

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GEÇ KALAN ARGÜMENTLİ STURM- LİOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
SPEKTRAL ANALİZİ**

SÜMEYYE GICA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. SEDA ÇALIŞKAN**

İSTANBUL, 2018

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GEÇ KALAN ARGÜMENTLİ STURM- LİOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
SPEKTRAL ANALİZİ**

Sümeyye GICA tarafından hazırlanan tez çalışması 22.03.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Seda ÇALIŞKAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç.Dr. Seda ÇALIŞKAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN

İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Geç kalan argümentli Sturm-Liouville operatörünün spektral analizinin yapıldığı bu tez çalışmasının konuya ilgi duyanlar için iyi bir kaynak olmasını temenni eder çalışmam sırasında bana yol gösteren, kıymetli bilgilerini ve hoşgörüsünü esirgemeyen çok değerli danışmanım Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN'a ve her türlü desteği ile hep yanımda olan çok kıymetli aileme özellikle eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mart, 2018

Sümeyye GICA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	2
1.3 Bulgular.....	3
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER.....	5
BÖLÜM 3	
GEÇ KALAN ARGÜMENTLİ BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZ	
DEĞERLERİNİN ve ÖZ FONKSİYONLARININ ASİMTOTİK İFADELERİ.....	8
3.1 Özdeğerler İçin Asimptotik Formül.....	22
3.2 Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formül.....	23
BÖLÜM 4	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	26
KAYNAKLAR.....	27
ÖZGEÇMİŞ.....	29

GEÇ KALAN ARGÜMENTLİ STURM – LİOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN

SPEKTRAL ANALİZİ

Sümeyye GICA

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Bu çalışmada $[0, \pi]$ aralığında $t = \frac{\pi}{2}$ de süreksiz bir çözüm fonksiyonuna sahip olan

$$y''(t) + p(t)\lambda y(t) + \mu(t)y(t - \Delta(t)) = 0$$

denklemini ile

$$y(0) \cos \alpha + \frac{y'(0)}{p} \sin \alpha = 0$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$$

sınır koşulları ve

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_1 y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_2 y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0$$

geçiş koşulları ile oluşturulan geç kalan argümanlı Sturm-Liouville sınır değer probleminin spektral analizi incelenmiştir. Burada

$$p(t) = \begin{cases} a^2 & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

olan sürekli reel değerli bir fonksiyon $\mu(t)$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında

$\mu\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \mu(t)$ sonlu limitine sahip reel değerli bir fonksiyon, $\Delta(t) \geq 0$ da

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında $\Delta\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta(t)$ sonlu limitine sahip reel değerli bir fonksiyon ve

$$t - \Delta(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Ayrıca λ bir spektral parametre, $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2 \neq 0$ keyfi reel sayılardır.

Anahtar kelimeler: Özdeğer, özfonksiyon, gecikmeli diferansiyel denklem.

**SPECTRAL ANALYSIS OF STURM-LIOUVILLE BOUNDARY VALUE PROBLEM
WITH RETARTED ARGUMENT**

Sümeyye GICA

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser : Assoc. Prof. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

In this study , we examined the spectral analysis of Sturm-Liouville problem with retarded argument formed by

$$y''(t) + p(t)\lambda y(t) + \mu(t)y(t - \Delta(t))$$

differential expression in $[0,\pi]$ which has a discontinuous solution at $t = \frac{\pi}{2}$, with boundary conditions

$$y(0) \cos \alpha + \frac{y'(0)}{p} \sin \alpha = 0$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$$

and

$$y\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta_1 y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta_2 y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0$$

transmission conditions. Here

$$p(t)=\begin{cases} a^2 & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

is a continuous real valued function, $\mu(t)$ is continuous in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

and has a finite limit $\mu\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right)=\lim _{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \mu(t)$, the real-valued function $\Delta(t) \geq 0$ is

continuous in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ and has a finite limit $\Delta\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right)=\lim _{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta(t)$

$$t-\Delta(t)=\begin{cases} 0 & t \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} & t \in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

In addition, λ is a real eigenparameter and $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2 \neq 0$ are arbitrary real numbers.

Keywords: Eigenvalue, eigenfunction, delayed differential equation.

1.1 Literatür Özeti

18.yy'da Euler probleminin çözümleriyle ilgili olarak geç kalan argümentli diferansiyel denklemler ortaya çıkmıştır. Ancak yakın zamanlara kadar geç kalan argümentli diferansiyel denklemlerin genel teorisinin temelleri yoktu. İlk olarak A.D. Myskis [12] çalışmasıyla ele alınmıştır.

2. mertebeden sürekli gecikmeli diferansiyel denklemler için Sturm-Liouville sınır değer problemleri Myskis, EL'SGOL'C [13], Norkin [6],[8], Nersesjan [14],[15], Mamedov, Kerimov [4] tarafından incelenmiştir.

2. mertebeden süreksiz gecikmeli diferansiyel denklemler için Sturm-Liouville sınır değer problemi Bayramov ve Çalışkan [1] tarafından çalışılmıştır.

2.mertebeden süreksiz sınır koşulunda spektral parametre içeren gecikmeli diferansiyel denklemler için Sturm-Liouville sınır değer problemi Bayramov ve ark. [7],[9] tarafından çalışılmıştır.

Çalışmamızda Norkin'in [8] çalışmasından farklı olarak Sturm-Liouville probleminin çözümü olan fonksiyonu süreksiz olarak göz önüne aldık.

Gecikmeli diferansiyel denklem problemleri kontrol mühendisliğinde çok sık kullanılmaktadır. Feedback kontrol içeren bütün sistemlerde genellikle zaman gecikmesi vardır. Bu gecikme alınan bilgi ile o bilginin uygulamaya konulması arasında geçen sonlu bir zaman farkından kaynaklanmaktadır.

