



**FUZZY METRE KULLANILARAK  
FUZZY SAYILARININ SIRALANMASI  
VE SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI**

**Elmira ABBASİ**

**Doktora Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı  
Prof. Dr. Ercan ÇELİK  
2018  
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**FUZZY METRE KULLANILARAK FUZZY SAYILARININ  
SIRALANMASI VE SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI**

**Elmira ABBASI**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM  
2018**

**Her hakkı saklıdır**



T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**FUZZY METRE KULLANILARAK FUZZY SAYILARININ SIRALANMASI  
VE SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI**

Prof. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Elmira ABBASİ tarafından hazırlanan bu çalışma 30/03/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak **oybirliği(5/5)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Alaattin ESEN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Yüksel ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Prof. Dr. Hasan BULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Arzu AYKUT

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu **19/04/2018** tarih ve **16/31** nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. Cavit KAZAZ**  
Enstitü Müdürü

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

Doktora Tezi

### **FUZZY METRE KULLANILARAK FUZZY SAYILARININ SIRALANMASI VE SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI**

Elmira ABBASÍ

Atatürk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Zadeh (1965), fuzzy küme tanımını yaparak bilimin birçok dalında önemli uygulamaları bulmuştur. Kendisi bir Elektrik-Elektronik mühendisi olduğu hâlde böyle bir çalışma yapmakla fuzzy küme kavramının teknoloji ile gerçekte ne kadar yakından ilgili olduğunu göstermiştir. Böylece fuzzy kümesinin üzerinde de metrik yapısını oluşturmak fuzzy matematiğin temel konularından biri olmuştur. Ayrıca fuzzy, sayıların sıralanmasına karar vermede, optimizasyonda, bilgiler analizi, yapay zekâ, ekonomik sistem ve araştırma yürütmede önemli bir rol oynamaktadır. Fuzzy sayıları karşılaştırılmadan önce sıralanmak zorundadır. Bu tezde, çalışma sınırlarını aşmak ve hesaplamaların basitleştirilmesi için yeni bir fuzzymetre tanımlanıp yeni şartlar uygulanarak fuzzy sayıların sıralanması yapılacaktır. Başka yazarların sundukları yöntemler ile karşılaştırılıp yeni yöntemin daha uygun ve pratik olduğu ispatlanacaktır.

**2018, 55 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Fuzzy sayılar, Sıralama yöntemi, Aralık ölçüm, Skor değeri

## **ABSTRACT**

Ph. D. Thesis

### **RANKING FUZZY NUMBERS BY USING NEW DISTANCE MEASURE AND ITS RESULTS AND COMPARISON**

Elmira ABBASI

Ataturk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Zadeh (1965) showed important applications in many fields of science by defining the fuzzy set. He introduced how closely the fuzzy set is actually related to technology by making such a study as an electric- electronic engineer. Thus, building the metric structure on the fuzzy set has become one of the main topics of fuzzy mathematics. In addition fuzzy approach plays an important role in deciding to sort numbers, optimization, information analyses, artificial intelligence, economic system and making data research. Fuzzy numbers have to be sorted before they are determined. In this thesis, a new fuzzy meter is defined and the fuzzy numbers are sorted by applying new conditions in order to overcome the literature limits and to simplify the calculations. It will be proved that the new method is more appropriate and practical compared to the methods offered by the other authors.

**2018, 55 pages**

**Keywords:** Fuzzy numbers, Ranking method, Interval measurement, Score value

## TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alışma, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada, bana her türlü kolaylığı sağlayan tezin her aşamasında beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ercan ÇELİK'e ve Sayın Prof. Dr. Rahim SANEIFARD'e en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Bu tezin hazırlanması sürecinde benden yardımlarını esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden Dr. Öğretim Üyesi Mesut KARABACAK ve Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden Dr. Öğretim Üyesi Muhammed YİĞİDER ve Tahran Azad Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden Prof. Dr. Tofigh ALLAHVIRANLOO'ya teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

**Elmira ABBASİ**

**Mart, 2018**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR.....	ii
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	ix
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER.....</b>	<b>6</b>
2.1. Fuzzy Mantık ve Karar Verme .....	6
2.2. Fuzzy Küme ve Üyelik Fonksiyonu Kavramları.....	7
2.2.1. Tanım(küme ve üyelik fonksiyonu) .....	8
2.3. Kullanılan Bazı Terimlerin Tanımları .....	11
2.3.1. Destek ( <i>Support</i> ).....	11
2.3.2. Çekirdek ( <i>Core</i> ).....	11
2.3.3. Normallik (Olağanlık)-( <i>Normality</i> ).....	11
2.3.4. Karşılık ( <i>Crossover points</i> ) Noktası.....	12
2.3.5. Fuzzy Tek Ton ( <i>Singleton</i> ).....	12
2.3.6. $\alpha$ – Kesim ve Kuvvetli $\alpha$ – Kesimi .....	12
2.3.7. Örnek .....	12
2.3.8. Fuzzy Kümenin Yüksekliği.....	14
2.4. Fuzzy Kümeleri Gösteren Simgeler .....	14
2.5. Fuzzy Kümeler ve Temel İşlemler .....	15
2.5.1. Tümleyen.....	15
2.5.2. Birleşim .....	15
2.5.3. Kesişim.....	16
2.5.4. Alt Küme .....	17
2.5.5. Boş Fuzzy Küme .....	17
2.5.6. Tam Fuzzy Küme .....	18
2.6. Fuzzy Kümelerinin Temel İşlemlerinin Özellikleri .....	18

