

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DÜZENSİZ İNTEGRALLERİN MUTLAK CESÀRO VE  
AĞIRLIKLİ ORTALAMA METODLARI İÇİN  
İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ**

**Hazırlayan  
Belkız UÇAR**

**Danışman  
Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2018  
KAYSERİ**

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DÜZENSİZ İNTEGRALLERİN MUTLAK CESÀRO VE  
AĞIRLIKLİ ORTALAMA METODLARI İÇİN  
İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hazırlayan  
Belkız UÇAR**

**Danışman  
Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN**

**Ocak 2018  
KAYSERİ**

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Belkız UÇAR

İmza:



## YÖNERGEYE UYGUNLUK

Düzensiz integrallerin Mutlak Cesàro ve Ağırlıklı Ortalama Metodları için İntegrallenebilirliği adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

Belkız UÇAR

İmza



Danışman

Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN

İmza



Matematik ABD. Başkanı V.

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

İmza



Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN danışmanlığında **Belkız UÇAR** tarafından hazırlanan “**Düzensiz integrallerin Mutlak Cesàro ve Ağırlıklı Ortalama metodları için integrallenebilirliği**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

26/01/2018

**JÜRİ:**

Danışman : Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN  
Üye : Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN  
Üye :Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

**ONAY:**

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 06/02/2018 tarih ve 2018/07...05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



06.02/2018  
Prof. Dr. Mehmet AKKURT  
Enstitü Müdürü

## TEŞEKKÜR

Lisans öğrenimimden itibaren, her zaman kapısını çalabildiğim bir hoca olmanın ötesinde; manevi desteğini okul dışında da sürdüren, çalışmalarım sırasında yakın ilgi ve yardımını hiçbir zaman esirgemeyen, öğrencisi olmamdan dolayı kendimi talihli bulduğum; bu günlere gelmemde büyük emek sahibi değerli hocam Sayın Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN’e teşekkürü bir borç bilirim.

Meslek sahibi olma yolunda öğrenim gördüğüm Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde görev yapan değerli hocalarıma ve yüksek lisans öğrenimim boyunca yardımlarını esirgemeyen Fen Bilimleri Enstitüsü personeline teşekkür ederim.

Eğitim hayatıma başarılı ve mutlu bir başlangıç yapmama sebep olan ilkokul, ortaokul ve lise öğretmenlerime teşekkür ederim.

Son olarak; beni bu günlere getirirken, her türlü fedakarlığı yaparak bana iyi bir gelecek hazırlamak için çalışan, eğitim hayatım boyunca desteğini ve emeğini esirgemeyen aileme ve tez çalışmalarım boyunca sabrından ve yardımlarından dolayı eşime sonsuz teşekkürler.

Belkız UÇAR

Kayseri, Ocak 2018

# DÜZENSİZ İNTEGRALLERİN MUTLAK CESÀRO VE AĞIRLIKLI ORTALAMA METODLARI İÇİN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Belkız UÇAR

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2018  
Danışman: Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN

## ÖZET

Bu tez kapsamında düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz integrallenebilirliği için yeterli şartları içeren bazı teoremlerin verilmesi amaçlanmıştır. Tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde gerekli tanım, eşitlik ve gösterimler verilerek ilerleyen bölümlerdeki teoremlerin ispatlarında kullanılacak bir lemma ve ispatı verilmiştir.

İkinci bölümde integrallenebilme çarpanlı düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz integrallenebilmesi için yeterli şartların olduğu bazı teoremler ispatları ile verilmiştir.

Son bölümde ise bir integrallenebilme metodunun diğer bir integrallenebilme metodunu gerektirmesi için yeterli şartları içeren teoremler ve sonuçları ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Düzensiz integraller; Cesàro ortalaması; Riesz ortalaması.

# INTEGRABILITY FOR ABSOLUTE CESÀRO AND WEIGHTED MEAN METHODS OF IMPROPER INTEGRALS

**Belkız UÇAR**

**Erciyes University, Graduate School of  
Natural and Applied Sciences  
M. Sci. Thesis, January 2018  
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. H. Nedret ÖZGEN**

## ABSTRACT

In this thesis, it is aimed to give some theorems including sufficient conditions for Cesàro and Riesz integrability of improper integrals. The thesis consists of three chapters.

In the first chapter, necessary definitions, equations and notations are given. Later, a lemma to be used in the proofs of the following sections' theorems and its proof are given.

In the second chapter, some theorems and their proofs including sufficient conditions for Cesàro and Riesz integrability of improper integrals with an integrability factor.

In the last chapter, some theorems and their results including sufficient conditions that an integrability method implies another integrability method are given with their proofs.

**Keywords:** Improper integrals; Cesàro mean; Riesz mean.



## İÇİNDEKİLER

### DÜZENSİZ İNTEGRALLERİN MUTLAK CESÀRO VE AĞIRLIKLİ ORTALAMA METODLARI İÇİN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ..... | i   |
| YÖNERGEYE UYGUNLUK.....       | ii  |
| ONAY .....                    | iii |
| ÖZET.....                     | v   |
| ABSTRACT.....                 | vi  |
| İÇİNDEKİLER .....             | vii |
| GİRİŞ .....                   | 1   |

## 1. BÖLÜM

### GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| 1.1. Tanım ve Gösterimler ..... | 3 |
|---------------------------------|---|

## 2. BÖLÜM

### İNTEGRALLERİN MUTLAK CESÀRO VE RİESZ

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ İÇİN TEOREMLER ..... | 11 |
|--------------------------------------------|----|

## 3. BÖLÜM

$\int_0^\infty f(t)dt$  İNTEGRALİNİN  $|R, p|_k$  İNTEGRALLENEBİLİR İKEN  $|R, q|_k$

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| İNTEGRALLENEBİLİR OLMASI İÇİN YETERLİ ŞARTLAR..... | 23 |
|----------------------------------------------------|----|