Ayrıca geç kalan argümentli diferansiyel denklemler trafik akış problemlerinde de çok sık karşımıza çıkmaktadır. Trafikteki tıkanıklık toplumumuz için önemli bir konudur. Bu problemin başında trafik ışıklarının ya da uyarı levhalarının yerleştirileceği yerler, yeni bir otoyol yapılırken kaç şeritli olması gerektiği ve alternatif taşımacılık geliştirmek için faydalı fikirler üretmektir. Yavaş seyreden trafikte her araç önündeki aracı oldukça yakın takip eder. Bu yüzden araçların hızlanması ve yavaşlamasında düzensizlikler meydana gelir. Bu düzensizlik aslında yolculuk süresince hızın korunması, yavaşlama ve hızlanmada yaşanan düzensizliktir. Bu yaşanan düzensizlikler sonucu günlük hayatta birçok trafik kazası yaşanmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

$[0, \pi]$ aralığında $t = \frac{\pi}{2}$ de bir süreksizliği olan y fonksiyonu ve

$$y''(t) + p(t)\lambda y(t) + \mu(t)y(t - \Delta(t)) = 0 \quad (1.1)$$

denklemini ile

$$y(0) \cos \alpha + \frac{y'(0)}{p} \sin \alpha = 0 \quad (1.2)$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0 \quad (1.3)$$

sınır koşulları ve

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_1 y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0 \quad (1.4)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_2 y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0 \quad (1.5)$$

geçiş koşulları ile oluşturulan sınır değer probleminin öz değer ve öz fonksiyonları incelenerek asimtotik formülleri bulunacaktır. Bu asimtotikler uygun olarak klasik Sturm Liouville probleminin asimtotikleriyle çakışmıştır. Ek şartlar dahilinde daha kesin asimtotik formüller bulunmuştur. Öz değer ve öz fonksiyonların bulunması; ısı probleminin çözümünde, kuantum mekaniği problemlerinde, bir ucu sabit tutulmuş diğer ucu serbest bırakılmış L uzunluğundaki çubuğa F kuvveti etki ettirildiğinde çubuktaki eğilmenin belirlenmesi gibi problemlerde karşımıza çıkar. Dolayısıyla ilk öz değerlerin bulunması oldukça önemlidir. Öz değerlerin hesaplanmasında bir çok yöntem vardır;

1. Düzenli izi hesaplamak, Kurant in mini-max yöntemi

2. Diferansiyel ifadeden integral denkleme geçip, sonra sürekli problem için sadece sınır, süreksiz problem için de sınır ve geçiş koşullarını kullanarak öz değer ve öz fonksiyonlar için asimtotik formüller bulmak v.s.

Biz bu çalışmada değişkenimize bir gecikme ilave edip, ikinci yöntemi kullanarak süreksiz bir problemi ele aldık ve öz değer ve öz fonksiyonlarının asimtotik davranışlarını inceledik.

Bir problem adi diferansiyel denklemlerle ifade edildiğinde bağımsız değişken zaman olarak alınır ve bu sadece içinde bulunduğumuz zamanı gösterir. Geçmişte olan değişim miktarını göstermez. Sonuçların zamana bağlı olarak geneli ifade etmesi için yani gerçeğe daha yakın olması için problem oluşturulurken tüm durumlar (gecikme gibi) göz önünde bulundurulmalı ve hesaplamaya katılmalıdır.

Ayrıca öz değer ve öz fonksiyonlar için elde edilecek asimtotik formüller yardımıyla öz değerlerin dağılımının ve öz fonksiyonların salınımının nasıl olduğu belirlenebilecektir.

Böylece asimtotik formüller ile fiziksel problemlerin çözümüne katkı sağlanacaktır.

1.3 Bulgular

Tez çalışmasının temel ayrıntıları şu şekildedir:

$\omega_1(t, \lambda)$, göz önüne aldığımız (1.1) denkleminin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki çözümü olsun ve

$$\omega_1(0, \lambda) = \frac{\sin \alpha}{a} \quad \omega_1'(0, \lambda) = -a \cos \alpha \quad (1.6)$$

başlangıç koşullarını sağlasın. (1.6) koşulları ile $\omega_1(t, \lambda)$ (1.1) denkleminin tek bir çözümü olarak tanımlanır.(Norkin 1972) [8]

(1.1) denkleminin $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığındaki, başlangıç ve geçiş koşullarını sağlayan $\omega_2(t, \lambda)$ çözümünü de $\omega_1(t, \lambda)$ çözümü yardımıyla aşağıdaki gibi tanımladık :

$$\omega_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \delta_1^{-1} \omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) , \quad \omega_2'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \delta_2^{-1} \omega_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \quad (1.7)$$

$\omega_2(t, \lambda)$ da (1.1) denkleminin $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında tek bir çözümünü tanımlar.

Sonuç olarak, (1.1) denkleminin (1.2),(1.4) ve (1.5) sınır koşullarını sağlayan $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığındaki çözümünü

$$\omega(t, \lambda) = \begin{cases} \omega_1(t, \lambda) & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \omega_2(t, \lambda) & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

ile ifade ettik. Sonrasında da bu problemin spektral analizinde λ öz değerlerinin ve bu öz değerlere karşılık gelen $\omega(t, \lambda)$ öz fonksiyonlarının asimtotik davranışlarını bulduk.

Bu bölümde problemimizi ifade etmek için gerekli bazı ön bilgilere yer verilmiştir.

Öz Değer ve Öz Vektör

Bir K cismi üzerinde bir $n - kare$ matris A olsun. Eğer $A\vartheta = \lambda\vartheta$ (2.1) olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\vartheta \in K^n$ (kolon) vektörü varsa $\lambda \in K$ skaleri bir özdeğer olarak adlandırılır. (2.1)'yi sağlayan her vektöre A nın λ özdeğerine ait öz vektörü denir.

(1.1) - (1.5) Sturm Liouville problemini göz önüne alalım. Bu operatörün tersi L^{-1} integral operatörüdür ve çekirdeğine Green fonksiyonu denir. λ_n ler bu problemin öz değerleri , $G(x, y)$ de Green fonksiyonu ise açıktır ki,

$$\sum \lambda_n^{-1} = \int_0^{\pi} G(x, y) dx$$

$$\sum \lambda_n^{-2} = \iint_0^{\pi} G(x, y) G(y, x) dx dy \quad (2.2)$$

$$\sum \lambda_n^{-3} = \iiint_0^{\pi} G(x, y) G(y, z) G(z, x) dx dy dz$$

...

dir. n in büyük değerlerinde öz değerleri yaklaşık olarak hesap etmekle (2.2) den yararlanarak ilk öz değerler bulunabilir. Ters operatörün bulunması kolay değildir. Açık şekilde yazılamaz. Yani diferansiyel denklemin çözümlerini bilmek gerekir. Bu ise ancak bazı basit hallerde mümkündür.

