamsal temsillerin kolay kullanılır imajlara neden olduğu ve ayrıca bunda

da bilgisayarların önemli görevler üstlendiği fikrini desteklemektedir.

5.2. Öneriler

Matematik eğitiminde soyutlama ve genelleme süreçlerinin düzgün yapılması, bunun için de kavramlar ve aralarındaki ilişkilerin bilinçli şekilde yerleştirilmesi gerekmektedir. Bunun gerçekleşmesinde görselleştirmenin önemli bir rolünün olduğu ve bu süreçlerin gelişiminde görselleştirmenin etkili bir destek görevi gördüğü ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla, matematik sınıflarında öğrencilerin görselleştirme yetilerinin geliştirilmesine yönelik etkinliklere ve görsel düşünmelerine fırsat verilmesi yerinde olacaktır.

Geometers' Sketch Pad ve Maple bilgisayar programlarının kullanımının görselleştirmede katkı sağladığı görüldüğünden, bunların veya benzer programların kullanılmasının bu süreçlerin sağlıklı gerçekleşmesinde faydalı olacağı düşünülmektedir.

Öğrenciler kavramlarla ilgili resimsel betimlemeleri yapmaları konusunda teşvik edilirse, soyutlanan veya genellenen kavramlarla ilgili görsel imaja sahip olup olmadıkları, eğer sahiplerse bu imajın doğruluğu veya yanlışlığı daha iyi anlaşılabilir ve böylece kavramın doğru yapılması sağlanabilir. Soyutlanan veya genellenen kavrama dair net bir imaja sahip olunmayan veya yanlış imaja sahip olunan durumlarda da uygun görseller kullanılarak süreç desteklenebilir. Ayrıca görselden sembole geçiş konusunda da duyarlı olunup imajların sembolik ifadeleri için öğrencilere destek verilebilir.

Matematiksel fikirlerin ve yöntemlerin sezgisel şekilde temsil edilebilir birçok görsel ilişkilere sahip olduğu sonucu düşünülürse, matematiksel kavramların yerleşmesinde görselleştirmelerin kullanımı bir noktadan diğerini elde ederken ve bunları ilişkilendirirken oldukça yararlı olabilir. Bir kişinin bir nesneyi tanıyabilmesi, o nesneye olan yakınlığı ve onu oluşturması için olan bağlılığı, kişinin o nesne hakkında daha somut (ya da daha az soyut) düşünmesini sağlayabileceğinden, matematiğin çeşitli konularında soyut objeleri elde etmek için uygun somut ifadelerle ilişkilendirilip bunlarla sürecin gelişmesi faydalı olabilir.

Öğretmenlerin kavramlarla ilgili görsellemeleri verirken veya temsilleri oluştururken duyarlı olmaları, öğrencileri alakasız detaylarla bağlayıp, yanlış imaj oluşumuna neden olmamaları için bir imajın veya bir diyagramın birebir somut şekilde verilmemesine dikkat etmeleri yerinde olacaktır. Bu durum, standart biçimde verilecek şekil veya diyagramın içinde farkına varılması istenen kavramın algılanmasını engelleyen, esnek olmayan düşünceleri beraberinde getirebileceğinden, kavramların görselleştirmelerle desteklenmesi sürecinde dikkatli olunması gerekebilir.

Öğrencilerin karşılaştıkları önemli zorlukların, soyutlama sürecinin kavramlar arasındaki koordinasyonu sağlanması ve genelleme sürecinin ise ilişkilendirme ve araştırma aşamasında ortaya çıktığı dikkate alındığında, kullanılacak uygun görselleştirmelerin kullanımının özellikle süreçlerdeki bu boşlukları tamamlamada faydalı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca görsel imajlar olarak çoğunlukla somut ve dinamik imajlara başvurulduğu sonucu ele alındığında, seçilecek görsellerin bu imajları desteklemesi, sürecin gelişiminde olumlu etkilere neden olabilecektir.

Öğretmenler genellikle görselleştirmenin zaman alması, çoğu zaman yüksek bilişsellik gerektirmesi, zaman zaman gerçek matematik olmadığını düşünmeleri gibi nedenlerle görselleştirmeler kullanmayı bazen gereksiz görüp, bazen de kullanmaktan kaçınabilmektedir. Görselleştirmenin kullanılması ve katkısının sağlanması için öncelikle öğretmenlerin görsel düşünme konusunda bilinçli olmalarının, bunun için de öğretmen adaylarının bu yönde yetiştirilmeleri gerektiği düşünülmektedir. Bu nedenle, öğretmen yetiştiren kurumlarda görselleştirme konusunda daha fazla araştırma yapmak ve bunları değerlendirilmek yararlı olacaktır.

Aristoteles'in 'Hiç kimse zihinsel bir görüntüye sahip olmadan düşünemez' ifadesinden yola çıkarak matematik yapmanın temel yöntemlerinden olan matematiksel soyutlama ve genellemelerin arzu edildiği gibi gerçekleşebilmesi için kavramların uygun bir zihinsel bir imajını oluşturmanın önemli olduğunu söyleyebiliriz. Gerekli zihinsel imaj için de uygun görselleştirmeler kullanmanın gerekli ve faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Ben-Chaim, D., Lapan, G., and Houang, R.T. (1989). The role of visualisation in the middle school mathematics curriculum. *Focus On Learning Problems In Mathematics 11* (1), 49-60.
- Beth, E. W. and Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*, Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus On Learning Problems In Mathematics*, 11 (1), 7-16.
- Bishop, A. J. (2003). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. Web:<http://merg.umassd.edu/projects/symcog/bibliography/pmeVisualizationFinalA PA.pdf.html>, 10 Ekim 2005'te alınmıştır.
- Bogdan, R. C., and Biklen, S. K. (1992). *Qualitative research for education: an introduction to theory and methods*. Boston: Allyn and Bacon.
- Brown, J. S., Collins, A., and Duguid, P. (1989). Situated cognition and culture of learning. *Educational Researcher*, 18 (1), 32-42.
- Damerow, P. (1996). *Abstraction and representation: essay on the cultural evolution of thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Davydov, V. V. (1990). Types of generalisation in instruction: logical and phsycological problems in the structuring of school curricula. In: J. Kilpatrick (Ed.). *Soviet studies in mathematics education*, (2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics-learning*. London, England: Hutchinson.
- Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review*, 31, 281-301.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. (pp. 160-187). New York: Springer-Verlag.

- Dubinsky, E. (2000). Mathematical literacy and abstraction in the 21st century. *School Science and Mathematics*, 100 (6), 289-97
- Dubinsky, E., and McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching And Learning of Mathematics at University Level: An ICME Study* (pp. 275-282). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Eisenberg, T., and Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Washington, DC : Mathematical Association of America.
- Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 26 (4), 109-113.
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of The Learning Sciences*, 16 (2), 221–262.
- Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 358, 1225-1230.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Fraser, P., Hazan, O., and Manes, M. (1997). Revealing the faces of abstraction. *The International Journal of Computers for Mathematics Education*, (3), American Mathematical Society, 234-283.
- Gaisman, M. T. (2007). *Visualization and abstraction: geometric representation of functions of two variables*. Paper presented at the proceedings of the 29 th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.
- Garcia-Cruz, J. A., and Martinon, A. (1998). *Levels of generalizations in linear patterns*. Paper presented at the Proceeding of the 22 nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (2), (pp. 329-336). University of Stellenbosch, South Africa.
- Guzman, M. (2002). *The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis*. Paper presented at the Proceedings of the 2 nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Hersonissos, Crete, Greece.
- Hadamard, J. (1954). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover.
- Hampton, J. (2003). Abstraction and context in concept representation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 358, 1251-1259.
- Harel, G., and Tall, D. O. (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For The Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.

- Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*. 40 (1), 71-90.
- Hazzan O., and Zazkis R. (2005). Reducing abstraction: the case of school mathematics. *Educational Studies in mathematics*. 58, 101-119.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two side of the coin. *Focus on learning Problems in Mathematics*. 11(1), 61-76.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. and Dermolen, J. L. (1996). Space and shape. In Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (1), (pp. 161-204). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., and Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 195-222.
- Hiebert, J., and Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New york: Macmillian.
- Hiebert, J., and Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hofstadter, D. (1979). *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, New York: Basic Books.
- Hume, D. (1910). *An Enquiry Concerning Human Understanding*, Harward Classics (37). P.F. Collier & Son. Web:<http://ebooks.adelaide.edu.au/h/hume/david/h92e/> adresinden 8 Eylül 2010' da alınmıştır.
- Kautschitsch, H. (1988). Bild-ünerstützte abstraktion und verallgemeinerung. In W. Dörfler (Ed.), *Kognitive Aspekte Mathematischer Begriffsentwicklung*, (pp.191-258) Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, Austria.
- Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University Press.
- Krutetski, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lean, G. A., and Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1-33.
- Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lesh, R. (1985). *Conceptual analyses of mathematical ideas and problem solving processes*. Paper presented at the Proceeding of 9 th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (1), (pp. 73-96). Noorwijkerhout, The Netherlands.

- Maykut, P. and Morehouse, R. (1994). *Beginning Qualitative Research: A Philosophic and Practical Guide*. London: Falmer press.
- McMillan J. and Schumacher S. (1989). *Research In Education: A Conceptual Introduction*. London: Scott, Foresman and Compnay.
- Miles, M. B. and Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Millikan, R. (1984). *Language, Thought and Other Biological Categories*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Mitchelmore, M. (2002). *The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge*. Paper presented at the Proceeding of The East Asia Regional Conference on Mathematics Education (2 nd) and The Southeast Asian Conference on Mathematics Education (9 th, Singapore, May, pp.27–31).
- Mitcelmore M., and White, P. (1995). Abstraction in mathematics: conflict, resolution and application. *Mathematics Education Research Journal*, 10 (3), 4-27.
- Mitcelmore M., and White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238.
- Mitcelmore M., and White, P. (2004a). *Teaching mathematical concepts: Instruction for abstraction*. Invited regular presented at the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.
- Mitcelmore M., and White, P. (2004b). *Abstraction in mathematics and mathematics learning*. In M. J. Hoines and A.B. Fuglestad (Eds.). Paper presented at the Proceedings of the 28 th Conference of The International Group for the Phycsology of Mathematics Education. (3), (pp. 329-336).
- Mitchelmore, M., and White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, 19 (2), 1-9.
- Monaghan, J., and Ozmantar, M. F. (2006). Abstraction and Consolidation. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 233–258.
- Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and Verbal Processes*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
- Patton, M. Q. (1987). *How to Use Qualitative Methods in Evaluation*. London: Sage.
- Piaget, J. (1970a). *Structuralism* (C. Maschler, trans.) New York: Basic Books (original published 1968)
- Piaget, J. (1970b). *The Principles of Genetic Epistomology*. London: Routledge & Keegen Paul.

- Piaget, J. (1971). *Biology and Knowledge*. Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, 15 (1), 1-12.
- Piaget et al. (1977). *Research on Reflective abstraction*. (2). Paris: Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. (1980). *Adaptation and Intelligence* (S. Earnes, trans.), Chicago: University of Chicago Press (original published 1974).
- Piaget, J. (1985). *The Equilibration of Cognitive Structures: The Central Problem of Intellectual Development*. Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget, J. and Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science*. New York: Columbia University Press. (original work published in 1883).
- Presmeg, N. C. (1985). *The role of visually mediated progresses in high school mathematics: A classroom investigation*. Unpublished Ph. D. dissertation, Cambridge University, England.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.
- Presmeg, N. C. (1989). Visualization in multicultural mathematics classrooms. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1-2), 17-24.
- Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies In Mathematics*, 23, 595-610.
- Presmeg, N. C. (1997a). Reasoning with Metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 267-279). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Presmeg, N. C. (1997b). Generalization using imagery in mathematics. In L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutierrez, P. Borero (Eds.) *Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 205-235). Dordrecht: Sense Publishers.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Resoning: Induction and Analogy in Mathematics* (2 nd. Ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Rotman, B. (1977). *Jean Piaget: Psychologist of the Real*. Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In Harel, G. and Dubinsky, E. (Eds). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, (pp.59-84), Washington: MAA.
- Sfard, A. (1994). The gains and the pitfalls of reification-the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Sierpinska, A. (1994). *Understandings in Mathematics*. London, English: Falmer.
- Skempt, R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics* (2nd. Ed.). Harmondsworth: Penguin.
- Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, unframes and the formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 205-222.
- Strauss, A. and Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research*. Thousand Oaks, London & New Delhi: Sage Publication.
- Stylianou, D. (2001). *On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing?* In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Paper presented at the Proceeding of 25 th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (4). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Stylianou, D.A., and Silver, E.A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (4), 353-387.
- Suwarsono, S. (1982). *Visual imagery in the mathematical thinking of seventh grade students*. Unpublished Ph.D. dissertation, Monash University, Australia.
- Tall, D. (1988). *The nature of advanced mathematical thinking*. The Working Group for Advanced Mathematical Thinking for The Conference of the Psychology of Mathematics Education, Veszprem, Hungary.
- Tall, D. (1991). (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Tall, D., and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2).
- Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, (pp. 189-236). Hillsdale, NJ.
- Thornton, S. (2000). *A picture is worth a thousand words; University of Canberra*. Web: <http://www.amt.canberra.edu.au/-sjt/dva.html>. 7 Şubat 2003'te alınmıştır.

- Van Oers, B. (1988). The fallacy of decontextualization. *Mind, Culture, and Activity*, 5, 135-142.
- Villiers, M. (2007). A hexagon result and its generalization via proof. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4 (2), 188-192.
- Vinner, S. (1997). *From intuition to inhibition – Mathematics, education and other endangered species*. In E. Pehkonen (Ed.), Paper presented at the Proceedings of the 21 st Conference of The International Group for the Physcology of Mathematics Education. (1), (pp. 63-78). Helsinki, Finland: PME.
- Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.) & N. Minick (Trans.), *The collected works of L. S. Vygotsky: Vol, 1. Problems of general Psychology* (pp. 39-285). New york: Plenum. (Original wok published 1934).
- Wheatly, G. (1991). *Enhancing Mathematics Learning through Imagery* Web: www.aare.edu.au/92pup/collk92019.txt-27k. 2 Nisan 2004'te indirilmiştir.
- Wheatley, G. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20, (2-3), 7-16.
- White, P., and Mitchelmore, M. C. (2002). Teaching and learning mathematics by abstraction. In D. O. Tall & M. Thomas (Eds.), *Intelligence and Understanding in Mathematics* (pp. 235-256). Flaxton, QLD: Post Pressed.
- Wilensky, U. (1991). Abstract meditations on the concrete and concrete implications for mathematical education. In I. Harel and S. Papert (Eds.). *Constructionism*, (pp. 193-203) Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ.
- Yakimanskaya, I. S. (1991). *The development of spatial thinking in s choolchildren* Soviet Studies in Mathematics Education. (3 rd Ed.). Reston, VA: NCTM.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Nitel Araştırma Yöntemleri*, Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz R., Argün Z., and Keskin, M. Ö. (2009). What is the role of visualization in generalization processes: The case of preservice secondary mathematics teachers. *Humanity and Social Sciences Journal* 4 (2) , 130-137.
- Yin R. K. (2003). *Case Study Research, Designs and Methods*. (3 rd Ed.). California: Sage Publications.
- Zazkis R., Dubinsky E., and Dautermann J. (1996), Coordinating visual and analytic strategies a study of students' understanding of the group D4, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 435-437.
- Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991). *Visualisation in Teaching and Learning Mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

EKLER

EK 1

Soyutlama Süreci İçin Aşamalar İçinde Katılımcılara Verilen Durumlar

Aşağıda italik şekilde yazılan kısımlar öğrencilerle paylaşılmamıştır.

1.AŞAMA

1. Durum

- (Reel Eksende) Doğru Parçası

Bir doğru parçasının diğer bir doğru parçasına ötelenmesi

1. $A(-1), B(3), C(2), D(6)$ noktaları verilsin.

$[AB]$ ve $[CD]$ doğru parçalarını göz önüne aldığımızda birisinden yola çıkarak hareketlerden birisi yardımıyla diğeri elde edilebilir mi?

Neden?

Elde etmeye çalışınız.

Bu iki doğru parçasının uzunlukları ile ilgili ne düşünüyorsunuz?

2.AŞAMA

2. Durum

- (Düzlemde) Doğru Parçası

Bir doğru parçasının diğer bir doğru parçasına ötelenmesi

2. $A(-2,1), B(0,3), C(2,-3), D(4,-1)$ noktaları verilsin.

$[AB]$ ve $[CD]$ doğru parçalarını göz önüne aldığımızda birisinden yola çıkarak hareketlerden birisi yardımıyla diğeri elde edilebilir mi?

Neden?

Elde etmeye çalışınız.

Bu iki doğru parçasının uzunlukları ile ilgili ne düşünüyorsunuz?

3. Durum

- (Düzlemde) Doğru Parçası

Bir doğru parçasının diğer bir doğru parçasına döndürülmesi (orijin merkezinde döndürme)

3. $O(0,0), A(4,0), B(0,4)$ noktaları verilsin.

$[OA]$ ve $[OB]$ doğru parçalarını göz önüne aldığımızda birisinden yola çıkarak hareketlerden birisi yardımıyla diğeri elde edilebilir mi?

Neden?

Elde etmeye çalışınız.

Bu iki doğru parçasının uzunlukları ile ilgili ne düşünüyorsunuz?

4. Durum

- (Düzlemde) Üçgen

Bir üçgenin diğer bir üçgene döndürülmesi

4. Köşeleri $O(0,0), A(2,0), B(2,1)$ olan OAB üçgeni ve köşeleri $O(0,0), C(0,2), D(-1,2)$ olan OCD üçgeni göz önüne alındığında bir hareket yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir miyiz?

Neler düşünüyorsunuz?

Açıları için neler düşünüyorsunuz?

Kenarları için neler düşünüyorsunuz?

Alanları için neler düşünüyorsunuz?

Farkına vardığınız şeyler var mı?

5. Durum

- (Düzlemde) Dörtgen

Bir dörtgenin diğer bir dörtgene ötelenmesi

5. Köşeleri $A(-5,-3), B(-2,-2), C(-1,-1), D(-4,1)$ olan $ABCD$ dörtgeni ile köşeleri $E(0,1), F(3,2), G(4,3), H(1,5)$ olan $EFGH$ dörtgeni göz önüne alındığında bir hareket yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir miyiz?

Neler düşünüyorsunuz?

Açıları için neler düşünüyorsunuz?

Kenarları için neler düşünüyorsunuz?

Alanları için neler düşünüyorsunuz?

Farkına vardığınız şeyler var mı?

6. Durum

- (Düzlemde) Çember

Bir çemberin diğer bir çembere ötelenmesi

6. Merkezi $A(-3,4)$ ve yarıçapı 2 birimlik çember ile merkezi $B(2,-1)$ ve yarıçapı 2 birimlik çember göz önüne alındığında bir hareket yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir miyiz?

Neler düşünüyorsunuz?

Çevresi için neler düşünüyorsunuz?

Alanları için neler düşünüyorsunuz?

Farkına vardığınız şeyler var mı?

7. Durum

- (Üç Boyutlu Uzayda) Küre

Bir kürenin diğer bir küreye ötelenmesi

7. Merkezi $A(1,2,3)$ olan 1 yarıçaplı küre ile merkezi $B(4,1,2)$ olan 1 yarıçaplı küre göz önüne alındığında bir hareket yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir miyiz?

Neler düşünüyorsunuz?

Alanları için neler düşünüyorsunuz?

Hacmi için neler düşünüyorsunuz?

