

KREDİBİLİTE TEORİSİNDE PANEL VERİ MODELLERİ

PANEL DATA MODELS IN CREDIBILITY THEORY

ASLIHAN ŞENTÜRK

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2010

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI 'nda**
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

:.....
Prof. Dr. Ömer ESENSOY

Üye (Danışman)

:.....
Prof. Dr. Cenap ERDEMİR

Üye

:.....
Y.Doç. Dr. Şeref HOŞGÖR

ONAY

Bu tez/...../2010 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Adil DENİZLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KREDİBİLİTE TEORİSİNDE PANEL VERİ MODELLERİ

Aslıhan ŞENTÜRK

ÖZ

Bu çalışmada, kredibilite teorisi ve panel veri modelleri genel hatlarıyla açıklanmış, kredibilite modelleri ile panel veri modelleri arasındaki bağlantı araştırılmıştır. En fazla kesinlik kredibilite yaklaşımı altında verilen Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelleri, karışık doğrusal modellerin özel durumları olarak incelenmiştir. Trafik sigortasına ilişkin bir veri kümesi kullanılarak, bu kredibilite modelleri altında, Türkiye'nin tüm illeri için kredibilite primleri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kredibilite teorisi, kredibilite modelleri, kredibilite primi, panel veri modelleri, karışık doğrusal modeller, en iyi doğrusal yansız önkestirici

Danışman: Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

PANEL DATA MODELS IN CREDIBILITY THEORY

Aslıhan ŞENTÜRK

ABSTRACT

In this study, credibility theory and panel data models are explained in general terms, the link between the credibility models and panel data models is investigated. Bühlmann, Bühlmann-Straub and Jewell's hierarchical credibility models that are explained under greatest accuracy credibility approach, are examined as special cases of mixed linear models. By using a data set concerning the motor third party liability insurance, credibility premiums are calculated under these credibility models for all provinces of Turkey.

Key Words: Credibility theory, credibility models, credibility premium, panel data models, mixed linear models, best linear unbiased predictor

Advisor: Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren, karşılaşılan zorlukların aşılmasında yardımcı olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Cenap Erdemir'e,

Tezin uygulama kısmında kullanılan verinin elde edilmesinde yardımcı olan ve hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Ömer Esensoy'a,

Manevi desteklerini esirgemeyen tüm hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma,

Verinin bölüme ulaştırılmasını sağlayan TRAMER'e ve Emrah Bozkurt'a, verinin düzenlenmesinde yol gösteren değerli hocam Arş. Gör. Mehmet Pırıldak'a,

Maddi katkılarından dolayı TÜBİTAK Bilim Adamı Destekleme Daire Başkanlığı'na,

Yanımda olduklarını hissettirerek, manevi yönden bana destek veren arkadaşlarım, Yelda Kaynak'a, Ayşe Seda Bülbül'e, Beyhan Günaydın'a, Nihal Ermiş'e, Demet Köroğlu'na ve sevgili hocam Arş. Gör. Nihal Ata'ya,

Her zaman yanımda olarak bana destek olan, emeklerini ödeyemeyeceğim annem Fatma Şentürk, babam Osman Şentürk, ablam Neslihan Şentürk'e ve Mahir Acar'a içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KREDİBİLİTE TEORİSİ	4
2.1. Giriş	4
2.2. Kredibilite Yaklaşımları	5
2.2.1. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımı	6
2.2.1.1. Sınırlı dalgalanmalı tam kredibilite yaklaşımı	7
2.2.1.2. Sınırlı dalgalanmalı kısmi kredibilite yaklaşımı	9
2.2.2. Bayesci yaklaşım	10
2.2.3. En fazla kesinlik kredibilite yaklaşımı	14
2.2.3.1. Giriş	14
2.2.3.2. Bühlmann kredibilite modeli	18
2.2.3.3. Bühlmann-Straub kredibilite modeli	19
2.3. Parametre Kestirimi	22
2.3.1. Parametrik olmayan kestirim	25
3. PANEL VERİ ANALİZİ	30
3.1. Giriş	30
3.2. Panel Veri Kullanmanın Avantajları Ve Dezavantajları	31
3.3. Panel Veri Regresyon Modelleri	32
3.3.1. Giriş	32
3.3.2. Sabit etkiler modeli	34
3.3.2.1. Giriş	34
3.3.2.2. Sabit etkiler modelinde parametre kestirimi	37
3.3.2.3. Sabit etkiler modelinin genişletilmesi	38
3.3.3. Rassal etkiler modeli	40
3.3.3.1. Giriş	40
3.3.3.2. Hata bileşenleri modeli	40
3.3.3.3. Karışık doğrusal modeller	43
3.4. Önkestirim	44
3.4.1. Genel doğrusal önkestirim	46
3.4.2. Panel veri önkestirimi	47
3.5. Varyans Bileşenlerinin Kestirimi	48
3.5.1. En çok olabilirlik yöntemi	49
3.5.2. Sınırlandırılmış en çok olabilirlik yöntemi	50

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
4. BÜHLMANN, BÜHLMANN-STRAUB VE JEWELL'İN HİYERARŞİK KREDİBİLİTE MODELLERİNİN PANEL VERİ MODELLERİ İLE YORUMLANMASI.....	53
4.1. Giriş	53
4.2. Bühlmann Kredibilite Modeli	54
4.2.1. Giriş.....	54
4.2.2. Bühlmann modelinde kredibilite kestiricileri	56
4.3. Bühlmann-Straub Kredibilite Modeli	60
4.3.1. Giriş.....	60
4.3.2. Bühlmann-Straub modelinde kredibilite kestiricileri	61
4.4. Jewell'in Hiyerarşik Kredibilite Modeli	63
4.4.1. Giriş.....	63
4.4.2. Hiyerarşik modelde kredibilite kestiricileri.....	65
5. UYGULAMA.....	71
5.1. Giriş	71
5.2. Bühlmann Kredibilite Modelinde Risk Priminin Kestirimi	75
5.3. Bühlmann-Straub Kredibilite Modelinde Risk Priminin Kestirimi	77
5.4. Jewell'in Hiyerarşik Kredibilite Modelinde Risk Priminin Kestirimi.....	80
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	84
KAYNAKLAR.....	86
EKLER DİZİNİ.....	89
ÖZGEÇMİŞ.....	97

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1. İki aşamalı hiyerarşik yapı	64
Şekil 5.1. (2006-2009) yıllarında toplam poliçe sayısı bakımından ilk kırk il	73
Şekil 5.2. (2006-2009) yıllarında toplam polliçe sayısı bakımından son kırk bir il.....	74

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1. Bühlmann, Bühlmann Straub, Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde, kredibilite ve GEKK kestiricileri... ..	69
Çizelge 4.2. Bühlmann, Bühlmann-Straub, Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde en iyi doğrusal yansız önkestiriciler ve hasarların önkestiricileri	70
Çizelge 5.1. Bühlmann kredibilite modelinde iller bazında; bireysel ortalama, kredibilite faktörü ve kredibilite primi.....	75
Çizelge 5.2. Bühlmann-Straub kredibilite modelinde iller bazında; ağırlıklı ortalama, ağırlık, kredibilite faktörü ve kredibilite primi	78
Çizelge 5.3. Türkiye'nin coğrafi bölgeleri ve numaraları	81
Çizelge 5.4. Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde bölgeler bazında; ağırlıklı ortalama, kredibilite faktörü ve kredibilite primi	81
Çizelge 5.5. Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde coğrafi bölgelere göre ayrılan iller bazında; ağırlıklı ortalama, ağırlık, kredibilite faktörü ve kredibilite primi.....	82

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

EÇO	En Çok Olabilirlik
EDYÖ	En İyi Doğrusal Yansız Önkestirici
EKK	En Küçük Kareler
GEKK	Genelleştirilmiş En Küçük Kareler
SEÇO	Sınırlandırılmış En Çok Olabilirlik

1. GİRİŞ

Aktüerya bilimlerinde, kredibilite kelimesi ilk olarak, aktüerin fiyatlandırma yaparken, bir kısım sigortalının deneyimine ne ölçüde güvenmesi gerektiğini belirtmek üzere, güvenin ölçüsü olarak kullanılmıştır (Longley-Cook, 1962).

Kredibilite kuramı, geçmiş hasar bilgileri bilinen benzer risk birimlerinden oluşan bir grupta, herhangi bir birimin gelecek dönemdeki beklenen hasarının kestiriminde kullanılan yöntemleri inceler (Frees and Wang, 2005).

Kredibilite kuramının başlangıç noktası, 1890'ların sonuna doğru yapılan işveren sorumluluk sigortası için fiyatlandırma çalışması olmuştur. 1911 yılında Amerika Birleşik Devletleri'nin Wisconsin eyaletinde işçi tazminat yasasının çıkması aktüerleri heyecanlandırmış ve 1914 yılında günümüzde adı Hasar Aktüerleri Derneği (Casualty Actuarial Society) olan Amerika Hasar Aktüerleri ve İstatistik Derneği kurulmuştur. Aynı yıl aktüerler, işçi tazminatları ile ilgili sorunları çözmek için çalışmalara başlamıştır. Tam kredibilite kuramı için ilk çalışma Mowbray (1914) tarafından yapılmış ve bu çalışma ile sınırlı dalgalanmalı kredibilite kuramının temelleri atılmıştır. En fazla kesinlik kredibilite kuramının temeli, Whitney (1918) 'in normal-binom modeli çalışması ile oluşmuştur. Whitney, gelecek dönemdeki hasarın, bireyin hasar bilgisi ile risk sınıfına ilişkin hasar bilgisinin ağırlıklandırılmış biçiminde elde edilebileceğini göstermiştir. Burada, ağırlıklandırma normal ve binom varyanslarının fonksiyonu olan kredibilite faktörü ile olmaktadır. Arthur Bailey (1945, 1950), en fazla kesinlik kredibilitesine en küçük kareler yaklaşımını uygulamış ve kredibilite kestiricisini veren eşitliğin Bayes teoreminden elde edildiğini göstermiştir. Bu nedenle Arthur Bailey, modern kredibilite kuramının babası olarak anılmaktadır. Mayerson (1964), kredibiliteyi Bayesci açıdan incelemiştir. En fazla kesinlik kredibilite kuramı, tam olarak Bühlmann (1967)'in çalışması ile ilerleme kaydetmiştir. Bühlmann, serbest dağılımlı kredibilite formülünü bulmuş ve en iyi doğrusal yaklaşımın hata kareler ortalamasının minimizasyonu ile sağlanacağını göstermiştir. Bühlmann modelinde tüm hesaplamalar, gözlemlerin varyanslarının homojen olduğu varsayımı altında yapılır. Bu çalışmanın ardından Bühlmann ve Straub (1970), riske maruz kalan birim sayılarının bireylere göre farklılık göstermesi durumunu dikkate alarak, Bühlmann kredibilite modelini genişletmiştir. Böylece, Bühlmann-Straub kredibilite

modelinde, varyans homojenliği varsayımı bozularak, modele varyans heterojenliği özelliği eklenmiştir. Literatürde, sınırlı dalgalanmalı kredibilite kuramı klasik kredibilite kuramı, en fazla kesinlik kredibilite kuramı ise modern kredibilite kuramı olarak da adlandırılmaktadır (Goovaerts et al., 1990).

Sigorta verileri genellikle hiyerarşik yapıda olmaktadır. Jewell (1975), iki aşamalı hiyerarşik model ile çalışmış ve bu çalışmayı Taylor (1979), daha fazla aşamalı model ile genişletmiştir. Kredibilite kuramında, regresyon modeli çalışması Hachemeister (1975) tarafından yapılmıştır. Hachemeister'in regresyon modelinde, zaman eğilim bileşeni modele açıklayıcı değişken olarak eklenmiştir. De Vylder (1978), kredibilite kuramında yapısal parametrelerin yansız kestiricileri üzerinde çalışmıştır. Sundt (1979) ve Norberg (1986) hiyerarşik kredibilite modelini regresyon bağlamında incelemişlerdir.

Panel verinin tanımı, bireylerin gözlemlenmesinden gelmekte ve panel, zaman içinde aralıksız olarak gözlemlenen bireylerden oluşan bir grup olarak tanımlanmaktadır. Panel veri regresyon modelleri, bireyler arasındaki heterojenlik kaynağına göre, sabit etkiler modeli (fixed effects model) ve rassal etkiler modeli (random effects model) olarak iki temel model altında incelenmektedir. Karışık doğrusal modeller (mixed linear models), sabit ve rassal etkileri aynı modelde barındıran esnek modellerdir. Panel veri analizi ve panel veri modelleri, Hsiao (2002), Baltagi (2001), Sevestre ve Laszlo (1996) ile Frees (2004) tarafından ayrıntılı biçimde verilmiştir.

Dannenburg et al. (1996), kredibilite modellerinin, açıklaması zor olan risk parametresi koşulunda oluşturulması durumunda, gruplar veya bireyler arasında birden fazla risk parametresi olması nedeniyle analizin zorlaşacağını, bunun yerine risk değişkenlerinin birbirinden bağımsız varyans bileşenlerine ayrılmasının kolaylık sağlayacağını belirtmiş ve kredibilite kestiricilerinin elde edilmesinde varyans bileşenleri modelini kullanmıştır. Frees et al. (1999), kredibilite fiyatlarının kestiriminde, en iyi doğrusal yansız önkestiricileri (best linear unbiased predictors, BLUP) kullanarak, kredibilite modellerinden; Bühlmann, Bühlmann-Straub, Jewell'in hiyerarşik modeli ve Hachemeister'in regresyon modelinin, karışık

doğrusal modellerin özel durumu olarak ifade edilebileceğini göstermiştir. Frees et al. (2001), bu çalışmada verilen bilgileri, birkaç sigorta veri kümesine uygulamıştır.

Bu çalışmanın amacı, kredibilite kuramını, kredibilite yaklaşımlarını, kredibilite modellerini, panel veri analizinde kullanılan genel kavramları ve panel veri regresyon modellerini genel hatlarıyla açıklamak, kredibilite kuramı ile panel veri modelleri arasındaki bağlantıyı incelemektir.

Çalışmanın amacına uygun olarak, ikinci bölümde kredibilite kuramında kullanılan temel kavramlar, kredibilite yaklaşımları ve kredibilite modelleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde, panel veri kavramı, panel veri regresyon modelleri, modellerin parametre kestirimleri, karışık doğrusal modellerde önkestirim ve varyans bileşenlerinin kestirimi genel hatlarıyla verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, kredibilite kuramı ile panel veri modelleri arasındaki bağlantı incelenmiştir. Kredibilite fiyatlarının kestiriminde en iyi doğrusal yansız önkestiriciler kullanılarak, Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modellerinin, karışık doğrusal modellerin özel durumları olarak gösterimine değinilmiştir. Son bölümde, trafik sigortasına ilişkin veri kullanılarak, Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelleri altında, Türkiye'nin tüm illeri için kredibilite primleri hesaplanmıştır.

2. KREDİBİLİTE TEORİSİ

2.1. Giriş

Aktüerya bilimlerinde başlıca sorunlardan biri, risk sınıflarına ilişkin geçmiş hasar bilgisi bilinen bir portföyde, herhangi bir risk sınıfının gelecek dönemdeki hasarının kestirimidir. Bu bir kredibilite fiyatlandırma (ratemaking) sorunudur (Frees et al., 1999).

Bir poliçe sahibinin hasar geçmişi veya hasar deneyimi, uygulanan kılavuz primde (manual rate) varsayılandan daha iyi ise, bu poliçe sahibinin, prim indirimi talebinde bulunma olasılığı her zaman vardır. Kaldı ki, rekabetçi piyasalarda bu tür poliçe sahiplerine prim indirimi yapmak neredeyse bir zorunluluk haline gelmektedir. Bir risk grubunda tüm risklerin homojen olduğu varsayılarak risk grubunun beklenen hasarı hesaplanır ve bu kılavuz prim olarak gruptaki her bireye uygulanır. Oysa, risk birimleri arasında farklılıkların olması doğaldır. Bu nedenle, bazı poliçe sahipleri, hasar deneyimlerinin varsayılandan daha iyi olmasına rağmen, daha fazla prim ödediklerini düşünerek, prim indirimi talebinde bulunabilir. Benzer biçimde, sigorta portföyünde, risk primi veya net prim hesabında varsayılandan daha kötü hasar deneyimine sahip poliçe sahipleri de bulunmaktadır ve adil olunması için, bu poliçe sahiplerinin daha fazla prim ödemeleri istenmelidir. Bu durumda sigortacı şu soruyla karşı karşıyadır: Poliçe sahibinin hasar deneyimi, fiyatlandırma yapılırken ne kadar güvenilirdir, ne kadar itibarlıdır? Bu soru ile ilgili iki durum göz önüne alınmalıdır:

- I. Sigortacı, poliçe sahibi hakkında ne kadar fazla geçmiş hasar bilgisine sahipse, poliçe sahibinin deneyimi o kadar güvenilir olur. Aynı şekilde, bir grup sigortasında, geniş grupların hasar deneyimi küçük gruplarınkinden daha güvenilirdir.
- II. Piyasa rekabeti sigortacıyı, tam kredibilite uygulamaya diğer bir ifadeyle prim hesabında sigortacıyı, tamamen poliçe sahibinin geçmiş hasar bilgisinden yararlanmaya itebilir.

İstatistiksel çerçeveden bakıldığında, kredibilite kuramı mantığa aykırı bir sonuç verir. Bir sigortalı veya bir grup sigortalıya ilişkin hasar bilgisi mevcut ise

istatistiksel olarak bakıldığında, örneklem ortalaması veya yansız başka bir kestirici kullanılarak fiyatlandırma yapılabilir. Fakat, kredibilite kuramına göre, bu hasar deneyiminden gelen bilgiye belirli miktarda ağırlık verilirken, geri kalan ağırlığın diğer bilgilerden gelen kestiriciye verilmesi gerekir. Kredibilite kuramı, sigortacının bu sorununa nicel olarak çözüm getirmesini sağlayan yöntemleri içerir (Klugman et al., 2004) .

Bazı yaklaşımlar altında, kredibilite kestiricisi (hasar sayısı, hasar miktarı, risk primi v.b için) C ,

$$C = Z R + (1 - Z) H \quad (2.1)$$

eşitliğinden hesaplanır.

Eşitlik (2.1)'deki gibi kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılmış biçimde hesaplanan primler, kredibilite primi olarak adlandırılmaktadır (Kaas et al.,2001). Burada, R güncel gözlemlerin ortalamasını, H ise önsel ortalamayı gösterir. Z kredibilite faktörü olarak tanımlanır. Z , güncel gözlemlere verilen ağırlığı, $(1 - Z)$ ise geçmiş gözlemlere verilen ağırlığı gösterir (Herzog.,1999).

Başka bir açıdan bakıldığında R , sigorta portföyündeki herhangi sigortalının geçmiş hasar bilgisi ve H , tüm portföye ilişkin geçmiş hasar bilgisi olarak da ifade edilir. $Z = 1$ olması durumunda, bir sonraki döneme ilişkin kestirim, tamamen sigortalının hasar deneyimine göre yapılmış olur. Sigortalıya ilişkin gözlem sayısı az ise Z değeri 0'a yaklaşır ve bu durumda, kredibilite kestirimi, tüm portföyün ortalamasına yakın olarak elde edilir. Portföy homojen ise, kişilere yüklenecek prim, tüm portföyün ortalaması olarak belirlenebilir. Diğer yandan, sigortalıların geçmiş hasar bilgisi yeterince geniş ve portföy heterojen ise, sigortalının bireysel ortalaması prim olarak belirlenebilir (Dannenburg et al., 1996).

2.2. Kredibilite Yaklaşımları

Kredibilite kuramında kullanılan yaklaşımlar üç temel başlık altında sınıflandırılabilir:

1. Sınırlı Dalgalanmalı Yaklaşım,
 2. Bayesci Yaklaşım,
 3. En Fazla Kesinlik Yaklaşımı (Greatest Accuracy Approach),
- (Herzog,1999).

En fazla kesinlik yaklaşımında kredibilite faktörleri, Bayesci bir modelde optimal katsayılar olarak elde edilmektedir. Bu nedenle kredibilite kuramı, sınırlı dalgalanmalı kredibilite kuramı ve en fazla kesinlik kredibilite kuramı olarak iki yöntem altında incelenmektedir (Kaas et al., 2001).

2.2.1. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımı

Bu kuramın başlangıç noktasını Mowbray (1914)'in çalışması oluşturmuştur. Mowbray (1914) çalışmasında, “Güvenilir prim değerlemesi için gerekli hasar sayısı ne kadar olmalıdır?” sorusuna yanıt aramıştır. Bu yaklaşımda, tam kredibilite için beklenen hasar sayısının en küçük değeri ve kısmi kredibilite faktörü elde edilir. Bu yaklaşımda ele alınan varsayımlar şunlardır:

$t=1,2,...,T$ için, Y_t , bir grupta herhangi bir poliçe sahibinin t zaman dönemindeki hasar miktarını veya hasar sayısını gösteren rastgele değişken olsun. Ayrıca Y_t , bir gruptaki t . poliçe sahibinin veya bir risk sınıfında t . üyenin hasar deneyimi olarak da tanımlanabilir. Bu rastgele değişkenler, birbirinden bağımsız olsun ve $E(Y_t)=\xi$, $Var(Y_t)=\sigma^2$ biçiminde gösterilsin. Poliçe sahibine ait geçmiş hasarların ortalaması, $\bar{Y}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T Y_t$ biçiminde hesaplanır. Bu varsayımlara göre, $E(\bar{Y})=\xi$ ve $Var(\bar{Y})=\frac{\sigma^2}{T}$ olarak elde edilmektedir.

Sigortacının amacı, prim hesabı yapmak ve bunun için ξ değerine karar verebilmektir. Sigortacının ξ değerine karar verirken üç seçeneği vardır:

- Poliçe sahibinin geçmiş hasar bilgisini göz ardı edip, aynı özellikte olmayan tüm poliçe sahiplerinin hasar deneyimlerinden yararlanarak risk primini, M kılavuz primi olarak belirlemek (sıfır kredibilite),

- M primini göz ardı ederek sadece $\bar{Y}$ 'ye göre belirlemek (tam kredibilite),
- M ve $\bar{Y}$ değerlerine belirli miktarda ağırlık vererek her ikisinin kombinasyonu olarak belirlemektir (kısmi kredibilite).

Sigortacı açısından bakıldığında, poliçe sahibinin geçmiş hasar bilgisi durağan (σ^2 küçük) ise gelecek dönem hasarların önkestiricisi olarak $\bar{Y}$ 'nin kullanılması daha iyi olur. Ancak, diğer tüm poliçe sahiplerinin ξ değerleri benzerlik gösteriyorsa, önkestirici olarak M 'nin kullanılması daha mantıklıdır (Klugman et al., 2004).

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımı iki türlü incelenmektedir. Bunlardan biri tam kredibilite yaklaşımı diğeri ise kısmi kredibilite yaklaşımıdır.

2.2.1.1. Sınırlı dalgalanmalı tam kredibilite yaklaşımı

Gelecekteki sigorta priminin, yalnızca sigortalı veya sigortalıların kendi deneyimine göre hesaplanması tam kredibilite ($Z=1$) anlamına gelir. Tam kredibilitenin sağlanması için sigortalının hasar deneyiminin ne kadar büyük olması gerektiğine bu yaklaşım yanıt vermektedir.

Bu yaklaşımda, $\bar{Y}$ ve ξ arasındaki farkın, ξ 'ye bağlı sınırlar içinde olması olasılığından hareket edilir. Bu durum istatistiksel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir,

$$P(-r\xi < \bar{Y} - \xi < r\xi) \geq p, \quad r > 0 \text{ ve } 0 < p < 1 \quad (2.2)$$

Eşitlik (2.2), aşağıdaki eşitsizliğe dönüştürülür,

$$P\left(\left|\frac{\bar{Y} - \xi}{\sigma / \sqrt{T}}\right| \leq \frac{r\xi\sqrt{T}}{\sigma}\right) \geq p \quad (2.3)$$

$y = \frac{r\xi\sqrt{T}}{\sigma}$ olursa, y_p aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$y_p = \inf_y \left\{ P\left(\left|\frac{\bar{Y} - \xi}{\sigma / \sqrt{T}}\right| \leq y\right) \geq p \right\} \quad (2.4)$$

Eşitlik (2.4)' ten de görüldüğü gibi y_p , parantez içindeki olasılığı veren en küçük y değeridir. $\bar{Y}$ ' nin sürekli dağılımı var ise $\geq$ işareti = işaretine dönüşür,

$$P\left(\left|\frac{\bar{Y} - \xi}{\sigma / \sqrt{T}}\right| \leq y_p\right) = p \quad (2.5)$$

Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.5)'e göre tam kredibilite koşulu, $r\xi\sqrt{T} / \sigma \geq y_p$ 'dir. Bu koşula göre aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\frac{\sigma}{\xi} \leq \frac{r}{y_p} \sqrt{T} = \sqrt{\frac{T}{\lambda_0}} \quad (2.6)$$

Eşitlik (2.6)'da $\lambda_0 = (y_p / r)^2$ dir. Ayrıca tam kredibilite durumu,

$$Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{T} \leq \frac{\xi^2}{\lambda_0} \quad (2.7)$$

biçiminde de gösterilir.

Süreç durağan bir diğer deyişle değişkenlik az ise prim hesabında $\bar{Y}$ bilgisi kullanılır. Eşitlik (2.7), kararlılığın uygun seviyesini gösterir. Tam kredibilite için gereken riske maruz kalan birim sayısının (exposure) en küçük değeri,

$$T \geq \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \quad (2.8)$$

eşitsizliğinden elde edilir.

$\bar{Y}$, ξ ortalaması ve σ^2/T varyansı ile normal dağılıma uyuyorsa, T değerinin büyük olduğu durumda $\frac{\bar{Y} - \xi}{\sigma / \sqrt{T}} = Z_T$, standart normal dağılıma uyar. Bu durumda,

Eşitlik (2.5), $P(|Z_T| \leq y_p) = p$ biçimine dönüşür. Böylece, y_p değeri standart normal dağılım tablosundan bulunmaktadır.

