

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı
Ortaöğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalı

**TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK
KAVRAMLARININ ÖĞRETMEN VE ÖĞRETMEN
ADAYLARININ GÖRÜŞ VE PERFORMANSLARI
BAĞLAMINDA İNCELENMESİ: 0, 1 VE ∞ İLE
YAPILAN İŞLEMLER**

(Yüksek Lisans Tezi)

SİNAN AŞIK

İstanbul – 2010

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı
Ortaöğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalı

**TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK
KAVRAMLARININ ÖĞRETMEN VE ÖĞRETMEN
ADAYLARININ GÖRÜŞ VE PERFORMANSLARI
BAĞLAMINDA İNCELENMESİ: 0, 1 VE ∞ İLE
YAPILAN İŞLEMLER**

(Yüksek Lisans Tezi)

SİNAN AŞIK

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCE

İstanbul – 2010

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı
Ortaöğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Sinan AŞIK tarafından hazırlanan **TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK KAVRAMLARININ ÖĞRETMEN VE ÖĞRETMEN ADAYLARININ GÖRÜŞ VE PERFORMANSLARI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ: 0, 1 VE ∞ İLE YAPILAN İŞLEMLER** başlıklı bu çalışma, 19.08.2010 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmzalar

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCE



Jüri Üyesi: Yrd. Doç. Dr. Emin AYDIN



Jüri Üyesi: Doç. Dr. Ünsal TEKİR



ÖNSÖZ

“Matematik endüktif bir bilimdir ve bu endüktif bilim sonsuz kümeler için geçerli. Bu sonsuzlukları endüktif bir şekilde kavriyoruz ve kavradığımız zaman da sonsuzluğu hissediyoruz. Sınırsızlığı. Ve bu bize mutluluk veriyor; çünkü ölümü unutuyoruz... Herkes ölümsüz olduğunu hissettiği alanda çalışmak ister. Ben de matematikte kendimi ölümsüz hissettim...” CAHİT ARF

21. yüzyıl dünyasında matematik bilimi, birçok alanda gerekliliğini ve etkisini tüm canlılığıyla korumaktadır. Matematik biliminin bulgularına olan ihtiyaç, her geçen gün kendini göstermektedir. Bu bulguları değerlendirmenin yanı sıra bunları öğrencilerin anlayabileceği formata dönüştürüp öğrencilerin karşısına çıkarmak ise apayrı bir uğraş ve disiplindir. Matematik eğitiminin cevabını aradığı “Öğrenciler nasıl anlar? Matematiği nasıl algırlarlar? Şimdiye kadar geçirdikleri matematik yaşantıları, hangi inanışlara sahip olmalarını sağlamıştır? Nasıl öğrenirler?” gibi birtakım sorular vardır. Bu soruların cevabını integral, türev, limit, kümeler gibi belirli konulara odaklanarak aramak matematik öğretimi ve öğrenimi açısından pozitif sonuçlar vermektedir.

Tüm bu zorluklarla uğraşmanın getirdiği sıkıntılar, özellikle de uzmanları tarafından dahi bazı yönleri anlaşılammış “sonsuzluk”, “sıfıra bölme” yani genel olarak “0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemlerin” öğretiminde en üst seviyesine ulaşmaktadır. Bazen masumca söylenen yalanlar birtakım inanışlara, inanışlar ise zamanla gerçeklere dönüşür. Bu çalışmada, 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler ile ilgili gerçeklere dönüşmüş inanışları öznelliklerinden kurtararak onlara nesnel bir kimlik kazandırmak amaçlanmıştır.

Çalışmamda hep desteğini yanımda bulduğum ve kendisinden çok şey öğrendiğim değerli hocam ve tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCE'ye, ayrıca değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Emin AYDIN ve Doç. Dr. Ünsal TEKİR'e teşekkür ederim. Çalışmanın hazırlanış aşamasında ve sonrasında beni destekleyen eşim Elif AŞIK'a, her türlü manevi desteği sunan ve her zaman yanımda olan anneme, babama ve gerçek dostum, sevgili arkadaşım Yaşar TAYAKSİ'ye teşekkürlerimi sunuyorum.

Eylül 2010

Sinan AŞIK

ÖZET

TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK KAVRAMLARININ ÖĞRETMEN VE ÖĞRETMEN ADAYLARININ GÖRÜŞ VE PERFORMANSLARI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ: 0, 1 VE ∞ İLE YAPILAN İŞLEMLER

Sonsuzluk kavramının insanda ne tür düşünce çelişkileri oluşturduğu tarih boyunca pek çok branştan bilim adamının kafa yorduğu bir olgudur (Akt. Nesin, 2002). Matematik eğitimcilerinin kendi arasındaki görüş ayrılıklarının doğal bir yansıması olarak öğrencilerin sonsuzluk kavramı ve onun çeşitli durumlardaki kullanımlarına yükledikleri anlamlar da farklılık göstermektedir. Tartışmalar devam ederken bazı matematik eğitimcileri de bu çelişki ve farklılıkların öğrencilere ne derece yansıtılacağı konusunda kafa yormaktadır.

Bu araştırmada, 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler dikkate alınarak matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının inanışları ve uygulamalardaki performanslarının yanı sıra, aralarındaki farklı düşünce ve çelişkilere neden olabilen “tanımsızlık” ve “belirsizlik” kavramları da irdelenmeye çalışılmıştır.

Araştırma nitel yorumlayıcı paradigma’ya sahip özel durum çalışmasıdır. Bu bağlamda bir devlet üniversitesinin Matematik Öğretmenliği bölümünde okuyan 3. sınıf (29), 4. sınıf (25), ve 5. sınıf (23) öğretmen adayı ile, M.E.B.’da görev yapan (36) öğretmen çalışma grubunu oluşturmuştur. Veri bağlamında ağırlıklı olarak nitel olan bu çalışmada kullanılan araştırma teknikleri performans testleri, görüşmeler ve doküman analizidir. Öğrencilerin sonsuz, 1 ve 0’ın çeşitli durumlardaki ifadeleri hakkında düşüncelerini ölçmeye çalışan Performans Testi-1 ve limit performanslarını ölçen Performans Testi-2 uygulanmıştır. Her iki test de ortaöğretim matematik müfredatı ve analiz 1 dersinin içeriğine uygun olarak ve dersi veren lise öğretmenleri ve öğretim üyelerinin görüşleri alınarak hazırlanmış ve öğretmen ve öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemine uygun olarak farklı akademik başarı seviyesindeki 6 öğretmen ve 6 öğretmen adayı ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler olası veri kaybını en aza indirmek için kaydedilmiştir.

Araştırmada elde edilen nitel veriler sınıflandırma yöntemi ve betimsel istatistik teknikleri kullanılarak analiz edilmiş ve yorumlanmıştır.

Çalışma sonucunda elde edilen bulgular, Sonsuz, 1, 0, $\frac{1}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ve 1^∞ gibi çeşitli durumlardaki ifadelerini içeren Performans Testi-1’de öğretmen ve öğretmen adayların bu ifadeleri bazı durumlarda nesne bazı durumlarda süreç olarak gördükleri elde edilmiştir.

Limit bağlamında verilen Performans Testi-2’ de ise kuralsal anlamının gereği olarak daha önceden kalıp olarak uyguladıkları çözüm süreçlerini devreye sokmaya çalıştıkları çalışma sonuçlarından elde edilmiştir.

Limit başta olmak üzere ileri matematiğe geçişte önemli yeri olan ve öğrencilerin ayırt etmekte zorlandıkları “tanımsızlık” ve “belirsizlik” kavramları ve 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemlerde rastlanılan zorlukların belirlenmesi öğretmen ve öğretmen adaylarının etkinlikler yaparak kurallı anlamadan ilişkişel anlamaya geçmeye çalışması önerilmektedir. Benzer bir çalışmanın olmaması ilgili alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk, limit

ABSTRACT

AN INVESTIGATION TEACHERS AND TEACHERS CANDIDATES' THOUGHTS AND PERFORMANCES OF UNDEFINED AND INDETERMINATE CONCEPTS: OPERATIONS WITH 0, 1 AND ∞

Infinity is a concept that has been contradicting scientists for years (Nesin, 2002). As an expected reflection of the differences between scientists and mathematics educationist, students' concept of infinity and meaning of infinity loaded in different situations differs from each other individually as well.

In this study, the mathematics teachers and student teachers' beliefs and performance in answering questions as well as the different ideas and conflicts about the operations with 0, 1 and ∞ are investigated with the concepts of "division by zero", "undefined" and "indeterminate"

This study is a case study with qualitative paradigm and interpretivist approach. Participants of the study are 29, 25 and 23 students teachers from 3., 4. and 5. year of a state university respectively and, also, 36 teachers from state schools. It is a qualitative study based on the data. Performance Test-1 is applied in order to learn the ideas of students about different situations of 1 and 0; whereas Performance Test-2 is applied to measure the performances about limit concept. Every test is designed based on secondary school curriculum and the content of the analysis 1 lesson with the consideration of high school teachers and professors. Also they are applied to teachers and teacher candidates. Semi-structured interviews which are done by six teacher candidates and six teachers are recorded in order to decrease the risk of data loss. Qualitative information is classified and analyzed by using descriptive statistical techniques.

Teachers and teacher candidates has evaluated expressions like infinity; 1, 0, $\frac{1}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ and 1^∞ which are in Performance test-1 test sometimes as object and sometimes as process. Also they used the rules that they have used before in the Performance test-2 test which is about limit concept.

The concept of "undefined" and "indeterminate" and operations with 0, 1 and ∞ are firstly in limits and then in the topics in transition to advanced mathematics have essential places. Revealing the difficulties experienced in the questions these concepts needed to be used may help on deciding the activities to be used in the teaching and learning processes of these concepts. In these way it may be possible to understand these concepts relationally rather than instrumentally. Since there is no research conducted on "undefined" and "indeterminate" and operations with 0, 1 and ∞ , this study will be beneficial to the relevant literature.

KEY WORDS: undefined, indeterminate, limit, infinity

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	IV
İÇİNDEKİLER	VI
TABLolar	VIII
I. GİRİŞ	1
1.1. ÇALIŞMANIN ALTYAPISI	3
1.2. ARASTIRMA SORUSU	5
1.3. AMAÇ	6
1.4. ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ	7
1.5. SINIRLILIKLAR	9
1.6. SAYILTILAR	10
II. LİTERATÜR TARAMASI	11
2.1. SONSUZLUK KAVRAMI, “0”, “1” VE “∞” İLE YAPILAN İŞLEMLER	11
2.1.1. Sonsuzluk	11
2.1.2. “0”, “1” ve “∞” ile Yapılan İşlemler	12
2.2. MATEMATİĞİ ANLAMAK VE SEZGİSEL İNANIŞ	14
2.2.1. Sonsuzlukla ilgili öğrenci inanışları ile ilgili yapılan araştırmalar	17
2.2.2. Sıfıra bölme, tanımsızlık ve belirsizlik ile ilgili inanışlar ve kavram yanılgıları ile ilgili yapılan araştırmalar	19
2.2.2.1. Sıfıra Bölme	19
2.2.2.2. “Tanımsızlık” ve “Belirsizlik” durumları ile ilgili yapılan araştırmalar	20
2.3. TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK KAVRAMI	21
2.4. APOS TEORİSİ	22
2.4.1. Aksiyonlar (Actions)	23
2.4.2. Süreçler (Processes)	23
2.4.3. Nesnelere (Objects)	23
2.4.4. Şemalar (Schemas)	24
2.5. SEMİYOTİK PERSPEKTİFTEN MATEMATİKTE DİL VE SEMBOL KULLANIMI	24
2.6. PROCEPT KAVRAMI	26
2.7. DOKÜMANLARDA 0, 1, ∞, TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK	27
2.7.1. Orta Öğretim Programında	27
2.7.2. Orta Öğretim ve Lisans ders kitaplarında	28
III. YÖNTEM	32
3.1. ARAŞTIRMA MODELİ	33
3.1.1. Nicel Yaklaşımlar	36
3.1.2. Nitel Yaklaşımlar	36
3.2. ÇALIŞMA GRUBU	37
3.3. VERİ TOPLAMA ARAÇLARI VE UYGULAMALAR	38
3.3.1. Deneme Çalışmaları	39
3.3.2. Uygulama Süreci	39
3.3.2.1. Performans Testleri	40
3.3.2.1.1. Performans Testi-1(PT1)	40
3.3.2.1.2. Performans Testi-2 (PT2)	41
3.3.2.2. Görüşmeler	41

3.3.2.3. Doküman Analizi.....	43
3.4. VERİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ VE YORUMLANMASI.....	43
3.4.1. Performans Testlerinin Yorumlanması.....	44
3.4.1.1. Performans Testi-1.....	44
3.4.1.2. Performans Testi-2.....	45
3.4.1.3. Görüşmeler.....	46
3.4.2. Süreç Değerlendirmesi.....	46
3.5. GEÇERLİK ve GÜVENİRLİK.....	47
IV. BULGULAR.....	50
4.1. PERFORMANS TESTLERİ.....	50
4.1.1. Performans Testi-1.....	50
4.1.2. Performans Testi-2.....	57
4.1.3. PT1’de ki paralel soruların karşılaştırılması.....	59
4.1.4. PT1 ve PT2’deki paralel soruların karşılaştırılması.....	60
4.2. Süreç Analizi.....	62
4.2.1 Bazı Cevap Örnekleri.....	63
4.2.1.1. PT1’deki 1. ve 2. soruya ilişkin bulgular.....	63
4.2.1.2. PT2’deki 2.,3. ve 6. soruya ilişkin bulgular.....	64
4.3. MÜLAKATTAN ELDE EDİLEN VERİLERİN YORUMLANMASI.....	64
V. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER.....	83
5.1. TARTIŞMA.....	83
5.1.1. Performans testi–1 bulgularının tartışılması.....	83
5.1.2. Performans testi–2 bulgularının tartışılması.....	85
5.1.3. Performans testi–1 deki benzer soruların sonuçlarından elde edilen bulgularının tartışılması.....	86
5.1.3.1. PT1’deki soru 1,4 ve 6’nın karşılaştırılmasından elde edilen bulguların tartışması.....	87
5.1.3.2. PT1’deki soru 1 ve 6’nın karşılaştırılmasından elde edilen bulguların tartışması.....	87
5.1.4. Her iki testin karşılaştırılmasında elde edilen bulguların tartışması.....	88
5.2. SONUÇ.....	91
5.3. ÖNERİLER.....	92
KAYNAKLAR.....	95
EKLER.....	100
EK1: Performans Testi-1.....	100
EK2: Performans Testi-2.....	101
EK3: Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları.....	102
EK4: Değerlendirme Tabloları.....	103

TABLolar

Tablo 1 Çalışma Planı, Etkinlikler ve Ölçme Araçlarını Kullanma.....	38
Tablo 2 Performans Testi-1 soru analizi örneği.....	42
Tablo 3 Performans Testi-2 soru analizi örneği	43
Tablo 4 Görüşme analizi tablosu örneği.....	44
Tablo 5 Geçerlik ve Güvenirlik Konusunda Nicel ve Nitel Araştırma Kabul Gören Kavramların Karşılaştırılması.....	46
Tablo 6 Performans Testi-1 Genel değerlendirmeleri.....	49
Tablo 7 Performans Testi-2 Öğrenci ve Öğretmen Birleştirilmiş Sonuçlar...55	
Tablo 8 PT1'deki soru 1,4 ve 6'nın karşılaştırılması.....	57
Tablo 9 PT1'deki soru 1 ve 6'nın karşılaştırılması.....	58
Tablo 10 PT1'deki soru1'in ve PT2'deki soru2 ve soru5'ün karşılaştırması58	
Tablo 11 PT1'deki soru2'nin ve PT2'deki soru1/soru4'ün karşılaştırması...59	
Tablo 12 PT1'deki soru3'ün ve PT2'deki soru8'in karşılaştırması.....	59
Tablo 13 PT1'deki soru10'un ve PT2'deki soru3'ün karşılaştırması.....	60
Tablo 14 PT1'deki soru11'in ve PT2'deki soru6/soru7'nin karşılaştırması..60	
Tablo 15 Soru 1'e verilen cevaplara ait kategori.....	63
Tablo 16 Soru 2'ye verilen cevaplara ait kategori.....	65
Tablo 17 Soru 3'e verilen cevaplara ait kategori.....	66
Tablo 18 Soru 4'e verilen cevaplara ait kategori.....	68
Tablo 19 Soru 5'e verilen cevaplara ait kategori.....	70
Tablo 20 Soru 6'ya verilen cevaplara ait kategori.....	72
Tablo 21 Soru 7'ye verilen cevaplara ait kategori.....	75
Tablo 22 Soru 8'e verilen cevaplara ait kategori.....	76
Tablo 23 Soru 9'a verilen cevaplara ait kategori.....	77
Tablo 24 Soru 10'a verilen cevaplara ait kategori.....	78
Tablo 25 Soru 11'e verilen cevaplara ait kategori.....	79

I.GİRİŞ

Sonsuzluk, tarih boyunca pek çok matematikçinin, filozofun ve din adamının üzerinde en çok düşündüğü kavramlardan biridir. Zeno'un paradokslarından biri sonsuzluğun insanda ne tür düşünce çelişkileri oluşturduğunu göstermektedir: *“İki nokta arasındaki mesafeyi, sabit bir noktadan başlayarak ve her seferinde gittiği yolun yarısını giderek almayı deneyen birisi bunu uygulamalı olarak yaptığında çok çabuk olarak karşıya geçerken teorik olarak asla karşıya geçemeyeceğini bilir.”* (Fishbein, 2001).

Matematikçilerin sonsuzlukla ilgili düşünceleri de bu konudaki çeşitliliği ifade etmektedir. Örneğin; Gauss, sonsuzluğun matematiksel bir değer olmadığını, matematiksel bir konuşma biçimi olduğunu ifade etmiştir. Aristo'ya göre ise potansiyel ve fiili sonsuzluk olmak üzere iki tür sonsuzluk bulunmaktadır. Potansiyel sonsuzluk, devam eden bir süreci ifade ederken; fiili sonsuzluk ise Aristo'ya göre “anlamsız” sonsuzluğun bir bütün olarak algılanışını ifade eder. Buna göre sonsuzluğun “fiilen” var olduğunu söylemek çelişkilidir; sonsuzluktan ancak “potansiyel” anlamda bahsedilebilir. Mesela gece-gündüz dizisi düşünüldüğünde; her geceden sonra bir gündüz gelir, her gündüzden sonra da bir gece. Bu sürecin, ötesine geçemeyeceği bir sınır noktası yoktur, yani potansiyel olarak sonsuzdur. Ama bu sonsuz dizi hiçbir zaman “gerçekten” var olamaz: Geriye bakıldığında “Sonsuz sayıda gece geçti” denilebilecek bir zaman asla olmayacaktır (Burton, 2003; O'Connor ve Robertson, 2002). Moreno ve Waldegg, (1991) sonsuzluğu isim, sıfat ve zarf olarak yunan kültüründe tartışmışlardır. Cantor ise “sonsuz” un tek başına anlamlı olmadığını “sonsuz küme” biçiminde bölünmez bir terim olarak kullanıldığında sıfat olacağını savunmuştur. Ayrıca çeşitlerine göre pek çok farklı sonsuz küme olduğunu savunmuştur. Cantor'dan sonra da matematikçiler Aristocu ve Cantorian olmak üzere iki farklı düşünce sistemini benimser biçimde kendi aralarında ayrılmışlardır (Akt. Nesin, 2002).

Öte yandan sonsuzluk kavramından kaynaklanan zorlukların öğrencilere yansıtılıp yansıtılmayacağı, yansıtılacak ise ne derece yansıtılacağı matematik eğitimcileri

tarafından halen tartışılmaktadır. Sonsuz tartışılan, karmaşık, anlaşılması zor bir kavram iken sonsuzun kendisi, sıfır ve bir ile çeşitli şekillerde işleme girdiği durumların da anlaşılmasının zor olması beklenmektedir. “Sıfır ile bölünme durumu” ile ilgili yapılan araştırmalar öğrencilerin “net bir cevabın bulunamayacağı” ve “sonucun bir sayı olduğu” gibi farklı düşüncelere sahip olduklarını göstermektedir.

Sayıları sıfıra bölmeye $\frac{\infty}{0}$ gibi daha karmaşık bir yapı eklenince öğrenciler tarafından yorumlaması da güçleşebilmektedir. Ortaöğretim ve lisans seviyesinde okutulan matematik ders kitaplarında limit durumlarında karşılaşılan $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , $0 \cdot \infty$ ifadeleri “belirsizlik durumları” olarak geçmektedir. Bu ifadelerin, limit süreci sonunda fonksiyonların ulaşabildiği değerleri temsil etmek için birer araç olarak kullanıldığı söylenebilir. Bir belirsizlik durumu, matematiksel objenin diğer semiyotik gösterimler (grafik, limit, form) içinde sahip olduğu anlamları hakkında bilgiler taşır. Örneğin, $\frac{0}{0}$ formu; limitin varlığını ve limitin tanımlı olmadığı noktada fonksiyonun süreksizliğini gösterir (Moru, 2006).

Belirsizlik durumlarında karşılaşılan bu ifadelerin bazıları ile tanımsızlık durumlarında da karşılaşılmaktadır $\left(\frac{0}{0}, 0^0\right)$ gibi. Fakat tanımsızlık formu, belirsizlik olmayan durumlarda karşılaşılan bir formdur. Duval (1995), limit durumu dışında, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 - \infty$ gibi sıfır ve sonsuzun dahil olduğu ifadeleri matematiksel bir nesne olarak değil sadece durum bildirir “sembolik ifadeler” olarak ifade etmiştir. Bu durumdan Bölüm 2’de sembollerin rolünden ayrıntılı olarak bahsedilecektir.

Sonsuzluk kadar, tanımsızlık ve belirsizlik kavramları da tarihsel süreç içerisinde tartışılmalı kavramlar arasında yerini almıştır. Tanımsız ifadelerle ilgili zorluklar ve açmazlar, bu kavramları tanımlamaya çalışırken yani tanımlı olan durumlara dönüştürmeye çalışılırken ortaya çıkmıştır. Her ne kadar tanımsız olan

bazı değerler $\left(\frac{0}{0} = \varphi, 0^0 = 1\right)$, birtakım mühendislik hesaplarında bir sayı ya da değere eşit olarak kabul edilip kullanılsa da matematikte bu kadar bir uygulama alanı bulamamıştır (Anderson, 2009).

Ortaöğretim 12. sınıf öğrencilerine matematik dersinde limit konusu anlatılırken, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x}$ ifadesi için “ $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır” teşhisi konulup uygun yöntemlerle bu belirsizlik ortadan kaldırılarak limitin yakınsadığı değer (varsa) bulmaya çalıştırılır. Doküman analizi süreci sonunda, ne ders kitaplarında ne de müfredatta bu ifadelerin neden bir “belirsizlik durumu” oluşturduğu konusunda açıklayıcı bir bilgiye rastlanmamıştır (bkz: Bölüm 2.7.). Bunun yanında, öğrencilere $\infty + 1 = \infty$, $\infty - 1 = \infty$, $2 \cdot \infty = \infty$, $\frac{\infty}{2} = \infty$ gibi sonsuzun bir sayıyla olan toplamı, farkı, bölümü, çarpımı olarak sonucu açıkça yazılabilen işlemler verilirken aynı zamanda limit durumunda limiti alınan ifadenin sembolleşmesi olan $\left(\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty\right)$ gibi durumlara ise “belirsiz durumlar” denilmesi öğrencilerin kafasında bir çelişki oluşturmaktadır. Bu çelişkiler onları, $\left(\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty\right)$ gibi ifadelerin bir sonucu olduğu kavram yanılgısına sürüklemektedir (Ball, 1990; Blake & Verhille, 1985; Grouws & Reys 1975; Reys, 1974; Tsamir, 1996; Wheeler & Feghali, 1983: aktaran; Tirosh, 1999).

Bu çalışmada, öğretmen ve öğretmen adaylarının “sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik durumları ile ilgili karşılaştıkları güçlükler, çelişkiler ve kavram yanılgıları”; onlara, “limit durumundaki belirsizlik durumları” ve “limit durumu dışındaki sembolik ifadeler” verilerek tespit edilmeye çalışılmıştır.

1.1. ÇALIŞMANIN ALTYAPISI

Limit konusu içerisinde görülen rasyonel fonksiyonlar ve belirsiz formlar hakkında yapılan çalışmalara bakıldığında, genellikle lise seviyesindeki öğrencilerin

odaklanıldığını ve bu seviyedeki öğrencilerin büyük çoğunluğunun “*sonsuz, sıfıra bölme, fonksiyonun tanımsızlık noktası*” gibi pek çok nosyona ait kavram yanılgıları olduğunu tespit edildiğini gördük. Oysaki bu konuda yapılan çok az bir sayıdaki araştırmanın konunun bu boyutunu, kavram hatalarının temel bileşenlerinden biri olan Pedagojik (Öğreticiden kaynaklanan) etken bağlamında incelediğini fark ettik. Simon’un (1994), NCTM standartlarına uygun ders anlatan bir matematik öğretmenin yeterlilikleri arasında gösterdiği “*öğretmenin matematiğin doğası hakkındaki bilgisi*” bileşeni, araştırmayı bu bağlamda incelememizin bir gerekçesi niteliğine dönüştü.

Bu düşünceden hareketle öğretmen ve öğretmen adayları üzerine yaptığımız ön çalışmalarda gördük ki; öğrenciler limit durumlarında $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{\infty}$ vs. gibi “ifadeleri” (şimdilik bunlara ifade diyeceğiz) belirsizlik formlarında kavramsal bir bilgi olarak kullanıyorlar. Bu ifadeleri tek başlarına sorduğumuzda ise (limit olmadan) *tanımsız mı, belirsiz mi* olduklarını tam idrak edemediklerini keşfettik. Dolayısıyla belirsizlik ve tanımsızlığın nerede; 0,1 ve sonsuzla yapılan hangi işlemlerde ortaya çıktığının pek de iyi vurgulanmadığını gözlemledik. Bu da bizi bununla ilgili bir araştırmaya götürdü. Acaba öğrencilerin 1,0 ve sonsuzla yapılan işlemlerdeki yaklaşımları nelerdir? Ve limit performanslarını ne kadar etkiler?

Yapılan ön çalışmalarda öğrencilerin bu kavramları ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{\infty}$ vs.) limit durumlarında kendilerine öğretildiği gibi bir obje olarak mı öğreniyorlar, yoksa verilen bu objelerin neden tanımsızlık veya belirsizlik durumları oluşturduğunu bilerek mi öğreniyorlar veya algılıyorlar? Sorusunu düşünerek yaptığımız ön çalışmalarda öğrencilere bu kavramları tek başlarına vererek sorduğumuzda bu ifadelerin tanımsız mı belirsiz mi oldukları konusunda bir fikir belirtmek bir yana bu ifadeleri birer sayıymış gibi düşünerek işlem ve yorum yapmaya çalıştıklarını gözlemledik ($\frac{\infty}{\infty} = 1$, $\infty - \infty = 0$ gibi yorumlardan yola çıkarak). Şandır (2006);

öğretmen adayları üzerine yaptığı bir çalışmada, bu kavramların, kuralsal anlamının gereği olarak benzer şekillerde algılandığını ama öğretmen adaylarının sebep olarak farklı gerekçeler sunduklarını ortaya koymuştur. Yapılan ön çalışmada,

tanımsız/belirsiz kelimelerine ek olarak “saçma veya anlamsız” kelimelerini de kullandıklarını gözlemledik. Bu kavramları çok da bilerek kullanmadıklarını ortaya koyan cevaplar bizi bu araştırmaya sürüklemiştir. İlgili literatür incelendiğinde bu cevapları vermelerine sebep olan durumlardan bazılarının öğrencilerin sonsuzluk kavramıyla ilgili algılarının, sıfıra bölme konusundaki inanışlarının, ve bu konulardaki kavram yanlışlarının da etkisinin olduğu görülmüştür. Yapılan araştırmalarda ortaöğretim öğrencileri, öğretmen adayları ve öğretmenlerde, sıfıra bölümün sayısal bir cevabı olduğuna yönelik bir eğilim olduğu bulunmuştur (Ball, 1990; Blake & Verhille, 1985; Grouws & Reys 1975; Reys, 1974; Tsamir, 1996; Wheeler & Feghali, 1983: aktaran; Tirosh, 1999).

1.2. ARASTIRMA SORUSU

Bir bilimsel araştırmada vurgulanan en önemli noktalar araştırma sorusu ve bu soruya en uygun cevabı verecek yöntemin belirlenmesidir. Araştırma sorularının belirlenmesi, nicel çalışmalarda baştan kesin olarak beklenirken; birçok nitel çalışmada araştırma sorusu yazma süreci “geliştirme” ve “yeniden ifade etmeye” dayalı bir çalışma içerir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Araştırma sorusu, problem durumu ve çalışmanın amacını tanımlamalı ve elde edilecek olası veriler ile cevaplanabilecek nitelikte olmalıdır. Mevcut durumu olduğu gibi ortaya koymak (betimlemek), sebep-sonuç ilişkisini belirlemek, değişkenler arasındaki ilişkileri ölçmek, başkalarıyla karşılaştırmak, standartlara uygunluğunu kontrol etmek gibi farklı amaçlar dikkate alınarak araştırma sorusu belirlenebilir. Kısaca, araştırma sorusu, üzerinde durulan olgunun problem cümlesi haline getirilmiş şeklidir (Çepni, 2007). Araştırma sorusu, araştırmacı için yol haritası oluşturur ve araştırmacıya esneklik sağlayabilecek en genel ifadelerle, açık uçlu olarak belirlenir; daha sonra veri toplama ve değerlendirme sürecinde araştırmacı çalışmanın sorularını daha özel ve kapalı uçlu sorulara doğru indirgeyebilir. Bu çalışmanın odak noktası 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler ile tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının öğretmen ve öğrenci görüş ve performansları açısından incelenmesidir. Araştırmanın odak noktası öğrenciler, öğretmenler ve dokümanlar bağlamında üç kısımdan oluşan sorulara ayrılarak, araştırmanın amacına yönelik sorular oluşturulmuştur;

1. Öğrenciler bağlamında düşünüldüğünde
 - a- Öğrencilerin 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemlerde ki performansları ve görüşleri nelerdir?
 - b- Öğrencilerin tanımsızlık ve belirsizlik kavramları ile ilgili performansları ve görüşleri nelerdir?
 - c- Öğrencilerin 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler ile tanımsızlık ve belirsizlik kavramları hakkında ki kavram yanılgıları nelerdir?
2. Öğretmenler bağlamında düşünüldüğünde
 - a- Öğretmenlerin 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler ile tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarına yaklaşımları nelerdir?
 - b- Öğretmenlerin 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler ile tanımsızlık ve belirsizlik kavramları ile ilgili öğretim yaklaşımları nelerdir?
3. 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler ile tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının Matematik müfredatında ve ders kitaplarında ki yeri nedir?