Farkına vardığınız şeyler var mı?

3.AŞAMA

8. Durum

- (Üç Boyutlu Uzayda) Silindir

Bir silindirin diğer bir silindire dönmesi

8. Merkezi $A(2,0,0)$, yarıçapı 2, yüksekliği 3 birim olan silindir parçası ile, merkezi $B(-2,0,0)$, yarıçapı 2, yüksekliği 3 birim olan silindir parçası göz önüne alındığında bir hareket yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir miyiz?

Neler düşünüyorsunuz?

Alanları için neler düşünüyorsunuz?

Hacmi için neler düşünüyorsunuz?

Farkına vardığınız şeyler var mı?

9. Durum

• (Üç Boyutlu Uzayda) Piramit

Bir piramitin diğer bir piramite ötelenmesi

9. Taban köşeleri $A(-5,-4)$, $B(-3,-1)$, $C(6,1)$, $D(-8,-2)$ ve yüksekliği 4 birim olan piramit ile taban köşeleri $E(4,-1)$, $F(6,2)$, $G(3,4)$, $H(1,1)$ ve yüksekliği 4 birim olan piramit göz önüne alındığında bir hareket yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir miyiz?

Neler düşünüyorsunuz?

Alanları için neler düşünüyorsunuz?

Hacmi için neler düşünüyorsunuz?

Farkına vardığınız şeyler var mı?

4.AŞAMA

Bütün bunların sonucunda farkına vardığınız bir şey var mı? Ne düşünüyorsunuz?

EK 2

Genelleme Süreci İçin Aşamalar İçinde Katılımcılara Verilen Durumlar

Aşağıdaki şekiller ve italik şekilde yazılan kısımlar öğrenci ile paylaşılmamıştır.

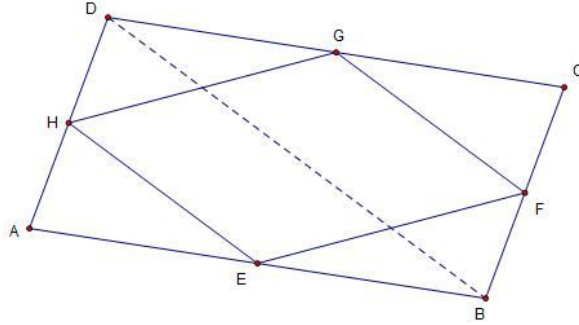
1. AŞAMA

1. Durum

1. ABCD karşılıklı kenarları paralel olan bir dörtgen olsun. E,F,G,H noktaları ise sırasıyla AB, BC, CD, DA kenarlarının orta noktaları olsun.

Buradaki EFGH şekli için ne söyleyebiliriz ?

Karşılıklı kenarları için ne söyleyebiliriz?

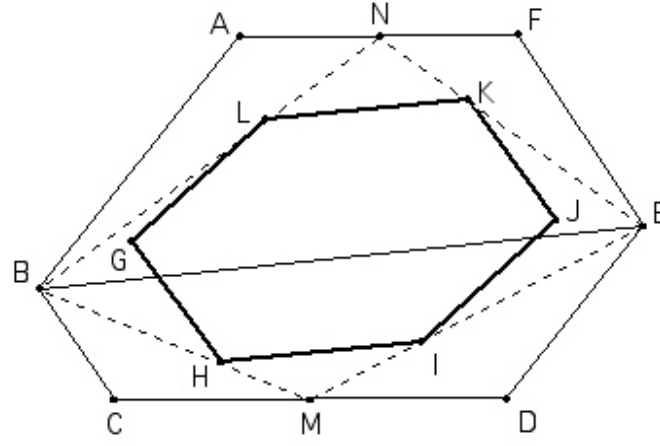


2. Durum

2. ABCDEF karşılıklı kenarları paralel olan ama eşit olması gerekmeyen bir altıgen olsun. G,H,I,J,K ve L noktaları ise sırasıyla ABC, BCD, CDE, DEF, EAF ve FAB üçgenlerinin ağırlık merkezleri olmak üzere;

Buradaki GHIJKL şekli için ne söyleyebiliriz ?

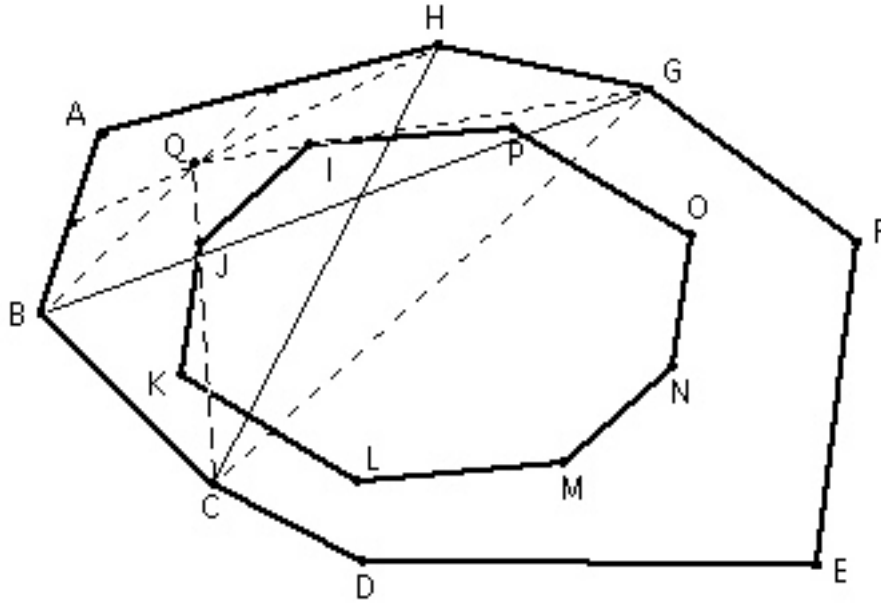
Karşılıklı kenarları için ne söyleyebiliriz ?



3. Durum

3. ABCDEFGH karşılıklı kenarları paralel olan ama eşit olması gerekmeyen bir sekizgen olsun. I,J,K,L,M,N,O,P noktaları ise sırasıyla HABG, ABCH, BCDA, CDEB, DEFC, EFGD, FGHE, GHAF dörtgenlerinin ağırlık merkezleri olmak üzere; Buradaki IJKLMNOP şekli için ne söyleyebiliriz ?

Karşılıklı kenarları için ne söyleyebiliriz ?



2. AŞAMA4. Durum

4. Bu durumu ongen ve onikigen için de söyleyebilir miyiz?

3. AŞAMA

5. Burada fark ettiğiniz bir şey var mı?

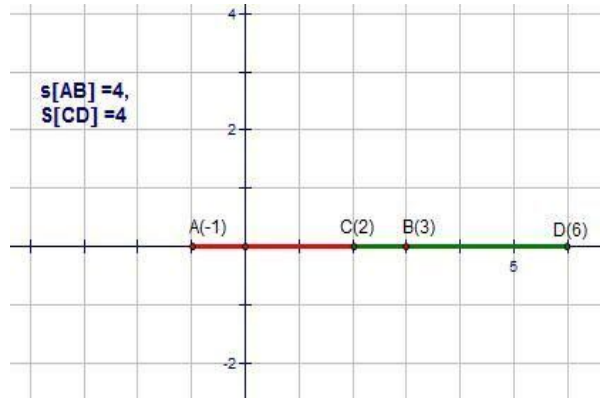
EK 3

Soyutlama Süreci İçin Katılımcılara Verilen Durumlara Ait Görselleştirme Örnekleri

REEL EKSENDE (1.AŞAMA)1. Durum

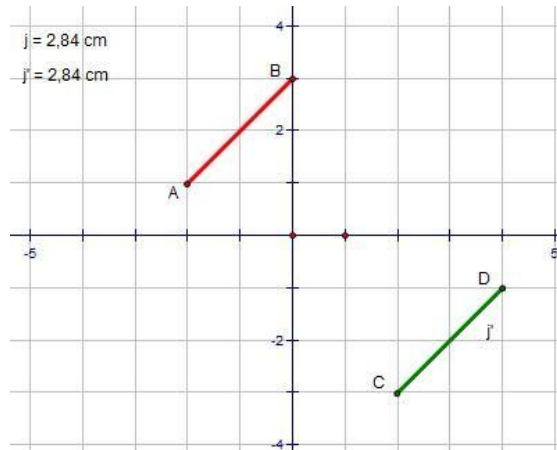
- Doğru Parçası

Bir doğru parçasının diğer bir doğru parçasına ötelenmesi

DÜZLEMDE (2.AŞAMA)2. Durum

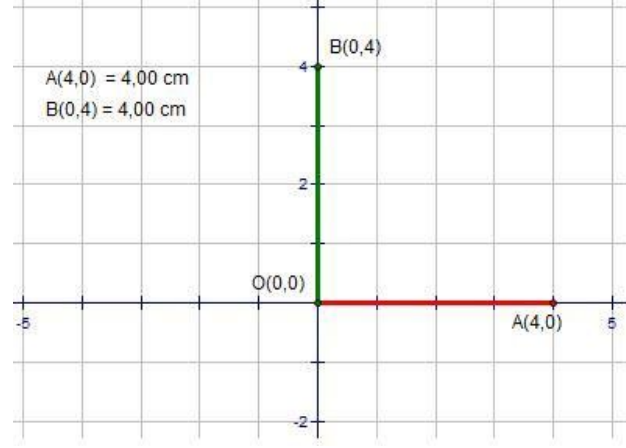
- Doğru Parçası

Bir doğru parçasının diğer bir doğru parçasına ötelenmesi



3. Durum

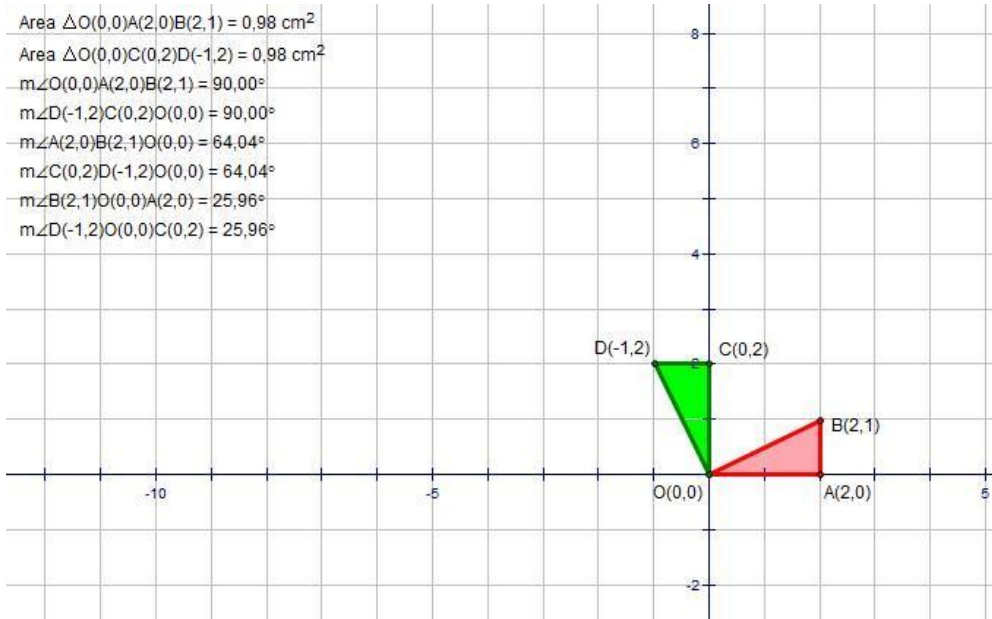
Bir doğru parçasının diğer bir doğru parçasına döndürülmesi (orijin merkezinde döndürme)



4. Durum

• Üçgen

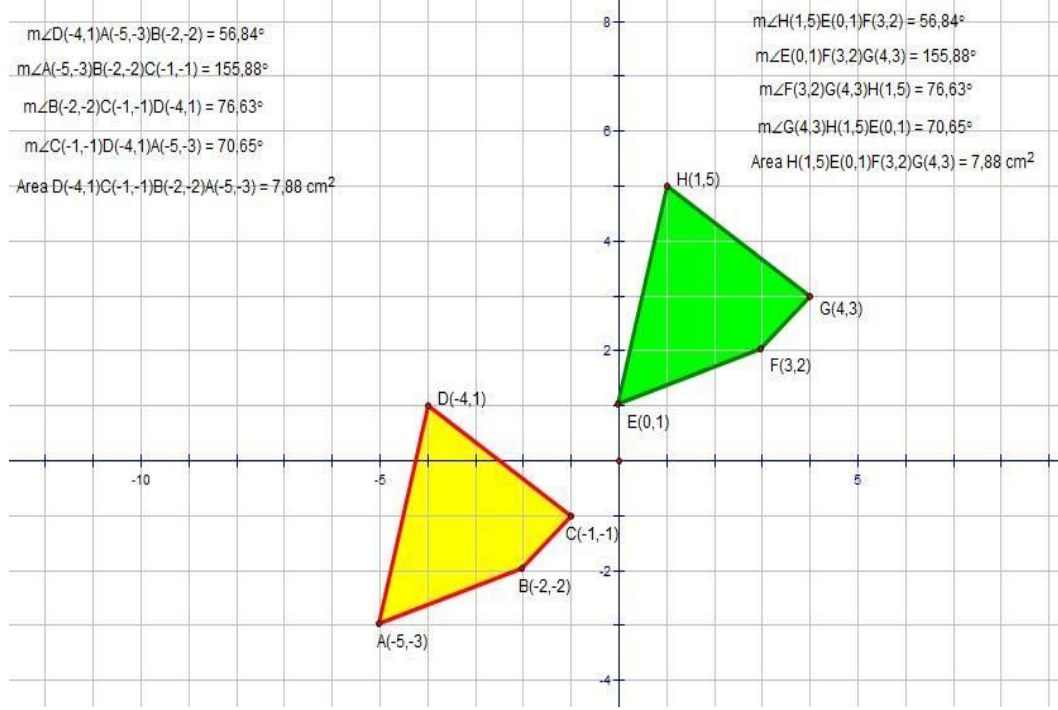
Bir üçgenin diğer bir üçgene döndürülmesi



5. Durum

• Dörtgen

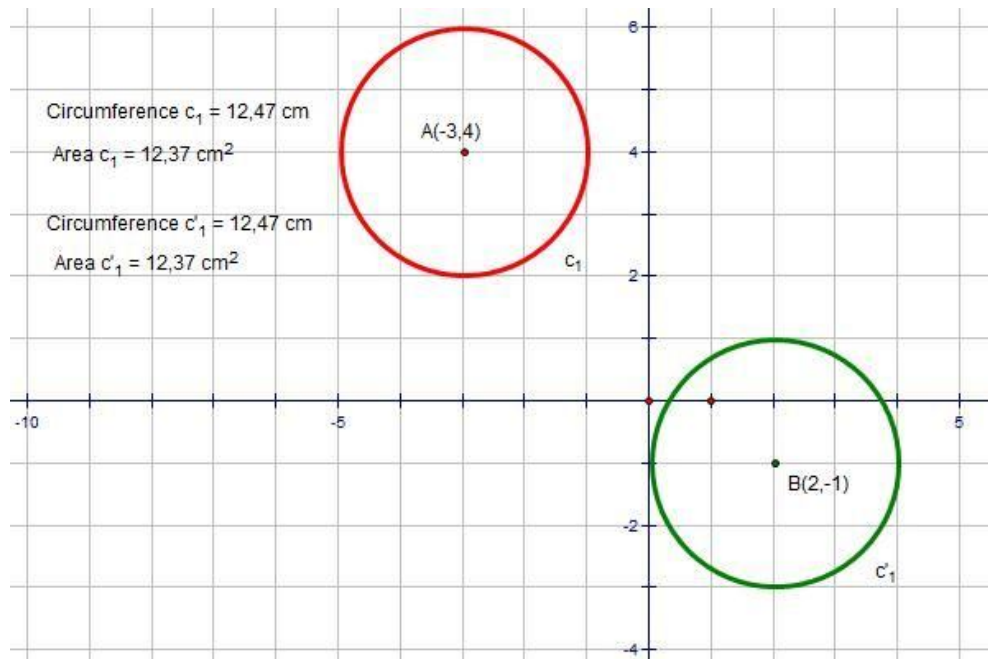
Bir dörtgenin diğer bir dörtgene ötelenmesi



6. Durum

• Çember

Bir çemberin diğer bir çembere ötelenmesi



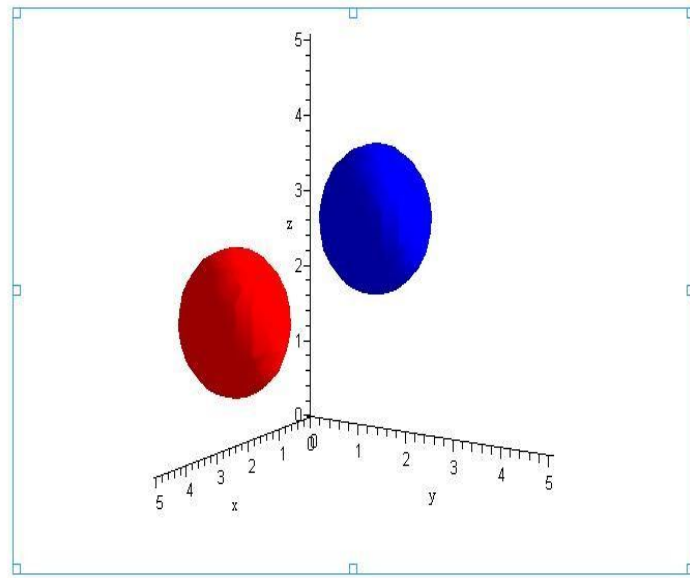
ÜÇ BOYUTLU UZAYDA (3. AŞAMA)

7. Durum

- Küre

Bir kürenin diğer bir küreye ötelenmesi

```
> with(plots):
s1:=implicitplot3d(({x-1}^2+{y-2}^2+{z-3}^2=1,x=0..5,y=0..5,z=0..5),color=blue,style=surface,scaling=constrained,
numpoints=10000,axes=framed):
s2:=implicitplot3d(({x-4}^2+{y-1}^2+{z-2}^2=1,x=0..5,y=0..5,z=0..5),color=red,style=surface,scaling=constrained,
numpoints=10000,axes=framed):
display(s1,s2);
```