Örneğin, $p=0,95$ ise $y_{0,95}=1,96$ olur. Eğer $r=0,05$ ise,

$$\lambda_0 = \left(\frac{y_p}{r} \right)^2 = (39,2)^2 = 1536,64 \text{ olur.}$$

Tam kredibilite için gerekli olan riske maruz kalan birim sayısı,

$$T \geq 1536,64 \sigma^2 / \xi^2 \text{ biçiminde bulunur (Klugman et al., 2004).}$$

2.2.1.2. Sınırlı dalgalanmalı kısmi kredibilite yaklaşımı

Tam kredibilitenin uygun olmadığı düşünüldüğünde, hem poliçe sahibine ait geçmiş hasar ortalamasından ($\bar{Y}$) hem de portföye ait başka bir ortalamadan (M) yararlanmak için kısmi kredibilite faktörü bulunur. Bu yaklaşımda kredibilite primi aşağıdaki eşitlikten elde edilir,

$$P_c = Z \bar{Y} + (1 - Z) M \quad (2.9)$$

Eşitlik (2.9)'da $Z \in [0,1]$, kredibilite faktörüdür. Sınırlı dalgalanmalı tam kredibilite yaklaşımında amaç, $\bar{Y}$ ile ξ arasındaki farkın yüksek olasılıkla düşük değerde olması idi. Bu durum aslında, $\bar{Y}$ yansız bir kestirici olduğu için $\bar{Y}$ 'nin varyansının kontrol edilmesi demektir. Eşitlik (2.7)'ye göre $\bar{Y}$ 'nin varyansının yeterince küçük olacağının garantisi yoktur. Fakat kredibilite priminin varyansı kontrol edilebilirdir. Buna göre aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\frac{\xi^2}{\lambda_0} = \text{Var}(P_c) = Z^2 \text{Var}(\bar{Y}) = Z^2 \frac{\sigma^2}{T} \quad (2.10)$$

Böylece kısmi kredibilite faktörü,

$$Z = \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) \sqrt{\frac{T}{\lambda_0}} \quad (2.11)$$

biçiminde elde edilir.

Bu eşitlikten yararlanarak kredibilite faktörü,

$$Z = \min \left\{ \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) \sqrt{\frac{T}{\lambda_0}}, 1 \right\} \quad (2.12)$$

biçiminde tanımlanır.

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite yaklaşımı kolay çözüm sağlamasına rağmen kuramsal olarak aşağıda bahsedilen zorlukları içerir:

- Y_t 'lerin dağılımına ilişkin kuramsal bir model olmadığı için Eşitlik (2.9)'daki kredibilite priminin, M 'ye göre tercih edilmesi için önemli bir neden bulunmamaktadır.
- Eşitlik (2.9) ile prim hesaplanırken, r ve p değerlerinin seçimi ile ilgili belirli bir kural yoktur.
- Bu yaklaşımın M ile ξ arasındaki farka tam olarak açıklık getirememektedir.

(Klugman et al., 2004).

2.2.2. Bayesci yaklaşım

Whitney (1918), P , kazanılmış primler olmak üzere kredibilite faktörü, Z' yi, $P/(P+K)$ biçiminde tanımlamıştır. Burada, sorunun K' nın belirlenmesi olduğunu ve çözümün Bayes kuramının kullanılmasıyla sağlanacağını ifade etmiştir. Daha sonra Bailey (1950), bu çalışmayı geliştirmiş ve Bayesci yaklaşımın temelleri atılmıştır. Bu yaklaşımın daha iyi anlaşılması için Bayes tanımlarının verilmesi yararlı olacaktır. H bir hipotez ve B bir olay olarak tanımlansın ve $P[H] > 0$ olmak üzere, H 'nin önsel (prior) olasılığı olarak gösterilsin. Koşullu olasılığın tanımına göre $P[B|H]$, H hipotezi verilmişken B olayının koşullu olasılığı olarak tanımlanır. Bir fonksiyon olarak tanımlanırsa, $P[B|H]$ ifadesine H 'nin B üzerindeki olabilirliği denir ve bu olabilirlik, Bayesci analizinin temel noktasıdır. $P[H|B]$ ifadesine ise H 'nin sonsal (posterior) olasılığı denir. Temel eşitlik,

$$P[H|B] = \frac{P[B|H]P[H]}{P[B]}, \quad P[B] > 0 \quad (2.13)$$

biçimindedir.

$P[B]$, H ye bağılı olmayan bir sabit olduğu için göz ardı edilirse H 'nin sonsal olasılığı; H 'nin önsel dağılımı $P[H]$ 'ye ve H 'nin B üzerindeki olabilirliğine, $P[B|H]$ 'ye bağılıdır (Herzog, 1999).

Belli bir risk sınıfındaki her poliçe sahibinin risk seviyesi θ risk parametresi ile tanımlansın fakat θ değeri poliçe sahibine göre değişsin. θ parametresi, poliçe sahibinin risk seviyesini etkileyen, gözlenemeyen faktörlerin temsilcisi olarak da düşünülebilir. θ parametresi var olduğu fakat gözlenemediği için gerçek değerinin hiçbir zaman bilinmediği varsayılır. θ parametresi poliçe sahibine göre değiştiği için, bir olasılık dağılımı vardır. Θ 'nın olasılık fonksiyonu $\pi(\theta)$ ile gösterilirse, Θ bir rastlantı değişkeni olmak üzere dağılım fonksiyonu, $\Pi(\theta) = P(\Theta < \theta)$ biçiminde gösterilir.

θ değeri bilinemediği için $\pi(\theta)$ fonksiyonunun bilindiği varsayılır. Kitle içinde risk seviyeleri değişim gösterebildiği için, poliçe sahibinin hasar bilgisinin θ 'ya göre değişeceği açıktır. Poliçe sahibinin hasar deneyiminin iki aşamalı sürece sahip bir kitleden geldiği varsayılın. İlk aşamada, $\pi(\theta)$ dağılımından θ parametresi bulunur. Daha sonraki aşamada ise Y hasarları veya kayıpları, θ koşulunda Y 'nin dağılımı, $f_{Y|\Theta}(y|\theta)$ 'den elde edilir.

$T=1, 2, \dots, T, T+1$ dönemi için, Y_t , bir poliçe sahibinin t zaman döneminde gözlenen hasar miktarı veya hasar sayısı olsun ve Y_t 'ler birbirinden bağımsız olsun. $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$ ve $y=(y_1, y_2, \dots, y_T)'$ vektörleri olmak üzere, poliçe sahibinin gözlenen hasarı $Y=y$ olsun. $\Theta=\theta$ verilmişken, Y_t 'nin koşullu olasılık fonksiyonu $f_{Y_t|\Theta}(y_t|\theta)$ olarak gösterilsin. Y_t 'ler bağımsız olmalarına rağmen aynı dağılıma sahip olmak zorunda değildir. Eğer aynı dağılıyorlar ise, $\Theta=\theta$ koşulunda $f_{Y_t|\Theta}(y_t|\theta)$, t ye bağımlı olmaz.

Amaç, poliçe sahibinin bir sonraki dönemdeki hasarının önkestirimi olduğu için $\Theta = \theta$ koşulu altında Y_{T+1} 'in dağılımı ile ilgilenilir. θ bilinseydi $f_{Y_{T+1}|\Theta}(y_{T+1}|\theta)$ kullanılabilirdi. θ bilinmediğinde, aynı poliçe sahibi için geçmiş hasar bilgisi, y bilinir. Bu nedenle, θ koşulu yerine y koşulu getirilir ve $Y=y$ verilmişken Y_{T+1} 'in koşullu dağılımı elde edilir. Θ kesikli dağılıyor ise hesaplamalar integraller yerine toplamlar ile yapılır. Y_t 'ler $\Theta = \theta$ koşulunda birbirinden bağımsız olduğu için,

$$f_{Y,\Theta}(y,\theta) = f(y_1, y_2, \dots, y_T | \theta) \pi(\theta) = \left[\prod_{t=1}^T f_{Y_t|\Theta}(y_t | \theta) \right] \pi(\theta) \quad (2.14)$$

dağılımı yazılır.

Y 'nin bileşik dağılımı,

$$f_Y(y) = \int \left[\prod_{t=1}^T f_{Y_t|\Theta}(y_t | \theta) \right] \pi(\theta) d\theta \quad (2.15)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2.15)'te, T yerine $T+1$ yazılırsa $Y_1, Y_2, \dots, Y_{T+1}$ 'in bileşik dağılımı elde edilir. Sonuç olarak, $Y=y$ verilmişken, Y_{T+1} 'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$f_{Y_{T+1}|Y}(y_{T+1} | y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int \left[\prod_{t=1}^{T+1} f_{Y_t|\Theta}(y_t | \theta) \right] \pi(\theta) d\theta \quad (2.16)$$

$Y=y$ verilmişken, $Y_1, Y_2, \dots, Y_T, \Theta$ 'nin bileşik dağılımından yararlanarak, Θ 'nın sonsal yoğunluğu aşağıdaki biçimde elde edilir,

$$\pi_{\Theta|Y}(\theta | y) = \frac{f_{Y,\Theta}(y, \theta)}{f_Y(y)} = \frac{\left[\prod_{t=1}^T f_{Y_t|\Theta}(y_t | \theta) \right]}{f_Y(y)} \pi(\theta) \quad (2.17)$$

Eşitlik (2.17) kullanılarak, $\pi_{\Theta|Y}(\theta | y) f_Y(y) = \prod_{t=1}^T \left[f_{Y_t|\Theta}(y_t | \theta) \right] \pi(\theta)$ eşitliği

yazıldığında, Y_{T+1} 'in koşullu yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
f_{Y_{T+1}|Y}(y_{T+1}|y) &= \frac{\int f_{Y_{T+1}|\Theta}(y_{T+1}|\theta) \pi_{\Theta|Y}(\theta|y) f_Y(y) d\theta}{f_Y(y)} \\
&= \int f_{Y_{T+1}|\Theta}(y_{T+1}|\theta) \pi_{\Theta|Y}(\theta|y) d\theta
\end{aligned} \tag{2.18}$$

biçiminde de elde edilmektedir.

$Y = y$ gözlem değerlerinden yararlanarak Y_{T+1} 'in beklenen değeri bulunabilir. Eğer θ biliniyorsa $f_{Y_{T+1}|\Theta}(y_{T+1}|\theta)$ fonksiyonundan yararlanarak, varsayımsal (hipotetik) ortalama veya bireysel prim,

$$\mu_{T+1}(\theta) = E(Y_{T+1} | \Theta = \theta) = \int y_{T+1} f_{Y_{T+1}|\Theta}(y_{T+1} | \theta) dy_{T+1} \tag{2.19}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2.19)' da θ yerine Θ yerleştirilirse hipotetik ortalamanın beklenen değeri,

$$\mu = \mu_{T+1} = E(Y_{T+1}) = E[E(Y_{T+1} | \Theta = \theta)] = E[\mu_{T+1}(\theta)] \tag{2.20}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2.20)' den görüldüğü gibi, net prim (pure premium) veya genel prim (collective premium) hipotetik ortalamaların beklenen değeri olarak hesaplanır. Bu yöntem, birey hakkında bir bilgi olmadığında, risk parametresi veya y bilinmediğinde kullanılmaktadır.

θ değerinin bilinmemesi durumunda, Y_{T+1} 'in veya beklenen değerinin kestiriminde izlenecek en iyi yol, $Y=y$ gözlem verilerinden yararlanmaktır. Bu durumda, sigortalının, $T+1$ zamanındaki Bayesci primi,

$$E(Y_{T+1} | Y = y) = \int y_{T+1} f_{Y_{T+1}|Y}(y_{T+1} | y) dy_{T+1} \tag{2.21}$$

veya

$$E(Y_{T+1} | Y=y) = \int \mu_{T+1}(\theta) \pi_{\Theta|Y}(\theta | y) d\theta \quad (2.22)$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç olarak, Bayesci prim, Eşitlik (2.22)' den görüldüğü gibi, $\pi_{\Theta|Y}(\theta | y)$ sonsal dağılım üzerinden alınan, koşullu ortalamaların beklenen değerine eşittir (Klugman et al.,2004).

2.2.3. En fazla kesinlik kredibilite yaklaşımı

2.2.3.1. Giriş

Bu yaklaşımda, kredibilite problemi için modele dayalı çözüm üretilir. Bu yaklaşım, Bühlmann (1967)' in çalışması ile kredibilite kuramında yerini alırken, çalışmanın dayanağını Whitney (1918) ve Bailey (1945)' in çalışmaları oluşturmaktadır.

Amaç, poliçe sahibinin gelecek dönemdeki hasarının önkestirimi için, bireysel ortalama $\mu_{T+1}(\theta)$ 'in hesaplanmasıdır. θ parametresi bilinmediği için, θ koşulu yerine y koşulunun getirilebileceğinden bahsedilmiştir. Bu hesaplamanın sonucu Bayesci primi ($E(Y_{T+1} | Y=y)$) vermektedir. Bu primin hesaplanması çeşitli varsayımlardan dolayı zor olabilmektedir. Bühlmann, θ parametresi her poliçe sahibinin fiyatlandırma sınıfındaki risk seviyesini temsil etmek üzere, koşullu ortalama, $\mu_{T+1}(\theta)$ 'in kestirilmesi için alternatif bir yöntem önermiştir.

Bühlmann, $\mu_{T+1}(\theta) = E(Y_{T+1} | \Theta = \theta)$ olmak üzere, $E[\mu_{T+1}(\theta) | Y_1, Y_2, \dots, Y_T]$ 'nin kestiriminde, geçmiş hasar bilgisini kullanarak, hata kareler ortalaması en küçük olacak biçimde bir yaklaşım kullanmıştır. Bayesci yaklaşımda verilen varsayımlar altında, $t \in \{1, 2, 3, \dots, T\}$ olmak üzere, Y_t , herhangi bir poliçe sahibinin, t zaman döneminde oluşan hasar miktarı olsun ve poliçe sahibinin geçmiş hasarları $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$ biçiminde gösterilsin. Θ koşulu altında, Y_t 'ler birbirinden bağımsız olsun.

Bu yaklaşımda, $\alpha_0 + \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t$ doğrusal fonksiyonu kullanılarak $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T$ 'lerin kestiricileri bulunmaktadır. α değerleri, aşağıdaki karesel hata kayıp (squared error loss) fonksiyonunun beklenen değerini en küçük yapacak değerler almalıdır,

$$Q = E \left\{ \left[\mu_{T+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t \right]^2 \right\} \quad (2.23)$$

Eşitlik (2.23)'teki fonksiyonun en küçük değer almasını sağlayan α değerleri $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_T$ olarak gösterilsin. Bu değerler aynı zamanda

$$Q_1 = E \left\{ \left[E(Y_{T+1}|Y) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t \right]^2 \right\} \text{ ve } Q_2 = E \left\{ \left[Y_{T+1} - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t \right]^2 \right\} \text{ 'yi de minimize}$$

etmektedir. Bu kestiricilerin elde edilmesiyle birlikte oluşturulan $\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t E(Y_t)$ fonksiyonu, kredibilite primi olarak adlandırılır. Q ' nun en küçük değer alması için α 'lara göre türevi alınır,

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = E \left\{ 2 \left[\mu_{T+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t \right] (-1) \right\} \quad (2.24)$$

Eşitlik (2.24), 0'a eşitlenirse,

$$E \left[\mu_{T+1}(\theta) \right] = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t E(Y_t) \quad (2.25)$$

eşitliği elde edilir.

$E(Y_{T+1}) = E \left[E(Y_{T+1} | \Theta = \theta) \right] = E \left[\mu_{T+1}(\theta) \right]$ olduğu için Eşitlik (2.25)'ten aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$E(Y_{T+1}) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t E(Y_t) \quad (2.26)$$

$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t E(Y_t)$ toplamının, $E(Y_{t+1})$ 'in yansız kestiricisi olması istendiği için, Eşitlik

(2.26), yansızlık eşitliği olarak tanımlanır. $\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t E(Y_t)$ aynı zamanda, Bayesci

primin de en iyi doğrusal yansız kestiricisidir. $s = 1, 2, \dots, T$ için $\tilde{\alpha}_s$ 'lere göre $\partial Q / \partial \alpha_s$ türevi alınır,

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_s} = E \left\{ 2 \left[\mu_{T+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t \right] (-Y_s) \right\} \quad (2.27)$$

ve türevler 0'a eşitlendiğinde,

$$E \left[\mu_{T+1}(\theta) Y_s \right] = \tilde{\alpha}_0 E(Y_s) + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t E(Y_s Y_t) \quad (2.28)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (2.28)' in sol tarafı,

$$E \left[\mu_{T+1}(\theta) Y_s \right] = E(Y_{T+1} Y_s) \quad (2.29)$$

biçiminde de ifade edilmektedir.

Eşitlik (2.29), Eşitlik (2.28)'de yerine konulduğunda aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$E \left[Y_{T+1} Y_s \right] = \tilde{\alpha}_0 E(Y_s) + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t E(Y_t Y_s) \quad (2.30)$$

Eşitlik (2.26), $E(Y_t)$ ile çarpılıp, Eşitlik (2.30)' dan çıkartıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$Cov(Y_s, Y_{T+1}) = \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t Cov(Y_s, Y_t), \quad s = 1, 2, \dots, T \quad (2.31)$$

Eşitlik (2.26) ile Eşitlik (2.31) 'deki tüm s değerleri için elde edilen T sayıda eşitliğe

normal eşitlikler denir. Bu eşitlikler, $\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t Y_t$ kredibilite priminin hesaplanması

için $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_T$ değerleri için çözümlenmelidir. Kredibilite primi $\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t Y_t$ 'nin hesaplanmasında kolaylık sağlanması açısından, $E(Y_t) = \mu$ $Var(Y_t) = \sigma^2$ ve ρ korelasyon katsayısı olmak üzere $t \neq s$ için $Cov(Y_t, Y_s) = \rho \sigma^2$ varsayalım. Bu varsayımlar altında Eşitlik (2.26),

$$\mu = \tilde{\alpha}_0 + \mu \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t \Rightarrow \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t = 1 - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} \quad (2.32)$$

biçimine dönüşür.

$s = 1, 2, \dots, T$ için Eşitlik (2.31)'e göre,

$$\rho = \sum_{\substack{t=1 \\ s \neq t}}^T \tilde{\alpha}_t \rho + \tilde{\alpha}_s = \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t \rho + \tilde{\alpha}_s (1 - \rho) \quad (2.33)$$

elde edilir. Buradan $\tilde{\alpha}_s$,

$$\tilde{\alpha}_s = \frac{\rho \left(1 - \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t \right)}{1 - \rho} = \frac{\rho \tilde{\alpha}_0}{\mu (1 - \rho)} \quad (2.34)$$

eşitliğinden elde edilir.

1'den T 'ye kadar $\tilde{\alpha}_s$ değerleri toplanır,

$$\sum_{s=1}^T \tilde{\alpha}_s = \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t = \frac{T \rho \tilde{\alpha}_0}{\mu (1 - \rho)} \quad (2.35)$$

Buradan $\tilde{\alpha}_0$ ve $\tilde{\alpha}_t$ aşağıdaki eşitliklerden elde edilir,

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{(1 - \rho) \mu}{1 - \rho + T \rho} \quad (2.36)$$

$$\tilde{\alpha}_t = \frac{\rho \tilde{\alpha}_0}{\mu (1 - \rho)} = \frac{\rho}{1 - \rho + T \rho} \quad (2.37)$$

Sonuç olarak bireyin kredibilite primi,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t Y_t &= \frac{(1-\rho)\mu}{1-\rho+T\rho} + \sum_{t=1}^T \frac{\rho Y_t}{1-\rho+T\rho} \\ &= (1-Z)\mu + Z\bar{Y}\end{aligned}\quad (2.38)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2.38)'de $\bar{Y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t$ biçiminde ve kredibilite faktörü, $Z = T\rho/(1-\rho+T\rho)$ biçiminde hesaplanır. Bu yaklaşımda kredibilite primi, Θ koşulu altında Y_t 'nin ortalama, varyansı ve $Cov(Y_s, Y_t)$ 'nin varsayımlarına bağlı olarak Bühlmann modeli ve Bühlmann-Straub kredibilite modeli ile hesaplanmaktadır (Klugman et al., 2004).

2.2.3.2. Bühlmann kredibilite modeli

Θ koşulu altında her bir poliçe sahibinin geçmiş hasar miktarları, $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ birbirinden bağımsız olsun. En fazla kesinlik yaklaşımının varsayımları altında, t dönemi için koşullu beklenen değer,

$$\mu(\theta) = E(Y_t | \Theta = \theta) \quad (2.39)$$

biçiminde ve süreç varyansı (process variance),

$$\nu(\theta) = Var(Y_t | \Theta = \theta) \quad (2.40)$$

biçiminde ifade edilir.

Eşitlik (2.39) ve Eşitlik (2.40)' dan, hipotetik ortalamaların beklenen değeri $\mu = E[\mu(\theta)]$, süreç varyansının beklenen değeri, $\nu = E[\nu(\theta)]$ ve hipotetik ortalamaların varyansı, $a = Var[\mu(\theta)]$ olarak tanımlansın. Y_t 'nin ortalama, varyans ve kovaryansı aşağıdaki eşitliklerde gösterildiği biçimde hesaplanmaktadır,

$$E(Y_t) = E[E(Y_t | \Theta = \theta)] = E[\mu(\theta)] = \mu \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
Var(Y_t) &= E[Var(Y_t|\Theta = \theta)] + Var[E(Y_t|\Theta = \theta)] \\
&= E[v(\theta)] + Var[\mu(\theta)] \\
&= v + a
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_s) &= E(Y_t Y_s) - E(Y_t) E(Y_s) \\
&= E[E(Y_t Y_s|\Theta = \theta)] - \mu^2 \\
&= E[E(Y_t|\Theta = \theta) E(Y_s|\Theta = \theta)] - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\
&= \{E[\mu(\theta)]^2\} - \{E[\mu(\theta)]\}^2 \\
&= Var[\mu(\theta)] \\
&= a
\end{aligned} \tag{2.43}$$

En fazla kesinlik yaklaşımında anlatılanlara döndüğünde, μ , $\sigma^2 = v + a$ ve $\rho = a / (v + a)$ parametreleri Eşitlik (2.38)'de yerlerine konulduğunda Bühlmann kredibilite primi,

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t Y_t = (1 - Z) \mu + Z \bar{Y} \tag{2.44}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2.44)'te Bühlmann kredibilite faktörü,

$$Z = \frac{T}{T + \frac{v}{a}} = \frac{T}{T + k} \tag{2.45}$$

biçiminde elde edilir. Burada k aşağıdaki biçimde tanımlanır,

$$k = \frac{v}{a} = \frac{E[Var(Y_t|\Theta = \theta)]}{Var[E(Y_t|\Theta = \theta)]} \tag{2.46}$$

2.2.3.3. Bühlmann-Straub kredibilite modeli

Bühlman-Straub modeli, Bühlmann modelinin genelleştirilmiş biçimidir. Bühlmann modelinin eksik yönü; riske maruz kalan birim sayılarının farklı olmasına olanak vermemesidir. Bühlmann-Straub modeli, bu eksikliği gidermektedir. Bühlmann

modelindeki varsayımlar altında $t=1,2,...,T+1$ için Y_t 'nin koşullu ortalama ve varyansı;

$$E[Y_t | \Theta = \theta] = \mu(\theta) \quad (2.47)$$

$$Var(Y_t | \Theta = \theta) = v(\theta) / w_t \quad (2.48)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2.48)'de w_t , t poliçe yılı veya gözlem dönemindeki riske maruz kalan birim sayısını gösteren bir sabittir. w_t , geçmiş t poliçe yılı için poliçenin yürürlükte kaldığı ay sayısı, bir gruptaki birey sayısı gibi tanımlanabilse de genel olarak o dönemdeki riske maruz kalan birim sayısı olarak tanımlanmaktadır. Θ koşulu altında, her bir Y_t , $\mu(\theta)$ ortalamasına ve $v(\theta)$ varyansına sahip, w_t sayıda bağımsız rastlantı değişkeninin ortalaması ise bu modelin kullanımı uygundur. Bühlmann modelinde olduğu gibi bu modelde de, $\mu = E[\mu(\theta)]$, $v = E[v(\theta)]$ ve $a = Var[\mu(\theta)]$ biçimlerinde tanımlanır. $E(Y_t) = \mu$, $Cov(Y_t, Y_s) = a$ biçiminde ve varyans,

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= E[Var(Y_t | \Theta = \theta)] + Var[E(Y_t | \Theta = \theta)] \\ &= E\left[\frac{v(\theta)}{w_t}\right] + Var[\mu(\theta)] \\ &= \frac{v}{w_t} + a \end{aligned} \quad (2.49)$$

biçiminde elde edilmektedir.

Kredibilite primi hesabında, $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_T$ değerlerinin bulunması için Eşitlik (2.26) ve Eşitlik (2.31)'in çözümlenmesi gerekir. Poliçe sahibinin toplam riske maruz kalan birim sayısı, $w = \sum_{t=1}^T w_t$ 'dir. Bu model için de Eşitlik (2.32)'deki dönüşüm elde edilir,

$$\mu = \tilde{\alpha}_0 + \mu \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t \Rightarrow \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t = 1 - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} \quad (2.50)$$

$t = 1, 2, \dots, T$ için $Cov(Y_t, Y_{T+1}) = \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t Cov(Y_t, Y_s)$ eşitliği,

$$a = \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t a + \tilde{\alpha}_s \left(a + \frac{v}{w_s} \right) = \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t a + \frac{v \tilde{\alpha}_s}{w_s} \quad (2.51)$$

biçimine dönüşür.