1.3. AMAÇ

21. yüzyılda bilim ve teknolojiadaki hızlı ilerleme her alanda yeni bilgi, beceri, teknik ve teknolojik araçları gündeme getirmektedir. Bu nedenle matematiği bilen, anlayan ve yorumlayan insanlara gereksinim duyulmaktadır. Bilgiyi kullanıp yorumlayabilen, problem çözme ve muhakeme etme becerisine sahip bireylerin yetişmesini sağlamak matematik eğitimi araştırmalarının temel amaçlarından birisidir (Thomas, Mulligan ve Goldin, 2002).

Eğitim sistemleri, çağın gereksinimlerine paralel olarak kendisini sürekli canlı tutabilecek kararlılık ve güce sahip olabilmek için sürekli bir değişim ve gelişime ihtiyaç duymaktadır. Bu bağlamda ülkemizde de bu yenilikleri yakalama düşüncesiyle, 2004 yılında “geleneksel” bir eğitim modelinden “yapılandırmacı” eğitim modeline geçilmiştir. Geleneksel eğitim yaklaşımında amaç; yapılan plan, belirlenen hedefler -yani bir müfredata bağımlı olarak öğretmen merkezli anlayış

içinde- kalıplaşmış bilgiyi vermektir. “Yapılandırmacı” eğitim modelinde ise amaç; “geleneksel” eğitim modelinin aksine, öğrencinin pasif bir alıcı olmayıp, bilgiyi öznelletiren, içselleştiren ve kullanabilen bir duruma gelmesini sağlamaktır. Bu özelliklere sahip bireylerin yetişmesi de ancak bu bireylere öğrendiği bir kavramı doğru olarak kullanabilme ve bu kavramı, kavramın etkileşime girdiği diğer kavramlarla olan ilişkilerini sağlam bir şekilde yorumlayabilme yeteneğinin kazandırılmasıyla mümkündür (Skempt, 1978).

Bu çalışmanın amacı; bilgiyi öznelletirme, içselleştirme ve kullanabilme derecelerine göre başarıyı amaçlayan “yapılandırmacılık” anlayışa uygun olarak yetiştirilecek olan bireylerin, matematik eğitiminde genellikle üstünkörü anlatıldığı düşünülen “tanımsızlık, belirsizlik ve 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler” ile ilgili karşılaştıkları güçlükleri, çelişkileri ve kavram yanlışlarını tespit edip, bunları en aza indirmek için öneriler sunmaktır. Öğrencilerin yaşadıkları bu zorluklardan bazıları “sıfıra bölme”, “potansiyel ve gerçek sonsuzluk ikiliği”, “çok sayıda çelişkili yönleri için limit” gibi matematik didaktiğinde ortaya konulan ve güncel olan çok sayıda zorluğun kaynağı da olabilir.

1.4. ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ

Matematik eğitimi literatüründe “sıfıra bölme problemi” olarak incelenen problematik, ileriki konularda ilk kez rasyonel fonksiyonların tanım kümesi içinde fonksiyona paydasını sıfır yapan değer verilmesiyle tekrar kendisini gösterir ki bahsi geçen fonksiyon kavramı, matematik eğitiminde büyük önem taşıyan ve matematiğin hemen hemen her alanında (trigonometri, logaritma, karmaşık sayılar, limit vs.) kullanılan temel kavramlardan biridir (Eisenberg, 1991). Daha sonra, rasyonel fonksiyonların limitleri alınırken öğretilen “belirsiz formlar” konusunda, özellikle, limiti alınan fonksiyonun tanımsız olduğu değerler etrafında yapılandırılmasını ve burada “sıfıra bölme problemi” yanında “0” sayısının sonsuz ve 1 ile olan çeşitli durumlardaki işlemlerini ve sonsuzun, sonsuzla olan çeşitli durumlardaki işlemlerini de görmek mümkündür. Limit durumunda bir süreç içerisinde sembolleştirilen durumlar olan bu kavramlar öğrenciler tarafından gerek, merkezi sınavlarda (ÖSS) gerekse öğretmenin yaptığı yazılı sınavlarda sorulan -

özellikle belirsizlik formlarındaki- limit sorularının çözümü için gerekli birer araç olarak kullanılmaktadır.

Öğretmen ve öğretmen adayları; $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , $\infty - \infty$ gibi, ders kitaplarında, limit durumu dışında ayrı bir tanımı verilmeyen bu kavramlarla sadece limit durumlarında karşılaşmaktadırlar. Limit konusunu görmüş olan bir öğrenciye bu kavramlar direkt sorulduğunda bu kavramlara “belirsizlik” demesi şaşırtıcı bir durum değildir; çünkü öğrenciler genellikle bu kavramları kuralsal anlamının bir gereği olarak “nedensiz” bilmektedirler. Bu kavramları, limit sorusundaki belirsizlik durumunun kategorilerinden birisini ifade eden birer kavram olarak görmektedirler. Hatta kimi öğrencilerin bu kavramların sayısal bir cevabı olduğuna yönelik kuvvetli inanışları olduğu yapılan araştırmalarda bulunan sonuçlardandır (Tirosh, 1999). Hatta $\frac{\infty}{\infty}$ ifadesine “belirsizlik” cevabını vermiş iki farklı öğrencinin bağlamları farklı olabilir. Mesela birisi limit durumunda gördüğü belirsizlik durumu sebebiyle belirsizlik demiş olup, diğeri ise birbirine bölünmüş iki kavramın sonucunun belirsiz olacağı düşüncesiyle belirsiz demiş olabilir. Ya da bunlardan daha başka nedenleri olabilir.

Öğrencilerin, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ifadesini irdelemeleri istendiğinde, $\frac{1}{0} = \infty$ cevabını veren bir

öğrenci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ifadesini $\frac{1}{0}$ ifadesine sembolleştirdiği bir nesne olarak mı

görecektir? Yoksa $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktası etrafındaki davranışını

zihninde bu fonksiyonun grafiğini canlandırarak; x , sıfıra gitme eğiliminde iken, fonksiyonun sonsuza gittiğini düşündüğü bir süreç olarak mı görecektir? Dolayısıyla

görülüyor ki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ifadesinde ortaya çıkan $\frac{1}{0}$ durumu için bir süreç veya nesne

olarak görmeye bağlı olarak farklılaşan öğrenci yorumları, $\frac{1}{0}$ kavramının limit

durumu dışında direkt verilmesiyle iyice karmaşık bir hale gelebilmektedir.

“Belirsizlik” kavramı limitte ortaya çıkan bir kavramdır. Limit kavramı ise bir süreci

ifade etmektedir. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$ ifadesini limit bağlamında düşünen bir öğrencinin

sonuca ulaşmada süreci düşünmesi anlamlı olacaktır. Bu çalışmada hedef; öğrencinin, bilişsel becerilerini de uyararak tanımsızlık ve belirsizliği önce kelime anlamında sonra $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , $\infty - \infty$ gibi semiyotik anlamda anlamlandırarak -hangi durumlarda tanımsızlık, hangi durumlarda belirsizlik var -kavramalarını sağlamaktır.

Bu çalışma; “öğretmen ve öğretmen adaylarının bu kavramlar hakkındaki karşılaştıkları zorlukları belirleyerek, hem kendileri için hem de öğrencilerine anlatırken ilişkisel anlamayı gerçekleştirmeleri, süreç-nesne arasındaki ilişkiyi de eğitim öğretim sürecinde iyi derecede yansıtabilmelerini hedeflemesi” bağlamında önem taşımaktadır. Ayrıca, matematik eğitimi çalışmalarında tanımsızlık ve belirsizlik ile ilgili yapılmış herhangi bir çalışmaya neredeyse rastlanmaması bu çalışmaya ayrı bir önem kazandırmaktadır.

1.5. SINIRLILIKLAR

Araştırma boyunca katılımcılardan yapmaları istenilen performans testleri, içerdiği sorular itibariyle, katılımcılara yöneltilen soruların, zor olduğuna ve net çözümlerinin olmadığına veya sayısal bir sonucunun olduğuna kendilerini ikna etmiş olmaları, sorular hakkında ayrıntılı yorum yapmalarını engelleyen bir etken oluşturmuştur. Tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının öğretmen ve öğretmen adaylarının görüş ve performansları bağlamında incelenmesi ve 0,1 ve sonsuzla yapılan çeşitli işlemlerin irdelenmesi olan bu araştırma; kullanılan veri toplama yöntem ve teknikleriyle sınırlı kalmaktadır.

Çözüm sürecinin değerlendirilmesi, performans testinde ölçülmeye çalışılan becerilerle sınırlıdır.

Yapıldığı yer ve zaman itibariyle düşünüldüğünde; çalışmanın katılımcıları; 2007-2008 eğitim öğretim yılında Marmara üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik öğretmenliği bölümünde okuyan 3. sınıf (29), 4. sınıf (25), ve 5. sınıf (23) öğretmen adayı ile M.E. B.’da görev yapan (36) öğretmen olmak

üzere toplam 113 kişiden oluşturmaktadır. Süre açısından 2008-2009 eğitim-öğretim yılının 2. dönemi ile sınırlıdır.

1.6. SAYILTILAR

1. Araştırmaya katılan tüm öğretmen ve öğretmen adaylarının soruları içtenlikle ve objektif olarak cevapladıkları kabul edilmektedir.
2. Araştırma kapsamına alınan örneklem sayısının yeterli olduğu kabul edilmiştir.
3. Kullanılan ölçme araçları, ölçtükleri özellikler bakımından geçerli ve güvenilirlerdir.
4. Çalışma süresince araştırmacı önyargıyla hareket etmeyecektir.
5. Uygulama sürecinde katılımcılar arasında olumlu ya da olumsuz etkileşim olmayacaktır.

II. LİTERATÜR TARAMASI

Bu kısımda, yaptığımız çalışma ile ilgili literatür sırasıyla şu başlıklar altında incelenecektir; *“dokümanlarda 0, 1, ∞ , tanımsızlık ve belirsizlik”*, *“procept kavramı”*, *“semiyotik perspektiften matematikte dil ve sembol kullanımı”*, *“aposteorisi”*, *“tanımsızlık”* ve *“belirsizlik” kavramı*, *“matematiği anlamak ve sezgisel inaniş”* ve *“sonsuzluk kavramı, “0”, “1” ve “ ∞ ” ile yapılan işlemler”*

2.1. SONSUZLUK KAVRAMI, “0”, “1” VE “ ∞ ” İLE YAPILAN İŞLEMLER

Bu bölümde, tarih boyunca birçok tartışmaya konu olmuş olan “sonsuzluk” kavramından ve bu kavramın 1 ve 0 ile olan işlem kombinasyonlarından bahsedilecektir.

2.1.1. Sonsuzluk

Sonsuzluk; tarih boyunca pek çok alandan bilim adamının üzerinde düşünüp tartıştığı bir kavramdır. “Sonsuz; sayılamayacak kadar büyük bir sayı mıdır? Bir sıfat mıdır? Gidilen bir yer ismi midir? Bir isim midir?” gibi soruları içeren tartışmalar bu sorularla da sınırlı kalmamıştır. Hatta sonsuz kavramının tanımı kadar varlığı da tartışmalara konu olmuştur. Zeno, Aristo, Gauss, Cantor ve daha ismini ekleyebileceğimiz birçok matematikçi de bu tartışmalara katılmıştır(Matematikçilerin tartışmaları çalışmanın “Giriş” kısmında genel çerçevelerle verilmiştir). Matematik eğitimcilerinin tartışmaları ise daha çok “sonsuzluk kavramının tartışılan bu açmazlarının öğrencilere ne derecede yansıtılacağı” ve “yansıtılacak olan kısmının nasıl aktarılacağı” konusunda olmuştur.

Çalışmanın bu kısmında daha çok matematiksel anlamda kullanılan “sonsuzluk” kavramı üzerinde durulacaktır. Literatür incelendiğinde matematiksel olarak sonsuzluk; bir sayı değildir, gidilen bir yer ismi de değildir. Gauss’un ifadesiyle sayısal bir değerden ziyade bir konuşma biçimidir (akt. Burton, 2003). Nesin (2002), görevsel olarak bu konuşma biçimini Cantorian düşünceyi temel alarak “nitem” olarak değerlendirmiştir. Yani, “sonsuz küme” ifadesinde kullanılan “sonsuz”

kelimesi kümenin elemanlarının bir özelliğini nitelemektedir. Yani “sonsuz” bir kavramı ifade etmektedir. Bir kavram olan sonsuzun çeşitli durumlardaki işlemlerinin onun bir kavram olmasından ziyade bir nicelik olarak görülmesine yol açtığı söylenilebilir. $n \rightarrow \infty$ “n, sonsuza giderken” tabiri ise sonsuzun bir yer ismi olarak anlaşılmasına sebep olacaktır (Sonsuzla ilgili kavram yanlışları bölümünde bunlardan ayrıntılı olarak bahsedilecektir).

2.1.2. “0”, “1” ve “ ∞ ” ile Yapılan İşlemler

Bu kısımda, öğrencilerin öğrenim yaşamları boyunca karşılaşılabilecekleri 0,1 ve sonsuzun çeşitli durumlardaki işlemleri üzerinde durulacaktır. Aşağıda da verilen bu işlemler çeşitli ortaöğretim ve lisans matematik ders kitaplarından derlenmiş olup özellikle “tanımsız” ya da “belirsiz” olma durumları vurgulananlar belirtilmiştir.

Sıfıra bölme $\left(\frac{b}{0}, b \neq 0\right)$:

$b \neq 0$ olmak üzere $\frac{b}{0}$ ifadesinde ortaya çıkan durumdur ya da farklı bir tanımlamayla $\frac{b}{0}$; 0 ile çarpıldığında b’yi veren sayıdır. Öklidyen bölme algoritmasına uymayan bu durum “bölme işlemi” bağlamında “tanımsız” olarak ifade edilmektedir (Tirosh, 1999; Silverman, 1985).

Sıfır bölü sıfır $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$\frac{b}{0}$ şeklindeki ifadenin $b=0$ olan özel halidir. Öklidyen bölme algoritmasına uymayan bu durum da “bölme işlemi” bağlamında “tanımsız” olarak ifade edilmektedir (Tirosh, 1999). Bu haliyle anlamsız bir ifadedir (Murray & Charles, 1977). Limit bağlamında ise belirsizlik türlerinden biri olan anlamsız bir ifadedir (Thomas & Finney, 1986).

Sonsuz bölü sonsuz $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

Limit durumlarındaki karşılaşılan belirsiz formlardan birisidir (Thomas & Finney, 1986). Limit bağlamında anlamlı olan bu ifade, limiti alınan fonksiyonun ulaştığı değerleri temsil etmektedir.

Sonsuz eksi sonsuz $(\infty - \infty)$:

Limit durumlarındaki karşılaşılan belirsiz formlardan birisidir (Thomas & Finney, 1986). Limit bağlamında anlamlı olan bu ifade, limiti alınan fonksiyonun ulaştığı değerleri temsil etmektedir.

Bir üzeri sonsuz (1^∞) :

Limit durumlarında karşılaşılan bir “belirsizlik” türüdür. Limit bağlamında anlamlı olan bu ifade, limiti alınan fonksiyonun ulaştığı değerleri temsil etmektedir. Limit bağlamı dışında “1.1.1...” ifadesi ile de gösterilmektedir. “Sonsuz çarpım” kavramı ancak limitle anlam kazandığı için bu tür bir yazım “limit” durumu dışında anlamlı değildir.

Sıfır üzeri sıfır (0^0) :

Üslü ifade tanımına uymayan bu durum “tanımsız” olarak nitelendirilmektedir. Limit bağlamında ise $x; a$ 'ya gitme eğiliminde iken $f(x)^{g(x)}$ fonksiyonunun ulaştığı değerleri temsil etmektedir.

Sonsuz üzeri sonsuz (∞^∞) :

Limit bağlamında anlamlı olan bu ifade, limiti alınan fonksiyonun ulaştığı değerleri temsil etmektedir. Sonsuza giden bir fonksiyonun sonsuz kuvvetini almak fonksiyonu yine sonsuza götürür.

Sıfır çarpı sonsuz $(0 \cdot \infty)$:

Limit durumunda karşılaşılan bir belirsizlik durumudur (Thomas & Finney, 1986).

Sonsuz bölü sıfır $\left(\frac{\infty}{0}\right)$:

Sonsuz bir sayı olmadığı için limit bağlamında düşünülen bir ifadedir. x ; a 'ya gitme eğiliminde iken $\frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonunun ulaştığı değerdir.

Örnekler çoğaltılabilir. Duval (1995), limit durumu dışında, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 - \infty$ gibi sonsuzun kendisi, sıfır ve 1 ile olan ifadelerini matematiksel bir nesne olarak değil, sadece “durum bildirir sembolik ifadeler” olarak ifade etmiştir.

2.2. MATEMATİĞİ ANLAMAK VE SEZGİSEL İNANIŞ

İlişkisel açıdan zengin, içerik olarak doğru bilgi kavramsal bilginin en temel özelliğidir. İçerik açıdan doğru bilgi; bir matematik kavramın esasını ve o kavramla ilgili temel özelliklerini bilmesi demektir. Bu, kavramsal anlama için yeterli değildir. Kavramsal anlama için asıl matematiksel zenginlik; kavramın başka kavramlarla ilişkilendirilmesinde ortaya çıkar. Bu ise kalıcı öğrenmelere açılan bir kapı niteliğindedir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Skempt'e (1978) göre matematiği anlamanın iki temel yapısı vardır. Bunlar: “kuralsal anlama ile ilişkisel anlama”dır. Kuralsal anlamada, kuralların “nedensiz bilinmesi” önemliyken, ilişkisel anlamada kavramın “anlamı ve anlamın kendi içyapısındaki oluşumlarının çok iyi bilinmesi yanında ne yapılacağı ve niçin yapılacağı da bilinmesi”nin önemli olduğu anlamadır. Eğer kavram öğretilirken ilişkilendirilmezse öğrencinin ilerleyen öğrenmelerinde bu kavramla ilgili çeşitli güçlükler ve buna bağlı hatalar ortaya çıkmaktadır.

Bireysel farklılıklar da göz önüne alındığında, Tall ve Vinner'ın (1981) ifade ettiği “kavram imajı”; yani bir kavramla ilgili zihindeki bütün zihinsel görüntüler, özellikler ve oluşumlar öğrenciden öğrenciye farklılık gösterecektir. Bu farklılıklar bir yönüyle aynı zamanda bireysel farklılıkları da besleyecektir. Sonraki öğreneceği bilgiyi önceki öğrendiği bilgi ile yapılandırma eğiliminde olan bir öğrenci, bilgi içerisine kavramla ilgili kendi kavram imajını ve önbilgilerini de katınca ortaya

birbirinden farklı birçok yeni kavramsal yapılar çıkacaktır. Bu yapıların kimisi istenilen düzeyde iken kimisi de yanılı niteliğinde olacaktır (Mayer vd., 1987). Asubel'e (1960) anlamlı öğrenme için bireyin bilgiyi kendisinin yapılandırmasını savunurken, Skempt'e (1978) göre ise bu yapılandırma, ilişkisel anlamanın bir gereği olarak iyi organize edilmelidir. Şu halde, öğrencinin, bilgiyi yapılandırırken kavramla ilgili mevcut zenginliğini, kavrama farklı bakış açıları oluşturmak ve bu yapılar arasındaki ilişkileri organize etmek için kullanması sağlam bir ilişkisel anlama için önemlidir.

Öğrencilerdeki bu farklılıkların en temel besleyicilerinden birisi de öğrencilerin kavramlar hakkındaki sezgisel inanışlarıdır. Fishbein'e (1987) göre bilişsel inanışların özel bir tipi olan sezgisel inanışlar, gözlenebilen gerçeklerin ötesinde olan (gözlenemeyen) ifadeler ve kararlardır. Bu yüzden "sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik, sıfıra bölme" gibi kavramların sezgisel olarak ele alındığı araştırmalara kuşku ile bakılmalıdır (Fisbein, 1979). Ayrıca bir öğrenci farklı bir sezgisel inanışa sahipse bile bunu apaçık ortaya çıkarmak için öğrencinin kullandığı dili iyi bilip o dille etkileşime geçmek gereklidir (Monaghan, 2001). Sorulan sorunun öğrencide bir anlam ifade edip etmediğinin bilgisi bu anlamda önemlidir. Yani araştırmacı kullandığı dil ile öğrencinin dili arasında birebir bir dönüşümü sağlayabildi mi? Acaba öğrenci kendisine sorulan soruyu anlayabilmek için gerekli ön bilgiye sahip mi? Bu ön bilgiye sahipse bile düşüncelerini ifade edebilecek kadar araştırmacının dilinden ifade edebilecek mi? gibi sorular Fisbein'in (1979) kuşkuculuğunu haklı çıkarmaktadır. Örneğin; Tsamir ve arkadaşlarının (Tsamir & Tirosh, 1999; Tsamir & Drefyus, 2002) lise ve üniversite düzeyinde yaptıkları bir çalışmada öğrencilere $\{1,2,3,4,\dots\}$ ve $\{14,9,16,\dots\}$ kümelerini yan yana vermiş ve bu kümeleri eleman sayıları bakımından karşılaştırmalarını istemiştir. Çoğu öğrenci ikinci kümenin ilk kümenin bir alt kümesi olduğunu ve ilk kümenin ikinci kümeyle göre daha fazla elemana sahip olduğunu söylemişler. Kümelerin gösterimi değiştirilip soru şu şekilde tekrar sorulduğunda, yani; " $\{1,2,3,4,\dots\}$ ve $\{1^2,2^2,3^2,4^2,\dots\}$ kümelerini eleman sayıları bakımından karşılaştırın". Bu sefer bu iki kümenin eleman sayılarının eşit olduğunu düşünen öğrenci sayısında artış gözlenmiştir. Daha sonrasında ikinci küme

geometrik olarak ifade edildiğinde soru tekrar sorulduğunda bu oran daha da artmıştır.

Bunun yanında bazı teknik bağlamlar kendi terminolojilerini doğal dil ile paylaşmaktadırlar. Bu tür kavramlar teknik bağlamla kullanıldığında öğrencinin kastedilen şeye başka anlam yüklemesi mümkündür. Örneğin, “limit” kelimesi günlük yaşamda “sınır”, “bitiş noktası” gibi anlamlarda kullanılırken matematiksel bir bağlamda kullanıldığında daha farklı bir anlama sahip olmaktadır (Frid, 2004).

“Sezgisel inanış” kavramı bir bütünün parçası gibi düşünüldüğünde, bilimsel bilginin gelişimindeki gecikmenin asıl nedeni “epistemolojik engel” teriminde verilmektedir. Bu terim pek çok araştırmacıya göre farklı tanımlaması yapılmıştır. Bu tanımlamalardaki alt başlıklar ise kimi araştırmacıya göre kesişen özellikte kimine göre ise birbirinden kesin çizgilerle ayrılabilen özelliktedirler. Bu araştırmada ise “epistemolojik engel” terimi, edinilecek bilgideki durgunluğun herhangi bir nedeni anlamında kullanılacaktır. “Sezgisel inanış” kavramı ise, Cornu’nun (1991) ortaya attığı 5 tip epistemolojik engelden biri olan “bilişsel engeller” alt başlığı altında ele alınmıştır; fakat Tall (1989) ve Herscovics “epistemolojik engel” yerine “bilişsel engel” terimini tercih etmiştir. Örneğin; sayma sayıları ile çarpma yapmayı öğrenen bir öğrencinin sayıların birbiriyle çarpıldığında sonucun artacağı yönündeki eğiliminin kesirlerle çarpma konusunda bir engel teşkil etmesi bilişsel bir engeldir.

“Sezgisel inanış” kavramını ilk kez ortaya atan Fishbein’a (1987) göre “Birinci türden sezgiler” ve “ikinci türden sezgiler” olmak üzere iki türlü sezgisel bilgi vardır. Birinci türden sezgiler, öğrencilerin deneyimleri ve çevre ile etkileşimleri sonucu informal olarak ortaya çıkan sezgilerdir. İkinci türden sezgiler ise formal olarak; yani öğretim süreci içerisinde öğretim sürecinin etkisiyle ortaya çıkan sezgilerdir. Bir kavram veya süreçle ilgili oluşan ikinci türden sezgiler genellikle birinci türden sezgilerle farklılık göstermektedir. Sonsuzlukta iki tür sezgiye de örnekler varken bunların net durumu tanımsızlık ve belirsizlikte bulunmamaktadır. Tanımsızlık ve belirsizlikle ilgili günlük hayat karşılıkları da çoğu zaman sembollerin gerçek anlamlarını karşılayamamaktadır. Örneğin $1/0$ durumu için “belirsiz” diyen birisi

muhtemelen buradaki belirsiz kelimesini “ortada kalmış, kimse yorum yapamıyor” gibi bir anlama asimile etmiştir. Oysa 1/0 formunu karşılayan kelime tam olarak “tanımsız” olmalıdır.

2.2.1. Sonsuzlukla ilgili öğrenci inanışları ile ilgili yapılan araştırmalar

Sonsuzluk, matematikçiler için ilham veren fakat zor bir kavram olmuştur. Sonsuzluğun doğası gereği sahip olduğu açmazlar öğrencilerde birtakım inanışlara sebep olmuştur. Farklı yaş grubundaki öğrencilerle yapılan araştırmalar; Fishbein’e (1979) göre kuşkucu bir bakışla değerlendirilmelidir. Çünkü sonsuzluğu sezgi ile anlamak değişkendir. Bu araştırmaların sınırlılıkları arasında yatan en önemli nedenlerden bir diğeri ise sonsuzlukla ilgili öğrencilere sorulan soruların öğrencilerde bir anlam ifade edip etmediğinin net olarak bilinmemesidir (Monaghan, 2001). Yalnızca bu durum dahi Fishbein’in haklılığını kanıtlamaktadır.

Öğrencilerin kendi deneyimleri sonucu informal olarak edindikleri sezgiler olan birinci türden sezgiler, sonsuz (luk) kavramının oluşturulmasında bir takım problemler ortaya çıkarmaktadır. Çocukların sonsuzluk kavramından ne anladıklarına dair yapılan ilk çalışmalardan birisi olarak kabul edilen Piaget ve İnhelder’in (1956) araştırmasına göre işlemsel dönemdeki bir çocuğun, bir şeklin limitinin bir nokta olduğunu hayal edebileceği iddia edilmektedir. Çocuğun temel geometrik anlayışının ilk olarak topolojik olduğunu, sonrasında projektif, son olarak da öklidyen olduğu iddia edilmiştir.

Birinci türden sezgilere örnek olarak verilebilecek çalışmalardan bir diğeri ise Singer ve Voica’nın (2003) , yaşları 10-14 olan ilköğretim düzeyindeki öğrencilere sonsuzu kendi kelimeleriyle anlatmalarını istedikleri çalışmalarıdır. Çalışmanın sonucunda çok çeşitli cevaplara ulaşılmıştır. Bu cevaplardan, öğrencilerin sonsuzu, “sürekli artan”, “çok büyük”, “sınırsız” ve “sayılabilen” ve “sürekli değişen” bir kavram olarak gördükleri sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilere göre, bu özellikler dışındaki bir kavram sonsuz olamaz.

Monaghan (1986), 16-18 yaş seviyesindeki İngilizce öğrencilerine “limit ve sonsuzluktan ne anladıkları” nı sorduğu araştırmasında; öğrencilerin sonsuzluğa dair öncelikli odaklarının sonsuzu “bir süreç” olarak algılamalarını ve “sürekli devam ediyor” şeklinde algıladıkları sonucuna ulaştı.

Monaghan’ın (2001) bir başka araştırmasında, öğrencilerin “sonsuzcu muhakeme” ve “sonlucu muhakeme” şeklinde iki farklı genel düşünceye ayrıldıkları sonucuna ulaşmıştır. Sonsuzcu muhakeme; bir işlemin sonsuza kadar devam edilebilirliğini savunurken sonlucu muhakeme; parçalanmış bir doğrunun parçalarının toplamının doğruyu geçemeyeceğini savunur. Sonlucu muhakeme irdelendiğinde öğrencilerin ikincil sezgilerinin sonsuz(luk) kavramının öğrenilmesinde engel teşkil ettiği görülmektedir. Örneğin, öğrencilerin (10-14 yaş düzeyindeki), 2-5 aralığının sonsuz sayıda noktadan oluştuğunu kabul etmelerindeki zorluk onların sonlucu muhakemelerinden kaynaklanmaktadır (Singer&Voica, 2003). Fishbein, Tirosh ve Hess (1979), bir sayı dizisinin arka arkaya ikiye (yarıya) bölünmesi suretiyle sonsuza kadar bölmelere ayrılmasından ne anladıklarını araştırmış ve 5-9 yaş seviyesindeki öğrencilerin sonsuzluk kavramıyla ilgili sorularda sonlu olmayan ya da sonsuz olan bir görüşten ziyade sonlu olan bir görüşte olduklarını bulgusuna ulaşmışlardır.

Hatta üniversite düzeyinde bile, reel sayıların sonsuzluğu kavramı, bütün öğrenciler için açık seçik değildir (cf. Merenluoto & pehkonen 2002). Örneğin Wheeler (1987), üniversite öğrencilerinin 0,9999... ile 1 arasında ayırımı bulduklarını söylemektedir.

Sonsuzluğu süreç-obje ikiliği açısından ele alan Gray ve Tall(1994), Dubinsky (1991) ve Sfard (1981) in çalışmaları daha çok öğrencilerin sonsuzu bir obje olarak mı yoksa bir süreç olarak mı ele aldıkları üzerinde yoğunlaşmıştır. Örneğin 1,2,3,... ifadesini tek bir küme olarak gören öğrencilerin sonsuzu bir obje olarak ele aldıklarını, 1,2,3,... deki “...” için de, bu sayı dizisinin sürekli devam ediyor olduğunu söylemeleri sonsuzu bir süreç olarak gördüklerini kanıtladığı sonucuna ulaşmışlardır.

Sonsuz küçük ve sonsuz büyük kavramlarıyla ilgili de birçok araştırma bulunmaktadır. Fakat çalışmanın odağı göz önüne alındığında bu çalışmalardan bu bölümde bahsedilmeyecektir.

2.2.2. Sıfıra bölme, tanımsızlık ve belirsizlik ile ilgili inanışlar ve kavram yanılgıları ile ilgili yapılan araştırmalar

2.2.2.1. Sıfıra Bölme

Sıfıra bölme genellikle öğrencilerin okuldaki çalışmaları esnasında karşılaştığı ilk tanımsız matematiksel işlemdir. Okula gittikleri ilk yıllardan itibaren pek çok öğrencinin matematiksel tecrübesi başlıca işlemleri yapmaktan ve nümerik çözümlere ulaşmaktan ibarettir. Fishbein'in (1987) nümerik cevap inanışı, sıfıra bölmenin nümerik bir cevabının olduğu eğiliminde, ilköğretim ve lise öğrencileri ile öğretmen ve öğretmen adayları arasında yapılan araştırmalarla ortaya konulmuştur (Ball, 1990; Blake & Verhille, 1985; Grouws & Reys 1975; Reys, 1974; Tsamir, 1996; Wheeler & Feghali, 1983; aktaran; Tirosh, 1999).