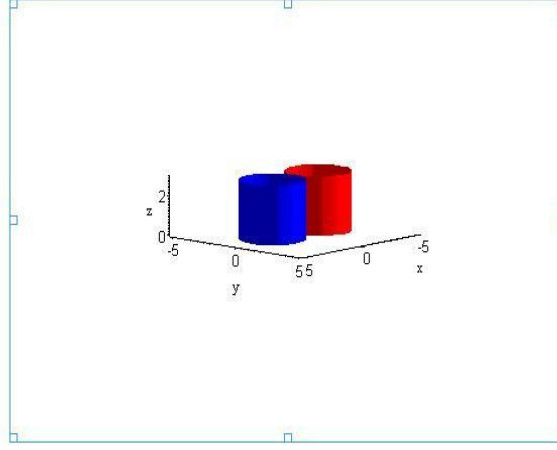


8. Durum

• Silindir

Bir silindirin diğer bir silindire dönmesi

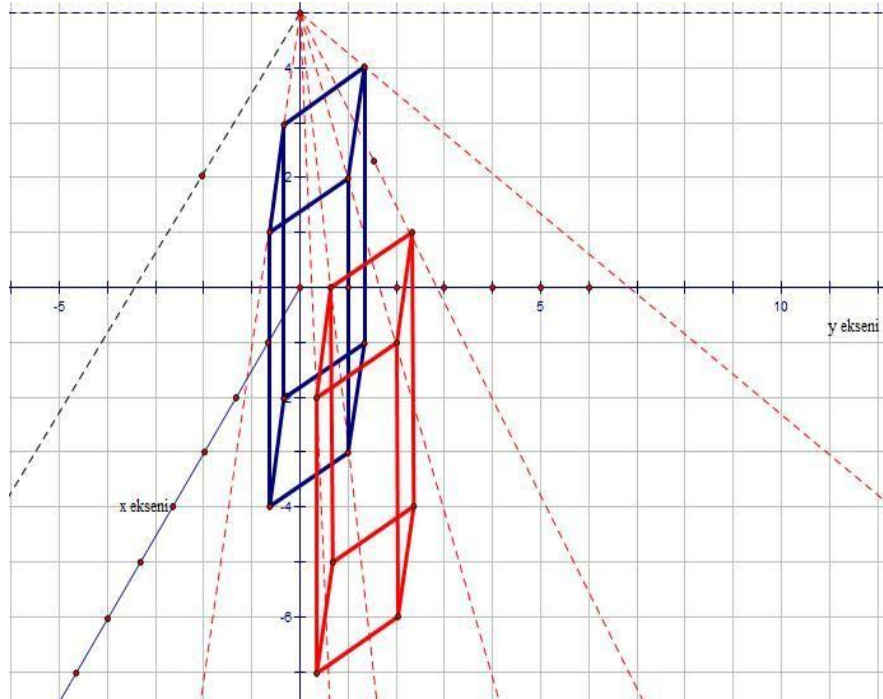
```
> with(plots):
c7:=implicitplot3d(((x-2)^2+(y-0)^2=4,x=-5..5,y=-5..5,z=0..3),color=blue,style=surface,scaling=constrained,numpoints=10000,axes=framed):
c8:=implicitplot3d(((x+2)^2+(y-0)^2=4,x=-5..5,y=-5..5,z=0..3),color=red,style=surface,scaling=constrained,numpoints=10000,axes=framed):
display(c7,c8);
```



9. Durum

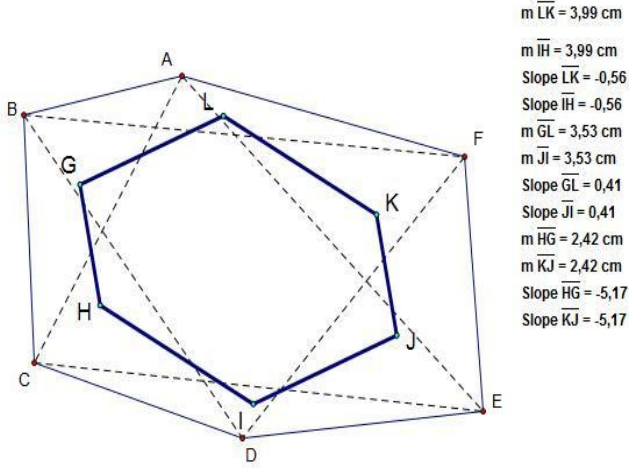
• Prizma

Bir prizmanın diğer bir prizmaya ötelenmesi

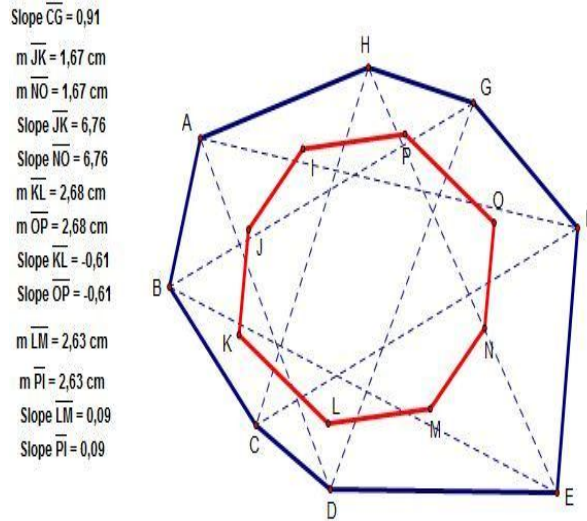


EK 4

Genelleme Süreci İçin Katılımcılara Verilen Durumlara Ait Görselleştirme Örnekleri

Altıgen

Karşılıklı kenarları paralel olan ABCDEF altıgeninde, ABC, BCD, ..., FAB üçgenlerinin ağırlık merkezleri, karşılıklı kenarları paralel ve eşit olan GHIJKL altıgenini oluşturur.

Sekizgen

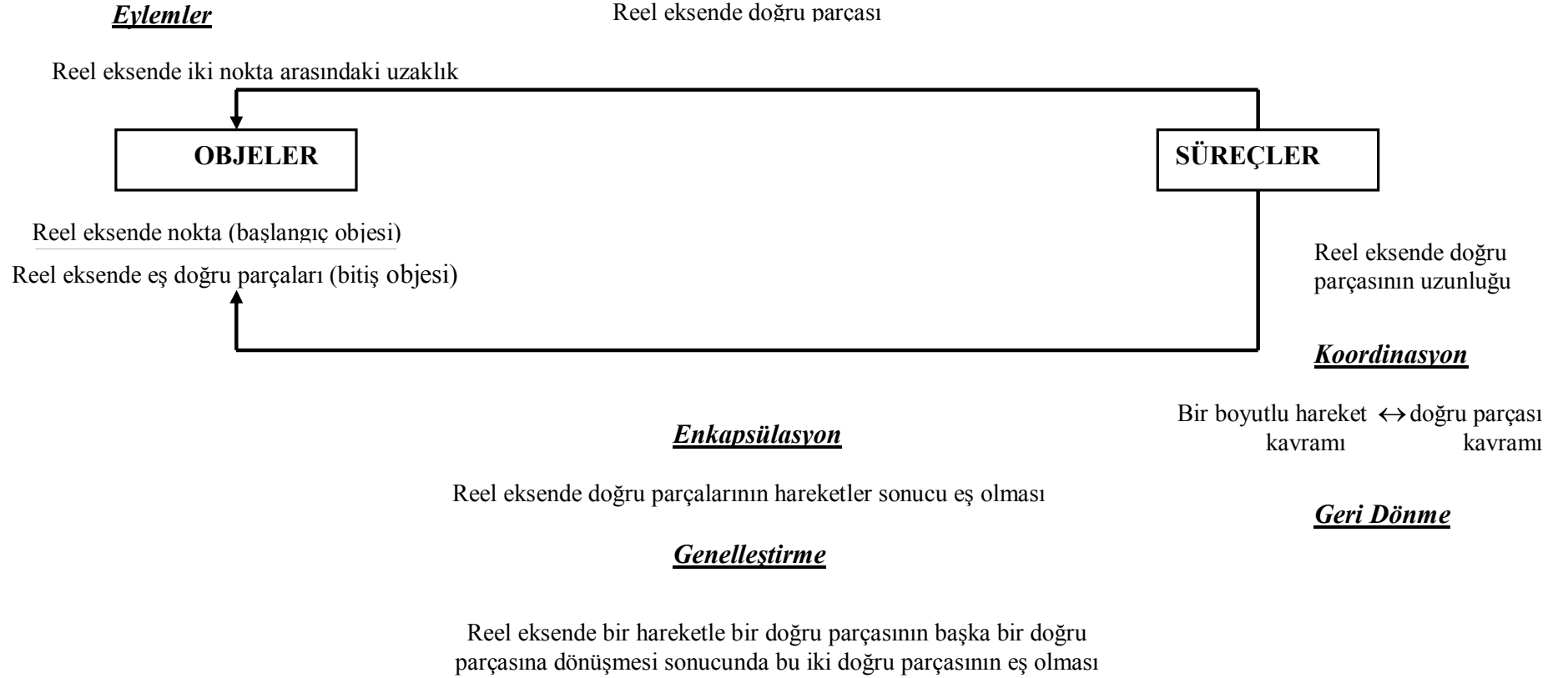
Karşılıklı kenarları paralel olan ABCDEFGH sekizgeninde, ABCD, BCDE, ..., HABC dörtgenlerinin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu IJKLMNOP sekizgeninin karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir.

bunu herhangi 2n-gen için genelleleyebiliriz.

EK 5

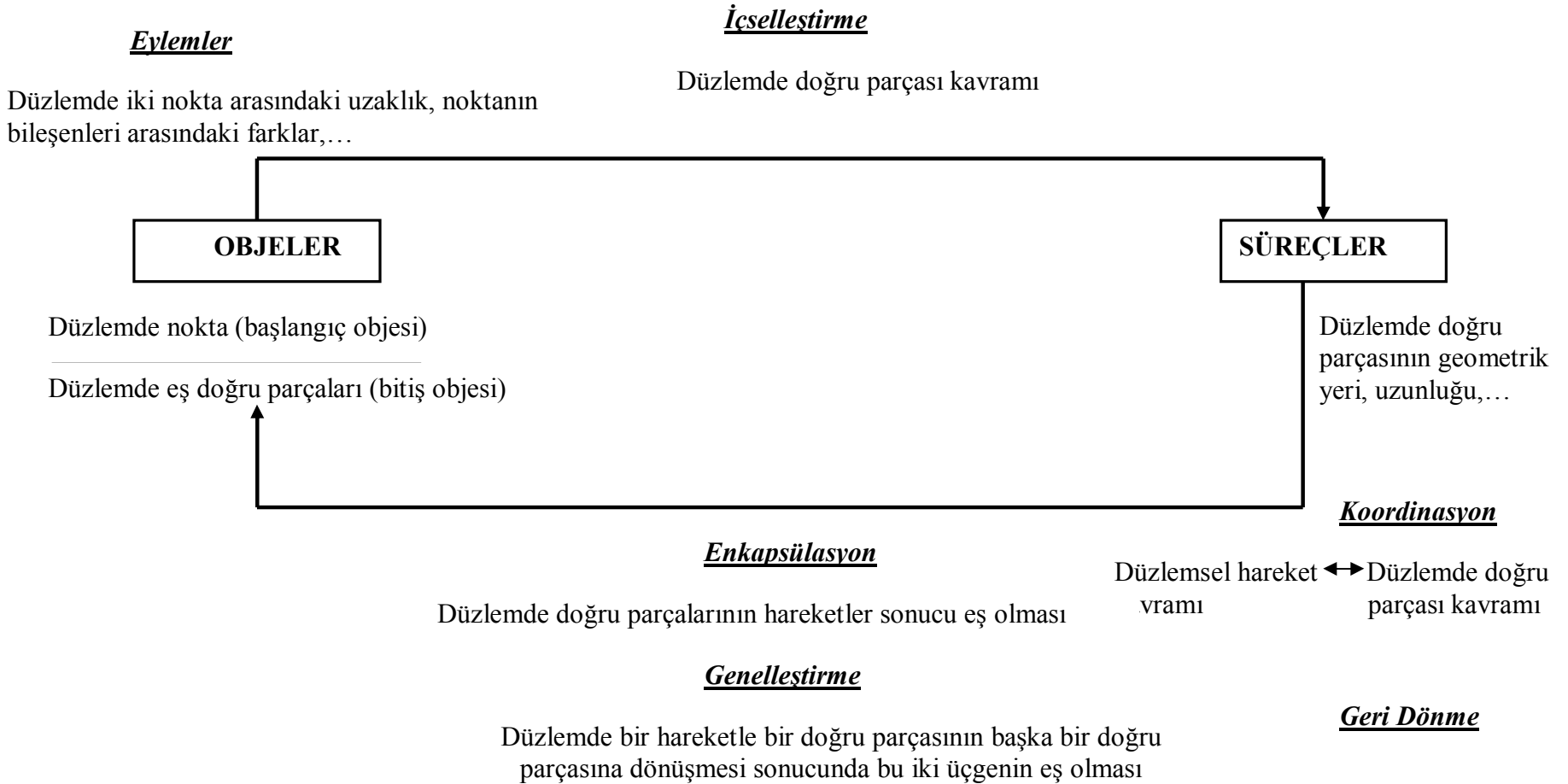
Reel Eksende Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Doğru Parçaları İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu

İçselleştirme



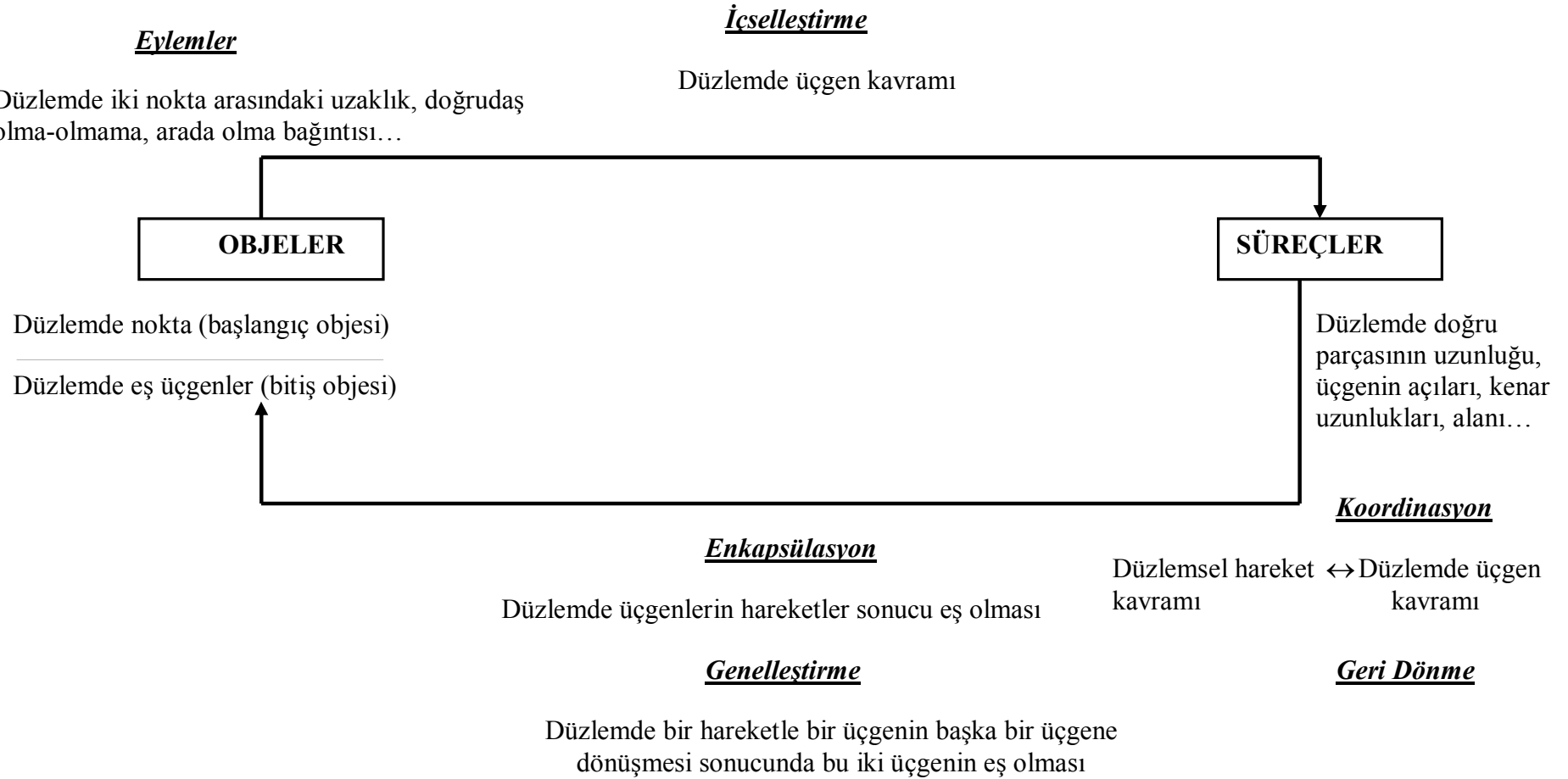
EK 6

Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Doğru Parçaları İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu



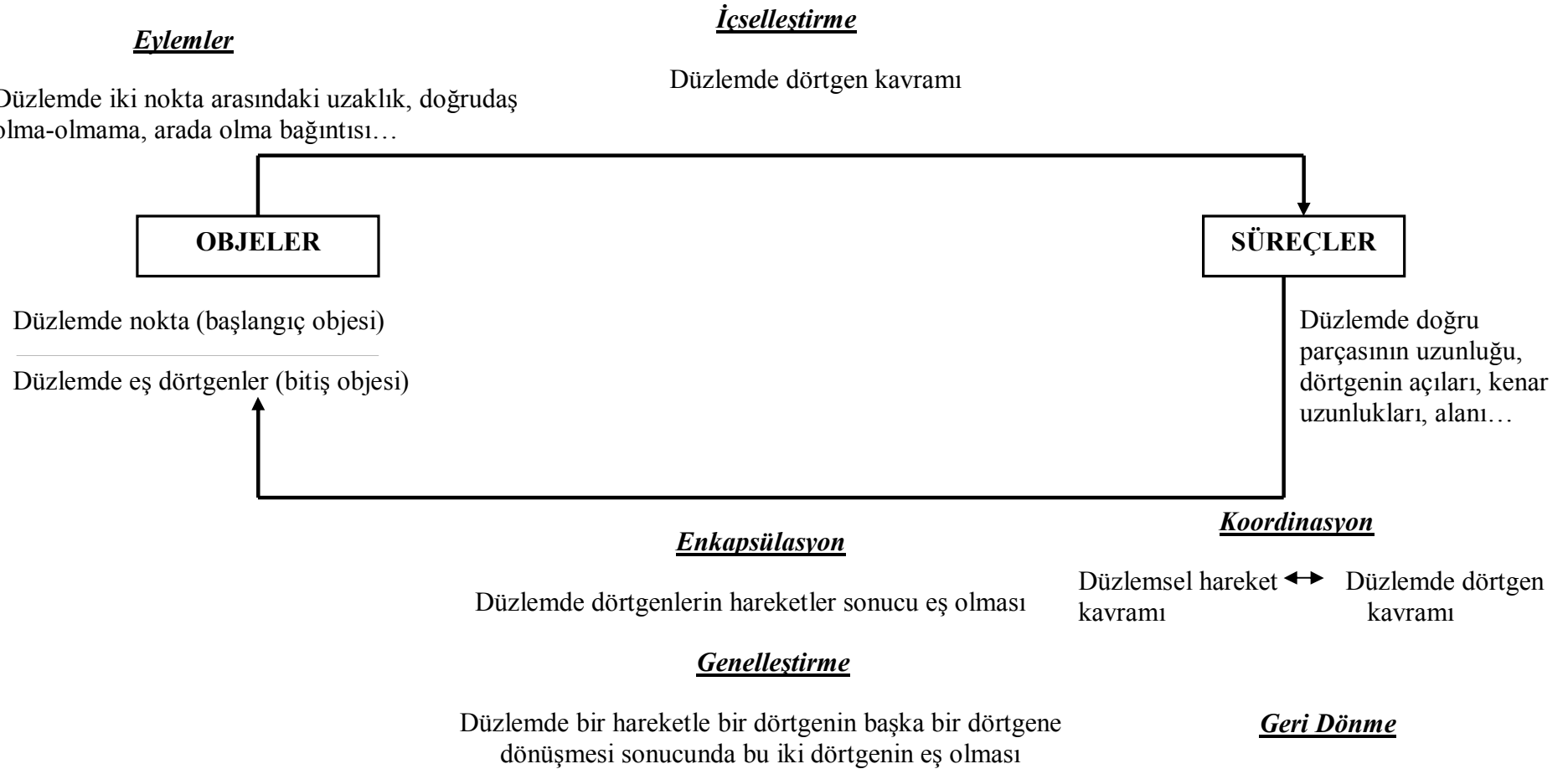
EK 7

Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Üçgenler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu



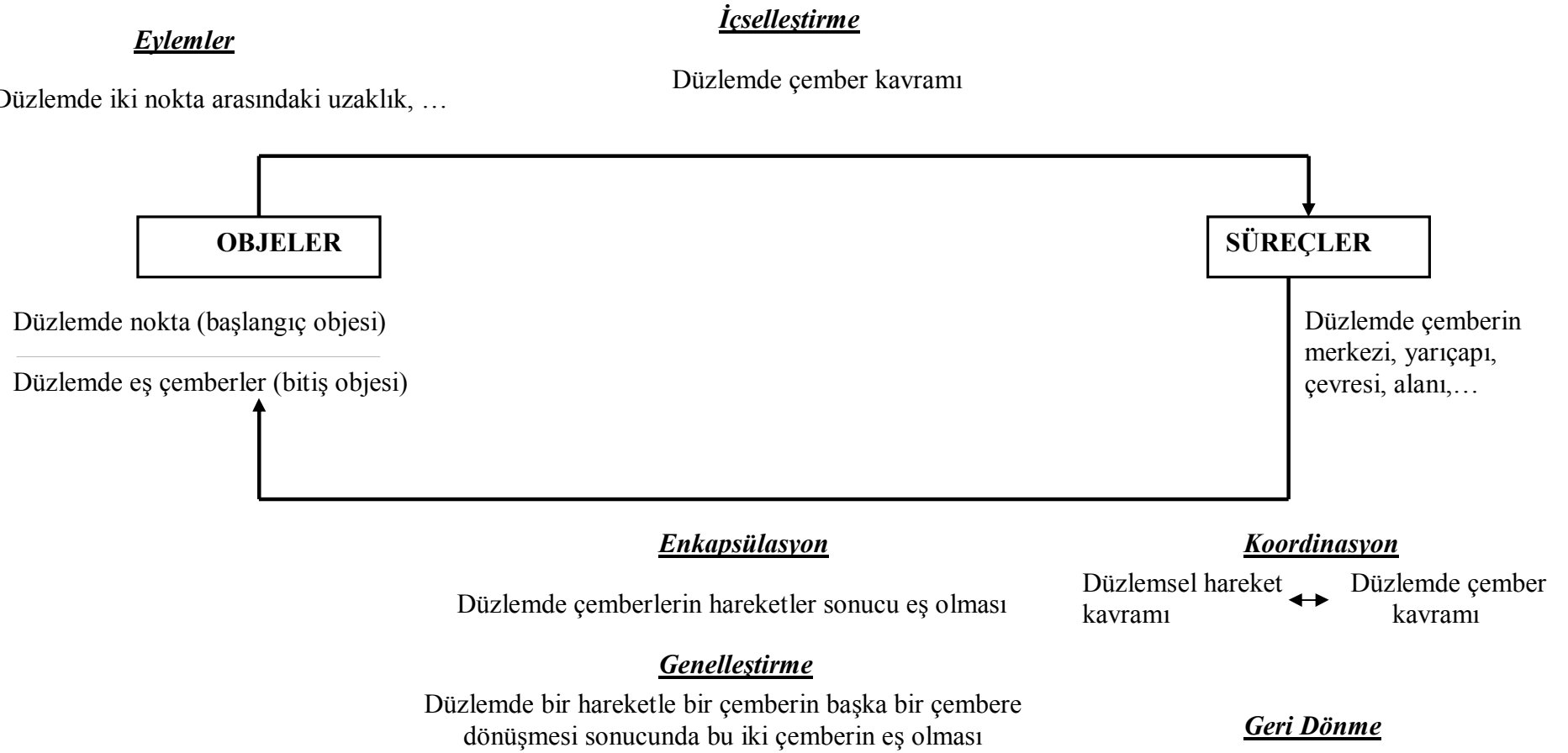
EK 8

Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Dörtgenler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu



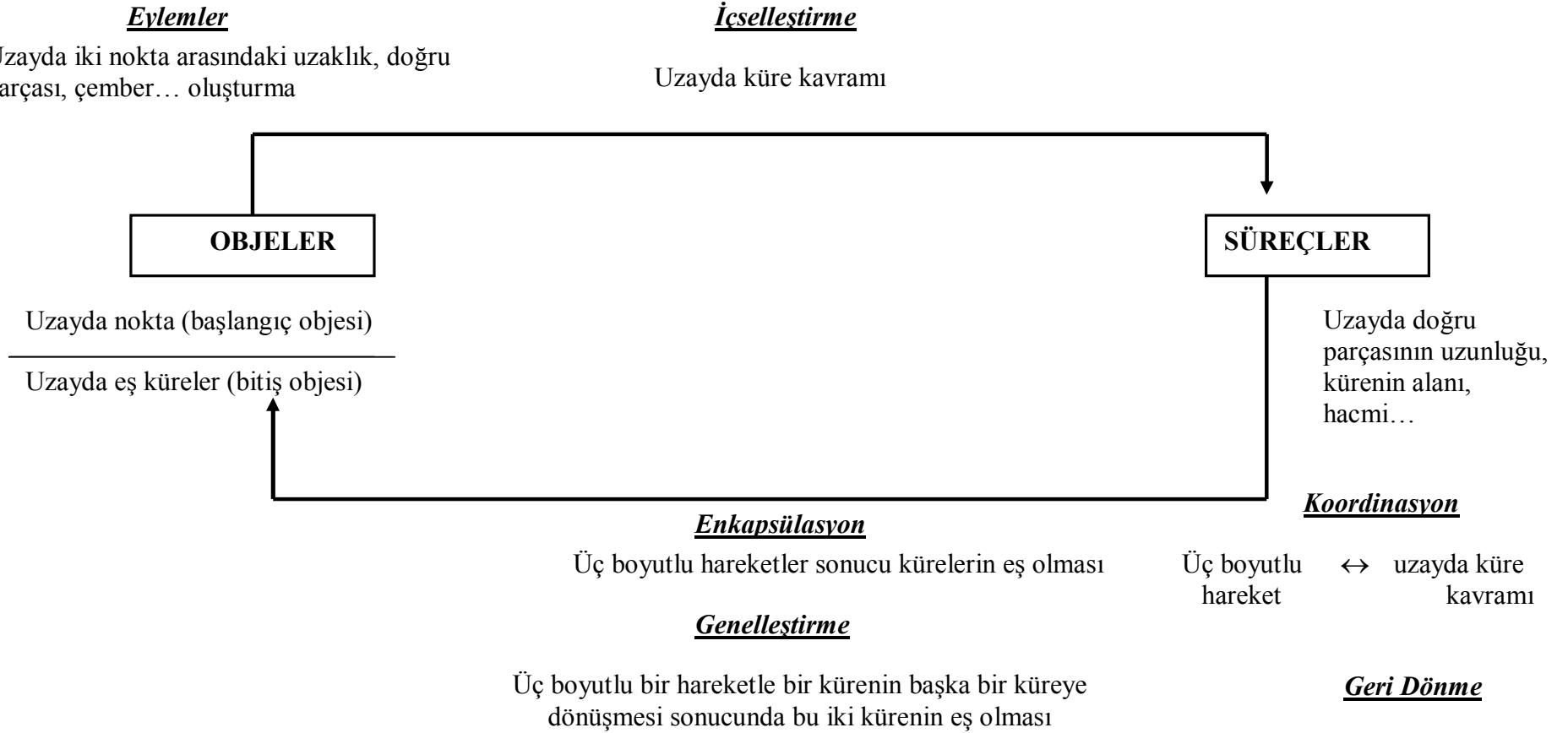
EK 9

Düzlemde Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Çemberler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu



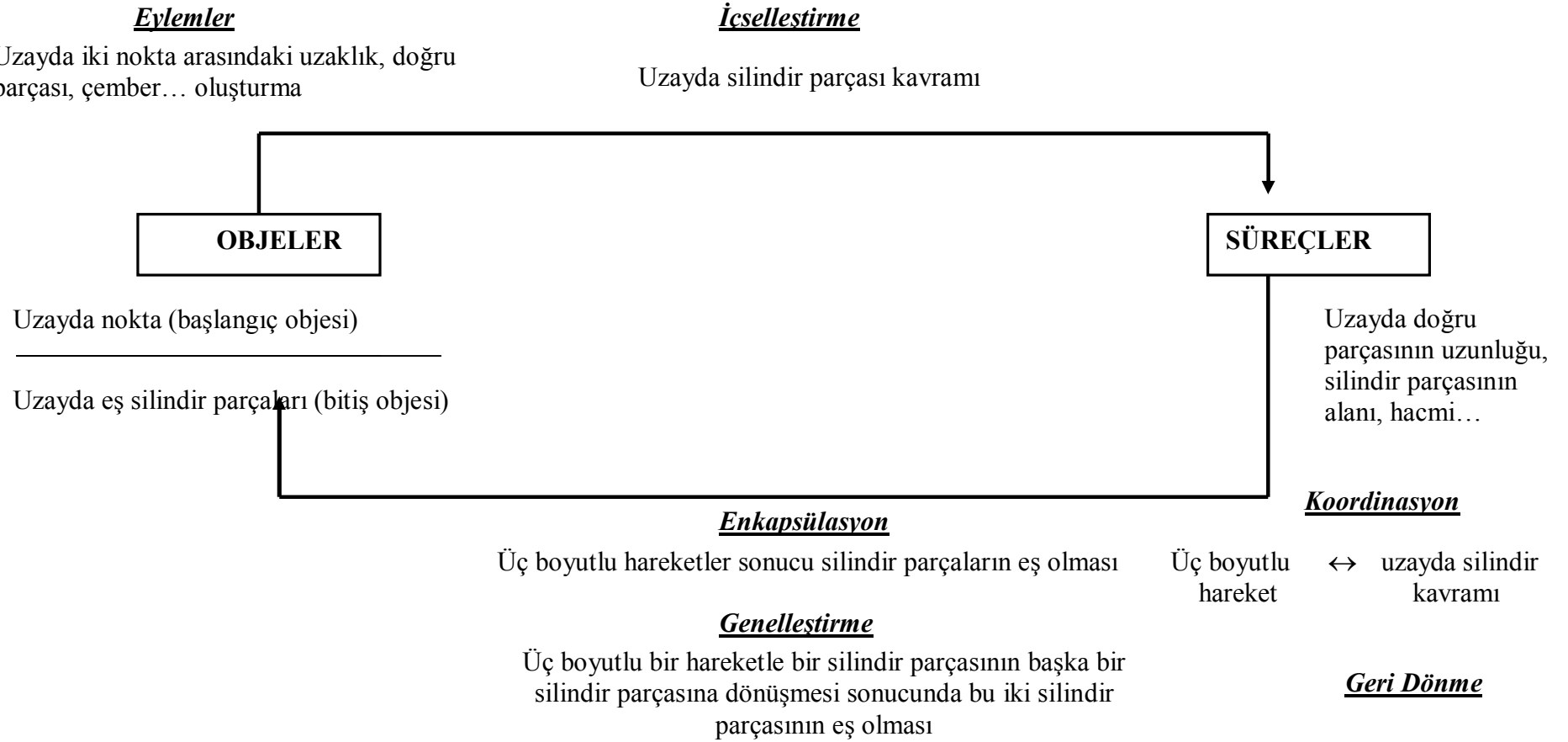
EK 10

Uzayda Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Küreler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu



EK 11

Uzayda Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Silindir Parçaları İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu



EK 12

Uzayda Hareketler Sonucu Elde Edilen Eş Piramitler İle Oluşturulan Şemanın Organizasyonu

Eylemler

Uzayda iki nokta arasındaki uzaklık, doğru parçası, üçgen, dörtgen... oluşturma

İcselleştirme

Uzayda piramit kavramı

OBJELER

SÜREÇLER

Uzayda nokta (başlangıç objesi)

Uzayda eş piramit (bitiş objesi)

Uzayda doğru parçasının uzunluğu, piramidin alanı, hacmi...

Enkapsülasyon

Üç boyutlu hareketler sonucu piramitlerin eş olması

Koordinasyon

Üç boyutlu hareket ↔ uzayda piramit kavramı

Genelleştirme

Üç boyutlu bir hareketle bir piramidin başka bir piramidedönüşmesi sonucunda bu iki piramidin eş olması

Geri Dönme

EK 13

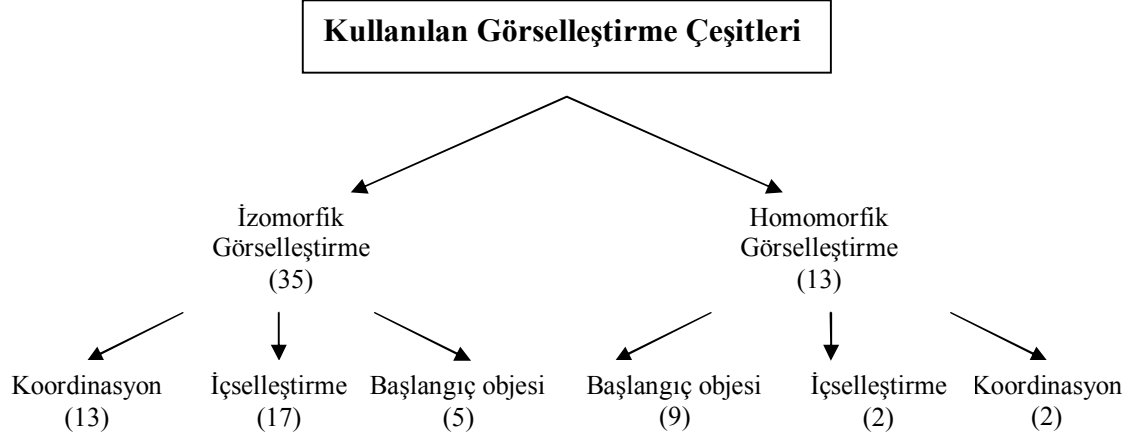
Soyutlama Sürecinde Katılımcıların Başvurduğu Görselleştirme Çeşitleri

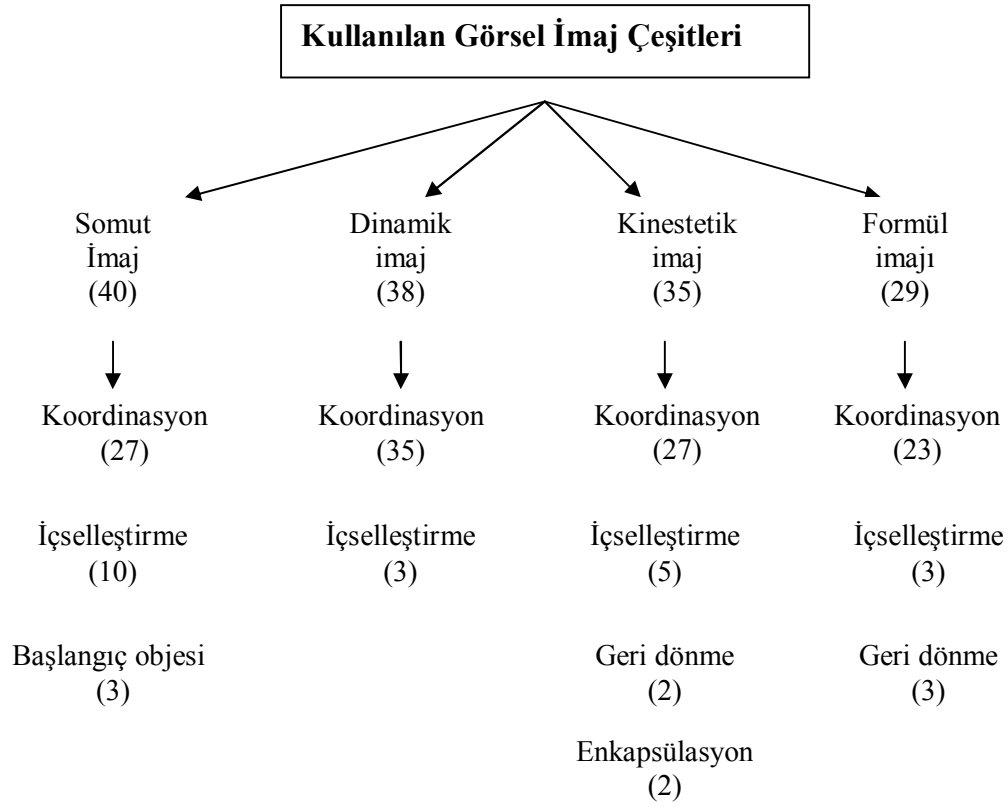
	ÖZGE	MERT	TARIK	GÖNÜL	FİLİZ
1.Durum	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Başlangıç bjesi:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>
2. Durum	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i>	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>İzomorfik</i>
3.Durum	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>İzomorfik</i>
4.Durum	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>
5.Durum	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>
6.Durum	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	-	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>
7.Durum	<u>İçselleştirme:</u> <i>Homomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	-	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>İçselleştirme:</u> <i>Homomorfik</i>
8.Durum	<u>Başlangıç objesi:</u> <i>Homomorfik</i> <u>İçselleştirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	-	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>Homomorfik</i>
9.Durum	-	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>	-	<u>Koordinasyon:</u> <i>Homomorfik</i>	<u>Koordinasyon:</u> <i>İzomorfik</i>

EK 14

Soyutlama Sürecinde Katılımcıların Sahip Olduğu Görsel İmaj Çeşitleri

	ÖZGE	MERT	TARIK	GÖNÜL	FİLİZ
1.Durum	<u>İçselleştirme:</u> Kinestetik imaj Dinamik imaj <u>Koordinasyon:</u> Somut imaj Dinamik imaj	<u>İçselleştirme:</u> Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Dinamik imaj <u>Enkapsülasyon:</u> Kinestetik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	Başlangıç objesi: Somut imaj <u>İçselleştirme:</u> Kinestetik imaj Formül imajı Dinamik imaj <u>Koordinasyon:</u> Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj Dinamik imaj <u>Geri dönme:</u> Kinestetik imaj Formül imajı
2.Durum	<u>İçselleştirme:</u> Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Formül imajı	Başlangıç objesi: Somut imaj <u>İçselleştirme:</u> Dinamik imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Formül imajı	<u>İçselleştirme:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı	<u>İçselleştirme:</u> Somut imaj Formül imajı <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Dinamik imaj	<u>İçselleştirme:</u> Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Dinamik imaj <u>Geri Dönme:</u> Formül imajı
3.Durum	<u>İçselleştirme:</u> Kinestetik imaj Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Formül imajı Dinamik imaj	<u>İçselleştirme:</u> Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Formül imajı	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj	<u>İçselleştirme:</u> Kinestetik imaj Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Formül imajı	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj
4.Durum	Başlangıç objesi: Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj <u>Geri Dönme :</u> Kinestetik imaj Formül imajı	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj	<u>İçselleştirme:</u> Somut imaj <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Formül imajı	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj
5.Durum	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>İçselleştirme:</u> Somut imaj Formül imajı <u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj
6.Durum	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj
7.Durum	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj
8.Durum	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj Dinamik imaj
9.Durum	<u>Koordinasyon:</u> Formül imajı	<u>Koordinasyon:</u> Somut imaj Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Formül imajı Dinamik imaj	<u>Koordinasyon:</u> Kinestetik imaj Somut imaj Dinamik imaj

EK 15**Soyutlama Sürecinde Başvurulan Görselleştirme Çeşitlerinin Frekansları**

EK 16**Soyutlama Sürecinde Sahip Olunan Görsel İmaj Çeşitlerinin Frekansları**

EK 17

Birinci Görüşme Örnekleri

1. Aşama

1. Durum

G: Sana birkaç tane nokta vereceğim. A noktası -1 , B noktası 3 , C noktası 2 ve D noktası da 6 olsun. AB ve CD doğru parçalarını göz önüne aldığında hareketlerden birisi yardımıyla bu doğru parçalarından birisinden diğerini elde edebilir misin?