Buradan,

$$\tilde{\alpha}_s = \frac{a}{v} w_s \left(1 - \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t \right) = \frac{a}{v} \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} w_s, \quad s = 1, 2, \dots, T \quad (2.52)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.50) ve Eşitlik (2.52) kullanılarak,

$$1 - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} = \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t = \sum_{s=1}^T \tilde{\alpha}_s = \frac{a}{v} \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} \sum_{s=1}^T w_s = \frac{a \tilde{\alpha}_0 w}{\mu v} \quad (2.53)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\tilde{\alpha}_0$,

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\mu}{1 + a w / v} = \frac{v / a}{w + v / a} \mu \quad (2.54)$$

biçiminde ve $\tilde{\alpha}_t$ 'ler,

$$\tilde{\alpha}_t = \frac{a \tilde{\alpha}_0}{\mu v} w_t = \frac{w_t}{w + v / a} \quad (2.55)$$

biçiminde elde edilir.

Bu hesaplamalar sonucunda kredibilite primi, $\tilde{\alpha}_0 + \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t Y_t = (1 - Z) \mu + Z \bar{Y}$ eşitliğine dönüşür. Burada, kredibilite faktörü ve $\bar{Y}$ aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$Z = \frac{w}{w + v / a} = \frac{w}{w + k} \quad (2.56)$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^T w_t Y_t}{\sum_{t=1}^T w_t} \quad (2.57)$$

Karesel hata kayıp fonksiyonu açısından bakıldığında, en fazla kesinlik yaklaşımında elde edilen kredibilite primi, net primin Bayesci kestirimi için en iyi doğrusal kestirimi vermektedir. Bayesci prim, gözlemlerin doğrusal fonksiyonu ise

$$Q_1 = E \left\{ \left[E(Y_{T+1}|Y) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t \right]^2 \right\}, \quad t = 0, 1, \dots, T \text{ için } \alpha_t = \tilde{\alpha}_t \text{ 'ler ile en küçük sıfır}$$

değerini almaktadır. Bu durumda, Bayesci prim, kredibilite primine eşit olur. Bu iki primin eşit olduğu duruma, doğru (*exact*) kredibilite denmektedir (Klugman et al., 2004).

Mayerson (1964), Bailey (1950)' in çalışmasından yola çıkarak, beta-binom, gamma-Poisson, normal-normal önsel dağılımları ve olabilirlikleri için, Bühlmann kredibilite kestirim değerlerinin, Bayesci kestirim değerleri ile aynı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Jewell (1974), gamma-üstel ve geometrik-beta çiftleri gibi için bu sonucu elde etmiştir.

2.3. Parametre Kestirimi

En fazla kesinlik yaklaşımında anlatılan Bühlmann ve Bühlmann-Straub kredibilite modelleri ile Bayesci yaklaşımda, $\pi(\theta)$ ve $f_{Y_t|\theta}(y_t|\theta)$ dağılımlarının bilindiği varsayımı ile ilgilenilen niceliklerin değerleri elde edilebiliyordu. Bu durum, kuramın anlatımında kolaylık sağlasa da pratikte, sigorta portföyü için düşünüldüğünde çok gerçekçi olmaz. $\pi(\theta)$ önsel dağılımına bağlı olarak hesaplanan parametrelere yapısal (structural) parametreler denir. Bayesci yaklaşımda tüm yapısal parametrelerin bilindiği varsayılır ve parametre kestirimine gerek kalmaz. Pratikte ise, mevcut veri kullanılarak yapısal parametrelerin kestirilmesi gerekebilir. Bu yaklaşıma, ampirik veya görgül Bayes kestirimi denir.

$f_{Y_t|\Theta}(y_t|\theta)$ ve $\pi(\theta)$ dağılımlarının bilinmediği durum, parametrik olmayan kestirim altında, $f_{Y_t|\Theta}(y_t|\theta)$ 'in parametrik biçimde olduğu ancak $\pi(\theta)$ 'nin parametrik biçimde olmadığı durum, yarı parametrik kestirim altında ve $f_{Y_t|\Theta}(y_t|\theta)$ ile $\pi(\theta)$ 'nin her ikisinin de parametrik biçimde olduğu durum, parametrik kestirim altında incelenir. Parametrik modelde çok fazla varsayım yapıldığından sonuçların güvenilirliği azalmaktadır. Parametrik olmayan modeller diğer modellere oranla daha çok durum için uygundur çünkü parametrik modeldeki gibi varsayım zorluğu yoktur. Bu bölümde parametrik olmayan kestirim üzerinde durulmuş, Bühlmann ve Bühlmann-Straub kredibilite modelleri için yapısal parametrelerin kestirimi gösterilmiştir.

Bu bölümde anlatılacak veri yapısına ilişkin varsayımlar şöyledir:

$i = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere her $r \geq 1$ sayıda poliçe sahibi için riske maruz kalan birim başına gözlenen hasarlar $Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{iT_i})'$ olsun. $\{Y_i, i = 1, 2, \dots, r\}$ rassal vektörlerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılın. i . poliçe sahibi için bilinmeyen risk parametresi θ_i olsun ve θ_i 'ler, $\pi(\theta_i)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip, birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılan Θ_i rastlantı değişkenlerinin gerçekleşmesi (realization) olsun. $t = 1, 2, \dots, T_i$ olmak üzere, sabit i değeri için, $Y_{it}|\Theta_i$ koşullu rastlantı değişkenlerinin, $f_{Y_{it}|\Theta_i}(y_{it}|\theta_i)$ olasılık fonksiyonu ile birbirinden bağımsız oldukları varsayılın.

Bu veri şekli için genellikle iki durum kullanılır. Birinci durumda; i indisi, risk gruplarını veya risk sınıflarını, t indisi ise bireyleri gösterir. İkinci durumda ise, i indisi yine grup veya sınıfları gösterirken t indisi zaman dönemini gösterir ve gözlemler (y_{it}) o dönemdeki ortalama hasar miktarıdır. Bu bölümde ikinci durum için parametre kestirimi anlatılacaktır.

$i = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere, i . poliçe sahibi için riske maruz kalan birim sayılarının vektörü, $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iT_i})'$ olsun. Bühlmann modeli için düşünüldüğünde, tüm i

ve t değerleri için $w_{it}=1$ olur. Böylece, i . poliçe sahibinin geçmişte toplam riske maruz kalan birim sayısı,

$$w_{i.} = \sum_{t=1}^{T_i} w_{it} \quad (2.58)$$

biçiminde ve portföydeki toplam riske maruz kalan birim sayısı,

$$w_{..} = \sum_{i=1}^r w_{i.} = \sum_{i=1}^r \sum_{t=1}^{T_i} w_{it} \quad (2.59)$$

biçiminde gösterilir.

i . poliçe sahibinin geçmiş hasarlarının ortalaması,

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{1}{w_{i.}} \sum_{t=1}^{T_i} w_{it} Y_{it} \quad (2.60)$$

biçiminde ve portföydeki tüm hasarların ortalaması,

$$\bar{Y} = \frac{1}{w_{..}} \sum_{i=1}^r w_{i.} \bar{Y}_{i.} = \frac{1}{w_{..}} \sum_{i=1}^r \sum_{t=1}^{T_i} w_{it} Y_{it} \quad (2.61)$$

biçiminde kestirilir.

Hipotetik ortalama,

$$E(Y_{it} | \Theta_i = \theta_i) = \mu(\theta_i) \quad (2.62)$$

ve süreç varyansı,

$$Var(Y_{it} | \Theta_i = \theta_i) = \frac{v(\theta_i)}{w_{it}} \quad (2.63)$$

biçimindedir.

Yapısal parametreler aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\mu = E[\mu(\Theta_i)], \quad v = E[v(\Theta_i)], \quad a = Var[\mu(\Theta_i)]$$

Amaç, μ , v ve a parametrelerinin veri bilgisinden yararlanılarak kestirilmesidir. i . poliçe sahibinin bir sonraki dönemdeki hasarları için kredibilite primi aşağıdaki biçimde elde edilir,

$$Z_i \bar{Y}_i + (1 - Z_i) \mu, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.64)$$

Eşitlik (2.64)' te i . poliçe sahibinin kredibilite faktörü,

$$Z_i = \frac{w_i}{w_i + \frac{v}{a}} = \frac{a w_i}{a w_i + v} \quad (2.65)$$

biçiminde elde edilir.

μ , v ve a parametrelerinin kestiricileri $\hat{\mu}$, $\hat{v}$ ve $\hat{a}$ olarak gösterilirse Eşitlik (2.64),

$$\hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu} \quad (2.66)$$

biçimini alır.

Sonuç olarak, i . poliçe sahibinin T_i+1 yılındaki w_{i,T_i+1} riske maruz kalan birimini kapsayan kredibilite primi Eşitlik (2.66)'nın w_{i,T_i+1} ile çarpılması ile elde edilir (Klugman et al.,2004).

2.3.1. Parametrik olmayan kestirim

Eğer kullanılan veri kümesine ilişkin, önceden belirlenmiş veya varsayılmış bir dağılım yoksa, kredibilite priminin hesaplanmasında kullanılan parametreler görgül

Bayesci yaklaşım altında kestirilir. Bir diğer deyişle, parametreler veri kümesinden yararlanarak kestirilmektedir.

Bu kısımda, veriden yararlanarak, Bühlmann-Straub modeli için μ , v ve a 'nın parametrik olmayan kestirimi anlatılacaktır. Bu modelde, $E(Y_{it}) = E[E(Y_{it} | \Theta_i = \theta_i)] = E[\mu(\Theta_i)] = \mu$ olduğu biliniyordu. Buradan aşağıdaki eşitliğe ulaşılır,

$$\begin{aligned} E(\bar{Y}_i | \Theta_i = \theta_i) &= \sum_{t=1}^{T_i} \frac{w_{it}}{w_{i.}} E(Y_{it} | \Theta_i = \theta_i) \\ &= \sum_{t=1}^{T_i} \frac{w_{it}}{w_{i.}} \mu(\Theta_i) \\ &= \mu(\Theta_i) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Eşitlik (2.67)' den $E(\bar{Y}_i) = \mu$ olduğu görülmektedir. Buna rağmen, μ parametresinin yansız kestiricisi, $\bar{Y}_{..}$ 'dir ($\hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$).

v 'nin kestirilmesi için,

$$\hat{v}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T_i} w_{it} (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2}{T_i - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.68)$$

hesaplanır.

$$E(\hat{v}_i) = E[E(\hat{v}_i | \Theta_i)] = E[v(\Theta_i)] = v \quad (2.69)$$

eşitliğinden görüldüğü gibi $\hat{v}_i$, v için yansızdır. Buna göre, v için yansız kestirici,

$$\hat{v} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{t=1}^{T_i} w_{it} (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^r T_i - 1} \quad (2.70)$$

biçiminde elde edilir.

Son olarak, a parametresinin kestirimi için, $t = 1, 2, \dots, T_i$ olmak üzere, $\Theta_i = \theta_i$ koşulu altında, bağımsız $Y_{it} | \Theta_i$ rastlantı değişkenlerinin ortalamalarına ilişkin varyans aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} Var(\bar{Y}_i | \Theta_i = \theta_i) &= \sum_{t=1}^{T_i} \left(\frac{w_{it}}{w_{i.}} \right)^2 Var(Y_{it} | \Theta_i = \theta_i) = \sum_{t=1}^{T_i} \left(\frac{w_{it}}{w_{i.}} \right)^2 \frac{v(\Theta_i)}{w_{it}} \\ &= \frac{v(\Theta_i)}{w_{i.}^2} \sum_{t=1}^{T_i} w_{it} \\ &= \frac{v(\Theta_i)}{w_{i.}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Eşitlik (2.71)'deki koşul kaldırıldığında,

$$\begin{aligned} Var(\bar{Y}_i) &= Var[E(\bar{Y}_i | \Theta_i = \theta_i)] + E[Var(\bar{Y}_i | \Theta_i = \theta_i)] \\ &= Var[\mu(\Theta_i)] + E[v(\Theta_i) / w_{i.}] \\ &= a + \frac{v}{w_{i.}} \end{aligned} \quad (2.72)$$

eşitliği elde edilir.

$\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_r$ 'ler birbirinden bağımsızdır ve ortalamaları, $\bar{Y}_{..} = \sum_{i=1}^r \frac{w_{i.}}{w_{..}} \bar{Y}_i$ biçiminde

hesaplanır ve,

$$E \left[\sum_{i=1}^r w_{i.} (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2 \right] = a \left(w_{..} - \frac{1}{w_{..}} \sum_{i=1}^r w_{i.}^2 \right) + v(r-1) \quad (2.73)$$

eşitliği ispatlanabilir.

Eşitlik (2.73)'e göre a parametresinin yansız kestiricisi,

$$\hat{a} = \left(w_{..} - \frac{1}{w_{..}} \sum_{i=1}^r w_i^2 \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^r w_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2 - \hat{v}(r-1) \right] \quad (2.74)$$

biçiminde elde edilir.

Bühlmann-Straub modeli için gösterilen yukarıdaki eşitliklerde $w_{it} = 1$ durumunda Bühlmann modeli için parametre kestirimleri elde edilmiş olur. $\hat{\mu}$, $\hat{v}$ ve $\hat{a}$ 'ler, dağılım varsayımı olmadan hesaplanan parametrik olmayan, yansız kestiricilerdir. Eşitlik (2.72)'deki $\hat{a}$ kestiricisinin sıfırdan (0) küçük çıkma ihtimali vardır ki bu durumda kredibilite faktörü 0'a eşit olur. Bu kestiricilerin dışında kullanılabilen başka yansız kestiriciler de vardır: i . poliçe sahibinin geçmişte riske maruz kalan birim sayısı tekrar w_i olarak tanımlansın. Portföydeki toplam hasar, $i=1,2,\dots,r$ poliçe sahibi için $TH = \sum_{i=1}^r w_i \bar{Y}_i$ eşitliği ile hesaplanır.

Eğer, portföye yukarıda verilen kredibilite primi yüklenseydi toplam prim,

$$\begin{aligned} TP &= \sum_{i=1}^r w_i \left[\hat{Z}_i \bar{Y}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu} \right] \\ &= \sum_{i=1}^r w_i (1 - \hat{Z}_i) (\hat{\mu} - \bar{Y}_i) + \sum_{i=1}^r w_i \bar{Y}_i \\ &= \sum_{i=1}^r w_i \frac{\hat{v}}{\hat{a} w_i + \hat{v}} (\hat{\mu} - \bar{Y}_i) + \sum_{i=1}^r w_i \bar{Y}_i \end{aligned} \quad (2.75)$$

biçiminde elde edilirdi.

Toplam primin, toplam hasara eşit olması bekleneneği için aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\sum_{i=1}^r w_i \frac{\hat{v}}{\hat{a} w_i + \hat{v}} (\hat{\mu} - \bar{Y}_i) = 0 \quad (2.76)$$

Eşitlik (2.76)'ün her iki tarafı $\hat{a} / \hat{v}$ ile çarpıldığında,

$$\hat{\mu} \sum_{i=1}^r \hat{Z}_i = \sum_{i=1}^r \hat{Z}_i \bar{Y}_i. \quad (2.77)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (2.77)'den yararlanılarak, genel ortalama için, kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılmış yansız kestirici aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_Z = \frac{\sum_{i=1}^r \hat{Z}_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^r \hat{Z}_i} \quad (2.78)$$

$\bar{Y}_Z$, $\bar{Y}_\dots$ ile kıyaslandığında daha fazla tercih edilebilirdir çünkü $\hat{\mu}$ için en küçük koşulsuz varyansı vermektedir (Klugman et al., 2004).

3. PANEL VERİ ANALİZİ

3.1. Giriş

İstatistik, verilerin toplanması, özetlenmesi ve analizi ile ilgilenen bir disiplindir. Regresyon analizi ve zaman serileri analizi verilerin analizinde kullanılan iki önemli istatistiksel yöntemdir. Regresyon analizi, gözlemlenen her birimden / bireyden (subject) çeşitli ölçümlerin yapıldığı çok değişkenli analizin özel bir türüdür. Burada bireyler, firma, ülke, şehir, kişi v.b olabilir. Regresyon analizinde, ölçümlerden biri bağımlı değişkendir. İlgilenilen ise diğer değişkenler kontrol edilerek bu bağımlı değişken hakkında açıklamalarda bulunabilmektir (Frees, 2004).

Panel verinin tanımı, bireylerin gözlemlenmesinden gelmektedir. Panel, zaman içinde aralıksız olarak gözlemlenen bireylerden oluşan bir grup olarak tanımlanmaktadır. Panel veri kümesi, zaman serileri ve yatay kesitlerin (cross section) birleşmesinden oluşan veri kümesidir (Greene, 2003). Yatay kesitsel regresyon veri kümesi gibi panel veri kümeleri de bireylerin bir yatay kesitinden oluşur ancak bu bireyler zaman üzerinde gözlemlenir. Zaman serileri verisinden farklı olarak, panel veri kümelerinde birçok birey incelenir. Bu tip veri kümeleri kullanılarak, değişkenler arasındaki istatistiksel ilişkilerin kestirilmesi yöntemine, panel veri analizi denir.

y_{it} , t zaman döneminde i . birey için bağımlı değişkeni gösterebilir. Bir panel veri kümesi, her bir $i=1,2,...,n$ ve $t=1,2,...,T_i$ değerleri için i . bireyin t zaman dönemlerinde oluşan gözlem değerlerinden oluşur. Bu durumda gözlemler aşağıdaki şekilde gösterilir:

ilk birey – $\{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1T_1}\}$

ikinci birey – $\{y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2T_2}\}$

•
•
•

n. birey - $\{y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nT_n}\}$

T_i , i . birey için gözlem sayısını göstermektedir. T_i bireyden bireye değişiyorsa, bu tip veri kümesine, dengeli olmayan (unbalanced) veri kümesi denir. Her bireyin gözlem sayısının eşit olduğu veri kümesine ise, dengeli (balanced) veri kümesi denir (Frees, 2004).

3.2. Panel Veri Kullanmanın Avantajları Ve Dezavantajları

Panel veri kullanmanın avantajları şöyle sıralanabilir:

- I. Bireysel heterojenliğin kontrol edilmesi: Panel veri kullanılırken bireylerin, ülkelerin, şirketlerin, şehirlerin v.b heterojen olduğu varsayılır. Zaman serileri ve yatay kesit verileri ile çalışılırken bireyler arasındaki bu heterojenlik tam olarak kontrol edilmediği için yanlış sonuçlar elde edilebilir.
- II. Panel veri modelleri ile dinamik değişimlerin açıklanması sağlanır.
- III. Panel veri kümesi, zaman serileri ve yatay kesit veri kümelerine kıyasla etkilerin daha iyi ölçülmesini ve belirlenmesini sağlar. Örneğin, yıllık ortalama %50 işgücü katılım oranına sahip kadınlardan oluşan bir yatay kesit veri kümesi olsun. Bu oran, a) her kadının herhangi bir yılda işgücüne katılım şansının %50 olması b) kadınların sürekli olarak %50 'si çalışırken, %50'sinin hiçbir zaman çalışmaması, nedenlerine bağlı olabilir. (a) durumunda kadınların iş hacmi yüksek iken, (b) durumundaki bazı kadınların çalışma olasılığı yoktur. Sadece panel veri analizi ile bu durumlar ayırt edilebilir.
- IV. Panel veri modelleri, zaman serileri veya yatay kesit verileri ile oluşturulan modellerden daha kapsamlı modellerin oluşturulmasına ve test edilmesine imkan verir. Panel veriler, araştırmacılara büyük hacimli veriler sağlar. Yatay kesit verisi, N sayıda ($n=1,2,\dots,N$) gözlemde meydana gelir. Zaman serileri verisinde ise, T sayıda ($t=1,2,\dots,T$) gözlem söz konusudur. Bahsedilen bu iki tür verinin bir panel veri oluşturması durumunda, $N \times T$ sayıda gözlem ortaya

çıkar. Böylece, açıklanmaya çalışılan olgu üzerinde daha fazla bilgi sahibi olunur (Baltagi, 2001).

V. Veri boyutu geniş olduğu için, serbestlik derecesi artar ve açıklayıcı değişkenler arasındaki bağlantı (collinearity) azalır (Hsiao, 2002)

Panel veri kullanmanın önemli dezavantajları ise şöyle sıralanabilir:

- I. Veri toplama sorunu: İlgilenilen kitlenin eksik sayılması, cevap alamama (araştırma hatalarından dolayı), araştırmaya ara verilmesi, zamanlama hataları gibi çeşitli nedenlerden dolayı verinin tam olarak istenildiği gibi elde edilmesi zor olabilir.
- II. Ölçüm hatalarından kaynaklanan çarpıklık: Anketlerde sorulara verilen yanıtların yanlış kaydedilmesi veya tam kaydedilememesi, bilgi veren kişinin yanlış bilgi vermesi ve araştırmacının çalışmaya etkileri gibi nedenlerden dolayı ölçüm hataları oluşabilir.
- III. Yıpranma (Attrition) : Gözlem altında olan bazı bireylerin ölmesi veya herhangi bir nedenden dolayı gözlemden çıkması durumunda veri kümesi azalır ve istenilen sonuç alınamayabilir (Baltagi, 2001).

3.3. Panel Veri Regresyon Modelleri

3.3.1. Giriş

Bireyler, zaman üzerinde izlenirse bireysel davranışları modellenebilir. Birçok veri kümesinde bireyler birbirinden farklıdır bir diğer deyişle heterojendir. Bu heterojenliğin, modele dahil edilme biçimine göre farklı modeller tanımlanmaktadır. Yatay kesitsel regresyon analizinde,

$$y_{it} = \alpha + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it}, \quad t = 1, 2, \dots, T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

modelleri kullanılmaktadır. Burada, α sabit terimi, ε_{it} hata terimini ve x_{it} açıklayıcı değişkenleri temsil eder. Bu modellerde, bireyler arasındaki farklar hata terimi ile açıklanmaktadır. Panel veri, bu farklılığın modellenmesi imkanını vermektedir. Bireyler arasındaki bu heterojenliği içeren temel panel veri modeli aşağıdaki gibi gösterilir,

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it}, \quad t = 1, 2, \dots, T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Yatay kesitsel çalışmalarda, $T_i = 1$ için bu modelin parametreleri kestirilemezken, panel veri kümesinde, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ve β parametrelerinin kestiriminin yapılması için yeterince gözlem bulunmaktadır. Modelde, α_i gibi bireysel (subject-specific) parametreler ile bireyler arasındaki heterojenliğin kontrol edilmesi sağlanır. Eşitlik (3.2)'deki gibi modellere, heterojen modeller denir. α_i gibi parametreleri içermeyen modellere ise, homojen modeller denilmektedir.

Heterojenlik ayrıca, bireyin tekrarlanan gözlemleri arasındaki korelasyon kaynağının açıklanması ile modellenenebilir. Bunun için; gözlemler arasındaki dinamik örüntü, bir diğer deyişle, bireyin gözlemleri arasındaki korelasyon yapısı incelenebilir. Zaman dönemi sayısı küçük olan bir panel veri kümesi için model oluşturulurken genellikle, $\{\alpha_i\}$ 'lerin zamansal değişkenliği yüksek oranda içerdiği düşünülür ve zamansal parametreler (λ_t) modele sokulmaz.

Bireyler arasındaki heterojenliği temsil eden $\{\alpha_i\}$ 'ler için iki temel model kullanılmaktadır:

- I- $\{\alpha_i\}$ 'lerin sabit bilinmeyen parametre olarak varsayıldığı sabit etkiler modeli, sabit etkili model veya özel seçimli model,
- II- $\{\alpha_i\}$ 'lerin bilinmeyen bir kitleden geldiği ve rassal olduğunun varsayıldığı rassal etkiler modeli, rastgele etkili model veya rastgele seçimli model (Frees, 2004).

3.3.2. Sabit etkiler modeli

3.3.2.1. Giriş

Sabit etkili panel veri modelleri, genel doğrusal modeller çerçevesinde ele alınmaktadır. Bu tip panel veri modellerinde heterojenlik sabit parametreler ile temsil edilmektedir. Bir diğer deyişle, bireyler arasındaki farklılıklar sabit terimin içinde modele dahil edilmektedir. Modeldeki heterojenliği temsil eden bu niceliklere, sabit etkiler denir. Her bir α_i , kestirilmesi gereken bilinmeyen parametredir.

Temel doğrusal regresyon modeli,

$$y_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it,1} + \beta_2 x_{it,2} + \dots + \beta_K x_{it,K} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, T_i \quad (3.3)$$

biçiminde gösterilir.

$i = 1, 2, \dots, n$ indisi bireyleri, $t = 1, 2, \dots, T_i$ indisi ise zaman dönemini gösterir. Her birey için T_i farklı ise dengeli olmayan, $T_i = T$ ise dengeli veri örneği olur. Modelin varsayımları şöyledir,

- $\{x_{it,1}, x_{it,2}, \dots, x_{it,K}\}$ değişkenleri olasılıksal (stokastik) değildir.
- $\{y_{it}\}$ 'ler, birbirinden bağımsız ve normal dağılım gösteren rastlantı değişkenleridir.
- $\{\varepsilon_{it}\}$ 'ler birbirinden bağımsız ve $E(\varepsilon_{it}) = 0$ ortalaması ve $Var(\varepsilon_{it}) = \sigma^2$ varyansı ile aynı dağılan rastlantı değişkenleridir.

Modelde K tane açıklayıcı değişken ve β katsayısı vardır. Açıklayıcı değişkenler, $K \times 1$ boyutlu matris şeklinde aşağıdaki gibi gösterilir,

$$x_{it} = \begin{pmatrix} x_{it,1} \\ x_{it,2} \\ \vdots \\ x_{it,K} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_{it} = (x_{it,1}, x_{it,2}, \dots, x_{it,K})'$$

Böylece, i . bireyin gözlenen değişkenleri aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} & \{x_{i1,1}, x_{i1,2}, \dots, x_{i1,K}, y_{i1}\} \\ & \vdots \\ & \{x_{iT_i,1}, x_{iT_i,2}, \dots, x_{iT_i,K}, y_{iT_i}\} \end{aligned}$$

Eşitlik (3.3), klasik regresyon modelidir çünkü bireyin tekrarlı ölçümleri hakkındaki bilgiyi kullanmaz. Bireysel etkileri içermediği için Eşitlik (3.3)'teki model homojen bir modeldir. Aynı varsayımlar altında, Eşitlik (3.3)'teki sabit terim yerine bireysel parametreler yerleştirildiğinde,

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_1 x_{it,1} + \beta_2 x_{it,2} + \dots + \beta_K x_{it,K} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, T_i \quad (3.4)$$

temel sabit etkiler modeli elde edilir.