Yapılan araştırmalarda elde edilen veriler değerlendirildiğinde öğrencilerin sıfıra bölme ($b/0$; b sıfırdan farklı olmak üzere) ile ilgili cevapları aşağıdaki başlıklar altında kategorilendirilmiştir:

1. Bölmenin tanımının çarpmanın tersi olduğu şeklindeki tanıma güvenme.
2. Sıfırın "hiçlik" anlamına asimile edilmiş bir cevap olarak sonuca "hiçlik" anlamında "sıfır" deme.
3. Limit bağlamında düşünerek (örneğin; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ gibi) sonuca "sonsuz" deme yani limitin sonucunun sonsuza ıraksadığını düşünme.
4. Sıfırın "hiçlik" anlamı ile "belirsiz" kelimesinin anlamlarını benzeştirerek sonuca "belirsiz" deme.
5. $1/x$ fonksiyonunu düşünüp $x=0$ da fonksiyonun bir noktada ($x=0$) süreksizliğini deme.

6. Limit bağlamında düşünerek (örneğin $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ gibi) sonucun asla bir değere ulaşmadığı durumuyla “belirsiz” kelimesini benzeştirerek cevaba “belirsiz” deme.
 7. Sıfıra bölme hiçbir zaman gerçekleşemez; çünkü “bu imkânsız bir şeydir” deme.
 8. $1/x$ fonksiyonunu düşünüp; $b/0$ (b sıfırdan farklı olmak üzere) belirsizdir; çünkü “fonksiyon, tanımlı olmadığı bir noktada değerlendirildiğinde mevcut değildir.” deme.
- (Maurice, 2000).

2.2.2.2. “Tanımsızlık” ve “Belirsizlik” durumları ile ilgili yapılan araştırmalar

Bu konuda yapılmış araştırmalar, genellikle “limit” kavramı bağlamında belirsizlik durumlarının incelendiği ve limit durumları dışında “sıfıra bölme”, “sıfırın sıfıra bölümü” gibi tanımsız durumlar hakkında öğrencilerin, öğretmen ya da öğretmen adaylarının mevcut düşünce ve hatalarının irdelendiği çalışmalardır. Limit ve sonsuzlukla ilgili öğrencilerin kavram ve anlama hatalarının incelendiği çalışmalar dışında az sayıda araştırma bu konuyu odağına almıştır.

Maurice’in (2000) kolej seviyesindeki 10 öğrenciye limit bağlamında rasyonel fonksiyonlar ve belirsiz formlar hakkındaki düşüncelerini sorduğu araştırmasında öğrencilerin bu düşüncelerini izah etmek için limit ile ilgili olarak temel kavramlar hakkındaki düşünceleri ile anlayışları arasında bağlantılar kurmuştur. Bu temel kavramlar “Sıfır”, “sonsuz”, “sıfıra bölme”, “fonksiyon ve limit” tir. Bir belirsizlik durumunun, matematiksel bir objenin diğer semiyotik gösterimler içinde sahip olduğu diğer anlamlar hakkında bilgi verdiğini belirtmiştir. Grafik, limit ve form gibi bu semiyotik gösterimler Maurice’ye (a.g.e) göre süreksizlik ve asimptot kavramlarıyla ilgilidir. Matematiksel bir kavram olmayan belirsiz bir form; limit durumunda, süreksizliğin tipi, limit ve asimptotlar hakkında bilgiler taşır.

Maurice'ye (a.g.e) göre öğrencilerin bir kavram hakkında verdikleri cevaplarda; matematiksel olmayan dilden etkilenme, yeni veya eski öğrenilmiş bilgilerden etkilenme, matematiksel formüller veya sembollerden etkilenme, öğrenilmiş olan özel örneklerden etkilenme, öğrencilerin kendi yaptığı yorumlardan etkilenme, birbiriyle çatışan öğrenme durumlarından etkilenme, sezgisel ve formal doğadaki farklı akıl yürütme modlarından etkilenme gibi durumlar mevcut olabilir.

2.3. TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK KAVRAMI

Tanımsızlık ve belirsizlik kavramları; “1, sıfır ve sonsuz” un çeşitli bağlamlarda bir araya gelmesiyle ortaya çıkan ifadelerdir. Limit bağlamında düşünüldüğünde belirsiz formlar şeklinde ortaya çıkarken limit bağlamı dışında düşünüldüğünde “tanımsız” olarak adlandırılan sembolik ifadelerdir. Sonuçları tam olarak kestirilemediği için “belirsiz” olarak adlandırılan belirsizlik durumları L'Hospital kuralları gibi bir takım matematiksel işlemler yardımıyla “belirli” hale gelebilmektedir. Bazıları da birbirlerine dönüştürülerek çözülebilir(belirli) hale getirilebilmektedir.

Öğrencilerin inanışların, kullandıkları dilin etkisiyle farklı anlamlar çağırabilirlerdir (Monaghan, 1986). Dolayısıyla matematiksel yapı içerisinde farklı anlamlara gelebilen “tanımsız ve belirsiz” kavramlarının terim anlamlarının bilinmesi bu anlamda önemlidir. İçerdikleri anlamlar itibariyle “Belirsiz” kelimesinin terim anlamı; “belirli olmayan, niteliği hakkında tam bir bilgi edinilemeyen” anlamına gelmektedir (TDK sözlüğü). “Tanımsız” kelimesinin terim anlamı ise; “tanımlı olmayan” anlamına gelmektedir (TDK sözlüğü). Bu kavramlarla eşdeğer (eş anlamlı) sözcük sayısının az olması öğrencilerin cevaplarının bu iki kelimeyle sınırlanmasına da yol açabilir veya bu kelimelerle yakın anlam içeren “saçma”, “anlamsız” vb. kelimeleri tercih etmelerine yol açabilir.

Maurice'in (2000) kolej seviyesindeki öğrenciler üzerinde yaptığı araştırmada “belirsiz” kavramının “sıfıra bölme” ve “0,1 ve sonsuzun kullanıldığı sembolik ifadeler” ile ilgili terim anlamından gelen “belirsizlik” anlamına asimile ettikleri sonucuna ulaştı. Bu durumlara “belirsiz” cevabını veren diğer öğrencilerin ise bu

ifadeleri limit bağlamında düşünüp “belirsiz formlar” a atfen “belirsiz” dedikleri sonucuna ulaştı. Öğrencilere, “ $b/0$, $b \neq 0$ ” ile ilgili neler düşündüklerini sorduğunda ise birçok öğrencinin bu ifadeyi fonksiyon anlamında ele alıp, bu fonksiyonun süreksizlik noktasına sahip olduğunu ve bunun da süreksizlik noktasına ancak limitsel olarak yaklaşılmakla mümkün olabileceğini yani asimptotik olarak incelemek gerektiği sonucuna ulaştı. Limit bağlamında düşünmeyen diğer öğrencilerin bir kısmı bu durumların “belirsizlik” içerdiklerine atfen “belirsiz” olduklarını, diğer kısmı ise bu ifadelerin fonksiyon olarak dahi düşünülse “tanımsızlık” durumu olduğunu söylediler. Yani bir kısım öğrenci cevaplarında, kelimelerin terim anlamlarından etkilenip cevaplarını bu etkilenme üzerine asimile etmişlerdir.

Merkezi sınavlarda (ÖSS) ve öğretmenlerin uyguladığı yazılı sınavlarda öğrencilerin belirsizlik formuyla ilgili soruları çözebilmesi için sorulardaki belirsizlik türünü tespit edebilmeleri sorunun çözüm kısmında yeterli olmaktadır. Bu durum öğrencilerin bu durumlarla ilgili anlamalarını kuralsal anlamaya dönüştürmektedir. Yani öğrenci kuralı bilirse soruyu çözer bu da öğrencinin ihtiyacını görür bir durum haline gelmektedir. Benzer şekilde sıfırdan farklı bir sayının sıfıra bölümü, sıfırın sıfıra bölümü gibi tanımsızlık durumları da açık uçlu olabileceği için merkezi sınavlarda sorulmamakta, müfredatta yeterince ele alınmadığı, zaten tam anlaşılmadığı düşüncesi vb. gibi gerekçelerle de öğretmenlerin yazılı sınavlarında bulunmamaktadır.

Tanımsızlık ve belirsizlik ifadeleri; 0,1 ve sonsuzluğun aralarında 4 işleme girmesi ile ortaya çıkmaktadır. Bu ifadelerin nasıl algılandığı ve bu ifadelere nasıl anlam yüklendiği ile ilgili olarak matematik eğitiminde kullanılan bazı kuramlar bu noktadan sonra ele alınacaktır bu kuramlar sırası ile “Apos”, “Semiyotik” ve “Procept” tir.

2.4. APOS TEORİSİ

Dubinsky, Weller, McDonald, ve Brown (2005), sonsuzluğun süreç nesne olarak algılanmasının bahsedilen sıra ile sonsuzluğun potansiyel ve gerçek olarak

algılanmasına karşılık geldiğini ortaya atmışlardır. Öğrencilerin sonsuzu bir süreç mi yoksa nesne mi olarak algıladıkları onların sonsuzla ilgili sorulara verdikleri cevapları anlamada önem taşımaktadır. Bu sebeple literatürün bu kısmında, öğretmen ve öğretmen adaylarının sonsuzluğun bir süreç mi yoksa nesne mi olduğuna karar vermede limit ve sonsuzluk gibi konuları öğrenmenin doğası hakkında konuşmak için kullanılan özel bir dil olan Apos Teorisi'nden bahsedilecektir (Cottrill vd., 1996).

2.4.1. Aksiyonlar (Actions)

Aksiyon; nesnelere tekrar edilebilen zihinsel ve fiziksel manipülasyonu olarak tarif edilir. Örneğin öğrenci, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ ifadesi için x yerine sırayla çok büyük sayılar yazdığına (sonlu sayıda denemeye) $\frac{1}{x}$ ifadesinin sıfıra yaklaştığını hatta direkt sıfır olduğu sonucuna ulaşıyorsa bu aksiyon aşamasıdır (Cottrill et al., 1996).

2.4.2. Süreçler (Processes)

Eğer bir hesaplama limitsel bir hesaplama gibi sonsuz sayıda adım içeriyorsa bu süreçlerle ilgilidir. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ ifadesi düşünüldüğünde burada x'e verilecek sonsuz sayıdaki değerlerin $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun davranışının eğiliminin "sıfır" sayısına karşılık geleceği yönünde bir akıl yürütme ile sonlandırılmasıdır (Cottrill et al., 1996).

2.4.3. Nesnelere (Objects)

Bir matematiksel varlığın bir bütün olarak algılanabilmesi, bir bakışta tanınabilmesi bu varlığın bir nesne olarak algılandığının işaretidir. Bu anlamda $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ ifadesinin sonucunu direkt olarak görebilen öğrenciler için artık $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ ifadesi bir nesnedir. Benzer yorumlar ∞ kavramı için de yapılabilir. Yalnız, sonsuzu bir bütün olarak

algılamak zordur. Örneğin; “Her gecenin ardından gündüz her, gündüzün ardından gece gelir.” Bu sonsuz süreci bir bütün olarak düşünmek zordur.

2.4.4. Şemalar (Schemas)

Bir şema; aksiyonların, süreçlerin ve nesnelerin tutarlı bir toplamı olarak tarif edilebilir (Cottrill et al.,1996). Örneğin, fonksiyon şemasının parçası şunlara sahip olmalıdır:

- Bir fonksiyonun bir işlem ve bir nesne kavramı ve
- Bir fonksiyonun bileşiminin bir işlem ve bir nesne kavramı

APOS teorisini 0, 1 ve ∞ ile ilgili yapılan işlemlerdeki süreç nesne ilişkisine farklı bir açıdan bakabilmek için kullanılabilir. Örneğin ∞/∞ ifadesindeki aksiyon, süreç, nesne ve şemayı bilmek $1/\infty$ gibi diğer işlemlerdeki süreci anlamakta faydalı olabilir. Öğrencinin zihinsel aktivitesini anlayıp, sonsuzluğu kavrama ve tarifte bile zorluklarla karşılaşan öğrencilerin 0, 1 ve ∞ ile ilgili yapılan işlemler, tanımsızlık ve belirsizlik durumları ile ilgili olarak karşılaştıkları zorlukların anlaşılmasına neden olabilir.

2.5. SEMİYOTİK PERSPEKTİFTEN MATEMATİKTE DİL VE SEMBOL KULLANIMI

Bu kısımda matematiksel kavramları anlamada dilin ve sembolizmin etkisi semiyotik perspektif açısından ele alınacaktır. Cockcroft'a (1982) göre matematiksel sembolizm matematiksel iletişimin hem güçlü hem de zayıf yönüdür. Semiyotik perspektiften bakıldığında matematiksel kavramları öğrenmede dilin etkisi, öğrencilerin performans testlerinde verdikleri cevapları anlamaları bakımından da önemlidir. Semiyotik perspektiften dil ve sembol kullanımının bu bölümde odaklanacağı bilim adamları bu konunun önemini teorileştiren Chapman, Winslow ve Steinbring olacaktır.

Semiyotik; işaretlerin bilimi ya da çalışmasıdır (Chapman, 1993; Winslow, 2000) ve matematiksel kavramlar işaretlerin yoğun bir şekilde kullanımına dayanmaktadır. Bir işaret, referans objesi dediğimiz başka bir şeyin yerine geçen bir şeydir (Chapman,

1993, Steinbring, 2002). Dil ve semboller işaretirler; çünkü nesnelerin ve gösterdikleri referans bağlamların yerine geçerler (Steinbring, 2002). İşaret ve sembollerin bu şekilde birbirlerinin yerine kullanmaları sebebiyle Steinbring, çalışmasında işaret yerine sembol kelimesini kullanmıştır. Literatürün bu kısmında işaret yerine sembol kullanılacaktır.

Steinbring'e göre (a.g.e) matematiksel sembolün rolünün karakterizasyonu iki fonksiyonun nazara alınmasını gerektirir, bir semiyotik fonksiyon bir de epistemolojik fonksiyon. Bir semiyotik fonksiyon matematiksel sembolün bir rolüdür ve başka bir şey anlamına gelir. Epistemolojik fonksiyon ise matematiksel işaretin; matematiksel bilginin epistemolojik yorumu çerçevesinde bir değerlendirmesidir. Semiyotik fonksiyon, bir sembol ile bir obje veya referans konteksti arasındaki asimetrik ilişki tarafından şu şekilde gösterilir: Sembollerin kendi anlamlarının bulunmadığını gösterir. Anlam ya da kavram oluşumu meydana getirmek için bir epistemolojik özne takdim edilmek zorundadır.

Winslow (2000) matematiksel sembole işaret edici, nesneye ise işaret edilen olarak atıfta bulunur. Winslow birden fazla gösterim kullanma ihtiyacına vurgu yapar. Bu kavram oluşturmada anlamayı teşvik etmek için bir koşuldur. Aynı nesnenin gösterimimin farklı modları temsil ettikleri (gösterdikleri) nesne gösterimleri farklı olsa bile bu nesne değişmez. Winslow gösterimin uygun kayıtlarının olması durumunda bile matematiksel objelerin anlaşılması için, bu gösterim modları arasında değişim yapma olasılığını önemli bir işlem olarak görmektedir. Bunun nedeni her bir gösterimin kendi semantik niteliği ve ilişkisinin olmasıdır. Sadece bir gösterim modu kullanıldığında şema çok fazla sınırlandırılmış olacaktır.

Chapman'ın (1993) söylediği gibi, matematik öğrenmek onun kayıtlarını öğrenmeyi içerir. O bir kayıdı, özel bir durumsal bağlamda kullanılan özel bir dil çeşidi olarak tarif eder. 0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemlerin öğrenciler için anlam yükledikleri yeni bir dil ya da sembol oluşturup oluşturmadıkları, eğer oluşturmuşlarsa kavramın iletişim kurmada ortak bir dil temsil edip etmediğini anlamak $0/0$, $1/0$, 1^∞ gibi ifadelerin öğrenciler için ne anlam temsil ettiğini süreç nesne ilişkisini anlamada katkıda bulunabilir.

2.6. PROCEPT KAVRAMI

Literatürde süreçlerin zihinsel bir nesneye dönüşüm aşamaları birçok araştırmacı tarafından bugüne kadar farklı şekillerde yorumlanmıştır. Araştırmanın bu kısmında daha çok Gray & Tall'un (1994) üzerinde durdukları "procept" kavramı perspektifinden süreç-nesne ilişkisi irdelenecektir.

Başarılı bir matematiksel düşüncenin oluşabilmesi için bireyin kavramsal ve prosedürel bilgi seviyesi olan procept düzeyinde bir zihinsel yapıya ulaşması gerekir (a.g.e). Bu kavram için hangi kavramlarla neyin kastedildiğini bilmek önemlidir.

Süreç: Zihinsel-matematiksel olmak üzere bir işlemin bütün basamaklarını içeren kısımdır. Örneğin yaptığımız işlem iki sayının toplamı ise bu işlemi içeren tüm aşamalarını içeren kavram "Toplam süreci" dir.

Prosedür: Süreci gerçekleştirmek için oluşturulan algoritmalarıdır. "üzerine sayma", "hepsini sayma" gibi algoritmalar toplama işlemi için örnek algoritmalarıdır.

Prosedürel bilgi: Nesnelerin rutin dönüşümlerini içeren değerlendirmesi kolay olan bilgidir.

Kavramsal bilgi: İşlemler arasındaki ilişkilerin zengin olduğu değerlendirilmesi zor olan bilgidir.

Sembollerin rolü: $5+4$ için; 9 cevabını verirken 5 üzerine 4 daha sayıp 9'a ulaşmak ve $4+5$ 'i ayrı ayrı düşünüp hepsini sayıp 9'a ulaşılırken kullanılan bütün sembollerin bilgisini içeren kısımdır.

Sembolleri yorumlarken oluşan belirsizlik;

- Başarılı matematiksel düşüncüyü geliştirir.
- Prosedürlerin yanlış kullanılmamasını sağlar.

Aynı nesne sembolik olarak farklı yollarla temsil edilebilir. Bu farklı yollar farklı isimler alır. Örneğin $6=8-2$, $6=4+2$, $6=5+1$, $6=2 \times 3$ gibi.

Bir procept aynı nesneye ait temel proceptlerin koleksiyonunu içerir. Örneğin $6=8-2$, $6=4+2$, $6=5+1$, $6=2 \times 3$ gibi.

“Tanımsızlık”, “belirsizlik” ve “0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler” sonucu ortaya çıkan 1 , 0 , $\frac{1}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ve 1^∞ gibi ifadeler prosedür ve kavramı bir arada tutan “procept” bağlamında düşünüldüğünde süreç-nesne ilişkisinin önemi ortaya çıkmaktadır. 1 , 0 , $\frac{1}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ve 1^∞ ifadelerine bakıldığında örneğin bölme ifadelerinin bir kavram ya da nesne olarak mı görüldüğü yoksa bölme işlemi sürecinin mi düşünüldüğü Gray & Tall’un (1994) “procept” kavramını açıkladığı örnekler kadar açık değildir. Bu bağlamda “Tanımsızlık”, “belirsizlik” ve “0, 1 ve ∞ ile yapılan işlemler” süreç-nesne ya da “procept” kavramı altında rastlanılan kavram yanlışlarını açıklamak için kullanılabilirler.

2.7. DOKÜMANLARDA 0, 1, ∞ , TANIMSIZLIK VE BELİRSİZLİK

Bu kısımda, 0,1 ve sonsuz(luk) ile yapılan işlemler dikkate alınarak tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının lisans ve ortaöğretim matematik programlarındaki yerinden bahsedilecektir.

2.7.1. Orta Öğretim Programında

Sonsuzluk kavramı, ortaöğretim müfredatında “Kümeler” konusu içindeki “sonlu ve sonsuz kümeler” içerisinde verilirken, 11. sınıfta “sonsuz geometrik diziler” de, 12. sınıfta “limit” kavramı içinde “sonsuzla giden limitler” de ve “belirsizlik durumlarına sahip fonksiyonların limitlerini alma” da gibi konularda yer almaktadır (MEB, 2005).

2.7.2. Orta Öğretim ve Lisans ders kitaplarında

Matematiksel anlamda sonsuzluk kavramı limit, rasyonel fonksiyonların grafikleri, sonsuz diziler ve seriler ve belirsiz integral gibi konularda yer alması nedeniyle lisans düzeyindeki matematikte daha belirgin olarak ortaya çıkmaktadır (Weller vd., 2004). Tanımsızlık kavramı ile alakalı olarak incelenilen Milli Eğitim Bakanlığı yayınları arasında çıkan bazı ders kitaplarında fonksiyonlar konusunda fonksiyonun tanım kümesinin anlatımında paydayı sıfır yapan değerlerin fonksiyonun tanım kümesine dahil edilemeyeceği şeklinde bahsedilmektedir (MEB, 2005b). 0 , 1 ve ∞ ile ilgili yapılan işlemler sonucu ortaya çıkan $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 gibi ifadelerin kitaplarda yer aldığı gibi aşağıda sunulmuştur;

Etkinlik: (9. Sınıf, Sayılar, Rasyonel Sayılar)

0 ile 10 arasında kaç sayı vardır?

Bu etkinlikte “0 ile 10 arasındaki sayılar, 0 ile 1 arasındaki sayılardan fazla mıdır?” sorusu sorularak sonsuz kümelerin kardinaliteleri arasında büyüklük küçüklük açısından bir eşleştirmenin sezdirilmeye çalışıldığı görülmektedir.

Bu etkinliğin “ $\infty - \infty$ ” belirsizliğinin nedenini sezdirilmeye yönelik temel teşkil edebileceği söylenebilir (Mutlu ve Ercan, 2008).

Etkinlik: (Fonksiyonlar-Fonksiyon tanımı)

Etkinlikte geçen “ x bir gerçel sayı gösterebilir $\frac{x}{x^2 - 1}$ ifadesi de bir gerçel sayı gösterir mi? Örneğin $x=1$ ise yanıtınız ne olur? Hangi gerçel sayılar için bu ifade gerçel sayı gösterir?” sorusunda “tanımsızlık” kavramını sezdirmek amaçlanmıştır (Kaplan, 2008).

Bir soruda: “ $2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = 2 \cdot (\infty) = \infty$ durumu.” Burada ∞ un 2 ile çarpımının yine ∞ olacağını görüyoruz. Gerçek sayılarla ∞ ve $-\infty$ arasındaki ayrıca ∞ ile $-\infty$ un kendi aralarındaki işlemleri aşağıdaki gibi tanımlarız:

TANIM

1. $a \in \mathbb{R}$ olsun.

- a. $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$ dur.
- b. $a > 0$ ise $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$;
 $a < 0$ ise $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$ dur.
- c. $a : (+\infty) = 0$, $a : (-\infty) = 0$ dur.

2. a. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ ve $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ dur.
- b. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ ve $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$ ”

Bu tanımda $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$ ve $(\pm\infty) : (\pm\infty)$ işlemlerinin bulunmadığını görüyorsunuz. Bu belirsizliklerle karşılaştığımız değişik limit problemlerinde farklı sonuçların elde edildiğini, konularımız ilerledikçe göreceksiniz. Demek ki bu tür işlemler **belirsiz işlemlerdir.**”(yazım hataları, kitap yazarlarına aittir (Kaplan, 2008).

Ayrıca kitabın limit konusu ile ilgili bölümünde yer yer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 + x} = \frac{3}{\infty} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{0^-} = 5 \cdot \frac{1}{0^-} = 5 \cdot (-\infty) = -\infty$ gibi ifadelere yer verilmiştir (Kaplan, 2008).

“Etkinlik:

- 1- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ve $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ gibi $\frac{0}{0}$ tipindeki limit problemlerinde farklı sonuçlar

elde edilebileceği yargısı çıkar mı? Öyleyse $\frac{0}{0}$ türündeki ifadeler **belirsiz** ifadeler midir?

- 2- Pay ve paydayı x ile bölerek $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x - 1}$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{x + 1}$ değerlerini bulunuz.

Sonuçların farklı oluşunu $\frac{\infty}{\infty}$ türündeki limit problemleri açısından nasıl yorumlarsınız?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$$

Problemlerini düşünelim. Bunların ikisinde de pay ve paydanın limitleri 0 dır. Yani, bu rasyonel ifadelerin limiti $\frac{0}{0}$ şeklindedir. Pay ve paydadaki polinomlar, bir çarpanı (x-1) olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. $x \rightarrow 1$ olduğundan $x - 1 \neq 0$ dır. Öyleyse (x-1) çarpanları kısaltılarak limit bulunabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$$

Bu problemlerin ikisinde de başlangıçta $\frac{0}{0}$ durumu ile karşılaşırız. Doğru olan işlemlerimiz sonucunda birincide limiti 1, diğesinde 2 bulduk (çözüm buraya eklenmemiştir). Sonuçların farklı oluşunu, “ $\frac{0}{0}$ ifadesi belirsizdir.” diyerek anlatırız.

Matematikte bundan başka belirsiz ifadeler de vardır. Konularımızda göreceğimiz belirsiz ifadeler şunlardır:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0.” \text{ (Kaplan, 2008).}$$

Belirli ve Belirsiz Limitler

...eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ($B \neq 0$) ise, limitlerin özelliğine göre

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ olur. Bu durum **belirli limit** diye adlandırılır. Çünkü limit, başka bilgi

olmaksızın saptanabilir. Bununla birlikte, eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ise,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitini saptamak için yeterli bilgimiz yok demektir. Bu yüzden böyle bir

limit “0 bölü 0” şeklinde **belirsiz limit** diye adlandırılır.

Uyarı! Limit konusuna yeni başlayan bazı kimseler, pay ve paydası 0’a yaklaşan ifadelerin 1’e yaklaşacağını düşünürler. Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi bu kesinlikle doğru değildir. Kesrin gerçekte ne değer alacağını bulmak biraz zaman alacaktır (Sherman & Anthony, 1996).

Belirsiz form $\frac{0}{0}$

Aşağıdaki gibi bir değerin limiti, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(a) = g(a) = 0$ iken bulunamaz.

$\frac{0}{0}$ olur ki bu ifade belirsiz formlardan biri olarak bilinen anlamsız bir ifadedir.

Belirsiz form $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$

Limiti alınan fonksiyonda $x=a$ yerine yazıldığında $\frac{0}{0}$ gibi $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$ belirsiz ifadeleri bulunur. Bu ifadeler bazen birbirlerine dönüştürülebilir (Thomas & Finney, 1986).

III. YÖNTEM

Bilimsel araştırmalar; doğrulara ulaşmak ve gerçeği keşfetmek amacıyla yapılan sistematik sorgulama olarak tanımlanabilir (Burr, 1995). Bilim ve yöntem kavramları birbirini tamamlayan bir bütündür. Her bilimsel araştırma, ortada duran sorunu doğru sorularla çözmeyi amaçlar. Bu amaca ulaşmanın önkoşulu da sistemleştirilmiş, sınıflandırılmış, bilimsel bilgilere dayanmaktır. Yöntem, amaca ulaşmak için belli bir kurala göre izlenen yol demektir. Yapılan bir bilimsel çalışmada her sayfa belirli kurallar dahilinde yapılmalıdır. İyi araştırma planına dahil olmayan, doğru soruları sormayan ya da uygun gözlem araçlarına başvurmayan araştırma başarısız olacak, zaman ve emek kaybına yol açacaktır (Güven, 1996). Kaplan'a (1973) göre bir araştırmada yöntem veri toplama sürecinde kullanılan teknik ve prosedürleri ifade ederken, metodoloji ise veri toplama sürecinde kullanılan bu teknik ve prosedürleri tanımlama, analiz etme, sınırlılıklarını ve hangi varsayımlarla hareket ettiğini açıklama, araştırmanın niçin ve nasıl yapılacağını gösteren felsefi açıklama, araştırma sürecinde yeni uygulamalar önerme ve uygulamalar sonucunda elde edilen verileri yorumlama biçimini açıklama sürecidir (Aktaran Cohen, Manion ve Morrison, 2000, s.45). Yani metodoloji araştırmada kullanılan metot ve tekniklerin kullanılmasının felsefi nedenlerini ve bunların araştırılan konuya uygunluğunu açıklama sürecidir.

Hughes (1990) her araştırma tekniğinin belirli bir dünya görüşüne sahip olduğunu ve kendi başlarına bir geçerliliklerinin olmadığını, bu yüzden etkilerinin epistemolojik yargılara bağlı olduğunu vurgulayarak araştırma yöntem ve tekniklerinin kuramlardan ayırt edilemeyeceğini ifade etmektedir. Bu yüzden yapılan araştırmalarda izlenen yol araştırmacının anlamasına ya da epistemolojisine bağlıdır (Hoshmand, 1989; Mertens, 1998). Diğer bir deyişle her araştırmacı, kendi değer yargılarını, anlama ve düşünme biçimini araştırmasına yansıtır ” (Chin ve Russo, 1997, p.105). Guba ve Lincoln (1994, p.105) araştırma yöntemine ve tekniklerine karar vermeden önce, araştırmacıya rehberlik eden dünya görüşü ya da temel inanç sistemi olarak tanımlanan paradigmanın belirlenmesi gerekliliğini tartışmışlar ve epistemolojik, ontolojik ve yöntemsel olmak üzere üç temel soruyu paradigmanın gerekliliği ile ilgili olarak ifade etmişlerdir. Burada vurgulanması gereken bir diğer

nokta da araştırmacının paradigmanın ne olduğunun farkında olabilesidir. Yani hangi paradigmayı benimsediğinin bilincinde olmalıdır.

Bu bölümde kısaca bu etkenler irdelenerek araştırmada kullanılan yöntemin neden tercih edildiği açıklanmaya çalışılacaktır.

3.1. ARAşTIRMA MODELİ

Bir kimsenin tanık olduğu bir olayı anlatırken gereksiz ayrıntılara girmeden onu amaca uygun olarak özetleyecek formüller simgeler bulma çabasına model denir (Karasar, 1984,79). Mimarın bina için maket yapması, matematikçinin problem çözmek için formül geliştirmesi modele örnek olarak verilebilir. Araştırma modeli ise bir araştırmanın amacına uygun ve ekonomik olarak verilerin toplanması, çözümlenebilmesi için gerekli koşulları düzenlemeye denir (Karasar,1984,79).