Özge: Hareketlerden birisi yardımıyla birinden diğerini elde edebilir miyim? Şimdi... A noktası -1 , B noktası 3 , C noktası 2 , D noktası 6 . Şimdi doğrulardan birinin hareketi yardımıyla diğerini elde edebilir miyim diyorsunuz. Huum... Mesela (çizmeye başlıyor) bu -1 , 2 buradaki. Aradaki farka bakarsak aralarındaki fark $2+1, 3...$ 3 birim bu ilerlemiş. Sonra buna bakarsak 3 noktası 6 noktasına gelmiş. O zaman B noktası 3 birim ilerlediğine göre 3 birimlik bir öteleme yapılmış diye düşünüyorum ben. Yani A noktasını 3 birim olarak ilerletirsek (parmakları ile taşıyor) koordinat sistemini de düşünürsek -1 noktasından 2 noktasına gelmiş. O zaman 3 birimlik ötelenmiş. O zaman B noktasını düşünürsek B noktası da 3 noktasından 6 noktasına gelmiş. Orada da 3 birimlik ötelendiğine göre 3 birimlik ötelenme sonucunda AB doğru parçasından CD doğru parçası elde edilebilir.

G: Peki bunu elde etmek istesen yani 3 birimlik ötelemeyi nasıl elde edersin?

Özge: Denklem olarak... Elde etmek istersem... Şimdi doğru parçası... mesela (çizmeye devam ediyor) iki boyutlu düzlemde, hayır... bir boyutlu düzlemde... İki boyutlu düzlemde düşünürsek şöyle. Mesela bu x desek şuna da y desek $(-1, 3)$. Şimdi buna da x' , y' desek $(2, 6)$. x e 3 birim yani $x+h$, $y+h$ desek bunlar da 3 birim yani A noktasının 3 birimlik ilerlemesiyle B noktası elde edilmiş diye düşünüyorum.

G: Peki bu iki doğru parçasına baktığın zaman bu iki doğru parçasının uzunlukları ile ilgili ne düşünüyorsun?

Özge: Birbirine eşit uzunlukları.

G: Neden?

Özge: Şimdi bunun uzunluğu 4 birim. İlk noktası 3 eksi -1 , 4 birim diye düşündüm. Diğerinin ki 6 eksi 2 , 4 birimlik uzunluk var. Bu doğru parçalarının uzunluğu eşittir.

G: Peki burada farkına vardığın bir şey var mı?

Özge: Farkına vardığım şey... Bize bu doğru parçası verilmiş ve öteleme yapılmış ve her iki noktada da aynı öteleme 3 birimlik öteleme uygulanıyor ve başka bir doğru elde ediliyor. Baktığımızda bu iki doğrunun uzunlukları da eşit. O zaman eğer öteleme yapılırsa bir doğru öteleme yapılan diğer doğruyla uzunlukları eşittir yani başka bir doğru elde edilmez.

G: Peki bu iki doğru için ne söyleyebilirsin?

Özge: İki doğru için sadece yerleri farklıdır, eşdeğerdir diyebilirim.

2. Aşama

2. Durum

G: A noktası $(-2,1)$, B noktası $(0,3)$, C noktası $(2,-3)$, D noktası $(4,-1)$ olsun. Bu noktaları düşündüğünde AB ve CD doğru parçalarını göz önüne aldığında bu doğru parçalarının birisinden yola çıkarak bir hareket yardımıyla diğerini elde edebilir misin?

Özge: Şimdi buna bakacak olursak bu -2 ye 1, bu da 0 a 3, bu 2 ye -3, bu da 4 e -1 (çiziyor). Birinden yola çıkarak diğerini bulabilir miyim?... Şimdi aradaki farklara bakmaya çalıştım. Mesela şu birinci bileşenlere baktığımızda 4 birimlik bir artma görünüyor. Buradakilere baktığımda burada da 4 birimlik bir artma görünüyor. Buraya baktığımda 4 birimlik bir azalma burada da 4 birimlik azalma görünüyor. O zaman bunların birinci bileşenleri 4 birimlik bir değişmeye uğramış, ikinci bileşenleri de 4 birimlik bir azalma yani azalma dediğim hani -4. Aradaki fark -4 olarak düşündüğümde ikinci bileşenler elde edilmiş. Yani Im... Bundaki değişme de mesela denklem olarak ifade edersek $x + h$ ve $y + k$ dersek buradaki h yi 4, k yı da -4 diye yazabiliriz.

G: Bu hangi hareket olur?

Özge: Bu öteleme...

G: Bu iki doğru parçasının uzunlukları ile ilgili ne düşünüyorsun?

Özge: Bu iki doğru parçasının uzunlukları... Şimdi iki bileşen verilmiş bunun uzunlukları karekök içinde birinci bileşenleri arasındaki fark $x_1 - x_2$ nin karesi artı $y_1 - y_2$ nin karesi. Buradan bakacak olursak -2 eksi 0 ın karesi 4, 1 eksi 3 ün karesi 4, kök sekiz desek diğeri... 4 artı 4 bu da kök sekiz oluyor. O zaman gerçekten bu doğruların uzunlukları birbirine eşit.

G: Burada fark ettiğin bir şey var mı?

Özge: Burada fark ettiğim şey iki bileşen yani iki boyutlu uzayda öteleme yapıldığında da... diğer doğru... yani aslında sadece uzaydaki yerleri farklı oluyor. Yani bunlar yine eşdeğer olacak.

3. Durum

G: Sana üç tane nokta versem. İlk nokta orijin noktası $O(0,0)$ olsun. Diğerleri A noktası $(4,0)$ B noktası $(0,4)$ olsun. Bu noktaları düşündüğünde, OA ve OB doğru parçalarını göz önüne alırsan birisinden yola çıkarak hareketlerden birisi yardımıyla diğerini elde edebilir misin?

Özge: Şimdi OA yı yazacak olursak... 0 a 0 , 4 e 0 , 0 a 0 , 0 a 4 . Bu da B (çiziyor)... Hareketlerden birisi yardımıyla diğerini elde edebilir miyim?... Burada elde edemem. Yani şimdi orijin noktası değişmemiş... Şurası orijin, şurası 0 , burası da 4 . Hım... Hayır, bunu doksan derecelik dönmeyele elde edebiliriz. Şöyle düşünecek olursak OA yı biz eğer doksan derece döndürürsek, OB yi elde etmiş oluruz.

G: Bunu nasıl elde edebilirsin?

Özge: Bunu elde etmeye çalışabilir miyim?... Hım... Şimdi burada o zaman şöyle bir şey döndürme, doksan derece döndürme uygulanmış. Bunun da koordinatlarını bulmaya çalışırsak mesela o zaman burada dönme açımız $\pi/2$. Yani $\theta = \pi/2$. Şimdi bunun denklemi de $x \cos \theta$, $y \sin \theta$ dan... Şimdi birinci bileşen... 0 çarpı $\cos \pi/2$, 0 . $-y$... 0 çarpı $\sin \pi/2$ dir. Burada zaten orijin değişmiyor. Sonuçta bizim şu açılarımız değişecek yani 4 e 0 iken, 0 a 4 elde etmemiz gerekiyor. O zaman şöyle diyecek olursak x eşittir 4 çarpı 0 . 0 çarpı 0 birinci bileşen 0 zaten. Öbürüne de uygulayacak olursak x' yani 4 çarpı $\sin \pi/2$ de $1 + 0$ çarpı 0 , 4.0 Evet, o zaman bu doğru parçasından öbürünü elde etmiş olduk.

G: Peki bu iki doğru parçasının uzunlukları ile ilgili ne düşünüyorsun?

Özge: Uzunlukları eşit. Çünkü koordinat sisteminde uzunlukları eşit.

G: Peki burada fark ettiğin bir şey var mı?

Özge: Burada fark ettiğim şey de yine bir doğru parçasını biz 90 derece döndürdüğümüzde... Sadece işte yeri değişiyor olarak fark ettim. Başka bir şey fark etmedim yani dönme sonucunda da yine eşdeğer bir doğru elde etmiş oluyoruz.

4. Durum

G: Senden bir üçgen düşünmeni istesem... Köşeleri; O köşesi $(0,0)$, A köşesi $(2,0)$, B köşesi $(2,1)$ olan OAB üçgeni ile köşeleri O $(0,0)$, C $(0,2)$ ve D $(-1,2)$ şeklinde OCD üçgenini düşünsen... Bu iki üçgeni göz önüne aldığında yine hareketlerden biri yardımıyla bu üçgenlerden birini diğerine dönüştürebilir misin?

Özge: Hım... Hareketlerden biri yardımıyla... Şimdi koordinat sistemini çizelim. Şimdi şurası O , şurası A , şurası da B . $(0,0)$ şu, öbürü de $(0,2)$. Diğerini elde edebilir miyim?... Hım... Şimdi aradaki farklara bakmaya çalışıyorum. Eğer öteleme ise veya dönmeyse onları bulmaya çalışıyorum ama... Şunu bir, iki burası 2 birim burası da 2 birim. Şöyle şu tarafa getirsek aynı üçgeni elde etmez miyim?

G: Sence?

Özge: Tabi aynı üçgeni elde ederiz. Nasıl olur?... Şimdi, şu iki birim. Bunu doksan derece döndürdüğümüzde elde edilir. Doksan derece şu üste çıkardığımızda iki birim olur. Şuradaki uzunlukta buraya gelir. Yani elde etmiş oluruz. Yani doksan derece dönmeye... Elde etmeye çalışıyorum. Bunlar aynı zaten. Şimdi şu bileşenle $(2,0)$ bileşeni ile $(0,2)$ yi karşılaştırsak... x eşittir x' kosinüs θ artı..., y eşittir x' sinüs θ artı y' kosinüs θ . Burada θ ; $\pi/2$ ve x' de 2 idi. Bu 0 zaten. $x=0$ çıkıyor zaten yine. y eşittir x' ; 2 çarpı 1 artı sıfır çarpı sıfır. $y=2$. O zaman gerçekten $(2,0)$ noktasından biz $(0,2)$ noktasını dönmeye elde ettik. Şimdi şu noktayla da şu noktayı karşılaştıracamız. Yani $(2,1)$ noktasından da diğer noktayı elde etmeye çalışacağız. $x=-1$ çıktı. Y de yine 2. $(2,1)$ den $(-1, 2)$ yi elde ettik.

G: Peki neler düşünüyorsun?

Özge: Ne düşünüyorum?... Yine üçgen doksan derece dönmesiyle sadece yerini değiştirmiş. Yine aynı üçgeni elde ettik. Yani dönme sonucunda bir değişiklik olmadı.

G: Peki bu iki üçgenin açıları ile ilgili ne düşünüyorsun?

Özge: Açıları da değişmedi.

G: Kenarları ile ilgili?

Özge: Kenarları da değişmedi.

G: Alanları ile ilgili?

Özge: İı. Alanları da değişmedi.

G: Peki o zaman burada farkına vardığın bir şey var mı?

Özge: Yani bu üçgenler eştir. Alanları, çevreleri, her şeyleri birbirine eşittir.

5. Durum

G: Köşeleri $A(-5,-3)$, $B(-2,-2)$, $C(-1,-1)$, $D(-4,1)$ olan ABCD dörtgeni verilsin. Yine köşeleri $E(0,1)$, $F(3,2)$, $G(4,3)$, $H(1,5)$ olan EFGH dörtgeni verilsin. Bu iki dörtgeni göz önüne aldığın zaman bir hareket yardımıyla birinden diğerini elde edebilir misin?

Özge: Şimdi bakmaya çalışalım. Koordinat düzlemini düşünecek olursak, $A(-5,-3)$ müş (çiziyor). Şimdi şu A noktası ve $B(-2,-2)$ bu da B noktası. $C(-1,-1)$. $D(-4,1)$. Böyle bir şey elde ettik. Hım... Şöyle yapsak yani aralarındaki uzaklıkları ben bulsam da onlara göre bir eşleştirme yapsam?... Ona göre dönme mi öteleme mi olduğunu anlayabilelim. Ama ne kadar dönme? Im... Şimdi E,F,G. hım... H de $(1,5)$. Şöyle bir şey. Şimdi ben bunların arasındaki uzaklıkları bulsam, -5, -4. Bunların arasındaki uzaklık 1. 3, -1,.. 4, 16. Yani $\sqrt{17}$. Diğer $\sqrt{13}$. Mesela burada $9+4$. Bu da $\sqrt{13}$ çıktı. Diğer $1+1$. $\sqrt{2}$. Diğer $\sqrt{17}$, Gerçekten bunun dönmesiyle oluşmuş. Ama ne kadar dönmesiyle oluşmuş?...

G: Hareketin dönme mi olduğunu düşündün?

Özge: Evet.

G: Neden?

Özge: Hım... Neden? Şimdi iki dörtgen de eş bence. Uzunlukları eşit olduğuna göre. Ya dönme ya öteleme. Ama öteleme olması için de... Evet öteleme.

G: Neden?

Özge: Çünkü hiçbir dönme olmadan bu noktayı bu noktaya bu noktayı bu noktaya yani hiç dönmeden sonuçta belli bir kenarın kayması yani dönme belli bir açı kadar dönmesi sonucunda oluşur. Ama burada hiçbir dönme olmamış dedim ama şöyle döndürsek... Bu öteleme.

G: Neden?

Özge: Çünkü aradaki farklara baktığımda birinci bileşenleri 5 birim artmış, ikinci bileşenler de 4 birim artmış. Her bileşendeki artma aynı olduğuna göre bu öteleme hareketidir... Buna x' , şuna y' desem, x' birinci bileşenlerin 5 birim ötelenmesiyle... İkinci bileşenlerin 4 birim ötelenmesiyle y' elde edilmiş.

G: Bu iki dörtgene baktığın zaman bu dörtgenin açıları ile ilgili ne düşünüyorsun?

Özge: Açıları... Yani sonuçta öteleme olduğuna göre ötelemede de açılar değişmez. Çünkü aynı şeklin belli bir birim ötelenmiş birinci bileşenler de aynı şekilde artıyor,

ikinci bileşenler de aynı şekilde arttığı için aradaki açının değişmemesi gerekir diye düşünüyorum.

G: Kenarları için ne düşünüyorsun?

Özge: Şu anda zaten uzunlukları değişmemiş, yani uzunlukları birbirine eşit iki dörtgenin de.

G: Alanları için ne diyebilirsin?

Özge: Bence alanları da birbirine eşittir.

G: Burada farkına vardığın bir şey var mı?

Özge: Burada farkına vardığım şey benim, uzayımızı düşündüğümüzde dönmeye bir dörtgenin hiçbir şekilde hiçbir şeyinin değişmediği. Ne kenarı olsun, ne alanı olsun ne de uzunlukları olsun hiçbir şey değişmiyor. Yani eşdeğerdir. Yani eştir.

6. Durum

G: Merkezi $A(-3,4)$ ve yarıçapı 2 birimlik bir çember ve merkezi $B(2,-1)$ ve yarıçapı yine 2 birimlik başka bir çember göz önüne alırsan hareketler yardımıyla bir çemberden diğerini elde edebilir misin?

Özge: Bakalım. $A(-3,4)$ ve yarıçapı 2 birimlik... O zaman şuradan şöyle bir şey desek. B de

$(2,-1)$. Hımm... şöyle bir çember düşünelim. Buradan bu şekilde...

G: Ne düşünüyorsun?

Özge: Ne düşünüyorum?... Bence elde edebiliriz.

G: Neden? Nasıl elde edebilirsin?

Özge: Şimdi bunların yarıçapları eşit, şimdi şöyle hani döndürsek, yoksa ötelesek mi diye düşünüyorum ama mesela şunu bir birim aşağıya indirsek, yani ötelesek bir birim aşağıya gitti, sonra merkezi şuraya kaydık ama şöyle bir şey oldu... Sonra şöyle bir çevirsek bu sefer buraya geldi. Yani şöyle bir çember elde ettik. Bir birimde şöyle şu tarafa getirsek yani ötelesek aynı çemberi elde etmiş oluruz. Sonuçta şöyle çemberi döndürdüğümüzde çemberler çakışır diye düşünüyorum.

G: Peki bunu kaç hareketle yapmayı düşündün?

Özge: Ben bunu bir, iki, üç. Şuna getirmek için de dört hareket kullandım. Yani şöyle düşündüm. Hareket anlamında iki hareket, bir öteleme bir dönme kullandım. Yani ben bunu öteleme yaptım mesela aşağıya doğru bir öteleme yaptım... Aşağıya doğru bir

öteleme yapınca belli bir birim kadar yani şunu aşağıya kadar öteledim. Sonra bir de yana doğru bir öteleme yaptım. Şöyle çakışması için. Aslında hep öteleme hareketleri gibi sanki. Yani birinci bileşeni 5 birim kaydardım. Böyle mi desem? Nasıl elde ettim? Merkezini $(-3,4)$ bununki de $(2,-1)$. Yani şunun merkezinden 1,2,3, yani 5 birim kaydardım. Bunun merkezini de ben 5 birim kaydardım. Yani şunun merkezini 5 birim kaydırsam yani birinci bileşeni 5 birim kaydırsam oradan buraya getirmiş olacağım. İkinci bileşeni de 5 birim aşağıya kaydırsam yine bunu elde etmiş olurum. Olur mu acaba?...

G: Sence?

Özge: Immm... Yani merkeze x, y desem 5 birim kaydardım, bunu da 5 birim kaydardım. O zaman B merkezini elde ettim. B merkezini elde edince de bu iki çember birbiriyle çakıştı.

G: Bu iki çembere baktığın zaman neler düşünüyorsun?

Özge: Yani yarıçapları eşit.

G: Çevreleri için ne düşünüyorsun?

Özge: Yani yarıçapları eşit olduğu için çevreleri de eşit, alanları da eşit.

G: Burada farkına vardığın bir şey var mı?

Özge: Öteleme sonucunda yine aynı çemberleri elde ettim. Yani merkezlerini belli bir birim öteleme sonucunda yarıçapları aynı, alanları her şeyleri aynı olan başka bir çember elde ettik. O zaman bunlar da eş diyebiliriz.

3. Aşama

7. Durum

G: Senden merkezi A $(1,2,3)$ ve yarıçapı 1 birim olan bir küre ile yine merkezi B $(4,1,2)$ ve yine yarıçapı 1 birim olan başka bir küre düşünmeni istesem, bu iki küreyi düşündüğünde hareketlerden biri yardımıyla bunlardan birinden diğerini elde edebilir misin? Yani birini diğerine dönüştürebilir misin?

Özge: Şimdi üç boyutlu uzay desem...(çiziyor). Şimdi şöyle bir küre elde ettik. Ama yarıçapı 2 oluyor... Yarıçapı 1 birim. Yarıçapı 1. Ben bunun merkezini şöyle birleştiresem... Şöyle yapsak... Şöyle 1 birim olan bir küre... Bir küre düşünsek... Diğer

küreyi düşünsek... Bunlar öteleme yardımıyla oluşabilir mi diye düşünüyorum. Bence bu yine bir öteleme hareketi. Ama...