Daha önce de belirtildiği gibi bireysel parametreler bireyler arasındaki heterojenliğin kontrol edilmesini sağlar. Bu parametrelerin kestiricileri, bireyin tekrarlanan ölçümlerinden elde edilen bilgileri kullanıldığı için tekrarlı gözlemlerin yer almadığı yatay kesitsel regresyon modellerinde $\{\alpha_i\}$ parametreleri kestirilemez. Örneğin, $T_i = 1$ için,

$$y_{i1} = \alpha_i + \beta_1 x_{i1,1} + \beta_2 x_{i1,2} + \dots + \beta_K x_{i1,K} + \varepsilon_{i1}$$

modelinin n gözlemi olmasına karşın $(n+K)$ tane parametresi vardır. Bu nedenle, modelin tüm parametreleri kestirilememektedir. Yatay kesitsel regresyon

modellerinde ε_{it} hata terimlerinin, $\{\alpha_i\}$ 'lerdeki bilgiyi içerdği varsayılır. Panel veri modellerinin yatay kesitsel regresyon modellerine göre önemli bir avantajı, panel veri modellerinde $\{\alpha_i\}$ 'lerin etkisinin hata teriminden ayırt edilebilmesidir. Bireysel etkiler ayırt edildiğinde daha doğru sonuçların elde edileceği tahmin edilebilir bir gerçektir (Frees, 2004).

Eşitlik (3.4)'teki modelin daha kısa gösterimi aşağıdaki gibidir,

$$y_i = X_i \beta + 1_i \alpha_i + \varepsilon_i \quad (3.5)$$

$T_i = T$ için y_i ve X_i , i . birey için T gözlemden oluşur. 1_i , bir rakamından oluşan $T \times 1$ boyutlu sütun vektörüdür. ε_i , $T \times 1$ boyutlu hata terimlerinin vektörüdür. Eşitlik (3.5)'in matris gösterimi aşağıdaki gibidir,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} 1_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_i & \dots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

veya

$$y = [X \quad z_1 \quad \dots \quad z_n] \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon \quad (3.7)$$

z_i , i . bireyin göstermelik değişkenidir. $Z = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n]$, $n \times n$ boyutlu matrisi tanımlansın. Eşitlik (3.6),

$$y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon \quad (3.8)$$

biçiminde yazılır (Greene, 2003).

Eşitlik (3.4)' teki model için bireyler ve zaman dönemleri arasında ilişki olmadığı varsayılır. Eşitlik (3.4)' te zaman ve birey indisleri rol değiştirdiğinde model,

$$y_{it} = \lambda_t + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \quad (3.9)$$

biçimini alır.

Eşitlik (3.9)'da λ_t , zamansal (time-specific) değişkendir ve bireylere göre değişim göstermez. Panel veri kümelerinde genellikle, birey sayısı n , zaman dönemi sayısının en yüksek değeri olan T yi geçer. Ayrıca, zamandan kaynaklanan heterojenlikle kıyaslandığında, modeldeki değişkenliğin büyük kısmının, bireyler arasındaki heterojenlikten kaynakladığı varsayılır. Bu nedenle, genellikle temel sabit etkiler modeli olarak, $y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it}$ modeli kullanılır. Bu model, tek yönlü sabit etkiler modeli olarak da adlandırılmaktadır. Zaman boyutu için göstermelik değişkenler kullanılarak, zamansal parametreler kitle parametrelerine dahil edilebilir. Bu durumda model,

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda_t + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \quad (3.10)$$

biçimini alır.

Eşitlik (3.10)'daki modele, iki yönlü sabit etkiler modeli denir (Frees, 2004).

3.3.2.2. Sabit etkiler modelinde parametre kestirimi

Gauss Markov teoremine göre, $y_{it} = \alpha_i + \beta_1 x_{it,1} + \beta_2 x_{it,2} + \dots + \beta_K x_{it,K} + \varepsilon_{it}$ modelindeki α_i ve β katsayılarının en iyi doğrusal yansız kestiricileri en küçük kareler (EKK) kestirim yöntemi ile elde edilir.

$E(y_{it}) = \alpha_i + x'_{it} \beta$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t = 1, 2, \dots, T_i$ fonksiyonunda $\alpha_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ parametrelerinin EKK kestiricileri $a_i, b_1, b_2, \dots, b_K$ olarak gösterilsin. $b = (b_1, b_2, \dots, b_K)'$ ve $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ olmak üzere bu kestiriciler için kareler toplamı,

$$KT(a, b) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T_i} (y_{it} - (a_i + x'_{it} b))^2 \quad (3.11)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (3.11)'deki kareler toplamının en küçük değerini alması için a_i 'lere göre türev alınıp, 0'a eşitlenir. Bu eşitlikler çözüldüğünde a_i ,

$$a_i = \bar{y}_i - \bar{x}'_i b \quad (3.12)$$

biçiminde ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_K)'$ kestiricileri,

$$b = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T_i} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T_i} (x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i) \right) \quad (3.13)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (3.4)'te bilinmeyen $(n+K)$ adet parametre vardır. Standart regresyon yöntemleri kullanıldığında, bu durum, $(n+K) \times (n+K)$ boyutlu bir matrisin tersinin alınması demektir. Ancak, Eşitlik (3.13)'teki EKK kestiricilerinin elde edilmesi için sadece $K \times K$ boyutlu matrisin tersi alınmaktadır (Frees, 2004).

3.3.2.3. Sabit etkiler modelinin genişletilmesi

i. birey için $T_i \times q$ boyutlu göstermelik değişkenler matrisi $Z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{iT_i})'$ biçiminde tanımlanmak üzere, Eşitlik (3.4)'teki model aşağıdaki varsayımlar ile genişletilir,

- $Ey_i = \alpha_i Z_i + X_i \beta$
- $\{x_{it,1}, x_{it,2}, \dots, x_{it,K}\}$ ve $\{z_{it,1}, z_{it,2}, \dots, z_{it,q}\}$ stokastik değişkenler değildir.
- $Var y_i = R_i(\tau) = R_i$
- $\{y_i\}$ 'ler normal dağılım gösteren, birbirinden bağımsız rastgele vektörlerdir.

Bu varsayımlar, sabit etkili doğrusal panel veri modelini göstermektedir. Burada dikkat edilemesi gereken, yukarıdaki varsayımların doğrusal regresyon modeli ile aynı olduğu sadece y_i 'nin ortalama ve varyansının değişiklik gösterdiğidir. $Var(y_i) = R_i(\tau) = R_i$ varsayımı ile modelde, özilişki ve değişen varyansa izin verilmektedir.

Tüm bireylerin zaman boyutunun aynı olduğu varsayılın ve r . satır, s . sütun elemanı, $R_{rs} = Cov(y_r, y_s)$ olan, $T \times T$ boyutlu varyans-kovaryans matrisi $Var(y) = R$ biçiminde tanımlansın. Varyans bileşenleri olarak adlandırılan parametreler vektörü τ ile gösterilirse, varyans kovaryans matrisi $R(\tau)$ olur. R matrisi ile ilgili herhangi bir varsayım yapılmayabilir veya R , çeşitli varsayımlar altında farklı biçimler alabilir. Birkaç önemli durum aşığıdaki gibidir:

- I , $T \times T$ boyutlu birim matris olmak üzere, $R = \sigma^2 I$ biçiminde olabilir. Bu durumda modelde özilişki yoktur, bağımsız durumdur.
- J , $T \times T$ boyutlu bir sayılarından oluşan matrisi olmak üzere, $R = \sigma^2 ((1 - \rho)I + \rho J)$ biçiminde olabilir. Bu durumda model, tekdüze korelasyon (uniform correlation) modelidir. Burada, ρ korelasyon katsayısıdır.
- $R_{rs} = \sigma^2 \rho^{|r-s|}$ biçiminde olabilir. Bu model, birinci dereceden otoregresif modeldir ve AR(1) olarak gösterilir.

Bu modelin katsayıları, genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi (GEKK) ile kestirilmektedir (Bkz. Ek 1.).

3.3.3. Rassal etkiler modeli

3.3.3.1. Giriş

Sabit etkiler modelinde çok fazla kestirilen parametre vardır ve bu durum, serbestlik derecesi kaybına yol açar. Bu kayıp α_i bireysel etkilerinin rassal sayılmasıyla önlenebilir. Rassal etkiler modelinde heterojenlik, sabit parametreler yerine rassal niceliklerle modellenir. Bu rassal niceliklere, rassal etkiler denir. Rassal etkiler modeli genellikle, kitleden rastgele bireyler seçildiğinde, bir diğer değişle rastgele örnekleme yapıldığında uygun model olarak kullanılır (Baltagi, 2001).

Karışık doğrusal modeller, hem rastgele etki hem de sabit etki içeren modellerdir. Bu kısımda, öncelikle rassal etkiler modelinin en basit biçimi olan hata bileşenleri modeli incelenmiştir. Daha sonra, karışık doğrusal modeller genel hatlarıyla anlatılmış ve bu modellerde parametre kestirimi, rastgele etkilerin önkestirimi ve varyans bileşenlerinin kestirimine takip eden kısımlarda değinilmiştir.

3.3.3.2. Hata bileşenleri modeli

Hata bileşenleri modeli,

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad t = 1, 2, \dots, T_i \quad (3.14)$$

biçimindedir. Bu model, görünüş olarak sabit etkiler modeli ile aynıdır fakat burada α_i 'ler sabit değil rastgele değişkenlerdir ve rassal etkiler veya rastgele etkiler olarak adlandırılır.

Bu modelde, x_{it} açıklayıcı değişkenlerin, β ise kitle parametrelerinin vektörüdür. Hata bileşenleri modelinde, $\{\alpha_i\}$ 'lerin, birbirinden bağımsız, 0 ortalama ve σ_α^2 varyansı ile aynı dağılıma sahip oldukları varsayılır. Ayrıca, $\{\alpha_i\}$ 'lerin hata terimlerinden bağımsız olduğu varsayılır, $Cov(\alpha_i, \varepsilon_i) = 0$. $E(\alpha_i) = 0$ olduğu için x_{it} vektörü bir tane sabit terim içermelidir.

$x'_{it} \beta$, gözlenen değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkisini ifade eder. Hata terimi ise gözlenemeyen diğer değişkenlerin etkisini içerir. Eşitlik (3.14), $y_{it} = x'_{it} \beta + \eta_{it}$ eşitliğindeki gibi bir regresyon modeli ile ifade edilebilir. Burada hata terimi η_{it} , $\eta_{it} = \alpha_i + \varepsilon_{it}$ biçiminde iki bileşene ayrılır. α_i , zamanın sabit olduğu kısmı, ε_{it} ise geri kalan kısmı ifade eder. Bu yüzden bu modele hata bileşenleri modeli denir.

Hata bileşenleri modelinin temel özellikleri ve varsayımları aşağıda özetlenmektedir:

- $\{x_{it,1}, x_{it,2}, \dots, x_{it,K}\}$ olasılıksal olmayan değişkenlerdir ve α_i ile ε_{it} 'lerden bağımsızdır.
- $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 'ler birbirinden bağımsızdır ve $E(\alpha_i) = 0$, $Var(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2$ 'dir.
- $\{y_{it}\}$ 'ler $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ koşulu altından birbirinden bağımsız rastlantı değişkenleridir ve koşullu beklenen değer ve varyans sırasıyla, $E(y_{it} | \alpha_i) = \alpha_i + x'_{it} \beta$ ve $Var(y_{it} | \alpha_i) = \sigma^2$ biçiminde elde edilir.
- $E(y_{it}) = x'_{it} \beta$, $Var(y_{it}) = \sigma^2 + \sigma_\alpha^2$ ve $r \neq s$ için $Cov(y_{ir}, y_{is}) = \sigma_\alpha^2$ dir ve $\{y_{it}\}$ 'ler normal dağılır.

$Var(y_{it}) = \sigma^2 + \sigma_\alpha^2$, varyans bileşenlerinden oluştuğu için, rassal etkiler modeli, varyans bileşenleri modeli olarak da adlandırılmaktadır. i . bireyin koşullu beklenen değerinin matris gösterimi aşağıdaki gibidir,

$$E(y_i | \alpha_i) = \alpha_i 1_i + X_i \beta \quad (3.15)$$

Burada, 1_i , bir rakamından oluşan $T_i \times 1$ boyutlu vektör, $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT_i})'$, $T_i \times K$ boyutlu açıklayıcı değişkenler matrisidir.

i . bireyin varyansı, $Var(y_i) = V_i = \sigma_\alpha^2 J_i + \sigma^2 I_i$ biçiminde elde edilmektedir. Burada J_i , $T_i \times T_i$ boyutlu bir rakamından oluşan matris ve I_i , $T_i \times T_i$ boyutlu birim matristir (Frees, 2004).

Eşitlik (3.14)' teki modelin regresyon katsayılarının kestiriminde genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi kullanılır. $\left(\sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} X_i \right) \beta = \sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} y_i$ eşitliği kullanılarak β 'nın kestiricisi,

$$b_{HB} = \left(\sum_{i=1}^n X_i' \left(I_i - \frac{\zeta_i}{T_i} J_i \right) X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i' \left(I_i - \frac{\zeta_i}{T_i} J_i \right) y_i \quad (3.16)$$

biçiminde elde edilir.

Bu eşitlikte ζ_i , $\zeta_i = \frac{T_i \sigma_\alpha^2}{T_i \sigma_\alpha^2 + \sigma^2}$ biçiminde hesaplanan, varyans bileşenleri σ^2 ve σ_α^2 'nın bir fonksiyonudur ve ikinci kısımda anlatılan kredibilite faktörüdür. Bu kestiricinin elde edilmesi için öncelikle varyans bileşenleri σ^2 ve σ_α^2 'nın kestirilmesi gerekmektedir.

b_{HB} 'nin yorumlanması için, Eşitlik (3.13)' teki sabit etkiler modeli kestiricisi alternatif olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$b = \left(\sum_{i=1}^n X_i' (I_i - T_i^{-1} J_i) X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i' (I_i - T_i^{-1} J_i) y_i \quad (3.17)$$

Rassal etkiler modelinin kestiricisi (b_{HB}) ile sabit etkiler modelinin kestiricisi (b), kredibilite faktörü bir değerine yakinken yaklaşık olarak aynıdır. Bu durum, σ_α^2 , σ^2 'ye göre oldukça yüksek değerde iken oluşmaktadır (Frees, 2004).

Eşitlik (3.14)'teki hata bileşenleri modeli, hem rassal etki (α_i) hem de sabit etki (β) içermesi nedeniyle, karışık doğrusal modeller çerçevesinde de ele alınmaktadır.

3.3.3.3. Karışık doğrusal modeller

Panel veri modeli,

$$y_{it} = x_{it}\beta + z_{it}\alpha_i + \varepsilon_{it} \quad (3.18)$$

biçiminde verilsin.

$i = 1, 2, \dots, n$ ve $T_i \leq T$ (maksimum zaman dönemi sayısı) olmak üzere i . birey T_i zamanda gözlemlensin. $x_{it} = (x_{it,1}, x_{it,2}, \dots, x_{it,K})$ $1 \times K$ boyutlu gözlenen açıklayıcı değişkenlerin satır vektörü ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)'$ bunlara karşılık gelen bireysel olmayan parametrelerdir. $z_{it} = (z_{it,1}, z_{it,2}, \dots, z_{it,q})$, $1 \times q$ boyutlu diğer açıklayıcı değişkenler, bir diğer adıyla göstermelik değişkenlerin satır vektörü ve $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iq})'$, bunlara karşılık gelen bireysel parametrelerdir. ε_{it} , modelin hata terimidir.

i . birey için Eşitlik (3.18)'deki modelin matris gösterimi aşağıdaki gibidir,

$$y_i = X_i\beta + Z_i\alpha_i + \varepsilon_i \quad (3.19)$$

Eşitlik (3.19)'da $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iT_i})'$, i . bireyin $T_i \times 1$ boyutlu gözlemlerin vektörüdür.

$X_i = (x'_{i1}, x'_{i2}, \dots, x'_{iT_i})'$, $T_i \times K$ boyutlu ve $Z_i = (z'_{i1}, z'_{i2}, \dots, z'_{iT_i})'$ $T_i \times q$ boyutlu açıklayıcı değişkenlerin matrisleridir. Hata terimlerinin matrisi de $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{iT_i})'$ biçiminde gösterilir. Bireyler arasında bağımlı değişkenler birbirinden bağımsızdır fakat aralarında özilişki de olabilir. Hata terimlerinin ortalaması, $E(\varepsilon_i) = 0_{1 \times T_i}$ biçiminde ve varyans kovaryans matrisi, $Var(\varepsilon_i) = R_i$ biçiminde gösterilsin. Bireysel

etki, $\{\alpha_i\}$ 'ler birbirlerinden bağımsızdır ve 0 ortalama, $D_{q \times q}$ ile gösterilen pozitif tanımlı varyans kovaryans matrisi ile benzer dağılır. Bireysel etkiler ile hata terimleri arasında ilişki olmadığı varsayılır :{tüm i, j, r ve t değerleri için $Cov(\alpha_{jr}, \varepsilon_{it}) = 0$ }. Bu varsayımlar altında i . bireyin varyans kovaryans matrisi,

$$Var(y_i) = Z_i D Z_i' + R_i = V_i \quad (3.20)$$

biçiminde elde edilir.

V_i matrisinin tüm i değerleri için tersi alınabilir olduğu varsayılır. Bu matris, varyans bileşenleri olarak adlandırılan τ parametreler vektörüne bağlı olduğu için $V_i(\tau)$ gösterimi kullanılır.

Varyans bileşenlerinin bilindiği varsayımı altında, β 'nın GEKK kestiricisi,

$$b_{GEKK} = \left(\sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} y_i \quad (3.21)$$

biçiminde ve bu kestiricinin varyansı,

$$Var(b_{GEKK}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i' V_i^{-1} X_i \right)^{-1} \quad (3.22)$$

biçiminde elde edilir

Karışık doğrusal modeller, serbest dağılımlı modellerdir (Frees et al.,1999).

3.4. Önkestirim

Bir rastlantı değişkeninin alacağı değerin kestirimine, önkestirim denilmektedir. Kestiriciler gibi önkestiriciler de, bağımlı değişkenler ile doğrusal olarak ilişkili ise doğrusal önkestiriciler olarak adlandırılır. "Neden önkestirim yapmaya ihtiyaç

duyulmadır?” sorusuna cevap olarak, bir değişkenin gelecekteki değerinin kestirilmek istenmesi verilebilir. Rastlantı değişkenlerin kestirimi yönünde özel bir durum, gözlenemeyen karakteristikler koşulunda, bir bireye ilişkin gelecek dönemdeki yanıtın (response) beklenen değerinin önkestirimidir. Bu koşullu beklenen değerin sigortacılıkta karşılığı, kredibilite primidir (Frees, 2004). Bu kısımda, karışık doğrusal modellerde önkestirime değinilmiştir.

Sabit etkili doğrusal modellerde varyans kovaryans matrisinin bilindiği varsayımı altında genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi kullanılmaktaydı. Ancak, karışık doğrusal modellerde rastgele etkiler bulunmaktadır ve bu etkilerin kestirimi, genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile elde edilememektedir. Bu sorun, en iyi doğrusal yansız önkestirici ile çözülebilmektedir. Eşitlik (3.18), matrisler biçiminde olarak aşağıdaki gibi gösterilsin,

$$y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon \quad (3.23)$$

$E(\alpha) = 0$ ve λ' bilinen bir matris olarak tanımlansın. $\lambda'\beta$ kestirilebilir bir fonksiyon olmak üzere β ve α 'yı birlikte içeren bir rastlantı vektörü, $w = \lambda'\beta + \alpha$ biçiminde tanımlansın. w rastlantı değişkeni de hem rastgele etkiyi hem sabit etkiyi içerdiği için w için yapılan kestirime, önkestirim denir. $\hat{w}$, w 'nin en iyi doğrusal yansız önkestiricisi ise aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

En İyi: $\hat{w}$, $E(\hat{w} - w)'(\hat{w} - w)$ hata kareler ortalamasını en küçük yapan değer olmalıdır.

Doğrusal: $\hat{w}$, y 'nin doğrusal bir fonksiyonu olmalıdır.

Yansız: $\hat{w}$, $E(\hat{w} - w) = 0$ 'ı sağlayan bir değer olmalıdır (Searle et al., 1992).

Bu kısımda, genel doğrusal önkestirim hakkında kısa bilgi verildikten sonra, Eşitlik (3.18)'de gösterilen karışık doğrusal modeller için önkestirime değinilecektir.

3.4.1. Genel doğrusal önkestirim

İlk defa Golderberger (1962) tarafından en iyi doğrusal yansız önkestirici (EDYÖ) deyimi kullanılmıştır. EDYÖ (BLUP) kısaltımı ise ilk Henderson (1973) tarafından kullanılmıştır. Bu kısımda, w ile gösterilen bir rastlantı değişkeninin, hata kareler ortalamasını en küçük yapan önkestiricisi anlatılacaktır.

$E(y) = X\beta$ ortalamasına ve $Var(y) = V$ varyans kovaryans matrisine sahip $N \times 1$ boyutlu y rassal vektörünün gözlemlendiği genel bir durum düşünölsün. $E(w) = \lambda'\beta$ ve $Var(w) = \sigma_w^2$ olmak üzere w rastlantı değişkeninin önkestirilmesi yapılmak istensin. w ile y arasındaki kovaryansların vektörü $Cov(w, y) = Cov_{w_y}$ ile gösterilsin. Bu varsayımlar altında, w rastlantı değişkeninin en iyi doğrusal önkestiricisi,

$$w^* = E(w) + Cov_{w_y} V^{-1} [y - E(y)] = \lambda' \beta + Cov_{w_y} V^{-1} (y - X\beta) \quad (3.24)$$

biçiminde elde edilmektedir (Bkz. Ek 2.). Kredibilite literatüründe, w^* ye, w 'nin homojen olmayan kestiricisi denir (Dannenburg et al., 1996).

Eğer $(w, y)'$ normal dağılıyor ise w^* , $E(w|y)$ beklenen değerine eşit olur ve bu durumda w 'nin hata kareler ortalamasını en küçük yapan önkestiricisi olur. Normallik varsayımı olmadan da w^* , w 'nin hata kareler ortalamasını en küçük yapan önkestiricisidir (Frees et al., 1999).

β parametreleri bilinmiyor ise Eşitlik (3.24)'te β yerine, β 'nin genelleştirilmiş en küçük kareler kestiricisi, $b_{GEKK} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ yerleştirilir. w değişkeninin en iyi doğrusal yansız önkestiricisi aşağıdaki biçimde elde edilir,

$$w_{EDYÖ} = \lambda' b_{GEKK} + Cov_{w_y} V^{-1} (y - X b_{GEKK}) = (\lambda' - Cov_{w_y} V^{-1} X) b_{GEKK} + Cov_{w_y} V^{-1} y \quad (3.25)$$

Eşitlik (3.25)'in elde edilmesi ayrıntılı biçimde Ek 3.'te verilmektedir. Bu önkestirici, kredibilite kuramında w 'nin homojen kestiricisi olarak bilinmektedir. Önkestirimde

hata kareler ortalaması ve önkestiricinin varyansı aşağıdaki eşitliklerde verilmektedir (Bkz. Ek 4.),

$$Var(w_{EDYÖ} - w) = (\lambda' - Cov_{w_y} V^{-1} X) (X' V^{-1} X)^{-1} (\lambda' - Cov_{w_y} V^{-1} X)' - Cov_{w_y} V^{-1} Cov_{w_y}' + \sigma_w^2 \quad (3.26)$$

$$Var(w_{EDYÖ}) = Cov_{w_y} V^{-1} Cov_{w_y}' - (\lambda' - Cov_{w_y} V^{-1} X) \times (X' V^{-1} X)^{-1} (\lambda' - Cov_{w_y} V^{-1} X)'$$

EDKÖ 'ler, V matrisinin bileşenleri ve $Cov(w, y)$ bilindiğinde optimaldir. Bu nedenle, varyans bileşenlerinin kestirilmesi gerekmektedir. Kestirilmiş varyans bileşenleri ile elde edilen bu önkestiriciler, görgül en iyi doğrusal yansız önkestirici olarak adlandırılmaktadır (Frees, 2004).

3.4.2. Panel veri önkestirimi

Önkestirim sonuçlarının panel veri modeline uygulanmasının anlatımı karışık doğrusal modeller üzerinden yapılacaktır. Eşitlik (3.23)' te, $y = (y_1', y_2', \dots, y_n')'$ gözlemlerin sütun vektörü ve $\varepsilon = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')'$ hata terimleri vektörüdür. X matrisi $X = (X_1', X_2', \dots, X_n')'$ dir. Z blok köşegen matrisi, $Z = \text{blok köşegen } (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ biçiminde ve α matrisi $\alpha = (\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n')'$ biçiminde ifade edilir. Bu gösterimlere göre $E(y) = X\beta$ ve $Var(y) = V$ olur. $V_i = Z_i D Z_i' + R_i$ olmak üzere, V matrisi blok köşegen bir matristir ve $V = \text{blok köşegen } (V_1, V_2, \dots, V_n)$ biçiminde ifade edilir.

α_i bireysel etkilerinin önkestirimi yapılmak istenirse, $w = c' \alpha_i$ 'nin doğrusal kombinasyonları düşünülmelidir. Bu durumda, $E(w) = 0$ olduğu için $\lambda = 0$ olur. $i \neq j$ için $Cov(w, y_j) = c' D Z_i'$ ve $i = j$ için $Cov(w, y_j) = 0$ dır. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$Cov_{w_y} V^{-1} y = c' D Z_i' V_i^{-1} y_i \quad \text{ve} \quad Cov_{w_y} V^{-1} X = c' D Z_i' V_i^{-1} X_i \quad (3.27)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu bilgilere göre w rastlantı değişkeninin en iyi doğrusal yansız önkestiricisi,

$$w_{EDYÖ} = c'D Z_i' V_i^{-1} (y_i - X_i b_{GEKK}) \quad (3.28)$$

biçiminde elde edilir.