Bir araştırmanın doğasını belirleyen önemli unsurlar izlediği bilimsel dünya görüşü (paradigma), araştırmada kullanılan yöntemleri ve araştırma sorularına cevap arama biçimidir (Yıldırım, Simsek, 2006). Eğitim araştırmalarında kullanılan yöntem ve elde edilen verilerin analiz edilmesi bakımından nitel (yorumlayıcı) ve nicel (pozitivist) olmak üzere iki temel yaklaşımdan bahsedilebilir. Pozitivist yaklaşıma göre araştırmalarda tümevarım mantığı ve yanlışlanabilme /doğrulanabilme iki temel prensiptir. Bu iki temel prensipten birincisi olan tümevarım mantığı özel ifadelerden genel ifadelere gidisin objektif ve deneyimlerden bağımsız olarak gerçekteşmesini, diğerisi ise bir ifadenin bilimsel olarak doğru olup olmadığını ortaya çıkarmak için test edilebilmesi niteliklerini açıklamaktadır (Ekiz, 2003). Pozitivist ötesi, yorumcu paradigmaya göre yapılan bir çalışmada kişilerden bağımsız dış gerçektikten bahsedilemez ve bu nedenle sosyal olgular hakkında nicel verilere dayanarak gerçekçi sonuçlar çıkarılamaz. Üzerinde çalışılan bir olgu ya da olay ancak araştırmacının bakış açısıyla bir bağlamda yorumlanabilir (Yıldırım, Simsek, 2006). Araştırmanın başlangıcında belirlenen ve araştırmaya esas teşkil eden felsefe, araştırmacının yöntem seçiminde de etkilidir ve araştırmacıya yol gösterici bir niteliktedir. Temelinde tek bir mutlak gerçekteğin olmadığı yapılandırmacı anlayış, bilgilerin zihinde yapılandırılmalarını ve zihinde oluşma süreçlerini içermektedir (Altunışık, Coşkun, Bayraktaroğlu ve Yıldırım, 2004). Zihinsel bilgi çoğu kez

bireyin inançlarından (epistemolojik) bağımsız değildir. Bireylerin yapılandırılmış bilgilerindeki inançlarını bu bilgilerden kesin olarak ayırt etmek mümkün olmayabilir. Bu düşünceye göre araştırmanın temelini yapılandırmacı paradigmanın oluşturması doğaldır. Yapılandırmacı paradigmaları temel alan araştırmalar geleneksel olarak tümüyle nitel olma eğilimindedir (Lodico, Spaulding & Voegtle, 2006).

Bu çalışmada, tanımsızlık, belirsizlik ve sonsuzluk kavramlarının öğrenci performanslarına etkisini incelenmek üzere var olan durum kendi koşulları içerisinde betimlenmeye çalışıldığı için, araştırma, nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması” modeli üzerine kurulmuştur. Özel durum çalışması, felsefesi yorumlayıcı paradigmaya dayanan, araştırmacıya bir bağlam içerisinde bir grubu, olayları veya ilişkileri derinlemesine inceleme ve yorumlama olanağı sağlayan, elde edilen bulgularla benzer durumlar üzerinde gerçekçi tahminlerden ziyade analitik genellemeler yapma fırsatı veren nitel araştırma yöntemlerinden biridir (Cohen, Manion & Morrison, 2000, s.181). Sosyolojik terimler sözlüğünde ise durum çalışması şöyle tanımlanmaktadır; “*Durum çalışması, nasıl ve niçin soruları ortaya çıktığında, araştırmacının olaylar üzerinde kontrolünün az olduğu durumlarda, odak; bazı gerçek hayat bağlamı dahilinde çağdaş bir olgu üzerinde ise tercih edilen bir stratejidir*”. Patton (1985) özel durum çalışmasını belirli bir bağlamın ve bu bağlam içerisindeki etkileşimin parçası olan durumları derinlemesine anlama çabası şeklinde tanımlamaktadır. Sturman’a (1999, s.103) göre bir bütün, parçalarının toplamından daha büyük olduğu gibi insanlık ilişkileri ve sosyal sistemler de bir bütünlük arz etmektedir. Dolayısı ile bir olguyu parçalarına odaklanmak yerine bütünüyle inceleme olanağı vermesi özel durum çalışmasının en ayırt edici özelliğidir. Her bir bağlam kendine has ve dinamik bir yapıda olduğundan, özel durum çalışması bir bağlam içerisindeki olayların, insan ilişkilerinin veya başka faktörlerin dinamik, karmaşık ve belirgin olmayan ilişkilerini ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır (Cohen, Manion & Morrison, 2000, s.182). Yani özel durum çalışması olaylar ve olguları ve bunlar arasındaki ilişkileri bir bütün olarak incelemektedir. Dolayısı ile bu yöntemin önemli bir avantajı, araştırmacıya özel bir duruma yoğunlaşarak derinlemesine araştırma yapma, nicel ve nitel araştırma yöntem ve metotlarını birlikte kullanma fırsatını vermesidir.

Yin (1984) tarafından “Durum çalışması yanlıdır”, “durum çalışması genellemelere izin vermez”, “durum çalışması uzun zaman alır” ve dolayısıyla “okunması mümkün olmayan şişkin bir veri seti üretir” gibi kanaatler özel durum çalışmasına karşı belli başlı önyargılar olarak bahsedilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Örneğin özel durum çalışmalarına karşı olan “genellemelere izin vermez” kaygısına karşı, özel durum çalışmasının bir evrene istatistiksel genellemeler yapma kaygısı yoktur, onun yerine analitik genellemeler yapmak, yani kuramsal önermelerde bulunmayı amaçlamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Yanlılık durum çalışmalarının doğasından değil, araştırmacıların özensiz ve az emek harcamalarından kaynaklanmaktadır. Kaldı ki, birçok araştırmada da belirtildiği gibi, yanlılık, anketler ve deneysel çalışmalar gibi bazı araştırma yöntemlerinde de söz konusu olmaktadır” (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bütün bu önyargılar özel durum çalışmasını kullanacak olan araştırmacının yöntemi ne kadar iyi bildiği ile ilgilidir. Yöntemi iyi kullanan bir araştırmacı yaptığı çalışmayı bu önyargılardan uzak tutacaktır. Netice itibarıyla deneysel çalışmalar da dâhil olmak üzere bütün araştırmalarda bu önyargılar söz konusu olabilmektedir.

Tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının öğretmen ve öğretmen adaylarının görüş ve performansları bağlamında incelenmesi ve 0,1 ve sonsuzla yapılan çeşitli işlemlerin öğretmen ve öğretmen adaylarının görüş ve performansları bağlamında incelenmesi amaçlanan bu çalışmada problem çözme süreçlerinin ve becerilerinin derinlemesine anlaşılması gerekmektedir. Bu nedenle öğrencilerin problem çözme sürecinde var olan matematik bilgilerini ne derecede kullanabildiklerini, hangi noktalarda problem yaşadıklarını anlayabilmek için (1) performans testleri ve (2) katılımcılarla yapılan görüşmelerden faydalanılmıştır. Bu çalışmada veri toplama yöntemleri kullanılarak matematik öğretmenleri ve matematik öğretmen adaylarından oluşan bir grup katılımcı ile bir dönem boyunca devam etmiştir. Bu nedenle bu çalışma, en genel anlamda bir grup veya olayı derinlemesine inceleme ve analiz etme olarak tanımlanan özel durum çalışması niteliği taşımaktadır. Literatür incelendiğinde bir grup, olay veya olgunun derinlemesine incelenerek anlaşılmaya çalışıldığı araştırma yöntemi özel durum çalışması olarak adlandırılmaktadır. Bu çalışmanın doğası bu tanıma uygun olduğundan özel durum çalışması olarak düşünülmüştür.

3.1.1. Nicel Yaklaşımlar

Gerçeğin insandan bağımsız ve değişmez olduğunu varsayan pozitivist yaklaşım uzun yıllar fen bilimleri araştırmalarının felsefi temelini oluşturmuştur. Pozitivist paradigmaya göre, gerçek, doğru ölçüm ve dikkatli bir sayısallaştırma ile tanımlanabilir ve anlaşılır hale getirilebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Araştırmacı, veri toplama ve analiz süreçlerine kendi değer yargılarını ve yorumlarını katmamak için yoğun caba gösterir (Kırcaali-İftar, 1997). Çünkü Araştırmacı nicel araştırma yöntemlerinde değişkenleri birbirinden bağımsız bir şekilde ortaya koyduğu ve kendini araştırılan ortamın dışında tutabildiği ölçüde araştırmacının güvenilirliği artacak ve ortaya koyduğu bulguların genellenebilirliği kuvvetli olacaktır. Eğitim ve sosyal bilimlerde yapılan araştırmalarda uzun yıllar fen bilimlerinde kullanılan nicel araştırma yöntemleri kullanılmıştır. Ancak eğitim bilimleri ve sosyal bilimlerde yapılan araştırmalarda fen bilimlerinde olduğu gibi uygun laboratuvar ortamlarının oluşturulamayacağı, sürekli değişim içerisinde olan insan davranışlarının ve sosyal olayların sayısal olarak yorumlanamayacağı, dolayısı ile nesnel genellemelere ulaşamayacağı kanaatinin oluşmasıyla bu alanlarda nitel araştırma yöntemlerinin kullanılmaya başlamasını sağlamıştır.

3.1.2. Nitel Yaklaşımlar

20. yüzyılın son çeyreğinde, niceliksel yaklaşımın bazı sosyal olguları açıklamadaki yetersizliğinden hareketle, niteliksel araştırma yaklaşımı gelişmiş ve hızla yaygınlaşmaya başlamıştır (Bir, 1999).

Pozitivist bilimler doğruları tek değişkene göre ele alır inceler ve kesin yargılar ile ifade ederken pozitivist olmayan bilimlerde araştırma Fen ve Matematik disiplinlerinden daha farklı bir süreç izler. Sosyoloji, Antropoloji, Psikoloji, Felsefe, Dil bilim gibi nitel araştırmalara bakış açısı kazandıran disiplinlerdeki ortak amaç, insan davranışını içinde bulunduğu ortamda, çok yönlü olarak anlamaya çalışmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). İnsan davranışı ancak esnek ve bütüncül bir yaklaşımla araştırılabilir ve bu yaklaşımda araştırmaya dahil edilen bireylerin görüş ve deneyimleri büyük önem taşır.

Nitel araştırmalar içerisinde birçok farklı kavram ve disiplini barındırdığı için yazarlar bir tanım yapmaktan özellikle kaçınmışlardır. Her ne kadar bu yöntem, süreç ve özellikleri kapsayan bir tanım yapmak g ise de “nitel araştırma” gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir. Denzin ve Lincoln’a (1998) göre nitel araştırma araştırmacıların araştırılacak konu ya da konuları doğal ortamda incelemeleri, araştırılan insanların getirmiş oldukları anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası içerisinde olmalarıdır (Cohen, Manion ve Morrişon, 2000). Kuram oluşturmayı temel alan bir anlayışla sosyal olguları bağlı buldukları evre içerisinde araştırmayı ve anlamayı ön plana alan bir yaklaşımdır. Nitel araştırmaların çoğu, araştırdıkları sosyal çevrelerin ayrıntılı bir betimlemesini yapmayı amaçlar (Kuşcu, 2007). Bu araştırmada tanımsızlık belirsizlik ve sonsuzluk kavramlarının ğrenci performanslarına etkisini incelenmesi hedeflenmesi yönüyle, nitel bir araştırmadır.

3.2. ÇALIşMA GRUBU

Evren ve örneklem kavramları nicel araştırmalarda kullanılan kavramlardır. Nitel araştırmalarda bu kavramların yerini “katılımcılar” veya “alışma grubu” almaktadır. Bu kısımda okuyucu açısından bir kavram kargaşası oluşturmaması açısından “Evren ve örneklem” kavramları yerine nitel araştırmalarda ki “alışma grubu” kullanılmıştır. Cohen ve diğerlerine (2000) göre bir araştırmanın kalitesi uygun paradigma ve yöntem seçiminin yanı sıra seçilen ve üzerinde çalışılan örneklem doğru seçimine bağlıdır. Bu nedenle çalışmanın doğasına ve amacına uygun bir örneklem seçilmeli ve büyüklüğüne karar verilmelidir. Örneğin istatistiksel veri analizi kullanılıyorsa örneklem büyüklüğü 30 kişiden fazla seçilmelidir.

Olasılıklı rneklem yöntemleri, daha çok nicel araştırmalarda genelleme yapmaya uygun olduğu için bu örneklem yöntemlerinde örneklem büyüklüğü fazla seçilmektedir. Nitel araştırmalarda genelleme amacı gdlmemektedir ve nitel araştırmalarda kullanılan yöntemin ve bunlardan kaynaklanan enerji, organizasyon ve ekonomik sınırlılıklar örneklem sınırlı tutulmasını gerektirir (Cohen ve diğerleri, 2000; Yıldırım ve şimşek, 2006). Bu nedenle çalışmanın örneklem

seçiminde olasılıklı olmayan örneklem seçimi yöntemlerinden, bireyler ya da olayların olduğu gibi alındığı amaçlı Örneklem tekniği kullanılmıştır (Patton, 1990).

Nitel araştırmalarda hem genel hem de özel bilgilere ulaşma eğilimi bulunmaktadır. Dolayısıyla seçilecek olan katılımcıların bu farklılığı ortaya koyar niteliklere sahip olması aranmalıdır. Bunun içinse en uygun örneklem biçimi amaçlı örneklemedir. Olasılıksız örneklem seçimi, bir grup ya da olay üzerinde çalışılan grubun derinlemesine araştırıldığı nitel çalışmalarda kullanılan yöntemdir (Cohen, Manion ve Morrison, 2000). Yine Patton' a (1987) göre olasılıklı örneklem yöntemleri evrenin temsil kabiliyetini sağlayarak geçerli genellemeler yapılabilmesi için imkân sağlarken, amaçlı örneklem zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına olanak vermektedir. Bu açıdan bakıldığında amaçlı örneklem yöntemi pek çok durumda olgu ve olayların keşfedilmesinde ve açıklanmasında faydalı olur (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Bu bağlamda çalışmanın örneklemini 2007-2008 eğitim öğretim yılında Marmara üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik öğretmenliği bölümünde okuyan 3. sınıf (29), 4. sınıf (25), ve 5. sınıf (23) öğretmen adayı ile, M.E.B.'da görev yapan (36) öğretmen olmak üzere toplam 113 kişi oluşturmaktadır.

3.3. VERİ TOPLAMA ARAÇLARI VE UYGULAMALAR

Sonsuzun üs, pay veya paydada veya aritmetik bir işlemde bir sayı gibi kullanıldığı çeşitli durumları içeren sorular ve bu sorulara ek olarak 0,1 ve sonsuzun çeşitli kombinasyonlardaki durumlarını içeren Performans Testi-1 uygulanmıştır. Hemen ardından Limit-belirsizlik durumlarını içeren Performans Testi-2 uygulanmıştır. Ayrıca öğretmen ve öğretmen adaylarından rastgele seçilen 16 tanesine performans testlerine verdikleri cevapları sorgulayıcı yarı yapılandırılmış görüşme soruları sorulmuştur.

Bu kısımda yukarıda bahsedilen uygulamalarda kullanılan veri toplama araçlarının her birinden, bunlarla ilgili yapılan geçerlik güvenirlik çalışmalarından ve uygulamalarından ayrıntılı olarak bahsedilecektir.

3.3.1. Deneme Çalışmaları

Deneme çalışmaların uygulanmasında zamanlama açısından herhangi bir problemle karşılaşmazken bununla birlikte uygulama sürecinde çeşitli aksaklıklar gözlenmiştir. Bu aksaklıkların başlıca nedeni de ilk testle 2. test aynı anda uygulandığında katılımcıların ilk testteki soruları cevaplandıktan sonra 2. testteki soruların ilk testteki soruları teyit etmeye çalışmasıdır. Dolayısıyla doğru da yapsa yanlış da yapılırsa bu iki test birbirini etkileyeceği düşünüldüğü için testteki bu iki kısım 2'ye ayrılmıştır önce 1. kısım verilir veriler toplanır sonra 2. test verilmiştir.

Örneğin Performans Testi-2 deki bir soru;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 + x + 1}$$

Sorusunu gören öğrenci “sonsuz” sembolünü x yerinde yazınca $\frac{\infty}{\infty}$ ve $\frac{0}{0}$

belirsizlikleri ile karşılaşınca hemen Performans Testi-1'e giderek orada $\frac{\infty}{\infty}$ ve $\frac{0}{0}$

için verdiği cevabı kontrol edip değiştirebilme eğilimi göstermiştir. Benzer eğilimlerin performans testindeki için de olduğu deneme çalışmaları sırasında ortaya çıkmıştır.

Deneme çalışmaları ve sonrasında alınan 5 uzman görüşü ile birlikte Performans Testi-1'de bulunan 4. sorunun ($\tan 90^0$) araştırmanın problemine doğrudan katkı sağlamadığı, teorik bilgileri temele aldığı gerekçesiyle çıkarılması kararlaştırılmıştır.

3.3.2. Uygulama Süreci

Uygulama süreci 2007–2008 bahar yarıyılında Marmara Üniversitesi Ortaöğretim ve İlköğretim Matematik öğretmenliği 2,3,4 ve 5. sınıf öğrencilerine ve M.E. B. ' de çalışan matematik öğretmenlerine uygulanmıştır. Uygulamadan birkaç gün sonra rastgele seçilen katılımcılar ile görüşme soruları yapılmıştır. Aşağıdaki Tablo 2 çalışmanın genel süreci gösterilmiştir. Uygulamalar sırasında katılımcılara herhangi bir süre sınırlaması konulmamıştır.

Tablo 1 Çalışma Planı, Etkinlikler ve Ölçme Araçlarını Kullanma

Deneme Çalışmaları (Nisan, 2008)	→Deneme çalışmalarında uygulanmak üzere, “Performans Testleri” ve Yarı yapılandırılmış “Görüşme Soruları” hazırlandı.
Deneme Çalışmaları (14-18 Mayıs, 2008)	→Deneme çalışmalarında tüm gruplara “Performans Testleri” uygulandı.
Veri Toplama (21-25 Mayıs, 2008)	→ Tüm katılımcılara (113 kişi) önce Performans Testi-1 uygulandı sonra veriler toplanıp peşine Performans Testi-2 uygulandı.
Veri Toplama (27-30 Mayıs, 2008)	→8 Öğretmen Adayına “Görüşme Soruları” uygulandı. →8 Öğretmen’e “Görüşme Soruları” uygulandı.
Veri Analizi (10-17 Haziran, 2008)	→Performans Testleri ve görüşme sorularından elde edilen veriler analiz edildi.
Tez Yazımı Temmuz, 2008-Eylül 2010	→Tezin literatür, yöntem, analiz, bulgular, tartışma, sonuç ve öneriler kısmının yazılması

Şimdi veri toplamada kullanılan her bir yöntem ve araçtan ayrıntılı bir şekilde bahsedilecektir.

3.3.2.1. Performans Testleri

Bu kısımda katılımcılara peş peşe uygulanan 2 adet performans testinden ayrı ayrı bahsedilecektir. Bu testlerin ayrı ayrı uygulanmasının sebebi; Performans Testi-1 ‘de yer alan bazı soruların Performans Testi-2 ‘deki bazı soruların çözümlerini çağrıştırmasıdır.

Katılımcılara uygulama öncesinde; soruları mümkün olduğunca boş bırakmamaları, verdikleri cevapların gerekçelerini yazmaları ve hangi bağlamda o cevabı verdikleri konusunda ayrıntılı olarak yazmaları gerektiği özellikle vurgulanmıştır.

3.3.2.1.1. Performans Testi-1(PT1)

Bu testte; 0,1 ve sonsuzun çeşitli durumlardaki işlemlerini içeren sorular bulunmaktadır. Sonsuzun limit bağlamı dışında sembolik olarak bulunduğu bu soruların sorulmasındaki asıl amaç, katılımcıların cevaplarını verirken sonsuzu bir

süreç olarak mı yoksa bir obje olarak mı düşündüklerini tespit etmektir. Yani, katılımcıların sonsuz, 0 ve 1 ile olan işlemlerde sahip oldukları kavram yanılgılarını tespit edip bu yanılgılar yardımıyla onların, sonsuzu hangi sorularda süreç hangi sorularda nesne olarak kabul ettiklerini anlamaya çalışmaktır.

Testteki soruların seçiminde uzman görüşünden yararlanılmıştır. Her bir sorunun yanında, katılımcıların verdikleri cevapları gerekelecekleri boş bir bölüm oluşturulmuştur.

3.3.2.1.2. Performans Testi-2 (PT2)

Bu test; katılımcıların Performans Testi-1 de direkt limit içermeyen sorulara verdikleri cevapların limit bağlamında farklılık gösterip göstermeyeceği, sahip oldukları kavram yanılgılarının limit performanslarına etki edip etmeyeceğini anlamak amacıyla oluşturulmuştur. Katılımcıların sorularda limiti bir süreç mi yoksa bir nesne olarak mı algıladıklarına da bakılacaktır. Testte bulunan sorular, lise müfredatında bulunan tüm belirsizlik durumlarını içermekte olup soruların seçilmelerinde uzman görüşleri alınmıştır.

Testin hazırlanmasındaki bir diğer amaç ise tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını karıştıran katılımcıların Performans Testi-1 de verdikleri cevaplar ile Performans Testi-2 deki limit bağlamında verdikleri cevapların karşılaştırılmasıdır. Örneğin, Performans Testi-1 de tanımsız/belirsiz dedikleri durumlar için limit bağlamında tanımsız mı yoksa belirsiz mi demişler buna bakılacaktır (Performans Testi-1'deki $\frac{0}{0}$

durumuna tanımsız diyen bir katılımcı limit durumundaki $\frac{0}{0}$ belirsizliğine de tanımsız mı yoksa belirsiz mi demiştir?).

3.3.2.2. Görüşmeler

Görüşme ve mülakat nitel araştırmada en sık kullanılan veri toplama aracı olarak karsımıza çıkmaktadır. İlk bakışta kolay bir veri toplama yöntemi gibi görünen görüşme, aslında beceri, duyarlık, yoğunlaşma, bireyler arası anlayış, öngörü, zihinsel uyanıklık ve disiplin gibi pek çok boyutu kapsamı bakımından hem bir sanat hem de bilimdir (Patton, 1987; aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Mülakatlar değişik şekillerde sınıflandırılabilir. Kullanılan kuralların katılığına başka bir deyişle yapısına göre mülakatlar “yapılandırılmış”, “yarı yapılandırılmış” ve “yapılandırılmamış olarak üçe ayrılır (Karasar, 1999; Altunışık ve diğerleri, 2004). Ne tür soruların ne şekilde sorulacağı, hangi verilerin toplanacağını en ayrıntılı şekilde belirleyen mülakat planının aynen uygulandığı görüşmeye yapılandırılmış denir. Yapılandırılmamış mülakatta ise önceden belirlenmiş herhangi bir soru ve doğal olarak cevap yoktur. Mülakatın gedisine göre sorular sorulur fakat araştırmacı hangi konuyu hangi boyutlarıyla açığa çıkaracağını bilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Çalışmada rastgele seçilen 12 katılımcı ile (6 öğretmen adayı, 6 öğretmen) “yarı yapılandırılmış” görüşme yapılmıştır. Görüşme sorularında katılımcılara özellikle sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik durumları ile ilgili sorular sorulmuştur. Görüşme sırasında ayrıca öğrencilere bazı problemler tekrar çözdürülerek, kâğıt üzerindeki çözüm sürecinde gözlemlenemeyen bazı becerilere öğrencilerin gerçekte sahip olup olmadıkları anlaşılmaya çalışılmıştır.

Görüşmelerde en genel olarak aşağıdaki sorular sorulmakla birlikte görüşme sürecinin sohbet tarzında geçmesi her bir görüşme için farklı sorular ortaya çıkmıştır.

Görüşmelerde öğretmen adaylarına aşağıdaki sorular sorulmuştur.

- 1^∞ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- 1.1.1... ifadesi hakkında neler düşünüyorsunuz?
- $\frac{1}{\infty}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- $\infty - \infty$ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- $\frac{0}{0}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- Tanımsız, belirsiz ve sonsuz kavramları sizde neler ifade ediyor?
- Bu kavramlara eşdeğer olduğunu düşündüğünüz farklı kavramlar var mı?

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?

• Peki, tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk kavramlarını gerçek hayatta kullandığınız durumlar var mı?

• $2,99\dots-0,99\dots$ hakkında neler düşünüyorsunuz? Bu durumu nasıl irdelersiniz?

- $x=3$ için $x-3/x-3$ hakkında ne düşünüyorsunuz?

3.3.2.3. Doküman Analizi

Kayıt ve belgelere ulaşılarak, bu kaynakların incelenmesi yoluyla veri toplanması işlemi doküman analizi olarak isimlendirilmektedir (Karasar, 1999). Gözlem, görüşme, anket gibi veri toplama araçları araştırmacının ilgilendiği araştırma sorusuna yönelik olarak hazırlanırlarken, doküman analizine veri sağlayan dokümanlar başka bir amaçla hazırlanmışlardır. Araştırmacının yaklaşımından etkilenmediklerinden değişken değillerdir ve istenildiğinde başvurulabilecek hazır kaynaklardır. Bu kısımda, nitel araştırma yönteminde kullanılan yazılı doküman analiz tekniği kullanılmıştır (Cohen & Manion, 2000; Ekiz, 2003; Yıldırım & Şimşek, 2006). Bu amaca yönelik olarak kullanılacak yazılı dokümanlar; ortaöğretim programı, en çok kullanılan analiz (calculus) kitapları ve ortaöğretimde en çok kullanılan ders kitaplarıyla bu ders kitaplarında bulunan verilen etkinliklerin içeriği ve dersin işlenişindeki uygulamalardan oluşan kitap içerikleridir.

Doküman analiziyle; öğretim aracı olarak kullanılan ders kitaplarında sonsuzluk, “0”, “1” ile yapılan işlemler ve “tanımsızlık”, “belirsizlik” kavramlarının müfredatta nasıl yer aldığını ve öğretmen ve öğrencilerin hangi kaynaklardan yararlandığını görmek istedik.

3.4. VERİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ VE YORUMLANMASI

Veri çözümleme, veri toplama işlemi ile elde edilen ham verilere anlam kazandırma işi olarak adlandırılabilir (Altunışık vd., 2004). Bir araştırmada gerekli verilerin

toplanması çalışmanın önemli bir aşamasıdır. Ancak toplanan bu verilerin, araştırma problemine, kuramsal ya da pratik yönden, çözüm önerileri geliştirmesini sağlayacak şekilde çözümlenip yorumlanması ve değerlendirilmesi gerekir (Karasar, 1999).

Bu kısımda veri toplama aracı olarak kullanılan Performans Testi-1 ve Performans Testi-2' ve görüşmelerin değerlendirilmesinin nasıl yapıldığından bahsedilecektir.

3.4.1. Performans Testlerinin Yorumlanması

3.4.1.1. Performans Testi-1

Performans Testi-1'deki sorulardan elde edilen veriler önce genel yüzdeleriyle sonra da her bir sorunun yüzdeleriyle gösterilmiştir ve analizlerinde araştırma soruları paralelinde betimsel istatistik kullanılmıştır.

Performans Testi (1)- soru10: $0.\infty = ?$

Aşağıdaki tabloda katılımcıların 10. soru' ya verdikleri cevapların yüzdeleri verilmiştir.

Tablo 2 Performans Testi-1 soru analizi örneği

Kategori(%)	T	B	"1"	S	"0"	L
10	3	63	-	4	27	21

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların % 28 i "belirsiz form" demişler, % 32 si gerekçe göstermeden "belirsiz" demişler, %21 i cevabı limit bağlamında vermişler, %3 ü ise belirsizliğin, ifadenin " ∞ " u içermesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. %27 si ise "0" cevabına 0'ın yutan eleman olmasını gerekçe göstermiştir.

Tablodaki veriler değerlendirilirken, katılımcıların gerekçelendirmelerinin de yüzdeleri verilmesi verdikleri cevapların anlamlandırılması açısından önemli olduğu için bu bilgilere de yer verilmiştir.

3.4.1.2. Performans Testi-2

Performans Testi-2'deki her bir sorunun çözümü “doğru”, “kısmi cevap”, “yanlış” ve “boş (cevap yok)” kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Değerlendirme önceden hazırlanan ve her bir soru için hangi çözümlerin doğru, kısmen doğru, yanlış ve cevap yok şeklinde kabul edileceğini belirten cevap anahtarına göre yapılmıştır. Elde edilen bulguların betimsel analizi yüzdeleriyle birlikte ayrıntılı olarak verilmiştir.

Aşağıda Tablo3'te performans testinde bulunan sorulardan birinin nasıl değerlendirildiği gösterilmektedir. Diğer sorular için hazırlanan tablolar Ekler kısmında verilmiştir.

Performans Testi (2)- Soru 2

Tablo 3 Performans Testi-2 soru analizi örneği

Kategori	Açıklama
Doğru	• $-\frac{1}{2}$ cevabını verenler
(D)	• yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar
Kısmi Cevap	•Eşlenik alma yöntemini uygulama
(KC)	• L' Hospital kuralını uygulayanlar
Yanlış	• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar
(Y)	
Cevap Yok	• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
(CY)	

Bu kısımda süreç ayrıntılı olarak incelenmemiştir. Öncelikle öğretmen ve öğretmen adaylarının limit durumlarındaki belirsizlik durumlarını ifade etmeleri ve sonrasında limit durumunda karşılaştıkları bu belirsizlik durumlarını bir takım matematiksel işlemler yaparak çözüme etkinliklerindeki genel performansları betimlenmiştir.

3.4.1.3. Görüşmeler

Araştırma soruları bağlamında veriler incelendi ve elde edilen bütün veriler kategorilendirildi. Kategorilendirilen veriler yorumlanması sürecinde ise betimsel istatistik yöntemlerinden yararlandı. Katılımcılardan elde edilen veriler kategorilendirilerek tablolaştırılmıştır. Tablolarda katılımcıların cevaplarından örnek cümleler bulunmaktadır. Her bir tablonun altında tabloların genel değerlendirmeleri ve tabloda kategorilendirilemeyen ilginç cevaplar bulunmaktadır. Örnek tablo aşağıda verilmiştir.

Tablo 4 Görüşme analizi tablosu örneği.

Soru x:		
Grup	Yüzde	Örnek alıntılar
Bu kısımda, kategoriler bulunmaktadır.	Benzer cevapların yüzdelik değerleri bulunmaktadır.	<i>Bu kısımda, bu kategori içerisinde ele alınan örnek cevaplar verilmiştir.</i>

3.4.2. Süreç Değerlendirmesi

Veri analizi, nitel araştırmacılar için en fazla güçlük çekilen aşamalardan birisidir. Toplanan verilerin analizini yapılarak elde edilen bulguların yazılı bir rapor olarak sunulması bu konuda deneyimli araştırmacılar için bile kolay geçen bir süreç değildir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Nitel verilerin analizi konusunda literatürde farklı kavramlar ve yaklaşımlar bulunmaktadır. Fakat bütün bu yaklaşımlardan öne çıkan nokta verilerin betimlenmesi ve kategorilerin ortaya çıkmasına verilen önemdir. Bununla birlikte

araştırmacının yorumları ve ortaya çıkan kategorileri anlamlı bir Şekilde iliŐkilendirilmesi de önemlidir. Her ne kadar farklı veri analiz yaklaşımları ortaya çıkarılsa da yapılan analiz derinliğine göre veri analizini “betimsel analiz” ve “içerik analizi” adlarında iki grupta inceleyebiliriz (Yıldırım ve Şimşek, 2006; Altunışık ve diğerleri, 2004). Betimsel analizde elde edilen veriler daha önceden belirlenen başlıklar altında özetlenir ve yorumlanır. Kısaca betimleme yapılıır. İçerik analizi ise bunun biraz daha ileri düzeye götürülmesi Őeklinindedir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Bu kısımda zm sürecinin ayrıntılı analizine yer verilecektir. Yani betimsel analizden yararlanılacaktır.