G: Evet?

Özge: Yarıçapları bir. Yarıçaplarında değişme olmamış. Eğer ben doğru yaptıysam aynı düzlemde buldum ama hani dönme olmaz birinci bileşen 4...

G: Ne düşünüyorsun?

Özge: Yani aralarındaki artmaya baksam desem, saçma geliyor sanki.

G: Neden?

Özge: Yani eşitlik yok. Bunda birincisinde üçlük artma, ikincisinde birlik azalma üçüncüsünde birlik artma var. Ama burada mesela bir şeylik vardı... Bence bu öteleme hareketi. Yani sanki aynı şeyde yarıçapları bir, bir noktadan belli bir noktaya ötelenmiş. Ama pek gözümde canlandıramıyorum. Açıkçası yani gözümde canlandıramıyorum. Ben sanki bunları yanlış çizdim gibime geliyor. Nasıl söyleyebilirim ki...

G: Peki ne düşünüyorsun? Yani bu iki küre için ne düşünüyorsun?

Özge: Açıkçası ben bunları çok iyi çizemediğimden yani gözümde canlandıramadığımdan yani herhalde öteleme de olacağını düşünüyorum ama nasıl anlatabilirim ki... Yani...

G: Üç boyutlu olması mı seni zorladı?

Özge: Evet. Üç boyutluya geçmesi beni zorladı. Yani şöyle doğru çizip çizemediğimi anlayabilsem. Nasıl söyleyim... Elimde bir şey olsa onu nasıl... Nasıl yapabilirim ki... Öteleme mi?...

G: Üç boyutlu düşünmek zorluyor herhalde seni?

Özge: Evet. Aslında bir formül elde edemeyeceğim, nasıl olacağını anlatacağım... Yani sonuçta üç boyutlu uzaydaysa mesela şu bir küreyse bunun ötelenmesini yani yer değiştirmesini anlatamıyorum ki yani... Im... Şu merkez olmak üzere üç boyutlu uzayda merkezin sabit bir şekilde kaydırılması diye anlatabilirim hani. Elde edebileceğim tek şey.

G: Merkezlere baktığın zaman ne görüyorsun?

Özge: Yani eğer öteleme diye düşünürsem, üç birimlik artma, bir birimlik artma diye...

G: Bunu nasıl yapıyorsun?

Özge: Yani eksenler üzerinden... Noktaların eksenlere göre kaydırılması olduğunu düşünüyorum.

G: Bu iki kürenin alanları için ne düşünüyorsun?

Özge: Alanları için... Yarıçapları eşit. Yarıçapları eşit olduğu için alanları da eşit olur diye düşünüyorum. Hacimlerini düşünürsek hacimleri de eşit. Yani bunların her şeyleri eşit. Ama göremediğim için emin olamıyorum... Sadece öyle olur gibi geliyor...

G: Burada farkına vardığın bir şey var mı?

Özge: Burada farkına vardığım şey hareketi tam olarak yapamamam da sonuçta yarıçapları eşit, alanları falanda eşit olan... Uzayda kapladığı yerde yani hacimleri de eşittir. O zaman bu küreler eş gibi gözüküyorlar.

8. Durum

G: Merkezi $A(2,0,0)$ ve yarıçapı 2 birim, yüksekliği 3 birim olan bir silindir parçası ile Merkezi $B(-2,0,0)$ ve yarıçapı 2 birim, yüksekliği 3 birim olan diğer bir silindir parçasını düşündüğünde hareketlerden biri yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir misin?

Özge: Dönüştürebilirim. Burada 4 birimlik... Yani sonuçta $(2,0,0)$ lık bir şey olsun... (çiziyor). Şöyle bir şey düşünecek olursak, şimdi yarıçapı 2, şu yükseklik de 3. Yani bu da bence öteleme sonucunda oluşmuş.

G: Niye öteleme olduğunu düşündün?

Özge: Çünkü x eksenini üzerinde yarıçapları zaten eşit, yükseklikleri de eşit. Belli bir birim kaydırırsak yani ötelenmesiyle elde edebileceğimi düşünüyorum.

G: Peki bunu elde etmek istersen nasıl elde edersin?

Özge: Bunu elde etmeye çalışırsam yani yarıçapın birinci bileşenini, yarıçap... Yarıçapın merkezini belli bir birim derece kaydırırsak birinci bileşeni zaten aynı doğrultuda olacak. Yani öbürü elde edilebilir. $(2,0,0)$... Atıyorum yüksekliği 3 birim. Öbürü de şurada desek o da şöyle bir şey... Bunu bir birim kaydırmakla elde ederiz. Yani birinci bileşenlerini şu silindirin x eksenini üzerinde belli bir birim ötelenmesiyle öbürü elde edilir.

G: Belli bir birim dediğin ne?

Özge: Mesela bu şekle göre düşünürsek sanki bir birim gibi oluyor. 2 yani yüksekliği 3 birim olduğundan şurada da bir şey var. Yani şunların çakışması için yani öteleme var. 4 birim ilk bileşenin de 4 birim ötelenmesi sonucu yani 4 birim ilerlemesiyle ikinci silindirin çemberin merkezine ulaşılır. Öyle düşünüyorum.

G: Peki bu iki silindir parçasını göz önüne alsan neler düşünürsün?

Özge: Yarıçapları eşit, yükseklikleri eşit, buna göre alanı ve hacimleri eşit olur. Yani bunlar eşdeğer olur. Yani eş sayılırlar bunlar.

9. Durum

G: Taban köşeleri $A(-5,-4)$, $B(-3,-1)$, $C(-6,1)$, $D(-8,-2)$ ve yüksekliği 4 birim olan bir piramit ile taban köşeleri $E(4,-1)$, $F(6,2)$, $G(3,4)$, $H(1,1)$ ve yüksekliği 4 birim olan bir başka bir piramit göz önüne alırsan bir hareket yardımıyla birisini diğerine dönüştürebilir misin?

Özge: Burada birinci bileşenler 9 birim değişmiş. İkinci bileşenler de 3 birim değişmiş. Bence bu bir öteleme hareketi. Çizsem mi? Aslında bileşenlerine göre belli oluyor. Öteleme hareketi bu. Sonuçta yükseklikleri de eşit. O zaman bunların her şeyleri eşit olur. Kapladıkları alan da, hacim de... Bunlar da eşler.

4. Aşama

G: Bütün bu konuştuklarımızın sonucunda farkına vardığın bir şey var mı?

Özge: Yani şu anda yaptığımız tüm örneklerde ya öteleme ya dönme hareketini yaptık. Bunun sonucunda da hiçbir şekilde ötelediğimiz bir şey bir doğru olsun, bir düzlem olsun, veya üç boyutlu bir yerde bir küre olsun hiçbir şekilde hiçbir özelliği değişmedi. Yani ne alanı ne hacmi değişti. Sadece uzaydaki yerlerini değiştirdik. Yani hep eş olarak bulduk. Bulduğumuz bütün şekillerde...

G: Peki sen üç boyutlu da neden tereddüt ettin?

Özge: Üç boyutluda tereddüt etmemin sebebi küreleri, silindir parçalarını veya piramiti doğru yerleştirip yerleştiremediğim. O yüzden bir yorum yapamadım. Tam olarak gözümde canlandırabilsem tam olarak bir şey söyleyebilecektim ama canlandıramadığım için olmadı.

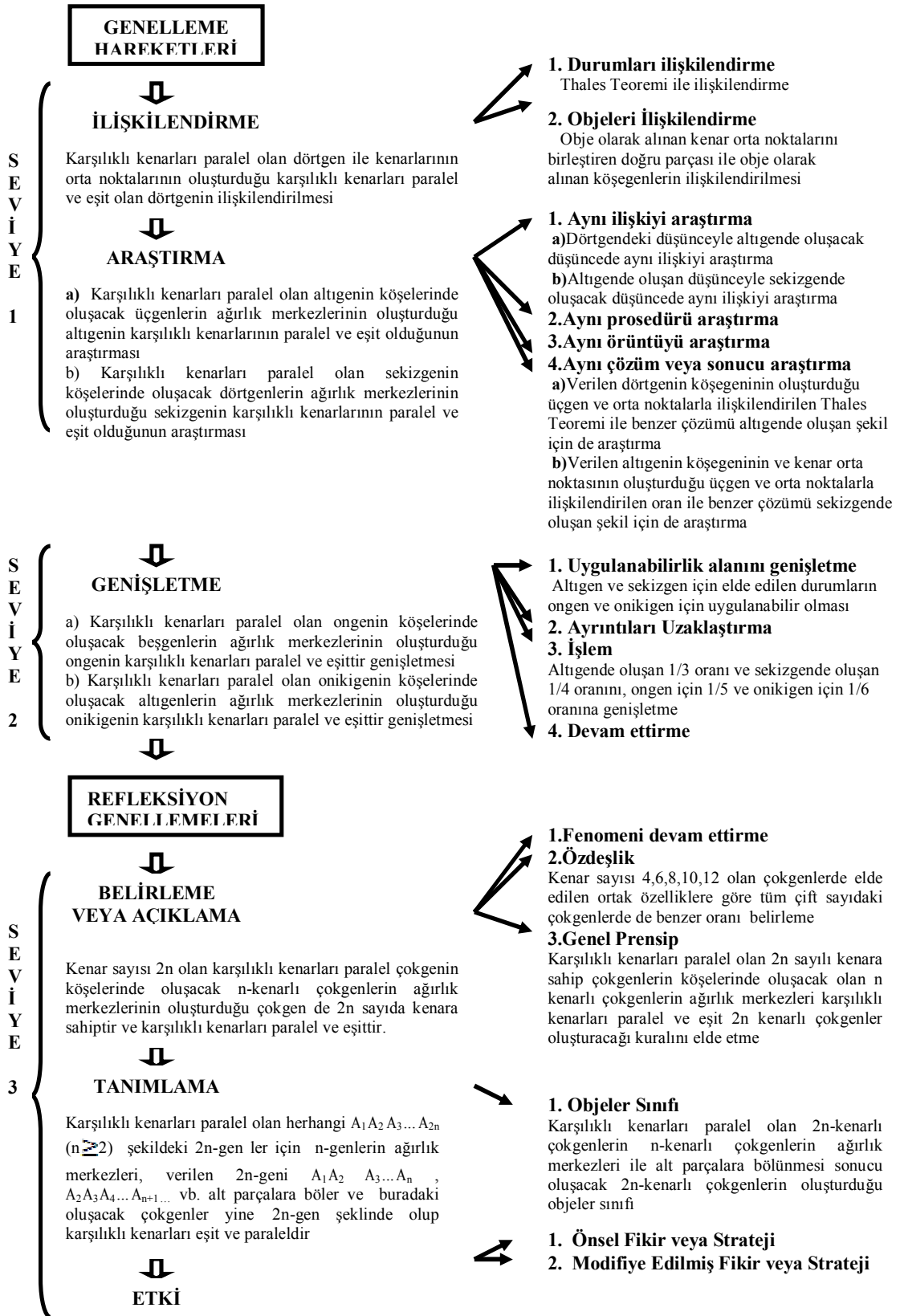
G: Peki sana canlandırmanın ne faydası olabilir diye düşünüyorsun?

Özge: Yani canlandırmanın şu gibi bir faydası olabilir. Koordinatlarını yani merkezini nasıl desem ayarlayamadım. Üç tane koordinat var. Üç tane koordinatı nasıl ayarlayacağımı düşünemedim. Sonuçta bir paralel oluşturuyorduk. Üçüncü bileşeni ona gelecek şekilde ayarlıyorduk falan ama kafamı karıştırdı. Yapamadım yani.

*Canlandıramadım. Canlandıramadığım için de bunları yorumlamakta zorlandım
aslında... Zihnimde oluşturmam tam olarak.*

EK 18

Genelleme Süreci İçin Oluşturulan Şemanın Organizasyonu



EK 19

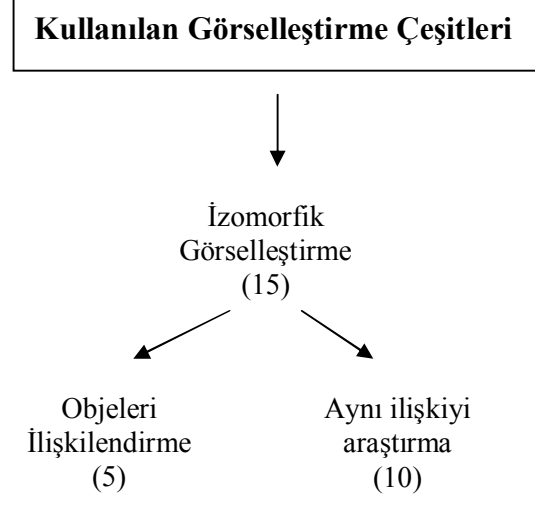
Genelleme Sürecinde Katılımcıların Başvurduğu Görselleştirme Çeşitleri

	ÖZGE	MERT	TARIK	GÖNÜL	FİLİZ
1.Aşama 1.Durum	<u>Objeleri</u> <u>ilişkilendirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Objeleri</u> <u>ilişkilendirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Objeleri</u> <u>ilişkilendirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Objeleri</u> <u>ilişkilendirme:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Objeleri</u> <u>ilişkilendirme:</u> <i>İzomorfik</i>
(1.Aşama) 2. Durum	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>
(1.Aşama) 3.Durum	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>	<u>Aynı ilişkiyi</u> <u>araştırma:</u> <i>İzomorfik</i>
2.Aşama 4.Durum	–	–	–	–	–
3.Aşama	–	–	–	–	–

EK 20

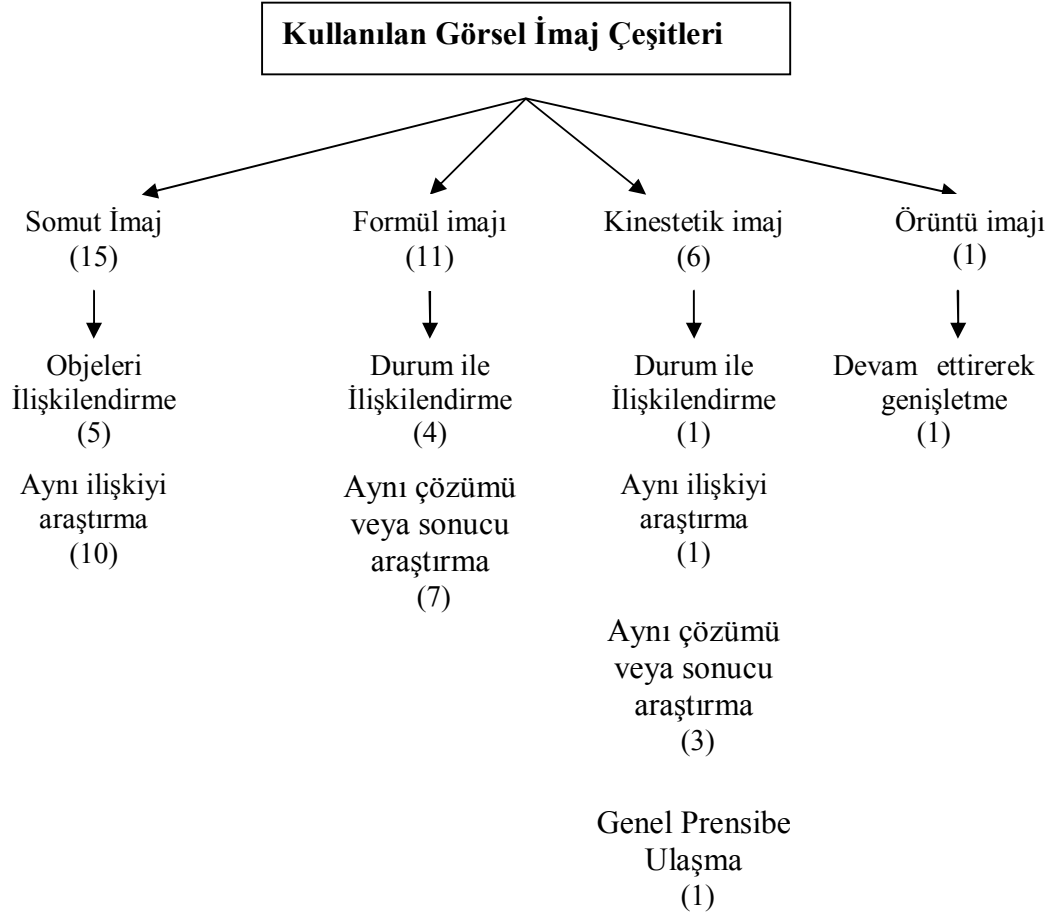
Genelleme Sürecinde Katılımcıların Sahip Olduğu Görsel İmaj Çeşitleri

	ÖZGE	MERT	TARIK	GÖNÜL	FİLİZ
1. Aşama 1.Durum	<u>Objeleri ilişkilendirme:</u> Somut imaj <u>Durum ile ilişkilendirme:</u> Formül imajı	<u>Objeleri ilişkilendirme:</u> Somut imaj <u>Durum ile ilişkilendirme:</u> Formül imajı	<u>Objeleri ilişkilendirme:</u> Somut imaj	<u>Objeleri ilişkilendirme:</u> Somut imaj <u>Durum ile ilişkilendirme:</u> Formül imajı Kinestetik imaj	<u>Objeleri ilişkilendirme:</u> Somut imaj <u>Durum ile ilişkilendirme:</u> Formül imajı
(1. Aşama) 2. Durum	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj <u>Aynı çözümü veya sonucu araştırma:</u> Formül imajı	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj <u>Aynı çözümü veya sonucu araştırma:</u> Formül imajı Kinestetik imaj	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj <u>Aynı çözümü veya sonucu araştırma:</u> Formül imajı Kinestetik imaj	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj <u>Aynı çözümü veya sonucu araştırma:</u> Formül imajı
(1. Aşama) 3.Durum	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj Kinestetik imaj <u>Aynı çözümü veya sonucu araştırma:</u> Formül imajı	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj <u>Aynı çözümü veya sonucu araştırma:</u> Formül imajı Kinestetik imaj	<u>Aynı ilişkiyi araştırma:</u> Somut imaj <u>Aynı çözümü veya sonucu araştırma:</u> Formül imajı
2. Aşama 4.Durum	<u>Devam ettirerek genişletme:</u> Örüntü imajı	–	–	–	–
3.Aşama	<u>Genel prensibe ulaşma:</u> Kinestetik imaj	–	–	–	–

EK 21**Genelleme Sürecinde Başvurulan Görselleştirme Çeşitlerinin Frekansları**

EK 22

Genelleme Sürecinde Sahip Olunan Görsel İmaj Çeşitlerinin Frekansları



EK 23**İkinci Görüşme Örnekleri****1. Aşama****1. Durum**

G: Senden karşılıklı kenarları paralel olan bir dörtgen düşünmeni istiyorum. Bu şekildeki bir ABCD dörtgeni için, AB kenarının orta noktası E, BC nin ki F, CD nin ki G, DA kenarını da orta nıktası H olsun. Buradaki EFGH şekli için ne düşünürsün?

Gönül: Bu da bir dörtgendir.

G: Bu dörtgenin karşılıklı kenarları için ne söyleyebilirsin?