## 4. BÖLÜM

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| TARTIŞMA-SONUÇVE ÖNERİLER..... | 30 |
|--------------------------------|----|

|                 |    |
|-----------------|----|
| KAYNAKLAR ..... | 31 |
|-----------------|----|

|               |    |
|---------------|----|
| ÖZGEÇMİŞ..... | 33 |
|---------------|----|

## GİRİŞ

Toplanabilme teorisi, daha çok Analiz ve Uygulamalı Matematikte kullanılan bir teoridir. Toplanabilmenin önemli yükselişi 19. yüzyılın sonlarında başlamıştır. Sistematik olarak sonsuz serileri kullanan ilk matematikçiler Newton ve Leibniz'dir. Serilerde yakınsaklık Teorisi ise, ilk defa 1821 yılında Cauchy tarafından yazılan "Algebric Analysis" isimli kitapta ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1826 yılında Abel bu yakınsaklık teorisini daha da geliştirmiştir. Matematikçiler ıraksak serileri kullanmada istekli olmamalarına rağmen, Analiz genişledikçe bu konuya istekleri artmış ve yaptıkları işlemler bağımsız elde edilebilecek birçok önemli sonuçlar doğurmuştur. Örneğin,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  şeklinde tanımlı Grandi serisini göz önüne alalım.

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s$$

olduğundan,  $s = \frac{1}{2}$  bulunur. Ayrıca, bu toplamı farklı gruplayarak,

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

şeklinde iki farklı toplam elde edilir. Bu da, serinin yakınsak olmadığını gösterir. Kısmi toplamlar dizisinin de 0 ile 1 arasında salınım yaptığı söylenebilir.

O halde buradan iki sonuç çıkarılır.

1. Bu serinin toplamı  $\frac{1}{2}$  olmalıdır.

2. Bu serinin bir toplamı yoktur.

Her iki ifade de ispatlanabilir.

Toplanabilme teorisi, Bor [1], Bor ve Thorpe [2], Bor ve Thorpe [3], Bor ve Özarslan [4], Özarslan ve Ögdük [5], Özarslan [6], Özarslan [7] gibi birçok bilim insanı ile ilerlemiştir.

Toplanabilme Teorisinin temelleri seriler kullanılarak atılsa da benzer metotlar ıraksak integraller ile de tanımlanabilir. Örneğin  $L$  sonlu bir sayı olmak üzere, herhangi bir  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisi için Cesàro toplanabilme metodu,

$$\sigma_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i \rightarrow L$$

koşuluyla tanımlı iken,  $s(x) = \int_0^x f(t)dt$  integrali için Cesàro toplanabilme metodu,

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t)dt \rightarrow L$$

koşulu ile tanımlıdır. Yani seriler ile integraller birbirine paralellik gösterir.

İntegraller ile ilgili olarak, Landau [8], Boicun [9], Lal [10], Lal ve Ram [11], Lal ve Ram [12], Lal ve Singh [13], Lal ve Singh [14] gibi birçok bilim insanı çalışmalar yapmıştır.

Son zamanlarda ise Çanak ve Totur [15], Çanak ve Totur [16], yavaş salınımlılığın Tauber tipi koşul olduğu teoremler ile kontrol modülünün sınırlılığıyla ilgili bazı teoremler ve sonuçları ispatlarıyla birlikte vermişlerdir. Özgen [17], Özgen [18] de düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz integrallenebilirliği ile ilgili bazı teoremler ifade ve ispat etmiştir.

## 1. BÖLÜM

### GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak temel tanım ve gösterimlere yer verilecektir.

#### 1.1. Tanım ve Gösterimler

**Tanım 1.1.**  $f, [0, \infty)$  aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$s(x) = \int_0^x f(t)dt$$

şeklinde tanımlı olsun.  $s(x)$  fonksiyonunun Cesàro ortalaması,

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer sonlu bir  $L$  sayısı için,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x) = L \quad (1.1)$$

ise,

$$\int_0^{\infty} f(t)dt$$

integrali  $L$  değerine Cesàro integrallenebilirdir veya  $(C,1)$  yakınsaktır denir [19].

**Not 1.1.** Eğer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = L \quad (1.2)$$

limiti sağlanıyorsa, (1.1) limiti de sağlanır. Fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani Cesàro integrallenebilir olup, yakınsak olmayan integraller de vardır. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

**Örnek 1.1.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \sin at \, dt, a > 0$

limiti mevcut değildir. Fakat  $\frac{1}{a}$  değerine Cesàro integrallenebilirdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left( \int_0^t \sin as \, ds \right) dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \sin as \, ds \int_s^x dt = \frac{1}{x} \int_0^x (x-s) \sin as \, ds \end{aligned}$$

Son integrale kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{x} \left[ -(x-s) \frac{\cos as}{a} + (x-0) \frac{\cos 0}{a} - \frac{1}{a} \int_0^x \cos as \, ds \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{a} x \cos 0 \right] - \frac{1}{a^2 x} [\sin(ax) - \sin 0] = \frac{1}{a} - \frac{\sin(ax)}{a^2 x} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} - \frac{\sin(ax)}{a^2 x} \right) = \frac{1}{a}$$

olur. Yani;

$$\int_0^{\infty} \sin at \, dt$$

integralinin  $\frac{1}{a}$  'ya Cesàro integrallenebilir olduğu elde edilir.

Yukarıdaki örnekten de görüleceği gibi, Cesàro integrallenebilme yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır.

**Tanım 1.2.** Eğer

$$\int_0^{\infty} |\sigma'(x)| dx \quad (1.3)$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali  $|C, 1|$  integrallenebilirdir denir.

**Tanım 1.3.**  $k \geq 1$  olmak üzere, eğer

$$\int_0^{\infty} x^{k-1} |\sigma'(x)|^k dx \quad (1.4)$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali  $|C, 1|_k$  integrallenebilirdir denir [17].

Özel olarak, (1.4)'de  $k = 1$  alırsak,  $|C, 1|$  integrallenebilmeyi elde ederiz.

**Eşitlik 1.1.**  $s(x) = \int_0^x f(t) dt$  ve  $v(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt$  olmak üzere

$$s(x) - \sigma(x) = v(x)$$

eşitliğine  $s(x)$  fonksiyonu için Kronocker eşitliği denir [16].