3.5. GEÇERLİK ve GÜVENİRLİK

Nicel araştırmalarda bilimselliği belirleyen temel iki öğe olan geçerlik ve güvenirlik nitel araştırmalarda farklı anlamlarda yorumlanmaktadır. Nitel araştırmanın doğası gereği geçerlik ve güvenirlik kavramları anlam ve alınacak önlemler bakımından nicel araŐtırmalardan farklılık arz etmektedir. Nicel araştırmalarda araŐtırmacıdan araştırma sorusuna uygun araştırma deseninin oluŐturulması ve doğru istatistiksel yöntemler ve tanımlar kullanarak sonucu rapor etmesi beklenir. Nitel araştırmada ise toplanan verilerin ayrıntılı olarak rapor edilmesi ve araştırmacının sonuçlara nasıl ulaŐtıĐını ayrıntılı olarak açıklaması geçerlik ve güvenirliğin önemli bir lt kabul edilmektedir (Cohen vd., 2000).

Lincoln ve Guba (1985) (Aktaran, Yıldırım ve Şimşek, 2006) nitel bir araştırmada i geçerlik yerine “inandırıcılık”, dış geçerlik yerine “aktarılabirlik” kavramlarını, i güvenirlik yerine “tutarlılık” ve dış güvenirlik(tekrar edilebilirlik) yerine ise “teyit edilebilirlik” kavramlarını kullanmayı tercih etmektedirler. Bu çalışmada veri toplama ve veri analizi yöntem ve metodu bakımından yorumlayıcı(nitel) araştırma özelliği taşımaktadır. Daha öncede bahsedildiği gibi bir evrene genelleme yapma gibi bir amacı yoktur. Dolayısı ile bu çalışmada geçerlik güvenirlik kavramlarından nitel araŐtırmalardaki anlamları ile bahsedilecektir. Öncelikle nicel araştırmada i geçerlik anlamında kullanılan bu çalışmanın “inandırıcılık” özelliğinden bahsedelim. İnanırıcılığın sağlanması için kullanılan yöntemler uzun süreli etkileşim, derinlik

odaklı veri toplama, uzman incelemesi ve katılımcı teyidi olarak aşağıdaki Tablo 5’te gösterilmektedir. Araştırmacı veri kaynakları (katılımcılar, dokümanlar) ile uzun süreli etkileşim halinde olmuştur. Dokümanların hazırlanması süreci 4 ay kadar sürmüştür ve bu süreçte uzman görüşlerine sıkça başvurulmuştur. Ayrıca çalışmanın son aşamasında katılımcılarla yapılan görüşmeler katılımcı teyidi niteliği de taşımaktadır. Aktarılabilirlik özelliğini sağlamak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerinden bahsedilmektedir. Çalışma, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının öğretmen ve öğretmen adaylarının görüş ve performansları bağlamında becerilerini belirlemeye yönelik olduğu için belirli sayıda öğretmen adayından oluşan çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Ayrıca çalışmada kullanılan yöntemler ve veri toplama araçları sınırlılıklarıyla birlikte ayrıntılı bir şekilde açıklanmış, elde edilen bulguların nasıl elde edildiği ve yorumlandığı değerlendirme örnekleriyle gösterilmiştir.

Tablo 5 Geçerlik ve Güvenirlik Konusunda Nicel ve Nitel Araştırma Kabul Gören Kavramların Karşılaştırılması.

Ölçüt	Nicel Araştırma	Nitel Araştırma	Kullanılan Yöntemler Açıklama
Araştırma sonuçları yoluyla gerçeğin doğru temsili	İç geçerlik	İnandırıcılık	Uzun süreli etkileşim Derinlik odaklı veri toplama Çeşitleme Uzman incelemesi Katılımcı teyidi
Sonuçların uygulanması	Dış geçerlik (genelleme)	Aktarılabilirlik (Transfer edilebilirlik)	Ayrıntılı betimleme Amaçlı örnekleme
Tutarlılığı sağlama	İç güvenirlik	Tutarlılık	Tutarlılık incelemesi
<i>Nesnel, yansız olma</i>	Dış güvenirlik	Teyit edilebilirlik	Teyit incelemesi

Not: Erladson, Haris, Skipper ve Allen (1993) tarafından yapılmış olan bir çalışmadan Yıldırım ve Şimşek (2006) tarafından Türkçeye uyarlanmıştır.

Teyit edilebilirlik özelliği için, test sonucunda elde edilen bulgularla etkinlikler sürecinde elde edilen bulgular birlikte yorumlanmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmeler neticesinde elde edilen bulgular tekrar yorumlanmış ve gözlemlenen tutarsızlıklardan da bahsedilmiştir. Araştırmanın son aşamasında öğretmen adayları ile süreç değerlendirmesine yönelik yapılan görüşmeler, elde edilen bulguların katılımcılar tarafından teyit edilmesi niteliği taşımaktadır. Bunun yanında veri analizleri araştırmacı ile birlikte üç uzman tarafından yapılarak veri analizinin güvenilirliği sağlanmıştır. Yine veri analizinden elde edilen yorumlar başka bir araştırmacıya sunulurken yorumları alınarak tekrar düzenlenmiştir. Yukarıdaki Tablo 5'te nicel araştırmalarda geçerlik güvenilirlik ile ilgili kavramların nitel araştırmalarda ne anlama geldiği gösterilmiştir.

IV. BULGULAR

Bu bölümde bulgular üç ana başlık altında toplanarak yorumlanmıştır. Birinci başlık altında katılımcılara uygulanan Performans Testi-1 (PT1)'in sonuçları ayrıntılı olarak yorumlanmıştır. İkinci başlık altında katılımcılara uygulanan Performans Testi-2 (PT2)'nin sonuçları ayrıntılı olarak yorumlanmıştır. Üçüncü başlıkta ise katılımcılara uygulanan yarı yapılandırılmış mülakat sorularının verileri ayrıntılı olarak yorumlanmıştır.

4.1. PERFORMANS TESTLERİ

4.1.1. Performans Testi-1

Bu bölümde öğretmen ve öğretmen adaylarının Performans Testi-1'e verdikleri cevapların sonuçları betimsel analiz kullanılarak öncelikle genel olarak daha sonra soru soru en son olarak ise benzer tarzlar karşılaştırma yapmak amacıyla sunulmuştur. Önce Tablo6 yardımıyla genel değerlendirmeleri yapılacak sonra katılımcıların gerekçeli açıklamaları da dikkate alınarak sorular değerlendirmeleri ayrıntılı olarak sunulacaktır.

Genel Sonuçlar

Öğretmen ve öğretmen adaylarının cevapları tanımsız (T), belirsiz (B), 1, sonsuz (S), 0 ve limit düşünerek (L) olarak sınıflandırılmıştır. Öğretmen ve öğretmen adaylarının gördükleri ifadeler karşısında daha çok tanımsız belirsiz ve sonsuz cevaplarını tercih ettikleri görülmektedir. Limit durumuna göre cevap verdiklerini vurgulayanların yüzdesinin azlığı dikkat çekmektedir. Tablodan elde edilen verilerden, verilen cevapların “tanımsız”, “belirsiz”, “1”, “0”, “sonsuz” etrafında yoğunlaştığı görülmektedir.

Tablo 6 Performans Testi-1 Genel değerlendirmeleri

Cevaplar Soru no	T (%)	B (%)	“1” (%)	S (%)	“0” (%)	L (%)
1	12	80	5	2	-	42
2	44	52	4	1	1	24
3	4	52	37	4	1	30
4	-	2	98	-	-	-
5	10	59	-	22	-	20
6	11	14	-	2	-	72
7	57	5	1	34	-	22
8	1	3	-	92	-	10
9	1	4	-	92	-	9
10	3	63	-	4	27	21
11	5	74	-	12	7	32
12	2	21	68	3	-	7
13	9	58	25	1	1	18
14	4	3	-	-	93	-
15	3	7	-	85	-	40
16	2	8	-	85	-	24
17	1	6	1	6	38	22
18	1	4	-	92	-	32
19	2	27	1	54	-	18
20	-	2	-	81	-	52
21	62	24	18	-	22	16

NOT: Bir öğrenci, herhangi bir soruya birden fazla kategoriye girebilecek tarzda cevap verebildiği için satır toplamları tüm öğrenci sayısı ile aynı (veya %100) olmayabilir. Tabloda olmayan farklı cevaplar da tablonun altındaki açıklamalar da verilmiştir.

$\frac{\infty}{\infty} = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

$\frac{\infty}{\infty} = ?$ sorusuna katılımcıların %42’sinin “belirsiz” cevabını limit bağlamında vermeleri ekte yazdıkları açıklamalardan elde edilmekle birlikte limit bağlamı dışında %12’sinin “tanımsız” cevabını vermesi, %5 gibi bir kısmının da 1 cevabını vermesi dikkat çekicidir. ”1” cevabını veren katılımcılar “Bir sayının kendisine bölümü 1’dir” mantığını gerekçeli açıklamalarında belirtmişlerdir. %42’sinin belirsiz demelerine gerekçe olarak bu durumun belirsiz formlardan biri olmasını göstermişlerdir.%38’i ise sonucun ne olduğunun belirli olamamasını gerekçe göstererek belirsiz cevabını vermişlerdir. Katılımcıların %2’si ise bu şekilde bir yazımın yanlış olacağını belirtmişlerdir.

$\frac{0}{0}=?$ sorusuna ilişkin bulgular

$\frac{0}{0}=?$ sorusuna katılımcıların %24'ü limit bağlamında “belirsiz” cevabını vermişlerdir. Gerekçe olarak “belirsiz formlardan biri” olarak ifade etmişlerdir. %22'si ise bu ifadenin sonucunun net olarak bilinmemesi gerekçesiyle belirsiz cevabını vermişlerdir. İfadenin sonucunun net olmadığı görüşünü savunan katılımcılar bu düşüncelerine, ifadeyi bir reel sayıya eşitleyip cebirsel işlem yapma (çapraz çarpım) yoluna giderek ulaşmışlardır. %6 sı ise gerekçesiz olarak belirsiz cevabını vermişlerdir. %44'ü ise paydada “0” olmasının tanımsızlık oluşturacağı gerekçesiyle tanımsız cevabını vermişlerdir. Katılımcıların çok az bir kısmı ise (%1'i), “0” ın tersi olamayacağı gerekçesiyle tanımsız cevabını verdikleri görülmektedir.

$1^\infty = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Katılımcıların gerekçeli cevapları incelendiğinde %42'sinin “ 1^∞ belirsizliğini” kastederek “belirsiz” dedikleri, %30'unun ise cevaplarını limit bağlamında düşündüklerini direkt ifade ettikleri, %10'unun ise “ ∞ ” içeren bu gibi durumların hepsinin belirsiz olduğunu düşündüklerini belirtmişlerdir. %37'si ise hangi bağlamda düşünülürse düşünülürse cevabın “1” olacağını belirtmişlerdir.

$5^0 = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Katılımcıların büyük bir kısmı (%98'i) bu soruyu doğru cevaplamıştır. Belirsiz cevabını veren (%2'i) katılımcının ise soruyu dikkat etmemekten kaynaklanan bir hata yapmış olabileceği düşünülmektedir.

$\infty^\infty = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Katılımcıların %43'sı gerekçeli açıklamalarında “belirsiz” cevabını, limit bağlamındaki belirsizlik durumlarına asilimile (benzeterek) olarak verdiklerini, %16'sı ise “belirsizlik” durumunun ifadenin “ ∞ ” u içermesinden kaynaklandığını

belirtmişlerdir. %20'si limit bağlamında düşünüp cevabın “ ∞ ” a iraksayacağını, %2'si ise cevabı mantıkla bulduklarını belirtmişlerdir. %10'u ise böyle bir şeyin tanımlı olmadığını belirtmişlerdir.

$\frac{1}{\infty} = ?$ **sorusuna ilişkin bulgular**

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %38'inin gerekçe göstermeden “0” cevabını verdikleri, %72'sinin ise limit bağlamını düşünerek “0” cevabını verdikleri sonucuna ulaşılmıştır. %9'unun “bölme algoritmasına aykırıdır” gerekçesiyle “tanımsız” cevabını gerekçelendirdikleri, %11'ininse “belirsizlik” durumunun ifadenin “ ∞ ” u içermesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. %11'i ise sonucu limit bağlamında düşündüklerini ve sonucun asla sıfır olamayacağını ama “sıfıra çok yakın” bir sayı olabileceğini belirtmişlerdir. Katılımcıların %2'si ise bu şekilde bir yazımın yanlış olacağını, %11'i ise sonucun 0'a çok yakın bir sayı olacağını belirtmişlerdir.

$\frac{1}{0} = ?$ **sorusuna ilişkin bulgular**

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %12'sinin gerekçe göstermeden “ ∞ ” dediği, %22'sinin ise limit bağlamında “ ∞ ” dediği, %57'sinin “bölme algoritmasını düşünerek” mantığıyla tanımsız dediği verilerden elde edilmiştir. “belirsiz” cevabını veren katılımcıların %5'i ise gerekçe olarak “sıfıra bölme olmaz” dedikleri görülmektedir. Bu ise bu katılımcıların (%5'i) tanımsız ve belirsiz kavramlarını aynı anlamda kullandıklarını ortaya koymaktadır.

$2\infty + 3\infty = ?$ **sorusuna ilişkin bulgular**

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %82'sinin “sonsuzun 2 katı ile 3 katının toplamının sonucu değiştirmeyeceği” gerekçesiyle “ ∞ ” dediği, %10'unun ise limit bağlamında “ ∞ ” dediği görülmektedir. %3'ünün ise “belirsizlik” durumunun ifadenin “ ∞ ” u içermesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir.

4. $\infty = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %83'ünün “sonsuzun 4 katını almanın sonucu değiştirmeyeceği” gerekçesiyle “ ∞ ” dediği, %9'unun ise limit bağlamında “ ∞ ” dediği görülmektedir. %4'ünün ise “belirsizlik” durumunun ifadenin “ ∞ ” u içermesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir.

0. $\infty = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların % 28'i “belirsiz form” demişler, % 32'si gerekçe göstermeden “belirsiz” demişler, %21'i cevabı limit bağlamında vermişler, %3'ü ise belirsizliğin, ifadenin “ ∞ ” u içermesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. %27'si ise “0” cevabına 0'ın yutan eleman olmasını gerekçe göstermiştir.

$\infty - \infty = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %24'ünün “farklı sonuçlar çıkabilir” gerekçesiyle “belirsiz” dediği, %32'sinin cevaplarını limit bağlamında verdikleri, % 44'ünün “belirsiz formlardan birisi” gerekçesiyle “belirsiz” dediği, %6'sının ise ifadenin “ ∞ ” u içermesi gerekçesiyle “belirsiz” dediği, %7'sinin “aynı iki şeyin farkı sıfırdır” gerekçesiyle “0” dediği, %5'inin ise gerekçe belirtmeden “tanımsız” dediği görülmektedir.

1.1.1...=? sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %68'inin “1” cevabına “sonsuz kere 1'in çarpımı 1'dir” şeklinde gerekçe gösterdikleri, %7'sinin cevaplarını limit bağlamında düşündükleri, %21'inin ise 1^∞ ile aynı olduğu için bu ifadenin de bir belirsizlik durumu olduğunu düşündükleri, görülmektedir.

$\infty^0 = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %25'inin “bir sayının 0. kuvveti 1'dir” gerekçesiyle “1” dediği, %36'sının “belirsiz formlardan birisidir” gerekçesiyle “belirsiz” dediği, %18'inin limit bağlamı düşünerek cevap verdiği, %22'sinin ifadenin ∞^0 u içermesi gerekçesiyle “belirsiz” dediği, %5'inin

“üs tanımına aykırıdır” gerekçesiyle “tanımsız” dediği, %4’ünün ise gerekçe göstermeden “tanımsız” dediği görülmektedir. Katılımcıların %2 si ise bu şekilde bir yazımın yanlış olacağını belirtmişlerdir.

$0^5 = ?$ **sorusuna ilişkin bulgular**

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %93’ünün gerekçesiz olarak “0” dediği görülmektedir. Belirsiz cevabını veren (%3’ü) ve tanımsız cevabını veren (%4’ü) katılımcının ise soruyu dikkat etmemekten kaynaklanan bir hata yapmış olabileceği düşünülmektedir.

$\frac{\infty}{2} = ?$ **sorusuna ilişkin bulgular**

Aşağıdaki tabloda katılımcıların soru15’ e verdikleri cevapların yüzdeleri verilmiştir. Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %65’inin “sonsuzun yarısını alsanız gene sonsuzdur” şeklinde gerekçe göstererek “ ∞ ” dediği, %40’inin ise limit bağlamında “ ∞ ” dediği, %7’sinin ise ifadenin “ ∞ ” u içermesi gerekçesiyle “belirsiz” dediği görülmektedir.

$\infty - 1 = ?$ **sorusuna ilişkin bulgular**

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %85’inin “sonsuzdan 1 çıkması sonucu etkilemez” gerekçesiyle “ ∞ ” dediği, %24’ünün cevaplarını limit bağlamını düşünerek verdikleri, %8’inin ise ifadenin “ ∞ ” u içermesi gerekçesiyle “belirsiz” dediği görülmektedir

$\frac{1}{100\dots 0} = ?$ **sorusuna ilişkin bulgular**

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %38’inin “payda büyürse kesir sonsuzda sıfır olur” gerekçesiyle “0” dediği, %22’sinin limit bağlamında düşündüğü, %27’sinin “payda büyürse sonuç sıfıra yaklaşır asla sıfır olmaz” gerekçesiyle “0” dediği, %6’sının ise “paydadaki sıfır sayısı belirsiz olduğu” gerekçesiyle “belirsiz” dediği görülmektedir. Katılımcıların %2’si ise bu şekilde bir yazımın yanlış olacağını, %27’si ise sonucun 0’a çok yakın bir sayı olacağını belirtmişlerdir.

$\infty + 103 = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %92'sinin “sonsuz bir sayı eklemek veya çıkarmak sonucu değiştirmez” gerekçesiyle “ ∞ ” dediği, %32'sinin cevabı limit bağlamında düşündükleri, %4'ünün ise ifadenin “ ∞ ” u içermesi gerekçesiyle “belirsiz” dediği görülmektedir.

$\infty + \infty = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %54'ü “sonsuz sonsuz eklersen yine sonsuz gider” gerekçesiyle “ ∞ ” dediği, %18'inin limit bağlamını düşündüğü, %27'sinin ise ifadenin “ ∞ ” u içermesi gerekçesiyle “belirsiz” dediği görülmektedir. Katılımcıların %17'si ise sonucun 0'a çok yakın bir sayı olacağını belirtmişleridir.

$1+2+3+4+\dots=?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde; katılımcıların %60'ının gerekçesiz olarak “ ∞ ” dediği, %52'sinin cevabı limit bağlamında düşündüğü, %21'inin “sonsuz ıraksar” gerekçesiyle “ ∞ ” dediği görülmektedir. Katılımcıların %12'sinin ise soruda olmamasına rağmen cevaba gerekçesiz olarak “ $n(n+1)/2$ ” dediği görülmektedir. Katılımcıların %2'si ise sonucun ∞ 'a çok yakın bir sayı olacağını belirtmişleridir.

$0^0 = ?$ sorusuna ilişkin bulgular

Verilen cevapların gerekçe kısımları incelendiğinde, katılımcıların % 56'sının “üs tanımına aykırılık” gerekçesiyle tanımsız dediği, %18'inin “sonucunun ne olduğunun bilinmemesi” gerekçesiyle belirsiz dediği, 18'inin “bir sayının sıfırıncı kuvveti 1'dir” gerekçesiyle “1” dediği, %22'sinin ise “0'ın tüm kuvvetleri sıfırdır” gerekçesiyle “0” dediği görülmektedir. Katılımcıların %16'sı ise böyle bir durumun limit durumunda karşılıklarını gerekçe göstererek tanımsız veya belirsiz cevaplarına yönlendikleri gerekçeli açıklamalarından elde edilmektedir.

4.1.2. Performans Testi-2

Bu bölümde 113 katılımcının performans testi2'ye verdikleri cevapların ayrıntılı yorumlanmasına yer verilecektir. Yorumlar her bir sorunun ayrı ayrı değerlendirmelerinden oluşacaktır. Bunun için betimsel istatistik yöntemlerinden yararlanılacaktır. Veriler ilk olarak Doğru (D), Kısmi Cevap (KC), Yanlış (Y), Cevap Yok (CY), Tanımsız (T) ve Belirsiz (Blrz) olarak sınıflandırılmıştır (Tablo 7)

Tablo 7. deki veriler incelendiğinde her biri belirsizlik durumları olan soruların, katılımcıların bazıları tarafından tanımsız olarak değerlendirilmesi ilgi çekicidir. Performans Testi-1'e göre bu testteki soruları boş bırakanların çoğu, gerekçeli açıklamaları dikkate alındığında, soruların çözümlerini hatırlayamamalarından kaynaklanmaktadır. Yanlış cevaplayanların büyük bir çoğunluğu da gerekçeli açıklamalarında çözümü tam hatırlayamadıklarından yakınmaktadır.

Tablo 7 Performans Testi-2 Öğrenci ve Öğretmen Birleştirilmiş Sonuçlar

Cevaplar	D %	KC %	Y %	CY %	T%	Blrz%
Soru no						
1	67	4	7	22	72	18
2	11	7	45	37	38	62
3	31	2	21	46	48	52
4	28	1	20	51	76	24
5	73	0	3	24	18	82
6	20	7	12	61	12	88
7	46	3	12	39	58	42
8	19	3	26	52	26	74

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$ sorusuna ilişkin bulgular

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların büyük çoğunluğunun (%67'si) bu soruya doğru cevap verdikleri görülmektedir. Katılımcıların %52'si ifadeyi çarpanlarına ayırıp sadeleştirerek belirsizlik durumunu ortadan kaldırıp çözüme ulaşmışlardır. %15'i ise payın ve paydanın ayrı ayrı türevlerini alarak x=2 değerini yazıp sonuca ulaşmışlardır.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{4x + 1} \text{ sorusuna ilişkin bulgular}$$

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların %45'inin bu soruyu yanlış cevapladıkları, %37'sinin ise soruyu boş bıraktıkları görülmektedir. Yanlış cevap veren katılımcıların çözümlerinde pay ve paydanın ayrı ayrı türevini almaya çalıştıkları görülmektedir. %38'inin tanımsız cevabını vermesi ise dikkat çekicidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x) \text{ sorusuna ilişkin bulgular}$$

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların %31'i bu soruyu doğru cevaplarırken, %21'i de yanlış cevaplamıştır. %46'sının boş bırakması ve %48'inin soruyu boş bırakması ise ilgi çekici verilerdir.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x^2 - 4)}{x - 2} \text{ sorusuna ilişkin bulgular}$$

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların %28'i bu soruyu doğru cevaplarırken %20'si yanlış cevaplamıştır. %51'inin soruyu boş bırakması ilgili yöntemi hatırlayamadıkları sonucuna götürmektedir. %76'sının ise tanımsız demesi limit durumunu düşünmeden paydadaki belirsizlik durumuna takıldıklarını göstermektedir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 + x + 1} \text{ sorusuna ilişkin bulgular}$$

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların büyük çoğunluğunun (%73'ü) soruya doğru cevap verdikleri, %24'ünün ise soruyu boş bıraktığı görülmektedir. %18'inin soruya tanımsız demesi ilgi çekici cevaplar arasındadır. Doğru cevaplar incelendiğinde doğru cevapların %54'ünün paydaki 3 ve paydadaki 2 nin yuvarlak içine alınıp direkt 3/2 olarak yazıldığı, %19'unun ise pay ve paydayı ayrı ayrı x^2 parantezine aldıktan sonra limit kullanarak sonucu 3/2 buldukları verilerden elde edilmiştir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - x)$ sorusuna ilişkin bulgular

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların %20'si soruyu doğru cevaplandırırken %12'si ise yanlış sonuçlara ulaşmışlardır. %61'inin boş bırakması sorunu çözümünde kullanılan eşlenik yöntemi veya kuralsal formülü hatırlayamadıklarını veya bu çözüme ulaşamadıklarını göstermektedir. %12'sinin tanımsız demesi ise verilen ifadenin paydada tanımsızlık oluşturan bir durum olmaması sebebiyle ilginç bir veridir.

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ sorusuna ilişkin bulgular

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların %46'sının soruyu doğru cevaplandığı görülürken %12'sinin yanlış cevapladığı görülmektedir. İlgili çözüm sürecini hatırlayamama gerekçesiyle %39'unun soruyu boş bıraktığı görülmektedir. %58'inin ise ifadeye “tanımsız” demesi ilgi çekici bir veridir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x + 2} \right)^{3x}$ sorusuna ilişkin bulgular

Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde soruyu doğru cevap verenlerin azlığı dikkatlerden kaçmazken (%19'u), %26'sı ise soruya yanlış cevap vermişlerdir. %52'sinin soruyu boş bırakması ise ekte yazdıkları “çözümü hatırlamıyorum” gerekçesiyle anlam kazanmaktadır. %26'sının ise belirsiz olan bu duruma tanımsız cevabını vermesi ilgi çekicidir.

4.1.3. PT1'de ki paralel soruların karşılaştırılması

Tablo 8 PT1'deki soru 1,4 ve 6'nın karşılaştırılması

Kategori(%)	T	B	“1”	S	“0”	L
$\infty - \infty = ?$	5	74	-	12	7	32
$\infty + \infty = ?$	2	27	1	54	-	18
$2\infty + 3\infty = ?$	1	3	-	92	-	10

Tablo incelendiğinde $\infty + \infty$ ifadesine katılımcıların %54 ü “sonsuz” derken, bu durumla tamamıyla aynı mantıktan düşünülmesi gereken $2^\infty + 3^\infty$ ifadesine %92 sinin “sonsuz” demesi ilgi çekici bir durumdur. Cevapları limit bağlamında düşünmenin %18’den %10’a düşmesi de bu anlamda dikkat edilmesi gereken bir ayrıntıdır. $\infty - \infty$ ifadesine “0” cevabını veren katılımcıların (%7’si), $\infty + \infty$ ifadesine $2 \cdot \infty$ ve $2^\infty + 3^\infty$ ifadesine $5 \cdot \infty$ dememesi ilgi çekicidir.

Tablo 9 PT1’deki soru 1 ve 6’nın karşılaştırılması

Kategori(%)	T	B	“1”	S	“0”	L
1.1.1...=?	2	21	68	3	-	7
$1^\infty = ?$	4	52	37	4	1	30

Tablo incelendiğinde, “1.1.1...” ifadesini katılımcıların %7 sinin limit bağlamında düşünmesi ile “ 1^∞ ” ifadesini %30’unun limit bağlamında düşünmesi ilgi çekicidir. “1.1.1...” ifadesine %68 inin “1” cevabını vermesi “ 1^∞ ” ifadesine ise %37’sinin “1” cevabını vermesi ilgi çekicidir.

4.1.4. PT1 ve PT2’deki paralel soruların karşılaştırması

Tablo 10 PT1’deki soru1’in ve PT2’deki soru2 ve soru5’ün karşılaştırması

Testler	PT1						PT2			
Eşleştirilen Sorular	Soru1						Soru 2		Soru 5	
Kategori	T	B	“1”	S	“0”	L	T	B	T	B
<i>Yüzde</i>	12	80	5	2	-	42	38	62	18	82

Performans Testi-1, soru 1’ e tanımsız cevabını veren katılımcıların (%12), %83’ünün Performans Testi-2 deki soru2 ve %64’ünün soru5’e belirsiz cevabını vermeleri ilgi çekicidir.

Tablo 11 PT1’deki soru2’nin ve PT2’deki soru1 ve soru4’ün karşılaştırması

Testler	PT1						PT2			
Eşleştirilen Sorular	Soru2						Soru 1		Soru 4	
Kategori	T	B	“1”	S	“0”	L	T	B	T	B
<i>Yüzde</i>	44	52	4	1	1	24	72	18	76	24

Performans Testi-1, soru 2’ ye tanımsız cevabını veren katılımcıların (%44), %68’inin Performans Testi-2 deki soru1’e belirsiz demesi ve %72 sinin soru4’e belirsiz cevabını vermeleri ilgi çekicidir.

Tablo 12 PT1’deki soru3’ün ve PT2’deki soru8’in karşılaştırması

Testler	PT1						PT2	
Eşleştirilen Sorular	Soru 3						Soru 8	
Kategori	T	B	“1”	S	“0”	L	T	B
<i>Yüzde</i>	4	52	37	4	1	30	26	74

Performans Testi-1, soru 3’ e “1” cevabını veren katılımcıların (%37), %72’sinin Performans Testi-2 deki soru 8’e “1[∞]” belirsizliği diyerek ifadenin çözüm yoluna gitmeleri ilgi çekicidir. Ayrıca ilk testte üs tanımına uymuyor gerekçesiyle tanımsız diyen (%4) katılımcıların ise %96’sının 2. testteki soru 8’de ifadeye “belirsiz” demeleri de dikkat çekicidir.

Tablo 13 PT1'deki soru10'un ve PT2'deki soru3'ün karşılaştırması

Testler	PT1						PT2	
Eşleştirilen Sorular	Soru 10						Soru 3	
Kategori	T	B	“1”	S	“0”	L	T	B
<i>Yüzde</i>	3	63	-	4	27	21	48	52

Performans Testi-1, soru 10'a “0” cevabını veren katılımcıların %62'sinin performans testi -2 deki soru 3'e “0.∞ belirsizliği” demeleri ilgi çekicidir.

Tablo 14 PT1'deki soru11'in ve PT2'deki soru6 ve soru7'nin karşılaştırması

Testler	PT1						PT2			
Eşleştirilen Sorular	Soru11						Soru 6		Soru 7	
Kategori	T	B	“1”	S	“0”	L	T	B	T	B
<i>Yüzde</i>	5	74	-	12	7	32	12	88	58	42

Performans Testi-1, soru 11'e “0” cevabını veren katılımcıların (%7), %73'ünün diğer testteki soru 6 da soruyu çözemeyip “belirsiz” durumunu işaretlemeleri dikkat çekicidir. %42'sinin ise soruyu çözemeyip “tanımsız” durumunu işaretlemeleri dikkat çekicidir. Ayrıca ilk teste sonsuz cevabını veren katılımcıların (%12'sinin), %92 sinin diğer testteki soru 6 da “belirsiz” durumunu işaretlemesi, %56 sının ise soru 7 de “tanımsız” durumunu işaretlemesi dikkat çekicidir.