Yukarıdaki eşitlik tüm c' sabit vektörleri için geçerli olduğundan, α_i 'nin EDYÖ'sü aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\alpha_{i,EDYÖ} = D Z_i' V_i^{-1} (y_i - X_i b_{GEKK}) \quad (3.29)$$

Hata kareler ortalaması ise,

$$Var(\alpha_{i,EDYÖ} - \alpha_i) = D Z_i' V_i^{-1} X_i (X' V^{-1} X)^{-1} X_i' V_i^{-1} Z_i D - D Z_i' V_i^{-1} Z_i D + D \quad (3.30)$$

biçiminde elde edilir (Frees et al., 1999).

3.5. Varyans Bileşenlerinin Kestirimi

Bu kısımda, karışık doğrusal modellerde varyans bileşenlerinin kestirimine değinilmiştir. Karışık doğrusal modellerde parametrelerin önkestiriminde en iyi doğrusal yansız önkestirici eşitliğinden yararlanılmaktadır. Ancak bu eşitliğin kullanılması için her bireyin varyans kovaryans matrisinin (V_i) bilinmesi gerekmektedir. V_i bilinmiyor ise $V_i = Z_i D Z_i' + R_i$ eşitliğindeki D ve R_i 'nin kestirilmesi gerekir. Bu iki matrisinin kestirimine varyans bileşenlerinin kestirimi denir. Varyans bileşenlerinin kestiriminde bir takım yöntemler uygulanmaktadır. Bu yöntemlerden bir kısmı normallik varsayımını gerektirirken, bir kısmı gerektirmez. Normallik varsayımı gerektirmeyen sık kullanılan bir yöntem olan varyans analizi yöntemidir (analysis of variance, ANOVA). Diğer yöntemler, en küçük normlu karesel yansız kestirim yöntemi (minimum norm quadratic unbiased estimation, MINQUE) ve Henderson'nın yöntemleridir. Normallik varsayımı gerektiren yöntemler ise, en çok olabilirlik yöntemi (maximum likelihood, ML) ve sınırlandırılmış en çok olabilirlik (restricted maximum likelihood, REML) yöntemidir.

Her iki yöntemde de bir olabilirlik fonksiyonu maksimize edilmekte ve bu yöntemler, hem dengeli hem dengeli olmayan veri kümeleri için kullanılmaktadır. ANOVA yöntemi ise dengeli veri kümeleri için sıklıkla kullanılırken, dengeli olmayan veri kümeleri için tercih edilen bir yöntem değildir. Çünkü, ANOVA yöntemi, dengeli veri kümesi için yansız ve en küçük varyanslı kestirimler verirken, dengeli olmayan veri kümeleri için aynı sonuçları veremeyebilir (Searle et al., 1992; Dağ, 2006).

Bu kısımda varyans bileşenlerinin kestiriminde sıklıkla kullanılan, normallik varsayımı gerektiren en çok olabilirlik (EÇO) yöntemi ve sınırlandırılmış en çok olabilirlik (SEÇO) kestirim yöntemleri hakkında kısaca bilgi verilecektir. Bühlmann ve Bühlmann-Straub kredibilite modellerinde varyans analizi yöntemi kullanılarak varyans bileşenlerinin kestirimi, Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde yansız varyans bileşenleri kestiricilerinin elde edilmesi dördüncü kısımda anlatılmıştır.

3.5.1. En çok olabilirlik yöntemi

Eşitlik (3.18)'deki karışık doğrusal modelde, bireysel etkiler ve hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında i . bireyin log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir,

$$l_i(\beta, \tau) = -\frac{1}{2} \left[\ln \det V_i(\tau) + (y_i - X_i \beta)' V_i(\tau)^{-1} (y_i - X_i \beta) \right] \quad (3.31)$$

Tüm veri kümesi için log-olabilirlik fonksiyonu, $L(\beta, \tau) = \sum_{i=1}^n l_i(\beta, \tau)$ dir. $L(\beta, \tau)$ ' yi maksimum yapan β ve τ değerlerine en çok olabilirlik kestiricileri denir ve $b_{EÇO}$ ve $\tau_{EÇO}$ olarak gösterilirler.

Parametrelere göre alınan türevlerden oluşan vektöre skor vektörü denilmektedir. Parametreler vektörü $\theta = (\beta', \tau')'$ ile gösterilsin. Bu gösterime göre skor vektörü, $\partial L / \partial \theta$ dır. Eğer bu skor vektörünün kökü varsa, bu kök en çok olabilirlik kestiricisidir. Skor vektörünün bulunması için ilk önce β 'ya türev alınır ve sıfıra eşitlenerek aşağıdaki gibi kök bulunur,

$$\frac{\partial L(\beta, \tau)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{i=1}^n l_i(\beta, \tau) \right) = \sum_{i=1}^n X_i' V_i(\tau)^{-1} (y_i - X_i \beta) = 0 \quad (3.32)$$

Bu eşitliğe göre β 'nın en çok olabilirlik kestiricisi,

$$b_{EYO}(\tau) = \left(\sum_{i=1}^n X_i' V_i(\tau)^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i' V_i(\tau)^{-1} y_i \right) = b_{GEKK}(\tau) \quad (3.33)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (3.33)' ten, sabit varyans bileşenleri τ için en çok olabilirlik kestiricileri ile genelleştirilmiş en küçük kareler kestiricisinin aynı olduğu görülmektedir. Bu durumda, sadece τ 'nın log olabilirlik fonksiyonuna göre en çok olabilirlik kestiricileri elde edilebilmektedir.

Varyans bileşenleri, genellikle özyineli (recursive) yöntemlerle kestirilmektedir. Bu kestirim, Newton-Raphson ve Fisher Skorumlama yöntemleri kullanılarak yapılabilmektedir (Frees et al., 1999).

3.5.2. Sınırlandırılmış en çok olabilirlik yöntemi

Sınırlandırılmış en çok olabilirlik kestirim yöntemi de olabilirlik fonksiyonu bazlı bir kestirim yöntemidir. Ancak, sınırlandırılmış en çok olabilirlik kestirim yönteminde sadece rassal etkiler için olabilirlik fonksiyonu maksimize edildiğinden, bu yöntem sınırlandırılmış olarak adlandırılır. EÇO yönteminde, genellikle τ varyans bileşenleri için yanlış kestirici üretilmesine rağmen SEÇO yöntemi ile özellikle dengeli veri kümelerinde yansız kestiriciler elde edilebilmektedir. Bunun nedeni, en çok olabilirlik kestiricileri, negatif yönde sapmaya neden olduklarından kestirimler negatif olabilmektedir. SEÇO kestiricilerinin genellikle yansız olması nedeniyle, negatif kestirici elde etme eğilimi daha azdır.

Sınırlandırılmış en çok olabilirlik kestiricileri, olabilirlik fonksiyonunun, sınırlandırılmış parametre uzayı üzerinden en yüksek değerini almasını sağlayan değerler olarak tanımlanmaktadır. Bu kestirim yönteminin temel özelliği, ortalama

parametrelere bağımlı olmayan yanıt değişkenlerin doğrusal kombinasyonundan oluşturulan bir olabilirlik fonksiyonu kullanılmasıdır. Örneğin, normal dağılıma uyan bağımlı değişkenler vektörü y ile gösterilsin. $E(y) = X\beta$ ve $Var(y) = V = V(\tau)$ olsun. y , $N \times 1$ boyutlu ve X , $N \times p$ boyutlu olsun. Bu gösterimlere göre tasarım matrisi, $Q = I - X(X'X)^{-1}X'$ biçiminde tanımlanır.

Tasarım matrisi bağımlı değişkenlerin doğrusal kombinasyonu ise $(Qy)'$ nin, ortalaması 0 ve varyans kovaryans matrisi, $Var(Qy) = QVQ$ olur. Ortalama ve varyans kovaryans matrisi β 'ya bağılı olmadığından, Qy 'nin dağılımı da β 'ya bağılı değildir. Bu durumda, Qy , genelleştirilmiş en küçük kareler kestiricisi b_{GEKK} 'dan bağımsızdır.

Sınırlandırılmış log olabilirlik,

$$L_{SEYO}(b_{GEKK}(\tau), \tau) = \frac{1}{2} \left[\ln \det(V(\tau)) + \ln \det(X'V(\tau)^{-1}X) + (Hata KT(\tau)) \right] \quad (3.34)$$

biçiminde elde edilir.

Bu fonksiyona en yüksek değerini veren kestiricilere sınırlandırılmış en çok olabilirlik kestiricileri denir ve $\tau_{SE\check{O}}$ olarak gösterilir.

Eşitlik (3.34)'de hata kareleri toplamı aşağıdaki gibi elde edilir,

$$(Hata KT)(\tau) = (y - Xb_{GEKK}(\tau))' V(\tau)^{-1} (y - Xb_{GEKK}(\tau)) \quad (3.35)$$

Corbeil ve Searle (1976), dengeli veriler için varyans bileşenlerinin SEÇÖ kestirimlerinin, varyans analizi yöntemi ile aynı sonuçları (yansız ve en küçük varyanslı) verdiğini göstermiştir. Ancak, dengeli olmayan veri kümeleri için ANOVA kestiricileri ile SEÇÖ kestiricileri farklılık göstermektedir. Hata terimlerinin varyansı (σ^2) için, EÇÖ kestiricieri de dengeli veriler için yansızdır ve ANOVA ile aynı sonuç vermektedir. Ancak, σ_α^2 'nin kestiricisi yanlıdır. (Rao,1997). Sınırlandırılmış en küçük kareler kestirim yönteminde, β sabit etkilerinin kestiriminde kaybedilen

serbestlik derecesi dikkate alındığı için, kestiriciler yansız olmaktadır. Ancak, EÇO kestiriminde bu serbestik derecesi kaybı dikkate alınmamaktadır (Frees et al., 1999).

Her iki yöntemde de, varyans bileşenlerinin özyineli olarak elde edilmesi için başlangıç değerleri gerekmektedir. Bu nedenle, varyans bileşenlerinin kestiriminde, moment bazlı kestirim yöntemleri veya en küçük normlu karesel yansız kestirim yöntemi gibi yöntemler tercih edilebilir. Alternatif olarak, özyineleme gerektirmeyen kestirim yöntemlerden elde edilen değerler, diğer yöntemlerde başlangıç değeri olarak kullanılabilir.

4. BÜHLMANN, BÜHLMANN-STRAUB VE JEWELL'İN HİYERARŞİK KREDİBİLİTE MODELLERİNİN PANEL VERİ MODELLERİ İLE YORUMLANMASI

4.1. Giriş

Kredibilite kuramında ilgilenilen, geçmiş gözlem değerlerinden yararlanılarak, gözlenemeyen risk değişkeninin, θ koşulunda bir sonraki dönemdeki beklenen hasarının $\mu_{T+1}(\theta) = E(Y_{T+1} | \Theta = \theta)$ kestirilmesi idi. Dannenburg et al. (1996), kredibilite modellerinin, açıklaması zor olan risk parametresi θ koşulunda oluşturulması durumunda, gruplar veya bireyler arasında birden fazla risk parametresi olması nedeniyle analizin zorlaşacağını, bunun yerine risk değişkenlerinin birbirinden bağımsız varyans bileşenlerine ayrılmasının kolaylık sağlayacağını belirtmiştir. Bu yöntemde, kredibilite kestiricileri, gözlemlerin sadece birinci ve ikinci momentlerine göre belirlendiği için, genel amaçta bir kayba uğranmamaktadır. Dannenburg et al. (1996), Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modellerinde, kredibilite kestiricilerinin elde edilmesinde varyans bileşenleri modelini kullanmıştır. Kredibilite modelleri, ikinci kısımda da anlatıldığı gibi genellikle Bayesci çerçevede ele alınmaktadır. Ancak, bu durum, kredibilite yöntemlerinin pratikte kabul edilebilirliğini azaltmaktadır. Bunun yerine, θ risk parametresinden bağımsız kredibilite yaklaşımları kullanılabilir. Bu kısımda anlatılan yaklaşımda, risk karakteristiği olarak, θ parametrelerinin yerini varyans bileşenleri almaktadır.

Bir hasar değişkeni, $E(y_{it} | \alpha_i) = z_{it} \alpha_i + x_{it} \beta$ biçiminde rastgele bileşenler ve sabit parametrelerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade ediliyorsa, kredibilite kestiricileri, en iyi doğrusal yansız önkestiricilere eşittir (Frees et al., 2001). Çalışmanın bu bölümünde, en fazla kesinlik kredibilite yaklaşımı altında incelenen Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modellerinin, karışık doğrusal modellerin özel durumları olarak gösterimine değinilecek ve bu modellerde, $w = E(y_{i,T+1} | \alpha_i) = x_{i,T+1} \beta + z_{i,T+1} \alpha_i$ için en iyi doğrusal yansız önkestiricinin elde edilmesi açıklanacaktır.

Bu kısımda kredibilite modelleri Eşitlik (3.18)' deki karışık doğrusal modeller türünden ifade edilmiştir. $i=1,2,...,n$ olmak üzere i . birey T_i zaman üzerinde gözlemlenir. Kredibilite kuramında, i . bireyin T_i+1 . dönemde beklenen hasarının kestirimi ile ilgilenilir. Panel veri bağlamında ise, $w = E(y_{i,T_i+1} | \alpha_i) = x_{i,T_i+1} \beta + z_{i,T_i+1} \alpha_i$ 'nin kestirimi ile ilgilenilmektedir. Bu durumda, $\lambda' = x_{i,T_i+1}$ olur ve w 'nin en iyi doğrusal yansız önkestiricisi, $w_{EDYÖ} = x_{i,T_i+1} b_{GEKK} + z_{i,T_i+1} \alpha_{i,EDYÖ}$ biçiminde elde edilir (Frees, et al., 1999). Bu kısımda ilgilenilen modellerde $x_{it} = z_{it} = 1$ olduğu için $w_{EDYÖ} = b_{GEKK} + \alpha_{i,EDYÖ}$ biçiminde elde edilmektedir.

4.2. Bühlmann Kredibilite Modeli

4.2.1. Giriş

y_{it} 'ler t zaman döneminde i . bireyin ortalama hasar miktarı, hasar oranı veya poliçe başına düşen ortalama hasar miktarını gösterebilir. Veri kümesi göz önüne alındığında i . birey, i . hücre olarak da tanımlanmakta ve her hücrenin bir riske maruz kalan birimden oluştuğu varsayılmaktadır. Eşitlik (3.18)'deki karışık doğrusal modelde, $K=q=1$, $x_{it} = z_{it} = 1$ ve $\beta_1 = \mu$ değerlerini aldığı anda aşağıdaki model elde edilir,

$$y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } t = 1, 2, \dots, T_i \quad (4.1)$$

Eşitlik (4.1)'de, μ , portföydeki herhangi bir poliçe sahibinin ortalama hasarı bir diğer deyişle genel ortalamadır. α_i , i . birey için ortalamadan sapma miktarı olarak bireyler arasındaki farkı gösterir. ε_{it} 'ler, t zaman dönemi için ortalamadan sapma miktarıdır. $E(\alpha_i) = E(\varepsilon_{it}) = 0$ 'dır. Varyans bileşenleri, I_{T_i} , $T_i \times T_i$ boyutlu birim matris olmak üzere, $R_i = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 I_{T_i}$ ve $D = Var(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2$ biçiminde gösterilir. Burada, σ_α^2 ikinci kısımda anlatılan koşullu ortalamaların varyansı, σ^2 ise süreç varyansıdır. Tüm i ve t değerleri için, α_i ve ε_{it} 'ler birbirinden bağımsızdır (Frees et al., 1999).

Dannenburg et al. (1996), veri kümesinde her bir hücrenin bir riske maruz kalan birim sayısından oluştuğunu ve tüm bileşenlerin normal dağıldığını varsayarak, öncelikle tek yönlü varyans analizinin yapılmasını önermiştir. Tek yönlü varyans analizi, iki veya ikiden fazla sayıda bağımsız gruba ilişkin ortalamaların birbirine eşit olup olmadığının test edilmesinde kullanılan bir yöntemdir. Tüm bireylerin gözlendiği zaman döneminin eşit olduğu ve T olduğu varsayılın. α_i 'ler, bireyler arasındaki farkları temsil etmeleri nedeniyle portföyün risk yapısını temsil ederler. Bireylerin ortalamaları aynı ise, bireysel etkiler modele sokulmaz ve genel ortalamanın kestirimi tüm bireylere prim olarak yüklenir. Bu nedenle, grup ortalamalarının $(\mu_i = \mu + \alpha_i)$ birbirine eşit olup olmadığı test edilmelidir. Bu testte hipotezler şöyledir:

$$H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$$

$$H_1 = \text{En az bir } \mu_i \text{ farklı.}$$

i . bireyin ortalaması, $\bar{y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it}$ ve tüm bireylerin ortalaması, $\bar{y} = \frac{1}{Tn} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T y_{it}$ olmak üzere, Gruplar arası kareler toplamı, $(n-1)$ serbestlik derecesi ile,

$$GAKT = \sum_{i=1}^n T (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (4.2)$$

biçiminde elde edilir.

$n(T-1)$ serbestlik derecesine sahip grup içi kareler toplamı ise,

$$GİKT = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - \bar{y}_i)^2 \quad (4.3)$$

biçiminde elde edilir.

GAKT ve GİKT serbestlik derecelerine bölündüğünde gruplar arası ve grup içi ortalama elde edilmiş olur. H_0 hipotezinin test edilmesi için F istatistiği aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır,

$$F = \frac{GAO}{GIO} = \frac{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n T(\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n(T-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - \bar{y}_i)^2} \quad (4.4)$$

F istatistiği, $(n-1)$ ve $n(T-1)$ serbestlik derecesi ile F dağılımına sahiptir. H_0 hipotezi kabul edilirse, bireylerin grup ortalamaları arasında önemli bir fark yoktur ve portföy homojendir denilebilir. Bu durumda, tüm bireyler için kredibilite primi, portföyün genel ortalamasının (μ) kestirimi olarak hesaplanmakta, bireysel etkiler modelde göz önüne alınmamaktadır. Bu durumda, kredibilite faktörü 0 olmaktadır. H_0 hipotezi reddedildiğinde, bireysel etkilerin sabit veya rassal olması durumuna göre modelleme yapılır (Dannenburg et al., 1996). Bu çalışmada, bireysel etkilerin rassal olduğu durum incelenmektedir.

4.2.2. Bühlmann modelinde kredibilite kestiricileri

Dannenburg et al.(1996), $y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $t = 1, 2, \dots, T_i$ modelinde, i . birey için, ε_{i,T_i+1} dalgalanmalarını içeren $y_{i,T_i+1} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,T_i+1}$ 'nin önkestiriminin yapılması yerine, aynı sonucu verecek biçimde risk primi olarak adlandırılan koşullu ortalama, $E(y_{i,T_i+1} | \alpha_i) = \mu + \alpha_i$ 'nin kestirimi ile ilgilenmiştir.

Eşitlik (4.1)'deki model, sabit etkiler modeli ise genel ortalama μ , açık biçimde yazılmayıp α_i 'nin içerisinde modele girer. Bu nedenle, i . bireyin ortalaması α_i dir. α_i 'nin en iyi doğrusal yansız kestiricisi $\bar{y}_i$ ' dir. Model, rassal etkiler modeli ise $\bar{y}$, genel ortalama μ 'nün, $\bar{y}_i - \bar{y}$ ise α_i 'nin istenen özellikleri sağlayan kestiricileridir. Bu durumda, $\bar{y}_i$, $\mu + \alpha_i$ 'nin kestiricisi olmasına rağmen etkin bir kestirici değildir. Bu kestirici, hata kareler ortalamasını en küçük yapan kestirici olmadığı için, daha küçük hatayı veren kestirici, $\bar{y}_i$ ve $\bar{y}$ 'nin doğrusal kombinasyonu olarak, $c_1 \bar{y}_i + c_2 \bar{y}$

biçiminde düşünülebilir. Burada, c_1 ve c_2 sabit değerlerdir ve yansızlığın sağlanması için $c_2 = 1 - c_1$ varsayılır. Hata kareler ortalamasını en küçük yapan c_1 ,

$$c_1 = \frac{T_i \sigma_\alpha^2}{\sigma^2 + T_i \sigma_\alpha^2} \quad (4.5)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (4.5)' te σ_α^2 ve σ^2 sırasıyla α_i ve ε_{it} 'nin varyansıdır. $\mu + \alpha_i$ 'nin en iyi doğrusal yansız önkestiricisi $c_1 = z_i$ kredibilite faktörü olmak üzere,

$$(\mu + \alpha_i)_{EDYÖ} = z_i \bar{y}_i + (1 - z_i) \bar{y} \quad (4.6)$$

biçiminde elde edilir. Eğer, bireylerin gözlem sayısı değişiklik gösteriyorsa, Eşitlik (4.6)'da $\bar{y}$ 'nin yerine, μ 'nün GEKK kestiricisi yerleştirilir. Bu kestirici, aşağıdaki biçimde elde edilir,

$$\hat{\mu}_{GEKK} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n z_i} \quad (4.7)$$

(Frees, 2004).

Eşitlik (4.7)'den yararlanılarak, $\mu + \alpha_i$ 'nin en iyi doğrusal yansız önkestiricisi,

$$(\mu + \alpha_i)_{EDYÖ} = z_i \bar{y}_i + (1 - z_i) \hat{\mu}_{GEKK} \quad (4.8)$$

biçiminde elde edilir.

Searle et al. (1992), bu önkestiricinin elde edilmesini aşağıdaki gibi vermiştir:

$y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $t = 1, 2, \dots, T_i$ modelinde α_i ve ε_{it} normal

dağılımlar. Buna göre, α_i ve $\bar{y}_i$ de iki değişkenli normal dağılır ve ortalama ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$E \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Var \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma^2 / T_i \end{bmatrix}$$

İki değişkenli normal dağılım özelliğinden,

$$\begin{aligned} E(\alpha_i | \bar{y}_i) &= E(\alpha_i) + cov(\alpha_i, \bar{y}_i) [var(\bar{y}_i)]^{-1} [\bar{y}_i - E(\bar{y}_i)] \\ &= \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \sigma^2 / T_i} (\bar{y}_i - \mu) \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir.

Buna göre α_i 'nin önkestiricisi,

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{T_i \sigma_\alpha^2}{T_i \sigma_\alpha^2 + \sigma^2} (\bar{y}_i - \mu) \quad (4.10)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (4.10)' da, $\frac{T_i \sigma_\alpha^2}{T_i \sigma_\alpha^2 + \sigma^2}$ terimi Eşitlik (4.5)' te gösterildiği gibi kredibilite faktörüdür. Yine bu eşitlikte, bireylerin gözlem sayısı farklı olduğundan, μ yerine μ 'nün GEKK kestiricisi koyulduğunda, $\alpha_{i,EDYÖ}$ aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\alpha_{i,EDYÖ} = \frac{T_i \sigma_\alpha^2}{T_i \sigma_\alpha^2 + \sigma^2} (\bar{y}_i - \mu_{GEKK}) = z_i (\bar{y}_i - \mu_{GEKK}) \quad (4.11)$$

Bu bilgiler kullanılarak, $\mu + \alpha_i$ 'nin EDYÖ'sü Eşitlik (4.8)' deki gibi elde edilir,

$$(\mu + \alpha_i)_{EDYÖ} = \mu_{GEKK} + \frac{T_i \sigma_\alpha^2}{T_i \sigma_\alpha^2 + \sigma^2} (\bar{y}_i - \mu_{GEKK}) \quad (4.12)$$

Eşitlik (4.12) dengeli olmayan veri seti için elde edilmiştir. Dengeli veri seti için tüm $z_i = z$ olur. Gruplar arası ortalama (GAO) ve grup içi ortalama (GIO) kullanılarak, σ_α^2 ve σ^2 varyans bileşenlerinin kestirimi aşağıdaki eşitlikler yardımıyla yapılabilir,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n(T-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - \bar{y}_i)^2 = GIO \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\alpha^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{T} \\ &= \frac{GAO - GIO}{T} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Eşitlik (4.13) ve Eşitlik (4.14) kullanılarak kredibilite faktörü,

$$z = 1 - \frac{GIO}{GAO} \quad (4.15)$$

biçiminde elde edilebilir.

Literatürde, Bühlmann kredibilite kestiricileri, homojen ve homojen olmayan kestiriciler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Homojen kredibilite kestiricisi, $z_i \bar{y}_i + (1 - z_i) \bar{y}$ biçiminde elde edilirken, homojen olmayan kestirici, $z_i \bar{y}_i + (1 - z_i) \mu$ biçiminde elde edilir. Bu iki eşitlik karşılaştırıldığında farkın, μ 'nün kestiriminden geldiği görülmektedir. Homojen kestirici için varyans oranının $(\sigma_\alpha^2 / \sigma^2)$ bilinmesi yeterli iken, homojen olmayan kestirici için μ 'nün de bilinmesi gerekmektedir (Dannenburg et al., 1996).

4.3. Bühlmann-Straub Kredibilite Modeli

4.3.1. Giriş

Bühlmann modelinde olduğu gibi, Eşitlik (3.18)'de verilen karışık doğrusal modelde $K=q=1$, $x_{it} = z_{it} = 1$ ve $\beta_1 = \mu$ olsun. Bu varsayımlar altında, i . bireyin t zaman dönemindeki hasar deneyimi aşağıdaki gibi gösterilsin,

$$y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad t = 1, 2, \dots, T_i \quad (4.16)$$

(Frees et al., 1999)

Bu modelde, y_{it} 'ler, ortalama hasar miktarı, hasar oranı veya poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı olarak tanımlanabilir. y_{it} , x_{itk} ile gösterilen w_{it} sayıda rastgele değişkenin ortalaması olsun. $k = 1, 2, \dots, w_{it}$ için x_{itk} , t zaman döneminde i . gruptaki k . poliçe sahibinin hasar deneyimi olarak düşünüldüğünde,

$$x_{itk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{itk} \quad (4.17)$$

biçimde gösterilir.