Şimdi öz değerlerin nasıl hesaplanacağından bahsedelim. Bunun için birçok yöntem vardır. Bunlardan biri diferansiyel ifadeden integral denkleme geçip, sonra sınır koşullarını kullanarak öz değer ve öz fonksiyonlar için asimtotik formüller bulmaktır. Bu asimtotik ifadelerde n in yeterince büyük değerlerinde öz değerler yaklaşık olarak belli olur.

KURAMSAL TEMELLER

Bir problem adi diferansiyel denklemlerle ifade edildiğinde bağımsız değişken zaman olarak alınır ve bu sadece içinde bulunduğumuz zamanı gösterir. Geçmişte olan değişim miktarını göstermez. Sonuçların zamana bağlı olarak geneli ifade etmesi için yani gerçeğe daha yakın olması için problem oluşturulurken tüm durumlar (gecikme gibi) göz önünde bulundurulmalı ve hesaplamaya katılmalıdır.

Ayrıca öz değer ve öz fonksiyonlar için elde edilecek asimtotik formüller yardımıyla öz değerlerin dağılımının ve öz fonksiyonların salınımının nasıl olduğu belirlenebilecektir.

Böylece asimtotik formüller ile fiziksel problemlerin çözümüne katkı sağlanacaktır.

İkinci mertebeden sapan argümentli diferansiyel denklemler genel olarak

$$F\left(t, y(t), \dots, y^{(m_0)}(t), y(t - \Delta_1(t)), \dots, y^{(m_1)}(t - \Delta_1(t)), \dots, y(t - \Delta_n(t)), \dots, y^{(m_n)}(t - \Delta_n(t))\right) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilirler. $\Delta_i(t) \geq 0$ ($i=1,2,\dots,n$) sürekli fonksiyonu denklemdaki sapmayı gösterir. $\max_{0 \leq i \leq n} m_i = 2$ dir.

$y^{(m_i)}(t - \Delta_i(t))$, $t - \Delta_i(t)$ noktasındaki m_i ' nci türevi gösterir.

Bir başlangıç noktası seçildiğinde her sapma bu noktayı içeren bir başlangıç kümesi tanımlar.

Başlangıç kümesi üzerinde $r = \max_{0 \leq i \leq n} m_i$ olmak üzere r kez türetilen bir $\varphi(t)$

başlangıç fonksiyonu seçelim. A başlangıç noktası olmak üzere $y_A^{(j)} = \varphi^{(j)}(A)$ ($j=0,1,\dots,r$) olsun. $r = 0$ olduğunda $\varphi^{(0)}(A) = y_A^{(0)}$ alalım. Eğer başlangıç noktası, başlangıç kümesinin izole edilmiş bir noktası ise $y_A^{(0)}$ ve $y_A^{(1)}$ keyfi olarak seçilebilir.

$B \leq \infty$ olmak üzere $[A, B)$ aralığında (2.3) denklemi ve

$$y(A) = y_A^{(0)}, y'(A) = y_A^{(1)}$$

$$y^{(j)}(t - \Delta_i(t)) \equiv \varphi^{(j)}(t - \Delta_i(t)) \quad t - \Delta_i(t) < A$$

koşulları ile oluşturulan problemi göz önüne alalım.

$\lambda = m_0 - r$ ise bu problem

$\lambda > 0$ için Gecikmeli,

$\lambda = 0$ için Nötral

$\lambda < 0$ için İleri tipli denklem adını alır.

GEÇ KALAN ARGÜMENTLİ BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZ DEĞERLERİNİN ve ÖZ FONKSİYONLARININ ASİMTOTİK İFADELERİ

Giriş

Geç kalan argümanlı diferansiyel denklemler ; roket motorlarında, yanma proseslerinin öğrenilmesi problemlerinde, bazı ekonomik problemlerde, biyofizik problemlerinde ve başka bazı alanlardaki problemlerde karşımıza çıkar.

Bu çalışmada $[0, \pi]$ aralığında $t = \frac{\pi}{2}$ de bir süreksizliği olan y fonksiyonu ve

$$y''(t) + p(t)\lambda y(t) + \mu(t)y(t - \Delta(t)) = 0 \quad (3.1)$$

denklemini ile

$$y(0) \cos \alpha + \frac{y'(0)}{p} \sin \alpha = 0 \quad (3.2)$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0 \quad (3.3)$$

sınır koşulları ve

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_1 y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0 \quad (3.4)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_2 y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0 \quad (3.5)$$

geçiş koşulları ile oluşturulan Sturm-Liouville tipli geç kalan argümanlı sınır değer probleminin öz değer ve öz fonksiyonları incelenmiştir. Burada

$$p(t) = \begin{cases} a^2 & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

olan sürekli reel değerli bir fonksiyon $\mu(t)$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında

$\mu\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \mu(t)$ sonlu limitine sahip reel değerli bir fonksiyon, $\Delta(t) \geq 0$ da

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında $\Delta\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta(t)$ sonlu limitine sahip reel değerli bir fonksiyon ve

$$t - \Delta(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Ayrıca λ bir spektral parametre, $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2 \neq 0$ keyfi reel sayılardır.

Problemimiz göz önüne aldığımız $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında $t = \frac{\pi}{2}$ noktasında süreksizliğe sahip olduğundan çözümünü

$$\omega(t, \lambda) = \begin{cases} \omega_1(t, \lambda) & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \omega_2(t, \lambda) & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

şeklinde ifade ettik ki burada

$\omega_1(t, \lambda)$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında

$$\omega_1(0, \lambda) = \frac{\sin \alpha}{a} \quad \omega_1'(0, \lambda) = -a \cos \alpha \quad (3.6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan (3.1) denkleminin tek bir çözümü ve $\omega_2(t, \lambda)$ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de aralığında

$$\omega_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \delta_1^{-1} \omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \quad , \quad \omega_2'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \delta_2^{-1} \omega_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \quad (3.7)$$

başlangıç koşullarını sağlayan (3.1) denkleminin tek bir çözümüdür. (Norkin 1972). [7]

Daha sonra da λ özdeğerinin ve bunlara karşılık gelen $\omega(t, \lambda)$ öz fonksiyonlarının asimtotik davranışları inceledik.

Lemma 3.1: $\lambda > 0$ olmak üzere $\omega(t, \lambda)$, (1.1) denkleminin çözümü olsun. O halde

$$\begin{aligned} \omega_1(t, \lambda) = & \sin \alpha \frac{\cos sat}{a} \\ & - \frac{\cos \alpha}{s} \sin sat - \frac{1}{sa} \int_0^t \mu(\tau) \sin sa(t - \tau) \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \omega_2(t, \lambda) = & \frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\delta_1} \cos s\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{s\delta_2} \sin s\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ & - \frac{1}{s} \int_{\frac{\pi}{2}}^t \mu(\tau) \sin s(t - \tau) \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \end{aligned} \quad (3.9)$$

dir.

İspat: (3.8) ve (3.9) da sırasıyla $\mu(\tau) \omega_1(\tau - \Delta(\tau)) d\tau$ yerine $-\omega_1''(\tau, \lambda) - p\lambda \omega_1(\tau, \lambda)$ ve $\mu(\tau) \omega_2(\tau - \Delta(\tau)) d\tau$ yerine $-\omega_2''(\tau, \lambda) - \lambda \omega_2(\tau, \lambda)$ yazarak iki kez kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} \omega_1'(t, \lambda) = & -s \sin \alpha \sin sat \\ & - a \cos \alpha \cos sat - \int_0^t \mu(\tau) \cos sa(t - \tau) \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \\ \omega_1(0, \lambda) = & \frac{\sin \alpha}{a} \quad \omega_1'(0, \lambda) = -a \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \mu(\tau) \sin sa(t - \tau) \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \\
&= \int_0^t \sin sa(t - \tau) [-\omega_1''(\tau, \lambda) - p\lambda \omega_1(\tau, \lambda)] d\tau \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$= - \int_0^t \sin sa(t - \tau) \omega_1''(\tau, \lambda) d\tau - \int_0^t \sin sa(t - \tau) p\lambda \omega_1(\tau, \lambda) d\tau$$

$$\int_0^t \sin a(t - \tau) \omega_1''(\tau, \lambda) d\tau = a \cos a \sin sat + sa \int_0^t \omega_1'(\tau, \lambda) \cos sa(t - \tau) d\tau \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \omega_1'(\tau, \lambda) \cos sa(t - \tau) d\tau \\
&= \omega_1(t, \lambda) - \cos sat \frac{\sin a}{a} - sa \int_0^t \omega_1(\tau, \lambda) \sin sa(t - \tau) d\tau \tag{3.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri (3.10) da yerine yazılmak suretiyle (3.8) elde edilir. Benzer şekilde (3.9) da elde edilir.

Teorem 3.1: (1.1)-(1.5) problemi sadece basit özdeğerlere sahiptir.

İspat: λ_1 , problemin bir özdeğeri ve bu özdeğere karşı gelen özfonksiyon ise

$$x(t, \lambda) = \begin{cases} x_1(t, \lambda_1), & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ x_2(t, \lambda_1), & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

olsun. O halde (1.2) ve (3.6) dan

$$W[x_1(0, \lambda_1), \omega_1(0, \lambda_1)] = \begin{vmatrix} x_1(0, \lambda_1) & \frac{\sin a}{a} \\ x_1'(0, \lambda_1) & -a \cos a \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. Böylece Wronskian sifıra eşit olduğundan $x_1(t, \lambda_1)$ ve $\omega_1(t, \lambda_1)$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında lineer bağımlıdır (Norkin 1972). [8]

Benzer şekilde $x_2(t, \lambda_1)$ ve $\omega_2(t, \lambda_1)$ nin de $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında lineer bağımlı olduğu görülür.

Bu yüzden bazı $K_1 \neq 0$ ve $K_2 \neq 0$ için

$$x_i(t, \lambda_1) = K_i \omega_i(t, \lambda_1) \quad (i = 1, 2) \quad (3.13)$$

elde edilir.

$K_1 = K_2$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım ki $K_1 \neq K_2$. (3.4) ve (3.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{2} - 0, \lambda_1\right) - \delta_1 x\left(\frac{\pi}{2} + 0, \lambda_1\right) &= x_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) - \delta_1 x_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) \\ &= K_1 \omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) - \delta_1 K_2 \omega_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) \\ &= K_1 \delta_1 \omega_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) - \delta_1 K_2 \omega_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) = \delta_1 (K_1 - K_2) \omega_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$\delta_1 (K_1 - K_2) \neq 0$ olduğundan

$$\omega_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Benzer işlemler ile (3.5) den

$$\omega_2'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir. $\omega_2(t, \lambda_1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında (3.1) denkleminin (3.14) ve (3.15) başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümü olduğundan $\omega_2(t, \lambda_1) = 0$ bulunur. Ayrıca,

$$\omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) = \omega_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_1\right) = 0$$

eşitliği (3.2), (3.14) ve (3.15) kullanılarak elde edilir.

Elde edilen sonuçlara göre de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $\omega_1(t, \lambda) = 0$ olarak bulunur.

O halde $\omega(t, \lambda_1)$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında özdeş olarak sıfırdır. Dolayısıyla çelişki oluşmuştur.

Böylece ispat tamamlanır. ■

$\omega(t, \lambda)$, (3.1) denkleminin (3.2), (3.4) ve (3.5) koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümdür. $\omega(t, \lambda)$ ı (3.3) sınır koşulunda yerine yazarsak elde edilen

$$F(\lambda) = \omega_2(\pi, \lambda) \cos \beta + \omega_2'(\pi, \lambda) \sin \beta = 0 \quad (3.16)$$

denklemine karakteristik denklem adı verilir.

Teorem 3.1 e göre karakteristik denklemin kökleri ile gözönüne aldığımız sınır değer probleminin kökleri aynıdır.

Lemma 3.2:

$$\mu_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\mu(\tau)| d\tau \quad ve \quad \mu_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^t |\mu(\tau)| d\tau$$

olmak üzere,

(1) $\lambda \geq \frac{4\mu_1^2}{a^2}$ olsun. O halde (3.3) denkleminin $\omega_1(t, \lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur :

$$|\omega_1(t, \lambda)| \leq \frac{1}{\mu_1 a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.17)$$

(2) $\lambda \geq \max\{4\mu_2^2, 4\mu_1^2\}$ olsun. O halde (3.4) denkleminin $\omega_2(t, \lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur :

$$|\omega_2(t, \lambda)| \leq \frac{4}{\mu_1 \delta_1 a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (3.18)$$

İspat: İspatı [7] çalışmasına benzer şekilde yapabiliriz. $B_{1\lambda} = \max_{[0, \frac{\pi}{2})} |w_1(t, \lambda)|$ olsun. (3.3)

den her $\lambda > 0$ için

$$B_{1\lambda} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{s^2}} + \frac{1}{sa} B_{1\lambda} \mu_1$$

eşitsizliğin doğru olduğu görülür.

Eğer $s \geq \frac{2\mu_1}{a}$ ise o halde

$$\left(1 - \frac{\mu_1}{sa}\right) B_{1\lambda} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{s^2}}$$

$$B_{1\lambda} \leq 2 \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{4\mu_1^2}{a^2}}} \leq 2 \sqrt{\frac{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha}{4\mu_1^2 a^2}}$$

Buradan da

$$|\omega_1(t, \lambda)| \leq \frac{1}{\mu_1 a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha}$$

elde edilir.

(3.3) ü t ye göre türetirsek

$$\omega_1'(t, \lambda) = -s \sin \alpha \sin sat - a \cos \alpha \cos sat - \int_0^t \mu(\tau) \cos sa(t - \tau) \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \quad (3.19)$$

elde edilir.

$$|-s \sin \alpha \sin sat - a \cos \alpha \cos sat| \leq \sqrt{s^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha}$$

olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $\omega_1'(t, \lambda)$ nin integral kısmını sınırlandıralım :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \mu(\tau) \cos sa(t - \tau) \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \right| &\leq \int_0^t |\mu(\tau)| |\cos sa(t - \tau)| |\omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(3.17) ve (3.19) dan $s \geq \frac{2\mu_1}{a}$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur :

$$|\omega_1'(t, \lambda)| \leq \sqrt{s^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha}$$

Bundan dolayı $s \geq \frac{2\mu_1}{a}$ ve $t \in [0, \frac{\pi}{2})$ için

$$\begin{aligned} |\omega_1'(t, \lambda)| &\leq \frac{1}{a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2}{a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} \leq \frac{s}{\mu_1} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Buradan da

$$\frac{|\omega'_1(t, \lambda)|}{s} \leq \frac{1}{\mu_1} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} \quad (3.20)$$

elde edilir.

$B_{2\lambda} = \max_{(\frac{\pi}{2}, \pi]} |\omega_2(t, \lambda)|$ olsun. (3.9) ve (3.20) den $s \geq \max\{2\mu_2, 2\mu_1\}$ için

$$|\omega_2(t, \lambda)| \leq B_{2\lambda} \leq \frac{1}{\delta_1 \mu_1 a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{\delta_2 \mu_1} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{s} B_{2\lambda} \mu_2$$

$$\left(1 - \frac{\mu_2}{s}\right) B_{2\lambda} \leq \frac{2}{\delta_1 \mu_1 a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha}$$

$$|\omega_2(t, \lambda)| \leq \frac{4}{\mu_1 \delta_1 a} \sqrt{4\mu_1^2 \sin^2 \alpha + a^4 \cos^2 \alpha}$$

elde edilir. Böylece $\lambda \geq \max\{4\mu_2^2, 4\mu_1^2\}$ için ispat tamamlanmıştır. ■

Teorem 3.2 : (1.1) – (1.5) problemi sonsuz sayıda pozitif özdeğerlere sahiptir.

İspat:

$$\omega_2(\pi, \lambda) = \frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\delta_1} \cos s \frac{\pi}{2} + \frac{\omega'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{s\delta_2} \sin s \frac{\pi}{2} - \frac{1}{s} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mu(\tau) \sin s(t - \tau) \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau$$

ve

$$\omega'_2(\pi, \lambda) = -s \frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\delta_1} \sin s \frac{\pi}{2} + \frac{\omega'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\delta_2} \cos s \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mu(\tau) \cos s(t - \tau) \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau$$

şeklindedir. Bu ifadeleri sınır koşullarından ikincisinde

$$F(\lambda) = \omega_2(\pi, \lambda) \cos \beta + \omega'_2(\pi, \lambda) \sin \beta = 0$$

yerine yazarsak:

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \left\{ \frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\delta_1} \cos s \frac{\pi}{2} + \frac{\omega'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{s\delta_2} \sin s \frac{\pi}{2} - \frac{1}{s} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mu(\tau) \sin s(t - \tau) \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \right\} \cos \beta \\ & + \left\{ -s \frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\delta_1} \sin s \frac{\pi}{2} + \frac{\omega'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{\delta_2} \cos s \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mu(\tau) \cos s(t - \tau) \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \right\} \sin \beta = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir.

(3.21) düzenlenirse [1] çalışmasında olduğu gibi burada da olası dört durum vardır :

λ nın yeterince büyük değerlerini göz önüne alalım. Eğer (3.21) i s ile böldüğümüzde $\delta_2 = a\delta_1$ eşitliğini kullanmak suretiyle (3.21) düzenlenirse burada olası dört durum vardır:

$$1) \sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0 \quad -s \sin s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) + O(1) = 0 \quad (3.22)$$

$$2) \sin \alpha \neq 0, \sin \beta = 0 \quad -s \cos s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) + O(1) = 0 \quad (3.23)$$

$$3) \sin \alpha = 0, \sin \beta \neq 0 \quad -s \cos s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) + O(1) = 0 \quad (3.24)$$

$$4) \sin \alpha = 0, \sin \beta = 0 \quad -s \sin s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) + O(1) = 0 \quad (3.25)$$

Böylece problemin sonsuz sayıda çözüme sahip olduğu bulunmuş olur. ■

Şimdi (1.1) –(1.5) probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarının asimtotik formüllerini bulmaya çalışacağız. Bunun için s'in yeterince büyük olduğunu varsayalım.

$$\omega_1(t, \lambda) \text{ ve Lemma 3.2 (1) den } \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ aralığında} \quad \omega_1(t, \lambda) = O(1) \quad (3.26)$$

$$\omega_2(t, \lambda) \text{ ve Lemma 3.2 (2) den } \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right] \text{ aralığında} \quad \omega_2(t, \lambda) = O(1) \quad (3.27)$$

elde edilir.

$$|\lambda| < \infty \text{ ve } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ için } \omega'_{1s}(t, \lambda); |\lambda| < \infty \text{ ve } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \text{ için } \omega'_{2s}(t, \lambda)$$

türevlerinin varlığı ve sürekliliği Norkin (1972) tarafından gösterilmiştir.

$$\omega'_{1s}(t, \lambda) = O(1) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.28)$$

ve

$$\omega'_{2s}(t, \lambda) = O(1) \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (3.29)$$

dir.