Gönül: Bunun için...(çiziyor)... ABCD nin köşegen uzunluğunu çizecek olursam eğer ... ABCD yi iki eş üçgene ayırmış olurum. Bunlar eş üçgendir... Şimdi burada ABD üçgenine bakarsak, AE ve EB kenarı birebir, AH, HD kenarı birebir orantıda. Burada temel benzerlik teoremine göre 1 e 2 oranı var. Tales teoreminden dolayısıyla şu EH kenarı orta taban olmuş oldu. Yani şuranın uzunluğu 2 birimse buranın ki 1 birim. Benzer şekilde şunu da düşündüğümüzde, şu kenarlar eşittir. Paralelkenar olduğundan karşılıklı kenarlar eşit yani şunlarla şunlar aynı. BCD üçgeninde de düşündüğümde, 1 e 2 oranı var. Burası 2 birim yani burada da 1 e 2 oranı var. Şu ABD üçgeniyle CBD üçgeninin kenar uzunlukları aynı olduğundan bu üçgenler benzer üçgenler olup EH kenarıyla FG kenarı eşit olmuş olur. Şunlar aynı, dolayısıyla bunlar da aynı olmuş olur. Yani köşegen uzunluğunu baz aldığımızda, 1 e 2 oranı oldu. Bana lazım olan EFGH dörtgenini incelediğimde, karşılıklı kenarları eşit olan benzer şekilde, diğer köşegeni çizecek olursam... EF uzunluğuyla HG uzunluğunun eşit olduğunu görürüm. Yani başlangıçta verilen karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimde elde ettiğim yeni şekil başta herhangi bir dörtgen gibi gözüküyordu. Bu da karşılıklı kenarları paralel ve eşit olan bir paralelkenar olur.

2. Durum

G: Senden bir altıgen düşünmeni istiyorum. Köşeleri ABCDEF olan bu altıgenin karşılıklı kenarları paralel olsun ama eşit olması gerekmesin.

Gönül: Hım... Çizmesem acaba... Direk çizsem aslında, şu paralel, şu paralel,... Hıh... Tamam.

G: ABC üçgeninin ağırlık merkezi G, BCD üçgeninin ağırlık merkezi H, CDE nin I, DEF nin J, EAF nin K, FAB nin de L olsun. Bu ağırlık merkezlerinin oluşturduğu GHIJKL şekli için ne söyleyebilirsin?

Gönül: Şöyle biraz karıştıda, kırmızı kalemi alsam?

G: Tabi.

Gönül: Evet, şimdi. gördüğümüz gibi bir altıgen. Bu altıgenin az önceki gibi düşünecek olursak, düzgün altıgen olup olmadığını irdeleyebiliriz. Düzgün altıgenden kastım kenarlarının eşit olması. Hım... Bunun içinde kenar uzunluklarını kıyaslamak için az önce yaptığımız gibi birşey, köşegen uzunluğunu baz alabiliriz. Şu GL kenarı için öncelikle bakacak olursam, şu CD köşegen uzunluğunu alalım... Şimdi ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktasıdır. 1 e 2 oranında bölüyordu ama kenarortayların kesim noktası olduğunda bir de şöyle eşitliklerimiz var. Benzer şekilde buradan geçen kenarlarımızı iki eşit parçaya bölüyor. Şekil çok karıştı ama şöyle şimdi şunu da almıştım...

G: Ne düşünüyorsun?

Gönül: Ne düşünüyorum... Hım... Şimdi az öncekini baz alıyorum. Az öncekini şekil olarak da gördük bir de şekildi. Çok kolay, karışmadı daha doğrusu çizince. Burda da aynı şeyi yapmaya çalışıyorum mantiken tabi. Burada yaptığımızı gördük. Bunu üçgende yapabiliriz. Benzerliği... Bunun için biraz üçgenleri yakalamaya çalışıyorum... Hım... Şuradan alırsam.

G: Ne yapmaya çalışıyorsun?

Gönül: Şimdi bu yeni oluşan şekil bir altıgen ama düzgün mü? Yani kenar uzunlukları aynı mı?

G: Karşılıklı kenarları için ne düşünürsün?

Gönül: Şimdi karşılıklı kenarları için ama şurada şöyle bir durum vardı. Burada az önce hani şekli çizerken hani genel şekli çizerken sadece karşılıklı kenarların paralel olması. Sonuçta eşitliğine baktık mesela...

G: evet?

Gönül: O zaman... Yani karşılıklı kenarları paraleldi.

G: Burada bu ağırlık merkezlerinin oluşturduğu şeklin karşılıklı kenarları için ne düşünebilirsin?

Gönül: O da paralel olabilir ama eşitliğini söyleyemiyorum.

G: Neden paralel sence?

Gönül: Paralel olduğu da şuradan. Çünkü bu yeni oluşturduğumuz şekil kenarortayların kesimi... daha doğrusu üçgenlerin ağırlık merkezleri oluyor. Bu ağırlık merkezleri de dediğim gibi kenarortayların kesim noktası olduğundan sonuçta belli bir orandadır. Yani 1 e 1 oranda bölmüş oluyor bunu üçgene tamamladığımızı düşünecek olursak. Mesela GL ile IJ tamamen eşit olduğunu aramaya çalışıyorum, ya da eşitliğinden ziyade paralellliği açısından...

G: Neden öyle düşünüyorsun?

Gönül: ... Şimdi şu L üçgenin ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktasını 2 ye 1 oranında bölüyor. Şimdi şu oranla şurada aldığım bir yer mesela M noktası için MN nin MB ye oranı hah MK nın ME ye oranları aynı. Kenarortayların kesim noktası olduğu için orta nokta MN nin MB ye oranıyla MK nın ME ye oranı aynı olmuş oldu. Dolayısıyla bu iki kenar paraleldir. Yani LK ile BE paraleldir.

G: Uzunlukları için bir şey söyleyebilir misin?

Gönül: Uzunluk için yani şurası 2 ye 1 oranda da, şeklim çok karıştı. Üçgeni şuradan çizdim şu köşeyi birleştirdince... şu oranı göremiyorum.

G: Hangi üçgeni çizdin sen?

Gönül: B ile M üçgenini. Buradan da işte MKE üçgenini Şuradan da işte ağırlık merkezinden geçtiği için 2... Şu LM yani 2k çünkü L ağırlık merkezi olduğu için 2 ye 1 oranı oluyor.

G: O halde ne söyleyebilirsin?

Gönül: Şurada 1 e 3 oranı var. Şurada da 1 e 3 oranı var. Dolayısıyla, bu LK doğrusuyla BE doğrusu paralel olmuş olur. Benzer şekilde şu köşegen uzunluğunu çizdiğimizde de hangisinin... şuranın orta noktasını aldığımızda şu üçgen için burada da yine kenarortayların kesim noktasında 1 e 2 oranı var. O zaman şu doğrular paralel olmuş oluyor. Dolayısıyla bu buna paralel bu buna paralel, zaten bu HI doğrusuyla LK doğrusu birbirine paralel olmuş oldu. Benzer şekilde diğerleri için de farklı köşegen uzunlukları çizip bu karşılıklı doğruların paralel olduğunu söyleyebiliriz yeni oluşan altıgen için.

G: Uzunluklarıyla ilgili bir şey söyleyebilir misin?

Gönül: Şimdi başlangıçta verilen şekil düzgün altıgen olmadığından yani kenar uzunlukları aynı olmadığından eşittir diyemeyiz gibi geliyor bana.

G: Aldığın oranları bir daha düşünürsen?

Gönül: *1 e 2, 1 e 2. Kenarlar 1 e 3. 1 e 3. Tabi aynı k ile 2k oranı. Tamamı k ya 3k. Şurası m birimse şurası 3m birim. Benzer şekilde şu üçgen için düşünecek olursak Şu çizdiğim 3m. 1 e 2 oranı var. Yani o zaman 3m ise burası da m olmuş oluyor. Dolayısıyla m ye m o zaman aynıdır.*

G: *Karşılıklı kenarlar için ne söyleyebilirsin?*

Gönül: *Karşılıklı kenarları da eşit çıkar...*

3. Durum

G: *Senden bir sekizgen düşünmeni istiyorum. Karşılıklı kenarları paralel olsun eşit olması gerekmesin. Bu şekildeki ABCDEFGH sekizgeni için HABC dörtgenini göz önüne alırsak bu dörtgenin ağırlık merkezi I, HABG ninki J, AHGF nin ki K, HGBE ninki L, GEFD nin ki M, FEBC ninki N, BEDCB nin ki de O, BCDA ninki de P olsun. Burada ağırlık merkezlerinin oluşturduğu IJKLMNOP şekli için ne söyleyebilirsin?*

Gönül: *8 kenarı var.*

G: *Karşılıklı kenarları için ne söyleyebilirsin?*

Gönül: *Mesela PO ile KL gerçi çok estetik çizemedim ama paralel gibi... Ama bunu yine irdelemek için mesela EF köşegen uzunluğu alalım.*

G: *Niye köşegen alıyorsun?*

Gönül: *Niye köşegen alıyorum... PO ile KL yi kıyaslayacağım... Evet AE yi almam gerekiyordu... Bu her ikisinde de ortak olan bir kenarı baz alıyorum ki aralarında nasıl bir ilişki olduğunu anlayayım... Yani üçgene tamamlarım, benzerlikten yola çıkmaya çalışmak istiyorum. Kenarlarının orantısına eşit midir ya da orantılı mıdır diye o yüzden... Deminki yaptığım gibi düşünmeye çalışıyorum. Çünkü en başta paralel kenarda o şekilde gördüm. Bunda da hani daha ne diyeyim bu şekilde de olacağını düşünüyorum.*

G: *Evet?*

Gönül: *Şimdi hani üçgendeki oranı biliyoruz 1 e 2 diye. Paralel kenarda da karşılıklı kenarları eşit olduğu için onda da 1 e 1 vardı. Ama dörtgendeki oranı sadece karşılıklı kenarı orta noktalarını birleştirerek elde ettik ağırlık merkezini. O zaman az önceki gibi düşünecek olursak şuna şöyle...*

G: *Ne düşünüyorsun?*

Gönül: Şekil çok karışık olduğu için düşünemiyorum da. Ya sonuçta bu ağırlık merkezi olduğu için hani 1e1 oranında bölmüş olur... Hangi nokta olursa orantı kurabilirim?... Şu dörtgenin orta noktası olursa orantı kurarım... Ağırlık merkezi şu dörtgenin... Üçgenin ağırlık merkezi olduğu için şuralar orta nokta 1e2 oranında böler. Tamam. Yani şöyle 1 e 3 oranında bölmüş oluyor. Şimdi PA kenarıyla PI kenarının uzunluklarının aynı olduğuna bakmaya çalışıyorum.

G: Peki paralel olduğunu düşünüyor musun?

Gönül: Paralel olduğunu... Şimdi şöyle, hani bunlar zaten dörtgenlerin ağırlık merkezi yani işte kenarlarının orta noktalarını geometrik yeri diyelim. Dolayısıyla belli bir oran var. Benzer şekilde bu N noktası için de öyle bu da. Kenarlarının orta noktasını görmesi gerek. Şuradaki üçgenin ağırlık merkezini baz aldığımızda bu AE KL doğru parçalarını içeren üçgeni göz önüne aldığımızda bunların arası 1 e 3 oranı olmakta. Karşılıklı şurayla şurayı düşündüğümde bu her iki doğru parçası oranı olduğundan bu doğrular paraleldir diyebilirim. Aynı şekilde PO ile AI yı baz aldığımızda yine aynı oran söz konusu olur. Bu PO ile KL ye paralel olmuş olur.

G: Uzunluklarıyla ilgili bir şey söyleyebilir misin?

Gönül: Uzunlukları da... Genel baktığımızda bu oranı 1 e 3 oranı taşıdığından... Hani k ise 3k olacağından ve benzer şekilde buradaki oranda mevcut olduğundan paralellik olan bir oranı taşıdığından kenarların oranı tabanların oranını taşıdığımızdan eşit olmuş olur çünkü her ikisinde ortak olan şu AE köşegeni var paralellikte söz konusu dolayısıyla aynı olur.

G: Emin misin?

Gönül: Emin değilim şekil de çok karışık gerçi ama...

2. Aşama

4. Durum

G: Bu durumu ongen ve onikigen için de söyleyebilir misin?

Gönül: ... Şimdi önce bize bir dörtgen verildi. Karşılıklı kenarları paralel bir dörtgen. Bunun kenarlarının orta noktalarını birleştirerek yeni bir şekil elde ettik. Bu şeklin kenarları paralel mi yani ilk dörtgenle kıyaslıyoruz... Yani aynı özelliğe sahip mi diye. Şimdi birincisini gördük paralel kenar verilmişti ikinci elde ettiğimiz şekil de bir paralel

kenar oldu ve karşılıklı kenarları eşit ve paralel kenar olan. İkinci şekilde herhangi bir altıgen verilmişti. Bu sefer bu altıgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimizde yeni elde ettiğimiz şekil de bir altıgen oldu ve bunun da karşılıklı kenarları paralel ve eşit çıktı. Sekizgen için de paralelliği söz konusu ancak karşılıklı kenarlarının eşitliğinde açıkçası çok ta emin değilim. O yüzden aslında ongen ve onikigen içinde aynı şey geçerli olabilir ama emin değilim.

3. Aşama

G: *Burada farkına vardığın bir şey var mı?*

Gönül: *Yani çift sayılı kenar uzunluğuna sahip çokgenlerin kenarortaylarının kesim noktalarını birleştirdiğimizde elde ettiğimiz yeni şekil de gene ilk verilen çokgenle aynı kenar sayısına sahip yeni bir çokgen olmuş oluyor ve bu çokgenin de karşılıklı kenarları paralel olmuş oldu bunu gördük şekilde. Paralel kenarda da gördük altıgende de gördük ama sekizgende göremedik. Ben mi göremedim yoksa var mıydı onu da bilemiyorum şimdi ama çift sayıda olanlar için söyleyebiliriz heralde...*

EK 24

Üçüncü Görüşme Örnekleri

1. Aşama

1. Durum

G: Bundan önceki görüşmemizde seninle doğru parçasının, üçgenin, dörtgenin, çemberin, kürenin, silindir parçasının, piramidin dönüşümlerini konuşmuş ve hareketlerini düşünmüştük. Bu hareketler sonucunda farkına vardığımız bazı şeyleri konuşmuştuk. Şimdi hem onlara geri dönelim hem de farklı örnekler üzerinde bazı durumları inceleyelim. Konuştuğumuz ilk dört noktaya dönelim. $A(-1)$, $B(3)$, $C(2)$, $D(6)$. AB ve CD doğru parçalarını ele aldığımızda bunlardan birisinin diğerine bir hareket yardımıyla dönüştürülmesini konuşmuştuk. Bununla ilgili ne düşünmüştün?

Özge: Dönüştürüyorduk.

G: Bunu nasıl yapmıştın?

Özge: Ötelemeyle.

G: AB ve CD doğru parçalarını oluşturursak... Evet, farklı renkte olsunlar. Tamam. Şimdi CD doğru parçasını saklarsak... AB doğru parçasını CD doğru parçasına dönüştürmek için ne kadar ötelemem gerekir?

Özge: A yı C ye 3 birim, B yi D ye 3 birim.

G: Bunu nerede öteleme yapmam lazım?

Özge: Him... x ekseninde üç birim, y yönünde o zaman sıfır yazdık...

G: Ötele komutunu verelim. Evet. Nereye geldi doğru parçası?

Özge: Tam CD nin olduğu yere herhalde.

G: Bakalım oraya mı geldi? Sakladığım CD doğru parçasını açalım...

Özge: Evet çıkışıyor.

G: Bu iki doğru parçasını kıyaslamak ister misin?

Özge: Evet uzunluklarını ölçelim mesela. AB doğru parçasının uzunluğu 4 birim, CD ye bakalım. 4 birim.

G: Ne düşünüyorsun?

Özge: Hiç bir şey değişmedi. Yani uzunlukları aynı. Her şeyleri aynı. Aynılar, eşler.

2. Asama

2. Durum

G: $A(-2,1)$, $B(0,3)$, $C(2,-3)$, $D(4,-1)$ noktalarını hatırlayalım... AB ve CD doğru parçalarını ele aldığında bunlardan birini diğerine dönüştürebilir miyiz diye düşünmüştün...

Özge: Öteleme yoluyla dönüştürler demiştim. Evet buradaki gibi x , -4 birim y de -4 birim ötelendiğinde...

G: Ne görüyorsun?

Özge: Çakıştılar... Koordinatlarına bakalım isterseniz. Evet... Uzunluklarına bakalım... Evet eşitler. Aynı uzunlukta.

3. Durum

G: $O(0,0)$, $A(4,0)$ ve $B(0,4)$ noktalarını alalım. Şimdi bu OA doğru parçasından OB doğru parçasını elde edebiliyor muyuz düşünelim...

Özge: Şimdi bu öteleme değil. Sonuçta öteleme olsa belli bir yerden kaydırma olurdu. Bu 90 derece dönmedir.

G: OA doğru parçasını hangi merkezle döndürmeyi düşünüyorsun?

Özge: Orijin etrafında dönecek. 90 derece... Evet.

G: Ne görüyorsun?

Özge: Çakıştılar.

G: Bunu farklı noktalar için denemek ister misin rastgele?

Özge: Evet. Şöyle yapalım... Merkezi de dört noktası olsun. Dönme açısı 180 derece olsun. Evet...

G: Oluşan şekiller için ne düşünüyorsun?

Özge: Şurası nokta 180 derece dönmüş. Bu iki doğru parçasının uzunluğuna baktığımız zaman aynı...

G: İncelemek ister misin?

Özge: Evet... Rastgele hareket ettirdiğimde ilk doğruyu dönme açısı değişmeden diğer doğru aynı şekilde hareket ediyor. Açıyı değiştirsem... 90 derece olsun mesela... Evet... Hareket ettirsem... Uzunluklar korundu... Aynılar...

4. Durum

G: Hatırlıyorsan üçgenlere bakmıştık seninle. Köşeleri $O(0,0)$, $A(2,0)$ ve $B(2,1)$ olan OAB üçgeni ve köşeleri $O(0,0)$, $C(0,2)$, $D(-1,2)$ olan üçgenimiz vardı. Bu üçgenlerden birini diğerine bir hareket yardımıyla dönüştürebilir miyiz diye konuşmuştuk.

Özge: Evet dönüştürebilir demiştik. Dönme hareketi ile dönüştürebilir demiştik.

G: Dönme merkezi nerde olur?

Özge: O merkezli bir dönme yaptığımız zaman 90 derecelik.

G: Ne görüyorsun?

Özge: Yine dönme sonucunda aynı üçgeni elde ederiz. Eş üçgenler olur.

G: Farklı üçgenlerde ve farklı hareketlerde bunu görmek ister misin?

Özge: Evet. Koordinatlarını seçelim... Bu üçgenin köşelerinin isimleri de ABC olsun. Önce öteleme yapalım. ABC üçgenini x ekseninde 4 birim ötelersem. y ekseninde -3 birim ötelersem... Bu iki üçgeni kıyaslarsam. Uzunluklarına bakarsam... AC uzunluğu ile... AB uzunluğuyla... CD uzunluğuyla bakarsam... Evet eşit.

G: Başka neyi kıyaslayabilirsin?

Özge: ABC üçgeninin alanına bakarsam. Evet. Diğerine bakalım... Eşit alanlı.

G: Açıları için ne düşünüyorsun?

Özge: Açısına bakalım. Evet... Diğer açılar için aynı şeyi söyleyebilir miyiz. Evet...

G: Bu iki üçgen için ne diyebilirsin?

Özge: Eşitler.