Eşitlik (4.17)'de gösterilen α_i 'ler Eşitlik (4.16)'da tanımlandıkları gibidir. ε_{itk} 'lar, 0 ortalama ve σ^2 varyansına sahip rastgele sapmalardır. y_{it} ,

$$y_{it} = \frac{1}{w_{it}} \sum_{k=1}^{w_{it}} x_{itk} \quad (4.18)$$

biçiminde tanımlanır.

$\varepsilon_{it} = \frac{1}{w_{it}} \sum_{k=1}^{w_{it}} \varepsilon_{itk}$ için y_{it} , Eşitlik (4.16)'da tanımlandığı gibi, $y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}$ biçimine dönüşür (Dannenburg et al., 1996).

Hata terimlerinin ortalaması, $E(\varepsilon_i) = 0_{1 \times T_i}$ ve varyans kovaryans matrisi, $R_i = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 köşegen(1/w_{i1}, \dots, 1/w_{iT_i})$ biçiminde gösterilsin. Bireysel etki $\{\alpha_i\}$ 'ler birbirlerinden bağımsızdır ve 0 ortalama, $D = Var(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2$ varyansı ile aynı dağılıma sahiptir. α_i ve ε_{it} 'lerin birbirlerinden bağımsız oldukları varsayılır. μ , σ_α^2 ve σ^2 parametreleri, portföyün risk yapısını karakterize etmeleri nedeniyle yapısal parametrelerdir (Frees et al., 1999).

4.3.2. Bühlmann-Straub modelinde kredibilite kestiricileri

Bühlmann-Straub modelinde, simgesel olarak kolaylık sağlanması açısından bireyler için zaman dönemlerinin eşit olduğu ve en yüksek değerin T olduğu varsayılın. Bühlmann modelinde olduğu gibi Bühlmann-Straub modelinde de kestiriciler, homojen ve homojen olmayan kestiriciler olarak ikiye ayrılmaktadır. Bu kısımda, İlk önce ağırlıklandırılmış kestiriciler için notasyonlar gösterilecek, daha sonra homojen ve homojen olmayan kredibilite kestiricilerine değinilecektir. Kullanılacak olan kredibilite faktörü ve ağırlıklı ortalamalara ilişkin notasyonlar aşağıda verilmektedir:

$$w_{i\Sigma} = \sum_{t=1}^T w_{it} \quad w_{\Sigma\Sigma} = \sum_{i=1}^n w_{i\Sigma} \quad (4.19)$$

$$z_i = \frac{\sigma_\alpha^2 w_{i\Sigma}}{\sigma^2 + \sigma_\alpha^2 w_{i\Sigma}} \quad z_\Sigma = \sum_{i=1}^n z_i \quad (4.20)$$

$$y_{iw} = \sum_{t=1}^T \frac{w_{it}}{w_{i\Sigma}} y_{it} \quad y_{ww} = \sum_{i=1}^n \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} y_{iw} \quad y_{zw} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{z_\Sigma} y_{iw} \quad (4.21)$$

Eşitlik (4.21)' de, y_{iw} ' ler ağırlıklı bireysel ortalamalardır. Bu notasyonlar kullanılarak, i . birey için homojen olmayan Bühlmann Straub kredibilite kestiricisi,

$$\hat{y}_{i,T+1} = z_i y_{iw} + (1 - z_i) \mu \quad (4.22)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (4.22) 'deki kestiriciler, μ, σ_α^2 ve σ^2 parametrelerine bağlı olarak değişmektedir. Bu nedenle, bu parametrelerin kestirilmesi gerekir. σ_α^2 ve σ^2 parametreleri için yansız kestiriciler, Ağırlıklı Gruplar Arası Kareler Toplamı ve Grup İçi Kareler Toplamından yararlanılarak elde edilebilir. Ağırlıklı bu toplamalar aşağıdaki eşitliklerde verilmektedir,

$$AGAKT = \sum_{i=1}^n w_{i\Sigma} (y_{iw} - y_{ww})^2 \quad (4.23)$$

$$AGİKT = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T w_{it} (y_{it} - y_{iw})^2 \quad (4.24)$$

Eşitlik (4.23) ve (4.24) kullanılarak, Bühlmann-Straub kredibilite modeline ilişkin yapısal parametrelerin yansız kestiricileri aşağıdaki biçimde elde edilmektedir (Dannenburg et al., 1996).,

$$\hat{\mu} = y_{zw} \quad (4.25)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n(T-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T w_{it} (y_{it} - y_{iw})^2 \quad (4.26)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{\sum_{i=1}^n w_{i\Sigma} (y_{iw} - y_{ww})^2 - (n-1)\hat{\sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma} - \frac{\sum_{i=1}^n w_{i\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}}} \quad (4.27)$$

$\hat{\mu} = y_{zw}$, μ 'nin GEKK kestiricisidir. Bu kestirici kullanılarak, α_i 'nin EDYÖ'sü $z_i (y_{iw} - y_{zw})$ olarak elde edilir. Böylece, Bühlmann-Straub modelinde $\mu + \alpha_i$ risk priminin homojen kredibilite kestiricisi,

$$(\mu + \alpha_i)^{*H} = \mu_{GEKK} + \alpha_{i,EDYÖ} = z_i y_{iw} + (1 - z_i) y_{zw} \quad (4.28)$$

biçiminde elde edilir (Frees et al.,1999).

$\hat{\sigma}_\alpha^2$ negatif değer alabilir. Bu gibi durumlarda genel olarak, $\hat{\sigma}_\alpha^2=0$ varsayılmaktadır. σ_α^2 'nin kestiricisinin elde edilmesinde alternatif olarak, kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılmış aşağıdaki kestirici kullanılabilir,

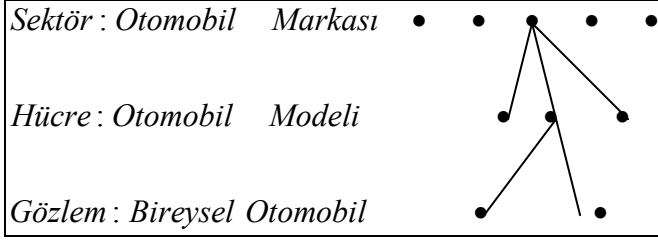
$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n z_i (y_{iw} - y_{zw})^2 \quad (4.29)$$

Bu kestirici genellikle, bir sonraki kısımda anlatılan hiyerarşik modeller içinde kullanılmaktadır. Eşitlik (4.28)'deki kestiricinin hesaplanması için z_i kredibilite faktörünün hesaplanması gerekir ki, bu durum, $z_i = \frac{\sigma_\alpha^2 w_{i\Sigma}}{\sigma^2 + \sigma_\alpha^2 w_{i\Sigma}}$ eşitliğinden görüldüğü gibi σ_α^2 'ya bağlıdır. Bu nedenle bu kestirici, σ_α^2 'nin gerçek bir kestiricisi değildir ve sözde (pseudo) kestirici olarak adlandırılır (Dannenburg et al.,1996).

4.4. Jewell'in Hiyerarşik Kredibilite Modeli

4.4.1. Giriş

Sigortacılıkta, poliçe sahiplerinin, birey birey sınıflandırılması yerine çeşitli alt gruplara göre sınıflandırılması sigortacı açısından daha pratik olabilir. Örneğin, otomobil sigortası için düşünüldüğünde, otomobiller markalarına göre gruplandırıldıktan sonra, markalar modellere, modeller de bireysel otomobillere ayrılarak sınıflandırma yapılabilir. Bu örnekte, otomobil markası, sektör (sector), otomobil modeli, hücre (cell) ve bireysel otomobiller, gözlenen birimler veya bireyler olarak tanımlanır (Bkz. Şekil 4.1). Bu gibi hiyerarşik yapıda, herhangi bir otomobil modelinin, farklı otomobil markalarıyla ilişki olmadığı varsayılır. Jewell (1975), kredibilite kuramında hiyerarşik yapı üzerinde çalışmıştır.



Şekil 4.1. İki aşamalı hiyerarşik yapı

Bir portföyün, i indisi ile gösterilen n sektöre ayrıldığı varsayalım. Her sektörde de, j indisi ile gösterilen toplam J_i hücre olsun. (i, j) hücresinde t indisi ile gösterilen T_{ij} gözlem olsun. i . sektörde, j . bireyin t zaman döneminde gözlenen riski,

$$y_{ijt} = \beta + \mu_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijt}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, J_i, \quad t = 1, 2, \dots, T_{ij} \quad (4.30)$$

biçiminde gösterilsin.

Bu modelde, μ_i ve γ_{ij} 'lerin birbirinden bağımsız olduğu varsayılır. μ_i , i . sektördeki bireyler için genel ortalama, β 'dan sapma miktarını, γ_{ij} , i . sektördeki j . bireyin, koşullu beklenen hasardan sapma miktarını ve ε_{ijt} , y_{ijt} gözlem değerinin $\beta + \mu_i + \gamma_{ij}$ 'den sapma miktarını gösterir. Koşullu beklenen hasar, i . sektör için, $E(y_{ijt} | \mu_i) = \beta + \mu_i$ biçiminde, i . sektördeki j . birey için $E(y_{ijt} | \mu_i, \gamma_{ij}) = \beta + \mu_i + \gamma_{ij}$ biçiminde gösterilir.

Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinin Eşitlik (3.18)'de verilen karışık doğrusal model cinsinden gösterimine geçildiğinde, sektörlerdeki birey sayısının en fazla $q = \max(J_1, J_2, \dots, J_n)$ olduğu düşünölsün. i . sektör için toplam zaman dönemi sayısı

$$T_i = \sum_{j=1}^{J_i} T_{ij} \text{ dir. Yeni bir değişken, } \alpha_{ij} = \mu_i + \gamma_{ij} \text{ tanımlansın ve } \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iq})'$$

biçiminde gösterilsin.

Bu modelde açıklayıcı değişken olmadığı için $X_i=1$, $T_i \times 1$ boyutlu bir (1) sayısından oluşan bir vektör olur. e_k , k . elemanı 1 olup, diğer elemanları sıfır (0) sayısından oluşan sütun vektörü ve 1_{rxs} , $r \times s$ boyutlu 1 sayısından oluşan matris olmak üzere, $Z_{i1} = (e_1 1_{1 \times T_{i1}}, e_2 1_{1 \times T_{i2}}, \dots, e_{r_i} 1_{1 \times T_{ir_i}})'$ biçiminde tanımlansın. Bu tanıma göre, $Z_i = (Z_{i1} 0)$ olur. Burada 0, $T_i \times (q - J_i)$ boyutlu sıfır sayısından oluşan matristir. $R_i = \text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \text{köşegen}(1 / w_{i,jt})$ 'dir. $\text{Var}(\mu_i) = \sigma_\mu^2$ ve $\text{Var}(\gamma_{ij}) = \sigma_\gamma^2$ olarak tanımlandığına göre $D = \text{Var}(\alpha_i) = \sigma_\mu^2 1_{q \times q} + \sigma_\gamma^2 I_q$ biçiminde elde edilir (Frees et al., 1999).

Bühlmann-Straub kredibilite kestiricisi, bireysel bilgi, y_{iw} ile genel ortalamanın en iyi doğrusal yansız kestiricisi olan y_{zw} 'nin doğrusal birleşimidir. Jewell'in hiyerarşik modelinde kredibilite kestiricisi daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Bühlmann-Straub modelinden hiyerarşik modele geçiş şöyle ifade edilebilir: Bühlmann-Straub modelindeki i . bireyi temsil eden hücre, Jewell'in modelinde (i,j) hücresi olmuş; varyans bileşeni α_i 'nin yerini birbirinden bağımsız iki varyans bileşeni, $\mu_i + \gamma_{ij}$ almıştır. Diğer bir deyişle, bireyler arasında gözlenen heterojenlik; sektör içinde gözlenen heterojenlik (γ_{ij}) ile sektörler arasında gözlenen heterojenliğin (μ_i) toplamı olmuştur. Bühlmann-Straub modelinde olduğu gibi bu modelde de ağırlıklar vardır. $i=1,2,\dots,n$ için, i . sektörde, j . hücrenin veya bireyin t zaman dönemindeki ağırlığı, w_{ijt} ile gösterilmektedir (Dannenburg et al., 1996).

4.4.2. Hiyerarşik modelde kredibilite kestiricileri

Eşitlik (4.31)'de, μ_i 'lerin 0 ortalama ve σ_μ^2 varyansı ile, γ_{ij} 'lerin de 0 ortalama ve σ_γ^2 varyansı ile birbirinden bağımsız olduğu varsayılın. ε_{ijt} 'lerin varyansı ağırlıklarla ters orantılıdır ve σ^2 / w_{ijt} biçiminde hesaplanır. σ^2 , her (i,j) hücresi için zamana göre oluşan heterojenlik derecesinin, σ_γ^2 , sektördeki heterojenlik derecesinin ve σ_μ^2 , farklı sektörler arasındaki heterojenlik derecesinin ölçüsü olarak tanımlanmaktadır. Bühlmann-Straub modeline benzer olarak ağırlıklar aşağıdaki gibi elde edilir,

$$w_{ij\Sigma} = \sum_{t=1}^{T_{ij}} w_{ijt}, \quad w_{i\Sigma\Sigma} = \sum_{j=1}^{J_i} w_{ij\Sigma}, \quad w_{\Sigma\Sigma\Sigma} = \sum_{i=1}^n w_{i\Sigma\Sigma} \quad (4.31)$$

(i,j) hücresi ve i . sektör seviyesinde kredibilite faktörleri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir,

$$z_{ij} = \frac{\sigma_{\gamma}^2 w_{ij\Sigma}}{\sigma_{\gamma}^2 w_{ij\Sigma} + \sigma^2} \quad (4.32)$$

$$z_i = \frac{\sigma_{\mu}^2 z_{i\Sigma}}{\sigma_{\mu}^2 z_{i\Sigma} + \sigma_{\gamma}^2} \quad (4.33)$$

(Dannenburg et al., 1996 ; Frees et al., 1999).

Sektörler arasında heterojenlik yok ise sektörler arasındaki heterojenliğin ölçüsü olan σ_{μ}^2 varyansı negatif değer alabilmektedir ve bu durumda sıfır kabul edilir.

Sektörler heterojen değilse bir diğer deyişle homojen ise sektörlerin kredibilite faktörü sıfır olur. Poliçeler veya bireyler için ağırlıklı ortalama ve kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılmış sektör ortalaması aşağıdaki biçimde hesaplanır,

$$y_{ijw} = \sum_{t=1}^{T_{ij}} \frac{w_{ijt}}{w_{ij\Sigma}} y_{ijt} \quad (4.34)$$

$$y_{izw} = \sum_{j=1}^{J_i} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} y_{ijw} \quad (4.35)$$

Bu gösterimler kullanılarak β parametresinin GEKK kestiricisi,

$$\hat{\beta}_{GEKK} = y_{z\bar{z}w} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{z_{\Sigma}} y_{izw} \quad (4.36)$$

biçiminde elde edilir (Frees et al., 1999)

Eşitlik (4.35) ve Eşitlik (4.36)'da kullanılan diğer kredibilite faktörleri, $z_{i\Sigma} = \sum_{j=1}^{J_i} z_{ij}$ ve

$$z_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n z_i \text{ biçiminde elde edilir.}$$

Dannenburg et al. (1996), $\beta, \sigma_{\mu}^2, \sigma_{\gamma}^2$ ve σ^2 parametrelerinin kestiriminde sözde kestiricilerinin kullanılmasını önermiştir. Sözde kestiriciler aşağıda verilmektedir,

$$\hat{\beta} = E[y_{z\bar{z}w}] \quad (4.37)$$

$$\sigma^2 = \frac{E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^{T_{ij}} w_{ijt} (y_{ijt} - y_{ijw})^2 \right]}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{J_i} (T_{ij} - 1)} \quad (4.38)$$

$$\sigma_{\gamma}^2 = \frac{E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{J_i} z_{ij} (y_{ijw} - y_{i\bar{z}w})^2 \right]}{\sum_{i=1}^n (J_i - 1)} \quad (4.39)$$

$$\sigma_{\mu}^2 = \frac{E \left[\sum_{i=1}^n z_i \left((y_{i\bar{z}w} - y_{z\bar{z}w})^2 \right) \right]}{(n-1)} \quad (4.40)$$

Sözde kestiriciler, yineli elde edilmektedir. Bühlmann ve Gisler (2005) ve Ohlsson (2005), σ_{γ}^2 ve σ_{μ}^2 varyans bileşenleri için yansız kestirim yaklaşımını geliştirmiştir.

σ^2 için yansız kestiricisi sözde kestirici ile aynıdır. $\sigma_{\gamma}^2, \sigma_{\mu}^2$ ve $y_{z\bar{z}w}$ için yansız kestiriciler, aşağıdaki eşitliklerden yararlanılarak elde edilmektedir,

$$\hat{\sigma}_{\gamma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max \left(\frac{\sum_{j=1}^{J_i} w_{ij\Sigma} (y_{ijw} - y_{iww})^2 - \hat{\sigma}^2 (J_i - 1)}{w_{i\Sigma\Sigma} - \left(\sum_{j=1}^{J_i} w_{ij\Sigma}^2 \right) / \sum_{j=1}^{J_i} w_{i\Sigma\Sigma}}, 0 \right) \quad (4.41)$$

$$\hat{\sigma}_{\mu}^2 = \max \left(\frac{\sum_{i=1}^n z_{i\Sigma} \left(y_{izw} - \frac{\sum_{i=1}^n z_{i\Sigma} y_{izw}}{\sum_{i=1}^n z_{i\Sigma}} \right)^2 - \hat{\sigma}_{\gamma}^2 (n-1)}{\sum_{i=1}^n z_{i\Sigma} - \sum_{i=1}^n z_{i\Sigma}^2 / z_{\Sigma\Sigma}}, 0 \right) \quad (4.42)$$

$$\hat{y}_{z z w} = \sum_{i=1}^n \frac{z_{i\Sigma}}{z_{\Sigma\Sigma}} y_{i z w} \quad (4.43)$$

(Dutang et al., 2008)

Eşitlik (4.41) ve (4.42)' deki varyans bileşenlerinin eksi çıkma ihtimali vardır ve bu durumda, sıfır varsayılmaktadırlar. Her iki kestirim yönteminin birbirine göre üstün yönleri olmasına rağmen, yansız kestiricilerin elde edilmesi daha kolay olduğu için daha çok tercih edilmektedirler.

Yukarıda verilen notasyon ve kestiriciler kullanılarak, μ_i ve γ_{ij} 'nin en iyi doğrusal yansız önkestiricileri,

$$\mu_{i,EDYÖ} = z_i (y_{izw} - y_{zzw}) \quad (4.44)$$

$$\gamma_{ij,EDYÖ} = z_{ij} (y_{ijw} - z_i y_{izw} - (1 - z_i) y_{zzw}) \quad (4.45)$$

biçimlerinde elde edilir (Frees et al., 1999).

Eşitlik (4.44) ve (4.45) kullanılarak, i . sektör ve (i,j) hücresi için risk priminin homojen kredibilite kestiricileri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmektedir,

$$(\beta + \mu_i)^{*H} = \beta_{GEKK} + \mu_{i,EDYÖ} = z_i y_{izw} + (1 - z_i) y_{z zw} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} (\beta + \mu_i + \gamma_{ij})^{*H} &= \beta_{GEKK} + \mu_{i,EDYÖ} + \gamma_{ij,EDYÖ} = z_{ij} y_{ijw} + (1 - z_{ij})(\beta + \mu_i)^{*H} \\ &= z_{ij} y_{ijw} + (1 - z_{ij})[z_i y_{izw} + (1 - z_i) y_{z zw}] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Aşağıdaki çizelgelerden, Çizelge 4.1’de Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell’in hiyerarşik kredibilite modelinde kullanılan notasyonlar, kredibilite faktörleri ve modellerin μ veya β parametrelerinin GEKK kestiricileri verilmektedir. Çizelge 4.2’ de, her bir kredibilite modeli için, karışık doğrusal modellerde rassal etkilerin en iyi doğrusal yansız önkestiricileri ve gelecek dönemdeki hasarların en iyi doğrusal yansız önkestiricileri (kredibilite kestiricileri) verilmektedir.

Çizelge 4.1. Bühlmann, Bühlmann-Straub, Jewell’in hiyerarşik kredibilite modelinde, kredibilite ve GEKK kestiricileri

Model	Notasyon	Kredibilite Faktörü	μ veya β ’nın GEKK Kestiricileri
Bühlmann	$\bar{y}_i = \frac{1}{T_i} \sum_{t=1}^{T_i} y_{it}$	$z_i = \frac{\sigma_\alpha^2 T_i}{\sigma_\alpha^2 T_i + \sigma^2}$	$\frac{\sum_{i=1}^n z_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n z_i}$
Bühlmann-Straub	$y_{iw} = \frac{\sum_{t=1}^{T_i} w_{it} y_{it}}{\sum_{t=1}^{T_i} w_{it}}$	$z_i = \frac{\sigma_\alpha^2 w_{i\Sigma}}{\sigma_\alpha^2 w_{i\Sigma} + \sigma^2}$	$y_{zw} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i y_{iw}}{z_i}$
Jewell	$z_{i\Sigma} = \sum_{j=1}^{J_i} \frac{\sigma_\gamma^2 \sum_{t=1}^{T_{ij}} w_{ijt}}{\sigma_\gamma^2 \sum_{t=1}^{T_{ij}} w_{ijt} + \sigma^2}$ $y_{ijw} = \sum_{t=1}^{T_{ij}} \frac{w_{ijt} y_{ijt}}{w_{ijt}}$	$z_{ij} = \frac{\sigma_\gamma^2 \sum_{t=1}^{T_{ij}} w_{ijt}}{\sigma_\gamma^2 \sum_{t=1}^{T_{ij}} w_{ijt} + \sigma^2}$ $z_i = \frac{\sigma_\mu^2 z_{i\Sigma}}{\sigma_\mu^2 z_{i\Sigma} + \sigma_\gamma^2}$	$y_{z zw} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \frac{\sum_{j=1}^{J_i} z_{ij} y_{ijw}}{\sum_{j=1}^{J_i} z_{ij}}}{\sum_{i=1}^n z_i}$

Çizelge 4.2. Bühlmann, Bühlmann-Straub, Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde, en iyi doğrusal yansız önkestiriciler ve hasarların önkestiricileri

Model	En İyi Doğrusal Yansız Önkestiriciler (EDYÖ)	Hasarların Önkestiricileri
Bühlmann	$\alpha_{i,EDYÖ} = z_i (\bar{y}_i - \hat{\mu}_{GEKK})$	$i.$ birey için, $(1 - z_i) \hat{\mu}_{GEKK} + z_i \bar{y}_i$
Bühlmann-Straub	$\alpha_{i,EDYÖ} = z_i (y_{iw} - \hat{\mu}_{GEKK})$	$i.$ birey için, $(1 - z_i) \hat{\mu}_{GEKK} + z_i y_{iw}$
Jewell	$\mu_{i,EDYÖ} = z_i (y_{izw} - y_{zzw})$ $\gamma_{ij,EDYÖ} = z_{ij} [y_{ijw} - z_i y_{izw} - (1 - z_i) y_{zzw}]$	$i.$ sektör için, $\hat{\beta}_{GEKK} + \mu_{i,EDYÖ} = (1 - z_i) y_{zzw} + z_i y_{izw}$ (i,j) hücresi için, $\hat{\beta}_{GEKK} + \mu_{i,EDYÖ} + \gamma_{ij,EDYÖ}$ $= z_{ij} y_{ijw} + (1 - z_{ij}) [z_i y_{izw} + (1 - z_i) y_{zzw}]$

(Frees, et al.,1999)

5. UYGULAMA

5.1. Giriş

Çalışmada kullanılan veri, Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi'nden (TRAMER) alınmıştır¹. Tramer, 16 Aralık 2003 tarihli ve 25318 sayılı “Trafik Sigortası Bilgi Merkezi Yönetmeliği” ile kurulmuştur. Yönetmeliğe göre merkezin amacı şöyledir: Trafik sigortalarına ilişkin güvenilir istatistiklerin temini, uygulama birliği sağlanması, sigorta sahtekârlıklarının önlenmesi, sigorta sistemine olan güvenin artırılması, tazminat ödemelerinin düzenli ve doğru biçimde gerçekleştirilmesi, zorunlu sigortalarını yaptırmamış motorlu araç işletenlerinin tespiti ve sigortalılık oranlarının artırılmasını sağlamaktır. 15 Ağustos 2003 tarihinde yürürlüğe giren Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası (Trafik Sigortası) Genel Şartlarının A.1 maddesinde sigortanın kapsamı şöyle ifade edilmektedir: Sigortacı, poliçede tanımlanan motorlu aracın işletilmesi sırasında, bir kimsenin ölümüne veya yaralanmasına veya bir şeyin zarara uğramasına sebebiyet vermiş olmasından dolayı, 2918 sayılı Karayolları Trafik Kanunu'na göre işletene düşen hukuki sorumluluğu, zorunlu sigorta limitlerine kadar temin eder.

Veri kümesi, Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası altında otomobil araç grubuna ilişkin veri kümesidir. Yapılan hesaplamalarda, 2006, 2007, 2008 ve 2009 yılları için, 81 ilde ödenen hasar miktarı, muallak hasar miktarı ve yürürlükteki (meri) poliçe sayılarından yararlanılmıştır. 1 Temmuz 2008 tarihi öncesine kadar trafik sigortasında hem teminat limitleri hem de sigorta primleri T.C. Hazine Müsteşarlığı tarafından belirleniyordu. Ancak, primlerin daha adil olması, piyasa etkinliğinin artması ve uluslararası uygulamalara uyum sağlanması amacıyla, 6 Şubat 2008 tarihli ve 26779 sayılı “Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortasında Tarife Uygulama Esasları Hakkında Yönetmelikte Değişiklik Yapılmasına Dair Yönetmeliğe” göre, trafik sigortası primleri, sigorta şirketlerince serbestçe tespit edilip ve peşin olarak tahsil edilmeye başlanmıştır. Bu yönetmeliğin 4. Maddesi 2. fıkrasına göre, sigorta şirketleri, yönetmelik eki tablolarda yer alan araç türüne göre il bazında temel sigorta primini serbestçe tespit edebilirler. Sigorta şirketleri belirlenen bu tutar üzerinden %10 oranında

¹ Veri, Aktüerya Bilimleri Bölümü'nün 120/430 sayılı talebi doğrultusunda yalnızca bu tezde kullanılmak üzere, excel ortamında gönderilmiştir.

indirim ve %20 oranında artırım aralığını aşmamak kaydıyla serbestçe artırım ve/veya indirim sebebi belirleyebilirler.