4.2. Süreç Analizi

Performans testindeki verilerden ayrı olarak katılımcıların PT1, PT2 ve yarı yapılandırılmış görüşmelerdeki çözüm süreçlerinin genel bir değerlendirmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Katılımcıların PT1, PT2 ve Yarı yapılandırılmış görüşmelerde en çok hata yaptıkları belirlenen örneklere yer verilecektir. Süreç değerlendirmesi; katılımcıların verilen soruları yorumlama sürecinde gözlemlenen, çözümü ifade etme

tercihleri, uygulamaları sırasında karşılaştıkları zorluklar gibi hata kaynağı olabilecek durumları görmeye yardımcı olabilir. Burada katılımcıların çözüm süreçlerinde en çok hata yaptıkları belirlenen örneklere yer verilmiş ve yarı yapılandırılmış görüşmeler ile çözüm süreçlerinin genel bir değerlendirmesi yapılacaktır.

4.2.1 Bazı Cevap Örnekleri

Bu kısımda performans değerlendirmesi kısmında tablolar üzerinde betimlenmiş olan bulgulara ilişkin öğrencilerin verdikleri cevaplar değerlendirmeleriyle birlikte verilecektir.

4.2.1.1. PT1'deki 1. ve 2. soruya ilişkin bulgular

Soru1; (bkz: EK1) katılımcıların limit bağlamı dışında verilen sembolik bir ifadedir. Katılımcıların bu ifadeyi bir nesne olarak mı yoksa bir limit süreci olarak mı göreceklere veya bunun dışında farklı bir boyutta mı gördükleri tespit edilmeye çalışılmak amacıyla sorulmuştur. Soru2 de benzeri bir amaçla sorulmuştur, farklı olarak direkt tanımsızlık durumuna mı odaklanacaklar yoksa biraz daha düşünüp süreci mi belleklerinde çağrıştıracaklar tespit edilmeye çalışılmıştır.

$\frac{\infty}{\infty} = ?$ ” sorusuna katılımcıların verdikleri cevaplar incelendiğinde cevaplarının “belirsiz”, “tanımsız”, “1”, “böyle bir yazım yanlıştır” şeklinde yoğunlaştığı görülmektedir. Yazdıkları cevapların gerekçeli açıklamaları incelendiğinde katılımcıların soruları çözerken bir önceki yazdıkları cevapları silme eğiliminde oldukları görülmektedir. Yapılan görüşmelerden anlaşıldığı kadarıyla bunun temel sebeplerinden birisi, katılımcıların ifadeyi önce belirsiz olarak düşünüp (belirsiz formlardaki) sonra da genişletilmiş reel sayılarda sonsuz sembolünün bir sayı gibi kullanılmasını anımsayarak cevaplarını değiştirmek istemeleri olabilir.

Katılımcıların bir kısmı $\frac{\infty}{\infty}$ ifadesinin bir sayı olup olmadığını cebirsel yolla ispat yolunu seçerken bir kısmı da direkt limit durumundaki belirsiz form olduğunu

düşüncesiyle ispat yapmadan belirsiz cevabını seçmişlerdir. $\frac{0}{0}$ sorusunda da katılımcılar benzer bir ikileme kalmışlardır. Burada farklı olarak bir de tanımsız kavramı cevap kategorilerine eklenmektedir.

4.2.1.2. PT2'deki 2.,3. ve 6. soruya ilişkin bulgular

Soru 2 ,3 ve 6'da (bkz: EK2) kuralı hatırlandığı zaman çok kolay çözülebilen ama kuralı hatırlanmadığı zaman ise çözülmesi zor olan sorular bulunmaktadır. Katılımcıların büyük çoğunluğu bu soruları ya boş bırakmış ya da yanlış çözmüşlerdir. İlgili kuralı hatırlayamayanların ise denedikleri yollar genellikle diğer sorulardaki kuralların bu soruda da uygulanması şeklinde olmuştur. Bu çözümlerin ise çok azı doğru cevapla sonuçlanmıştır. Belirsizlik olan bu sorulara tanımsızlık cevabını veren katılımcıların tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını ya birbiri yerine kullandığı ya da bu kavramların anlamlarını tam olarak kavrayamadığı söylenebilir. Bu durumu bu soruya doğru cevap veren katılımcıların birçoğunda da görmek mümkün olmaktadır. Bir soruya bir nedeni gerekçe göstererek belirsiz derken gerekçelerinin benzeri şartların olduğu başka bir soruya tanımsız diyebilmektedir.

4.3. MÜLAKATTAN ELDE EDİLEN VERİLERİN YORUMLANMASI

Bu bölümde, araştırmada elde edilen verilerin, üçüncü bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri sonucunda, araştırmanın alt problemlerine göre elde edilen bulgulara, bunlara ilişkin yorumlara, açıklamalara ve tartışmalara yer verilmiştir.

1[∞] hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 15' te öğretmen ve öğrencilerin “1[∞] ’ ü görünce bunun hakkında neler düşünüyorsunuz?” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır. Bunun için öğretmen ve öğrencilerin vurguladıkları farklı bakış açıları ve bunlar arasındaki ilişkiler tanımlanmaya çalışılmıştır.

Tablo 15 Soru 1'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 1: 1^∞ hakkında neler düşünüyorsunuz?		
Grup	Yüzde (%)	Örnek alıntılar
Belirsizlik	54	<p>"...belirsizlik diye öğrenmiştik kalıp olarak." (Eda)</p> <p>"...belirsizlik durumlarında vardı". (Oya)</p> <p>"...bir belirsizlik diyoruz biz matematikte bu türden ifadelere. Belirsiz ama bu belirsizlik cevabı yok anlamına gelmez, bazı matematiksel işlemler yaptığımız zaman sonuç ortaya çıkabilir şu an belirsiz ama bu görüntü." (Ali)</p> <p>"... belirsizlik çağrıştırıyor. 1 üzeri sonsuz; sonsuz tane 1 demek bu da sonsuz çarpı 1 demek ki bunun cevabı sonsuzdur ama 1'i ne kadar kendisiyle çarpsak sonuç 1 olmalı yani iki farklı sonuç çıkıyor bu yüzden belirsiz." (Cem)</p>
Sonsuz tane	1	"...normalde 1 etmesi gerekir ama "sonsuz tane" demek burada tane kullanmak hatalı bence." (Can)
Sonsuzun kullanımı hatalı	7	"... aslında sonsuzu bir sayı değil de bir kavram olarak kabul ettiğimizde bir üzeri elma bize ne kadar saçma geliyorsa bir üzeri sonsuz da bize o kadar mantıksız geliyor." (Nur)
Bir limit işleminin aşaması	42	<p>"... limit olarak düşündüğümde belirsizlik. Eğer bir limit hesabı ise sonucu bulunabilir. Cebirsel bir işlemin bir aşaması olarak görüyorum tek başına bir işlem olarak görmüyorum." (Ece)</p> <p>"... tabandaki sayı 1'e yakınsarsa limit durumunda bu bir belirsizlik oluşturur burada limit kavramını çağrıştıran durum ikisinin bir araya gelmesi genellikle belirsizlik durumları için 1^∞ belirsizliği diye geçer." (Ada)</p> <p>"...limit durumunda olursa belirsiz diyoruz." (Ahu)</p>
"1"	34	<p>"... taban tam olarak 1 ise cevabımız 1 olur." (Ada)</p> <p>"... sonsuz tane 1'in yan yana yazıp çarpımı demek ve sonucu 1 olarak çıkıyor karşımıza." (Efe)</p>
Tanımsız	4	"... limit dışında karşımıza çıkarsa az rastlanan bir durum olmasına rağmen tanımsız diyoruz." (Ahu)

Mülakata katılanların birçoğu, 1^∞ ifadesini limit konusu anlatılırken karşılaştıkları " 1^∞ belirsizliği" olarak değerlendirdiklerini ve bu durum dışında böyle bir şeyi çok fazla irdelemediklerini belirtmişlerdir. Katılımcılardan limit durumu dışında 1^∞ ifadesini irdelemeleri istendiğinde, yaptıkları yorumların birçoğunun üs tanımı düşünülerek yapılan değerlendirmeler olduğu gözlenmiştir. İlgi çekici gerekçelendirmeler:

“ 1^5 olsa 5 tane 1’in çarpımı gibi düşündüğümüzde sonuç 1 olmalı ama sonsuz tane 1’i çarptığımızda sonsuzla bir sayıyı çarptığımızda sonuç sonsuz ben iki tane iki farklı matematiksel gerçeklikle farklı sonuçlar buluyorsam burada bir belirsizlik olduğunu düşünüyorum 1^∞ ’a belirsiz denmesinin sebebinin de bu olduğunu düşünüyorum.” (Cem)

“Limit durumu dışında üslü sayı tanımına uymadığı için böyle bir şeyin yazımının yanlış olacağını düşünüyorum.” (Ece)

“Taban tam olarak 1 ise cevabımız üslü sayı tanımına göre 1 olur.” (Ada)

“Sonsuz tane 1’in yan yana yazıp çarpımı demek ve sonucu 1 olarak çıkıyor karşımıza.” (Efe)

Öğretmenlerden birisi “*sonsuz*” kelimesine “*tane*” anlamını yüklemenin sakıncalı olacağını böyle bir şeyin çok saçma olacağını vurgulamıştır.

“Sonsuz tanelik demek burada tane kullanmak sonsuzun kendi içinde bir yeri belli olmadığı için sayı doğrusu üzerinde sonsuzu işaretleyemediğimiz için evet sonsuz sayı doğrusunda işaretleyemiyoruz yok çünkü orada.” (Can)

Öğrencilerden birisi de; “*sonsuz*” un bir kavram olduğunu, dolayısıyla bir kavramın matematiksel bir işleminde kullanılmasının “*anlamsız*” olduğunu, “*sonsuz*” un bu şekildeki kullanımlarının hatalı olduğunu vurgulamıştır. Hatta bir örnekle bu söz konusu durumu ispat etmeye çalışmıştır.

“bir üzeri elma bize ne kadar saçma geliyorsa bir üzeri sonsuz da bize o kadar mantıksız geliyor.” (Nur)

1.1.1... hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 16 Soru 2'ye verilen cevaplara ait kategori

Soru 2: 1.1.1... ifadesi hakkında neler düşünüyorsunuz?		
Grup	Yüzde (%)	Örnek alıntılar
Belirsizlik	12	"...O da 1 üzeri sonsuzla aynı şey, belirsiz." (Nil) "1.1.1... da bana göre belirsizliktir." (Cem)
Sonsuz tane demek hatalı	2	"...hayır aynı şey değil bence. Aynı gibi görünüyor ama aynı olmamalı. 1^∞ derken burada sonsuzu bir sayıymış gibi yazıyoruz yani sonsuz tane ne demek orda bir durmak gerekiyor." (Eda)
Sonsuzun kullanımı hatalı	1	"...normalde tabii ki 1^∞ yerine 1.1.1... daha ideal bir yazım şeklidir." (Ada)
Bir limit işlemin aşaması	22	"1.1.1... de aynı görüyorum bunu daha çok bir işlem olarak görüyorum 1^∞ ise limit hesabının bir sonucu olarak görüyorum." (Ece)
"1"	85	"...1'i istediğin kadar çarp sonuç hep 1 çıkar en sonuncusunda." (Asu) "1.1.1... ifadesinde üç noktanın temsili olarak sonsuza gittiğini düşündüğümüzde burada da sonsuz tane 1'in çarpımı yine 1 olarak karşımıza çıkacaktır." (Efe)
1^∞ ifadesi ile aynı	72	"... nokta nokta ifadesi bunun sürekli olarak çarpılacağı anlamına gelir o da bana 1^∞ ifadesini çağrıştırır." (Ali) "... buradaki üç nokta sonsuz defa 1'in çarpıldığını söylüyor bu da 1^∞ demek." (Gül) "1.1.1... de bununla (1^∞) aynı bence. Bu nokta noktaların anlamı "sonsuz tane" demekse bence aynı." (Can)

Tablo 16' da öğretmen ve öğrencilerin "1.1.1... ifadesi hakkında neler düşünüyorsunuz?" sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır. Özellikle 1.1.1... ifadesi ile 1^∞ ifadesinin karşılaştırılması üzerinde durulmuştur. Bunun için öğretmen ve öğrencilerin vurguladıkları farklı bakış açıları ve bunlar arasındaki ilişkiler tanımlanmaya çalışılmıştır.

Mülakata katılanların büyük bir kısmı (%72'si) böyle bir durumla karşılaştıklarında 1^∞ ifadesi ile aynı şeyi anladıklarını dolayısıyla 1^∞ için ne düşünüyorlarsa 1.1.1... ifadesi için de aynı şeyleri düşündüklerini belirttiler.

Katılımcıların kimisi ise (%28'i) bu durumun (1.1.1...) tamamıyla 1^∞ durumundan farklı olduğunu hatta sonucunun kesin olarak 1 olduğunu belirttiler.

Ece ve Ahu adlı katılımcılar burada kullanılan üç nota'nın (...) ancak bir limit durumunda karşımıza çıkabilecek bir sürecin ürünü ile oluşturabileceğimiz bir sembol olduğunu vurguladılar.

Nur adlı katılımcı 1.1.1... ifadesini bir işlemin sonucu olarak gördüğünü (bir süreç olmadığını) ifade etmiştir.

$\frac{1}{\infty}$ hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 17 Soru 3'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 3: $\frac{1}{\infty}$ ifadesi hakkında neler düşünüyorsunuz?		
Grup	Yüzde (%)	Örnek alıntılar
Limit işlemleri	88	"...limit durumunda ancak böyle bir durumla karşılaşırız." (Ece) "... Aynı şekilde, zaten limit olmadan sonuca sıfır diyemeyiz." (Nur) "... sonsuz sembolünü gördüğüm için bir fonksiyonun limit değeri olarak görüyorum." (Nil)
"0"	58	$\frac{1}{\infty}$ "... ∞ 'u "0" olarak alırız limit durumlarında karşılaştığımız zaman." (Ahu). "... bu her zaman 0'dır." (Eda)
0'a çok yakın bir sayı	40	"... Tam 0 olmaz tabii ki 0^+ diyoruz ya biz ona o şekilde." (Ali) "... sonucu sıfıra yaklaşır, mesela bir ekmeğin sonsuz defa dilimlere parçalanması gibi düşündüm yani ne kadar parçalarsanız dilimler o kadar küçülür ve azalır bunu sonsuz defa yaparsanız yapamazsınız ama bu azalma bitime yakındır." (Gül) "... $1/n$ in sıfır olduğunu kabul ediyoruz yani beynimizin ulaştığı bir son var ve onunda sıfıra yaklaştığını görüyoruz." (Efe)
Tanımsız	2	"...limit durumları dışında tanımsızdır." (Ahu) "... tanımsız olarak değerlendiririz." (Cem)
Bölme algoritması	32	"... 1 içinde kaç tane sonsuz vardır diye yorumlayabilirim bölme tanımına göre 1 'in içinde sonsuz yoktur derim sığmaz derim." (Can)

Tablo 17' de öğretmen ve öğrencilerin " $\frac{1}{\infty}$ ü görünce bunun hakkında neler düşünüyorsunuz?" sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır.

Özellikle bu durumu; bir nesne mi yoksa bir süreç mi olarak değerlendirip değerlendirmedikleri tespit edilmeye çalışılmıştır. Bunun için öğretmen ve öğrencilerin vurguladıkları farklı bakış açıları ve bunlar arasındaki ilişkiler tanımlanmaya çalışılmıştır.

Mülakata katılanların kimisi (%32'si) Öklid' in bölme algoritması mantığını kullanarak soruyu cevaplamaya çalışmıştır (1'i sonsuz büyüklükte bir sayıya veya sonsuza bölmek):

“...mesela bir ekmeğin sonsuz defa dilimlere parçalanması gibi düşündüm yani ne kadar parçalarsanız dilimler o kadar küçülür ve azalır bunu sonsuz defa yaparsanız yapamazsınız ama bu azalma bitime yakındır.” (Gül)

Katılımcılardan birisi; 1'i sonsuza bölmenin, burada “sonsuz kişi” ibaresini kullanmanın sonsuzu sınırlandırmak olacağını dolayısıyla aslında bu işlemin kendi içinde bir çelişki barındırdığını belirtmiştir.

Katılımcıların büyük bir çoğunluğu (%75'i) da cevaba daha önceki deneyimlerinden “0” demişlerdir. Bu durumu ilk öğrendiklerinde öğretmenin kendilerine sunduğu $\frac{1}{\infty} = 0$ ekonomik yazılışı sebebiyle, kafalarındaki bu imaj sebebiyle, cevabı “0” olarak belirttiklerini ifade etmişlerdir.

Ece ve Ahu adlı katılımcılar böyle bir durumun ancak bir limit durumunda karşımıza çıktığında anlamlı olacağını belirtmişlerdir.

Ada adlı katılımcı durumu, sonlu bir sayının sonsuz bir sayıya oranlanması olarak değerlendirmiştir. Burada kullanılan sonsuzu bir sıfat bir kavramın temsili (sembölü) olarak gördüğünü ifade etmiştir.

$\infty - \infty$ hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 18 Soru 4'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 4: $\infty - \infty$ hakkında neler düşünüyorsunuz?		
Grup	Yüzde (%)	Örnek alıntılar
Limit işlemleri	89	"... onu da limit hesabında karşılaştığım bir şey olarak canlandırıyorum gözümde yani bir cebirsel yapı var eksi başka bir cebirsel yapı var işte x bilmem ne değerine giderken bu cebirsel yapının değeri sonsuz ve ötekinin sonucu da sonsuz. " (Ece)
Sonsuzluk	1	"...sonsuzun bir sayı değil bir kavram olarak düşündüğümünden, bu şekilde bir yazımı hatalı görüyorum." (Nur). "...bir kavramın bu şekilde kullanımı hatalı ama birtakım işlemlerle bunu basitleştiriyoruz." (Efe)
Tanımsız	8	"... onun aslında tanımsız olduğunu düşünüyorum ama burada sadece $\infty - \infty$ ifadeleri kullanıldığı için." (Gül) "...limit durumları dışında tanımsız deriz." (Ahu)
Belirsiz	91	"...limit durumunda karşılaşırsak belirsizdir." (Ahu) "...belirsizlik durumlarında buna belirsiz diye söylediğimiz için ben de ezbere bu şeye belirsiz diyorum aslında." (Can) "... burada iki tane sonsuz çıkartılıyor ama bu sonsuzların eşdeğer büyüklük olup olmadığını bilmiyoruz yani çok büyük diyoruz ama biri daha da büyük olabilir ne kadar büyük olduklarını bilmiyoruz bu yüzden belirsiz bence." (Ada)

Tablo 18' de öğretmen ve öğrencilerin $\infty - \infty$ görünce bunun hakkında neler düşünüyorsunuz? Sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır. Özellikle bu durumu; bir nesne mi yoksa bir süreç mi olarak değerlendirip değerlendirmedikleri tespit edilmeye çalışılmıştır. İlgi çekici yorumlar:

Katılımcılardan birisine bu soruyu sorduğumuzda "Neden sıfır değildir mi diyacaksınız?" şeklinde bir soruyla karşılık verdi ve "sonsuz bir yer ismi değil, bir sayı değildir daha doğrusu tam olarak tanımlayamadık bile bu yüzden nasıl böyle bir işlemde bunu kullanabiliriz ki? Bu bana mantıksız geliyor" şeklinde ekledi.

Cem adlı katılımcı bunun bir "belirsizlik" olduğunu sebebinin ise şu şekilde ifade etmiştir:

“...mesela 5-5 düşündüğümüzde sonuç sıfır burada da aynı kavramın kendisinden çıkarıldığını düşündüğümüzde sonuç sıfır ama sonsuzdan bir sayı çıkardığımda da sonuç sonsuz oluyor iki farklı sonuç peki hangisi doğru işte bu noktada belirsizlik olduğunu düşünüyorum.”(Cem)

Yani buradaki belirsizliğin, sonuçların farklı farklı çıkabilme olasılığından (belirli olmayan sonuçlardan) kaynaklandığını vurgulamıştır. Bu düşüncesini ise “” *iki farklı gerçeklikte farklı sonuçları oluşturma*” şeklinde ifade etmiştir. ($\infty - \infty = 0$ ve $\infty - \infty = \infty$ gibi).

Ece adlı katılımcı sonsuzu, “sayıların ulaşmaya çalıştığı bir yer” olarak gördüğünü ama sonsuzla ilgili işlemler yapılırken birtakım cebirsel işlemler yardımıyla, sonsuzla ilgili durumları biraz daha basitleştirildiğini ve bu sayede $\infty - \infty$ gibi durumları daha iyi çözümlenebildiğini belirtmiştir.

Efe adlı katılımcı ise soruya “belirsiz” demiştir ama buradaki belirsizliği “*şu ana kadar tanıma yaklaşamama*” olarak ifade etmiştir.

Katılımcıların bir bölümü (%88’i) bu durumu bir süreç olarak değerlendirmiş olup bir kısmı ise (%12’si), bir “nesne” değerlendirmiştir.

$\infty - \infty$ hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 19 Soru 5'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 5: $\frac{0}{0}$ 'ü görünce bunun hakkında neler düşünüyorsunuz?		
Grup	Yüzde (%)	Örnek alıntılar
Belirsizlik	46	$\frac{0}{0}$ "... $\frac{0}{0}$ da belirsiz bir ifade, bölme tanımına aykırı bir ifade zaten. " (Ali) "... belirsiz tanımsız değil sayı bölü sıfır tanımsız ama bu belirsiz bir ifade." (Efe)
"1"	1	"...cevap 1 dir. Buradaki tanımsızlık kaldırılabilir bence." (Oya)
Limit durumunda ise belirsiz değilse tanımsız	52	$\frac{0}{0}$ "... Burada $\frac{0}{0}$ bir limit konusunu düşündüğümüzde herhalde belirsiz derdik ve o belirsizliği ortaya çıkaran mutlaka bir değerler fonksiyonlar olacaktı bizim bu belirsizliği götürüp götürülemeyeceğini oradan bakıp kontrol edecektik ama burada öyle bir kontrol şansımız olmadığı için bunun tanımsız olduğunu düşünmüştüm ben." (Gül) "... yukarıdaki açıklamalarımla paralel yani limit durumu ise belirsiz değilse tanımsız." (Ahu). "...sayı olarak görürsek tanımsızlık çıkartan bir şey çıkar ama dediğim gibi bunları hep bir sembol gibi gördüğüm için, üstte bir fonksiyon var altta başka bir fonksiyon var ve iki ayrı limitin oranını hesaplanmış gibi." (Ece)
Bölme algoritmasına (Öklid) aykırı olduğu için tanımsız.	92	"... boş olan bir şeyi boş olan bir şeye bölersek, bu durumda da aslında yokluğun bir tanım olup olmadığını tartışmak gerekir ama sıfır bir tanım değil bir sayıdır bu durumda tanımsız diyeyim ben cevaba." (Nur). "... Tanımsız neden dersiniz 4/2 demek 4 ün içerisinde kaç tane 2 var demektir bunun cevabı 2'dir. 4/0; 4 tane çokluğun içerisinde kaç tane hiç olmayan bi çokluk var. 4 tane kalemin içinde kaç tane hiç yok kalem var gibi saçma bir şey çıkar ortaya. 0/0 ise hiç olmayan bir şey içinde kaç tane hiç olmayan bir şey demek ki zaten olmayan şeyler üzerinde konuştuğumuz için çok saçma olur." (Nil)
Oran tanımına uymadığı için tanımsız	1	"... Bu odada olan develerle bu odadaki ineklerin sayısı birbirine eşittir çünkü bu odada inek ve deve yok. Bu iki kavram birbirine eşit değil denk belki denebilir." (Ela).

Tablo 19’ da öğretmen ve öğrencilerin “ $\frac{0}{0}$ ’ ü görünce bunun hakkında neler düşünüyorsunuz?” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır. Özellikle bu durumu; iki şeyin birbirine oranı gibi mi? veya bölme algoritması gibi mi?) Bir nesne gibi mi?(yoksa limitsel bir sürecin sonucu olarak mı değerlendirip değerlendirmedikleri tespit dilmeye çalışılmıştır. İlgi çekici yorumlar:

Katılımcılardan biri, bu durumda tanımsızlığın belirsizliğe göre kafasında daha belirgin olduğunu belirtmiştir. Belirsizliğin tanımsızlığa göre daha karmaşık bir durum olduğunu belirtmiştir:

“...tanımsız dersiniz bu tamam kolaydır neden çünkü tanıma aykırıdır bu kadar basit ama belirsiz dersek mesela $\infty - \infty$ daki gibi sonuçları çok karmaşık olan aklımızın alamayacağı bir durumdur bu bence.”

Eda adlı katılımcı “*tanımsız yani belirsizdir*” diyerek bu iki kavramın (tanımsızlık-belirsizlik) aslında farklı değil aynı şeyler olduğunu düşündüğünün ipucunu vermiştir.

Katılımcıların büyük çoğunluğu (%92’i) bu durumla karşılaştıklarında, Öklid’ in bölme algoritmasında “tanımsız” olarak öğretilen “sıfıra bölme” durumunu algıladıklarını bu yüzden bu durumu “tanımsız” olarak nitelendirdiklerini belirtirken, bir kısım katılımcı da (%52’si) böyle bir durumun, limitsel bir sürecin sonucu ise belirsiz onun dışında tanımsız şeklinde iki yönlü cevabının olabileceğini belirtmiştir.

“o da yine yani genelde limit başlığı altında incelendiği zaman $\frac{0}{0}$ belirsizliği diye adlandırılıyor oysa ben şuna ilk baktığım zaman gördüğüm şey burada rasyonel olmayan bir ifade var paydası sıfır olan bir kesir var dolayısıyla burada bir tanımsızlık var yani bunun sonucu hiçbir şekilde bulunamaz ama yine limit anlatılırken $\frac{0}{0}$ belirsizliği

dendiği için bu belki ilk başta limitle ilgili belirsizlik kavramını da çağrıştırabilir ama bu benim için tanımsızlıktır.” Ada

$\frac{0}{0}$ ifadesinin yanı sıra katılımcılara $\frac{4}{0}$ ifadesi hakkındaki düşünceleri de sorulmuş ve katılımcıların büyük bir kısmı (%92’i) bu ifadeyle ilgili olarak direkt Öklid’in bölme algoritmasına göre bu durumu “tanımsızlık” olarak ifade etmişlerdir.

Tanımsız, belirsiz ve sonsuz kavramları hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 20 Soru 6’ya verilen cevaplara ait kategori

Soru 6: Tanımsız, belirsiz ve sonsuz kavramları sizde neler ifade ediyor?			
Örnek			Yüzde
Kişi	Kavram	Alıntılar	
Ahu	Tanımsızlık	... matematikte öyle bir kavrama ihtiyaç duyulmamış tanımlanmamış anlarız. İşlemlerde onun kullanılmasına ihtiyaç yokmuş öyle bir kavramın kullanımına gerek yokmuş o yüzden tanımlanmamış.	65
	Belirsizlik	... ilk bakıldığında genellikle limit durumlarında karşımıza çıkar ilk bakıldığında belirsiz gibi belli bir sonucu yokmuş gibi durmasına rağmen işlemler yapıldığında belirli bir sonuca ulaşır.	46
	Sonsuzluk	... çok büyük bir sayı olarak düşünüyorum.	48
Nur	Tanımsızlık	... herhangi bir matematiksel terimle tanımlayamayacağımız.	32
	Belirsizlik	... Belirsiz bir değeri olan ama hangi değer olduğu belli olmadığı bir değer	52
	Sonsuzluk	...sınırsız noktalar kümesi aklıma geliyor.	78
Eda	Tanımsızlık	... öyle bir şey tanımlanmamış öyle bir şey olamaz belirsizlikte belki biraz daha aklın sınırlarını kurcalıyoruz ama tanımsızlıkta öyle bir tanım olamaz hani “dur burada” gibi bir işaret çağrıştırıyor.	12
	Belirsizlik	... adı üzerinde bir belirsizlik ifade eder.	64
	Sonsuzluk	... sınırsız bir nokta gibi, bir şekilde erişilemeyen, sürekli devam eden şeklinde sayı gibi görmüyorum daha sembolik sanırım mesela sonsuzluk deyince kafamda bir karanlık bir uzay boşluğu var.	72
Oya	Tanımsızlık	...matematiksel –en azından baştaki kabullerle herhangi bir şekilde açıklanamaz.	65
	Belirsizlik	... Belirsizlikte tanımlanabilir bir şey olabilir mesela bir sayının sıfırinci kuvveti veya herhangi bir sayının sıfırinci kuvveti tanımlanmış bir şey ama ikisi bir araya gelince bir belirsizlik meydana getiriyor. Hani tanıma sığabilir ama yine belirsizlik bence.	10
	Sonsuzluk	... Sonsuz deyince aklıma her zaman uzay kavramı geliyor	42
E	Tanımsızlık	...daha önce bir tanımı yapılmamış.	62

	Belirsizlik	<i>... Belirsizlik deyince de bir belirsizlik durumu var ama telafisi var sanırsam kaldırılabilceği manası taşıyor.</i>	
	Sonsuzluk	<i>...asla ulaşılamayan bir sayı gibi</i>	72

Tablo 10’ de öğretmen ve öğrencilerin “*Tanımsız, belirsiz ve sonsuz kavramları sizde neler ifade ediyor?*” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır. Bunun için öğretmen ve öğrencilerin vurguladıkları farklı bakış açıları ve bunlar arasındaki ilişkiler tanımlanmaya çalışılmıştır.

