

**T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MIRAKJAN OPERATÖRLERİ

Cansu ÇOR

Ekim 2017

Matematik Anabilim Dalında Cansu ÇOR tarafından hazırlanan
GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİ adlı Yüksek Lisans
Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı BaŐkanı

Bu tezi okuduđumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine
getirdiđini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Başar YILMAZ

Danışman

Jüri Üyeleri

BaŐkan : Prof. Dr. Gülen BAŐCANBAZ TUNCA

Üye : Prof. Dr. Ali ARAL

Üye (Danışman) : Yrd. Doç. Dr. Başar YILMAZ

20/10/2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek
Lisans derecesini onaylamıŐtır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MIRAKJAN OPERATÖRLERİ

ÇOR, Cansu

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Başar YILMAZ

Ekim 2017, 64 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde bu tez çalışmasında kullanılan bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Klasik Szász operatörü tanımlanarak sahip olduğu bazı özellikler verilmiştir.

Dörüncü bölümde ise Szász-Mirakjan operatörünün daha iyi sonuç veren bir genelleştirilmesi tanımlanmıştır. Tanımlanan bu operatörün bazı şekil koruma özelliklerini ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Yakınsaklık, Korovkin teoremi, Voronovskaya teoremi, Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörü

ABSTRACT

ON THE GENERALIZED SZÁSZ-MIRAKYAN OPERATORS

ÇOR, Cansu

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Ph. D. Thesis

Supervisor:Asst. Prof. Dr. Başar YILMAZ

October 2017, 64 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, some fundamental definitions are explained which used in this thesis. In the third part classic Szász operator has defined and then some of its properties are explained. In the fourth chapter, Szász-Mirakjan operators generalization which gives better results are defined. Finally, it is shown that these operators have some shape preserving properties and convergence properties on weighted spaces.

Key Words: Approximation, Korovkin theorem, Voronovskaya theorem, Generalized Szász-Mirakjan Operators

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Başar YILMAZ 'a, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm Sayın hocam Prof. Dr. Ali ARAL'a ve Kırıkkale Üniversitesi Matematik bölümünün tüm öğretim üyelerine, son olarak bana birçok konuda olduğu gibi tezimi hazırlamam esnasında da yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Özeti	3
1.2. Çalışmanın Amacı	3
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Lineer Pozitif Operatörler Dizisi	4
2.1.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri	5
2.2. Süreklilik Modülü	11
2.3. Ağırlıklı Uzaylar	11
2.4. Bölünmüş Farklar	13
3. SZÁSZ OPERATÖRLERİ	15
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATÖRLERİ	28
4.1. Ağırlıklı Uzaylarda Yakınsak	32
4.2. Ağırlıklı Süreklilik Modülü	35
4.3. Voronovskaya Tipli Teorem	38
4.4. Şekil Koruma Özellikleri	48
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	57

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	Reel sayılar kümesi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ tanımlı sürekli fonksiyon uzayı
$L(f; x)$	L lineer operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$	Reel değerli ağırlık fonksiyonu
$C_\varphi(\mathbb{R}^+)$	$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayındaki sürekli fonksiyon kümesi
$C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$	$\left\{ f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+) : \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k_f < \infty \right\}$ alt uzayı
B_n	Bernstein operatörü
S_n	Szász-Mirakjan operatörü
S_n^ρ	Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörü

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisinin en önemli alanlarından biri de yaklaşımlar teorisidir. Yaklaşım teorisinin amacı ise seçilen herhangi bir fonksiyonun daha kullanışlı ve daha basit diğer bir fonksiyon cinsinden bir gösterimini elde etmektir.

1885 yılında Alman matematikçi Weierstarss " $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinomların dizisi karşılık gelir" şeklinde bir teorem ortaya sürmüştür. Bunun üzerine 1912 yılında Rus matematikçi Bernstein $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsayan polinomları

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır. 1952 yılında Bohmann toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşımını incelemiştir. 1953 yılında ise Korovkin, Bohmann'ın teoremini genelleştirerek 'Korovkin Teoremi' olarak bilinen teoremi ispatlamıştır. Bu teorem yaklaşım teorisine yeni bir boyut kazandırmıştır [1]. Bernstein polinomlar dizisi lineer pozitif operatörler dizisi olarak dikkate alınarak bir çok genellemesi tanımlanıp yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

1950 yılında Szász Bernstein polinomunu sınırsız aralıklara taşımıştır. f fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve $[0, \infty)$ aralığında sınırlı olması durumunda

$$S_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanan operatörler dizisini oluşturmuş ve Szász operatörleri olarak adlandırmıştır. Bu operatör ve onun çeşitli genelleştirmeleri aşağıdaki makalelerde yoğun olarak incelenmiştir [4], [9], [10], [11], [12], [14].

Daha sonra sonlu aralıkta Bernstein polinomlar dizisinin bilinen yakınsaklık özelliklerini $[0, \infty)$ aralığında yukarıda tanımlanan ve literatürde Szász-Mirakjan operatörü olarak bilinen operatörler için elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Szász-Mirakjan operatörlerini genelleştirilmesini inceleyeceğiz. Bunun için ρ fonksiyonuna bağlı Szász-Mirakjan operatör dizisini oluşturacağız. ρ fonksiyonu hem Szász-Mirakjan hem de ağırlıklı uzaylarda $\{1, \rho, \rho^2\}$ test fonksiyonu için Korovkin Teoremini karakterize edecektir. Böylece daha kapsamlı bir sonuç elde edilmiştir.

\mathbb{R}^+ üzerinde sürekli fonksiyon uzaylarının bir alt uzayında ρ fonksiyonunu kullanarak oluşturulan operatörlerin ağırlıklı uzaylarda özdeşlik operatörüne yakınsamasını veren teoremler verilecektir. ρ fonksiyonunu kullanarak oluşturulan ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla ağırlıklı yaklaşım derecesini elde etmek için quantitative tipli teoremler verilecektir. Ayrıca operatörün şekil koruma özelliği verilmiştir. Bunun sonucu olarak f , ρ -konveks olmak şartıyla operatör dizisinin fonksiyondan büyük olduğu gösterilecektir.

1.1. Kaynak Özeti

Temel kavramlar için Hacısalihoğlu. H. ve Hacıyev, A. (1995) in ‘Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı’ adlı kitabından yararlanılmıştır. Szasz operatörleri ve yaklaşım özellikleri için Szasz (1950) ‘Generalized of S.Berstein’s Polynomials to the infinite interval. Journ. of Resarch of the Nat. Bureau of Stand.’ adlı makalesinden faydalanılmıştır. Aral, Indoan ve Raşa tarafından yayımlanan ‘On the generalized Szasz- Mirakyan operators’ isimli makale tez çalışmasında temel alınmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışması ile ρ fonksiyonunun karakterize ettiği modifiye Szász-Mirakjan operatörü ele alınmıştır. Bununla beraber Korovkin teoreminin test fonksiyonlarını, bazı şartları sağlayan ρ fonksiyonuna bağlı kurarak Szász- Mirakjan operatörünün yaklaşım özellikleri incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle lineer pozitif operatörler tanımlanacak ve sahip olduğu temel özellikler incelenecektir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar verilecek, bazı teoremler de ifade ve ispat edilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler Dizisi

Tanım 2.1. X ve Y fonksiyon uzayı olmak üzere X kümesinden Y kümesine olan bir L dönüşümüne operatör denir. Bu durumda X uzayında tanımlı her f fonksiyonuna Y uzayında bir Lf fonksiyonu karşılık gelir. Bu Lf fonksiyonun x noktasında aldığı değer $L(f; x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. X ve Y vektör uzayı olmak üzere $L: X \rightarrow Y$ şeklinde L operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $f_1, f_2 \in X$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1) + \beta L(f_2)$$

koşulu sağlanıyor ise L operatörüne Lineer operatör denir.