$y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $t = 1, 2, \dots, T_i$ modeli düşünüldüğünde, i indisi ile gösterilen birimler veya bireyler, illeri temsil etmektedir. İller otomobil plaka kodlarına göre sıralanmıştır. i . ilin t yılındaki gözlem değeri y_{it} 'ler, t yılında ödenen hasar miktarı ile muallak hasar miktarı toplamının, aylara göre verilen yürürlükteki (meri) poliçe sayılarının ortalamasına bölünmesiyle elde edilmiştir. Hesaplanan ortalama poliçe sayıları, o yılda riske maruz kalan birim sayıları olarak varsayılmıştır. Bu poliçe sayıları, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modellerinde ağırlıkları oluşturmaktadır. Böylece, veri kümesi, otomobil araç grubu için, 2006, 2007, 2008 ve 2009 yıllarında, 81 ilin yıllık poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı ve ortalama poliçe sayılarından oluşmuştur. Veri kümesinde, tüm illere ilişkin bilgiler, dört yıllık zaman dönemi için elde edilmiştir. Tüm iller için zaman dönemi eşit olduğundan, kullanılan veri kümesi dengeli bir veri kümesidir.

Çalışmanın dördüncü kısmında bahsedildiği gibi, bireylerin ortalamaları aynı ise; genel ortalamanın kestirimi tüm bireylere prim olarak yüklenir. Bu nedenle, bireylerin grup ortalamalarının ($\mu_i = \mu + \alpha_i$) birbirine eşit olup olmadığı test edilmelidir. Tek yönlü varyans analizi, iki veya ikiden fazla sayıda bağımsız gruba ilişkin ortalamaların birbirine eşit olup olmadığının test edilmesinde kullanılan bir yöntemdir. Verilen normal dağıldığı varsayımı altında bu testte hipotezler şöyledir (Dannenburg et al., 1996):

$$H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$$
$$H_1 = \text{En az bir } \mu_i \text{ farklı.}$$

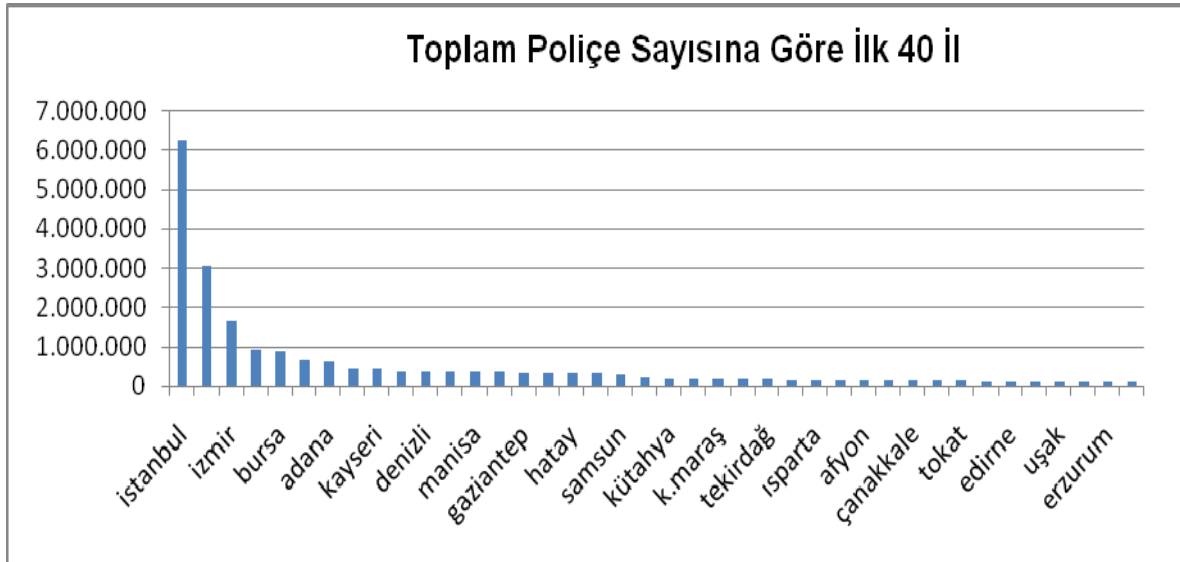
Bu test için gruplar arası kareler toplamı (GAKT) ve grup içi kareler toplamı (GİKT) hesaplanır. Bu kareler toplamı, serbestlik derecelerine bölündüğünde gruplar arası ve grup içi ortalama elde edilmiş olur. H_0 hipotezinin test edilmesi için F istatistiği,

$$F = \frac{GAO}{GIO} = \frac{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n T(\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n(T-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - \bar{y}_i)^2}$$

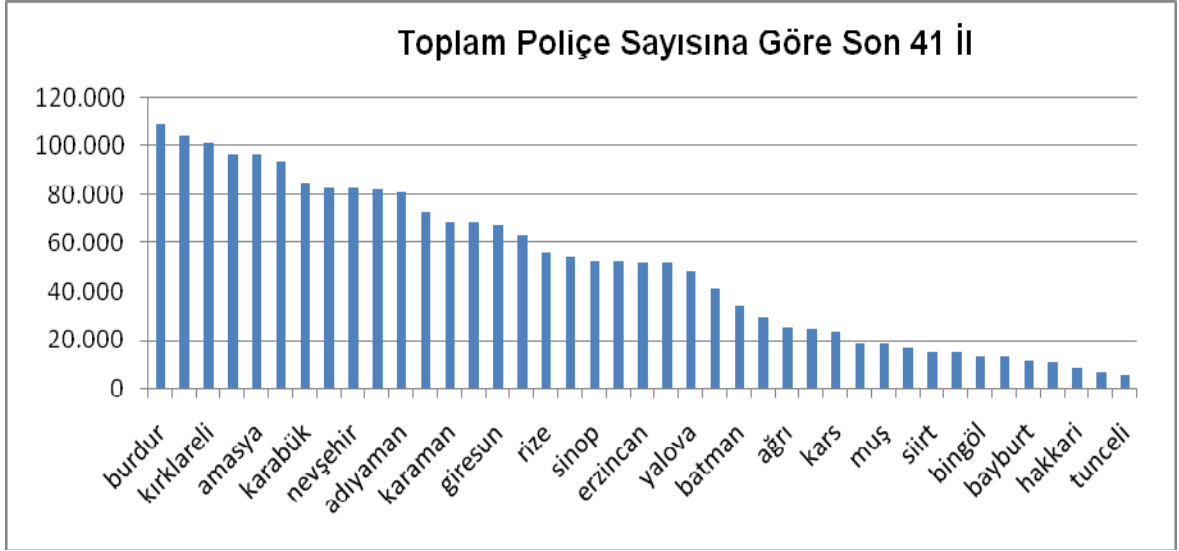
biçiminde hesaplanmaktadır.

F istatistiği, $(n-1)$ ve $n(T-1)$ serbestlik derecesi ile F dağılımına sahiptir. Bu veri kümesinde $n=81$ ve $T=4$ tür. Yapılan test sonucunda F istatistiği 4,743 bulunmuştur. %95 güven düzeyinde kritik değer 1,333 dir. Hesaplanan F değeri, F -tablo değerinden büyük olduğu için, H_0 hipotezi, %5 yanılma düzeyinde reddedilir. Sonuç olarak, tüm illerin grup ortalaması birbirine eşit değildir, denilebilir. Bu durumda, illerin etkisinin rassal olduğu varsayılarak, modelde bireysel etkiler (α_i) göz önüne alınabilir.

Aşağıda verilen Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 'de, yıllara göre hesaplanan ortalama polişe sayılarının dört yıl (2006-2009) üzerinden alınan toplamına göre sıralanan ilk kırk il ve sonraki kırk bir ilin grafiği verilmektedir.



Şekil 5.1. (2006-2009) yıllarında toplam polişe sayısı bakımından ilk kırk il



Şekil 5.2. (2006-2009) yıllarında toplam polisiye sayısı bakımından son kırk bir il

Dört yıllık toplam polisiye sayıları dikkate alındığında, en yüksek sayıda polisiye kesilen ilk on ilin sırasıyla; İstanbul (34), Ankara (6), İzmir (35), Antalya (7), Bursa (16), Konya (42), Adana (1), İçel (33), Kayseri (38) ve Muğla (48) olduğu görülmüştür. Son on il ise sondan başlayarak; Tunceli (62), Ardahan (75), Hakkari (30), Şırnak (73), Bayburt (69), Iğdır (76), Bingöl (12), Kilis (79), Siirt (56) ve Gümüşhane (29)'dir.

$y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $t = 1, 2, \dots, T_i$ modelinde, risk primi olarak adlandırılan, $E(y_{i,T_i+1} | \alpha_i) = \mu + \alpha_i$ 'nin kestirimi ile ilgilenilmektedir. Herhangi bir dönemdeki risk primi genel olarak; o döneme ilişkin hasar frekansının (toplam hasar sayısı / riske maruz kalan birim sayısı), ortalama hasar miktarı (toplam hasar miktarı / toplam hasar sayısı) ile çarpılmasından elde edilmektedir. Bu çalışmada, 2006, 2007, 2008 ve 2009 yılları için, her ilde oluşan toplam hasar miktarının, ortalama polisiye sayısına bölünmesiyle polisiye başına düşen ortalama hasar miktarı bulunmuştur. R 2.9.2 açık yazılım sistemi kullanılarak sırasıyla, Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik modellerinde, her il için, 2010 yılı risk priminin kredibilite kestirimleri (kredibilite primi) elde edilmiştir.

5.2. Bühlmann Kredibilite Modelinde Risk Priminin Kestirimi

$y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}$, $i = 1, 2, \dots, 81$, $t = 2006, \dots, 2009$ modelinde y_{it} 'ler, i . ilde t yılında poliçe başına düşen ortalama hasar miktarını temsil ederler. 2006, 2007, 2008 ve 2009 yılları için poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı verilmişken, risk priminin ($E(y_{i,T+1}|\alpha_i) = \mu + \alpha_i$) homojen kredibilite kestiricisi aşağıdaki gibi elde edilmektedir,

$$(\mu + \alpha_i)^{*H} = z \bar{y}_i + (1 - z) \bar{y}$$

Bühlmann kredibilite modelinde genel ortalamanın kestirimi, $\bar{y} = 83.74$ TL olarak elde edilmiştir. Çizelgede 5.1'de, iller bazında bireysel ortalama, kredibilite faktörü ve kredibilite primi verilmektedir.

Çizelge 5.1. Bühlmann kredibilite modelinde iller bazında; bireysel ortalama, kredibilite faktörü ve kredibilite primi

Araç Plaka Koduna Göre İller	Bireysel Ortalama ($\bar{y}_i$)	Kredibilite Faktörü (z)	Kredibilite Primi (TL)
1	88,063	0,78914	87,152
2	76,512	0,78914	78,036
3	69,282	0,78914	72,331
4	100,153	0,78914	96,693
5	68,939	0,78914	72,060
6	127,489	0,78914	118,265
7	92,742	0,78914	90,845
8	82,244	0,78914	82,560
9	66,380	0,78914	70,041
10	67,623	0,78914	71,022
11	82,727	0,78914	82,941
12	144,465	0,78914	131,661
13	99,242	0,78914	95,974
14	64,083	0,78914	68,228
15	47,255	0,78914	54,949
16	112,144	0,78914	106,155
17	65,519	0,78914	69,361
18	85,012	0,78914	84,744
19	86,691	0,78914	86,069
20	82,056	0,78914	82,412
21	128,693	0,78914	119,215
22	63,104	0,78914	67,455
23	85,488	0,78914	85,120
24	72,401	0,78914	74,792
25	107,022	0,78914	102,114
26	87,746	0,78914	86,902
27	96,218	0,78914	93,587
28	105,147	0,78914	100,634
29	90,729	0,78914	89,256

Çizelge 5.1. Devam ediyor

Araç Plaka Koduna Göre İller	Bireysel Ortalama ($\bar{y}_i$)	Kredibilite Faktörü (z)	Kredibilite Primi (TL)
30	75,800	0,78914	77,475
31	69,284	0,78914	72,333
32	68,258	0,78914	71,523
33	82,171	0,78914	82,502
34	154,468	0,78914	139,555
35	108,887	0,78914	103,585
36	68,925	0,78914	72,050
37	53,121	0,78914	59,578
38	90,880	0,78914	89,375
39	49,621	0,78914	56,816
40	71,429	0,78914	74,026
41	121,058	0,78914	113,190
42	76,250	0,78914	77,830
43	57,910	0,78914	63,357
44	88,426	0,78914	87,439
45	61,925	0,78914	66,525
46	75,778	0,78914	77,457
47	88,757	0,78914	87,699
48	71,503	0,78914	74,084
49	106,903	0,78914	102,020
50	61,110	0,78914	65,882
51	69,671	0,78914	72,638
52	106,351	0,78914	101,584
53	95,159	0,78914	92,752
54	99,674	0,78914	96,315
55	100,688	0,78914	97,115
56	128,293	0,78914	118,900
57	62,327	0,78914	66,843
58	83,301	0,78914	83,394
59	79,127	0,78914	80,100
60	69,972	0,78914	72,875
61	98,221	0,78914	95,168
62	60,674	0,78914	65,538
63	82,028	0,78914	82,390
64	71,164	0,78914	73,817
65	100,031	0,78914	96,596
66	84,505	0,78914	84,345
67	76,957	0,78914	78,388
68	71,721	0,78914	74,256
69	71,413	0,78914	74,013
70	53,681	0,78914	60,020
71	79,543	0,78914	80,429
72	119,060	0,78914	111,613
73	96,900	0,78914	94,125
74	53,389	0,78914	59,789
75	65,134	0,78914	69,058
76	97,441	0,78914	94,553
77	93,549	0,78914	91,481
78	70,641	0,78914	73,403
79	35,862	0,78914	45,958
80	60,223	0,78914	65,183
81	98,811	0,78914	95,634

Veri kümesi dengeli olduğu için kredibilite faktörleri tüm iller için aynıdır.

Çizelge 5.1'e bakıldığında, bireysel ortalaması genel ortalamanın kestiriminden düşük olan illerin kredibilite primleri, bireysel ortalamalarına göre artış göstermiş; bireysel ortalaması genel ortalamanın kestiriminden yüksek olan illerin kredibilite primleri ise bireysel ortalamalarına göre azalış göstermiştir. Bu durum, ne tam homojen ne de tam heterojen olacak kadar geniş hasar deneyimine sahip olmayan illerden oluşan bir portföyde, kredibilite primlerinin hesaplanmasına örnek teşkil etmektedir.

Veri kümesine bakıldığında, bazı illerin yıllık poliçe başına düşen ortalama hasar miktarlarının yüksek olması nedeniyle bireysel ortalamalarının da yüksek olduğu görülmektedir. Bu iller genellikle trafik yoğunluğunun ve poliçe sayısının yüksek olduğu, büyük nüfusa sahip illerdir (İstanbul (34), Ankara (6), İzmir (35) v.b). Bu illerin dışında, Batman (72), Bingöl (12), Siirt (56) gibi trafik yoğunluğunun ve poliçe sayısının düşük olduğu, az nüfusa sahip bazı illerde yıllık poliçe başına düşen ortalama hasar miktarlarının yüksek olduğu ve dolayısıyla kredibilite primlerinin de yüksek değerlerde olduğu görülmüştür. Bu durum hakkında, bu illerde poliçe sayısının düşük olması ve gerçekleşen yüksek miktarlardaki hasarların az sayıda poliçeye yayılması yorumu yapılabilir. Ayrıca, sigorta sektöründe oluşan sigorta sahteciliği faktörünün de göz ardı edilmemesi gerekir.

5.3. Bühlmann-Straub Kredibilite Modelinde Risk Priminin Kestirimi

Bu modelde, gözlem değerleri, y_{it} 'lerin, w_{it} sayıda rastlantı değişkeninin ortalaması olduğu varsayılmaktadır. Ortalama poliçe sayıları, modelde ağırlıkları (w_{it}) oluşturmaktadır.

$y_{it} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{it}$, $i = 1, 2, \dots, 81$, $t = 2006, \dots, 2009$ modelinde, y_{it} , i . ilde t yılında poliçe başına düşen ortalama hasar miktarıdır. 2006, 2007, 2008 ve 2009 yılları için poliçe başına düşen ortalama hasar miktarları ve ağırlıklar verilmişken, risk priminin ($E(y_{i,T+1} | \alpha_i) = \mu + \alpha_i$) homojen kredibilite kestiricisi,

$$(\mu + \alpha_i)^{*H} = z_i y_{iw} + (1 - z_i) y_{zw}$$

biçiminde elde edilir.

Bühlmann-Straub kredibilite modelinde genel ortalamanın kestirimi, $\hat{\mu}_{GEKK} = y_{zw}$ 84,73 TL olarak elde edilmiştir. Çizelgede 5.2’de iller bazında; ağırlıklı ortalama, toplam poliçe sayısı (ağırlık), kredibilite faktörü ve kredibilite primi verilmektedir.

Çizelge 5.2. Bühlmann-Straub kredibilite modelinde iller bazında; ağırlıklı ortalama, ağırlık, kredibilite faktörü ve kredibilite primi

Araç Plaka Koduna Göre İller	Ağırlıklı Ortalama (y_{iw})	Ağırlık (w_{it})	Kredibilite Faktörü (z_i)	Kredibilite primi (TL)
1	88,398	612.825	0,9525	88,223
2	77,020	81.205	0,7266	79,128
3	70,207	156.203	0,8364	72,583
4	100,933	24.852	0,4486	91,998
5	70,069	96.771	0,7601	73,587
6	128,593	3.051.415	0,9901	128,158
7	93,475	925.219	0,9680	93,195
8	82,115	28.869	0,4859	83,459
9	66,733	337.967	0,9171	68,225
10	68,587	378.195	0,9253	69,793
11	83,598	54.420	0,6405	84,005
12	146,116	13.010	0,2987	103,063
13	98,897	18.613	0,3786	90,094
14	64,768	93.171	0,7531	69,697
15	47,862	109.321	0,7816	55,914
16	112,995	891.707	0,9669	112,058
17	66,184	148.687	0,8296	69,345
18	87,793	24.107	0,4411	86,081
19	88,375	149.728	0,8305	87,757
20	82,531	378.494	0,9253	82,695
21	129,835	104.133	0,7732	119,603
22	63,572	124.436	0,8029	67,743
23	86,260	119.261	0,7961	85,948
24	73,329	52.055	0,6302	77,546
25	107,466	117.433	0,7936	102,772
26	88,401	326.284	0,9144	88,086
27	96,449	357.191	0,9212	95,526
28	106,370	67.178	0,6874	99,605
29	92,925	16.586	0,3519	87,614
30	78,133	8.254	0,2127	83,327
31	69,107	335.413	0,9165	70,411
32	69,362	163.268	0,8424	71,785
33	82,787	465.650	0,9384	82,907
34	155,088	6.256.944	0,9951	154,747
35	109,471	1.647.497	0,9818	109,020
36	69,554	23.158	0,4312	78,186
37	54,150	110.818	0,7839	60,759

Çizelge 5.2. Devam ediyor

Araç Plaka Koduna Göre İller	Ağırlıklı Ortalama (y_{iw})	Ağırlık (w_{it})	Kredibilite Faktörü (z_i)	Kredibilite primi (TL)
38	92,012	451.183	0,9366	91,550
39	50,326	101.091	0,7679	58,310
40	72,080	63.637	0,6756	76,183
41	122,657	373.496	0,9244	119,790
42	77,065	642.993	0,9546	77,413
43	58,421	209.143	0,8725	61,774
44	89,171	158.132	0,8381	88,452
45	62,372	375.387	0,9247	64,055
46	77,062	196.584	0,8655	78,094
47	89,024	41.558	0,5763	87,204
48	71,858	388.174	0,9270	72,798
49	106,898	17.978	0,3705	92,942
50	61,693	82.721	0,7303	67,907
51	70,342	68.576	0,6918	74,777
52	107,167	130.614	0,8104	102,914
53	96,091	56.236	0,6480	92,092
54	100,768	233.852	0,8845	98,914
55	101,566	311.250	0,9106	100,061
56	128,396	14.878	0,3275	99,031
57	63,294	52.506	0,6322	71,179
58	84,421	144.686	0,8257	84,475
59	80,187	188.481	0,8605	80,820
60	70,115	138.797	0,8196	72,752
61	98,868	169.282	0,8471	96,706
62	62,811	5.253	0,1467	81,514
63	81,879	192.409	0,8630	82,270
64	71,857	119.488	0,7964	74,478
65	100,592	73.197	0,7055	95,921
66	87,094	82.250	0,7292	86,454
67	77,434	201.593	0,8684	78,394
68	72,844	96.800	0,7601	75,696
69	72,060	11.486	0,2732	81,268
70	55,017	68.610	0,6919	64,172
71	81,849	51.834	0,6292	82,917
72	122,058	33.813	0,5253	104,340
73	96,463	11.023	0,2652	87,841
74	54,498	52.435	0,6319	65,628
75	67,730	6.155	0,1677	81,879
76	97,643	12.773	0,2948	88,537
77	95,183	48.041	0,6113	91,119
78	71,063	84.733	0,7350	74,685
79	36,215	14.664	0,3243	68,996
80	61,205	120.574	0,7978	65,961
81	100,463	82.894	0,7307	96,226

Bu modelde illere göre elde edilen kredibilite primlerine bakıldığında, poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı ve poliçe sayısı yüksek olan illerin kredibilite primlerinin diğer illere göre yüksek çıktığı görülmektedir. Bühlmann modelinin sonuçları ile karşılaştırıldığında, trafik yoğunluğu ve nüfusu az olup, poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı yüksek olan illerin kredibilite primlerinin, bu modelde daha makul seviyelere gerilediği, genel ortalamanın kestirimine daha çok yaklaştığı görülmüştür. Bu durum, ağırlıkların modele etkisinin bir sonucu olarak yorumlanabilir.

5.4. Jewell'in Hiyerarşik Kredibilite Modelinde Risk Priminin Kestirimi

Bu modelde iller, Türkiye'deki coğrafi bölgelere göre ayrılmıştır. Böylece, sektörleri coğrafi bölgeler, hücreleri de iller temsil etmektedir. Bühlmann-Straub modelinde olduğu gibi bu modelde de ağırlıklar vardır. i . coğrafi bölgede, j . ilin t yılındaki ağırlığını (w_{ijt}) poliçe sayıları temsil etmektedir. y_{ijt} , i . coğrafi bölgede, j . ilin t yılında poliçe başına düşen ortalama hasar miktarını temsil etmektedir. Türkiye'de yedi adet coğrafi bölge olduğu için hiyerarşik model aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$y_{ijt} = \beta + \mu_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijt}, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \quad j = 1, 2, \dots, J_i, \quad t = 2006, \dots, 2009$$

i . coğrafi bölge ve i . coğrafi bölgedeki j . il için risk priminin homojen kredibilite kestiricileri sırasıyla,

$$(\beta + \mu_i)^{*H} = z_i y_{izw} + (1 - z_i) y_{zzw}$$

$$\begin{aligned} (\beta + \mu_i + \gamma_{ij})^{*H} &= z_{ij} y_{ijw} + (1 - z_{ij}) (\beta + \mu_i)^{*H} \\ &= z_{ij} y_{ijw} + (1 - z_{ij}) [z_i y_{izw} + (1 - z_i) y_{zzw}] \end{aligned}$$

biçiminde elde edilmektedir.

Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde genel ortalamanın kestirimi, $\hat{\beta}_{GEKK} = y_{zzw} = 85,33$ TL olarak elde edilmiştir.

Coğrafi bölgeler, Çizelge 5.3'te gösterildiği gibi numaralandırılmıştır.

Çizelge 5.3. Türkiye'nin coğrafi bölgeleri ve numaraları

Numara	Coğrafi Bölge
1	Marmara
2	Ege
3	Akdeniz
4	İç Anadolu
5	Doğu Anadolu
6	Güneydoğu Anadolu
7	Karadeniz

Çizelge 5.4'te Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde bölgeler bazında elde edilen; ağırlıklı ortalama, kredibilite faktörü ve kredibilite primi verilmektedir.

Çizelge 5.4. Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde bölgeler bazında; ağırlıklı ortalama, kredibilite faktörü ve kredibilite primi

Coğrafi Bölge	Ağırlıklı Ortalama (y_{izw})	Kredibilite Faktörü (z_i)	Kredibilite Primi (TL)
3	95,145	0,0274	85,600
6	75,293	0,0225	85,106
2	75,621	0,0218	85,120
5	84,700	0,0279	85,314
7	93,296	0,0152	85,452
4	96,338	0,0136	85,481
1	82,732	0,0328	85,246

Bölgelerin kredibilite primlerinin birbirine yakın çıkmasının nedeni olarak, farklı bölgeler arasındaki heterojenliğin ölçüsü olan varyans bileşeninin ($\hat{\sigma}_\mu^2$) kestiriminin 1,6315 gibi küçük bir sayı olarak elde edilmesi; bölgeler bazında kredibilite faktörlerinin düşük çıkması ve dolayısıyla bölgeler bazında kredibilite primlerinin kestiriminde, büyük ağırlığın genel ortalamanın kestirimine verilmesi gösterilebilir.

Çizelgede 5.5'te coğrafi bölgelere göre ayrılan iller bazında; ağırlıklı ortalama, ağırlık, kredibilite faktörü ve kredibilite primi verilmektedir.