Tabloda yer almayan tanımsızlıkla ilgili yapılan ilginç yorumlar ise;

... hiçbir değeri olmayan bir değer.(Nil)

... Tanımsız bir ifadeyi o bölgede asla bulamayız.(Ada)

... hani tanımsız, matematikte öyle bir ifadenin yanlışlığı gibi tanımlanamıyor gibi düşünüyorum.(Cem)

Tabloda yer almayan belirsizlikle ilgili yapılan ilginç yorumlar ise;

... Belirsiz de aynı şekilde bilmiyorum benzer ama farklı gibi bilmiyorum tam olarak. Bu kavramlar(tanımsız, belirsiz) farklı ama birbirine yakın. (Gül)

... fonksiyonların belli oranları olabilir veya farklarının limitlerinin belli bir değere ulaşip ulaşamaması veya ulaşip ulaşmadığını bilememe durumu.(Ece)

... Belirsizlikte bir imkân dışılık var.(Ahu)

Tabloda yer almayan sonsuzlukla ilgili yapılan ilginç yorumlar ise;

... Mesela n sonsuza giderken derken hiç kimse oraya gitmemiştir hiç kimse o sayıyı bulmamıştır yazmamıştır. Sonsuz bir sayı değildir sonsuza sayı desek bir ekleyince değişmiyor doğal sayı bir öncekinin

ardışığı şeklinde tanımlanıyor o halde önceki haline eşit burada da işlemlerde problem çıkıyor sonsuz farklı bir kategoride incelemek gerekiyor.(Ali)

... Sonsuz deyince insan aklının durduğu bir şey var. Bir yere kadar yorum yapabilir ilerleyemez gibi geliyor bana.(Eda)

... Sonsuz; bir kavram bir sayı değil kesinlikle.(Nur)

Katılımcıların bir kısmı (%36'sı), iki farklı sonuç bulunabilen ve içinde sonsuzluk bulunan ifadelere “belirsizlik” deme eğiliminde olmuştur. Bu katılımcılarda belirsizlik; iki şeyden hangisinin olduğuna karar verememe durumu olarak düşünülmüş.

Katılımcılardan biri Asu, sorulan bir sorudaki belirsizlik durumunu “bir şey diyememe olgusu” olarak belirtirken başka bir soruda karşısına çıkan belirsizlik durumunu ise “birden fazla cevabı olan bir olgu” olarak belirtmiştir.

Bir kısım katılımcıda (%64'ü) ise belirsizlik; çeşitli matematiksel işlemlerle belirli (açık hale gelebilecek) geçici bir süreçtir.

Tanımsızlık ve belirsizliği aynı kavram olarak değerlendiren kimi katılımcılar, benzer tipte soruların kimisine tanımsız derken kimisine de belirsiz demişlerdir. Onlara göre tanımsızlık ve belirsizlik o an için ortaya çıkan, matematikte karşılığı olmayan bir “çözumsuzlük” durumudur.

Sonsuzluk için verilen cevaplardan, sonsuzluğun; bir yer adı (%2'si), bir sıfat (%8'i), bir isim (%16'sı), bir kavram (%8'i), büyük bir sayı (%86'sı) olarak değerlendirildiği de gözden kaçmayan bir ayrıntıdır.

Birçok katılımcının (%80'i) “sonsuz” ve “sonsuzluk” kavramlarını eşdeğer olarak kullandığı, görüşmelerden tespit edilmiştir.

Tanımsızlık, belirsizlik ve sonsuzluk kavramlarına eşdeğer kavramlar hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 21 Soru 7'ye verilen cevaplara ait kategoriler.

Soru 7: <i>Bu kavramlara eşdeğer olduğunu düşündüğünüz farklı kavramlar var mı?</i>					
%	Tanımsızlık	%	Belirsizlik	%	Sonsuzluk
8	Anlamsız	2	Puslu görüntü	30	Uçsuz, bucaksız
16	Saçma	20	saçma	18	sınırsız
4	Yoktur	36	anlamsız	24	erişilmez
72	Tanımlanamamış	8	meaningless	4	Çok büyük
		28	hesap edilemez	24	Evren, uzay
		6	Bulanık		

Tablo 21' de öğretmen ve öğrencilerin “*Bu kavramlara eşdeğer olduğunu düşündüğünüz farklı kavramlar var mı?(tanımsız, belirsiz, sonsuz)*” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır.

Tanımsızlık kelimesi için verilen cevaplar; “*anlamsız, saçma, gereksiz*” kelimelerinde yoğunlaşmaktadır. Belirsiz kelimesi için verilen cevaplarsa; “*bulanık, anlamsız, hesap edilemez, geçici hesapsızlık, geçici bulanıklık*” kelimelerinde yoğunlaşmaktadır. Katılımcılara ısrarla sorulmasına rağmen “sonsuz” kelimesi ile eşdeğer bir kelime akıllarına gelmediğini belirtmişlerdir. Katılımcıların büyük çoğunluğu (%76’sı) bu kavramın tam olarak taşıdığı anlamı iyi temsil ettiğini düşündüklerini belirtmişlerdir. Katılımcıların sonsuzluk kavramına eşdeğer kavram üretmeleri hususunda mutlaka bir cevap vermeleri istendiğinde verdikleri cevapların “*uçsuz, bucaksız, sınırsız, erişilemez*” gibi sonsuzluğun özelliği niteliği taşıyan cevaplar verdikleri görüşmelerden elde edilen bilgilerdendir.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1}$ hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 22 Soru 8'e verilen cevaplara ait kategori

Soru 8: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?		
Grup	Yüzde	Örnek Alıntılar
Belirsizlik	74	<p>"...Basit bir 0/0 belirsizliği var burada ve giderilebilir bir belirsizliktir." (Ahu)</p> <p>"...kaldırılabilir süreksizlik durumu olduğu için bir belirsizlik durumu oluşmuştur." (Ece)</p> <p>"...Burada 0/0 belirsizliği bulunmaktadır. Bunun sebebi; (sayı/0)=sonsuz iken (0/bişey)=0 'dır. Burada 2 ayrı sonuç çıkmaktadır. Sonucun ne olduğudur yani belirsiz olan." (Eda)</p> <p>"...cevap 1'dir. 0/0 belirsizliği vardır....Bu belirsizliğin nedeni ise mesela 1=1 iken $x-1=x-1$ durumuna genişletilmiş burada bir sorun oluşuyor bence." (Cem)</p> <p>"...Eğer grafiğini düşünürseniz sağdan ve soldan yaklaşma çabası vardır. Bu yaklaşımın bir oranı olan fonksiyonun oranı belirsizdir bence." (Efe)</p> <p>"...Sonsuz küçük olabilen iki şeyin oranlarının kıyaslanmasına zorlandığımızda herhangi bir anda bunun değeri nedir dersek bu belirsizdir." (Ada)</p> <p>"...0/0 belirsizliği var. İnsan aklı burada bu belirsizliğin nedenini çözemiyor." (Ahu)</p> <p>"...$x-1/x-1$ 'in $x, 1$ 'e giderkenki -yaklaşırkenki- durumu. Burada bir belirsizlik var. Belirsizlik bu yaklaşma olayında var net olarak göremesekte." (Gül)</p>
"1"	18	<p>"...Belirsizlik tam olarak neyden kaynaklanıyor bilmiyorum ama cevap açık olarak 1'dir. (yaklaşma değil açık olarak 1'dir)." (Nur)</p> <p>"...$x-1/x-1$ için tabii ki limitle sonuç 1 ama direkt $f(x)=1$ alsam da sonuç 1. Bu yüzden belirsiz bence." (Can)</p> <p>"... $\frac{x-1}{x-1}$ ifadesini ile $F(x)=1$ ifadesi gibi düşünmeliyiz. O zaman sonuç 1 olur. Paydadaki tanımsızlık limiti etkilemez. Burada tanımsızlık var." (Ali)</p>
Sayı değil	8	<p>"...Bizi düşündüren kısmı 0/0 da yatıyor. Bununla hayatta karşılaşmayız gerçek hayatta. Limitle çözeriz bu işi." (Ece)</p>

Tablo 22' de öğretmen ve öğrencilerin " $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?"

sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır. Özellikle bu durumu; bir

nesne mi yoksa bir süreç mi olarak değerlendirip değerlendirmedikleri tespit edilmeye çalışılmıştır. İlgili çekici yorumlar:

“...bu durum, bence bir fonksiyonun tanımsızlık noktası etrafında fonksiyonun hareketlerini inceleyip bir yorumda bulunmayı irdeleyen fonksiyon davranışı analizi sürecidir.” (Efe)

“...tanımsızlık noktasında bir şey diyemem ama o noktaya sağdan soldan yaklaşılabilir gibi.”(Ahu)

Tanımsızlık, belirsizlik ve sonsuzluk kavramlarının gerçek hayatta kullanımı hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 23 Soru 9’a verilen cevaplara ait kategori

Soru 9: Peki, tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk kavramlarını gerçek hayatta kullandığımız durumlar var mı?			
Kişiler	Örnek Alıntılar		
	Tanımsızlık	Belirsizlik	Sonsuzluk
Ali	...Bir şeyin kendisi varken nasıl tanımsız olabildiği bir çelişki bence.	...Son zamanlarda hukukla ilgili konularda tam bir belirsizlik (görüş ayrılığı) var.	...sonsuz sevgi.
Gül	...elinden bir şey gelmediği durumlarda söylenir	...ev taşırken buzdolabının kapıdan geçmemesi durumu o an için belirsizdir.	...yazın açık havada gökyüzünü izlerken aklımıza gelen bir kavramdır.
Ahu	Yorum yapılmamış	...bugün havanın yağmurlu mu güneşli mi olacağı.	...insanlar öldüğünde sonsuza uğurlandı deriz.
Nur	...insanların bazı davranışları tanımsızdır(mantıksız hareketleri).	...ne yapacağı belli olmayan insanın durumudur.	Yorum yapılmamış
Nil	...0-100 arası not değerlendirmesinde bir öğrencinin yazılıdan -20 alması.	...öğrencinin sınavdan ne alacağını bilememesi durumudur.	... içinde sonsuzluk geçen cümlelerde yaratıcı geliyor aklıma.başına muamma.
Cem	...bazen hastalıklara teşhis konulamıyor, bu durumlar tanımsız.	Yorum yapılmamış	...biri seni üzdüğünde ona senin bende sonsuz kredin var derken.

Tablo 23’ te öğretmen ve öğrencilerin “*Peki, tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk kavramlarını gerçek hayatta kullandığınız durumlar var mı?*” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır.

Görüşme sorularında katılımcıların en fazla duraksadıkları (cevap için düşündükleri) soru bu sorudur (soru 9). Sadece 1 katılımcı soruyu tam manasıyla cevaplamıştır (üç kavrama da örnek veren).

2,99...- 0,99... hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 24 Soru 10’a verilen cevaplara ait kategori

Soru 10: <i>peki 2,99...-0,99... hakkında neler düşünüyorsunuz? Bu durumu nasıl irdelersiniz?</i>		
Grup	Yüzde	Örnek alıntılar
Sonuçları tam belli olmayan iki sayının farkıdır.	52	<p>“...net değerleri tam belli olmayan iki sayının farkı vardır burada.”(Ali)</p> <p>“... Aslında sonucu 2 olarak kabul ederiz ama benim önceki anlattığım olaya göre 2 olmaması gerekir.”(Nur).</p> <p>“... Aslında net bir cevabı varmış gibi geliyor ama olmaması gerekiyor herhalde. $\infty - \infty$ ‘la bir bağlantısı var bu da belirsiz.”(Eda)</p> <p>“... Bunu ondalık değil de bölüm şeklinde yazsak mesela o zaman da yine 2 tane sonsuza giden bir sayıyı çıkarmış gibi oluruz.”(Oya)</p> <p>“... gayet açık irdelemeye gerek yok cevap 2’dir.”(Asu)</p> <p>“... Bunların belirsiz olduğunu düşünürüm ben. $\infty - \infty$ gibi mi bilmiyorum ama bunun cevabına net olarak 2 diyemem.”(Cem)</p> <p>“... seri veya dizilerin limiti galiba bence sonuç 2 ye gidiyor derim.”(Can)</p> <p>“...bu işlem yapılır ama burada küçükte olsa ihmal edilen bir sayı vardır.”(Ada)</p>
Sonuçları belli olan iki sayının farkıdır	48	<p>“... Ondalıklı kısmı devrediyor ki o da devrettiğinde 3 e yakınsadığını 0,99... un 1’ e yakınsadığını ve sonucun da 2 olduğunu söyleyebiliriz burada.”(Gül)</p> <p>“... Devirli sayılardır ve sonuçları bulunur.”(Nil)</p> <p>“... bunların da sonuçlarını bulabiliyoruz cebirsel olduğu için bunlar.”(Ece).</p>

Tablo 24’ te öğretmen ve öğrencilerin “*2,99...-0,99... hakkında neler düşünüyorsunuz? Bu durumu nasıl irdelersiniz?*” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır.

Katılımcıların bu soruya verdiği cevaplar “sonuçları tam belli olmayan iki sayının farkıdır”(%52’si) ve “Sonuçları belli olan iki sayının farkıdır”(%48’i) şeklinde iki kategoride toplanmıştır. Yüzdelerin birbirine yakın olması sebebiyle katılımcılara cevaplarının nedenleri sorulduğunda yarısına yakınının(%52’si) “...” sembolünü; “hiç bitmeyecek” dolayısıyla “bir sonuç el edilemeyecek” anlamında düşündükleri, yarısına yakınının ise (%48’i) “kesinlikle bir sonucu var” veya “ sonsuzda bir sonucu kesinlikle var” şeklinde düşündükleri ortaya çıkmıştır.

İlyas adlı katılımcı, 2,99... devirli sayısının devreden kısmı olan, 99... kısmı ile 0,99... sayısının devreden kısmı olan, 99...’nın çıkarma işlemi sırasında çıkarılıp sıfır kaldığını belirtmiştir.

$x=3$ için $\frac{x-3}{x-3}$ hakkında öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşleri

Tablo 25 Soru 11’e verilen cevaplara ait kategori

Soru 11: $x=3$ için $(x-3)/(x-3)$ hakkında ne düşünüyorsunuz?		
Grup	Yüzde	Örnek alıntılar
$\frac{0}{0}$ tanımsızlığı	80	<p>“...tanımsız. $\frac{0}{0}$ oluyor.”(Nur).</p> <p>“... $\frac{0}{0}$ için söylediğim şeyleri burada da söyleyebilirim (tanımsız demiştim).”(Eda)</p> <p>“... $\frac{0}{0}$ geliyor yukarıda da verdik kaldırılabilir sadeleştirildiğinde 1 geliyor bu kavramlarda çok iyi değilimdir bunu da ifade edeyim.”(Asu)</p> <p>“...burada bir işlem olarak gördüğüm için tanımsızlık vardır.”(Ece)</p> <p>“... x yerine 3 yazacağız ve burada $\frac{0}{0}$ tanımsızlığını bulacağız.”(Ada)</p>
$\frac{0}{0}$ belirsizliğidir diyenler	20	<p>“... Belki buna “saçma” diyebiliriz. $X=3$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği gelir yine yani.”(Ela)</p>
Sıfıra bölme sebebiyle tanımsızdır	80	<p>“... $x=3$ için bunun santıyorum tanımsız olduğunu düşünürüm çünkü bir sayının sıfıra bölümü tanımsızdır. Burada $x=3$ e yaklaşma değil direkt $x=3$ tür.”(Gül).</p> <p>“... tanımsız bir ifade limitle bir alakası yok.”(Ahu)</p>

Tablo 25’ te öğretmen ve öğrencilerin “ $x=3$ için $\frac{x-3}{x-3}$ hakkında ne düşünüyorsunuz?” sorusuna verdikleri cevaplar tarif edilmeye çalışılmıştır.

Bu yorumlardan farklı olarak Cem adlı katılımcı “*Bir belirsizlik var derim ama tanımsızlık var mıdır diye de düşünürüm*” cevabını vermiştir.

Efe adlı kullanıcı ise soruya cevaben: “ $x=3$ için bunun sonucu 1 ama $\frac{0}{0}$ a benziyor sadece limit konulmamış hali. Bu da belirsiz bir ifade diye düşünüyorum (direkt $\frac{0}{0}$ çıktığı için)” yorumunu yapmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşme sonuçları, katılımcıların sonsuzluğun 0 ve 1 ile olan farklı durumlardaki gösterimleri hakkındaki yorumlarının sonsuzluk kavramı hakkındaki bilgi ve deneyimlerinin etkisinde kaldığını göstermektedir. Hem sıfırın hem de sonsuzluğun bulunduğu gösterimlerde ise sıfırın paydada olduğu durumlara “tanımsızdır” deme eğiliminin ağır bastığı görüşme sonuçlarından elde edilmektedir. Bazı katılımcıların sonsuzla ilgili düşüncelerinin ise sorudan soruya farklılık gösterdiği görüşme sonuçlarından açıktır. Örneğin bir katılımcı $\frac{1}{\infty}$ durumunda sonsuzu; “sonsuz giden sayılar dizisi” olarak düşünürken, $\frac{\infty}{\infty}$ durumunun cevabına “1” diyerek nedeni sorulduğunda ise “iki aynı sayının birbirine bölümü daima 1’dir” diyerek buradaki sonsuzu ise “bir sayı olarak” aldığı görülmektedir. Katılımcıların yorumları irdelendiğinde sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık durumları gibi karşılaştıkları farklı durumlara durumların her birinin farklılıklarını algılamalarına rağmen sadece bu 3 kategoriyi bildikleri sebebiyle buldukları farklılığı bu 3 kategoriden hangisine daha yakınsa o cevabı verdikleri görülmektedir. Az sayıda katılımcı bu kategorilerden farklı olarak “anlamsız”, “saçma” gibi cevaplar verme cesareti göstermişlerdir. Bu da katılımcıların bu farklılıkları kategorilendirirken alternatif sözcükler üretmediklerini kanıtlamaktadır.

V. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. TARTIŞMA

Tartışma bölümü 4 kısımdan oluşmaktadır;

- Birinci kısımda, öğretmen ve öğretmen adaylarının Performans Testi-1'e verdikleri cevaplardan elde edilen bulguların tartışmasına yer verilmiştir.
- İkinci kısımda, öğretmen ve öğretmen adaylarının Performans Testi-2' ye verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular, limit bağlamındaki performansları bağlamında tartışılmıştır.
- Üçüncü kısımda, öğretmen ve öğretmen adaylarının Performans Testi-1 deki birbirine paralel sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulguların tartışmasına yer verilmiştir.
- Dördüncü kısımda, öğretmen ve öğretmen adaylarının Performans Testi-1 ve Performans Testi-2 deki birbirine paralel sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular tartışılmıştır.

5.1.1. Performans testi–1 bulgularının tartışılması

“ $\frac{\infty}{\infty} = ?$ ” ve “ $\frac{0}{0} = ?$ ” sorusuna katılımcıların küçük bir kısmının (bkz: Tablo 6, Soru1 ve Soru2) “bir sayının kendisine bölümü 1'dir” mantığını gerekçeli açıklamasıyla “1” cevabını vermesi, kuralsal olarak düşündüklerini ve sonsuzu bir sayı olarak düşündüklerini gösterebilir.

“ $\frac{\infty}{\infty} = ?$ ” sorusuna katılımcıların yarısına yakınının (bkz: Tablo 6, Soru1) “belirsiz formlardan birisi” gerekçesiyle belirsiz demesi “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” durumunu bir “nesne” olarak gördüklerini göstermektedir (Cotrill et al., 1996). Tanımsız cevabını veren az sayıdaki katılımcının ise paydada “ ∞ ” sembolünün gelmesini paydada “0” ın gelmesi gibi bir etki yaptığını yani ∞ 'u bir sayı gibi (nesne) düşündükleri söylenebilir.

“ $\frac{0}{0} = ?$ ” sorusunda katılımcıların küçük bir kısmı “belirsiz formlardan biri” gerekçesiyle “belirsiz” cevabını vermeleri “ $\frac{0}{0}$ ” durumunu bir “nesne” olarak gördüklerini gösterebilir (Cotrill et al., 1996). Az bir katılımcının ise ifadenin sonucunun net olmadığı görüşünü savunarak cebirsel yolla çözüme gitmeye çalışmaları “ $\frac{0}{0}$ ”u bir sayı olarak görmeye çalışma düşüncesinden hareket ettiklerini destekleyebilir.

“ 1^∞ ” durumuna belirsiz cevabını veren katılımcıların büyük çoğunluğunun “ 1^∞ belirsizliği” nin etkisinde kaldığı, Performans Testi-2’deki 1^∞ belirsizliğine tamamına yakınının “belirsiz” demesinden ulaşılabılır. “1’in tüm kuvvetleri 1’dir” gerekçesiyle 1 cevabını verenlerin büyük çoğunluğunun ∞ sembolünü sayı olarak gördüklerini destekleyebilir. ∞ ’un belirsiz bir kavram olduğu ve bu sebeple de ∞ ’u içeren tüm soruların belirsizlik durumu oluşturduğunu düşünen az bir katılımcının bu düşüncelerine ∞ ile ilgili inanışlarının etkisinde kaldıkları sonucuna ulaşılabılır (Maurice, 2000). (bkz: Tablo 6, Soru3)

∞^∞ ifadesine üs tanımına uymuyor gerekçesiyle tanımsız cevabını veren katılımcıların büyük çoğunluğunun 1^∞ durumuna 1 cevabını vermeleri ∞^∞ durumundaki tabanda bulunan ∞ sembolünü problem olarak gördükleri sonucuna götürebilir.

$\frac{1}{\infty} = ?$ sorusuna gerekçelerinde $\frac{1}{\infty} = 0$ cevabını limit bağlamı dışında veren katılımcıların $\frac{1}{\infty}$ ifadesini nesne olarak gördüklerini veya daha önce limit durumunda karşılaştıkları $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ durumunda sıkça yapılan, sonsuzu yerine koyup $\frac{1}{\infty} = 0$ durumunu elde etmedeki durumu hatırlayıp verdikleri söylenebilir.

$\frac{1}{0} = ?$ sorusuna $\frac{1}{0} = \infty$ cevabını verenlerin durumu da $\frac{1}{\infty} = 0$ durumuna benzer bir yorumdur.

$0 \cdot \infty$ ifadesini “0’ın yutan elemandır” gerekçesiyle 0 bulan katılımcıların sonsuz’u bir sayı olarak gördükleri söylenebilir.

$\infty - \infty = 0$ cevabını veren katılımcıların gerekçeleri incelendiğinde bu katılımcıların limit bağlamında 0 diyenlerin farklı sonsuzların olabileceğini düşünemedikleri söylenebilir. Limit dışında cevaplayanların ise sonsuzu sayı olarak gördükleri düşünülebilir.

“ $\infty^0 = ?$ ” sorusuna belirsiz formlardan birisidir” gerekçesiyle “belirsiz” cevabını veren katılımcıların bu ifadeyi nesne olarak gördükleri söylenebilir.

5.1.2. Performans testi–2 bulgularının tartışılması

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$ sorusuna, katılımcıların büyük çoğunluğunun doğru cevap vermesinin ardında yatan nedenlerden birisi de katılımcıların uyguladıkları çözümlerin benzerliğidir. Benzer çözümlerin içeriğinde ise gözlenen 2 ayrı kural uygulaması bulunmaktadır. Birincisi sadeleştirme, ikincisi ise pay ve paydanın ayrı ayrı türevinin alınması olan L’Hopital kuralının uygulamasıdır. Bu 2 kuralı hatırlayabilen katılımcılar soruyu irdelemeden bu kuralları direkt uygulayarak sonuca ulaşmışlardır. Yani katılımcıların çoğu (%62) kuralsal anlamının gereğini yerine getirmişlerdir (Skempt, 1978).

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x^2 - 4)}{x - 2}$ sorusunun çözümüne yönelik girişimlere bakıldığında katılımcıların belli başlı çözüm yöntemleri etrafında yoğunlaştıkları kendini göstermektedir. Burada katılımcıların, verilen ifadeyi bütünsel olarak ele aldıkları söylenebilir. Limitin önünde yazılı olan fonksiyonun $x=2$ noktasındaki davranışının eğilimi konusunda yorum yapmaya çalışan az sayıda katılımcının ifadeyi bir süreç olarak ele alma çabasında olduğu söylenebilir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 + x + 1}$ sorusuna verilen gerekçeli cevaplar incelendiğinde, birçok cevabın

gerekçe kısımları ve çözüm kısımlarının boş olup doğru cevabın direkt yazılması katılımcıların bir kuralı doğrudan doğruya uygulayıp sonuca gittikleri düşüncesini kuvvetlendirmektedir. Çözüm kalıbının kolay hatırlanıyor olması sürecin irdelenmesini gölgelemiştir denilebilir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+2}\right)^{3x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - x)$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{4x+1}$ sorularını çok

sayıda katılımcının boş bırakması yanlış cevap veren ve boş bırakan katılımcıların sayısının fazla oluşundaki en temel nedenin ilgili kuralı hatırlayamamaları olduğu, katılımcıların yazdıkları gerekçelerden çıkarılabilir. Soruyu doğru yapanların ise sadece bir kural çerçevesinde soruyu çözmeleri kalıp (kural) öğrenme mantığının uygulamasını tercih ettiklerini gösterebilir. Katılımcıların kuralı hatırlayamamalarının sonucu olarak, kural dışında özgün ve yaratıcı çözüm üretme konusunda yetersiz (ya da isteksiz) oldukları süreçte gözlenen davranışlardan söylenebilir.

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$ sorusuna verilen cevaplar incelendiğinde katılımcıların %46'sının

soruyu doğru cevaplandığı görülürken %12'sinin yanlış cevapladığı görülmektedir. İlgili çözüm sürecini hatırlayamama gerekçesiyle %39'unun soruyu boş bıraktığı görülmektedir. %58'inin ise ifadeye "tanımsız" demesi ilgi çekici bir veridir.

5.1.3. Performans testi-1 deki benzer soruların sonuçlarından elde edilen bulgularının tartışılması

Bu kısımda PT1'deki birbirine paralel nitelik gösteren sorulardan elde edilen bulgulara yönelik tartışma bulunmaktadır.

5.1.3.1. PT1'deki soru 1,4 ve 6'nın karşılaştırılmasından elde edilen bulguların tartışması

Tablo 8 incelendiğinde " $\infty + \infty$ " ifadesine katılımcıların yarısından biraz fazlası "sonsuz" derken, bu durumla tamamiyle aynı mantıktan düşünülmesi gereken " $2\infty + 3\infty$ " ifadesine büyük çoğunluğunun "sonsuz" demesi ilgi çekici bir durumdur. Gerekçeli açıklamalar incelendiğinde " $2\infty + 3\infty$ " ifadesine "sonsuz" cevabını veren katılımcıların " $2\infty + 3\infty = 5\infty = \infty$ " gerekçesini kullanmaları onların " ∞ " kavramını bir değişken (x gibi) olarak düşündüklerini göstermektedir. " $\infty + \infty$ " ifadesini limit bağlamında düşünenlerin sayısının, " $2\infty + 3\infty$ " ifadesinde daha da azalmasının bu düşünceyi desteklediği söylenebilir.

" $\infty - \infty$ " ifadesine katılımcıların az bir kısmının "0" demesi onların " ∞ " kavramını bir değişken (x gibi) olarak düşündükleri şeklinde yorumlanabilir. Limit bağlamında düşünselerdi, bu iki sonsuzun farklı fonksiyonlardan gelebilecek farklı sonsuzlar olabileceğini düşünebilirlerdi. Az bir kısmının " ∞ " cevabını vermesi bu katılımcıların sonsuzlardan birisini diğerinden farklı (küçük veya sayı) olarak düşündükleri (gerekçeli açıklamaları dikkate alınarak) fikrine götürebilir.

5.1.3.2. PT1'deki soru 1 ve 6'nın karşılaştırılmasından elde edilen bulguların tartışması

Tablo 9 incelendiğinde, "1.1.1..." ifadesini katılımcıların az bir kısmının limit bağlamında düşünmesi ile " 1^∞ " ifadesini biraz daha fazla kısmının limit bağlamında düşünmesi ilk soruda kullanılan "..." nın diğer soruda kullanılan " ∞ " u tam olarak karşılamadığını göstermektedir. Ya da " ∞ " durumunun limiti çağrıştırmaması, "..." nın limiti çağrıştırmamasından daha kuvvetlidir denilebilir. "1.1.1..." ifadesine, yarıdan biraz fazlasının "1" cevabını vermesi de limit düşüncesinden uzaklaşmalarından kaynaklanmış olabilir. " 1^∞ " ifadesi için az bir kısmının "1" cevabını limit bağlamı dışında vermesi bu katılımcıların sonsuzu, "bir sayıya ulaşılabilen bir süreç" olarak düşündükleri sonucuna götürebilir. Bazı katılımcıların çok azı ise " $1.1.1...=1^\infty$ "

yazıp, “1’in bütün kuvvetleri 1’dir” şeklinde kuralsal bir çözüme gitmeleri sonsuz bir sayı olarak düşündükleri sonucuna götürebilir.

5.1.4. Her iki testin karşılaştırılmasında elde edilen bulguların tartışması

Performans Testi-1 deki soru 1’ e tanımsız cevabını veren az bir katılımcının büyük bir kısmının Performans Testi-2 deki Soru2 ve soru5’e belirsiz cevabını vermelerinin “çelişkili” bir durum olduğu söylenebilir (bkz: Tablo 10)

Performans Testi-1, Soru 2’ ye tanımsız cevabını veren katılımcıların yarıya yakınının kendi içindeki yarıdan fazlasının, Performans Testi-2 deki soru1 ve soru 4’e belirsiz cevabını vermelerinin “çelişkili” bir durum olduğu söylenebilir (bkz: Tablo 11).

Performans Testi-1 deki soru3’e “üs tanımına aykırı” gerekçesiyle “tanımsız” cevabını veren katılımcıların tamamına yakınının Performans Testi-2 deki soru 8’e de “tanımsız” cevabını vermeleri, ilk verdikleri cevabın etkisinde kaldıklarını düşündürtebilir. Soru 3’e “1” cevabını veren katılımcıların yarısından fazlasının soru 8’e de ilgili değeri verilen fonksiyonda yerine koyup daha sonra $1^\infty = 1$ gerekçesiyle “1” cevabını vermeleri yine ilk cevabın etkisinden kurtulamadıkları sonucuna götürebilir. Ayrıca, soru 3 ‘e “1” cevabını limit bağlamı dışında verdiklerini gerekçeli açıklamalarında ifade eden katılımcıların büyük bir kısmının soru 8’de limit bağlamında verilen fonksiyona da $1^\infty = 1$ gerekçesiyle “1” cevabını vermeleri “çelişki” oluşturabilecek durumlardan sayılabilir. “belirsizlik” durumu olan soru 8’e “tanımsız” cevabını veren bir kısım katılımcının bu kavramları net olarak ayıramadığı söylenebilir (bkz: Tablo 12).

Performans Testi-1, soru 10’a “0” cevabını veren katılımcıların büyük bir kısmının “ ∞ ” ifadesini bir sayı olarak gördüklerini dolayısıyla sıfırın çarpma işlemindeki yutan eleman olma özelliğini kullanarak cevap vermelerinin ise bunu desteklediği söylenebilir. İlk testteki soru 10’a “0” cevabını veren katılımcıların büyük bir kısmının ise diğer testteki soru 3’ e “ $0 \cdot \infty$ belirsizliği” demeleri, limit bağlamının

etkisinde kaldıklarının bir göstergesi olabilir. Soru 3' e katılımcıların yarıya yakınının “tanımsız” cevabını vermeleri bu katılımcıların “tanımsızlık” ve “belirsizlik” durumlarını karıştırdıkları veya birbiri yerine kullandıkları düşüncesine götürebilir (bkz: Tablo 13).