Burada,  $v$ ,  $s$  fonksiyonunun üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır.

**İspat:**  $s(x)$  yerine eşiti olan  $\frac{1}{x} \left( \int_0^x t s(t) dt \right)'$  ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} s(x) - \sigma(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x (t s(t))' dt - \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \left( \int_0^x s(t) + t s'(t) \right) dt - \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x t s'(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = v(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Eşitlik 1.2.**  $s(x) = \int_0^x f(t)dt$  olmak üzere

$$x \sigma'(x) = v(x)$$

dir.

**İspat:**  $\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t)dt$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x s(t)dt + \frac{1}{x} s(x) \\ &= \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x} \int_0^x s(t)dt + s(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} (s(x) - \sigma(x)) = \frac{1}{x} v(x) \end{aligned}$$

Yani  $x \sigma'(x) = v(x)$  dir.

**Not 1.2.** Eşitlik 1.2 kullanılarak, (1.4) şartı

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} |v(x)|^k dx \quad (1.5)$$

şeklinde yazılabilir.

**Tanım 1.4.**  $p$ ,

$$P(x) = \int_0^x p(t)dt, \quad p(x) \neq 0, p(0) = 0$$

olacak şekilde  $[0, \infty)$  aralığında azalmayan, reel değerli bir fonksiyon olsun.  $s$  fonksiyonunun Riesz ortalaması

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_p(x) = s$$

ise,

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

integrali  $s$  değerine  $(R, p)$  integrallenebilirdir denir.

**Tanım 1.5.** Eğer

$$\int_0^{\infty} |\sigma_p'(x)| dx$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali  $s$  değerine  $|R, p|$  integrallenebilirdir denir.

**Tanım 1.6.**  $k \geq 1$  olmak üzere, eğer

$$\int_0^{\infty} x^{k-1} |\sigma_p'(x)|^k dx \quad (1.7)$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

integrali  $s$  değerine  $|R, p|_k$  integrallenebilirdir denir [18].

Özel olarak, (1.7)'de  $k = 1$  alırsak,  $|R, p|$  integrallenebilmeyi elde ederiz.

**Not 1.3.** Özel olarak, her  $x$  değeri için  $p(x) = 1$  alınırsa, düzensiz integrallerin Riesz integrallenebilirliği, Cesàro integrallenebilmeye indirgenir.

Şimdi, tez boyunca sık kullanılan bir sembolden bahsedelim.

**Tanım 1.7.**

$$f(x) = O(g(x))$$

gösterimi  $\frac{f(x)}{g(x)}$  fonksiyonunun  $[0, \infty)$  aralığında sınırlı olması anlamına gelir.

**Tanım 1.8.**

$$v_p(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x P(u) f(u) du \quad (1.8)$$



olmak üzere

$$s(x) - \sigma_p(x) = v_p(x) \quad (1.9)$$

ifadesine ağırlıklı Kronecker eşitliği denir [18].

Burada,  $v_p$ ,  $s$  fonksiyonunun ağırlıklı üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır.

**Eşitlik 1.3.**

$$\sigma_p'(x) = \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x) \quad (1.10)$$

**İspat:**  $\sigma_p(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \sigma_p'(x) &= -\frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt + \frac{1}{P(x)} p(x)s(x) \\ &= \frac{p(x)}{P(x)} \left( -\frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t)s(t)dt + s(x) \right) \\ &= \frac{p(x)}{P(x)} (s(x) - \sigma_p(x)) \\ &= \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x) \end{aligned}$$

Yani  $\sigma_p'(x) = \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x)$  dir.

**Not 1.4.** (1.10) şartından, (1.9) şartı

$$s(x) = v_p(x) + \int_0^x \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) du \quad (1.11)$$

şeklinde yazılabilir.

**Not 1.5.** (1.10) şartını kullanarak, Tanım 1.6 aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$k \geq 1$  olmak üzere, eğer

$$\int_0^\infty x^{k-1} \left( \frac{p(x)}{P(x)} \right)^k |v_p(x)|^k dx \quad (1.12)$$

integrali yakınsak ise,

$$\int_0^\infty f(t) dt$$

integrali  $s$  değerine  $|R, p|_k$  integrallenebilirdir denir [18].

**Tanım 1.9.**  $A$  ve  $B$  iki integrallenebilme metodu olsun.  $A$  integrallenebilen her fonksiyon aynı değere  $B$  integrallenebiliyorsa,  $A$  'ya  $B$  'yi gerektiriyor denir ve  $A \subseteq B$  ile gösterilir.

Eğer  $A \subseteq B$  ve  $B \subseteq A$  ise,  $A$  metodu  $B$  metoduna denktir denir [20].

**Tanım 1.10.**  $\int_0^\infty f(t)dt$  integrali verilmiş olsun. Eğer

$$\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$$

integrali bir  $B$  integrallenebilme metodu yardımıyla integrallenebiliyorsa,  $\lambda$  fonksiyonuna

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

integralinin  $B$  metodu için bir integrallenebilme çarpanı denir [21].

**Tanım 1.11. (Hölder Eşitsizliği)**

$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f$  ve  $g$ ,  $[0, \infty]$  aralığında sürekli ve pozitif reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\int_0^x f(t)g(t)dt \leq \left( \int_0^x f^p(t)dt \right)^{1/p} \left( \int_0^x g^q(t)dt \right)^{1/q}$$

dur [22].

**Tanım 1.12. (Minkowski Eşitsizliği)**

$p \geq 1, f$  ve  $g$ ,  $[0, \infty)$  aralığında sürekli ve pozitif reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\left( \int_0^x (f+g)^p(t)dt \right)^{1/p} \leq \left( \int_0^x f^p(t)dt \right)^{1/p} + \left( \int_0^x g^p(t)dt \right)^{1/p}$$

dir [22].

## 1.2. Literatür çalışması

İntegraller ile ilgili olarak, Landau [8], Boicun [9], Lal [10], Lal ve Ram [11] , Lal ve Ram [12], Lal ve Singh [13], Lal ve Singh [14] gibi birçok bilim insanı çalışmalar yapmıştır.