Tanım 2.3. Eğer bir L operatörü pozitif değerli bir fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyorsa yani;

f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f) \geq 0$$

oluyorsa L operatörüne pozitif operatör denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörler lineer pozitif operatör denir.

2.1.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Lemma 2.1. Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$f \leq g \text{ iken } L(f) \leq L(g)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $0 \leq g - f$ olacağından ve L operatörünün pozitifliğinden,

$$0 \leq L(g - f)$$

yazılabilir. Diğer yandan L operatörü lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

dır. O halde $L(f) \leq L(g)$ eşitliği sağlanır.

Lemma 2.2. Lineer pozitif operatör ise $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Her f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

dir. L lineer pozitif operatör olduğundan monoton artandır. O halde L 'nin lineerliğinden

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir. Buradan da

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

elde edilir.

Tanım 2.4. X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörü ve her $n \in \mathbb{N}$ için (L_n) operatör dizisi verilsin.

$$L_n((t-x)^m; x), \quad \{m = 0, 1, 2, \dots\}$$

ile tanımlanan ifadelere L_n operatör dizisinin m – yinci merkezi momenti denir.

Tanım 2.5. Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsak olması her $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olmasıdır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması demektir.

(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir.

2.1.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Yaklaşım teorisi, seçilen herhangi bir fonksiyonun daha kullanışlı ve daha iyi özelliklere sahip fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmesini amaçlamaktadır. 1885 yılında Alman matematikçi Weierstarss $[a, b]$ kapalı

aralığında tanımlanan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinomların var olduğunu göstermiştir.

Teorem 2.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olan fonksiyonların uzayında olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n . dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifadeyle $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan her f fonksiyona düzgün yakınsayan bir $(P_n(x))$ polinomlar dizisi vardır.

Bu teoremin bir çok ispatı bulunmaktadır. Bu ispatların içinde en basit ve anlaşılır olanı, Bernstein' in 1912 yılında verdiği, inşaya dayalı ispattır.

1952 yılında Bohmann, toplam şeklindeki şekilde ki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

Teorem 2.2. (Korovkin teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde sınırlı olsun. Eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ üzerinde

$$L_n(1; x) \Rightarrow 1 \quad (2.1)$$

$$L_n(t; x) \Rightarrow x \quad (2.2)$$

$$L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2 \quad (2.3)$$

koşullarını sağlıyorsa $L_n(f; x)$ dizisi $[a, b]$ aralığında $f(x)$ 'e düzgün yakınsaktır.

Yani:

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $f \in C[a, b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından dolayı her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki:

$$|t - x| < \delta$$

olduğundan;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

kalır. $|t - x| > \delta$ olduğunda ise (2.4) den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı,

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.4)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer;

$$|t - x| \geq \delta \text{ ise } \frac{|t - x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (2.5)$$

sağlanır. (2.4) ve (2.5) den;

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. O halde

$$|t - x| \leq \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t - x| > \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

elde ederiz. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (2.6)$$

dır. Eğer (2.1), (2.2), (2.3) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğinin sağladığını gösterirsek ispat tamamlanır. Şimdi bunu gösterelim.

Lineerlikten:

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$(f(t) - f(x)) \leq |f(t) - f(x)|$$

olduğundan:

$$|L_n((f(t) - f(x)); x)| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)|$$

olur. Operatör pozitif ve

$$|f(t) - f(x)| \geq 0$$

olduğundan

$$|L_n(|f(t) - f(x)|; x)| = L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dır. Böylece

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)||L_n(1; x) - 1|$$

olduğunu göstermiş olduk. (2.4) den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |L_n(1; x) - 1| \quad (2.7)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= L_n(\varepsilon; x) + L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)] \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x) - x^2] \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Son bulduğumuz ifadenin (2.7) de kullanılmasıyla:

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)] + M_f |L_n(1; x) - 1| \quad (2.8)$$

elde edilir. Daha sonra (2.1), (2.2), (2.3) koşullarının (2.8) da kullanılmasıyla da

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \varepsilon$$

bulunur. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

dır. Bu da ispatı tamamlar.

2.2. Süreklilik Modülü

Tanım 2.6. $f \in C[a, b]$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

2.3. Ağırlıklı Uzaylar

Szász operatörleri ile yaklaşım problemleri, ağırlıklı uzaylarda da incelenmektedir. Ağırlıklı uzaylarda düzgün yakınsama için Korovkin Tipli teoremler Gadjiev tarafından verilmiştir [2], [3].

Tanım 2.7. $\rho(x)$ reel ekseninde sürekli, monoton artan ve $\rho(0) = 0$, $\inf_{x \in \mathbb{R}^+} \rho'(x) \geq 1$ koşulları altında $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$ şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x) = 1 + \rho^2(x) \quad (2.9)$$

şeklinde $\varphi(x)$ ağırlık fonksiyonu tanımlansın.

Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f \varphi(x), \quad M_f > 0$$

eşitsizliğini sağlayan \mathbb{R}^+ üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonlarının kümesi $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ile gösterilsin. Bu uzaydaki sürekli fonksiyonların kümesi $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ile gösterilsin. Yani;

$$B_\varphi(\mathbb{R}^+) = \{f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq M_f \varphi(x), \quad x \geq 0\}$$

ve

$$C_\varphi(\mathbb{R}^+) = \{f \in B_\varphi(\mathbb{R}^+) \mid f \text{ sürekli}\}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu uzaylar üzerinde ki norm

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ve $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayları, lineer normlu uzaylardır. $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayında

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k_f < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ ile gösterilir. $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ve $C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$, $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ nin alt uzayıdır. Özel olarak, $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ifadesi düzgün sürekli olan fonksiyonların kümesini de $U_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ile gösterelim. O halde

$$C_\varphi^k(\mathbb{R}^+) \subset U_\varphi(\mathbb{R}^+) \subset C_\varphi(\mathbb{R}^+) \subset B_\varphi(\mathbb{R}^+)$$

ifadesi açıkça görülür.

$C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ den $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ye dönüşüm yapan lineer pozitif operatörlerin özellikleri ve Korovkin tipli Teoremleri [5] ve [6] da incelenmiştir.

2.4. Bölünmüş Farklar

Tanım 2.8. Kabul edelim ki, f sonlu bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanmış bir fonksiyon $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ olacak şekilde bu aralığın keyfi noktaları olsunlar. f fonksiyonunun keyfi bir $x_k; k = 0, 1, 2, \dots$ noktasındaki değerini $[x_k; f]$ ile gösterelim. Yani $f(x_k) = [x_k; f]$ olsun. Buna f fonksiyonunun sıfıncı bölünmüş farkı denir. Şimdi bu ifadeleri tanımlayalım:

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ifadesine f fonksiyonunun birinci bölünmüş farkı,

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{[x_0, x_1; f] - [x_1, x_2; f]}{x_0 - x_2}$$

ifadesine f fonksiyonunun ikinci bölünmüş farkı, bu şekilde devam edilirse;

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0} ; \quad n \geq 1$$

ifadesine f fonksiyonunun n -yinci bölünmüş farkı denir.

Bu durumda,

$$x_0 = \frac{k}{n} \text{ ve } x_1 = \frac{k+1}{n} \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}; f \right] &= \frac{f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}} \\ &= \frac{f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= n \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Yani:

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}; f \right] = n \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \quad (2.11)$$

elde edilir.

Ayrıca biliyoruz ki

$$f\left[x, \frac{k+1}{n}\right] - f\left[x, \frac{k}{n}\right] = \frac{1}{n} f\left[x, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \quad (2.12)$$

eşitliği geçerlidir.

3. SZÁSZ OPERATÖRLERİ

Bu bölümde öncelikle Szász-Mirakyan operatörleri tanıtılarak Korovkin Teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. Szász operatörlerinin özellikleri

Tanım 3.1. Kabul edelim ki $x \in [0, \infty)$ ve $f \in C([0, \infty))$ sınırlı, sürekli olsun.

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szász operatörleri denir.