5. Durum

G: Dörtgenler ele almıştık. A köşesi $(-5,-3)$, $B(-2,-2)$, $C(-1,-1)$ ve $D(-4,-1)$ olan dörtgenle köşeleri $E(0,1)$, $F(3,2)$, $G(4,3)$ ve $H(1,5)$ olan diğer dörtgeni konuşmuştuk. Bu iki dörtgeni göz önüne aldığın zaman hangi hareketle bunu yapabildiğini söylemiştin?

Özge: Bu şekle baktığımız zaman ötelenmesi lazım. X , 5 birim... y de 4...

G: Evet ötelersen... Peki ne görüyorsun?

Özge: Şekiller çakıştı. Uzunlukları eşittir. Tek tek bakarsak... Şu açıya ve bu açıya baktığım zaman da açılar için de eşittir diyebilirim. Bu iki dörtgen ötelenmesi sonucu elde edildiği için özellikleri korunuyor...

G: Bunu başka dörtgenler için incelemek ister misin?

Özge: Rastgele bir dörtgen... Evet şöyle bir şekil, dörtgen oluşturalım. Bir de nokta belirlersen... Dönme açım otuz olsun. Dönme sonucunda oluşan dörtgen bu... Bu iki dörtgeni kıyaslayım şimdi.

G: Ne görüyorsun?

Özge: Evet bakalım. Kontrol edelim. Evet uzunluklar... Eşit. Açılara bakalım aynı... Başka alanlarına bakabilirim. Evet... Aynı dörtgenler.

6. Durum

G: Seninle merkezi $(-3,4)$ ve yarıçapı 2 birim olan çemberle merkezi $(2,-1)$ ve yarıçapı 2 birim olan çemberi göz önüne almıştık. Bunlardan birisini diğerine bir hareket yardımıyla dönüştürebilir miyiz diye konuşmuştuk. Şimdi buna bilgisayarda bakalım... Evet baktığın zaman hangi hareket olduğunu düşünüyorsun?

Özge: Ötelenme var. x eksenini 5, y eksenini -5 birim...

G: Verilen ilk çemberi alalım...ve ikinciye saklayalım.Çemberin üzerinde keyfi bir nokta alalım. Bakalım nasıl değişiyor. Ve öteleme yapalım... Ne görüyorsun?

Özge: Saklanmış olan çemberle üst üste çakıştı.

G: Kontrol edebilirsin...

Özge: Evet... Ötelenmesi ile seçilen nokta da ötelendi. Hareket ettirince diğerinde de aynı şekilde hareket ediyor.

G: Bu ne demek sence?

Özge: Çember üzerindeki tüm noktalar dönüşür.

G: Bu iki çemberi göz önüne aldığın zaman alanları için ne düşünüyorsun?

Özge: Evet eşit. Aynı şekilde çevresine baktığım zaman da eşit. Aynı çemberler.

G: Bunu başka çemberler için incelemek ister misin?

Özge: Evet... Keyfi bir çember alalım. Bu çember üzerinde kontrol noktamız da bu olsun. Dönme yapıcım. 60 derecelik dönmeye... Evet

G: Ne görüyorsun?

Özge: Çakıştı. Bakalım... Alanı aynı. İlk çemberimin yarıçapıyla ikinci çemberimin yarıçapını ölçtüğüm zaman yine aynı.

G: Bu iki çember içi ne diyebiliriz?

Özge: Sonuçta bir hareketle elde edilmiş ve eşittir. Çakışır diyebiliriz.

3. Asama

7. Durum

G: Hatırlıyorsan bir de küreleri konuşmuştuk seninle... Merkezi $(1,2,3)$ ve yarıçapı 1 birim olan küre... Burada bu küreyi hangi renkle görüyorsun?

Özge: ... Mavi küre. Evet.

G: İkinci kürenin merkezi $(4,1,2)$ ve yarıçapı 1 birimdi. Bu hangi küre?

Özge: Evet. Kırmızı küre.

G: İki küreyi gözönüne aldığın zaman bu iki küre arasında birini diğerine dönüştüren hangi hareketi görüyorsun?

Özge: Öteleme...

G: Nasıl yapılmış öteleme hareketi?

Özge: Mavi kürenin merkezinin x bileşeni 1, kırmızı kürenin $4 \dots x$ üzerinde ne kadarlık bir öteleme... 3 birimlik... Evet. y üzerinde... Mavi kürenin merkezi y de 2, kırmızının 1... -1 birimlik öteleme. z ye bakalım...

G: Şöyle çevirelim daha iyi görürsün belki...

Özge: Şurası mavi kürenin merkezi yani z de 3 birim, kırmızı kürenin merkezi 2 birim... Yani 1 birimlik azalma yani -1 kadar.

G: Peki bu iki küreye göz önüne aldığında bu iki kürenin çevreleri, alanları, hacimleri için ne görüyorsun?

Özge: Öteleme sonucu elde edildiğine göre çevreleri, alanları, hacimleri korunur.

G: Peki şöyle bakarsan?...

Özge: Evet üst üste geldiler... Çakışıyor. Herşeyleri birbirine eşit.

G: O halde ne diyebilirsin?

Özge: Küreler için... Her şey korunur. Eştir yani. Eş küreler elde edilebilir.

Gözümde canlandırmak kolaylaştı. Gözümde canlandıramamıştım. O yüzden de net konuşamamıştım... Evet çakıştılar ve eşler...

8. Durum

G: Silindir parçalarını konuşmuştuk. Evet, seninle konuştuğumuz silindir parçalarına burada bakarsan öncelikle ilki için merkezi kaçtır?

Özge: $(2,0)$ dır.

G: Gördüğün gibi bunlar hangi eksenlerdeler?

Özge: x ekseninde 2, y ekseninde 0.

G: z eksenindeki bileşeni kaç?

Özge: Evet 0.

G: Bu silindir parçasının yüksekliği kaç birim?

Özge: 1,2,3. 3birim...

G: İkinci silindir parçasının merkezi ve yüksekliği ne olur?

Özge: Merkezi $(-2,0,0)$ ve yüksekliği de yine 3 birim.

G: O halde bu iki silindir parçasını gözözüne alırsan nasıl bir hareket var burada?

Özge: Öteleme mi acaba?

G: Bakalım... x,y,z üzerinde nasıl bir değişim var? İstersen şöyle bak.

Özge: Hım... x üzerinde bir dönme yapılmış. y si değişmemiş. z si de değişmemiş. Yüksekliği de yine aynı.

G: Peki bu iki silindir parçası için ne görüyorsun?

Özge: Birbirleri ile aynı. Yandan bakarsak... Evet çakıştılar... Eştir diyebiliriz.

9. Durum

G: Hatırlarsan en son piramitlerin hareketleri ile ilgili konuşmuştuk. Şimdi burada verilen piramitleri gördüğünde ne düşünüyorsun? Mavi piramidin köşe noktaları nedir?

Özge: Bakalım... İlk köşesi $(-5,-4)$... diğeri $(-3,-1)$, diğeri $(-6,1)$. Öbür köşesi ise $(-8,-2)$...

G: Yüksekliği ne kadar?

Özge: 4 birim.

G: Kırmızı piramidin?

Özge: Köşeleri $(4,-1)$, $(6,2)$, $(3,4)$ ve $(1,1)$. Yüksekliği bunun da 4 birim.

G: Peki bunlardan birini diğerine dönüştürebilir miyiz sence?

Özge: Ötelersek olur gibi... x ekseninde 1,2,3... evet 9 birim, y de 1,2,3. 3 birim ötelersek elde edilir.

G: Bu piramitler için ne düşünüyorsun?

Özge: Tabanları aynı yükseklikleri de aynı. O zaman alanları da hacimleri de eşit olur. Aynı piramitlerdir. Eş yani...

4. Asama

G: *Bunu sence başka cisimler için de yapabilir miyiz?*

Özge: *Evet genelleştirebiliriz.*

G: *Peki bunları görmeden önce ve gördükten sonra senin için bir şeyler değişti mi?*

Özge: *Değişti.*

G: *Ne düşünüyorsun?*

Özge: *Geçen görüşmemizde çizimler yapmaya çalışmıştım ama küreyi gözümün önünde canlandıramamıştım. Öyle bir sıkıntı vardı yani şeklini tam yerine koyup da yerleştirememiştim. Ama şimdi gözümün önünde çizilmiş bir şeyler olunca problemler çok rahat ortadan kalktı. Yani gördüğüm zaman düşündüklerimi daha iyi oturtabildim. Bazı şeyler havada kalıyordu açıkçası. Yani görünce insan daha bir emin oluyor.*

EK 25

Dördüncü Görüşme Örnekleri

1. Aşama

1. Durum

G: Seninle karşılıklı kenarı paralel olan dörtgene bakmış ve kenarlarının orta noktalarının oluşturduğu şekli konuşmuştuk. Düşündüğümüz şeyleri bir de bilgisayarda görelim. Evet şeklimizi oluşturursak... Karşılıklı kenarları paralel.

Gönül: Evet.

G: Köşeleri isimlendirelim... A,B,C,D. Kenarların orta noktalarını alırsak bu orta noktalarının oluşturduğu şekli göz önüne aldığımızda... Bu şekil de EFGH olsun. Bu şekil için ne söyleyebiliriz?

Gönül: Karşılıklı kenarları eşit ve paralel demiştik.

G: Bakalım mı?... Ne görüyorsun?

Gönül: HE ile GF eşit. EF ile GH evet eşit.

G: Paralellik için eğimlerine bakalım... Ne görüyorsun?

Gönül: Aynı eğimleri.

G: Şekli köşesinden tutup hareket ettirebilirsin... Ne görüyorsun?

Gönül: Evet... Dıştaki dörtgenin kenarlarının eğimleri aynı kalıp uzunlukları değişiyor. Ama içtekinin eğimleri de uzunlukları da eşit kalıyor.

G: Ne diyebiliriz?

Gönül: Kenarlarının orta noktaları birleştirdiğimizde yeni oluşan şeklin karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir.

G: Şimdi, dörtgenin köşegenini alalım... Burada oluşan oranları görelim. Bunun buraya oranı ve bunun buraya oranı dersek... Ne görüyorsun?

Gönül: İkisi de $\frac{1}{2}$ çıktı.

G: Sen de $\frac{1}{2}$ oranını bulmuştun herhalde...

Gönül: Evet.

2. Durum

G: Altıgen için bakalım şimdi. Buna şuradan geçen bir paralel çizerek...

Gönül: Sıkıntı olmuştı altıgeni çizerken... Düzgün altıgen çizmeye alışık olduğumuz için yani zorlanmıştım. Gerçi sonra kenarlarını uzattım gibi bir şey. Aslında bu yaptığımız çok mantıklı ona göre paralelleri almak.

G: Kenara paralel çiziyorum. Şimdi buna paralel ama eşit olması gerekmeyen kenarını çiziyorum. Bu şekilde devam edersek... Artık altıgenimizi oluşturabiliriz. Öncelikle isim verelim istersen ABCDEF. Sırasıyla üçgenlerin ağırlık merkezlerini alalım... Ve bunları isimlendirelim...

Gönül: Evet.

G: GHIJKL dersek... Oluşacak olan bu şeklim için ne söyleyebiliriz şimdi yeniden düşünelim.

Gönül: GH kenarıyla KJ kenar uzunluklarının aynı olduklarını, paralel olduklarını söyleyebilirim.

G: Bakalım...

Gönül: Aynı. Demek ki eşitmiş.

G: Diğerlerine bakalım...

Gönül: Evet bu da aynı. Tek tek yaparsak

G: Ne görüyorsun?

Gönül: Aynı. Eğimleri aynı dolayısıyla karşılıklı kenarları paralel ve uzunlukları da eşit.

G: Ne söyleyebilirsin?

Gönül: Herhangi bir altıgenden oluşturduğumuz üçgenlerin ağırlık merkezlerinin geometrik yerleri, ağırlık merkezlerini birleştirdiğimizde elde ettiğimiz şekil yeni bir altıgen olup bu altıgenin karşılıklı kenarları paralel ve eşit uzunlukta. İlk altıgene göre daha özel bir altıgen oluşmuş oldu.

G: Peki dıştaki altıgenin bir köşesinden tutup hareket ettirir misin?... Ne görüyorsun?

Gönül: Evet. Dışarıdaki altıgenin karşılıklı kenarlarının eğimleri eşit şekilde değişiyor. İçeridekinin ise hem eğimleri hem de uzunlukları eşit değişiyor.

G: Dıştaki altıgenin kenar uzunluklarını nasıl değiştiriyorsun?

Gönül: Uzunlukları farklı olacak şekilde...

G: Buradan ne anlıyorsun?

Gönül: O zaman bunu sadece karşılıklı kenarları paralel olan herhangi bir altıgen için yapabilirim. Yani uzunluklarının eşit olması gerekmiyor.

G: Şimdi, dıştaki altıgenin köşegenini oluşturalım. Bu köşegenin uç noktaları ile karşısındaki kenarın orta noktasını birleştirelim. Bu doğru parçası hangi noktadan geçiyor?

Gönül: Ağırlık merkezinden.

G: Oranlarına bakarsak... Bunun buna oranı ile bunun buna oranını hesaplırsak... Ne görüyorsun?

Gönül: Evet... Oranı $1/3$ çıktı ikisinin de ...

3. Durum

G: Sekizgene de bakalım istersen...

Gönül: Sekizgene kesinlikle bakalım kesinlikle çok karıştı.

G: Sekizgeni oluşturalım. 1,2,3,4 kenarı... Diğer kenarlarını da paralel şekilde oluşturalım. Buna paralel ve bu noktadan geçecek paralel doğruyu oluşturursak, buradan şu uzunlukta bir doğru parçası alalım. Sonra buradan geçip buna paralel olanı oluşturursak, aynı şekilde buna paralel ve buradan geçen, son olarak da şuradan geçip buna paralel doğru üzerinde alırsak... Oluşacak olan şekil ne oldu?

Gönül: Sekizgen oldu.

G: Bu sekizgeni göz önüne aldığımızda önce isimlendirirsek ABCDEFGH diye bu sekizgenlerimizde oluşacak dörtgenlere bakmıştık. Şimdi dörtgenleri oluşturalım. Birincisi bu, ikincisi şu, üçüncüsü C den D ye, sonra dördüncüsü D den E ye, beşinci E den F ye, altıncı F den A ya, yedinci ve bu da sekizinci... Bu şekilde kaç tane dörtgenimiz var?

Gönül: 1,2,3,4,5,6,7 ve 8 tane.

G: Bu dörtgenlerimizin ağırlık merkezlerine de bakalım... Her birinin kenarlarının orta noktasını bulalım... Sırayla ağırlık merkezlerini alalım. Buna isim verelim karışmadan I olsun. Sonra şu dörtgen için yaparsak, isim verelim. Bu da J olsun. Sonra buna da bir isim verelim. K olsun. Sıradaki dörtgen için bunun adı da L olsun. Bu şekilde diğerlerini de oluşturalım... Son dörtgene de bakarsak P diyelim. HKLMNOIP şeklini daha da belirginleştirelim. Bu şeklimiz için ne söyleyebiliriz?

Gönül: Şimdi bu sekizgenin karşılıklı kenarlarına bakacağız paralel mi ve eşit mi diye.

G: Her birinin karşılıklı olarak uzunluklarına bakalım... Uzunlukları için ne görüyorsun?

Gönül: Eşit. Karşılıklı kenarları eşitmiş.

G: Sen paralelliği için ne söylemiştin?

Gönül: Paraleldir demiştim.

G: Eğimleri için bakarsak...

Gönül: Evet, eğimleri de eşit.

G: Tut bir köşesini istersen. Çekersen, ne görüyorsun?

Gönül: Şuradan... Evet eğimleri değişiyor, uzunlukları değişiyor.

G: Nasıl değişiyor peki?

Gönül: Ama orantılı olarak yani ilk şekil ile ikinci şekil orantılı olarak değişmiş oldu.

G: O halde burada söyleyebileceğimiz bir şey var mı?

Gönül: Evet, başlangıçta aldığımız karşılıklı kenarları paralel olan herhangi bir sekizgenin köşelerinde oluşturduğumuz dörtgenlerin ağırlık merkezlerinin geometrik yeri olan oluşturmuş şekil yine bir dörtgen oluyor ancak ilkinden daha özel olup karşılıklı kenarları eşit ve paralel olmuş oldu. Yani az öncekinde sadece paralellik vardı bunun yanı sıra eşitlik de söz konusu olmuş oldu.

G: Evet. Peki, köşegenini oluşturalım sekizgenin. Buna göre bu köşegenin uç noktalarını buradaki ağırlık merkezi ile birleştirirsek, nereden geçtiğine dikkat edersen... Buna göre oluşacak oranlara bakarsak... Bunun buna bunun da buna oranını alalım... Ne görüyorsun?

Gönül: Oranları eşit oldu. $\frac{1}{4}$.nerden oran alamam gerektiğini anladım. Düşünmeye çok uğraştım ama karıştırdım. Burada kolayca belli oluyor.

2. Aşama

4. Durum

G: Gönül, bunu ongen için, onikigen için söyleyebilir misin?

Gönül: Evet. Yapabiliriz. Sekizgen için emin olamadığımdan dolayı ongen veya onikigen için söyleyebileceğimizden emin değildim açıkçası. Ama şimdi sekizgen için gördüm, oluyor. O zaman ongen veya onikigen içinde söyleyebiliriz.

3. Asama

G: Gönül, şimdiye kadar yaptıklarımız için ne görüyorsun?

Gönül: Önce neye baktık... Herhangi bir paralel kenarda daha doğrusu şöyle diyeyim genellersem herhangi dörtgenin sadece karşılıklı kenarlarının paralel olması koşulu ile bu dörtgenlerinin kenarortaylarının kesim noktasını alarak yeni oluşan şekil için bütün kenarlarının paralel olmasının yanı sıra bu kenar uzunluklarının aynı olmuş olduğunu gördük. Altıgen için de aynı şeyi yaptık. Bu seferde altıgenin köşelerinden oluşturduğumuz üçgenlerin ağırlık merkezlerini aldığımızda bu ağırlık merkezlerinin birleştirilmesiyle elde ettiğimiz şekilde de gene karşılıklı kenarlarının ilk verilen şekil gibi paralel olmasının yanı sıra kenar uzunluklarının da aynı olduğunu gördük. Yine sekizgende de sekizgenin köşelerine çizilen dörtgenlerin ağırlık merkezlerini baz aldık. Bu ağırlık merkezlerinin birleştirilmesiyle yeni oluşturduğumuz şekil de bir sekizgen olup kenar kenarlarının paralelliğinin yanı sıra kenar uzunlukları da aynı çıkmış oldu.

G: Hangi çokgenler için baktık?

Gönül: Kenar uzunlukları çift sayı olan çokgenler için bakmış olduk. Kenar sayısı çift olan çokgenlerden oluşturduğumuz şekillerin ağırlık merkezlerini birleştirirsek, elde edilen şekillerin karşılıklı kenarları eşit ve birbirine paralel olur.

G: Çokgenlerde nelerin ağırlık merkezlerini aldık?

Gönül: Altıgende üçgenin, sekizgende dörtgenin.

G: Yani?

Gönül: Yani, şöyle dersek... $2n$ de n lerin. $2n$ kenarlılarda n kenarlı oluşan çokgenlerin ağırlık merkezlerini aldık.

G: Elde edilen oran için ne görüyorsun?

Gönül: Oran da altıgende $1/3$, sekizgende $1/4$. Yani $2n$ de $1/n$