Son zamanlarda ise Çanak ve Totur [15], Çanak ve Totur [16] yavaş salınımlılığın Tauber tipi koşul olduğu teoremler ile kontrol modülünün sınırlılığıyla ilgili bazı teoremler ve sonuçları ispatlarıyla birlikte vermişlerdir. Özgen [17], Özgen [18] de düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz integrallenebilirliği ile ilgili bazı teoremler ifade ve ispat etmiştir.



## 2. BÖLÜM

### İNTEGRALLERİN MUTLAK CESÀRO VE RIESZ İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ İÇİN TEOREMLER

Bu bölümde integrallenebilme çarpanlı düzensiz integrallerin Cesàro ve Riesz integrallenebilir olması için yeterli şartları içeren teoremler verilecektir.

**Teorem 2.1.**  $\gamma$ ,

$$|\lambda(x)|\gamma(x) = O(1), \quad (2.1)$$

$$\int_0^x u |\lambda''(u)|\gamma(u)du = O(1), \quad (2.2)$$

$$\int_0^x \frac{|v(u)|^k}{u} du = O(\gamma(x)) \quad (2.3)$$

şartlarını sağlayan pozitif, azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $k \geq 1$  olmak üzere  $\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$  integrali  $|C, 1|_k$  integrallenebilirdir [17].

Teorem 2.1 ve aşağıda vereceğimiz teoremlerin ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

**Lemma 2.1.** Teorem 2.1'in şartları altında

$$\int_0^\infty \gamma(t)|\lambda'(t)|dt \text{ integrali yakınsaktır,} \quad (2.4)$$

$$x \gamma(x)|\lambda'(x)| = O(1), x \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

şartları sağlanır [17].

**İspat:**  $\lambda'(t) = \int_0^t \lambda''(u) du$  olduğundan, (2.2)'den

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \gamma(t) |\lambda'(t)| dt &= \int_0^x \gamma(t) \left| \int_0^t \lambda''(u) du \right| dt \\
 &\leq \int_0^x \gamma(t) \int_0^t |\lambda''(u)| du dt \\
 &\leq \int_0^x |\lambda''(u)| du \int_u^x \gamma(t) dt \\
 &\leq \int_0^x u \gamma(u) |\lambda''(u)| du = O(1), x \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan,  $x \gamma(x)$  azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
 x \gamma(x) |\lambda'(x)| &= x \gamma(x) \left| \int_0^x \lambda''(u) du \right| \\
 &\leq x \gamma(x) \int_0^x |\lambda''(u)| du \\
 &\leq \int_0^x u \gamma(u) |\lambda''(u)| du = O(1), x \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

O halde ispat tamamlanır.

**Teorem 2.1'in ispatı:**  $\sigma, \int_0^\infty f(t) \lambda(t) dt$  integralinin  $(C,1)$  ortalama fonksiyonunu gösterebilir. Bu durumda, tanımdan,

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \int_0^t f(u) \lambda(u) du dt \\
 &= \frac{1}{x} \int_0^x f(u) \lambda(u) du \int_u^x dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \int_0^x (x-u) f(u) \lambda(u) du \\
&= \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right) f(u) \lambda(u) du \\
&= \int_0^x f(u) \lambda(u) du - \frac{1}{x} \int_0^x u f(u) \lambda(u) du
\end{aligned} \tag{2.6}$$

bulunur. Son ifadenin ürevini alıp kısmi integrasyon metodunu uygularsak,

$$\begin{aligned}
\sigma'(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u) \lambda(u) du \\
&= \frac{1}{x^2} \lambda(x) x \int_0^x u f(u) du - \frac{1}{x^2} \int_0^x u v(u) \lambda'(u) du \\
&= \frac{\lambda(x)v(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x u v(u) \lambda(u) du \\
&= \sigma_1(x) + \sigma_2(x)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

buluruz. Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_r(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2 \text{ için}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Öncelikle,  $\lambda$  sınırlı olduğundan, (2.1) şartından,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_1(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \frac{|\lambda(x)|^k |v(x)|^k}{x^k} dx \\
&= \int_0^m \frac{1}{x} |v(x)|^k |\lambda(x)|^{k-1} |\lambda(x)| dx
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} |\lambda(x)| dx$$

dir.

Kısmi integrasyon metodu uygulanırsa, (2.1), (2.3) ve (2.5) şartlarından,

$$\begin{aligned} \int_0^m x^{k-1} |\sigma_1(x)|^k dx &\leq |\lambda(m)| \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} dx - \int_0^m |\lambda'(x)| dx \int_0^x \frac{|v(u)|^k}{u} du \\ &\leq |\lambda(m)| \gamma(m) - \int_0^m |\lambda'(x)| \gamma(x) dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

bulunur.  $r=2$  için,  $k>1$  için  $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$  olmak üzere, Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \int_0^m x^{k-1} |\sigma_2(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \frac{dx}{x^{2k}} \left| \int_0^x t \lambda'(t) v(t) dt \right|^k \\ &\leq \int_0^m \frac{dx}{x^{k+1}} \left( \int_0^x t |\lambda'(t)| |v(t)| dt \right)^k \\ &\leq \int_0^m \frac{dx}{x^2} \left( \int_0^x |\lambda'(t)|^k t^k |v(t)|^k dt \right) \left( \frac{1}{x} \int_0^x dt \right)^{k-1} \\ &= \int_0^m |x \lambda'(x)|^{k-1} |x \lambda'(x)| |v(x)|^k dx \int_x^m \frac{dt}{t^2} \\ &= O(1) \int_0^m |x \lambda'(x)| |v(x)|^k \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{m} \right) dx \\ &= O(1) \int_0^m |x \lambda'(x)| \frac{|v(x)|^k}{x} dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

elde ederiz. Kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_2(x)|^k dx = O(1) m |\lambda'(m)| \int_0^m \frac{|v(t)|^k}{t} dt - \int_0^m (t |\lambda'(t)|)' \int_0^t \frac{|v(u)|^k}{u} du dt$$

$$\begin{aligned}
&= O(1)m \lambda'(m) \gamma(m) - \int_0^x (t |\lambda'(t)|)' \gamma(t) dt \\
&= O(1)m \lambda'(m) \gamma(m) - \int_0^x |\lambda'(t)| \gamma(t) dt - \int_0^x t \lambda''(t) \gamma(t) dt \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonker ve Munjal [23], Teorem 2.1 in daha zayıf şartlar altında olabileceğini ispatlamıştır.