Teorem 3.3 $n \in N$ olsun. Yeterince büyük her n için 1) durumunda her bir $\left(\frac{2n}{a+1}\right)^2$ nin civarında (1.1) – (1.5) probleminin tam olarak bir öz değeri vardır.

İspat: (3.22) denkleminde $O(1)$ ile gösterdiğimiz ifadeyi gözönüne alırsak;

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha \cos \beta}{a\delta_1} \cos s\pi \left(\frac{a+1}{2}\right) - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{s\delta_1} \sin s\pi \left(\frac{a+1}{2}\right) - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\delta_1} \cos s\pi \left(\frac{a+1}{2}\right) \\ & - \frac{\cos \beta}{a\delta_1 s} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu(\tau) \cos s \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} - a\tau\right) \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \\ & - \frac{\sin \beta}{a\delta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu(\tau) \cos s \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} - a\tau\right) \omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \\ & - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mu(\tau) \left[\frac{\cos \beta}{s} \sin s(\pi - \tau) + \sin \beta \cos s(\pi - \tau) \right] \omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau \end{aligned}$$

şeklinde dir.

(3.26) – (3.29) formüllerine göre s 'in büyük değerlerinde bu ifade sonlu türe ve sahiptir.

(3.22) denkleminin kökleri s 'in büyük değerlerinde tam sayıların yakın civarında yer alır.

Yeterince büyük n için (3.22) denkleminin $\frac{2n}{a+1}$ civarında sadece bir kökü vardır.

$K(s) = -s \sin s\pi \left(\frac{a+1}{2}\right) + O(1)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. O halde

$$K'(s) = -\sin s\pi \left(\frac{a+1}{2}\right) - s\pi \left(\frac{a+1}{2}\right) \cos s\pi \left(\frac{a+1}{2}\right) + O(1)$$

türevi $\frac{2n}{a+1}$ komşuluğunda yeterince büyük n için mevcut olduğundan Rolle teoremi'ne göre

kökler tamsayıların yakın civarında yer alır.

n 'in yeterince büyük değerleri için problemimizin öz değerini $\left(\frac{2n}{a+1}\right)^2$ civarında $\lambda_n = s_n^2$

olarak gösterelim. $s_n = \frac{2n}{a+1} + \delta_n$ olarak tanımlayalım. O halde (3.22) den $\delta_n = O(1/n)$

elde edilir. Sonuç olarak

$$s_n = \frac{2n}{a+1} + O(1/n) \quad (3.30)$$

bulunur. (3.30) formülü problemimizin özdeğerinin asimptotik ifadesidir. Bu formül problemin öz fonksiyonunun asimptotik ifadesini bulmamıza yardım eder. (3.8), (3.19) ve (3.26) dan

$$\omega_1(t, \lambda) = \frac{\sin \alpha \cos sat}{a} + O(1/s) \quad (3.31)$$

$$\omega'_1(t, \lambda) = -s \sin \alpha \sin sat + O(1) \quad (3.32)$$

bulunur. (3.9), (3.27), (3.31), (3.32) ve $\delta_2 = a\delta_1$ eşitliğinden

$$\omega_2(t, \lambda) = \frac{\sin \alpha}{\delta_1 a} \cos s \left(\frac{\pi}{2} (a-1) + t \right) + O(1/s) \quad (3.33)$$

şeklinde belirlenir. (3.30) u (3.31) ve (3.33) de yerine yazarsak

$$U_{1n}(t) = \omega_1(t, \lambda_n) = \frac{\sin \alpha}{a} \cos a \left(\frac{2n}{a+1} \right) t + O(1/n)$$

$$U_{2n}(t) = \omega_2(t, \lambda_n) = \frac{\sin \alpha}{\delta_1 a} \cos \left(\frac{\pi(a-1)n + 2nt}{a+1} \right) + O(1/n)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı $U_n(t)$ öz fonksiyonları aşağıdaki asimptotik ifadeye sahiptir:

$$U_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{a} \cos a \left(\frac{2n}{a+1} \right) t + O(1/n) & t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{\sin \alpha}{\delta_1 a} \cos \left(\frac{\pi(a-1)n+2nt}{a+1} \right) + O(1/n) & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right]. \end{cases}$$

Özdeğer ve özfonksiyonlar için bulunan bu formüller uygun olarak klasik Sturm-Liouville probleminin asimptotikleriyle çakıştırlar. Ek şartlar dahilinde daha kesin asimptotik formüller elde edilebilir ki bu formüller gecikmeye bağlı olacaklardır.

i) $\left[0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ aralığında $\mu'(t)$ ve $\Delta''(t)$ türevleri sınırlı, var ve de sırasıyla

$$\mu' \left(\frac{\pi}{2} \pm 0 \right) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \mu'(t) ,$$

$$\Delta'' \left(\frac{\pi}{2} \pm 0 \right) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta''(t)$$

sonlu limitlerine sahip ,

ii) $\left[0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ de $\Delta'(t) \leq 1$, $\Delta(0) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \Delta(t) = 0$

koşullarını gözönüne alalım.

Bu durumda $\left[0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ aralığında

$$\omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) = \sin \alpha \frac{\cos s a (\tau - \Delta(\tau))}{a} + O(1/s)$$

$$\omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) = \sin \alpha \frac{\cos s \left(\frac{\pi}{2} (a-1) + \tau - \Delta(\tau) \right)}{a \delta_1} + O(1/s)$$

elde edilir.

Bu değerleri (3.21) de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin \alpha \cos \beta}{a\delta_1} \cos s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{s\delta_1} \sin s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) - \frac{s \sin \alpha \sin \beta}{a\delta_1} \sin s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) \\
& - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\delta_1} \cos s\pi \left(\frac{a+1}{2} \right) \\
& - \frac{\cos \beta}{sa\delta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu(\tau) \sin s \left(\frac{(a+1)\pi}{2} - a\tau \right) \left(\frac{\sin \alpha \cos sa(\tau - \Delta(\tau))}{a} \right) d\tau \\
& - \frac{\sin \beta}{a\delta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu(\tau) \cos s \left(\frac{(a+1)\pi}{2} - a\tau \right) \left(\frac{\sin \alpha \cos sa(\tau - \Delta(\tau))}{a} \right) d\tau \\
& - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{sa\delta_1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mu(\tau) \sin s(\pi - \tau) \cos s \left(\frac{\pi}{2}(a-1) + \tau - \Delta(\tau) \right) d\tau \\
& - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{a\delta_1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mu(\tau) \cos s(\pi - \tau) \cos s \left(\frac{\pi}{2}(a-1) + \tau - \Delta(\tau) \right) d\tau + O(1/s)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left. \begin{aligned}
& \int_0^t \mu(\tau) \cos s\sqrt{p}(2\tau - \Delta(\tau)) d\tau = O(1/s) \\
& \int_0^t \mu(\tau) \sin s\sqrt{p}(2\tau - \Delta(\tau)) d\tau = O(1/s) \\
& \int_{\frac{\pi}{2}}^t \mu(\tau) \cos s\sqrt{p}(2\tau - \Delta(\tau)) d\tau = O(1/s) \\
& \int_{\frac{\pi}{2}}^t \mu(\tau) \sin s\sqrt{p}(2\tau - \Delta(\tau)) d\tau = O(1/s)
\end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

olduğundan ve $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < s < \infty$ için $A(t, s, \Delta(\tau))$, $B(t, s, \Delta(\tau))$

$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$, $0 < s < \infty$ için $C(t, s, \Delta(\tau))$, $D(t, s, \Delta(\tau))$ sınırlı fonksiyonlar olarak

$$\left. \begin{aligned} A(t, s, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2} \int_0^t \mu(\tau) \cos sa\Delta(\tau) d\tau \\ B(t, s, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2} \int_0^t \mu(\tau) \sin sa\Delta(\tau) d\tau \\ C(t, s, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^t \mu(\tau) \cos s\Delta(\tau) d\tau \\ D(t, s, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^t \mu(\tau) \sin s\Delta(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

şeklinde tanımlanmak suretiyle

$$s_n = \frac{2n}{a+1} + \frac{1}{n\pi} \left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A\left(t, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right)}{a} + C\left(t, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right) \right) + O\left(1/n^2\right) \quad (3.36)$$

olarak öz değerlerin karekökü için bir asimptotik ifade elde edilmiş olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.4: i) ve ii) şartları sağlanıyorsa, problemimizin $\lambda_n = s_n^2$ pozitif öz değerleri $n \rightarrow \infty$ için (3.27) asimptotik gösterimiyle ifade edilir.

$$\omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) = \sin \alpha \frac{\cos sa(\tau - \Delta(\tau))}{a} + O(1/s)$$

eşitliği (3.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \omega_1(t, \lambda) &= \sin \alpha \frac{\cos sat}{a} - \frac{\cos \alpha}{s} \sin sat \\ &\quad - \frac{\sin \alpha}{sa^2} \int_0^t \mu(\tau) \sin sa(t - \tau) \cos sa(\tau - \Delta(\tau)) d\tau + O\left(1/s^2\right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\sin sa(t - \tau) \cos sa(\tau - \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2} [\sin sa(t - \Delta(\tau)) + \sin sa(t - (2\tau - \Delta(\tau)))] \\
&= \frac{1}{2} [\sin sat \cos sa\Delta(\tau) - \cos sat \sin sa\Delta(\tau) + \\
&\quad \sin sat \cos sa(2\tau - \Delta(\tau)) - \cos sat \sin sa(2\tau - \Delta(\tau))]
\end{aligned}$$

eşitliği ile (3.35) ve (3.36) eşitliği (3.37) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
U_{1n}(t) &= \omega_1(t, \lambda_n) \\
&= \frac{\sin \alpha}{a} \left\{ \cos \left(\frac{2nat}{a+1} \right) \left(1 + \frac{a+1}{2na} A \left(t, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau) \right) \right) \right. \\
&\quad - \frac{\sin \left(\frac{2nat}{a+1} \right)}{\frac{2n\pi}{a+1}} \left[\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A \left(t, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau) \right)}{a} \right) at \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(a \cot \alpha + \frac{B \left(t, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau) \right)}{a} \right) \pi \right] \right\} + O(1/n^2) \tag{3.38}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.19) , (3.34) ve (3.35) den