Teorem 3.1. (3.1) ile verilen Szász operatörleri $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, A]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı ekseninde de sınırlı olan fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsaktır. Yani $f \in C[0, A]$ ise

$$S_n(f; x) \Rightarrow f(x) , \quad x \in [0, A]$$

dir.

İspat: Szász operatörlerinin lineerliği ve pozitifliğinden yola çıkarak, Korovkin Teoremi yardımıyla düzgün yakınsaklığını göstereyim.

Korovkin teoremi gereğince;

- i) $S_n(1, x) \Rightarrow 1$
- ii) $S_n(t, x) \Rightarrow x$
- iii) $S_n(t^2, x) \Rightarrow x^2$

olduğunu gösterirsek $[0, A]$ aralığında $S_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ elde edilir. Şimdi (i), (ii) ve (iii) ifadelerini gösterelim.

i) $S_n(1, x) \Rightarrow 1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} S_n(1; x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} 1 \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx} e^{nx} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

ii) $S_n(t, x) \Rightarrow x$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} S_n(t; x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k n^k x^k}{n k!} \\ &= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k n^k x^k}{n k!} \\ &\quad (k \rightarrow k + 1) \\ &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k + 1}{n} \frac{n^{k+1} x^{k+1}}{(k + 1)!} \\ &= e^{-nx} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= e^{-nx} x e^{-nx}$$

$$= x$$

iii) $S_n(t^2, x) \Rightarrow x^2$ olduğunu gösterelim.

$$S_n(t^2; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 (nx)^k}{n^2 k!} = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k k nx^k}{n^2 k!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k k nx^k}{n^2 k(k-1)!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k nx^k}{n^2 (k-1)!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1 (nx)^{k+1}}{n^2 k!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k (nx)^{k+1}}{n^2 k!} + e^{-nx} + e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 (nx)^{k+1}}{n^2 k!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k (nx)^k nx}{n^2 k!} + e^{-nx} + e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 (nx)^k nx}{n^2 k!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k (nx)^k}{n k!} x + e^{-nx} + \frac{1}{n} e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} x$$

$$= x^2 + \frac{1}{n} x$$

bulunur ve

$$S_n(t^2, x) \rightrightarrows x^2 \quad , \quad (n \rightarrow \infty)$$

yakınsamasını elde ederiz. Dolayısıyla (i), (ii) ve (iii) aşamaları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince her $f \in C[0, A]$ için

$$S_n(f; x) \rightrightarrows f(x) \quad , \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur.

Teorem 3.2. Tanım 2.5 ile verilen merkezi momentleri Szász-Mirakyan operatörleri için ilk beşi;

$$\varphi_{n,0}(x) = 1 \quad (3.2)$$

$$\varphi_{n,1}(x) = 0 \quad (3.3)$$

$$\varphi_{n,2}(x) = \frac{x}{n} \quad (3.4)$$

$$\varphi_{n,3}(x) = \frac{x}{n^2} \quad (3.5)$$

$$\varphi_{n,4}(x) = \frac{x}{n^3} + \frac{3x^2}{n^2} \quad (3.6)$$

şeklindedir.

İspat: Merkezi momentin ispatında kullanılan Klasik Szász-Mirakyan operatörünün momentleri,

$$I. \quad S_n(1; x) = 1 \quad (3.7)$$

$$II. \quad S_n(t; x) = x \quad (3.8)$$

$$\text{III. } S_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x}{n} \quad (3.9)$$

$$\text{IV. } S_n(t^3; x) = x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{x}{n^2} \quad (3.10)$$

$$\text{V. } S_n(t^4; x) = x^4 + \frac{6x^3}{n} + \frac{7x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} \quad (3.11)$$

Şeklindedir.

$m = 1$ için;

$$\begin{aligned} S_n\left(\left(\frac{k}{n} - x\right)^1; x\right) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} - e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} x \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} - x e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= S_n(t; x) - x S_n(1; x) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\varphi_{n,1}(x) = 0$$

bulunur.

$m = 2$ için,

$$\varphi_{m,2}(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} - 2xe^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} + x^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= S_n(t^2; x) - 2x^2 + x^2 S_n(1; x)
\end{aligned}$$

olup, (3.7), (3.8) ve (3.9) ten

$$\varphi_{m,2}(x) = x^2 + \frac{x}{n} - 2x^2 + x^2$$

olduğundan;

$$\varphi_{n,2}(x) = \frac{x}{n}$$

dir.

$m = 3$ için;

$$\begin{aligned}
\varphi_{m,3}(x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^3 \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{(nx)^k}{k!} - 3xe^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \\
&\quad + 3x^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} - x^3 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= S_n(t^3; x) - 3xS_n(t^2; x) + 3x^2 S_n(t; x) - x^3 S_n(1; x)
\end{aligned}$$

dir. (3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10) dan;

$$\varphi_{m,3}(x) = x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{x}{n^2} - 3x \left(x^2 + \frac{x}{n}\right) + 3x^2 x - x^3$$

yazılabilir. Yani,

$$\varphi_{n,3}(x) = \frac{x}{n^2}$$

dir.

$m = 4$ için;

$$\begin{aligned} \varphi_{m,4}(x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^4 \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \frac{(nx)^k}{k!} - 4xe^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{(nx)^k}{k!} \\ &\quad + 6x^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} - 4x^3 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} + x^4 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= S_n(t^4; x) - 4xS_n(t^3; x) + 6x^2 S_n(t^2; x) - 4x^3 S_n(t; x) + x^4 S_n(1; x) \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) ve (3.11) den,

$$\begin{aligned} \varphi_{m,4}(x) &= x^4 + \frac{6x^3}{n} + \frac{7x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} - 4x \left(x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{x}{n^2} \right) + 6x^2 \left(x^2 + \frac{x}{n} \right) \\ &\quad - 4x^3 x + x^4 \end{aligned}$$

dır. O halde

$$\varphi_{n,4}(x) = \frac{x}{n^3} + \frac{3x^2}{n^2}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. Voronovskaya Teoremi

Bu kısımda Klasik Szász-Mirakyan operatörü için Voronovskaya teoremini ifade edelim.

Teorem 3.3. f fonksiyonu $[0, A]$ aralığında sınırlı ve $(0, A)$ aralığında bir x noktasında ikinci türeve sahip ise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[S_n(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2} x f''(x) \quad (3.12)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bir f fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımı;

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!} f''(x)(t-x)^2 + K_n(t-x) \quad (3.13)$$

dir. Burada;

$$K_n(t-x) = \frac{1}{3!} f'''(x)(t-x)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x)(t-x)^4 + \dots$$

olup buna kalan terim denir. (3.13) da $t = \frac{k}{n}$ seçilirse,

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) \left(\frac{k}{n} - x\right) + \frac{1}{2!} f''(x) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 + K_n \left(\frac{k}{n} - x\right) \quad (3.14)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$K_n \left(\frac{k}{n} - x\right) = \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 M \left(\frac{k}{n} - x\right)$$

yazılabilir. Burada K_n kalan terim ve $n \rightarrow \infty$ için limiti sıfırdır. Dolayısıyla sınırlıdır. O halde, her h sayısı için bir $H > 0$ vardır, öyleki

$$|M(h)| \leq H \quad (3.15)$$

yazılabilir.

Bu durumda (3.14) eşitliği,

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) + \frac{1}{2}f''(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 + \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 M\left(\frac{k}{n} - x\right)$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafı $e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}$ ile çarpıp toplamını alırsak:

$$\begin{aligned} S_n(f; x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f(x) \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f'(x) \left(\frac{k}{n} - x\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f''(x) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= f(x) e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + f'(x) e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\ &\quad + \frac{1}{2} f''(x) e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= f(x) S_n(1; x) + f'(x) \varphi_{n,1}(x) + \frac{1}{2} f''(x) \varphi_{n,2}(x) \\ &\quad + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.7), (3.3) ve (3.4) kullanılmasıyla

$$S_n(f; x) = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)\frac{x}{n} + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci ifadeyi:

$$I = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} I &= e^{-nx} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} M\left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \\ &+ e^{-nx} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} M\left(\frac{k}{n} - x\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \end{aligned} \quad (3.17)$$

olur. $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta$ iken $\left|M\left(\frac{k}{n} - x\right)\right| \leq \varepsilon$ dur. Bu ifade ve (3.15) ifadesini (3.17) de kullanılırsa;

$$\begin{aligned} I &\leq \varepsilon e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} + H e^{-nx} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \\ &\leq \varepsilon \varphi_{n,2}(x) + H e^{-nx} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \end{aligned}$$

olur. (3.4) ün kullanılmasıyla;

$$\leq \varepsilon \frac{x}{n} + H e^{-nx} \sum_{\left| \frac{v}{n} - x \right| \geq \delta} \left(\frac{v}{n} - x \right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \quad (3.18)$$

bulunur. Şimdi,

$$J = \sum_{\left| \frac{v}{n} - x \right| \geq \delta} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \frac{(nx)^k}{k!}$$

diyelim ve

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \text{ ise } \frac{\left(\frac{k}{n} - x \right)^2}{\delta^2} \geq 1$$

olduğundan

$$J \leq \sum_{\left| \frac{v}{n} - x \right| \geq \delta} \frac{\left(\frac{k}{n} - x \right)^2}{\delta^2} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \frac{(nx)^k}{k!}$$

yazabiliriz. Yani;

$$J \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left| \frac{v}{n} - x \right| \geq \delta} \left(\frac{k}{n} - x \right)^4 \frac{(nx)^k}{k!}$$

dır. Bulduğumuz bu ifadeyi $\{k \text{ y} \text{ } 0 \text{ dan } \infty' a\}$ genişletip (3.18) da kullanırsak;

$$I \leq \varepsilon \frac{x}{n} + \frac{H}{\delta^2} e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x \right)^4 \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$\leq \varepsilon \frac{x}{n} + \frac{H}{\delta^2} \varphi_{n,4}(x)$$

elde edilir. (3.6) kullanılarak;

$$\begin{aligned} I &\leq \varepsilon \frac{x}{n} + \frac{H}{\delta^2} \left(\frac{x}{n^3} + \frac{3x^2}{n^2} \right) \\ &= \varepsilon \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{H}{\delta^2} \left(\frac{x}{n} + 3x^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. $x \in [0, A]$ olduğundan bu aralıktaki maksimum değeri A dir. O halde:

$$\begin{aligned} I &\leq \varepsilon \frac{A}{n} + \frac{1}{n^2} \left[\frac{H}{\delta^2} \left(\frac{A}{n} + 3A^2 \right) \right] \\ &\leq \varepsilon \frac{A}{n} + \frac{1}{n^2} \left[\frac{H}{\delta^2} (A + 3A^2) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \varepsilon A + \frac{1}{n} B \right\} \\ &\leq \frac{C}{n} \left\{ \varepsilon + \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $B = \frac{H}{\delta^2} (A + 3A^2)$ ve $C = \max\{A, B\}$ dir.

$\varepsilon_n = \max \left\{ \varepsilon, \frac{1}{n} \right\}$ seçilirse,

$$I = \frac{1}{n} O(\varepsilon_n)$$

elde edilir. Bu ifade (3.16) da yerine yazılırsa;

$$S_n(f; x) = f(x) + \frac{1}{2} \frac{x}{n} f''(x) + \frac{1}{n} O(\varepsilon_n)$$

$$S_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{n} f''(x) + \frac{1}{n} O(\varepsilon_n)$$

$$n[S_n(f; x) - f(x)] = \frac{x}{2} f''(x) + O(\varepsilon_n)$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olduğundan, limit alınarak teorem ispatlanır.



4.GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATÖRLERİ

Szász- Mirakjan operatörleri, Bernstein operatörlerinin sınırsız aralıklara genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır[13] .

Bu bölümde yeni bir yaklaşım sürecinin ana özellikleri incelenecektir. ρ fonksiyonu yardımıyla genişletilmiş Chebyshev sistemi için ağırlıklı Korovkin tipli teoremini kullanarak, f fonksiyonunu $C[0, \infty)$ uzayına ait olması durumunda, $S_n^\rho f \rightrightarrows f$ için bir kriter oluşturacaktır. $C[0, \infty)$ deki fonksiyonların ağırlıklı yakınsaklık hızını elde etmek için [7] verilen ağırlıklı süreklilik modülü kullanılacak ve Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörlerinin yakınsama oranı elde edilecektir. Ardından $S_n^\rho(f)$ için asymptotic bir formül elde edilecektir. Son olarak Genelleşmiş Szász-Mirakjan operatörünün şekil koruma özelliğini ele alınacaktır. Sonrasında genel bir konvekslik kavramı olan ρ –konveks fonksiyonlar için

$$S_n^\rho \geq S_{n+1}^\rho(f) \geq f$$

olduğu gösterilecektir.

Tanım 4.1. f fonksiyonu $[0, \infty)$ sınırsız aralığında tanımlı olan sürekli ve sınırlı bir fonksiyon ise Szasz-Mirakyan operatörü:

$$S_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad (4.1)$$

şeklindedir.

Tanım 4.2. ρ, \mathbb{R}^+ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\rho(0) = 0, \inf_{x \in \mathbb{R}^+} \rho'(x) \geq 1$ olsun. f fonksiyonu $[0, \infty)$ sınırsız aralığında tanımlı olmak üzere Genelleştirilmiş Szasz-Mirakjan operatörü

$$S_n^\rho(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n} \right) P_{\rho, n, k}(x) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$P_{\rho, n, k}(x) = e^{-n\rho(x)} \frac{(n\rho(x))^k}{k!}, \quad x \in [0, \infty), \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad k \geq 0 \quad (4.3)$$

şeklinde seçilmiştir. Örneğin, $\rho(x) = x + x^2$ yukarıdaki bu koşulu sağlar. Eğer $\rho(x) = x$ seçilirse tanımlanan Genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörü Klasik Szász operatörüne eşittir. Yani $\rho(x) = x$ için $S_n^\rho = S_n$ dir.

Teorem 4.1. Genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörleri $C[0, \infty)$ sınırsız aralığında ve ρ, \mathbb{R}^+ üzerinde sürekli diferansiyallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$S_n^\rho(f; x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [0, \infty]$$

dır.

İspat: Korovkin teoremi gereğince;

$$(i) \quad S_n^\rho(1, x) = 1 \quad (4.4)$$

$$(ii) \quad S_n^\rho(\rho, x) = \rho(x) \quad (4.5)$$

$$(iii) \quad S_n^\rho(\rho^2; x) = \rho^2(x) + \frac{\rho(x)}{n} \quad (4.6)$$

olduğunu gösterirsek $S_n^\rho(f; x) \Rightarrow f(x)$ olduğu ispatlanmış olur.

(i) $S_n^\rho(1, x) = 1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} S_n^\rho(1, x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dır.

(ii) $S_n^\rho(\rho, x) = \rho(x)$ olduğunu gösterelim.

$$S_n^\rho(\rho, x) = e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!}$$

($k \rightarrow k+1$ yazarsak)

$$\begin{aligned} &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{n} \frac{(n\rho(x))^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{(n\rho(x))^k \cdot n\rho(x)}{(k+1)!} \\ &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{(n\rho(x))^k \cdot n\rho(x)}{k! \cdot (k+1)} \\ &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k \cdot \rho(x)}{k!} \\ &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \cdot \rho(x) \end{aligned}$$

$$= \rho(x)$$

dır.

(iii) $S_n^\rho(\rho^2; x) = \rho^2(x) + \frac{\rho(x)}{n}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
S_n^\rho(\rho^2; x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n^2} \cdot \frac{(n\rho(x))^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{n^2} \cdot \frac{(n\rho(x))^{k+1}}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n^2} \frac{(n\rho(x))^{k+1}}{k!} + e^{-n\rho(x)} + e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(n\rho(x))^{k+1}}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n^2} \frac{(n\rho(x))^k n\rho(x)}{k!} + e^{-n\rho(x)} \\
&\quad + e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(n\rho(x))^k n\rho(x)}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \rho(x) + e^{-n\rho(x)} + \frac{1}{n} e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \rho(x) \\
&= \rho(x)^2 + \frac{1}{n} \rho(x)
\end{aligned}$$

bunur. Buda ispatı tamamlar.

4.1. S_n^ρ Ağırlıklı Uzaylarda Yakınsaklığı

Bu kısımda, tanımlanan S_n^ρ operatörünün Korovkin tipli Teoremi için gerekli koşulları sağlandığı gösterilmiştir.

Lemma 4.1. $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ de tanımlı bir (L_n) , $n \geq 1$ lineer pozitif operatörü

$$|L_n(\varphi, x)| \leq K_n \varphi(x) , \quad x \geq 0, \quad n \geq 1$$

eşitliğini sağlarsa $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ den $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ye dönüşüm yapan bir operatördür. Burada $K_n > 0$ sabit bir sayıdır.

Teorem 4.2. $n \geq 1$ olmak üzere $L_n: C_\varphi(\mathbb{R}^+) \rightarrow B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ lineer pozitif operatör dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n \rho^v - \rho^v\|_\varphi = 0 , \quad v = 0, 1, 2$$

ise her $f \in C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_\varphi = 0$$

dır.

(4.4), (4.5), (4.6) ve Lemma 4.1 den görüldüğü gibi S_n^ρ , $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ dan $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ dönüşümü yapan operatörlerdir. Genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörleri için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.3. Her $f \in C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\rho(f) - f\|_\varphi = 0$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} S_n^\rho(f; x) &\leq \|f\|_\varphi S_n(\varphi; x) \\ &\leq \|f\|_\varphi \left(1 + \rho^2(x) + \frac{\rho(x)}{n} \right) \\ &\leq 3\|f\|_\varphi \end{aligned}$$

olduğundan S_n^ρ , $C_\varphi(\mathbb{R})$ den $B_\varphi(\mathbb{R})$ ye dönüşüm yapan bir operatördür.

Teorem 4.2 yardımıyla aşağıdaki üç durumu doğrulamak ispatı tamamlayacaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\rho(\rho^v) - \rho^v\|_\varphi = 0 \quad , \quad v = 0,1,2 \quad (4.7)$$

(i) $v=0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\rho(\rho^0) - \rho^0\|_\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\rho(1) - 1\|_\varphi = 0$$

dır.

(ii) $v=1$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\rho(\rho) - \rho\|_\varphi = 0$$

dır.

(iii) $v=2$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\rho(\rho^2) - \rho^2\|_\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in R} \frac{|S_n^\rho(\rho^2) - \rho^2|}{\varphi(x)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in R} \frac{|S_n^\rho(\rho^2) - \rho^2|}{1 + \rho^2(x)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in R} \frac{\left| \rho^2(x) + \frac{\rho(x)}{n} - \rho^2(x) \right|}{1 + \rho^2(x)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in R} \frac{\left| \frac{\rho(x)}{n} \right|}{1 + \rho^2(x)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in R} \frac{\rho(x)}{(1 + \rho^2(x)) \cdot n} \right)$$

$$= \frac{1}{n}$$

dır.

4.2.Ağırlıklı Süreklilik Modülü

Bu kısımda ağırlıklı süreklilik modülünün yardımıyla yaklaşım hızını veren teorem ispatlayacağız. Bunun için $|t - x| \leq \delta$ yerine $|\rho(t) - \rho(x)| \leq \delta$ ifadesinin supremumunu almak daha uygun olacaktır. Dolayısıyla [5] de verilen, kullanacağımız ağırlıklı süreklilik modülü aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.3. $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ve $\delta > 0$ için

$$\omega_\rho(f; \delta) = \omega_\rho(f; \delta)_{R^+} = \sup_{\substack{x, t \in \mathbb{R}^+ \\ |\rho(t) - \rho(x)| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{\varphi(t) - \varphi(x)} \quad (4.8)$$

olarak tanımlanan $\omega_\rho(f; \delta)$ ya f nin ağırlıklı süreklilik modülü denir. Ağırlıklı süreklilik modülü $\omega_\rho(f; \delta)$ fonksiyonu her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için $\omega_\rho(f; 0) = 0$ ve $\omega_\rho(f; \delta)$ fonksiyonu δ ya göre negatif olmayan ve azalmayıdır. $\omega_\rho(f; \delta)$ bazı özelliklerini verelim.

Lemma 4.2. $f \in U_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\rho(f; \delta) = 0$ dır.

Teorem 4.4. $L_n: C_\varphi(\mathbb{R}^+) \rightarrow B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ pozitif operatörler dizisi olmak üzere,

$$\|L_n(\rho^0) - \rho^0\|_{\varphi^0} = a_n \quad (4.9)$$

$$\|L_n(\rho) - \rho\|_{\varphi^{\frac{1}{2}}} = b_n \quad (4.10)$$

$$\|L_n(\rho^2) - \rho^2\|_{\varphi} = c_n \quad (4.11)$$

$$\|L_n(\rho^3) - \rho^3\|_{\varphi^{\frac{3}{2}}} = d_n \quad (4.12)$$

Burada $n \rightarrow \infty$ için a_n, b_n, c_n ve d_n sıfır dizisidir.

Her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için

$$\|L_n(f) - f\|_{\varphi^{\frac{3}{2}}} \leq (7 + 4a_n + 2c_n)\omega_\rho(f; \delta_n) + \|f\|_\varphi a_n$$

dir. Burada

$$\delta_n = 2\sqrt{(a_n + 2b_n + c_n)(1 + a_n)} + a_n + 3b_n + 3c_n + d_n$$

dir.

Teorem 4.5. Her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için

$$\|S_n^\rho(f) - f\|_{\varphi^{\frac{3}{2}}} \leq \left(7 + \frac{2}{n}\right)\omega_\rho\left(f; \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{7}{n}\right)$$

dir.

İspat: Teorem 4.4 deki a_n, b_n, c_n ve d_n sırasıyla hesaplırsak teoremi ispatlamış oluruz. (4.4) ve (4.5) den bulunur ki,

$$\|S_n^\rho(\rho^0) - \rho^0\|_{\varphi^0} = a_n = 0$$

ve

$$\|S_n^\rho(\rho) - \rho\|_\varphi = b_n = 0$$

ayrıca (4.7) den

$$c_n = \|S_n^\rho(\rho) - \rho\|_\varphi \leq \frac{1}{n}$$

olur. Ayrıca

$$S_n^\rho(\rho^3; x) = \rho^3(x) + 3 \frac{\rho^2(x)}{n} + \frac{\rho(x)}{n^2}$$

den dolayı

$$\begin{aligned} d_n &= \|S_n^\rho(\rho^3) - \rho^3\|_{\varphi^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sup_{x \in R} \frac{|S_n^\rho(\rho^3) - \rho^3|}{\varphi^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sup_{x \in R} \left\{ \frac{\rho^3(x) + 3 \frac{\rho^2(x)}{n} + \frac{\rho(x)}{n^2} - \rho^3(x)}{(1 + \rho^2(x))^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= \sup_{x \in R} \left\{ 3 \frac{\rho^2(x)}{(1 + \rho^2(x))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{\rho(x)}{(1 + \rho^2(x))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{n^2} \right\} \\ &= 3 \sup_{x \in R} \left\{ \frac{\rho^2(x)}{(1 + \rho^2(x))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{n} \right\} + \sup_{x \in R} \left\{ \frac{\rho(x)}{(1 + \rho^2(x))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{n^2} \right\} \\ &\leq \frac{4}{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.9) ile (4.12) arasındaki koşulları sağlayarak ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.3. $f \in U_\varphi(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere Teorem 4.5 ve Önerme 4.2 kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\rho(f) - f\|_{\frac{3}{\varphi^2}} = 0$$

elde edilir.

4.3. Voronovskaya Tipli Teorem

Bu bölümde, Teorem 3.3 de tanımlanan Voronovskaya Teoremi S_n^ρ Szász-Mirakjan operatörü için ifade edilecek ve ispat için Cardenas-Moorales, Garrancho and Raşanın [7] geliştirdiği teknik kullanılacaktır.

Öncelikle Voronovskaya Tipli Teoremi ispatında kullanılacak bir takım ifadeleri verilecektir.

Lemma 4.4. Tanım 2.5 de tanımladığımız merkezi momentlerin ilk beşini Genelleştirilmiş Szász- Mirakyan operatörleri için eşitleri;

$$\varphi_{n,0}(x) = 1 \tag{4.13}$$

$$\varphi_{n,1}(x) = 0 \tag{4.14}$$

$$\varphi_{n,2}(x) = \frac{\rho(x)}{n} \tag{4.15}$$

$$\varphi_{n,3}(x) = \frac{\rho(x)}{n^2} \tag{4.16}$$

$$\varphi_{n,4}(x) = \frac{\rho(x)}{n^3} + \frac{3\rho(x)^2}{n^2} \tag{4.17}$$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle merkezi momentin ispatında kullanılacak

$$I. \quad S_n^\rho(1; x) = 1 \quad (4.18)$$

$$II. \quad S_n^\rho(\rho; x) = \rho(x) \quad (4.19)$$

$$III. \quad S_n^\rho(\rho^2; x) = \rho(x)^2 + \frac{\rho(x)}{n} \quad (4.20)$$

$$IV. \quad S_n^\rho(\rho^3; x) = \rho(x)^3 + \frac{3\rho(x)^2}{n} + \frac{\rho(x)}{n^2} \quad (4.21)$$

$$V. \quad S_n^\rho(\rho^4; x) = \rho(x)^4 + \frac{6\rho(x)^3}{n} + \frac{7\rho(x)^2}{n^2} + \frac{\rho(x)}{n^3} \quad (4.22)$$

ifadeleri gösterelim. (4.18), (4.19) ve (4.20) eşitliklerini Teorem 4.1 de gösterilmiştir. Şimdi (4.21) ve (4.22) eşitliklerini gösterelim.

$$S_n^\rho(\rho^3; x) = e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 (n\rho(x))^k}{n^3 k!}$$

$$= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 (n\rho(x))^k}{n^3 k!}$$

$$= \rho(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 n^{k-1} (\rho(x))^{k-1}}{n^2 (k-1)!}$$

$$(k \rightarrow k+1)$$

$$= \rho(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 \frac{(n\rho(x))^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho(x) \left(e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} + \frac{2}{n} e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n^2} e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \right) \\
&= \rho(x) \left(S_n^\rho(\rho^2; x) + \frac{2}{n} S_n^\rho(\rho; x) + \frac{1}{n^2} (S_n^\rho 1; x) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.7), (3.8) ve (3.9) dan;

$$S_n^\rho(\rho^3; x) = \rho(x) \left(\rho(x)^2 + \frac{\rho(x)}{n} + \frac{2}{n} \rho(x) + \frac{1}{n^2} \right)$$

o halde

$$S_n^\rho(\rho^3; x) = \rho(x)^3 + \frac{3\rho(x)^2}{n} + \frac{\rho(x)}{n^2}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
S_n^\rho(\rho^4; x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{n^4} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{n^4} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= \rho(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{n^3} \frac{n^{k-1} (\rho(x))^{k-1}}{(k-1)!} \\
&\quad (k \rightarrow k+1) \\
&= \rho(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{n}\right)^3 \frac{(n\rho(x))^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho(x) \left(e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} + \frac{3}{n} e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{n^2} e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} + \frac{1}{n^3} e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \right) \\
&= \rho(x) \left(S_n^\rho(\rho^3; x) + \frac{3}{n} S_n^\rho(\rho^2; x) + \frac{3}{n^2} S_n^\rho(\rho; x) + \frac{1}{n^3} S_n^\rho(1; x) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10) dan;

$$S_n^\rho(\rho^4; x) = \rho(x) \left(\rho(x)^3 + \frac{3\rho(x)^2}{n} + \frac{\rho(x)}{n^2} + \frac{3}{n} \left(\rho(x)^2 + \frac{\rho(x)}{n} \right) + \frac{3}{n^2} \rho(x) + \frac{1}{n^3} \right)$$

yazılır. Sonuç olarak:

$$S_n^\rho(\rho^4; x) = \rho(x)^4 + \frac{6\rho(x)^3}{n} + \frac{7\rho(x)^2}{n^2} + \frac{\rho(x)}{n^3}$$

bulunur. Dolayısıyla,

Genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörlerinin merkezi momentleri:

$$\varphi_{n,0} = S_n^\rho(1; x)$$

olduğundan (3.7) den;

$$\varphi_{n,0}(x) = 1$$

dir.

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,1}(x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - \rho(x) \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} - e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \rho(x) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} - \rho(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= S_n^\rho(\rho; x) - \rho(x) S_n^\rho(1; x)
\end{aligned}$$

olur. (3.7) ve (3.8) den

$$\varphi_{n,1}(x) = \rho(x) - \rho(x)$$

yazılabilir. O halde

$$\varphi_{n,1} = 0$$

dır.

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,2}(x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - \rho(x) \right)^2 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} - 2\rho(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&\quad + (\rho(x))^2 e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\
&= S_n^\rho(\rho^2; x) - 2\rho(x)\rho(x) + \rho(x)^2 S_n^\rho(1; x)
\end{aligned}$$

olup, (3.7), (3.8) ve (3.9) ten

$$\varphi_{n,2}(x) = \rho(x)^2 + \frac{\rho(x)}{n} - 2\rho(x)^2 + \rho(x)^2$$

olduğundan;

$$\varphi_{n,2}(x) = \frac{\rho(x)}{n}$$

dir.

$$\begin{aligned} \varphi_{n,3}(x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - \rho(x) \right)^3 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^3 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} - 3\rho(x)e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &\quad + 3\rho(x)^2 e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} - \rho^3(x)e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &= S_n^\rho(\rho^3; x) - 3\rho(x)S_n^\rho(\rho^2; x) + 3\rho^2(x)S_n^\rho(\rho; x) - \rho^3(x)S_n^\rho(1; x) \end{aligned}$$

dir. (3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10) dan;

$$\begin{aligned} \varphi_{n,3}(x) &= \rho^3(x) + \frac{3\rho^2(x)}{n} + \frac{\rho(x)}{n^2} - 3\rho(x) \left(\rho^2(x) + \frac{\rho(x)}{n} \right) \\ &\quad + 3\rho^2(x)\rho(x) - \rho^3(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde,

$$\varphi_{n,3}(x) = \frac{\rho(x)}{n^2}$$

dir.

$$\begin{aligned} \varphi_{n,4}(x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - \rho(x) \right)^4 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^4 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} - 4\rho(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^3 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &\quad + 6\rho^2(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &\quad - 4\rho^3(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} + \rho^4(x) e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &= S_n^\rho(t^4; \rho(x)) - 4\rho(x) S_n^\rho(t^3; \rho(x)) + 6\rho^2(x) S_n^\rho(t^2; \rho(x)) \\ &\quad - 4\rho^3(x) S_n^\rho(t; \rho(x)) + \rho^4(x) S_n^\rho(1; \rho(x)) \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) ve (3.11) den,

$$\begin{aligned} \varphi_{n,4}(x) &= \rho(x)^4 + \frac{6\rho^3(x)}{n} + \frac{7\rho^2(x)}{n^2} + \frac{\rho(x)}{n^3} \\ &\quad - 4\rho(x) \left(\rho^3(x) + \frac{3\rho^2(x)}{n} + \frac{\rho(x)}{n^2} \right) + 6\rho^2(x) \left(\rho^2(x) + \frac{\rho(x)}{n} \right) \\ &\quad - 4\rho^3(x)\rho(x) + \rho^4(x) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\varphi_{n,4}(x) = \frac{\rho(x)}{n^3} + \frac{3\rho^2(x)}{n^2}$$

dir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.6. $f \in C(\mathbb{R}^+)$, $x \in \mathbb{R}^+$ olsun $f \circ \rho^{-1}$ in birici ve ikinci türevlerinin ρ noktasında var olduğunu kabul edelim. Eğer $f \circ \rho^{-1}$ in ikinci türevi \mathbb{R}^+ üzerinde sınırlı ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(S_n^\rho(f; x) - f(x) \right) = \frac{\rho(x)}{2} (f \circ \rho^{-1})''(\rho(x))$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $x < \xi < t$ için $(f \circ \rho^{-1})$ fonksiyonunun $\rho(x) \in \mathbb{R}^+$ noktasındaki Taylor açılımı;

$$f(t) = (f \circ \rho^{-1})(\rho(t)) = (f \circ \rho^{-1})(\rho(x)) + (f \circ \rho^{-1})'(\rho(x))(\rho(t) - \rho(x))$$

$$+ \frac{1}{2} (f \circ \rho^{-1})''(\rho(x))(\rho(t) - \rho(x))^2$$

$$+ \lambda_x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2 \tag{4.18}$$

Burada,

$$\lambda_x(t) = \frac{(f \circ \rho^{-1})''(\rho(\xi)) - (f \circ \rho^{-1})''(\rho(x))}{2} \tag{4.19}$$

dır.

(4.19) ifadesi, her t için $|\lambda_x(t)| \leq M$ eşitliğini sağlar ve $t \rightarrow x$ için sıfıra yakın bir değerdir. Szász-Mirakjan operatörüne (4.18) teki Taylor açılımını uygulayalım.

$$S_n^\rho(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\rho^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) P_{\rho, n, k}(x)$$

Bunun için öncelikle (4.18) eşitliğin her iki tarafı $e^{-n\rho(x)} \frac{(n\rho(x))^k}{k!}$ ile çarpıp toplamını alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n\rho(x)} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} (f \circ \rho^{-1})'(\rho(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n\rho(x)} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} (f \circ \rho^{-1})'(\rho(x)) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n\rho(x)} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} (f \circ \rho^{-1})'(\rho(x)) (\rho(t) - \rho(x)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n\rho(x)} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} (f \circ \rho^{-1})''(\rho(x)) (\rho(t) - \rho(x))^2 \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n\rho(x)} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \lambda_x(t) (\rho(t) - \rho(x))^2 \end{aligned}$$

Tanım 4.1 gereğince,

$$\begin{aligned} S_n^\rho(f; x) - f(x) &= (f \circ \rho^{-1})'(\rho(x)) S_n^\rho(\rho(t) - \rho(x); x) \\ &+ \frac{1}{2} (f \circ \rho^{-1})''(\rho(x)) S_n^\rho((\rho(t) - \rho(x))^2; x) \\ &+ S_n^\rho(\lambda_x(t) (\rho(t) - \rho(x))^2; x) \end{aligned}$$

elde ederiz. (4.4), (4.5) ve (4.6) kullanılarak;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n^\rho(\rho(t) - \rho(x); x) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n^\rho((\rho(t) - \rho(x))^2; x) = \rho(x)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(S_n^\rho(f; x) - f(x)) = \frac{\rho(x)}{2}(f \circ \rho^{-1})''(\rho(x))$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} nS_n^\rho(\lambda_x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2; x)$$

bulunur. Şimdi bulduğumuz bu son eşitliğin sağ tarafındaki son terimi incelediğimizde;

$$|\rho(t) - \rho(x)| < \delta \text{ ise } |(\rho(t) - \rho(x))^2| < \varepsilon(\rho(t) - \rho(x))^2$$

olduğu görülür. Eğer

$$|\rho(t) - \rho(x)| \geq \delta \text{ ve } |\lambda_x(t)| < M \text{ ise } |\lambda_x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2| \leq \frac{M}{\delta^2}(\rho(t) - \rho(x))^4$$

sağlanır. O halde

$$S_n^\rho(\lambda_x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2; x) < \varepsilon S_n^\rho(\lambda_x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2; x)$$

$$+ \frac{M}{\delta^2} S_n^\rho((\rho(t) - \rho(x))^4; x)$$

yazabiliriz. O halde

$$S_n^\rho \left((\rho(t) - \rho(x))^4; x \right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^\rho \left(\lambda_x(t) (\rho(t) - \rho(x))^2; x \right) = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.4. Şekil Koruma Özellikleri

Bu bölümde [6] te kullanılan konvekslik kavramını ρ ya göre tanımlanacaktır. f fonksiyonu ρ ya göre konveks olması için gerek ve yeter şart $f \circ \rho^{-1}$ klasik anlamda konveks olmasıdır.

$S_n^\rho(f)$ 'nin diğer özelliklerini vermeden önce tanımlanan fonksiyonun bazı özellikleri verilecektir.

Lemma 4.5. Kabul edelim ki $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$ olsun.

$$(i) P'_{\rho,n,k}(x) = n\rho'(x)(P_{\rho,n,k-1}(x) - P_{\rho,n,k}(x))$$

$$(ii) \rho(x)P'_{\rho,n,k}(x) = \rho'(x)P_{\rho,n,k}(x)(k - n\rho(x))$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $P_{\rho,n,-1}(x) = 0$ dir.

Teorem 4.7. Kabul edelim ki $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \in [0, \infty)$ ve

$$\rho(x) \neq \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ için}$$

$$S_n^\rho(f; x) - f(x) = \frac{\rho(x)}{n} \sum_n^\infty (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x)$$

dır.

İspat:

$$S_n^\rho(1; x) = 1 \text{ için;}$$

$$\begin{aligned} S_n^\rho(f; x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right) P_{\rho, n, k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - \rho(x) \right) (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} (k - n\rho(x)) (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] \frac{\rho'(x)}{\rho'(x)} (k - n\rho(x)) P_{\rho, n, k}(x) \end{aligned}$$

Burada Lemma 4.5 deki (i) ve (ii) yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] \frac{1}{\rho'(x)} \rho'(x) P'_{\rho, n, k}(x) \\ &= \frac{1}{n} \frac{\rho(x)}{\rho'(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] P'_{\rho, n, k}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \frac{\rho(x)}{\rho'(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] n \rho'(x) (P_{\rho, n, k-1}(x) - P_{\rho, n, k}(x)) \\
&= \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] (P_{\rho, n, k-1}(x) - P_{\rho, n, k}(x)) \\
&= \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] P_{\rho, n, k-1}(x) \\
&\quad - \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu eşitliğin sağ tarafının ilk ifade de $k \rightarrow k + 1$ yazıp (2.12) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&= \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k+1}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x) \\
&\quad - \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x) \\
&= \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left((f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k+1}{n} \right] \right. \\
&\quad \left. - (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n} \right] \right) P_{\rho, n, k}(x) \\
&= \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece;

$$S_n^\rho(f; x) - f(x) = \frac{\rho(x)}{n} \sum_n^\infty (f \circ \rho^{-1}) \left[\rho(x), \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] P_{\rho, n, k}(x)$$

bulunur.

Sonuç 4.1. ρ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında konveks ise $S_n^\rho(f; x) \geq f(x)$ dir.