**Teorem 2.2.**  $\gamma$ , azalmayan bir fonksiyon ve  $\beta$  ve  $\lambda$ , (2.1), (2.3) ve

$$|\lambda'(x)| \leq \beta(x), \quad (2.9)$$

$$\beta(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

$$\int_0^\infty u |\beta'(u)| \gamma(u) du < \infty \quad (2.11)$$

şartlarını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu durumda  $k \geq 1$  olmak üzere  $\int_0^\infty f(t) \lambda(t) dt$  integrali  $|C, 1|_k$  integrallenebilirdir.

**Not 2.1.**

$$\beta'(x) \ll |\lambda''(x)|$$

olduğundan,

$$\int_0^\infty x |\beta'(x)| \gamma(x) dx < \infty$$

şartı

$$\int_0^\infty x |\lambda''(x)| \gamma(x) dx < \infty$$

şartından daha zayıf bir şarttır.



**İspat:**  $\sigma, \int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$  integralinin  $(C,1)$  ortalamasını gösterebilirsin. Yani

$$\sigma(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right) f(u)\lambda(u)du$$

dur. Her iki tarafının türevi alınır,

$$\begin{aligned}\sigma'(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u)\lambda(u)du \\ &= \frac{\lambda(x)v(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x u v(u)\lambda(u)du \\ &= \sigma_1(x) + \sigma_2(x)\end{aligned}$$

buluruz. Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_r(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2 \text{ için}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Teorem 2.1 in ispatında olduğu gibi devam edilirse,

$$\begin{aligned}\int_0^m x^{k-1} |\sigma_1(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \frac{|\lambda(x)|^k |v(x)|^k}{x^k} dx \\ &= \int_0^m \frac{1}{x} |v(x)|^k |\lambda(x)|^{k-1} |\lambda(x)| dx \\ &= O(1) \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} |\lambda(x)| dx \\ &= O(1) |\lambda(m)| \int_0^m \frac{|v(x)|^k}{x} dx - O(1) \int_0^m |\lambda'(x)| \int_0^x \frac{|v(t)|^k}{t} dt dx \\ &= O(1) |\lambda(m)| \gamma(m) - O(1) \int_0^m \beta(x) \gamma(x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) - O(1) \int_0^\infty |\beta'(x)| dx \int_0^x \gamma(u) du \\
&= O(1) - \int_0^\infty u \gamma(u) |\beta'(u)| du \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

(2.8) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_2(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m |x \lambda(x)| \frac{|v(x)|^k}{x} dx \\
&= O(1) m |\lambda'(m)| \int_0^m \frac{|v(u)|^k}{u} du - O(1) \int_0^m (u |\lambda'(u)|)' \int_0^u \frac{|v(t)|^k}{t} dt du \\
&= O(1) m |\lambda'(m)| \gamma(m) - O(1) \int_0^m |\beta(u)| \gamma(u) du - O(1) \int_0^m u |\beta'(u)| \gamma(u) du \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde  $r = 1, 2$  için

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_r(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 2.3.**  $p$ ,

$$P(x) = \int_0^x p(t) dt, \quad p(x) \neq 0, \quad p(0) = 0,$$

$$P(x) = O(x p(x)) \tag{2.12}$$

ve

$$x p(x) = O(P(x)) \tag{2.13}$$

şartlarını sağlayan reel değerli ve  $[0, \infty)$  aralığında azalmayan bir fonksiyon olsun.

Eğer  $\gamma$  da (2.1), (2.2) ve

$$\int_0^x \frac{p(t)}{P(t)} |v(t)|^k dt = O(\gamma(x)), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

şartlarını sağlıyor ise, bu durumda  $\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$  integrali  $|R, p|_k$  integrallenebilir.

**İspat:**  $\sigma_p, \int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$  integralinin  $(R, p)$  ortalaması olsun. Bu durumda, tanımdan,

$$\begin{aligned} \sigma_p(x) &= \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t) \int_0^t f(u)\lambda(u)du dt \\ &= \frac{1}{P(x)} \int_0^x f(u)\lambda(u)du \int_u^x p(t)dt \\ &= \frac{1}{P(x)} \int_0^x (P(x) - P(u)) f(u)\lambda(u)du \\ &= \int_0^x \left(1 - \frac{P(u)}{P(x)}\right) f(u)\lambda(u)du \end{aligned}$$

dur.  $\sigma_p$  fonksiyonunun türevi alınıp kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \sigma_p'(x) &= \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x P(u) f(u)\lambda(u)du \\ &= \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{P(u)\lambda(u)}{u} u f(u) du \\ &= \frac{p(x)}{P(x)} \lambda(x)v(x) - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{(p(u)\lambda(u) + P(u)\lambda'(u)) u - P(u)\lambda(u)}{u^2} u v(u)du \\ &= \frac{p(x)}{P(x)} \lambda(x)v(x) - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x p(u)\lambda(u)v(u)du \\ &\quad - \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x P(u) \lambda'(u) v(u)du + \frac{p(x)}{P^2(x)} \int_0^x \frac{P(u)\lambda(u)v(u)}{u} du \end{aligned}$$

$$= \sigma_{p,1}(x) + \sigma_{p,2}(x) + \sigma_{p,3}(x) + \sigma_{p,4}(x)$$

elde edilir.

Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad r = 1, 2, 3, 4 \text{ için}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$\lambda$  sınırlı ve (2.13) şartından  $x p(x) = O(P(x))$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,1}(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \left( \frac{p(x)}{P(x)} \right)^k |\lambda(x)|^k |v(x)|^k dx \\ &= O(1) \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |v(x)|^k |\lambda(x)|^{k-1} |\lambda(x)| dx \\ &= O(1) \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |\lambda(x)| |v(x)|^k dx \end{aligned}$$

dir. Kısmi integrasyon metodu uygularsak, Lemma 2.1'den

$$\begin{aligned} \int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,1}(x)|^k dx &= O(1) |\lambda_m| \int_0^m \frac{p(x)}{P(x)} |v(x)|^k dx \\ &\quad - O(1) \int_0^m |\lambda'(x)| dx \int_0^x \frac{p(t)}{P(t)} |\lambda(t)|^k dt \\ &= O(1) |\lambda(m)| \gamma(m) - O(1) \int_0^m |\lambda'(x)| \gamma(x) dx \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

buluruz.

$r = 2$  için, Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,2}(x)|^k dx = O(1) \int_0^m x^{k-1} \frac{p^k(x) dx}{P^{2k}(x)} \left( \int_0^x p(u) |\lambda(u)| |v(u)| du \right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^{k+1}(x)} \left( \int_0^x p(u) |\lambda(u)| |v(u)| du \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^2(x)} \left( \int_0^x p(u) |\lambda(u)|^k |v(u)|^k du \right) \left( \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(u) du \right)^{k-1} \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^2(x)} \left( \int_0^x p(u) |\lambda(u)|^k |v(u)|^k du \right) \\
&= O(1) \int_0^m p(u) |\lambda(u)|^k |v(u)|^k du \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^2(x)}
\end{aligned}$$

bulunur.  $\sigma_{p,1}(x)$  deki gibi işlem devam ettirilirse,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,2}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir.

(2.12) ve (2.13) şartlarından,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,3}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m x^{k-1} \frac{p^k(x)dx}{P^{2k}(x)} \left( \int_0^x P(u) |\lambda'(u)| |v(u)| du \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^{k+1}(x)} \left( \int_0^x u p(u) |\lambda'(u)| |v(u)| du \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^2(x)} \left( \int_0^x u^k p(u) |\lambda'(u)|^k |v(u)|^k du \right) \left( \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(u) du \right)^{k-1} \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x)dx}{P^2(x)} \left( \int_0^x u^k p(u) |\lambda'(u)|^k |v(u)|^k du \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \int_0^m u^k p(u) |\lambda'(u)|^k |v(u)|^k du \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^2(x)} \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(u)}{P(u)} (u |\lambda'(u)|)^{k-1} (u |\lambda'(u)|) |v(u)|^k du \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(u)}{P(u)} (u |\lambda'(u)|) |v(u)|^k du
\end{aligned}$$

bulunur. Tekrar kısmi integrasyon metodu uygularsak, Lemma 2.1 den

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,3}(x)|^k dx &= O(1) m |\lambda'(m)| \int_0^m \frac{p(u)}{P(u)} |v(u)|^k du \\
&- O(1) \int_0^m (u |\lambda'(u)|)' \int_0^u \frac{p(t)}{P(t)} |v(t)|^k dt du \\
&= O(1) m |\lambda'(m)| \gamma(m) - \int_0^m |\lambda'(u)| \gamma(u) du - \int_0^m u |\lambda''(u)| \gamma(u) du \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Son olarak,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,4}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m x^{k-1} \frac{p^k(x) dx}{P^{2k}(x)} \left( \int_0^x \frac{P(u) |\lambda(u)| |v(u)|}{u} du \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{p(x) dx}{P^{k+1}(x)} \left( \int_0^x p(u) |\lambda(u)| |v(u)| du \right)^k
\end{aligned}$$

bulunur.  $\sigma_{p,2}(x)$ 'deki gibi işleme devam edilirse,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,4}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir.

O halde  $r = 1, 2, 3, 4$  için

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{p,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Not 2.2.** Teorem 2.3 de, özel olarak her  $x$  değeri için  $p(x) = 1$  alırsak, Teorem 2.1 i elde ederiz.



### 3. BÖLÜM

#### $\int_0^\infty f(t)dt$ İNTEGRALİNİN $|R, p|_k$ İNTEGRALLENEBİLİR İKEN $|R, q|_k$ İNTEGRALLENEBİLİR OLMASI İÇİN YETERLİ ŞARTLAR

**Teorem 3.1.**  $p$  ve  $q$ ,

$$x q(x) = O(Q(x)), \quad (3.1)$$

$$P(x) = O(x p(x)), \quad (3.2)$$

$$Q(x) = O(x q(x)), \quad (3.3)$$

şartlarını sağlayacak şekilde reel değerli ve  $[0, \infty)$  aralığında azalmayan fonksiyonlar olsun. Eğer  $\int_0^\infty f(t)dt$  integrali  $|R, p|_k$  integrallenebiliyor ise, bu durumda aynı zamanda  $|R, q|_k$  integrallenebilirdir [18].

**Not 3.1.** (3.1) ve (3.2) şartlarından

$$\frac{q(x)}{Q(x)} = O\left(\frac{p(x)}{P(x)}\right) \quad (3.4)$$

şartı sağlanır.

**İspat:**  $\sigma_p(x)$  ve  $\sigma_q(x)$ , sırasıyla,  $\int_0^\infty f(t)dt$  integralinin  $(R, p)$  ve  $(R, q)$  ortalamaları olsun.

$\int_0^\infty f(t)dt$ ,  $|R, p|_k$  integrallenebilir olduğundan,

$$\int_0^\infty x^{k-1} \left(\frac{p(x)}{P(x)}\right)^k |v_p(x)|^k dx$$

integrali yakınsaktır.

Diğer taraftan, (1.11) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak,



$$f(x) = v_p'(x) + \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x) \quad (3.5)$$

buluruz. Riesz ortalama tanımından,

$$\begin{aligned} \sigma_q(x) &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t)s(t)dt \\ &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t) \left( \int_0^t f(u)du \right) dt \\ &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x f(u)du \int_u^x q(t)dt \\ &= \frac{1}{Q(x)} \int_0^x (Q(x) - Q(u)) f(u)du \\ &= \int_0^x f(u)du - \frac{1}{Q(x)} \int_0^x Q(u)f(u)du \end{aligned}$$

elde ederiz. Bulduğumuz son eşitliğin her iki tarafının türevi alınıp (3.5) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sigma_q'(x) &= f(x) + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u)f(u)du - \frac{1}{Q(x)} Q(x)f(x) \\ &= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u)f(u)du \\ &= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \left[ v_p'(u) + \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) \right] du \\ &= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u)v_p'(u)du + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u)du \end{aligned}$$

bulunur. Sağdaki ilk ifadeye kısmi integrasyon metodu uygularsak,

$$\begin{aligned}
\sigma'_q(x) &= \frac{q(x)}{Q^2(x)} \left[ Q(x)v_p(x) - \int_0^x q(u) v_p(u) du \right] + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) du \\
&= \frac{q(x)}{Q(x)} v_p(x) - \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x q(u) v_p(u) du + \frac{q(x)}{Q^2(x)} \int_0^x Q(u) \frac{p(u)}{P(u)} v_p(u) du \\
&= \sigma_{q,1}(x) + \sigma_{q,2}(x) + \sigma_{q,3}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teoremin ispatını tamamlamak için,  $k>1$  olmak üzere, Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak,  $r=1,2,3$  için

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak, (3.4) şartından,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,1}(x)|^k dx &= \int_0^m x^{k-1} \left| \frac{q(x)}{Q(x)} v_p(x) \right|^k dx \\
&= \int_0^m x^{k-1} \left( \frac{q(x)}{Q(x)} \right)^k |v_p(x)|^k dx \\
&= O(1) \int_0^m x^{k-1} \left( \frac{p(x)}{P(x)} \right)^k |v_p(x)|^k dx
\end{aligned}$$

dir. (1.10) şartından  $\sigma'_p(x) = \frac{p(x)}{P(x)} v_p(x)$  olduğundan,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,1}(x)|^k dx = O(1) \int_0^m x^{k-1} |\sigma'_p(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur.

Diğer taraftan,  $k>1$  için  $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$  olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,2}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m x^{k-1} \left( \frac{q(x)}{Q^2(x)} \right)^k \left( \int_0^x q(t) |v_p(t)| dt \right)^k \\
&= O(1) \int_0^m \frac{q(x) dx}{Q^2(x)} \left( \int_0^x q(t) |v_p(t)|^k dt \right) \left( \frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t) dt \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1) ve (3.3) şartlarından  $x q(x) = O(Q(x))$  ve  $P(x) = O(x p(x))$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,2}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m q(t) |v_p(t)|^k dt \left( \int_t^m \frac{q(x) dx}{Q^2(x)} \right)^{k-1} \\
&= O(1) \int_0^m \frac{q(t)}{Q(t)} |v_p(t)|^k dt \\
&= O(1) \int_0^m \frac{q(t)}{Q(t)} \left( \frac{P(t)}{p(t)} \right)^k |\sigma_p'(t)|^k dt \\
&= O(1) \int_0^m t^{k-1} |\sigma_p'(t)|^k dt \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak, (3.1) şartından  $x q(x) = O(Q(x))$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m x^{k-1} \left( \frac{q(x)}{Q(x)} \right)^k \left( \int_0^x \frac{Q(t)p(t)}{P(t)} |v_p(t)| dt \right)^k dx \\
&= O(1) \int_0^m \frac{q(x) dx}{Q^{k+1}(x)} \left( \int_0^x \frac{Q(t)p(t)}{P(t)} |v_p(t)| dt \right)^k
\end{aligned}$$

dir. Tekrar Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx = O(1) \int_0^m \frac{q(x) dx}{Q^2(x)} \left( \int_0^x \left( \frac{Q(t)}{q(t)} \right)^k q(t) \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^k |v_p(t)|^k dt \right)$$

$$\left( \frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t) dt \right)^{k-1}$$

elde edilir.  $\frac{1}{Q(x)} \int_0^x q(t) dt = 1$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m \frac{q(x) dx}{Q^2(x)} \left( \int_0^x \left( \frac{Q(t)}{q(t)} \right)^k q(t) \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^k |v_p(t)|^k dt \right) \\ &= O(1) \int_0^m \left( \frac{Q(t)}{q(t)} \right)^k q(t) \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^k |v_p(t)|^k dt \int_t^m \frac{q(x) dx}{Q^2(x)} \end{aligned}$$

buluruz.  $\sigma_{q,1}(x)$  deki gibi,

$$\begin{aligned} \int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,3}(x)|^k dx &= O(1) \int_0^m t^k \frac{q(t)}{Q(t)} \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^k |v_p(t)|^k dt \\ &= O(1) \int_0^m t^{k-1} \left( \frac{p(t)}{P(t)} \right)^k |v_p(t)|^k dt \\ &= O(1) \int_0^m t^{k-1} |\sigma'_p(t)|^k dt \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $r=1,2,3$  için

$$\int_0^m x^{k-1} |\sigma_{q,r}(x)|^k dx = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

**Teorem 3.2.**  $p$  ve  $q$ , (3.2), (3.3) ve

$$x p(x) = O(P(x)) \tag{3.7}$$

şartlarını sağlayan reel değerli ve  $[0, \infty)$  aralığında azalmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda  $\int_0^\infty f(t) dt, |R, q|_k$  integrallenebiliyorsa, aynı zamanda  $|R, p|_k$  integrallenebilirdir.

**İspat:** Teorem 3.1 de  $p$  yerine  $q$ ,  $q$  yerine  $p$  alınırsa, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 3.3.**  $p$  ve  $q$ , (3.1)-(3.3) ve (3.7) şartlarını sağlayan reel değerli ve  $[0, \infty)$  aralığında azalmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda  $\int_0^\infty f(t)dt$  integralinin  $|R, p|_k$  integrallenebilirliği  $|R, q|_k$  integrallenebilirliğine denktir.

**İspat:** Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 den elde edilir.



## 4. BÖLÜM

### TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde üçüncü bölümde ifade ve ispat edilen teoremlerle ilgili sonuçları vereceğiz.