Soru 11' e “belirsiz” cevabını veren katılımcıların büyük bir kısmının bu cevaplarını limit bağlamında vermemelerine rağmen, soru 6 ve soru 7'deki ifadelere aynı gerekçeyle “belirsiz” cevabını vermeleri onların ilk durumda soru 11'deki sonsuzlukları nesne olarak gördüklerini soru6 ve soru7 de ise süreç olarak gördüklerini düşündürmektedir. Ayrıca soru 11'e “belirsiz” cevabını limit bağlamında veren katılımcıların yarıya yakınının soru 6 ve soru 7'ye tanımsız demeleri çelişkili bir durum olarak değerlendirilebilir (bkz: Tablo 14).

Genel tartışma

Cevaplar ve gerekçeler incelendiğinde katılımcıların yorumlarında, özellikle sonsuzluk içeren sorulara verdikleri yorumlarda çelişkilerin bulunduğu görülmektedir. Aynı cevap kâğıdı içerisinde bir soruda sonsuzluğu bir sayı gibi (nesne) düşünen bir katılımcı bir diğer soruda sonsuzu limit bağlamında (süreç) düşünmüş, başka bir soruda ise sonsuzun limitsiz olarak yazımının yanlış olduğunu savunup işlem yapılamayacağını iddia etmiştir. Örneğin; 1^{∞} 'a “belirsiz form” cevabını veren bir katılımcı $\infty - \infty$ cevabına “0” demiştir. Burada katılımcının 1^{∞} durumunu limit bağlamında bir süreç olarak düşündüğü, $\infty - \infty$ durumunu ise aynı büyük sayıyı ifade eden sembollerin farkı şeklinde nesne olarak görmesi limit bağlamında düşünmediğini ifade etmesinden anlaşılmaktadır. soru8, soru9, soru18, soru19, soru16 da ise birçok katılımcının sonsuzu “nesne” olarak görmesi, verdikleri gerekçelerden anlaşılmaktadır.

Katılımcıların bazılarının Performans Testi-2 deki her biri belirsizlik durumu olan sorulara tanımsız cevabını vermeleri bu katılımcıların “tanımsızlık” ve “belirsizlik” durumlarını net olarak ayıramadıkları veya bu kavramları birbiri yerine kullanabildikleri sonucuna götürebilmektedir.

Merkezi sınav sistemi nedeniyle öğrenciler “1,0” ve sonsuzla yapılan işlemlerde (paydası sıfırdan farklı olması gereken fonksiyon sorularında, asimptot sorularında) özellikle belirsizlik içeren limit sorularında ilgili kuralı uygulayıp çözümü bulabilmeleri onların süreci önemsemeyip nesneye yönelmelerine neden olmaktadır. Sorular onlara derinlemesine düşünmelerini sağlayacak biçimde sorulduğunda ise sorulara süreç olarak bakabildikleri ve ilk verdikleri cevapları genelde değiştirmeye yöneldikleri yapılan görüşmelerden gözlenmiştir. Verdikleri bu cevapların diğer cevapları da etkilemesi ortaya birbirinden farklı kendilerinin bile tam emin olmadıkları sonuçlara götürmektedir. Hatta verdikleri cevapların diğer sorularda işleyemediği durumlarda ya o soruyu boş bırakmışlar ya da ilk verdikleri cevapla çelişecek durumlara düşebilecekleri cevaplar vermişlerdir.

Tall & Gray (1994) “procept” kavramı ile ilgili araştırmalarında süreçlerin zihinsel bir nesneye dönüşüm aşamaları üzerinde durmaktadırlar. Özellikle limitin direkt olarak verilmediği, öğretmenlerinden, ders kitaplarından ya da yaşantılarından edindikleri $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ ve 1^∞ gibi verildiğinden bu çalışmada nesne odağın merkezinde olup, süreç katılımcıların zihinlerinde buldurulmaya veya oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu haliyle nesneden sürece bir gidiş söz konusu denilebilir.

Katılımcıların Performans Testi-2’deki limit sorularına verdikleri cevaplar incelendiğinde yarıdan fazlasının çözüm süreçleri; x’in ulaşacağı değeri fonksiyonda yazıp hangi tür belirsizliğe dönüşüyorsa ona uygun prosedürü uygulamaya çalışmak şeklinde olmuştur. Yani ifade süreci ile değil ezberlendiği ve kişinin anlam yüklediği şekilde nesnel olarak kullanılmıştır.

$\frac{1}{\infty}$ için kimi katılımcı $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ ifadesinde x’e sonlu sayıda değer verilmesiyle, kimisi de x’e sonsuz sayıda değer verilmesiyle kimisinde ise direkt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty}$ şeklinde bir akıl yürütme yoluyla sonucuna ulaşmışlarken bu durum $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ ve 1^∞ ifadelerinde sadece nesne boyutunda kalmıştır (bkz: s,23; Apos).

Sonucu tanımsızlık ve belirsizliğe giden sorularda öğretmen ve öğretmen adaylarının süreçte zorlandıkları özellikle Performans Testi-1’de verilen soruların birçoğunu nesne olarak gördükleri buna karşın bu sorulara karşı çok fazla şema oluşturamadıkları ve bu nesnelerin sahip olduğu süreçleri bir anda düşünemedikleri yapılan görüşmelerden ve gerekçeli açıklamalarından görülebilmektedir. Dolayısıyla $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , $0 \cdot \infty$ gibi ifadeler hakkında yalnızca “prosedürel bilgi” basamağında kaldıkları görülebilmektedir. Aynı şekilde Apos Teorisi’ni teşkil eden elemanlardan (bkz: s, 23) nesne boyutunda yorum yapabildikleri verilerden elde edilmektedir. Fakat Performans Testi-2’deki limit bağlamında verilen sorularda süreç aşamasına da geçebildikleri ama bunda zorlandıkları, verdikleri çoğu tutarlı olmayan açıklamalardan anlaşılmaktadır.

5.2. SONUÇ

Tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının öğretmen ve öğretmen adaylarının görüş ve performansları bağlamında incelenmesinin amaçlandığı bu çalışmada özellikle “0, 1” ve ∞ ile yapılan işlemler üzerinde durulmuştur. Öğretmen adaylarının “0, 1” ve ∞ ile yapılan toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin ilköğretim yıllarından itibaren yaptıkları işlemler olmasına, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının üniversite yıllarında eğitimini aldıkları öğretim yöntem ve tekniklerine rağmen dört temel işlemde süreci önemsememişler ve bütün işlemlere bir nesne ya da sonuç olarak bakmışlardır. “0, 1” ve ∞ ile yapılan işlemlerde aktif bir süreçten ziyade pasif bir süreç gözlenmiştir; toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin işaretleri anlamını kaybetmiştir, “ $\infty^0 = ?$ ” ifadesi sadece bir sonraki yapılacak işlem basamağını gösteren bir uyarıcı rolü üstlenmiştir. Detaylı olarak incelenen gerekçeli açıklamalarında öğretmen ve öğretmen adaylarının ezbere hareket ettikleri, aynı cümleleri birbirine benzeyen; ama farklı bağlamlardaki sorularda tekrar tekrar belirtmelerinden anlaşılmaktadır. Ayrıca tablolardaki verilerin onların kendileriyle olan iç hesaplaşmaları sonucundaki son kararları olduğu yapılan görüşmelerden anlaşılmaktadır. Katılımcıların tanımsız ve belirsizlik içeren sorularda cevabı “tanımsız” veya “belirsiz” olarak vereceğini biliyor ama hangisini söyleyeceğini

bilemiyor olması, bu kelimelerin matematik bağlamındaki anlamlarını tam olarak bilemediklerini göstermektedir.

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının yorumlamakta zorlandıkları “0, 1” ve “∞” ile yapılan işlemlerde sonsuzluğu tanımlamakta zorlanmaları ve alışlagelmiş kesirler yerine “0, 1 “ve “ ∞” ifadelerinin olması ve sadece limit başta olmak üzere belirli matematik konularında kullanılması, ifadelere olan aşinalığı ortadan kaldırmıştır. Tanımsızlık ve belirsizlik kelimelerini matematik bağlamından çok sözlük anlamı ile ifade edip kullanan öğretmen ve öğretmen adaylarının bu kelimeleri ezbere kullandıkları gözlenmiştir.

“ $2\infty + 3\infty = 5\infty = \infty$ ” ifadesinde $2x + 3x = 5x$ durumunu kullanmış olmaları ∞ 'u bir değişken gibi düşündüklerini fakat $5\infty = \infty$ 'i kullanmakla yine sonsuza farklı bir anlam yüklemekle aynı çözüm içerisinde çelişkiye düşebildiklerini gösterebilmektedir (s., 87).

Özetlenecek olursa; öğretmen ve öğretmen adayları genellikle limit konusunda öğrendiklerini düşünerek belirsizlik katıyorlar; ama bunun yanında “tanımsız” deyip sonsuza sayı gibi davranıp “1 “ve “0” bile bulanlar da var. Bunun dışında sembolik ifadelere tek başına karşılaştıklarında onları “nesne” olarak algılamaya alıştıkları için yorum yapamazken yaptıkları yorumlarda zorlandıkları, onlara matematiksel anlamlar vermeye ya da onları edebi olarak yorumlamaya çalıştıkları görülmüştür. Matematiksel olarak verdikleri anlamlarda da verdikleri cevaplarla kendileriyle çelişmişlerdir.

5.3. ÖNERİLER

Çalışmanın önemi düşünüldüğünde tanımsızlık ve belirsizliğin hem müfredatımızda hem de öğretmenler tarafından sınıfta öğrencilerin aklında soru işareti bırakmayacak şekilde anlatılması gerektiği ortaya çıkarmaktadır. Bunun için de bazı etkinlikler düzenlenebilir, bazı özel sorular seçilebilir. Ama belirsizlik ve tanımsızlığın “1,0” ve sonsuzla yapılan işlemlerden çıktığı kabul edilip konu olarak da kavram olarak da

“limit”le ilişkili olduğu düşünülürse o zaman bu konu hakkında gerekli etkinlikler ve çalışmaların iyi verilmesi gerekir.

Sonsuzluk kavramının öğretilmesinde dikkat edilecek olan hususlar, sonsuzun işin içine karıştığı durumlarda meydana gelebilecek bir takım açmazların da azalmasına sebep olacaktır. Bu durum örneklendirilecek olursa, mesela limit durumunda karşılaşılan $\infty - \infty$ durumu için, ifadede bulunan sonsuzların kardinalitelerinin farklı olabileceğine kümeler konusu anlatılırken vurgu yapıp ifadedeki belirsizliğin nedeninin de bu farklı kardinaliteye sahip iki fonksiyonun farklarının ne olacağına tam olarak belli olmamasının neden olduğu “belirsiz formlar” konusunda anlatılabilir. Bir diğer örnek ise öğrencilerin sonsuzu bir sayı gibi görmelerine neden olan durumların yeterince açıklayıcı bilgilerle giderilmesidir. Bu durumlardan bazıları şunlardır:

- 1- “ $-\infty < -2 < x < +\infty$ ” ifadesinin “ $\dots < -2 < x < \dots$ ” ifadesi ile aynı anlamı taşıdığı öğrencilere sezdirici etkinlikler düzenlenebilir.
- 2- Devirli ondalık açılımların virgülden sonraki kısımlarının sonsuza kadar devretmesinin sayının sonsuz olmasını gerektirmediği aksine sayı doğrusunda tek bir noktaya karşılık geldiği vurgulanabilir.
- 3- $\frac{\infty}{\infty}$ ifadesi gibi sonsuzun bir sayıymış gibi görülebildiği durumların hangi bağlamlarda irdelendiğinin ve hangi matematiksel işlemin neticesinde bu duruma gelindiğini belirtici işaretler kullanılabilir. Örneğin, $\frac{\infty_p}{\infty_p}$ gibi bu ifadelerin limit bağlamında karşılaşıldığı kodlanabilir.

Ortaöğretim ve lisans öğretim programlarında fonksiyonlar ve üslü sayılar konusunda tanımsızlık kavramını daha anlaşılabilir yapan etkinlikler konulabilir. Tanımsızlık ve belirsizlik günlük hayattan örneklerle tartışılıp matematik ifadelerle örtüştürülebilir

Doküman analizinin incelemesinde belirsizlik durumlarının ayrıntılı olarak incelenmesine izin veren etkinliklerin gerektiği kadar bulunmadığı bu sebeple de

katılımcıların belirsizlik, tanımsızlık kavramlarına ilişkin bilgilerinin yetersiz veya birbiriyle tutarsız olduğu araştırma bulgularından elde edilmiştir. Bunun gereği olarak, müfredatlarda sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik içeren konuların sadece kavramsal anlamaya yönelik olan etkinliklerden kurtulması tavsiye edilebilir.

KAYNAKLAR

- Altunışık R., Coşkun R., Bayraktaroğlu S., Yıldırım E. (2004). *Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri*, (3. Baskı). İstanbul. Sakarya Kitabevi.
- Anderson, J. (2009). *Transmathematics*. Reading University-England.
- Bir, A.,A.(1999).*Sosyal bilimlerde araştırma yöntemleri*. 22.05.2010 tarihinde <http://www.aof.anadolu.edu.tr/kitap/IOLTP/2294/unite01.pdf> adresinden güncellenmiştir.
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B. S. & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra, *American Educational Research Journal*, 34 (4), 663-689.
- Burton, D.M. (2003). *The History of Mathematics: An Introduction (5th ed)*. New York: McGraw- Hill Companies, Inc.
- Chapman, A. (1993). Language and learning in school mathematics: A social semiotic perspective. *Issues in Educational Research*, 3(1), 35–46.
- Chin, J. L., & Russo, N. F. (1997). Feminist curriculum development: Principles and resources. In J. Worell & N. G. Johnson (Eds.), *Shaping the future of feminist psychology: Education, research, and practice (pp. 93-120)*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*, (5th edition). London: Routledge.
- Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (ed), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167–192.
- Cockcroft, W.H. (Chair) (1982). *Mathematics Counts*. HMSO: London.
- Çepni, S. (2007). *Arastırma ve Proje Çalışmalarına Giriş*, Genisletilmiş 3. Baskı, Celepler Matbaacılık, Trabzon.

- Dubinsky, E., (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D.O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E., K. Weller, M. A. McDonald, and A. Brown (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et Pensée humaine. Registres Sémiotiques et apretissages Intellectuels*, Peter Lang, Neüchatel, Suisse.
- Eisenberg, T. (1991), '9. *Function and Associated Learning Difficulties*', in D.O.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 140-152.
- Ekiz, D. (2003). *Eğitimde Arastırma Yöntem ve Metodlarına Giriş*. Anı Yayıncılık, Ankara, 2003.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P.: (1979). 'The intuition of infinity', *Educational Studies in Mathematics* 10, 3–40.
- Fishbein, E. (2001). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 309-329.
- Fishbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.
- G.,B., Thomas and R L Finney (1986). *Calculus and Analytic Geometry - Sixth Edition* Addison Wesley Pub. Co.London.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 116-140.
- Guba, E.G. and Lincoln, Y.S.(1994). Competing paradigms in qualitative research. In *Handbook of Qualitative Research*, N.K. Denzin and Y.S. Lincoln (eds.), Sage Publications.
- Güven, S. (1996). *Toplumbiliminde Arastırma Yöntemleri*, Ezgi Yayıncılık, Bursa

- Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of Algebra. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. (pp. 60–86). Reston, V: Lawrence Erlbaum for NCTM.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. In J. Hiebert (Ed.), "Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics" (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hoshmand, L. L. S. T. (1989). Alternate research paradigms: A review and teaching proposal. *The Counseling Psychologist*, 17, 3–79.
- Kaplan, E. (2008). Ortaöğretim Matematik 12. Sınıf Ders Kitabı. Paşa Yayıncılık. Ankara.
- Karasar, N. (1999). *Bilimsel Araştırma Yöntemi*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Kuşçu, E.(2007). *Nitel-Nicel Araştırma Teknikleri*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Lodico , M. G., Spaulding , D. T., & Voegtle , K. H. (2006). *Methods in Educational Research: From Theory to Practice* . Jossey-Bass Wiley. San Francisco, CA.
- Maurice, L. (2000). Les idées d'élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir zéro et l'infini. *Thèse de doctorat*, Université Laval, Canada.
- Mertens, D. (1998). *Research methods in education and psychology*. New York: SAGE Pub.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2005). Orta Öğretim Matematik (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı. Ankara: MEB Yayınevi.
- Monaghan, J. (1986). Adolescents' Understanding of Limits and Infinity, *Unpublished PhD thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK*.
- Monaghan, J.: (2001). 'Young Peoples' Ideas Of Infinity', *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer, 239-257 (Printed in The Netherlands).
- Moreno, A.L.E. & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics* 22 (3), 211-231
- Moru, E. K. (2006). Epistemological obstacles in coming to understand the limit concept at undergraduate level: A case of the national university of Lesotho. *Ph.D. dissertation*, University of the Western Cape.

- Mutlu, A. ve Ercan, M. A., (2008). Ortaöğretim Matematik 9. Sınıf Ders Kitabı. Gün Yayıncılık. Ankara.
- Nesin, A. (2002). *Matematik ve Sonsuz*. İstanbul: İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları.
- O'Connor, J.J. ve Robertson, E.F. (2002). History Topic: Infinity (MacTutor History of Mathematics) 17.05.2010 tarihinde <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Infinity.html> adresinden alınmıştır.
- P., Murray and M., Charles B., (1977). *Calculus with Analytic Geometry*. Third edition. Addison-Wesley Pub. Co. London.
- Piaget, J. and Inhelder, B.: 1956, *The Child's Conception of Space*, Routledge and Kegan Paul, London (originally published in 1948).
- S., K., Sherman & B., Anthony (1996). Çevirenler: Beno Kuryel, Firuz Balkan. *Calculus and Analytic Geometry*. McGraw-Hill-Literatür ortak yayını. İstanbul.
- Silverman, R. A. (1985). *Calculus with Analytic Geometry*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Simon, M.A., 1994, Learning Mathematics and Learning to Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 71-94.
- Singer, M. & Voica, C. (2003). Perception of infinity: Does It Really Help in Problem Solving? *Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education*. Brno, Czech Republic.
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Steinbring, H. (2002). *What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction*. 17.05.2010 tarihinde <http://www.math.uncc.edu/~sae/steinbring.pdf> adresinden alınmıştır.
- Şandır, Y. T. (2006). Fonksiyon kavramı hakkında öğretmen adaylarının görüşleri üzerine bir fenomenografik çalışma. (Danışman: Doç. Dr. Ahmet ARIKAN), *Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi.

- Tall, D. (1989). Different cognitive obstacles in a technological paradigm or A reaction to: "Cognitive obstacles encountered in the learning of Algebra". In S. Wagner and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 87–92). Reston, V: Lawrence Erlbaum for NCTM.
- Tall, D.O., Vinner, S. (1981). "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity." *Educational Studies in Mathematics, Vol. 12, pp. 51-169.*
- Thomas, G.B ve Meir, M.D. (2004). *Thomas' Calculus*, 11th Edition (*Thomas Series*). Published by Addison Wesley.
- Thomas, N.D., Mulligan, J.T., ve Goldin, G.A. (2002). Children's representation and structural development of counting.
- Tirosh, D., (1999). Intuitive beliefs, formal definitions and undefined operations: The cases of division by zero. *Dept. of Science Education, Tel-Aviv University, Israel.*
- Tsamir, P. Ve D. Tirosh (1999). Consistency and Representations: The case of Actual Infinity. *Journal for Research in Mathematics Education, 30, 213-219.*
- Tsamir, P. Ve T. Dreyfus (2002). Comparing Infinite Sets – A process of Abstraction: The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior, 21, 1-23.*
- Wheeler, M.M. (1987). Children's understanding of zero and infinity. *Arithmetic teacher, Nov. 1987, 42-44.*
- Winslow, C. (2000). *Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics.* November 17.05.2010 tarihinde http://www.naturdidak.ku.dk/winslow/NOMAD_ICME10.pdf adresinden alınmıştır.
- Yıldırım, A., Simsek, H. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Arastırma Yöntemleri*, (6.Baskı). Seçkin Yayıncılık, Ankara.

EKLER

EK1: Performans Testi-1

"Bu araştırmanın amacı; sonsuzluk, tanımsızlık, belirsizlik konularında öğretmen, öğrenci ve akademisyenlerin görüşleri ve kavram yanılgılarını belirlemektir. Yapılan anket hiç kimseyi değerlendirmek amacı gütmemektedir. Anket sonunda isim yazmanız zorunlu olmayıp istemeniz durumunda rumuz yazmanız yeterlidir." Katıldığınız için teşekkürler

Adı- Soyadı veya Rumuz : Yaş: Görev Süreniz : Cinsiyet:

$\frac{\infty}{\infty} = ?$	$\infty - \infty = ?$
$\frac{0}{0} = ?$	$1.1.1... = ?$
$1^\infty = ?$	$\infty^0 = ?$
$5^0 = ?$	$0^5 = ?$
$\infty^\infty = ?$	$\frac{\infty}{2} = ?$
$\frac{1}{\infty} = ?$	$\infty - 1 = ?$
$\frac{1}{0} = ?$	$\frac{1}{100...0} = ?$
$2^\infty + 3^\infty = ?$	$\infty + 103 = ?$
$4 \cdot \infty = ?$	$\infty + \infty = ?$
$0 \cdot \infty = ?$	$1+2+3+4+...=?$ $0^0 = ?$

EK2: Performans Testi-2**PERFORMANS TESTİ 2****Adı:****Soyadı:****Yaşı:***Öncelikle tanımsız mı? Belirsiz mi? bölümünü işaretleyiniz. Sonra soruları çözünüz.*

SORULAR	Tanıms	Belirsz	SORULAR	Tanıms	Belirsz
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$			$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 + x + 1}$		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{4x + 1}$			$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x - 2} - x)$		
$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x)$			$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$		
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x^2 - 4)}{x - 2}$			$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x + 2} \right)^{3x}$		

EK3: Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

- 1^∞ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- $1.1.1\dots$ ifadesi hakkında neler düşünüyorsunuz?
- $\frac{1}{\infty}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- $\infty - \infty$ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- $\frac{0}{0}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- Tanımsız, belirsiz ve sonsuz kavramları sizde neler ifade ediyor?
- Bu kavramlara eşdeğer olduğunu düşündüğünüz farklı kavramlar var mı?
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1}$ hakkında neler düşünüyorsunuz?
- Peki, tanımsızlık, belirsizlik, sonsuzluk kavramlarını gerçek hayatta kullandığınız durumlar var mı?
- $2,99\dots-0,99\dots$ hakkında neler düşünüyorsunuz? Bu durumu nasıl irdelersiniz?
- $x=3$ için $x-3/x-3$ hakkında ne düşünürsünüz?

EK4: Değerlendirme Tabloları

PERFORMANS TESTİ 2- DEĞERLENDİRME TABLOLARI

	<i>Doğru (D)</i>	<i>Kısmen Doğru(D)</i>	<i>Yanlış (Y)</i>	<i>Cevap yok (C.Y.)</i>
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 + x + 1}$	<ul style="list-style-type: none">• $\frac{3}{2}$ cevabını verenler	<ul style="list-style-type: none">• Ortak çarpan parantezine alanlar• sadeleştirme yapanlar• L' Hospital kuralını uygulayanlar• yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	<ul style="list-style-type: none">• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - x)$	<ul style="list-style-type: none">• $-\infty$ cevabını verenler	<ul style="list-style-type: none">• Eşlenik alma yöntemini uygulama• sadeleştirme yapanlar• yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	<ul style="list-style-type: none">• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$	<ul style="list-style-type: none">• $-\frac{1}{2}$ cevabını verenler	<ul style="list-style-type: none">• Payda eşitleyenler• sadeleştirme yapanlar• yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	<ul style="list-style-type: none">• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x + 2} \right)^{3x}$	<ul style="list-style-type: none">• $e^{\frac{3}{2}}$ cevabını verenler	<ul style="list-style-type: none">• Sonucu kuraldan bulanlar• her iki tarafın Ln' ini alma kuralını uygulayanlar• yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	<ul style="list-style-type: none">• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

	<i>Doğru (D)</i>	<i>Kısmen Doğru(D)</i>	<i>Yanlış (Y)</i>	<i>Cevap yok (C.Y.)</i>
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$	• $\frac{4}{7}$ cevabını verenler	• çarpanlarına ayırarak • sadeleştirme yapanlar • L' Hospital kuralını uygulayanlar • yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{4x + 1}$	• $-\frac{1}{2}$ cevabını verenler	• Eşlenik alma yöntemini uygulama • L' Hospital kuralını uygulayanlar • yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x)$	• 1 cevabını verenler	• $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tan a}{a} = 1$ kuralından yararlananlar • L' Hospital kuralını uygulayanlar • yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x^2 - 4)}{x - 2}$	• 4 cevabını verenler	• $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tan a}{a} = 1$ kuralından yararlananlar • L' Hospital kuralını uygulayanlar • yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar	• İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar	• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PERFORMANS TESTİ 2- DEĞERLENDİRME TABLOLARI (devamı)

	<i>Doğru (D)</i>	<i>Kısmen Doğru(D)</i>	<i>Yanlış (Y)</i>	<i>Cevap yok (C.Y.)</i>
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 + x + 1}$	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{3}{2}$ cevabını verenler 	<ul style="list-style-type: none"> Ortak çarpan parantezine alanlar sadeleştirme yapanlar L' Hospital kuralını uygulayanlar yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar 	<ul style="list-style-type: none"> İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar 	<ul style="list-style-type: none"> Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - x)$	<ul style="list-style-type: none"> $-\infty$ cevabını verenler 	<ul style="list-style-type: none"> Eşlenik alma yöntemini uygulama sadeleştirme yapanlar yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar 	<ul style="list-style-type: none"> İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar 	<ul style="list-style-type: none"> Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right)$	<ul style="list-style-type: none"> $-\frac{1}{2}$ cevabını verenler 	<ul style="list-style-type: none"> Payda eşitleyenler sadeleştirme yapanlar yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar 	<ul style="list-style-type: none"> İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar 	<ul style="list-style-type: none"> Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+2} \right)^{3x}$	<ul style="list-style-type: none"> $e^{\frac{3}{2}}$ cevabını verenler 	<ul style="list-style-type: none"> Sonucu kuraldan bulanlar her iki tarafın Ln' ini alma kuralını uygulayanlar yukarıdaki adımları yapıp sonucu hatalı bulanlar 	<ul style="list-style-type: none"> İfadede verilenlerle ilgili olmayan cevaplar 	<ul style="list-style-type: none"> Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

Performans Testi-1 Değerlendirme Tabloları

PT1, Soru 1 $\frac{\infty}{\infty}$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve belirsiz denileceğini söyleyenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenlerL' Hospital kurallarında görülen bir belirsizlik durumu olduğunu söyleyenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 2: $\frac{0}{0}$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Böyle bir ifadeyle limit durumunda karşılaşılması halinde bir belirsizlik limit durumları dışında tanımsızlık olduğu cevabını verenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenlerBu ifadenin bir sayı dahi olmayacağını söyleyenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 3: 1^∞

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabilceğini cevabını verenler• $f(x)^{g(x)}$; $f(x)=1$ ve $g(x) \rightarrow \infty$ ise sonuç 1 cevabını verenler• $f(x)^{g(x)}$; $f(x) \rightarrow \infty$ ve $g(x) \rightarrow \infty$ ise bu durumun bir belirsizlik durumu olduğu cevabını verenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler• L' Hospital kurallarında görülen bir belirsizlik durumu olduğunu söyleyenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 4: 5^0

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• 1 cevabını verenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• üstteki sıfırın limit durumunda sıfıra yaklaşan bir fonksiyondan gelmesi halinde sonucun 1 olduğu cevabını verenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 5: $\frac{\infty}{\infty}$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve belirsiz denileceğini söyleyenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 6: $\frac{1}{\infty}$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve limit durumunda sonucun 0 olduğunu söyleyenler.
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 7: $\frac{1}{0}$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir ifadeyle limit durumunda karşılaşılmaması halinde limitin olmayacağı cevabını verenler• limit durumları dışında tanımsız cevabını verenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler• Bu ifadenin bir sayı dahi olmayacağını söyleyenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 8: $2.\infty + 3.\infty$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve cevabını ∞ yazanlar
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• cevabını ∞ yazanlar
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 9: 4.00

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve cevabını ∞ yazanlar
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• cevabını ∞ yazanlar
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 10: 0.00

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve belirsiz denileceğini söyleyenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler•
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 11: $\infty - \infty$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve belirsiz denileceğini söyleyenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Bu yazının bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenlerL' Hospital kurallarında görülen bir belirsizlik durumu olduğunu söyleyenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 12: 1.1.1...

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Böyle bir ifadeyle limit durumunda karşılaştırılması halinde sonucun 1 olacağı cevabını verenlersonsuz çarpım kavramının ancak limitle tanımlı olduğu cevabını verenler.
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">Bu yazının bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler"..." nın limitin varlığı için yeterli olmadığını düşünenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 13: ∞^0

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılacağını ve belirsiz denileceğini söyleyenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler• L' Hospital kurallarında görülen bir belirsizlik durumu olduğunu söyleyenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 14: 0^5

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• 0 cevabını verenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• tabandaki sıfırı, limiti sıfıra giden bir fonksiyondan gelmiş gibi düşünüp 0 cevabını verenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 15: $\frac{\infty}{2}$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabilceğini ve cevabını ∞ yazanlar
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• cevabını ∞ yazanlar
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 16: $\infty - 1$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabilceğini ve cevabını ∞ yazanlar
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• cevabını ∞ yazanlar
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 17: $\frac{1}{100\dots 0}$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• paydada sınırlı sayıda basamak olduğunu düşünüp, cevabın 0'a çok yakın bir sayı olduğunu düşünenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Bu yazımın bu şekilde yapılmasının yanlış olduğunu düşünenler•
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 18: $\infty + 103$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabileceğini ve cevabını ∞ yazanlar
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• cevabını ∞ yazanlar
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 19: $\infty + \infty$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Böyle bir durumla ancak limit durumunda karşılaşılabilceğini ve cevabını ∞ yazanlar
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• cevabını ∞ yazanlar
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 20: $1+2+3+4+\dots=?$

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ∞ (sonsuz) cevabını verenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• pozitif tamsayılar kümesi veya sayma sayılar kümesine eşittir cevabını verenler
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış

PT1, Soru 21: 0⁰

Kategori	Açıklama
<i>Doğru (D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• tanımsız cevabını verenler
<i>Kısmen Doğru (K.D)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Limit durumunda üstel iki fonksiyonun 0'a gitmesi durumudur.
<i>Yanlış (Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• ifadede verilenler ve istenilenler ile ilgili olmayan cevaplar• üstteki sıfırın limit durumunda sıfıra yaklaşan bir fonksiyondan gelmesi halinde sonucun 1 olduğu cevabını verenler
<i>Cevap Yok (C.Y)</i>	<ul style="list-style-type: none">• Soru üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış