



KİNEMATİK YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL

GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Azat KULU

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak - 2018

KİNEMATİK YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Azat KULU

Dumlupınar Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca

Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Erhan ATA

Ocak – 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Azat KULU' nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı KİNEMATİK YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ ÜZERİNE başlıklı çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

04/01/2018

Üye: Prof. Dr. Erhan ATA (Danışman)

Üye: Prof. Dr. Ayşe BAYAR

Üye: Doç. Dr. Mine TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../..... gün ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının % 14 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. Erhan ATA

Azat KULU

KİNEMATİK YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Azat KULU

Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2018

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erhan ATA

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, dual sayılar, dual vektörler, kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlarla ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin devamında kullanılacak olan eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde ise, vida yüzeyinin tanımı ile temel formları, umbilik noktaları, eğrilik doğrultusu, Gauss ve ortalama eğriliği verilmiştir. Ayrıca herhangi bir yüzey üzerindeki eğrilerin vida yüzeyi üzerindeki görüntülerinin Darboux ve Frenet çatıları elde edilmiştir. Bu çatılara göre eğrinin normal eğriliği, geodezik eğriliği ve geodezik burulması bulunmuştur. Ardından k-kinematik yüzeyin tanımı verilmiş ve k-kinematik yüzeyler için asimptotik doğrultular, konjuge tanjant vektörler, Euler teoremi ve Dupin göstergesi elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Euler Teoremi, Frenet ve Darboux Çatısı, k-Kinematik Yüzey, Paralel Yüzey, Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzey, Vida Yüzeyi.

ON DIFFERENTIAL GEOMETRY OF KINEMATIC SURFACES

Azat KULU

Department of Mathematics, M.S. Thesis, 2018

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Erhan ATA

SUMMARY

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, basic concepts about dual number, dual vectors, quaternions and dual quaternions are given.

Basic definitions and theorems relevant with theory of curves and surfaces, which will be used in the thesis later on, have been discussed in chapter second.

In the third chapter, definition of screw surface with fundamental forms, umbilical points, directions of curvature, Gauss and mean curvature are given. In addition Darboux and Frenet frames of images on a screw surface of curves on any surface are obtained. According to these frames the normal curvature, geodesic curvature and geodesic torsion of the curve were found. Then, the definition of the k -kinematic surface is given and it is obtained asymptotic directions, conjugate tangent vectors, Euler theorem and Dupin indicatrix for k -kinematic surfaces.

Keywords: Euler Theorem, Frenet and Darboux Frame, k -Kinematic Surface, Parallel Surface, Screw surface, Surface at a Constant Distance from the Edge of Regression.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince tecrübelerinden faydalandığım, kıymetli zamanını bana ayırarak beni yönlendiren ve tezi titizlikle inceleyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Erhan ATA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisansım süresince maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Azat KULU



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	v
SUMMARY	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
1. D-MODÜL VE KUATERNİYONLAR TEORİSİ	1
1.1. Dual Sayılar Halkası	1
1.2. Dual Vektörler.....	4
1.3. Kuaterniyonlar	9
1.4. Dual Kuaterniyonlar.....	13
2. EĞRİLER VE YÜZEYLER TEORİSİ	16
2.1. R^3 Uzayında Eğriler ve Yüzeyler.....	16
2.2. Paralel Yüzeyler	24
2.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler	25
3. KİNEMATİK YÜZEYLER.....	28
3.1. Vida Yüzeyleri	28
3.1.1. Vida yüzeyinin tanımı	28
3.1.2. Vida yüzeyinin bazı özellikleri	29
3.1.3. Bir eğrinin vida yüzeyi üzerindeki resminin Darboux çatısı.....	38
3.1.4. Bir eğrinin vida yüzeyi üzerindeki resminin Frenet çatısı	42
3.2. k-Kinematik Yüzeyler.....	45
3.2.1. k-kinematik yüzeyinin tanımı.....	45
3.2.2. k-kinematik yüzeyler için asimptotik doğrultular ve konjuge tanjant vektörler	48
3.2.3. k-kinematik yüzeyler için Euler teoremi ve Dupin göstergesi	51

İÇİNDEKİLER(devam)**Sayfa**

KAYNAKLAR DİZİNİ	54
------------------------	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Vida Yüzeyi	29
3.2. k-Kinematik Yüzey.....	45



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
E^3	Üç boyutlu Öklid uzayı
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı
$\chi(M)$	M manifoldunun vektör alanları uzayı
κ	Eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
S	Şekil operatörü
D_p	Dupin göstergesi
M^r	Paralel yüzey
M^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzey
M^g	Vida yüzeyi
M^k	k-kinematik yüzey
f_*	f dönüşümünün türev dönüşümü
S^g	Vida yüzeyinin şekil operatörü
K^g	Vida yüzeyinin Gauss eğriliği
H^g	Vida yüzeyinin ortalama eğriliği
U^g	Vida yüzeyinin birim normal vektör alanı

1. D-MODÜL VE KUATERNİYONLAR TEORİSİ

1.1. Dual Sayılar Halkası

Reel sayılar kümesi (+) toplama ve ($\cdot$) işlemlerine göre bir cisimdir. Buna reel sayılar cismi denir ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.1. Herhangi $a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = (a, a^*)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi D ile gösterilsin.

$$D = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.1.2. Herhangi $A, B \in D$ ve $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere

$$\oplus : D \times D \rightarrow D$$

iç işlemi

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

şeklinde tanımlanır ve bu işleme D üzerindeki toplama işlemi denir.

$$\odot : D \times D \rightarrow D$$

iç işlemi

$$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

şeklinde tanımlanır ve bu işleme D üzerindeki çarpma işlemi denir.

Eğer $a = b$ ve $a^* = b^*$ ise A ile B eşittir denir ve $A=B$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.1.3. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere

$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

kümesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise D kümesine dual sayılar sistemi denir ve $\forall (a, a^*) \in D$ elemanına da bir dual sayı denir

(Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.1.1: $(D, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.1.2. $(D, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir. (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.1.4. $A \oplus X = A$ denkleminin çözümü olarak tanımlanan dual sayıya D nin sıfırı denir ve $0 = (0,0)$ ile gösterilir.

$A \neq (0, a^*)$ ise $A \odot X = B$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Tanım 1.1.2' de verilen D deki çarpma işlemine göre

$$A \odot X = AX = (ax, ax^* + a^*x) = (b, b^*) = B$$

olduğundan

$$X = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2} \right)$$

elde edilir ve dolayısıyla $X \in D$ olup X dual sayısına B nin A ya bölümü denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.1.3. D dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar.

Bu teoreme göre

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, 0) \rightarrow f(a, 0) = a$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu bir izomorfizmdir. Buna göre $(a, 0)$ dual sayısı izomorf olduğu " a " reel sayısı ile gösterilebilir. Yani $(a, 0) = a$ alınacaktır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.1.5. Bir $A = (a, a^*) \in D$ dual sayısında " a " reel sayısına A nın reel kısmı, " a^* " reel sayısına da A nın dual kısmı denir $ReA = a$ ve $DuA = a^*$ şeklinde yazılır. (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.1.6. $(1,0) = 1$ sayısına D deki çarpma işleminin birim elemanı veya D deki reel birim denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.1.7. $\varepsilon = (0,1)$ dual sayısına D deki dual birim denir ve Tanım 1.1.2 gereğince

$$\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,0) = 0$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.1.8. $A = (a, a^*) \in D$ dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir. Yani

$$(a, a^*) = a + \varepsilon a^*$$

dır (Hacısalihoglu, 1983a).

Teorem 1.1.4. İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir (Hacısalihoglu, 1983a).

İspat: $A, B \in D$ iki dual sayı olsun. $A = (0, a^*)$ ve $B = (0, b^*)$ şeklinde alırsak

$$A \odot B = (0, a^*) \odot (0, b^*) = (0, 0)$$

olur. Fakat $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ dır.

Tanım 1.1.9. $A = (a, a^*)$ bir dual sayı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λ ile A nın çarpımı

$$\mathbb{R} \times D \rightarrow D$$

$$(\lambda, A) \rightarrow \lambda.A = \lambda(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$$

şeklinde bir dış işlem olup bir dual sayının bir reel skaler ile çarpımı olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983a).

Tanım 1.1.10. Herhangi bir $Z = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının mutlak değeri diye $|x|$ reel sayısına denir ve $|Z| = |x + \varepsilon x^*| = |x|$ ile gösterilir. Bu tanım D de bir metrik vermez (Hacısalihoglu, 1983a).

Teorem 1.1.5. $Z = x + \varepsilon x^*$ dual sayısı için $|x + \varepsilon x^*| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır (Hacısalihoglu, 1983a).

Teorem 1.1.6. İki dual sayının çarpımının mutlak değeri, mutlak değerleri çarpımına eşittir. Yani

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

dir (Hacısalihoglu, 1983a).

Tanım 1.1.11. $Z = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının eşleniği diye $\bar{Z} = x - \varepsilon x^*$ dual sayısına denir (Hacısalihoglu, 1983a).

Teorem 1.1.7.

- i. $Z \in D$ ise $\bar{\bar{Z}}$ nin dual eşleniği Z dir. Yani $\overline{(\bar{Z})} = Z$ dir.
- ii. $\forall Z_1, Z_2 \in D$ için $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ dir.
- iii. $\forall Z_1, Z_2 \in D$ için $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$ ve $Z_2 \neq (0, x^*)$ için

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \text{ dir.}$$

$$\text{iv. } \forall Z \in D \text{ için } Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2 \text{ dir.}$$

$$\text{v. } Z + \bar{Z} = 2\text{Re}Z, Z - \bar{Z} = 2\epsilon DuZ \text{ ve } Z = \bar{Z} \text{ ise } Z \in \mathbb{R}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

1.2. Dual Vektörler

Tanım 1.2.1. H , birimi 1 olan değişimli halka olsun. H üzerinde bir modül diye S abel grubu ile aşağıdaki özelliklere sahip olan S üzerindeki bir

$$H \times S \rightarrow S$$

$$(a, \alpha) \rightarrow a\alpha$$

dış işlemine denir. Ayrıca bu dış işlem aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$a, b \in H$ ve $\alpha, \beta \in S$ olmak üzere

$$M_1: a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta ;$$

$$M_2: (a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha ;$$

$$M_3: (ab)\alpha = a(b\alpha) ;$$

$$M_4: 1 \cdot \alpha = \alpha .$$

D birimi $(1,0) = 1$ olan değişimli bir halkadır. $(D, +)$ bir abel grubudur ve

$$D \times D^3 \rightarrow D^3$$

dış işlemi M_1, M_2, M_3, M_4 aksiyomlarını sağlar. Dolayısıyla $D \times D \times D = D^3$, D üzerinde bir modüldür.

$D^3 = \{(A_1, A_2, A_3) | A_1, A_2, A_3 \in D\}$ kümesinin her bir elemanını bir büyük harf ile gösterilirse $A^3 \in D$ için $A = (A_1, A_2, A_3)$ ve $A = (A_i); (i = 1, 2, 3)$ notasyonlarından birisi kullanılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.2. Herhangi $A = (A_i), B = (B_i) \in D^3$ için

$$A = B \Leftrightarrow A_i = B_i, (i = 1, 2, 3)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.3. $A = (A_1, A_2, A_3), B = (B_1, B_2, B_3) \in D^3$ elemanları için,

iç (toplama) işlemi

$$+ : D^3 \times D^3 \rightarrow D^3$$

$$(A, B) \rightarrow A + B = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A + B$ elemanına D^3 kümesinde A ve B elemanlarının toplamı denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.4. $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ve $A = (A_1, A_2, A_3) \in D^3$ elemanı olmak üzere,

dış (skalerle çarpma) işlemi

$$\cdot : \mathbb{R} \times D^3 \rightarrow D^3$$

$$(\lambda, A) \rightarrow \lambda A = (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada λA elemanına D^3 kümesinde A ile λ skalerinin çarpımı denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.1. $(D^3, +)$ bir abel grubudur (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.2. $(D^3, +)$ abel grubu $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı, D halkası üzerinde bir modüldür (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.5. D dual sayılar halkası üzerinde modül olan $(D^3, +, \cdot)$ üçlüsüne D -Modül denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.6. D -Modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir ve

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.3. Herhangi $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere D -Modül'de her bir $\vec{A}$ dual vektörü

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \quad \varepsilon = (0, 1) \in D$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\vec{A}$ dual vektörü $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ biçiminde $\mathbb{R}^3$ teki vektörlerin bir sıralı ikilisi olarak da yazılabilir.

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.4. Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda \vec{A} = (\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*)$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.5. $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ ve $\vec{B} = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in D\text{-Modül}$ elemanları için

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \vec{a}^* = \vec{b}^*$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.7. $D\text{-Modül}$ 'ün toplamaya göre birim elemanı $\vec{0} = \vec{0} + \varepsilon\vec{0} = (\vec{0}, \vec{0}) \in D - \text{Modül}$ dual vektörüdür. Bu dual vektöre sıfır dual vektörü denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.8. Herhangi $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b}^* \in D - \text{Modül}$ dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f : D^3 \times D^3 \rightarrow D^3$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \rightarrow f(\vec{A}, \vec{B}) = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon\vec{b}^* \rangle$$

şeklinde bir dönüşümdür. Bu dönüşüm vektör uzayları üzerinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonunun aksiyomlarını sağlar (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.9.

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \left(\|\vec{a}\|, \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \vec{a} \neq \vec{0},$$

dual sayısına $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ dual vektörünün normu denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.10. Normu reel birime karşılık gelen $(1,0)$ dual sayısı olan dual vektöre dual birim vektör denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.6. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ dual birim vektör ise

$$\|\vec{a}\| = 1 \text{ ve } \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.7. $\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}^*) \in D\text{-Modül}$ olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

bir dual birim vektördür (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.11. $\{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* : \|\vec{X}\| = (1,0); \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3\}$ kümesine D -Modül'de dual birim küre denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.8. (E.Study): $\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}^*) \in D$ -Modül olmak üzere D -Modül'de denklemi

$$\|\vec{A}\| = (1,0)$$

olan dual birim kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.9. Orijin başlangıç noktası yerine başka bir P noktası seçildiğinde $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruyu belirten dual birim vektör

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{a} + \vec{a}^*)$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.10. Herhangi bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in D$ -Modül elemanı için

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

dual birim vektörüne $\vec{A}$ dual vektörünün ekseni denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.12.

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

reel sayısına bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün adımı veya yükselişi denir.

Buna göre, $\vec{A} = \vec{a}(1 + \varepsilon k)\vec{U}$ dual vektörünü göz önüne alacak olursak. Eğer

- i. $k = \text{sonlu bir sayı}$ ise $\vec{a} \neq 0$ ve $\vec{a}^* \neq 0$ dır ve $\vec{A}$ dual vektörüne has dual vektör veya vida denir.
- ii. $k = 0 \Rightarrow \vec{A} = a\vec{U}$ dur. Bu halde $\vec{A}$ dual vektörü $\vec{U}$ ekseni ile çakışık bir doğru gösterir.
- iii. $k = \infty \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ dır ve

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{\|\vec{a}\| \|\vec{a}^*\| \cos \theta}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{\|\vec{a}^*\| \cos \theta}{\|\vec{a}\|}$$

ifadesinde $k = \infty$ olması için

$$\|\vec{a}^*\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

olmalıdır. Bu halde $\vec{A}$ dual vektörü bir sıfır dual vektördür. Yani $\vec{A} = (\vec{0}, \vec{a}^*)$ şeklindedir. Bu tip dual vektörlere çift (couple) denir. Çift dual vektörler için $\vec{a}^*$ başlangıç noktasının seçilişine bağlı değildir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.13. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki dual birim vektör olsunlar. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ dual birim vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$$

dır. E.Study teoremi gereğince $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual birim vektörleri $\mathbb{R}^3$ de iki yönlü doğru belirtirler. Bu doğrular d_1 ve d_2 olsun. d_1 ile d_2 doğruları arasındaki açı φ ve d_1 ile d_2 doğruları arasındaki en kısa uzaklık φ^* ise

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$$

iç çarpımının reel kısmı

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

ve $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımının dual kısmı

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = -\varphi^* \sin \varphi$$

olup

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*)$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.14. $\phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ dual birim vektörleri arasındaki dual açı denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.2.15. Herhangi $\vec{A}, \vec{B} \in D$ -Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\wedge : D^3 \times D^3 \rightarrow D^3$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

şeklindeki bir işlemle tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Teorem 1.2.11. Herhangi $\vec{A}, \vec{B} \in D\text{-Modül}$ için

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \phi \vec{N}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983a).

1.3. Kuaterniyonlar

Tanım 1.3.1. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olmak üzere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için $q = a + bi + cj + dk$ ifadesine bir kuaterniyon denir. Kuaterniyonlar kümesini

$H = \{q = a + bi + cj + dk ; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ile gösterelim. Burada $ij = k, jk = i, ki = j$ ve $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ dir.

Herhangi bir kuaterniyon iki kısımdan oluşur. Bunlar; reel (skaler) kısım ve imajiner (vektörel) kısımdır. Buradan

$$q = a + bi + cj + dk$$

$$q = Req + Imq ; Req = a, Imq = bi + cj + dk$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer $Req = 0$ ise $q = Imq = bi + cj + dk$ kuaterniyonuna vektör ya da kuaterniyonik vektör denir.

Eğer $Imq = 0$ ise $q = Req = a$ kuaterniyonuna skaler denir.

$$q = a + bi + cj + dk = Req + Imq \text{ kuaterniyonunun eşleniği}$$

$$\bar{q} = Req - Imq = a - bi - cj - dk \text{ biçiminde tanımlanır (Parker, 2009).}$$

Tanım 1.3.2. $q, p \in H$ iki kuaterniyon olmak üzere

$$q = p \Leftrightarrow Req = Rep \text{ ve } Imq = Imp$$

olmalıdır (Hacısalihoglu, 1983a).

Tanım 1.3.3. İki kuaterniyonun toplam ve farkı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k \text{ kuaterniyonunları için}$$

$$\begin{aligned} q + p &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \\ &= Re(q + p) + Im(q + p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q - p &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k \\
&= \text{Re}(q - p) + \text{Im}(q - p)
\end{aligned}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983a).

Tanım 1.3.4. Bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonun ve $\lambda \in \mathbb{R}$ bir skaler ile çarpım işlemi

$$\begin{aligned}
\odot : \mathbb{R} \times H &\rightarrow H \\
(\lambda, q) &\rightarrow \lambda \odot q = \lambda q \\
&= \lambda(a + bi + cj + dk) \\
&= \lambda a + \lambda bi + \lambda cj + \lambda dk
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca skalerle çarpma işleminde değişme özelliği var olup $\lambda q = q\lambda$ dir. O halde $\{H, +, (\mathbb{R}, +, \cdot), \cdot\}$ sistemi, bazı $\{1, i, j, k\}$ ve boyutu 4 olan bir reel vektör uzayıdır.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere herhangi bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonunu $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ alırsak

$$\begin{aligned}
q &= a + bi + cj + dk \\
&= (a + bi) + (c + di)j \\
&= z_1 + z_2j
\end{aligned}$$

olacak biçimde iki kompleks sayının toplamı olarak yazılabilir. Bu nedenle H kuaterniyonların kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{C} \times H &\rightarrow H \\
(\lambda, q) &\rightarrow \lambda q = \lambda(z_1 + z_2j) \\
&= \lambda z_1 + \lambda z_2j
\end{aligned}$$

skalerle çarpma işlemiyle birlikte $\{H, +, (\mathbb{C}, +, \cdot), \cdot\}$ sistemi, bazı $\{1, j\}$ ve boyutu 2 olan bir kompleks vektör uzayıdır (Hacısalihoglu, 1983a).

Tanım 1.3.5. Herhangi iki $q, p \in H$ kuaterniyonlarının kuaterniyon (kuaterniyonik) çarpımı aşağıdaki gibidir.

$$q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k \text{ ve } p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k \text{ alalım.}$$

$$\odot : H \times H \rightarrow H$$

$$(q, p) \rightarrow q \odot p = q \cdot p$$

$$= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

$$= a_1a_2 - (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i$$

$$+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k$$

$$= ReqRep - \langle Imq, Imp \rangle + ReqImp + RepImq + Imq \wedge Imp$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.3.6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\forall p, q \in H$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Parker, 2009).

1. $\overline{\lambda p + \mu q} = \lambda \bar{p} + \mu \bar{q}$
2. $\overline{pq} = \bar{q} \bar{p}$
3. $\overline{(\bar{p})} = p$

Tanım 1.3.7. Bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonun normu

$$\begin{aligned} |q| &= \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{(Req + Imq)(Req - Imq)} \\ &= \sqrt{(Req)^2 + \langle Imq, Imq \rangle} \\ &= \sqrt{(Req)^2 + \|Imq\|^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $|q| = 1$ ise q ya birim kuaterniyon denir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.3.8. $q = a + bi + cj + dk$ birim kuaterniyon olsun. O halde $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ olur.

$\cos\theta = a$ alırsak $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ olduğundan

$$\sin\theta = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

olup $q = a + bi + cj + dk$ birim kuaterniyonunu

$$q = a + bi + cj + dk = a + \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

olur. Eğer

$$\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} = \vec{S}$$

alırsak

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk = a + \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \\ &= \cos\theta + \vec{S} \sin\theta \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $|\vec{S}| = 1$ ve $\vec{S}^2 = \vec{S} \cdot \vec{S} = -\langle \vec{S}, \vec{S} \rangle = -1$ dir. Yani $\vec{S}$ birim kuaterniyonik vektördür.

$z \in \mathbb{C}$ birim kompleks sayı olsun. Euler özdeşliği yardımıyla $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ yazılabilir. Bunu kuaterniyonlar için genelleleyebiliriz. Buna göre q birim kuaterniyonunu

$$q = \cos\theta + \vec{S} \sin\theta = e^{\vec{S}\theta}$$

biçimde yazabiliriz. Eğer q birim kuaterniyon değilse $q_0 = \frac{q}{|q|}$ birim kuaterniyon olacağından

$$q = |q|q_0 = |q|\cos\theta_0 + \vec{S} \sin\theta_0 = |q|e^{\vec{S}\theta_0}$$

olur (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.3.9. Herhangi $p, q \in H$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Parker, 2009).

1. $|p| = 0 \Leftrightarrow q = 0$
2. $|p + q| \leq |p| + |q|$
3. $|pq| = |qp| = |q||p| = |p||q|$

Tanım 1.3.10. Herhangi $q \neq 0 \in H$ kuaterniyonu için q nun tersi q^{-1} ile gösterilir ve

$$q\bar{q} = |q|^2 \Rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

ile bulunur.

$$q = a + bi + cj + dk \Rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{a - (bi + cj + dk)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

olur. Herhangi bir q kuaterniyonu için $|q| = |\bar{q}|$ olduğundan

$$|q^{-1}| = \left| \frac{\bar{q}}{|q|^2} \right| = \frac{|\bar{q}|}{|q|^2} = \frac{|q|}{|q|^2} = \frac{1}{|q|}$$

bulunur (Parker, 2009).

Tanım 1.3.11. Herhangi $p, q \in H$ kuaterniyonlarının tersi p^{-1} ve q^{-1} ise

$$(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$$

dir (Parker, 2009).

1.4. Dual Kuaterniyonlar

Tanım 1.4.1. Herhangi $p, q \in H$ kuaterniyonları ve ε dual birim olmak üzere dual kuaterniyon

$$Q = q + \varepsilon p$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$, $p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ alırsak

$$ReQ = Req + \varepsilon Rep = A = a_1 + \varepsilon a_2,$$

$$ImQ = Bi + Cj + Dk = Imq + \varepsilon Imp$$

ifadelerini kullanarak

$$Q = ReQ + ImQ$$

yazabiliriz (Parker, 2009).

Tüm dual kuaterniyonların kümesi H_D ile gösterilir.

Tanım 1.4.2. Herhangi $Q_1 = ReQ_1 + ImQ_1$ ve $Q_2 = ReQ_2 + ImQ_2$ dual kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$$Q_1 \pm Q_2 = (ReQ_1 \pm ReQ_2) + (ImQ_1 \pm ImQ_2)$$

biçiminde tanımlanır (Parker, 2009).

Tanım 1.4.3. Herhangi $Q_1 = ReQ_1 + ImQ_1$ ve $Q_2 = ReQ_2 + ImQ_2$ dual kuaterniyonlarının çarpımı $Q_1 = q_1 + \varepsilon p_1 = ReQ_1 + ImQ_1$ ve $Q_2 = q_2 + \varepsilon p_2 = ReQ_2 + ImQ_2$ olmak üzere

$$Q_1 Q_2 = (q_1 + \varepsilon p_1)(q_2 + \varepsilon p_2)$$

$$= q_1 q_2 + \varepsilon(q_1 p_2 + p_1 q_2)$$

$$= ReQ_1 ReQ_2 - \langle ImQ_1, ImQ_2 \rangle + ReQ_1 ImQ_2 + ReQ_2 ImQ_1 + ImQ_1 \wedge ImQ_2$$

biçiminde tanımlanır (Yang ve Freudenstein, 1964).

Tanım 1.4.4. Herhangi bir $Q = ReQ + ImQ = q + \varepsilon p$ dual kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{Q} = \bar{q} + \varepsilon \bar{p} = ReQ - ImQ$$

şeklinde tanımlanır (Parker, 2009).

Tanım 1.4.5. $A = a_1 + \varepsilon a_2$, $B = b_1 + \varepsilon b_2$, $C = c_1 + \varepsilon c_2$, $D = d_1 + \varepsilon d_2$ dual sayılar olmak üzere bir $Q = A + Bi + Cj + Dk$ dual kuaterniyonunun normu

$$|. | : H_D \rightarrow D$$

$$\begin{aligned} Q \rightarrow |Q| &= \sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + 2\varepsilon(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)} \end{aligned}$$

dir. Burada Q dual kuaterniyonunun normu $|Q|$ bir dual sayıdır (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.4.6. Bir Q dual kuaterniyonun tersi(inversi) Q^{-1} ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{|Q|^2} ; \quad Q = A + Bi + Cj + Dk \text{ için}$$

$$Q^{-1} = \frac{A - Bi - Cj - Dk}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} = \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} - \frac{Bi + Cj + Dk}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}$$

olur. Buradan

$$ReQ^{-1} = \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} , \quad ImQ^{-1} = \frac{-(Bi + Cj + Dk)}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}$$

bulunur (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.4.7. Herhangi bir Q dual kuaterniyonun tersi Q^{-1} olsun.

$$QQ^{-1} = Q \frac{\bar{Q}}{|Q|^2} = \frac{Q\bar{Q}}{|Q|^2} = \frac{|Q|^2}{|Q|^2} = 1$$

olacağından

$$|QQ^{-1}| = 1 \Rightarrow |Q||Q^{-1}| = 1 \Rightarrow |Q^{-1}| = |Q|^{-1} = \frac{1}{|Q|}$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983a).

Tanım 1.4.8. Bir P dual kuaterniyonunu bir diğer Q dual kuaterniyonuna bölmek için

$$R_1 Q = P \Rightarrow R_1 Q Q^{-1} = P Q^{-1} \Rightarrow R_1 = P Q^{-1}$$

ifadesine P nin Q ile sağdan bölümü

$$Q R_2 = P = Q^{-1} Q R_2 = Q^{-1} P \Rightarrow R_2 = Q^{-1} P$$

ifadesine P nin Q ile soldan bölümü denir. Genel olarak R_1 ve R_2 farklı iki kuaterniyondur (Hacısalıhoğlu, 1983a).



2. EĞRİLER VE YÜZEYLER TEORİSİ

2.1. $\mathbb{R}^3$ Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.1. Reel sayıların bir I açık aralığı üzerinde tanımlı

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

diferensiyellenebilir fonksiyona $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri denir (O'Neill, 2006).

Tanım 2.1.2. $\alpha, I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna α eğrisinin I açık aralığındaki skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da α nin I aralığındaki skaler hızı denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.3. $\alpha, I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

koşulunu sağlayan α eğrisine birim hızlı bir eğri denir. Bu durumda $t \in I$ yay parametresi olur (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^2$ uzayının açık bir alt kümesi $\mathcal{U}$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ uzayının S alt kümesinin regüler parametrizasyonu

$$\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \quad \phi_u \wedge \phi_v \neq 0$$

biçiminde tanımlı birebir ve diferensiyellenebilir fonksiyondur. Buradan $\phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ sürekli ters fonksiyonu S nin içinde her $p \in S$ noktasının bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat parçası varsa S alt kümesine $\mathbb{R}^3$ te bir yüzey denir (O'Neill, 2006).

Tanım 2.1.5. $S, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. S yüzeyi üzerinde $v = v_0$ sabit ve u değişken alınarak elde edilen eğriye u -parametre eğrisi, $u = u_0$ sabit ve v değişken alınarak elde edilen eğriye v -parametre eğrisi denir (Shifrin, 2011).

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir S yüzeyi için $p \in S$ olsun

$$\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

regüler parametrizasyonunu ile S yüzeyinin p noktasındaki teğet (tanjant) düzlemi ϕ_u ve ϕ_v vektörleri ile gerilen $T_p(S)$ alt uzayıdır (Shifrin, 2011).

Tanım 2.1.7. S yüzeyinin bir $p \in S$ noktasındaki teğet (tanjant) uzay $T_p(S)$ olsun. $T_p(S)$ uzayına dik olan

$$\vec{U} = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$$

birim vektörüne S yüzeyinin birim normali denir (Shifrin, 2011).

Tanım 2.1.8. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.9. $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümü, C^∞ sınıfından bir fonksiyon ve $q \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\varphi_q: T_q(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{\varphi(q)}(\mathbb{R}^m)$$

lineer dönüşümü birebir ise φ fonksiyonuna q noktasında regülerdir denir.

φ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayının her bir q noktasında regüler ise φ , $\mathbb{R}^n$ üstünde regülerdir denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.10. U , $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı açık alt kümesi olmak üzere $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, C^∞ sınıfından ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine $\mathbb{R}^3$ uzayında bir basit yüzey denir.

M , $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subseteq M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.11. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{T}(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir.

$\vec{T}$, I aralığının her bir s noktasında $\alpha(s)$ noktasındaki $\vec{T}(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre $\vec{T}$, α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.12. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.13. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

eşitliğiyle belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü, $\vec{N}$ vektör alanına da α eğrisinin asli normal vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.14. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

eşitliğiyle belirli $\vec{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü, $\vec{B}$ vektör alanına da α eğrisinin binormal vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.15. $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$, $\vec{B}(s)$ vektörlerine $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir. $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir ortonormal çatısı oluşturur. Bu çatıya Frenet çatısı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.16. Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 2.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı olmayan bir

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olsun. Buna göre

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}$$

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t)$$

dır. α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ olmak üzere

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.17. E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir α eğrisi alalım. α nın birim teğet vektörü $\vec{T}$ ve α eğrisi boyunca M yüzeyin birim normali $\vec{U}$ olmak üzere $\vec{V}(t) = \vec{U}(t) \wedge \vec{T}(t)$ olsun. Bu durumda $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ üçlüsü bir dik çatı oluşturur. Bu çatıya Darboux çatısı adı verilir (Ru, 1999).

Tanım 2.1.18. E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir

$$\alpha : I \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olsun. Buna göre

$$k_g(t) = \langle \vec{T}'(t), \vec{V}(t) \rangle$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki geodezik eğriliği adı verilir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.19. E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir

$$\alpha : I \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olsun. Buna göre

$$k_n(t) = \langle \vec{T}'(t), \vec{U}(t) \rangle$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki normal eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.20. E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir

$$\alpha : I \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisinin Darboux çatısı $\{ \vec{T}, \vec{V}, \vec{U} \}$ olsun. Buna göre

$$\tau_g(t) = \langle \vec{V}'(t), \vec{U}(t) \rangle$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki geodezik burulma veya geodezik torsiyon denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 2.1.2. E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı olmayan bir

$$\alpha : I \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisinin Darboux çatısı $\{ \vec{T}, \vec{V}, \vec{U} \}$ ve $v = \|\alpha'(t)\|$ olmak üzere

$$k_g(t) = \frac{1}{v^2} \langle \alpha''(t), \vec{V}(t) \rangle$$

$$k_n(t) = \frac{1}{v^2} \langle \alpha''(t), \vec{U}(t) \rangle$$

$$\tau_g(t) = \frac{1}{v} \langle \vec{V}'(t), \vec{U}(t) \rangle$$

fonksiyonları sırasıyla α eğrisinin, geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması olarak tanımlanır (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 2.1.3. E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir

$$\alpha : I \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisinin Darboux çatısı $\{ \vec{T}, \vec{V}, \vec{U} \}$ olsun, geodezik eğriliği k_g , normal eğriliği k_n ve geodezik burulması τ_g olmak üzere

$$\vec{T}'(t) = k_g(t)\vec{V}(t) + k_n(t)\vec{U}(t)$$

$$\vec{V}'(t) = -k_g(t)\vec{T}(t) + \tau_g(t)\vec{U}(t)$$

$$\vec{U}'(t) = -k_n(t)\vec{T}(t) - \tau_g(t)\vec{V}(t)$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 2.1.4. E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı olmayan bir

$$\alpha : I \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olsun Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$, $v = \|\alpha'(t)\|$, geodezik eğriliği k_g , normal eğriliği k_n ve geodezik burulması τ_g olmak üzere

$$\vec{T}'(t) = v(k_g(t)\vec{V}(t) + k_n(t)\vec{U}(t))$$

$$\vec{V}'(t) = v(-k_g(t)\vec{T}(t) + \tau_g(t)\vec{U}(t))$$

$$\vec{U}'(t) = v(-k_n(t)\vec{T}(t) - \tau_g(t)\vec{V}(t))$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.21. Bir eğrinin yüzeydeki her noktasında $k_n = 0$ ise bir asimptotik eğri, $k_g = 0$ ise bir geodezik eğri ve $\tau_g = 0$ ise eğrilik çizgisi olarak tanımlanır (Uras, 1992).

Tanım 2.1.22. E^n Öklid uzayının bir M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı U olsun. E^n deki Riemann koneksiyonu D olmak üzere

$$S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow S(X) = D_X U$$

biçiminde tanımlı S dönüşümüne M hiperyüzeyinin şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.23. M , E^n uzayında bir hiperyüzey ve $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olsun. Eğer $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için $S_p = \lambda I_{n-1}$ ise p noktasına M nin bir umbilik noktası denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.24. E^n uzayının bir M hiperyüzeyi üzerinde $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$I^q: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow c^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlanan I^q fonksiyonuna M nin q – yuncu temel formu denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.25. M , E^n uzayında bir hiperyüzey olsun. M nin $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow K(p) = \det(S(p))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.26. M , E^n uzayında bir hiperyüzey olsun. M nin $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow H(p) = \text{İz}(S(p))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.27. M , E^n uzayında bir hiperyüzey ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir p noktasına karşılık gelen $S(p)$ nin karakteristik değerlerine M nin bu noktasındaki asli eğrilikleri denir. Bu asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin p noktasındaki asli eğrilik doğrultuları adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.1.28. M , E^n uzayında bir hiperyüzey ve α , M üzerinde bir eğri olsun. α nın teğet vektör alanı $\vec{T}$ ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer $\vec{T}$ vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.29. M , E^3 uzayında bir Öklid yüzey ve S , M nin şekil operatörü olsun. Bir $p \in M$ umbilik noktası için

$$k: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_p \rightarrow k(X_p) = \frac{1}{\|X_p\|^2} \langle S(X_p), X_p \rangle$$

fonksiyonuna, p noktasında M nin normal eğrilik fonksiyonu denir (Hacısalıhoğlu, 1983b).

Teorem 2.1.5. (Euler Teoremi): E^{n+1} Öklid uzayının bir hiperyüzeyi M^n olsun. $P \in M^n$ ve P noktasındaki tanjant uzay $T_{M^n}(P)$ olmak üzere

$$S: T_{M^n}(P) \rightarrow T_{M^n}(P)$$

şekil operatörünün k_i , $1 \leq i \leq n$, karakteristik değerleri farklı olsun. O halde k_i asli eğrilikleri birbirinden farklıdır. X_i herhangi bir asli eğrilığe karşılık gelen asli doğrultu ise

$$S(X_i) = k_i X_i$$

dir. Buna göre şekil operatörünün $T_{M^n}(P)$ tanjant uzayının uygun bir bazına göre matrisi

$$S = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

X ve Y , E^n nin P noktasında farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları ise X ile Y ortogondur. Buna göre $T_{M^n}(P)$ için asli vektörlerden oluşan ortonormal bir X_i , $1 \leq i \leq n$ bazına sahiptir. O halde $\{X_1, \dots, X_n\}$ asli vektörlerden oluşan ortonormal çatı olarak alabiliriz. Herhangi bir $X_p \in T_{M^n}(P)$ tanjant vektörünü alalım. Bu durumda X_p ile $X_1|_p, \dots, X_n|_p$ asli vektörleri arasındaki açılar sırasıyla $\theta_1, \dots, \theta_n$ ise

$$k(P) = k(X_p) = \sum_{i=1}^n k_i(P) \cos^2 \theta_i$$

olur (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.1.30. M , E^3 uzayında bir Öklid yüzey ve S , M nin şekil operatörü olsun. $X_p \in T_p(M)$ için

$$\langle S(X_p), X_p \rangle = 0$$

oluyorsa, o halde X_p , $p \in M$ noktasında bir asimptotik doğrultudur denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.31. M, E^3 uzayında bir Öklid yüzey ve S, M nin şekil operatörü olsun. $X_p, Y_p \in T_p(M)$ için

$$\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0$$

oluyorsa, o halde X_p ve Y_p vektörleri $p \in M$ noktasında konjuge tanjant vektörlerdir denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.1.33. M, E^3 uzayında bir Öklid yüzey ve S, M nin şekil operatörü olsun. O halde $p \in M$ nin Dupin göstergesi

$$D_p = \{ X_p \mid \langle S(X_p), X_p \rangle = \mp 1, X_p \in T_p(M) \}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983b).

2.2. Paralel Yüzeyler

Tanım 2.2.1. M ve M^r Öklid uzayında iki hiperyüzey olsun. $\vec{U}$, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olsun ve r bir sabit sayı olsun. Eğer M ve M^r yüzeyleri arasında

$$f : M \rightarrow M^r$$

$$p \rightarrow f(p) = p + r\vec{U}_p$$

fonksiyonu varsa, M ve M^r hiperyüzeylerine paralel hiperyüzeyler ve f , fonksiyonuna M ve M^r yüzeyleri arasındaki paralelleştirme fonksiyonu denir (Hacısalıhoğlu, 1983b).

Teorem 2.2.1. M^r, E^n uzayında M hiperyüzeyinin paralel hiperyüzeyi olsun. E^n uzayının $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre $X \in \chi(M)$, $\bar{X} \in \chi(M^r)$ vektör alanları, $\forall p \in M$ için $b_i(p) = \bar{b}_i(f(p))$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

biçiminde verilsin. O halde

1. $f_*(X) = \bar{X} + r\overline{S(X)}$
2. $S^r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.2.2. E^n uzayında $f : M \rightarrow M^r$ olmak üzere M hiperyüzeyinin bir paralel hiperyüzeyi M^r olsun. Bu durumda

1. f , üçüncü temel form olma özelliğini korur.
2. f , umbilik nokta olma özelliğini korur.
3. f , asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
4. M nin temel formları sırasıyla I, II, III olmak üzere

$$\forall X, Y \in \chi(M) \text{ ve } \forall p \in M \text{ için}$$

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(p)} = I(X_p, Y_p) + 2r II(X_p, Y_p) + r^2 III(X_p, Y_p)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.2.3. E^n uzayında bir M yüzeyinin paralel hiperyüzeyi M^r olsun. $p \in M$ noktasında M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H olsun. O halde $f(p) \in M^r$ noktasında M^r yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri K^r ve H^r olsun. Bu durumda

$$K^r = \frac{K}{1 + rH + r^2H}$$

$$H^r = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K}$$

dır (Hacısalıhoğlu, 2000).

2.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler

Tanım 2.3.1. M ve M^f , E^3 Öklid uzayında iki yüzey ve $\vec{U}_p$, M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki birim normal vektörü olsun. $T_p(M)$, $p \in M$ de tanjant yüzey ve $\{\vec{X}_p, \vec{Y}_p\}$, $T_p(M)$ nin bir ortonormal bazı olsun.

$\vec{Z}_p = d_1 X_p + d_2 Y_p + d_3 \vec{U}_p$, $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ öyleki $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ olacak şekilde bir birim vektör olsun. Eğer $p \in M$ ve $r \in \mathbb{R}$ için

$$f: M \rightarrow M^f$$

$$p \rightarrow f(p) = p + r\vec{Z}_p$$

şeklinde bir fonksiyon ise M^f yüzeyine M yüzeyi üzerinde sabit sırt uzaklıklı yüzey denir (Tarakçı ve Hacısalıhoğlu, 2004).

Teorem 2.3.1. E^3 uzayında M ve M^f yüzeyleri verilsin. E^3 uzayının $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemine göre $W \in \chi(M)$ için

$$f_*(W) = \overline{W} + r\overline{D_w Z}$$

dir. Burada $\forall p \in M$ için $w_i(p) = \overline{w}_i(f(p))$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{W} = \sum_{i=1}^n \overline{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dir (Tarakçı ve Hacısalihoğlu, 2004).

M yüzeyi için bir parametrizasyon $(\phi, \mathcal{U})$ ve

$$\phi: \mathcal{U} \subset E^3 \rightarrow M$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = p$$

olsun. Bu durumda $T_p(M)$ nin bir bazı $\{\phi_u|_p, \phi_v|_p\}$, U_p , M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki birim normal vektörü, $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ sabit sayılar, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ ve $\overline{Z}_p = d_1 X_p + d_2 Y_p + d_3 \overline{U}_p$ olmak üzere

$$M^f = \{f(p): f(p) = p + Z_p\}$$

olarak verildiğinden M^f yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\psi(u, v) = \phi(u, v) + rZ(u, v)$$

olur. Böylece

$$M^f = \{\psi(u, v): \psi(u, v) = \phi(u, v) + r(d_1 \phi_u(u, v) + d_2 \phi_v(u, v) + d_3 U(u, v)), \\ d_1 = \text{sabit}, d_2 = \text{sabit}, d_3 = \text{sabit}, r = \text{sabit}\}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $rd_1 = \lambda_1, rd_2 = \lambda_2, rd_3 = \lambda_3$ alınırsa

$$M^f = \{\psi(u, v): \psi(u, v) = \phi(u, v) + \lambda_1 \phi_u(u, v) + \lambda_2 \phi_v(u, v) + \lambda_3 U(u, v), \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \text{sabit}, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = r^2\}$$

olur (Tarakçı ve Hacısalihoğlu, 2004).

Teorem 2.3.2. $(\phi, \mathcal{U})$, E^3 uzayında bir M yüzeyi için parametrizasyon, $\{\phi_u, \phi_v\}$, $\chi(M)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı, k_1 ve k_2 M nin asli eğrilikleri ve M^f yüzeyi M nin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. $\chi(M^f)$ nin $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 k_1) \phi_u - \lambda_1 k_1 U$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 k_2) \phi_v - \lambda_2 k_2 U$$

alındığında M^f yüzeyinin S^f şekil operatörüne karşılık gelen matris, alınan baza göre

$$S^f = \frac{1}{A^3} \begin{bmatrix} (1 + \lambda_3 k_2) \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (\lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + k_1 A^2) & -\frac{\partial k_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_2) \\ -\frac{\partial k_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_1) & (1 + \lambda_3 k_1) (\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2) k_2 A^2) \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_1)^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2}$$

dir (Tarakçı ve Hacısalihoğlu, 2004).

Teorem 2.3.3. E^3 uzayında bir M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f , M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , M^f yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K^f ve H^f ise

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_1)^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2} \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} K^f &= B \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u} \frac{\partial k_2}{\partial v} + \lambda_1 k_2 \frac{\partial k_1}{\partial u} (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + \lambda_2 k_1 \frac{\partial k_2}{\partial v} (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2)}{(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + B^2)^2} \right) \\ &\cdot \left(\frac{K}{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + B^2} \right) \end{aligned}$$

dır ve

$$\begin{aligned} H^f &= B \frac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 k_2) (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} (1 + \lambda_3 k_1) (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2)}{(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &+ \frac{H + 2\lambda_3 K}{(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

dır. Burada $B = 1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K$ dır (Tarakçı ve Hacısalihoğlu, 2004).

3. KİNEMATİK YÜZEYLER

3.1. Vida Yüzeyleri

3.1.1. Vida yüzeyinin tanımı

M ve M^g , E^3 uzayında iki yüzey ve $p \in M$ olsun. $\vec{v} = (\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z)$ birim vektörü etrafında bir θ radyan açılık dönme

$$r = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (v_x i + v_y j + v_z k)$$

kuaterniyonu ve E^3 teki bir $\vec{t} = \lambda \vec{v}$ öteleme vektörü (dönme eksenini etrafında) olmak üzere

$$f : M \rightarrow M^g$$

$$p \rightarrow f(p) = rp\bar{r} + \vec{t} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu ile elde edilen M^g yüzeyine M yüzeyinin vida yüzeyi denir.

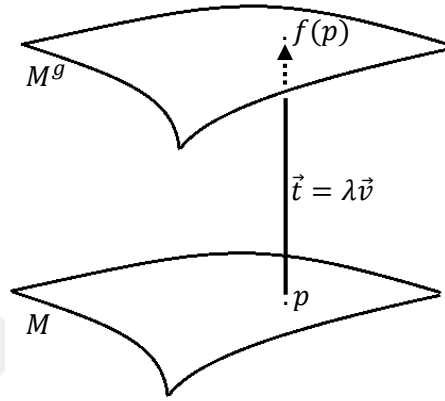
p noktasında M yüzeyinin birim normal vektörünü, f fonksiyonunun dönme eksenini yani $\vec{v} = \vec{U}$ alalım. Bir vida yüzeyi fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(p) &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{U} \right) p \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \vec{U} \right) + \lambda \vec{U} \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} p - \sin \frac{\theta}{2} \langle \vec{U}, p \rangle + \sin \frac{\theta}{2} (\vec{U} \wedge p) \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \vec{U} \right) + \lambda \vec{U} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} p - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \langle \vec{U}, p \rangle + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\vec{U} \wedge p) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \langle p, \vec{U} \rangle \\ &\quad - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (p \wedge \vec{U}) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \langle \vec{U}, p \rangle \vec{U} - \sin^2 \frac{\theta}{2} (\langle p, \vec{U} \rangle) \wedge \vec{U} \\ &\quad + \sin^2 \frac{\theta}{2} \langle (\vec{U} \wedge p), \vec{U} \rangle - \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{U} \wedge p) \wedge \vec{U} + \lambda \vec{U} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} p + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\vec{U} \wedge p) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \langle \vec{U}, p \rangle \vec{U} - \sin^2 \frac{\theta}{2} (\vec{U} \wedge p) \wedge \vec{U} + \lambda \vec{U} \\ f(p) &= \cos \theta p + \sin \theta (\vec{U} \wedge p) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \langle \vec{U}, p \rangle \vec{U} + \lambda \vec{U} \end{aligned}$$

olur. $p \in M$ noktasının konum vektörü ile $\vec{U}$ birim normal vektörünün paralel olması halinde

$$f(p) = \cos\theta p + \left(\|p\|\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda\right)\vec{U}_p \quad (3.2)$$

halini alır. Bundan sonraki bütün işlemler vida yüzeyi fonksiyonunun bu durumuna göre yapılacaktır.



Şekil 3.1. Vida Yüzeyi.

3.1.2. Vida yüzeyinin bazı özellikleri

Bir yüzeyin teğet vektörünün vida yüzeyine nasıl aktarıldığını aşağıdaki teoremlerle gösterebiliriz.

Teorem 3.1.2.1. E^3 uzayında M yüzeyinin vida yüzeyi M^g olsun. E^3 uzayının $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemine göre $X \in \chi(M)$, $\bar{X} \in \chi(M^g)$ vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^3 \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olmak üzere

$$\forall p \in M \text{ için } b_i(p) = \bar{b}_i(f(p)), \quad 1 \leq i \leq 3$$

özelliğiyle verilsin. O halde

1. $f_*(X_p) = \cos^2\frac{\theta}{2}X_p + \left(\|p\|\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda\right)S(X_p)$
2. $S^g(f_*(X_p)) = S(X_p)$

İspat:

1) Bir M yüzeyinin M^g vida yüzeyinin noktaları

$$f: M \rightarrow M^g$$

$$p \rightarrow f(p) = \cos\theta p + \left(\|p\|\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda\right)\vec{U}_p$$

fonksiyonu ile elde edilir. M üzerindeki vektörler ve

$$\vec{U} = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, M \text{ nin birim normal vektör alanları } M^g \text{ yüzeyine}$$

$$f *_p \leftrightarrow \cos^2\frac{\theta}{2}I_3 + \left(\|p\|\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda\right)\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right]_p + \frac{1}{\|p\|}\sin^2\frac{\theta}{2}[P_i a_j]$$

türev dönüşümü ile aktarılır.

$$f *_p \leftrightarrow \cos^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\|p\|\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda\right)\begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_p + \frac{1}{\|p\|}\sin^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} p_1 a_1 & p_2 a_1 & p_3 a_1 \\ p_1 a_2 & p_2 a_2 & p_3 a_2 \\ p_1 a_3 & p_2 a_3 & p_3 a_3 \end{bmatrix}$$

O halde $\forall X_p \in T_p(M)$ için

$$f *_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M^g)$$

$$\begin{aligned} f *_p(X_p) &= \cos^2\frac{\theta}{2}X_p + \left(\|p\|\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda\right)S(X_p) + \frac{1}{\|p\|}\sin^2\frac{\theta}{2}\langle P, X_p \rangle \vec{U}_p \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}X_p + \left(\|p\|\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda\right)S(X_p) \end{aligned}$$

2) $\vec{U} = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve S , sırasıyla M yüzeyinin birim normal vektör alanı ve şekil operatörü

olsun. M^g yüzeyinin birim normal vektör alanı U^g ve şekil operatörü S^g ile gösterelim.

$$U_{f(p)}^g = \sum_{i=1}^3 \bar{a}_i(f(p)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^3 a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \vec{U}_p$$

dir.

Kabul edelim ki $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin $p \in M$ noktasındaki birim teğet vektörü

$$X_p = \sum_{i=1}^3 b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olsun. Bu durumda $f \circ \alpha : I \rightarrow M^g$ eğrisinin $f(p) \in M^g$ noktasındaki teğet vektörü

$f_*(X_p) \in T_{f(p)}M^g$ olur. Buna göre $p = \alpha(t)$ noktasında

$$\begin{aligned} S(X)_p = D_{X_p}U &= \sum_{i=1}^3 X_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^3 X_{\alpha(t)}[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{d(a_i \circ \alpha)}{dt} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^3 \frac{d(\bar{a}_i \circ f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{\alpha(t)} \\ &= \sum_{i=1}^3 f_*(X)_{f(p)}[\bar{a}_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} S^g(f_*(X)_{f(p)}) &= D_{f_*(X)_{f(p)}}U^g = \sum_{i=1}^3 f_*(X)_{f(p)}[\bar{a}_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \\ &= \sum_{i=1}^3 X_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = S(X)_p \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.1.2.2. M^g bir M yüzeyinin vida yüzeyi ve $f : M \rightarrow M^g$ olsun. Buna göre

1. f , üçüncü temel form olma özelliğini korur.
2. f , umbilik nokta olma özelliğini korur.
3. f , asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
4. M nin temel formları sırasıyla I, II, III olmak üzere

$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall p \in M$ için

$$\begin{aligned} \langle f_*X, f_*Y \rangle|_{f(p)} &= \cos^4 \frac{\theta}{2} I(X_p, Y_p) + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) II(X_p, Y_p) \\ &\quad + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 III(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

dir.

İspat:

1) III ve III^g sırasıyla M ve M^g nin üçüncü temel formları olmak üzere

$$\forall X, Y \in \chi(M) \text{ ve } \forall p \in M \text{ için}$$

$$\begin{aligned} III^g(f_{*p}X_p, f_{*p}Y_p) &= \langle S^g(f_*X_p), S^g(f_*Y_p) \rangle \\ &= \langle S(X_p), S(Y_p) \rangle = III(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

dir.

2) $p \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. Bu durumda

$$\forall X_p \in T_p(M) \text{ ve } \exists c \in \mathbb{R} \text{ öyleki } S(X_p) = cX_p$$

dir. Diğer taraftan Teorem 3.1.2.1 gereğince

$$\begin{aligned} f_*(X_p) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p) \\ &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + c \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) X_p \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $\forall f_*(X_p) \in T_{f(p)}M^g$ için

$$\begin{aligned} S^g(f_*(X_p)) &= S(X_p) \\ &= cX_p \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + c \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_p) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $p \in M$, M nin bir umbilik noktası ise $f(p) \in M^g$ de M^g nin bir umbilik noktasıdır.

3) $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 , bunlara karşılık gelen asli doğrultuları da sırasıyla X_{1p} ve X_{2p} olsun. Bu durumda $S(X_{1p}) = k_1 X_{1p}$ ve $S(X_{2p}) = k_2 X_{2p}$ dir. Diğer taraftan Teorem 3.1.2.1 gereğince

$$f_*(X_{1p}) = \cos^2 \frac{\theta}{2} X_{1p} + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_{1p})$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) X_{1p}$$

ve

$$\begin{aligned} f_*(X_{2p}) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} X_{2p} + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_{2p}) \\ &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) X_{1p} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} S^g(f_*(X_{1p})) &= S(X_1)_p \\ &= k_1 X_{1p} \\ &= \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_{1p}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} S^g(f_*(X_{2p})) &= S(X_2)_p \\ &= k_2 X_{2p} \\ &= \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_{2p}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(f_*(X_{1p}))$ ve $(f_*(X_{2p}))$ de M^g yüzeyinin $f(p) \in M$ noktasındaki asli doğrultuları ve

$$\frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} \quad \text{ile} \quad \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)}$$

de sırasıyla bunlara karşılık gelen asli eğrilikler olur.

4) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall p \in M$ için

$$\langle f_*X, f_*Y \rangle|_{f(p)} = \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p), \cos^2 \frac{\theta}{2} Y_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(Y_p)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p, \cos^2 \frac{\theta}{2} Y_p \right\rangle + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \langle S(X_p), S(Y_p) \rangle \\
&\quad + \left\langle \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p, \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(Y_p) \right\rangle + \left\langle \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p), \cos^2 \frac{\theta}{2} Y_p \right\rangle \\
&= \cos^4 \frac{\theta}{2} \langle X_p, Y_p \rangle + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \langle S^2(X_p), Y_p \rangle \\
&\quad + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \langle X_p, S(Y_p) \rangle + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \langle S(X_p), Y_p \rangle \\
\langle f_* X, f_* Y \rangle|_{f(p)} &= \cos^4 \frac{\theta}{2} I(X_p, Y_p) + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) II(X_p, Y_p) \\
&\quad + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 III(X_p, Y_p)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Vida yüzeyi için dönme işlemi göz ardı edilirse yani dönme açısı $\theta = 0$ alınırsa vida yüzeyi paralel olur.

Bir yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri ve bu yüzeyin vida yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 3.1.2.3. E^3 te M yüzeyinin vida yüzeyi M^g verilsin. $p \in M$ noktasında M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , $f(p) \in M^g$ noktasında M^g vida yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K^g ve H^g olsun. Bu durumda

$$K^g = \frac{K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \quad (3.3)$$

$$H^g = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \quad (3.4)$$

dir.

İspat: $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. Bu asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular sırasıyla X_1 ve X_2 olsun. Teorem 3.1.2.2. gereğince M^g nin $f(p)$ noktasındaki asli doğrultuları $f_* X_1$ ve $f_* X_2$ olur. Ayrıca

$$S^g(f_*(X_{1p})) = \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} f_*(X_p)$$

ve

$$S^g(f_*(X_{2p})) = \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} f_*(X_p)$$

dir. Dolayısıyla $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazına göre S^g matrisi

$$S^g = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} H^g &= \text{iz}(S^g) \\ &= \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} + \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} \\ H^g &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda) K}{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda) K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K^g &= \det(S^g) \\ &= \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} \cdot \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)} \\ &= \frac{k_1 k_2}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda) (k_1 + k_2) (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)^2 k_1 k_2} \\ &= \frac{K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda) H + (\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda)^2 K} \end{aligned}$$

Teorem 3.1.2.3' ün sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.2.4. E^3 te M yüzeyinin vida yüzeyi M^g olsun. $p \in M$ noktasında M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikler sırasıyla K ve H , $f(p) \in M^g$ noktasında M^g vida yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K^g ve H^g olsun. O halde

$$K = \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2} K^g}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g}$$

$$H = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H^g - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g}$$

dir.

İspat: Teorem 3.1.2.3. teki K^g ve H^g ifadeleri oranlanırsa

$$\frac{K^g}{H^g} = \frac{K}{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K}$$

olur. Buradan

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} H K^g + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K K^g = K H^g$$

olup

$$K = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H K^g}{H^g - 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g} \quad (3.5)$$

yazılabilir. (3.5) eşitliği (3.3) de kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\cos^4 \frac{\theta}{2} K^g \left(H^g - 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g \right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) H^g$$

$$+ \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g \right) K^g H$$

$$H = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} \left(H^g - 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g \right)}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.5) denklemini (3.3) denkleminde kullanılırsa

$$K = \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2} K^g}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g}$$

bulunur.

Şimdi paralel yüzeyler ile vida yüzeyi arasındaki ilişkiyi verelim.

Sonuç 3.1.2.1. Bir M yüzeyinin

$$M^g = \left\{ f(p) \mid f(p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{U}_p, p \in M, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

vida yüzeyi için dönme açısı $\theta=0$ alınırsa M^g yüzeyi M yüzeyinin paralel yüzeyi olur ve

$$K^g = \frac{K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K}$$

ve

$$H^g = \frac{H + 2\lambda K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K}$$

dır.

İspat: Eğer $\theta = 0$ alınırsa $f(p) = p + \lambda \vec{U}_p$ olup M^g yüzeyi M yüzeyinin paralel yüzeyi olur.

Diğer taraftan Teorem 3.2.3 teki $\sin \theta = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} K^g &= \frac{K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \\ &= \frac{K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H^g &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \\ &= \frac{H + 2\lambda K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.3. Bir eğrinin vida yüzeyi üzerindeki resminin Darboux çatısı

Tanım 3.1.3.1. M yüzeyinin vida yüzeyi M^g ve M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g yüzeyi üzerindeki görüntüsü $\beta = (f \circ \alpha)$ olsun. Bu durumda $\vec{\beta}' = \overrightarrow{f_*(T)}$ dir. β eğrisi $f(\alpha(t))$ noktasında birim hızlı olmadığından $v = \|\overrightarrow{f_*(T)}\|$ olmak üzere eğrinin Darboux çatısı

$$\left\{ \overrightarrow{T^g} = \frac{\overrightarrow{f_*(T)}}{v}, \overrightarrow{V^g} = \overrightarrow{U^g} \wedge \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{U^g} \right\}$$

dir.

Teorem 3.1.3.1. M yüzeyinde bir α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olsun. α eğrisinin normal eğriliği k_n ve geodezik burulması τ_g olsun. O halde $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$, M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü $\beta = (f \circ \alpha)$ olan eğrinin $f(p) = f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T^g}|_{f(p)} &= \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p \right] \\ \overrightarrow{V^g}|_{f(p)} &= \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p \right] \\ \overrightarrow{U^g}|_{f(p)} &= \vec{U}_p \end{aligned}$$

dir. Burada k_n ve τ_g , M yüzeyinin sırasıyla normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır.

İspat: M yüzeyinin $p = \alpha(t)$ noktasında birim normalinin türevi

$$\vec{U}_p' = -k_n \vec{T}_p - \tau_g \vec{V}_p$$

olduğundan β eğrisinin $f(p) = (\alpha(t))$ noktasındaki teğet vektörü

$$\begin{aligned} \vec{\beta}'(f(p)) &= \overrightarrow{f_*(T_p)} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{T}_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(\vec{T}_p) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{T}_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) (-k_n \vec{T}_p - \tau_g \vec{V}_p) \\ &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$v = \|\overrightarrow{f_*(T)}\| = \sqrt{\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda\right)\right)^2 + \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda\right)^2}$$

bulunur. $\overrightarrow{T^g} = \frac{\overrightarrow{f_*(T)}}{\|\overrightarrow{f_*(T)}\|}$ olduğundan

$$\overrightarrow{T^g}|_{f(p)} = \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p \right]$$

olarak elde edilir.

M^g yüzeyi M yüzeyinin vida yüzeyi olduğundan $\overrightarrow{U^g}|_{f(p)} = \overrightarrow{U}_p$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V^g}|_{f(p)} &= (\overrightarrow{U^g} \wedge \overrightarrow{T^g})|_{f(p)} \\ &= \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece M^g yüzeyinin $f(p) = f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}_{f(p)}$ elde edilmiş oldu.

Tanım 3.1.3.2. M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü $\beta = (f \circ \alpha)$ ve β eğrisinin $f(\alpha(t)) \in M^g$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ olsun. O halde

$$k_g^g(f(\alpha(t))) = \left\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{V^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))} = - \left\langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))}$$

ifadesine M^g vida yüzeyinin geodezik eğriliği denir.

Tanım 3.1.3.3. M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü $\beta = (f \circ \alpha)$ ve β eğrisinin $f(\alpha(t)) \in M^g$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ olsun. O halde

$$k_n^g(f(\alpha(t))) = \left\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))} = - \left\langle \overrightarrow{U^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))}$$

ifadesine M^g vida yüzeyinin normal eğriliği denir.

Tanım 3.1.3.4. M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü $\beta = (f \circ \alpha)$ ve β eğrisinin $f(\alpha(t)) \in M^g$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ olsun. O halde

$$\tau_g^g(f(\alpha(t))) = \left\langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))} = - \left\langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{V^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))}$$

ifadesine M^g vida yüzeyinin geodezik torsiyon veya geodezik burulması denir.

Teorem 3.1.3.2. α , M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve α nın M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü $\beta = (f \circ \alpha)$ olsun. O halde $\beta = (f \circ \alpha)$ nın $f(p) = f(\alpha(t))$ noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla

$$\begin{aligned} k_g^g &= \frac{1}{v^3} \left[\tau_g' \left(k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \tau_g \left(\frac{\langle p, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + k_n' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 + k_g v^2 \right) \right] \\ k_n^g &= \frac{1}{v^2} \left[k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 + k_g v^2 \right] \\ \tau_g^g &= \frac{\tau_g}{v^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

dır.

İspat: $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmadığından Teorem 2.1.2'den yararlanılacaktır.

$$\overrightarrow{\beta'}(f(p)) = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\beta''}(f(p)) &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{T}_p' - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p' \\ &\quad - \left(-k_n \frac{\langle p, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} + k_n' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p \\ &\quad - \left(\tau_g' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) + \tau_g \frac{\langle p, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{V}_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(k_g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - k_n \frac{\langle p, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} - k'_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p \\
&\quad + \left(k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{U}_p \\
&\quad + \left(k_g \cos^2 \frac{\theta}{2} - (k_n k_g + \tau'_g) \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g \frac{\langle p, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{V}_p
\end{aligned}$$

$\beta(s) = f(\alpha(s))$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmadığından M^g yüzeyinin geodezik eğriliği

$$\begin{aligned}
k_g^g &= \frac{1}{v^2} \langle \overrightarrow{\beta''}, \overrightarrow{Vg} \rangle_{f(p)} \\
&= \frac{1}{v^3} \langle \overrightarrow{\beta'''}_{f(p)}, \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{V}_p + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p \rangle \\
&\quad \left[k_g \left(\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right)^2 + \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \tau'_g \left(k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \tau_g \left(\frac{\langle p, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + k'_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \right) \right] \\
k_g^g &= \frac{1}{v^3} \left[k_g v^2 + \tau'_g \left(k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \tau_g \left(\frac{\langle p, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + k'_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. M^g yüzeyinin normal eğriliği

$$\begin{aligned}
k_n^g &= \frac{1}{v^2} \langle \overrightarrow{\beta''}, \overrightarrow{Ug} \rangle_{f(p)} \\
&= \frac{1}{v^2} \langle \overrightarrow{\beta''}_{f(p)}, \overrightarrow{Ug} \rangle \\
&= \frac{1}{v^2} k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Son olarak M^g yüzeyinin geodezik burulması

$$\begin{aligned}
 \tau_g^g &= \frac{1}{v} \left\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle_{f(p)} \\
 &= -\frac{1}{v} \left\langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{T^{g'}} \right\rangle_{f(p)} \\
 &= \frac{1}{v^2} \left\langle \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{V}_p + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p, -k_n \vec{T}_p - \tau_g \vec{V}_p \right\rangle \\
 &= \frac{1}{v^2} \left(-k_n \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g \cos^2 \frac{\theta}{2} + k_n \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \\
 &= \frac{\tau_g}{v^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.3.1. Esas yüzey üzerinde geodezik olan bir eğrinin M^g yüzeyi üzerindeki resminin de geodezik olabilmesi için esas yüzey üzerindeki eğrinin bir eğrilik çizgisi olması gerekmektedir.

İspat: Eğer M esas yüzeyi üzerindeki eğri bir geodezik eğri ise, o halde bu eğrinin geodezik eğriliği $k_g = 0$ dır. Eğer bu eğri bir eğrilik çizgisi ise $\tau_g = 0$ dır. $k_g = 0$ ve $\tau_g = 0$ olduğundan, $k_g^g = 0$ elde edilir.

Sonuç 3.1.3.2. M esas yüzeyi üzerinde asimptotik eğrinin M^g yüzeyi üzerindeki görüntü eğriside asimptotiktir ancak ve ancak M esas yüzeyi üzerindeki eğri bir eğrilik çizgisidir.

İspat: M esas yüzeyi üzerindeki eğri bir asimptotik eğri ise normal eğriliği $k_n = 0$ dır. Bu eğri bir eğrilik çizgisi olduğundan $\tau_g = 0$ dır. $k_n = 0$ ve $\tau_g = 0$ olduğundan, $k_n^g = 0$ elde edilir.

Sonuç 3.1.3.3. M esas yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisi olan bir eğrinin M^g yüzeyi üzerindeki görüntü eğriside bir eğrilik çizgisidir.

İspat: M esas yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisi olan bir eğrinin geodezik burulması $\tau_g = 0$ dır. O halde $\tau_g^g = 0$ elde edilir.

3.1.4. Bir eğrinin vida yüzeyi üzerindeki resminin Frenet çatısı

$\beta = (f \circ \alpha)$ M^g vida yüzeyi üzerinde α eğrisinin görüntüsü olsun ve $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$, α nın M yüzeyi üzerindeki Darboux çatısı olsun. β birim hızlı bir eğri olmadığından

$$\begin{aligned}
(\vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}'')|_{f(p)} &= -v^2 k_n^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p + v^3 k_g^g \vec{U}_p \\
&\quad - v^2 k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|\vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}''\|_{f(p)} = v^2 \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\vec{B}^g|_{f(p)} &= \frac{\vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}''}{\|\vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}''\|} \\
&= \frac{1}{v \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[-k_n^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p + v k_g^g \vec{U}_p \right. \\
&\quad \left. - k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\vec{N}^g|_{f(p)} &= (\vec{B}^g \wedge \vec{T}^g)|_{f(p)} \\
&= \frac{1}{v \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[k_g^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p + v k_n^g \vec{U}_p \right. \\
&\quad \left. + k_g^g k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.4.1. $\beta = (f \circ \alpha)$ M^g vida yüzeyi üzerinde α eğrisinin görüntüsü olsun ve $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$, α nın M yüzeyi üzerindeki Darboux çatısı olsun. O halde $f(p) = f(\alpha(t))$ noktasındaki $\beta = (f \circ \alpha)$ Frenet çatısı

$$\vec{T}^g|_{f(p)} = \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p \right]$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N^g}|_{f(p)} &= \frac{1}{v\sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[k_g^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p + v k_n^g \vec{U}_p \right. \\ &\quad \left. + k_g^g k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p \right] \\ \overrightarrow{B^g}|_{f(p)} &= \frac{1}{v\sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[-k_n^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p + v k_g^g \vec{U}_p \right. \\ &\quad \left. - k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p \right]\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.1.4.2. M^g vida yüzeyi üzerinde α eğrisinin görüntüsü olan $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g}\}$ ve ϕ^g, β eğrinin asli normal $\overrightarrow{N^g}$ ile M^g yüzeyinin birim normali $\overrightarrow{U^g}$ arasındaki açı olsun. O halde β eğrisinin eğriliği κ^g ise

$$\kappa^g = \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}$$

ve

$$\cos \phi^g = \frac{k_n^g}{\kappa^g}$$

dir

İspat:

$$\begin{aligned}\kappa^g &= \frac{\|\overrightarrow{\beta'} \wedge \overrightarrow{\beta''}\|}{\|\overrightarrow{\beta'}\|^3} \text{ olduğundan} \\ \kappa^g &= \frac{v^3 \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}}{v^3} \\ &= \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\cos \phi^g = \langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{U^g} \rangle$$

$$\begin{aligned} \cos \phi^g &= \frac{1}{\sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \nu k_n^g \langle \overline{U^g}, \overline{U^g} \rangle \\ &= \frac{k_n^g}{\kappa^g} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2. k-Kinematik Yüzeyler

3.2.1. k-kinematik yüzeyinin tanımı

Tanım 3.2.1.1. M ve M^k , E^3 te iki yüzey ve $p \in M$ olsun. $r = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{k}$, $\vec{k}$ birim vektörü etrafında θ radyan açılık dönme ve öteleme vektörü E^3 Öklid uzayındaki keyfi $\vec{Z}_p$ birim vektörü olsun.

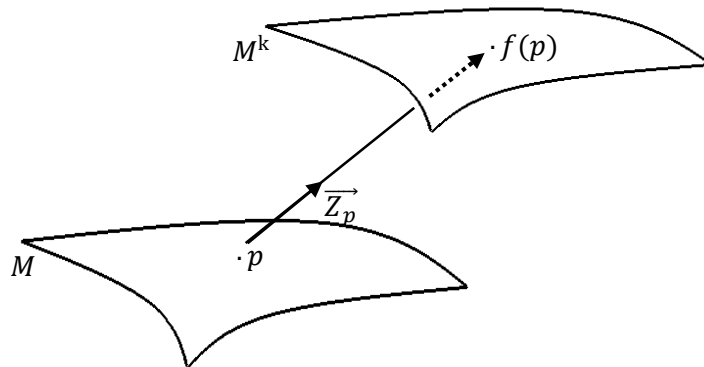
$$f : M \rightarrow M^k$$

$$p \rightarrow f(p) = rp\bar{r} + \lambda \vec{Z}_p$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile elde edilen M^k yüzeyine M yüzeyinin k-kinematik yüzeyi denir. Buradan

$$f(p) = \cos \theta + \sin \theta \vec{k} \wedge p + (1 - \cos \theta) \langle \vec{k}, p \rangle \vec{k} + \lambda \vec{Z}_p$$

olur.



Şekil 3.2. k-Kinematik Yüzey.

Örnek 3.2.1.1. $M = \left\{ \phi(u, v) \mid \phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v), 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2 \right\}$ yarım silindiri düşünelim. Dönme açısı $\pi/2$ ve öteleme vektörü $\vec{Z} = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ olsun. M yüzeyinin her bir noktası $\vec{k}$ dönme eksenini etrafında $\pi/2$ açılıklı dönme ve $\vec{Z}$ vektörü boyunca 6 birim ötelenerek

$$M^k = \left\{ \psi(u, v) \mid \psi(u, v) = (-\sin u + 2\sqrt{3}, \cos u + 2\sqrt{3}, v + 2\sqrt{3}), 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2 \right\}$$

k -kinematik yüzeyini elde edilir.

$$P = (0, 1, 2) \in M \text{ noktasının görüntüsü}$$

$$P' = (-1 + 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}) \in M^k$$

olacaktır. $\forall X_p \in T_p(M)$ için

$$f_*(X_p) = \cos \theta + \sin \theta \vec{k} \wedge X_p + (1 - \cos \theta) \langle \vec{k}, X_p \rangle \vec{k} + \lambda \vec{Z}_p$$

olup M üzerindeki tanjant vektörünü f_* dönüşümü ile M^k k -kinematik yüzeyine aktarabiliriz.

(ϕ, U) , M yüzeyinin bir parametresi olsun. O halde bir

$$\phi: U \rightarrow E^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = p$$

yazılabilir. Bundan dolayı $\{\phi_u, \phi_v\}$ kümesi $T_p(M)$ de bir bazdır.

$\vec{U}_p, p \in M$ de bir birim normal vektör ve $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ sabit reel sayılar olsun. O halde

$$\vec{Z}_p = d_1 \phi_u|_p + d_2 \phi_v|_p + d_3 \vec{U}_p$$

yazabiliriz.

$$M^k = \{f(p) \mid f(p) = \cos \theta p + \sin \theta \vec{k} \wedge p + (1 - \cos \theta) \langle \vec{k}, p \rangle \vec{k} + \lambda \vec{Z}_p\}$$

olduğundan, M^k yüzeyinin bir parametrik gösterimi

$$\psi(u, v) = \cos \theta \phi(u, v) + \sin \theta \vec{k} \wedge \phi(u, v) + (1 - \cos \theta) \langle \vec{k}, \phi(u, v) \rangle \vec{k} + \lambda \vec{Z}_p$$

dir ve

$$M^k = \{\psi(u, v) | \psi(u, v) = \{ \cos\theta \phi(u, v) + \sin\theta \vec{k} \wedge \phi(u, v) + (1 - \cos\theta) \langle \vec{k}, \phi(u, v) \rangle \vec{k} \\ + \lambda(d_1 \phi_u + d_2 \phi_v + d_3 N(u, v)), d_1, d_2, d_3, \lambda \text{ sabit sayı} \}$$

veya

$$\lambda_1 = \lambda d_1, \lambda_2 = \lambda d_2, \lambda_3 = \lambda d_3 \text{ alırsak}$$

$$M^k = \{\psi(u, v) | \psi(u, v) = \{ \cos\theta \phi(u, v) + \sin\theta \vec{k} \wedge \phi(u, v) + (1 - \cos\theta) \langle \vec{k}, \phi(u, v) \rangle \vec{k} \\ + \lambda_1 \phi_u + \lambda_2 \phi_v + \lambda_3 N(u, v), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ sabit sayı} \}$$

dır.

M yüzeyinin ϕ_u ve ϕ_v gibi asli doğrultmanlarını alalım. Asli eğrilikleri arasındaki ilişki sırasıyla k_1 ve k_2 olsun. O halde

$$\psi_u = (\cos\theta + \lambda_3 k_1) \phi_u + \sin\theta \langle \vec{k}, N \rangle \phi_v - (\lambda_1 k_1 + \sin\theta \langle \vec{k}, \phi_v \rangle N + (1 - \cos\theta) \langle \vec{k}, \phi_u \rangle \vec{k}$$

ve

$$\psi_v = -\sin\theta \langle \vec{k}, N \rangle \phi_u + (\cos\theta + \lambda_3 k_2) \phi_v - (\lambda_2 k_2 - \sin\theta) \langle \vec{k}, \phi_u \rangle N + (1 - \cos\theta) \langle \vec{k}, \phi_v \rangle \vec{k}$$

dır. Bu nedenle M^k yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$A = \|\psi_u \wedge \psi_v\|$$

olarak alındığında

$$N = \frac{A}{\psi_u \wedge \psi_v}$$

olarak hesaplanabilir.

Teorem 3.2.1.1. E^3 te (M, M^k) çifti verilsin. $\{\phi_u, \phi_v\}$ M üzerinde ortonormal ve asli vektör alanı, k_1 ve k_2 , M nin asli eğrilikleri olsun. O halde M^k nin S^k şekil operatörü matrisi

$$S^k = \frac{1}{A^2} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\mu_1 = [\langle N^k, \psi_{uv} \rangle \langle \psi_u, \psi_v \rangle - \langle N^k, \psi_{uu} \rangle \langle \psi_v, \psi_v \rangle]$$

$$\mu_2 = [\langle N^k, \psi_{uu} \rangle \langle \psi_u, \psi_v \rangle - \langle N^k, \psi_{uv} \rangle \langle \psi_u, \psi_u \rangle]$$

$$\mu_3 = [\langle N^k, \psi_{vv} \rangle \langle \psi_u, \psi_v \rangle - \langle N^k, \psi_{uv} \rangle \langle \psi_v, \psi_v \rangle]$$

$$\mu_4 = [\langle N^k, \psi_{uv} \rangle \langle \psi_u, \psi_v \rangle - \langle N^k, \psi_{uu} \rangle \langle \psi_u, \psi_u \rangle]$$

dir.

3.2.2. k-kinematik yüzeyler için asimptotik doğrultular ve konjuge tanjant vektörler

Teorem 3.2.2.1. M^k bir M yüzeyinin bir k-kinematik yüzeyi olsun. $\{\phi_u, \phi_v\}$, M yüzeyi üzerinde ortonormal ve asli vektör alanı, k_1 ve k_2 de M nin asli eğrilikleri olsun. $X_p \in T_p(M)$ olsun. O halde

$f_*(X_p) \in T_{f(p)}(M^k)$, M^k nin bir asimptotik doğrultusudur ancak ve ancak

$$\mu_1^* x_1^2 + \mu_2^* x_1 x_2 + \mu_3^* x_2^2 = 0 \quad (4.1)$$

olmalıdır. Burada

$$x_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle$$

$$x_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle$$

$$\mu_1^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_2 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$\mu_2^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_2 \langle \psi_v, \psi_v \rangle + \mu_3 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_4 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$\mu_3^* = \mu_3 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_4 \langle \psi_v, \psi_v \rangle$$

dir.

İspat: $X_p \in T_p(M)$ olsun. $x_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle$ ve $x_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle$ olduğundan $X_p = x_1 \phi_u + x_2 \phi_v$ yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} f_*(X_p) &= x_1 f_*(\phi_u) + x_2 f_*(\phi_v) \\ &= x_1 \psi_u + x_2 \psi_v \end{aligned} \quad (4.2)$$

yazılabilir. Diğer yandan $S^k(f_*(X_p))$ i hesaplırsak

$$\begin{aligned} S^k(f_*(X_p)) &= x_1 S^k(f_*(\phi_u)) + x_2 S^k(f_*(\phi_v)) \\ &= (\mu_1 x_1 + \mu_3 x_2) \psi_u + (\mu_2 x_1 + \mu_4 x_2) \psi_v \end{aligned} \quad (4.3)$$

olup (4.2) ile (4.3) ün iç çarpımının hesaplanması bize sonucu verir.

Teorem 3.2.2.2. M^k , bir M yüzeyinin bir k -kinematik yüzeyi ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ ortonormal baz olsun öyleki ϕ_u ve ϕ_v , M de asli vektör alanlarıdır. k_1 ve k_2 , M nin asli eğrilikleri olsun. θ_1 ve θ_2 sırasıyla X_p birim vektörü ile ϕ_u ve ϕ_v arasındaki açılar olsun. O halde

$f_*(X_p) \in T_{f(p)}(M^k)$, M^k yüzeyinin bir asimptotik doğrultusudur, ancak ve ancak

$$\mu_1^* \cos^2 \theta_1 + \mu_2^* \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \mu_3^* \cos^2 \theta_2 = 0 \quad (4.4)$$

olmalıdır.

İspat: θ_1 , X_p ile ϕ_u arasındaki açı ve θ_2 , X_p ile ϕ_v arasındaki açı olsun. O halde

$$\cos \theta_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle = x_1 \quad (4.5)$$

olur. Benzer şekilde

$$\cos \theta_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle = x_2 \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) denklemlerinin (4.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\mu_1^* \cos^2 \theta_1 + \mu_2^* \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \mu_3^* \cos^2 \theta_2 = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2.3. M^k , bir M yüzeyinin k -kinematik yüzeyi ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ ortonormal baz olsun öyleki ϕ_u ve ϕ_v , M de asli vektör alanlarıdır. O halde

$X_p, Y_p \in T_p(M)$ için $f_*(X_p) \in T_{f(p)}(M^k)$ ve $f_*(Y_p) \in T_{f(p)}(M^k)$ konjuge tanjant vektörlerdir ancak ve ancak

$$\mu_1^* x_1 y_1 + \mu_2^* x_1 y_2 + \mu_3^* x_2 y_1 + \mu_4^* x_2 y_2 = 0 \quad (4.7)$$

olmalıdır. Burada

$$x_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle, \quad x_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle$$

$$y_1 = \langle Y_p, \phi_u \rangle, \quad y_2 = \langle Y_p, \phi_v \rangle$$

$$\mu_1^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_2 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$\mu_2^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_2 \langle \psi_v, \psi_v \rangle$$

$$\mu_3^* = \mu_3 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_4 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$\mu_4^* = \mu_3 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_4 \langle \psi_v, \psi_v \rangle$$

dir.