**Sonuç 4.1.**  $p$ , (3.2) ve (3.7) şartlarını sağlayan reel değerli ve  $[0, \infty)$  aralığında azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $\int_0^\infty f(t)dt, |C, 1|_k$  integrallenebiliyorsa, aynı zamanda  $|R, p|_k$  integrallenebilirdir.

**İspat:** Teorem 3.1 de özel olarak her  $x$  değeri için  $p(x) = 1$  ve  $q$  yerine  $p$  alırsak, Sonuç 4.1 i elde ederiz.

**Sonuç 4.2.**  $p$ , (3.2) şartını sağlayan reel değerli ve  $[0, \infty)$  aralığında azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer  $\int_0^\infty f(t)dt$  integrali  $|R, p|_k$  integrallenebiliyor ise, bu durumda aynı zamanda  $|C, 1|_k$  integrallenebilirdir.

**İspat:** Teorem 3.1 de özel olarak her  $x$  değeri için  $q(x) = 1$  alırsak, Sonuç 4.2 yi buluruz.

## KAYNAKLAR

1. Bor, H., 1985. On two summability methods, **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.** (97): 147–149.
2. Bor, H., Thorpe, B., 1987. On some absolute summability methods, **Analysis**, (7): 145-152.
3. Bor, H., Thorpe, B., 1992. A note on two absolute summability methods, **Analysis**, (12): 1-3.
4. Bor, H., Özarslan, H. S., 2000. On absolute Riesz summability factors, **J. Math. Anal. Appl.** 246. (2): 657-663.
5. Özarslan H. S., Ögdük H. N., 2007. On absolute matrix summability methods, **Math. Commun.**, 12. (2), pp.213-220.
6. Özarslan H. S., 2010. A note on generalized absolute Cesaro summability, **J. Comp. Anal. Appl.** (12): pp.581-585.
7. Özarslan H. S., 2013. A new application of almost increasing sequences, **Miskolc Math. Notes**. 14. (1), pp. 201-208.
8. Landau, E., 1910. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, **Prace Mat.-Fiz.**, (21): 97-177.
9. Boicun, L. G., 1967. Absolute summability of conjugate Fourier integrals by the method of G. F. Voronoi, **Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika** 61. (6): 11–21.
10. Lal, S. N., 1974. On the absolute summability of the allied integral by a functional Nörlund method, **Proc. Amer. Math. Soc.** 42. (1): 113–120.
11. Lal, S. N., Ram, S., 1974. On the absolute summability of a trigonometric integral by a functional Nörlund method, **Indian J. Pure Appl. Math.** 5. (10): 875–883.

12. Lal, S. N., Ram, S., 1975. The absolute summability of infinite integrals by functional Nörlund methods, **Indian J. Math.** **17.** (2): 101–105.
13. Lal, S. N., Singh, A. K., 1979. Absolute Nörlund summability of Fourier integrals, **Indian J. Math.** **21.** (2): 121–127.
14. Lal, S. N., K. N. Singh, K. N., 1980. Allied integral and absolute functional Nörlund method of summability, **Indian J. Pure Appl. Math.** **11.** (12): 1617-1625.
15. Çanak, İ. ve Totur, Ü., 2010. Tauberian conditions for Cesàro summability of integrals, **Appl. Math. Lett.**, **24**: 891-896
16. Çanak, İ., Totur, Ü., 2011. A Tauberian theorem for Cesàro summability factors of integrals, **Appl. Math. Lett.** **24.** (3): 234-245.
17. Özgen, H. N., 2016. On  $|C, 1|_k$  integrability of Improper integrals, **Int. J. Anal. Appl.** **11.** (1): 19–22.
18. Özgen, H. N., 2017. On equivalence of two integrability methods, **Miskolc. Math. Notes.** **18.** (1): 391-396.
19. Flett, T. M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley, **Proc. London Math. Soc.** (7): 113–141.
20. Petersen, G. M., 1966. Regular matrix transformations, Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto.
21. Kishore, N. , Hotta, G.C., 1970. On  $|N, p_n|$  summability factors, **Acta Scientiarum Mathematicarum(Szeged)**, **31**:9–12.
22. Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press.
23. Sonker, S., Munjal, A., 2018. Absolute summability factors of improper integrals, **Publ. de L’Inst. Math.** (basım aşamasında).



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Belkız UÇAR

Uyruğu: Türkiye (T.C.)

Doğum Tarihi ve Yeri: 10 Ocak, 1983, Kayseri.

Medeni Durumu: Evli

Tel: +90 505 861 55 38

email:belkisakcakaya@mynet.com

Yazışma Adresi: Erenköy Mah. Komando Cad. Tomarza Çıkmazı No:32

Melikgazi/KAYSERİ

### EĞİTİM

| Derece                 | Kurum                                    | Mezuniyet Tarihi |
|------------------------|------------------------------------------|------------------|
| Yüksek Lisans (Tezsiz) | SÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya     | 2007             |
| Lisans                 | EÜ Matematik Bölümü                      | 2006             |
| Lise                   | Talas Fatma Kemal Timuçin Anadolu Lisesi | 2000             |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl       | Kurum                       | Görev                  |
|-----------|-----------------------------|------------------------|
| 2006-2007 | Özel Eras Dershaneleri      | Stajyer Uzman Öğretici |
| 2007-2008 | Talas Başakpınar Ortaokulu  | Ücretli Öğretmen       |
| 2008-2009 | Özel Rota Dershanesi        | Uzman Öğretici         |
| 2009-2010 | Seyyid Burhanettin E.M.L.   | Ücretli Öğretmen       |
| 2010-2011 | Ağrı Cumhuriyet And. Lisesi | Öğretmen               |
| 2011-2012 | Bodrum Turgutreis Lisesi    | Öğretmen               |

|            |                                     |          |
|------------|-------------------------------------|----------|
| 2012-2013  | Özdemir Sabancı Emirgan And. Lisesi | Öğretmen |
| 2013-Halen | Bodrum Anadolu Lisesi               | Öğretmen |

**YABANCI DİL**

İngilizce-Almanca