$$\begin{aligned}
\frac{\omega'_1 \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right)}{s} &= -\sin \alpha \sin sa \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{A \left(\frac{\pi}{2}, s, \Delta(\tau) \right)}{sa} \right) \\
&\quad - \frac{\cos sa \frac{\pi}{2}}{s} \left(a \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{a} B \left(\frac{\pi}{2}, s, \Delta(\tau) \right) \right) + O(1/s^2) \tag{3.39}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.36),(3.38) ve (3.39) eşitlikleri (3.9) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{2n}(t) = \omega_2(t, \lambda_n)}{\cos\left(\frac{2n\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{a+1}\right) - \sin\left(\frac{2n\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{a+1}\right)\left(\frac{1}{n\pi}\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A}{a} + C\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)} \left\{ \frac{\sin \alpha}{a} \left[\cos\left(\frac{na\pi}{a+1}\right) \left(1 \right. \right. \right. \\
& + \frac{a+1}{2na} A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right) \left. \left. \left. \right) - \frac{\sin\left(\frac{na\pi}{a+1}\right)}{\frac{2n\pi}{a+1}} \left(\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right)}{a} \right) at \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left(a \cot \alpha + \frac{B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right)}{a} \right) \pi \right) \right] \right\} \\
& + \frac{\sin\left(\frac{2n\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{a+1}\right) + \cos\left(\frac{2n\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{a+1}\right)\left(\frac{1}{n\pi}\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A}{a} + C\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{a\delta_1} \left\{ -\sin \alpha \left(1 \right. \right. \\
& + \frac{A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right)}{\frac{2na}{a+1}} \left(\sin\left(\frac{na\pi}{a+1}\right) + \cos\left(\frac{na\pi}{a+1}\right)\left(\frac{1}{n\pi}\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A}{a} + C\right)\right) a \frac{\pi}{2} \right) \\
& - \frac{\cos\left(\frac{na\pi}{a+1}\right) - \sin\left(\frac{na\pi}{a+1}\right)\left(\frac{1}{n\pi}\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A}{a} + C\right) a \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2n}{a+1}} \left(a \cos \alpha \right. \\
& + \left. \left. \left. \frac{\sin \alpha}{a} B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right) \right) \right\} \\
& - \frac{\sin \alpha}{\frac{2na\delta_1}{a+1}} \left\{ \left[\sin\left(\frac{2n\left(t + \frac{\pi}{2}(a-1)\right)}{a+1}\right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \cos\left(\frac{2n\left(t + \frac{\pi}{2}(a-1)\right)}{a+1}\right)\left(\frac{1}{n\pi}\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A}{a} + C\right)\left(t + \frac{\pi}{2}(a-1)\right)\right) \right] C\left(t, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right) \right. \\
& + \left. \left[-\cos\left(\frac{2n\left(t + \frac{\pi}{2}(a-1)\right)}{a+1}\right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \sin\left(\frac{2n\left(t + \frac{\pi}{2}(a-1)\right)}{a+1}\right)\left(\frac{1}{n\pi}\left(a \cot \alpha - \cot \beta + \frac{A}{a} + C\right)\left(t + \frac{\pi}{2}(a-1)\right)\right) \right] D\left(t, \frac{2n}{a+1}, \Delta(\tau)\right) \right\} \\
& + O\left(1/n^2\right) \tag{3.40}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.5 : i) ve ii) koşulları sağlandığında (3.1)-(3.5) probleminin $U_n(t)$ özfonksiyonlarının $n \rightarrow \infty$ için asimptotik ifadesi

$$U_n(t) = \begin{cases} U_{1n}(t), & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ U_{2n}(t) & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $U_{1n}(t)$, (3.38) ve $U_{2n}(t)$, (3.40) formülleriyle tanımlıdır.



SONUÇ VE ÖNERİLER

$$y''(t) + p(t)\lambda y(t) + \mu(t)y(t - \Delta(t)) = 0$$

denklemini ile

$$y(0) \cos \alpha + \frac{y'(0)}{p} \sin \alpha = 0$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$$

sınır koşulları ve

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_1 y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta_2 y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0$$

geçiş koşulları ile oluşturulan Sturm-Liouville tipli geç kalan argümanlı sınır değer problemi göz önüne alınmış , bu problemin spektral analizi incelenmiş yani özdeğer ve öz fonksiyonlarının asimptotik formülleri bulunmuştur.

Bu çalışmadan yararlanılarak problemin düzenli izi hesaplanacak şekilde yeni bir çalışma göz önüne alınabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Bayramov, A., Çalışkan, S., Uslu, S., (2007). "Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument", Appl. Math. Comput., 191:592-600.
- [2] Bellman, R., Cook, K.L., (1963). Differential-Difference Equations, New York Academic Press, London.
- [3] Demidenko, G.V., Likhoshvai, V.A., (2005). "On Differential Equations with Retarded Argument", Sib. Mat. Zh, 3: 417-430.
- [4] Kerimov, N.B., Mamedov, K., (1999). "On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions", Sib Math. Zh., 2:325-335.
- [5] Mukhtarov, O.S.H., Kadakal, V., Altınışik, N.,(2003). " Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions", Indian J Pure Appl. Math.,34(3): 501-516.
- [6] Norkin, S.B., (1958). "On Boundary Problem of Sturm-Liouville Type For Second Order Differential Equation with Retarded Argument", Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika, 6(7):203-214.
- [7] Sen, E., Bayramov, A.,(2011). "Calculation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition", Mathematical and Computer Modelling, 54:3090-3097.
- [8] Norkin, S.B., (1972). Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument, American Mathematical Society, 285 p, Providence, Rhode Island.
- [9] Bayramov, A.,(1998). "On Asymptotic the Eigenvalues and Eigenfunctions for the

Problem of Sturm-Liouville with the Lag Argument and the Spectral Parameter in the Boundary Condition", Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, Ser. Of Phys. Techn and Math Sciences V. XVIII,3(4): 6-11.

- [10] Demidenko, G.V., Matveeva, I.I.,(2005), "Asymptotic properties of solution of delay differential equations", Vestnik MGV. Ser.: Matematika, Mekhanika, Informatika 5, 3:20-28.
- [11] EL'SGOL'C, L.E.,(1952). "Variational problems with retarded argument", Vestnik Moskov. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Estest. Nauk ,10:57-62.
- [12] MYSKIS,A.D.,(1949). "General theory of differential equations with retarded argument", Uspehi Mat. Nauk, 5 (33): 99-141.
- [13] MYSKIS,A.D., EL'SGOL'C, L.E.,(1967). "Problems in the theory of differential equations with deviating arguments",Uspehi Mat. Nauk , 2(134):21-57.
- [14] NERSESJAN,A.B.,(1959). "Expansion in eigenfunctions of an integro-differential equation with lagging argument",Dokl. Akad. Nauk,129 (1959):511-514.
- [15] NERSESJAN, A.B,(1959). "Eigenfunction expansion of a boundary value problem for certain integro-differential equation with retarded argument", Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Fiz.-Mat. Nauk ,6:37-68.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sümeyye GİCA
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.20.1992 / İstanbul
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ssumeyyetosuncu@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Marmara Üniversitesi	2014
Lise	FM	Kandilli Kız Anadolu Lisesi	2009

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2017-2018	Mavi Umut Eğitim Kurumları	Branş Öğretmeni
2015-2017	İrfan Eğitim Kurumları	Branş Öğretmeni
2014-2015	Beykoz Belediyesi Bilgi Evi	Branş Öğretmen

YAYINLARI

Bildiri

1. GICA,S.,(2017). "Geç Kalan Argümanlı Bir Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin ve Özfonksiyonlarının Asimptotik İfadeleri ", 30. Ulusal Matematik Sempozyumu, 6-9 Eylül 2017, Ankara.