Çizelge 5.5. Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde coğrafi bölgelere göre ayrılan iller bazında; ağırlıklı ortalama, ağırlık, kredibilite faktörü ve kredibilite primi

Coğrafi Bölge	Araç Plaka Koduna Göre İller	Ağırlıklı Ortalama (y_{ijw})	Ağırlık (w_{ijt})	Kredibilite Faktörü (z_{ij})	Kredibilite Primi (TL)
3	1	88,398	612.825	0,8926	88,046
6	2	77,020	81.205	0,5242	81,046
2	3	70,207	156.203	0,6794	74,984
5	4	100,933	24.852	0,2522	89,356
7	5	70,069	96.771	0,5677	76,631
4	6	128,593	3.051.415	0,9764	127,572
3	7	93,475	925.219	0,9262	92,859
7	8	82,115	28.869	0,2815	84,365
2	9	66,733	337.967	0,8210	70,022
1	10	68,587	378.195	0,8369	71,362
1	11	83,598	54.420	0,4248	84,750
5	12	146,116	13.010	0,1500	94,554
5	13	98,897	18.613	0,2016	88,163
7	14	64,768	93.171	0,5583	73,813
3	15	47,862	109.321	0,5973	62,865
1	16	112,995	891.707	0,9237	110,903
1	17	66,184	148.687	0,6686	72,619
4	18	87,793	24.107	0,2465	85,925
7	19	88,375	149.728	0,6701	87,343
2	20	82,531	378.494	0,8370	82,951
6	21	129,835	104.133	0,5856	111,452
1	22	63,572	124.436	0,6280	71,766
5	23	86,260	119.261	0,6181	85,952
5	24	73,329	52.055	0,4139	80,434
5	25	107,466	117.433	0,6144	98,977
4	26	88,401	326.284	0,8157	87,832
6	27	96,449	357.191	0,8290	94,573
7	28	106,370	67.178	0,4768	95,319
7	29	92,925	16.586	0,1837	86,657
5	30	78,133	8.254	0,1007	84,715
3	31	69,107	335.413	0,8199	71,992
3	32	69,362	163.268	0,6890	74,263
3	33	82,787	465.650	0,8634	83,106
1	34	155,088	6.256.944	0,9884	154,279
2	35	109,471	1.647.497	0,9572	108,428
5	36	69,554	23.158	0,2391	81,651
7	37	54,150	110.818	0,6006	66,571
4	38	92,012	451.183	0,8596	91,071
1	39	50,326	101.091	0,5783	65,200
4	40	72,080	63.637	0,4634	79,182
1	41	122,657	373.496	0,8352	116,550
4	42	77,065	642.993	0,8972	77,914
2	43	58,421	209.143	0,7394	65,374
5	44	89,171	158.132	0,6821	87,989
2	45	62,372	375.387	0,8359	66,103
3	46	77,062	196.584	0,7273	79,259
6	47	89,024	41.558	0,3606	86,758

Çizelge 5.5. Devam ediyor

Coğrafi Bölge	Araç Plaka Koduna Göre İller	Ağırlıklı Ortalam (y_{ijw})	Ağırlık (w_{ijt})	Kredibilite Faktörü (z_{ij})	Kredibilite Primi (TL)
2	48	71,858	388.174	0,8404	73,972
5	49	106,898	17.978	0,1961	89,658
4	50	61,693	82.721	0,5288	72,823
4	51	70,342	68.576	0,4820	78,098
7	52	107,167	130.614	0,6393	99,259
7	53	96,091	56.236	0,4328	89,940
1	54	100,768	233.852	0,7604	97,133
7	55	101,566	311.250	0,8085	98,441
6	56	128,396	14.878	0,1680	92,689
7	57	63,294	52.506	0,4160	76,113
4	58	84,421	144.686	0,6625	84,722
1	59	80,187	188.481	0,7189	81,708
7	60	70,115	138.797	0,6532	75,363
7	61	98,868	169.282	0,6967	94,736
5	62	62,811	5.253	0,0665	83,946
6	63	81,879	192.409	0,7230	82,877
2	64	71,857	119.488	0,6185	76,912
5	65	100,592	73.197	0,4983	92,996
4	66	87,094	82.250	0,5274	86,253
7	67	77,434	201.593	0,7323	79,526
4	68	72,844	96.800	0,5677	78,234
7	69	72,060	11.486	0,1348	83,468
4	70	55,017	68.610	0,4821	70,708
4	71	81,849	51.834	0,4129	83,883
6	72	122,058	33.813	0,3145	96,984
6	73	96,463	11.023	0,1301	86,910
7	74	54,498	52.435	0,4157	72,464
5	75	67,730	6.155	0,0771	84,086
5	76	97,643	12.773	0,1477	87,253
1	77	95,183	48.041	0,3946	89,381
7	78	71,063	84.733	0,5348	77,661
6	79	36,215	14.664	0,1659	77,306
3	80	61,205	120.574	0,6206	70,278
7	81	100,463	82.894	0,5293	93,301

Çizelge 5.5'ten, bölgelere göre ayrılmış illerin kredibilite primlerine bakıldığında, toplam poliçe sayısı ve poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı yüksek olan İstanbul, Ankara gibi büyük şehirlerin kredibilite primlerinin diğer illere oranla daha yüksek çıktığı görülmektedir. Ayrıca, Bühlmann modelinde değinilen poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı yüksek olup, ortalama poliçe sayısı düşük olan Bingöl, Batman gibi illerin kredibilite primlerinin Bühlmann-Straub modeline kıyasla daha da gerilediği, daha makul seviyelere düştüğü görülmektedir. Burada, illerin, coğrafi bölgelere göre ayrılmasının etkisi görülmüştür

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kredibilite kuramı ile panel veri modelleri arasındaki bağlantı incelenmiş, Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelleri, panel veri modelleri bağlamında yorumlanmıştır.

Öncelikle, kredibilite kuramında kullanılan temel kavramlar, kredibilite yaklaşımları ve kredibilite modelleri tanıtılmış, panel veri kavramı, panel veri regresyon modelleri, modellerin parametre kestirimleri, karışık doğrusal modellerde önkestirim ve varyans bileşenlerinin kestirimi genel hatlarıyla verilmiştir.

En fazla kesinlik kredibilite yaklaşımı altında anlatılan Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelleri, karışık doğrusal modellerin özel durumları olarak incelenmiştir.

Gerçek bir veri kümesi kullanılarak yapılan uygulama ile, Bühlmann, Bühlmann-Straub ve Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelleri altında, veri kümesindeki her birim için kredibilite primleri elde edilmiştir. Kullanılan veri kümesi, Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası (Trafik Sigortası) altında otomobil araç grubuna ilişkin veri kümesidir. Gözlem birimleri, Türkiye'deki 81 ildir. İllerin, 2006, 2007, 2008 ve 2009 yıllarında poliçe başına düşen ortalama hasar miktarı ve ortalama poliçe sayılarına ilişkin bilgilerinden yararlanılmıştır. Her ilin dört yıllık bilgisi kullanıldığı için, veri kümesi dengeli bir veri kümesi örneği oluşturmaktadır.

Öncelikle tüm illere ilişkin grup ortalamalarının birbirine eşit olup olmadığı tek yönlü varyans analizi ile test edilmiştir. Bu test sonucunda, tüm illerin grup ortalamalarının birbirine eşit olduğuna dair yokluk hipotezi %5 yanılma düzeyinde reddedilmiştir. İller bazında, 2010 yılı risk priminin kredibilite kestirimlerinin elde edilmesi amacıyla kullanılan modellerde illerin etkisinin rassal olduğu varsayılmış ve Bühlmann, Bühlmann-Straub kredibilite modelleri altında, her il için kredibilite primi hesaplanmıştır. Ayrıca, Jewell'in hiyerarşik kredibilite modelinde, iller, coğrafi bölgelere ayrılmış, hem bölgeler bazında hem bölgelere ayrılan iller bazında kredibilite primleri elde edilmiştir.

Kestirim sonuçlarına göre, kredibilite primlerinin, poliçe başına düşen ortalama hasar miktarının yüksek olduğu illerde yüksek, poliçe başına düşen ortalama hasar miktarının düşük olduğu illerde ise daha düşük olduğu görülmüştür. İllerin kredibilite primlerinin beklendiği gibi, bireysel ortalama veya ağırlıklı bireysel ortalamaları ile genel ortalamanın kestirimi arasında bir değer aldığı gözlenmiştir. Diğer iller ile karşılaştırıldığında ortalama poliçe sayılarının düşük olduğu bazı illerde, yıllık poliçe başına düşen ortalama hasar miktarının yüksek olduğu ve dolayısıyla kredibilite primlerinin yüksek çıktığı görülmüştür. Bu sorunun giderilmesi için, iller, coğrafi bölgeler yerine hasar sıklıkları ve trafik yoğunluklarına göre gruplandırılabilir ve bu gruplara göre prim fiyatlandırması yapılabilir.

Uygulamada verilen modeller düşünüldüğünde, kullanılan veri kümesinde açıklayıcı değişken bulunmaması nedeniyle sadece bağımlı değişkenle ilgili bilgiden yararlanılmıştır. Bu sebeple, sigorta portföyüne ilişkin açıklayıcı değişkenlerin de bulunduğu bir panel veri kümesi kullanılarak uygun modelin oluşturulması ve kredibilite kestirimlerinin elde edilmesi için yeni bir çalışmanın yapılması araştırmacılara önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Bailey, A.L., 1945, A Generalized Theory of Credibility, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 32: 13–20.
- Bailey, A.L., 1950, Credibility Procedures Laplace's Generalization of Bayes' Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 37, 7-45.
- Baltagi, B. H., 2001, Econometric Analysis of Panel Data, Second Edition, Wiley, New York.
- Bühlmann, H., 1967, Experience Rating and Credibility, ASTIN Bulletin, 4:199-207.
- Bühlmann, H., Gisler, A., 2005, A Course in Credibility Theory and its Applications, Springer, Berlin.
- Bühlmann, H., Straub, E., 1970, Glaubwürdigkeit für Schadensätze, Mitteilungen der Vereinigung, Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 70(1):111-133.
- Corbeil, R. R., Searle S. R., 1976, Restricted Maximum Likelihood (REML) Estimation of Variance Components in the Mixed Model, Technometrics, 18,31-38.
- Dağ, B., 2006, Karışık Doğrusal Modellerde Kestirimler, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 92s.
- Dannenburg, D. R., Kaas R., Goovaerts M. J., 1996, Practical Actuarial Credibility Models, Institute of Actuarial Science and Econometrics, University of Amsterdam, The Netherlands.
- De Vylder, F., 1978, Parameter Estimation in Credibility Theory, ASTIN Bulletin, 10:99-112 .
- Dutang, C., Goulet V., Pigeon M., 2008, Actuar: an R Package for Actuarial Science, Journal of Statistical Software, Volume 25: Issue 7.
- Frees, E. W., Young V. R., Lou Y., 1999, A Longitudinal Data Analysis Interpretation of Credibility Models, Insurance: Mathematics and Economics, 24: 229-247.
- Frees, E. W., Young V. R., Lou Y., 2001, Case Studies Using Panel Data Models, North American Actuarial Journal.
- Frees, E. W., 2004, Longitudinal and Panel Data: Analysis and the Applications in the Social Sciences, Cambridge University Press, U.K.
- Frees, E. W., Wang, P., 2005, Credibility Using Copulas, North American Actuarial Journal, 9 (2), pp. 31–48.

- Golderberger, A. S., 1962, Best Linear Unbiased Prediction in the Generalized Linear Regression Model, *Journal of American Statistical Association* 57, 369-75.
- Goovaerts, M.J., Kaas, R. Heerwaarden A.E., Bauwelinckx, T., 1990, *Effective Actuarial Methods*, Amsterdam.
- Greene, W. H., 2003, *Econometric Analysis*, New York University.
- Hachemeister, C., 1975, Credibility for Regression Models with Application to Trend. In *Credibility: Theory and Applications*, 129-163, Academic Press.
- Harville, D., 1976, Extension of the Gauss Markov Theorem to Include the Estimation of Random Effects, *Annals of Statistics* 2, 384-95.
- Henderson, C. R., 1973, Sire Evaluation and Genetic Trends, in *Proceedings of the Animal Breeding and Genetics Symposium in Honor of Dr. Jay L. Lush*, 10–41, Amer. Soc. Animal Sci.-Amer. Dairy Sci. Assn. Poultry Sci. Assn., Champaign, IL.
- Herzog, T.L., 1999, *Introduction to Credibility Theory*, third edition, ACTEX. Abington.
- Hsiao, C., 2002, *Analysis of Panel Data*, Second Edition, Cambridge University Press.
- Jewell, W.S. ,1974, The Credible Distribution, *ASTIN Bulletin*, 7, 237-69.
- Jewell, W.S. ,1975, The Use of Collateral Data in Credibility Theory: a Hierarchical Model, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 38, 1-16.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene J., Denuit M., 2001, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands.
- Klugman, S., Panjer, H., Willmot, G., 2004, *Loss Models from Data to Decisions*, Wiley, New York.
- Longley-Cook, L.H., 1962, An Introduction to Credibility Theory, *Proceeding of the Casualty Actuarial Society* 49 , 194-221.
- Mayerson, A.L.,1964, A Bayesian View of Credibility, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 51: 85–104.
- Norberg, R., 1986, Hierarchical Credibility: Analysis of a Random Effect Linear Model with Nested Classification, *Scandinavian Actuarial Journal* 1986, 204-222.
- Ohlsson, E., 2005,. Simplified Estimation of Structure Parameters in Hierarchical Credibility, *The 36th ASTIN Colloquium*, Zurich.

- Rao, P. S. R. S, 1997, Variance Components Estimation: mixed models, methodologies and applications, Chapman&Hall, London, U.K.
- Searle, S. R., Casella, G., McCulloch, C., E., 1992, Variance Components, New York.
- Sevestre, P., Laszlo M., 1996, The Econometrics of Panel Data; A Handbook of the Theory with Applications, Kluwer Academic Publishers.
- Sundt, B., 1979, A Hierarchical Credibility Regression Model, Scandinavian Actuarial Journal 1979, 107-114.
- Taylor, G.C., 1979,. Credibility Analysis of a General Hierarchical Model,. Scandinavian Actuarial Journal, 1{12.}
- Whitney, A.W., 1918, The Theory of Experience Rating, Proceedings of the Casualty Actuarial Society 4, 274-292.

EKLER DİZİNİ

EK 1.SABİT ETKİLİ DOĞRUSAL PANEL VERİ MODELİNDE PARAMETRELERİN
KESTİRİMİ

EK 2. EN İYİ DOĞRUSAL ÖNKESTİRİCİ

EK 3. EN İYİ DOĞRUSAL YANSIZ ÖNKESTİRİCİ

EK 4. EN İYİ DOĞRUSAL YANSIZ ÖNKESTİRİCİNİN VARYANSI

EK 1. SABİT ETKİLİ DOĞRUSAL PANEL VERİ MODELİNDE PARAMETRELERİN KESTİRİMİ

$i = 1, 2, \dots, n$ için $Ey_i = \alpha_i Z_i + X_i \beta$ fonksiyonuna sahip sabit etkili doğrusal panel veri modeli olsun. y_i 'nin varyans kovaryans matrisinin (R_i) bilindiği varsayımı altında, GEKK kestirim yönteminde kareler toplamı,

$$KT(a, b) = \sum_{i=1}^n \left(y_i - (Z_i a_i + X_i b) \right)' R_i^{-1} \left(y_i - (Z_i a_i + X_i b) \right) \quad (1)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (1)' deki a ve b 'ler $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)'$ parametrelerinin kestiricileridir. Kareler toplamının bireysel parametrelere göre türevi alınıp, sıfıra eşitlendiğinde elde edilen eşitliklerin çözülmesiyle a_i 'ler aşağıdaki gibi elde edilir ,

$$a_i = \left(Z_i' R_i^{-1} Z_i \right)^{-1} Z_i' R_i^{-1} (y_i - X_i b) \quad (2)$$

Tasarım matrisi $P_{Z,i} = R_i^{-1/2} Z_i \left(Z_i' R_i^{-1} Z_i \right)^{-1} Z_i' R_i^{-1/2}$ biçiminde tanımlansın. Bu matris hem simetrik hem de dengüçlü (idempotent) bir matristir ($P_{Z,i} P_{Z,i} = P_{Z,i}$). Tasarım matrisi ve Eşitlik (2) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir,

$$R_i^{-1/2} Z_i a_i = P_{Z,i} R_i^{-1/2} (y_i - X_i b) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} R_i^{-1/2} (y_i - (Z_i a_i + X_i b)) &= R_i^{-1/2} (y_i - X_i b) - P_{Z,i} R_i^{-1/2} (y_i - X_i b) \\ &= (I - P_{Z,i}) R_i^{-1/2} (y_i - X_i b) \end{aligned} \quad (4)$$

Yeni bir tasarım matrisi $Q_{Z,i} = (I - P_{Z,i})$ biçiminde tanımlansın. Bu matris de hem simetrik hem denk güçlü bir matristir. Böylece, kareler toplamı aşağıdaki biçimde elde edilmektedir,

$$KT(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - X_i b)' R_i^{-1/2} Q_{Z,i} R_i^{-1/2} (y_i - X_i b) \quad (5)$$

Kareler toplamının en küçük değeri alması için b'ye göre türev alınır ve sıfıra eşitlenir. Sonuç olarak, sabit etkili panel veri modelinde GEKK kestiricileri,

$$b_{GEKK} = \left(\sum_{i=1}^n X_i' R_i^{-1/2} Q_{Z,i} R_i^{-1/2} X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i' R_i^{-1/2} Q_{Z,i} R_i^{-1/2} y_i \quad (6)$$

ve

$$a_{GEKK,i} = \left(Z_i' R_i^{-1} Z_i \right)^{-1} Z_i' R_i^{-1} (y_i - X_i b_{SE}) \quad (7)$$

biçiminde elde edilir.

Genellikle, modelde özilişki ve değişen varyans durumu olmadığı varsayılır. Bu varsayımlar altında, $R_i = \sigma^2 I_i$ olur ve β 'nın EKK kestiricisi ile bu kestiricinin varyansı aşağıdaki eşitlikte verilmiştir,

$$b_{EKK} = \left(\sum_{i=1}^n X_i' Q_i X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i' Q_i y_i \quad (8)$$

$$Var(b_{EKK}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i' Q_i X_i \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i' Q_i R_i Q_i X_i \right] \left(\sum_{i=1}^n X_i' Q_i X_i \right)^{-1} \quad (9)$$

Bu eşitliklerde, $Q_i = I - Z_i (Z_i' Z_i)^{-1} Z_i'$ 'dir.

b_{EKK} , β 'nın yansız ve asimptotik olarak normal dağılım gösteren kestiricisi olmasına rağmen, b_{GEKK} 'den daha az etkindir (Frees, 2004).

EK 2. EN İYİ DOĞRUSAL ÖNKESTİRİCİ

Çalışmanın 3.3.3.3 kısmında anlatılan karışık doğrusal modelin varsayımları altında, w ile gösterilen değişkeninin önkestirimi yapılmak istensin. y , $N \times 1$ boyutlu gözlem vektörü olmak üzere, $E(y) = X\beta$ ve $Var(y) = V$ olarak tanımlanmaktadır. w rastlantı değişkeninin beklenen değeri ve varyansı, $E(w) = \lambda'\beta$ ve $Var(w) = \sigma_w^2$ olsun. c_1 , herhangi bir sabit ve c_2 , sabitlerden oluşan bir vektör olarak tanımlansın. Gözlemlerin doğrusal kombinasyonu kullanılarak w 'nin önkestirimi yapılmak istensin. $c_1 + c_2' y$ kullanıldığında, hata kareler ortalaması aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} HKO(c_1, c_2) &= E(c_1 + c_2' y - w)^2 \\ &= Var(c_1 + c_2' y - w) + [E(c_1 + c_2' y - w)]^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$E(y) = X\beta$ ve $E(w) = \lambda'\beta$ bu eşitlikte yerleştirilip, c_1 'e göre türev alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_1} HKO(c_1, c_2) &= \frac{\partial}{\partial c_1} (c_1 + (c_2' X - \lambda')\beta)^2 \\ &= 2(c_1 + (c_2' X - \lambda')\beta) \end{aligned} \quad (2)$$

Yukarıdaki türev sıfıra eşitlendiğinde, $c_1^* = (\lambda' - c_2' X)\beta$ elde edilir. c_1^* , Eşitlik (1)'de yerine konulduğunda HKO,

$$\begin{aligned} HKO(c_1^*, c_2) &= E(c_2' (y - Ey) - (w - Ew))^2 \\ &= Var(c_2' y - w) = c_2' V c_2 + \sigma_w^2 - 2Cov(w, y) c_2 \end{aligned} \quad (3)$$

biçiminde elde edilir.

c_2 için en iyi seçimin bulunmasında Eşitlik (3)'ün c_2 'ye göre türevi alınır ve aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\frac{\partial}{\partial c_2} HKO(c_1^*, c_2) = 2Vc_2 - 2Cov(w, y)' \quad (4)$$

Eşitlik (4), sıfıra eşitlendiğinde $c_2^* = V^{-1} Cov(w, y)'$ elde edilir. Sonuç olarak, hata kareler ortalamasını en küçük yapan önkestirici aşağıdaki biçimde elde edilir,

$$c_1^* + c_2^* y = (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X)\beta + Cov(w, y)V^{-1}y \quad (5)$$

(Frees, 2004)

EK 3. EN İYİ DOĞRUSAL YANSIZ ÖNKESTİRİCİ

$w_{EDYÖ} = E(w) + Cov_{w,y} V^{-1} [y - E(y)] = \lambda' \beta + Cov_{w,y} V^{-1} (y - X\beta)$ eşitliğinde, $w_{EDYÖ}$ 'nin en iyi doğrusal yansız önkestiricisi olduğunu görmek için, c sabitlerden oluşan bir vektör olmak üzere, $w_{EDYÖ} + c'y$ biçimindeki diğer tüm doğrusal yansız önkestiriciler göz önüne alınsın. Yansızlık özelliğine göre, $E(c'y) = E(w) - E(w_{EDYÖ}) = 0$ özelliği sağlanmalıdır. Buna göre, $c'y$, sıfırın yansız kestiricisi olur. (Harville, 1976), bu özelliğin tüm olasılık dağılımları için geçerli olduğunu ve $E(c'y) = 0$ için gerek ve yeter koşulun $E(c'X) = 0$ olduğunu belirtmiştir.

Amaç, tüm c değerleri için, önkestirimde hata kareler ortalamasının minimize edilmesidir. Bu nedenle, $E(w_{EDYÖ} + c'y - w)^2$ göz önüne alınsın. Bu durumda kovaryans fonksiyonundan yararlanılabilir.

$$\begin{aligned}
 Cov(w_{EDYÖ} - w, c'y) &= Cov(w_{EDYÖ}, y)c - Cov(w, y)c \\
 &= Cov(w, y)V^{-1}Cov(y, y)c + (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X) \times \\
 &\quad Cov(b_{GEKK}, y)c - Cov(w, y)c \\
 &= Cov(w, y)c + (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X) \times \\
 &\quad (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Cov(y, y)c - Cov(w, y)c \\
 &= (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X)(X'V^{-1}X)^{-1}X'c \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Buna göre,

$$E(w_{EDYÖ} + c'y - w)^2 = Var(w_{EDYÖ} - w) + Var(c'y) \tag{2}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2), $c=0$ olması durumunda en küçük olmaktadır (Frees, 2004).

EK 4. EN İYİ DOĞRUSAL YANSIZ ÖNKESTİRİCİNİN VARYANSI

Öncelikle aşağıdaki eşitlik gösterilsin,

$$Cov(y, Cov(w, y)V^{-1}y - w) = Cov(y, y)V^{-1}Cov(w, y)' - Cov(y, w) = 0 \quad (1)$$

Bu eşitliğe göre,

$$\begin{aligned} Var(w_{EDYÖ} - w) &= Var\left((\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X)b_{GEKK} + Cov(w, y)V^{-1}y - w\right) \\ &= Var\left((\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X)b_{GEKK}\right) \\ &\quad + Var\left(Cov(w, y)V^{-1}y - w\right) \end{aligned} \quad (2)$$

elde edilir.

Eşitlik (2)'nin son terimi aşağıdaki gibi açılmaktadır,

$$\begin{aligned} Var\left(Cov(w, y)V^{-1}y - w\right) &= Var\left(Cov(w, y)V^{-1}y\right) + Var(w) \\ &\quad - 2Cov\left(Cov(w, y)V^{-1}y, w\right) \\ &= Cov(w, y)V^{-1}Cov(w, y)' + Var(w) \\ &\quad - 2Cov(w, y)V^{-1}Cov(y, w) \\ &= \sigma_w^2 - Cov(w, y)V^{-1}Cov(w, y)' \end{aligned} \quad (3)$$

Bu eşitliklerden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} Var(w_{EDYÖ} - w) &= (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X)(X'V^{-1}X)^{-1} \\ &\quad \times (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X)' \\ &\quad - Cov(w, y)V^{-1}Cov(w, y)' + \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (4)$$

eşitliği elde edilir.

EK 3.'ün (1). Eşitliğinden, $Cov(w_{EDYÖ} - w, w_{EDYÖ}) = 0$ elde edilmişti. Bu bilgiden yararlanılarak w rastlantı değişkeninin varyansı,

$$\sigma_w^2 = Var(w - w_{EDYÖ} + w_{EDYÖ}) = Var(w - w_{EDYÖ}) + Var(w_{EDYÖ})$$

biçiminde ifade edilir.

Eşitlik (4) kullanılarak, $w_{EDYÖ}$ 'nin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} Var(w_{EDYÖ}) &= \sigma_w^2 - Var(w - w_{EDYÖ}) = Cov(w, y)V^{-1}Cov(w, y)' \\ &\quad - (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X) \times (X'V^{-1}X)^{-1} (\lambda' - Cov(w, y)V^{-1}X)' \end{aligned} \quad (5)$$

(Frees, 2004)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aslıhan ŞENTÜRK

Doğum Yeri : Arhavi

Doğum Yılı : 1985

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise : 2000 -2003 Artvin Anadolu Lisesi

Lisans : 2003 -2007 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi : 2007 - ... H.Ü. Aktüerya Bilimleri Bölümü Araştırma Görevlisi