Teorem 4.4. $x \in [0, \infty)$ için $\rho(x) \neq \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) olmak üzere eğer $\rho - konveks$ ise

$$S_n^\rho(f; x) \geq S_{n+1}^\rho(f; x)$$

$f \circ \rho^{-1}$ lineer ise

$$S_n^\rho(f; x) = S_{n+1}^\rho(f; x)$$

dir.

ispat:

$$\begin{aligned} S_n^\rho(f; x) - S_{n+1}^\rho(f; x) &= e^{-n\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \binom{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \\ &\quad - e^{-(n+1)\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \binom{k}{n+1} \frac{((n+1)\rho(x))^k}{k!} \\ &= e^{-(n+1)\rho(x) + \rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \binom{k}{n} \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-(n+1)\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n+1} \right) \frac{((n+1)\rho(x))^k}{k!} \\
& = e^{-(n+1)\rho(x)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n+1} \right) \frac{((n+1)\rho(x))^k}{k!} \right) \quad (4.19)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan buradaki

$$e^{\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!}$$

ifadesindeki $e^{\rho(x)}$ yerine

$$e^{\rho(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho(x))^k}{k!}$$

eşitini yazarsak

$$e^{\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho(x))^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!}$$

bulunur. Karşımıza çıkan iki sonsuz serinin çarpımı için Cauchy kuralını kullanırsak

$$e^{\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{k}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho(x))^k}{k!} \sum_{v=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{v}{n} \right) \frac{(n\rho(x))^v}{v!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=0}^k (f \circ \rho^{-1}) \binom{v}{n} \frac{(n\rho(x))^v (\rho(x))^{k-v}}{v! (k-v)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=0}^k (f \circ \rho^{-1}) \binom{v}{n} \frac{n^v \rho(x)^k}{v! (k-v)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeyi (3.19) da kullanırsak,

$$\begin{aligned}
S_n^\rho(f; x) - S_{n+1}^\rho(f; x) &= e^{-(n+1)\rho(x)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=0}^k (f \circ \rho^{-1}) \binom{v}{n} \frac{n^v \rho(x)^k}{v! (k-v)!} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} (f \circ \rho^{-1}) \binom{k}{n+1} \frac{((n+1)\rho(x))^k}{k!} \right) \\
&= e^{-(n+1)\rho(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^k (f \circ \rho^{-1}) \binom{v}{n} \frac{n^v}{v! (k-v)!} \right. \\
&\quad \left. - (f \circ \rho^{-1}) \binom{k}{n+1} \frac{(n+1)^k}{k!} \right) (\rho(x))^k
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer,

$$(f \circ \rho^{-1}) \binom{k}{n+1} \leq \frac{k!}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^k (f \circ \rho^{-1}) \binom{v}{n} \frac{n^v}{v! (k-v)!}$$

olduğuna gösterirsek ispat tamamlanır. Bunun için

$$\lambda_v = \frac{k!}{(n+1)^k} \frac{n^v}{v! (k-v)!} \quad \text{ve} \quad x_v = \frac{v}{n}, \quad 0 \leq v \leq k$$

seçersek,

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^k \lambda_v x_v &= \sum_{v=0}^k \frac{k!}{(n+1)^k} \frac{n^v}{v! (k-v)!} \frac{v}{n} \\
&= \frac{k!}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^k \frac{n^v}{v! (k-v)!} \frac{v}{n} \\
&= \frac{k!}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^k \frac{n^v}{v(v-1)! (k-v)!} \frac{v}{n} \\
&= \frac{k!}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^k \frac{n^v}{(v-1)! (k-v)!} \frac{1}{n} \\
&= \frac{k!}{(n+1)^k} \sum_{v=1}^k \frac{n^{v-1}}{(v-1)! (k-v)!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \frac{k!}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(k-1)! n^{v-1}}{v! (k-1-v)!} \\
&= \frac{k}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^{k-1} \binom{k-1}{v} n^v \\
&= \frac{k}{(n+1)^k} (n+1)^{k-1} \\
&= \frac{k}{n+1}
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\sum_{v=0}^k \lambda_v = \frac{1}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} n^v = 1$$

elde edilir. Yani

ρ – konveks olduğundan,

$$(f \circ \rho^{-1}) \left(\sum_{v=0}^k \lambda_v X_v \right) \leq \sum_{v=0}^k \lambda_v (f \circ \rho^{-1})(v_x)$$

dür. Daha açık olarak

$$f \circ \rho^{-1} \left(\frac{k}{n+1} \right) \leq \sum_{v=0}^k \frac{k!}{(n+1)^k} \frac{n^v}{v! (k-v)!} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{v}{n} \right)$$

dir. Buda ispatı tamamlar.

$f \circ \rho^{-1}$ lineer olduğunda ise

$$f \circ \rho^{-1} \left(\frac{k}{n+1} \right) = \sum_{v=0}^k \frac{k!}{(n+1)^k} \frac{n^v}{v! (k-v)!} (f \circ \rho^{-1}) \left(\frac{v}{n} \right)$$

olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Aral, Inoan ve Raşa tarafından literatüre kazandırılan ‘On the generalized Szasz-Mirakyan operators’ isimli çalışma detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Yaklaşımlar teorisinde yaygın olarak çalışılan Szasz-Mirakjan operatörü genelleştirilmiştir. Bunun için ρ fonksiyonuna bağlı Szasz-Mirakjan operatör dizisini oluşturulmuş ve ρ fonksiyonu hem Szasz-Mirakjan hem de ağırlıklı uzaylarda $\{1, \rho, \rho^2\}$ test fonksiyonu için Korovkin Teoremini karakterize etmiştir. Böylece daha kapsamlı bir sonuç elde edilmiştir. \mathbb{R}^+ üzerinde sürekli fonksiyon uzaylarının bir alt uzayında ρ fonksiyonunu kullanarak oluşturulan operatörlerin ağırlıklı uzaylarda özdeşlik operatörüne yakınsamasını veren teoremler verilmiştir. ρ fonksiyonunu kullanarak oluşturulan ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla ağırlıklı yaklaşım derecesini elde etmek için quantitative tipli teoremler verilmiştir. Ayrıca operatörün şekil koruma özelliği verilmiştir.

Sonuç olarak Szasz-Mirakjan operatörlerini genelleştirilmesinin ana özellikleri incelenmiş ve literatüre yeni bir yaklaşım süreci kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] A.Aral, D.Inoan and I.Raşa, On the generalized Szasz-Mirakyan operators,
- [2] A. D. Gadziev, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogues to that of P. P. Korovkin, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 218 (1974), 1001-1004. Also in Soviet Math Dokl. 15 (1974), 1433-1436 (in English).
- [3] A. D. Gadziev, Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems (in Russian), Math Z. 20, No:5 (1976) 781-786 translated in Math. Notes, 20, 5-6 (1977), 995-998.
- [4] A. Jakimovski, D. Levitan, Generalized Szász operator for the approximation in the infinite interval, Mathematica (Cluj) 34 (1969), 97-103.
- [5] A. Holhoş, Quantitative estimates for positive linear operators in weighted space, General Math, Vol:16, No:4, (2008), 99-110.
- [6] D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, I. Raşa, Bernstein-type operators which preserve polynomials, Compt. Math. Appl. 62 (2011) 158-163.
- [7] D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, I. Raşa, Asymptotic formulae via a Korovkin-type result, Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2012/217464, 2012.
- [8] F. Altomare, M. Campiti, Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, Walter De Gruyter, Berlin - New-York, 1994.
- [9] G. C. Jain, S. P. Pethe, On a generalization of Szasz-Mirakyan operator, Mathematica (Cluj) 35 (1970), 313-318.
- [10] L. Rempulska, S. Graczyk, On certain class of Szasz-Mirakyan operators in exponential weight spaces, Int. J. of Pure and Applied Math., 60 (2010), 259-267.
- [11] P.L. Butzer, H. Karsli, Voronovskaya-Type Theorems for Derivatives of the Bernstein-Cholodovsky Polynomials and the Szasz-Mirakyan Operator, Ann. Soc. Math. Polonae, Seria 1: Comm. Math., 49 (2009), 33-58.
- [12] N. I. Mahmudov, q- Szasz-Mirakyan operators which preserve x^2 ; Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol: 235, Issue 16, 15 (2011),4621-4628.
- [13] O. Szasz, Generalization of S. Bernsteins polynomials to the infinite interval. J. Research Nat. Bur. Standards, 45 (1950), 239-245.
- [14] Z. Walczak, On the convergence of the modified Szasz-Mirakyan operators, Yokohama Math. J., 51 (2004), 10-18.