İspat: $X_p, Y_p \in T_p(M)$ olsun. O halde $\{\phi_u, \phi_v\}$, $T_p(M)$ de bir ortonormal baz olduğundan

$x_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle, x_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle, y_1 = \langle Y_p, \phi_u \rangle, y_2 = \langle Y_p, \phi_v \rangle$ olmak üzere

$$X_p = x_1 \phi_u + x_2 \phi_v$$

$$Y_p = y_1 \phi_u + y_2 \phi_v$$

olur. Böylece

$$f_*(X_p) = x_1 f_*(\phi_u) + x_2 f_*(\phi_v)$$

$$= x_1 \psi_u + x_2 \psi_v$$

ve

$$f_*(Y_p) = y_1 f_*(\phi_u) + y_2 f_*(\phi_v)$$

$$= y_1 \psi_u + y_2 \psi_v$$

(4.8)

dir. Diğer taraftan

$$S^k(f_*(X_p)) = x_1 S^k(f_*(\phi_u)) + x_2 S^k(f_*(\phi_v))$$

$$= (\mu_1 x_1 + \mu_3 x_2) \psi_u + (\mu_2 x_1 + \mu_4 x_2) \psi_v \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.8) denklemi ile (4.9) denkleminin iç çarpımı

$$\langle S^k(f_*(X_p)), f_*(Y_p) \rangle = \mu_1^* x_1 y_1 + \mu_2^* x_1 y_2 + \mu_3^* x_2 y_1 + \mu_4^* x_2 y_2$$

sonucu verir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2.4. M^k , bir M yüzeyinin k -kinematik yüzeyi ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ ortonormal baz olsun öyleki ϕ_u ve ϕ_v , M de asli vektör alanlarıdır. k_1 ve k_2 , M nin asli eğrilikleri olsun. θ_1 ve θ_2 sırasıyla X_p birim vektörü ile ϕ_u ve ϕ_v arasındaki açılar ve α_1, α_2 sırasıyla Y_p birim vektörü ile ϕ_u ve ϕ_v arasındaki açılar olsun. O halde $f_*(X_p)$ ve $f_*(Y_p)$ konjuge tanjant vektörlerdir ancak ve ancak

$$\mu_1^* \cos \theta_1 \cos \alpha_1 + \mu_2^* \cos \theta_1 \cos \alpha_2 + \mu_3^* \cos \theta_2 \cos \alpha_1 + \mu_4^* \cos \theta_2 \cos \alpha_2 = 0$$

olmalıdır.

İspat: θ_1, X_p ile ϕ_u arasındaki açı ve θ_2 de X_p ile ϕ_v arasındaki açı olsun. O halde

$$\cos\theta_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle = x_1 \quad (4.10)$$

$$\cos\theta_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle = x_2 \quad (4.11)$$

olur. Benzer şekilde α_1 , Y_p ile ϕ_u arasındaki açı ve α_2 de Y_p ile ϕ_v arasındaki açı olsun. O halde

$$\cos\alpha_1 = \langle Y_p, \phi_u \rangle = y_1 \quad (4.12)$$

$$\cos\alpha_2 = \langle Y_p, \phi_v \rangle = y_2 \quad (4.13)$$

olur. (4.10), (4.11), (4.12) ve (4.13) denklemleri (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mu_1^* \cos\theta_1 \cos\alpha_1 + \mu_2^* \cos\theta_1 \cos\alpha_2 + \mu_3^* \cos\theta_2 \cos\alpha_1 + \mu_4^* \cos\theta_2 \cos\alpha_2 = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.2.3. k-kinematik yüzeyler için Euler teoremi ve Dupin göstergesi

Teorem 3.2.3.1. M^k , bir M yüzeyinin k-kinematik yüzeyi ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ ortonormal baz olsun öyleki ϕ_u ve ϕ_v , M de asli vektör alanlarıdır. k_1 ve k_2 , M nin asli eğrilikleri olsun. $X_p \in T_p(M)$ ve $k_n^k(f^*(X_p))$, M^k yüzeyinin $f^*(X_p)$ doğrultusundaki normal eğriliği olsun. O halde

$$k_n^k(f^*(X_p)) = \frac{\mu_1^* x_1^2 + \mu_2^* x_1 x_2 + \mu_3^* x_2^2}{\lambda_1^* x_1^2 + 2\lambda_2^* x_1 x_2 + \lambda_3^* x_2^2} \quad (4.14)$$

dir. Burada

$$x_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle, \quad x_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle$$

$$\mu_1^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_2 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$\mu_2^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_2 \langle \psi_v, \psi_v \rangle + \mu_3 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_4 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$\mu_3^* = \mu_3 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_4 \langle \psi_v, \psi_v \rangle$$

$$\lambda_1^* = \langle \psi_u, \psi_u \rangle, \quad \lambda_2^* = \langle \psi_u, \psi_v \rangle, \quad \lambda_3^* = \langle \psi_v, \psi_v \rangle$$

dir.

İspat: $X_p \in T_p(M)$ olsun. $x_1 = \langle X_p, \phi_u \rangle$ ve $x_2 = \langle X_p, \phi_v \rangle$ olduğundan

$$X_p = x_1 \phi_u + x_2 \phi_v$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
f_*(X_p) &= x_1 f_*(\phi_u) + x_2 f_*(\phi_v) \\
&= x_1 \psi_u + x_2 \psi_v \\
S^k(f_*(X_p)) &= x_1 S^k(f_*(\phi_u)) + x_2 S^k(f_*(\phi_v)) \\
&= (\mu_1 x_1 + \mu_3 x_2) \psi_u + (\mu_2 x_1 + \mu_4 x_2) \psi_v
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|f_*(X_p)\|^2 &= x_1^2 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + 2x_1 x_2 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + x_2^2 \langle \psi_v, \psi_v \rangle \\
&= \lambda_1^* x_1^2 + 2\lambda_2^* x_1 x_2 + \lambda_3^* x_2^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle S^k(f_*(X_p)), f_*(X_p) \rangle &= (\mu_1 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_2 \langle \psi_u, \psi_v \rangle) x_1^2 + (\mu_3 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_4 \langle \psi_v, \psi_v \rangle) x_2^2 \\
&\quad + (\mu_1 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_2 \langle \psi_v, \psi_v \rangle + \mu_3 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_4 \langle \psi_u, \psi_v \rangle) x_1 x_2 \\
&= \mu_1^* x_1^2 + \mu_2^* x_1 x_2 + \mu_3^* x_2^2
\end{aligned}$$

olup

$$k_n^k(f_*(X_p)) = \frac{\mu_1^* x_1^2 + \mu_2^* x_1 x_2 + \mu_3^* x_2^2}{\lambda_1^* x_1^2 + 2\lambda_2^* x_1 x_2 + \lambda_3^* x_2^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3.2. M^k , bir M yüzeyinin k -kinematik yüzeyi ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ ortonormal baz olsun öyleki ϕ_u ve ϕ_v , M de asli vektör alanlarıdır. k_1 ve k_2 M nin asli eğrilikleri olsun. $X_p \in T_p(M)$ ve $k_n^k(f_*(X_p))$, M^k yüzeyinin $f_*(X_p)$ doğrultusundaki normal eğriliği olsun. Eğer X_p birim vektörü ile ϕ_u arasındaki açığı θ_1 ile ve X_p birim vektörü ile ϕ_v arasındaki açığı θ_2 ile ifade edersek

$$k_n^k(f_*(X_p)) = \frac{\mu_1^* \cos^2 \theta_1 + \mu_2^* \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \mu_3^* \cos^2 \theta_2}{\lambda_1^* \cos^2 \theta_1 + 2\lambda_2^* \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \lambda_3^* \cos^2 \theta_2}$$

olur.

İspat: (4.5) ve (4.6) denklemlerinin (4.14) denkleminde yerine yazarsak

$$k_n^k(f^*(X_p)) = \frac{\mu_1^* \cos^2 \theta_1 + \mu_2^* \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \mu_3^* \cos^2 \theta_2}{\lambda_1^* \cos^2 \theta_1 + 2\lambda_2^* \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \lambda_3^* \cos^2 \theta_2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3.3. M^k , bir M yüzeyinin k -kinematik yüzeyi ve $\{\phi_u, \phi_v\}$ ortonormal baz olsun öyleki ϕ_u ve ϕ_v , M de asli vektör alanlarıdır. k_1 ve k_2 , M nin asli eğrilikleri olsun. O halde

$$D_{f(p)}^k = \{f^*(X_p) \in T_{f(p)}(M^k) \mid c_1^* x_1^2 + 2c_2^* x_1 x_2 + c_3^* x_2^2 = \pm 1\}$$

dır. Burada

$$f^*(X_p) = x_1 \psi_u + x_2 \psi_v$$

$$c_1^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_2 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$c_2^* = \mu_1 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_2 \langle \psi_v, \psi_v \rangle + \mu_3 \langle \psi_u, \psi_u \rangle + \mu_4 \langle \psi_u, \psi_v \rangle$$

$$c_3^* = \mu_3 \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \mu_4 \langle \psi_v, \psi_v \rangle$$

dir.

İspat: $f^*(X_p) \in T_{f(p)}(M^k)$ olsun. O halde

$$D_{f(p)}^k = \{f^*(X_p) \mid \langle S^k(f^*(X_p)), f^*(X_p) \rangle = \pm 1\}$$

olduğundan ispat açıktır.

Sonuç 3.2.3.1. M^k , bir M yüzeyinin k -kinematik yüzeyi olsun. O halde M^k nin $f(p) \in M^k$ noktasındaki Dupin göstergesi

1. $c_2^2 - 4c_1 c_3 < 0$ ise bir elipstir.
2. $c_2^2 - 4c_1 c_3 > 0$ ise bir hiperboldür
3. $c_2^2 - 4c_1 c_3 = 0$ ise bir paraboldür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Hacısalıhoğlu, H. H., (1983a), Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2, Ankara.

Hacısalıhoğlu, H. H., (1983b), Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2, 895 s., Ankara.

Hacısalıhoğlu, H. H., (1993), Diferensiyel Geometrisi, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Cilt I, Ankara.

Hacısalıhoğlu, H. H., (1994), Diferensiyel Geometrisi, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Cilt II, Ankara.

Hacısalıhoğlu, H. H., (2000), Diferensiyel Geometri, Hacısalıhoğlu Yayınları, Cilt 1, Cilt 2.

O'Neill, B., (2006), Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York.

Parker, J., (2009), Quaternionic linear algebra, Durham University.

Ru, M., (1999), Lecture on Differential Geometry Part I., Huston University.

Sabuncuoğlu, A., (2010), Diferensiyel Geometri, Nobel Yayıncılık, Ankara.

Shifrin, T., (2011), Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces. Preliminary Version, Fall, 125 p. University of Georgia, Athens, Georgia, 30602.

Tarakçı, Ö., Hacısalıhoğlu, H. H., (2004), Surfaces At A Constant Distance From The Edge Of Regression On A Surface, Applied Mathematics and Computation, 155, s. 81-93.

Uras, F., (1992), Diferensiyel Geometri Dersleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayın Komisyonu.

Yang, A. T., Freudenstein, F., (1964) , Application of a dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, ASME journal of Applied Mechanics, 86E, Sayı 2, s. 300- 308.