2.7. Fuzzy Kümelerinin Özel Özellikleri .....	19
2.7.1. Örnek .....	21
2.8. Fuzzy Kümelerde Konvekslik, Cebirsel İşlemler ve Kartezyen Çarpımı .....	21
2.8.1. Konvekslik.....	21
2.8.2. Fuzzy kümelerinin kartezyen çarpımı .....	22
2.8.3. Fuzzy kümelerinde cebirsel toplam.....	23
2.8.4. Fuzzy kümelerinde cebirsel çarpım.....	23
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM.....</b>	<b>24</b>
3.1. Fuzzy Sayılar .....	24
3.1.1. Fuzzy sayıların tanımlanması.....	24
3.1.2. Genelleştirilmiş fuzzy sayılar .....	24
3.1.3. Sezgisel fuzzy küme .....	25
3.1.4. Üçgensel fuzzy sayılar.....	25
3.1.5. Yamuksal fuzzy sayılar .....	26
3.1.6. Üçgensel ve yamuksal fuzzy sayıların farklı tanımı .....	27
3.1.7. Örnek .....	30
3.2. Fuzzy Metrik Uzayı.....	32
3.2.1. Fuzzy metrik uzayın temel kavramı .....	33
3.2.2. Fuzzy metrik uzayı .....	33
3.3. Fuzzy Sıralamalar .....	34
3.3.1. Ters simetri.....	34
3.3.2. Mükemmel ters simetri .....	34
3.3.3. Fuzzy kısmi sıralama .....	35
3.3.4. Lineer sıralama .....	36
3.3.5. Fuzzy ön sıralama.....	36
3.4. Yeni Metre İçin Özel Tanımlar .....	36
3.4.1. Tanım (küme ve üyelik fonksiyonu) .....	36
3.4.2. Tanım ( $A$ 'nın ağırlıklı ortalaması ve ağırlıklı genişliği).....	37
3.4.3. Tanım (parametrik mesafe) .....	38
3.4.4. Tanım (genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı).....	38
3.4.5. Tanım (aralıklı yaklaştırma operatörü).....	39
3.4.6. Tanım (sürekli aralıklı yakınsama operatörü) .....	40

3.5. Parametrik Aralığa Dayalı Genel Fuzzy Sayılar İçin, Yeni Uzaklık Ölçeği.....	40
3.5.1. Fuzzy parametrik aralıklı mesafe ölçütünün inşası .....	40
3.5.2. Metrik özellikleri .....	42
3.5.3. Genelleştirilmiş fuzzy sayıların sıralanması.....	44
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....</b>	<b>46</b>
4.1. Skor Değeri ve Yeni Yöntemin Tanımı .....	46
4.2. Sayısal Örnekler .....	47
4.2.1. Örnek .....	47
4.2.2. Örnek .....	49
4.2.3. Örnek .....	51
<b>5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....</b>	<b>53</b>
KAYNAKLAR .....	54
ÖZGEÇMİŞ .....	56

## SİMGELER DİZİNİ

*	Sürekli t-norm
$A^c$	$A$ fuzzy kümesinin tümleyeni
$A_\alpha$	$\alpha$ -kesim kümesi
$A'_\alpha$	Kuvvetli $\alpha$ -kesim kümesi
$ER_{sd}$	ER yöntemine göre skor değeri
$\sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$	$X$ sonlu evrensel küme iken, üyelik fonksiyonu
$\int_x \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$	$X$ sınırsız evrensel küme iken, üyelik fonksiyonu
$\mu_A(x)$	Üyelik fonksiyonu
$h(A)$	$A$ fuzzy kümesinin yüksekliği
ON	Orta nokta
$ER$	Bu teze özel aralık ölçütü
$M(x, y, t)$	Fuzzy metrik uzayı
$O$	Orijin noktası

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $X$ ayrık fuzzy küme.....	9
Şekil 2.2. $X$ sürekli fuzzy küme .....	10
Şekil 2.3. Genç, orta yaşlı ve yaşlı kavramlarını temsil eden üyelik fonksiyonları ile $A_2$ 'nin kesikli yaklaşımı gösterilmiştir .....	13
Şekil 2.4. $A$ ve $B$ fuzzy kümeleri .....	16
Şekil 2.5. $A$ 'nın tümleyeni .....	16
Şekil 2.6. $A$ ve $B$ 'nin birleşimi .....	16
Şekil 2.7. $A$ ve $B$ 'nin kesişimi .....	16
Şekil 2.8. Alt küme kavramı .....	17
Şekil 2.9. $A$ ve $A^c$ .....	20
Şekil 2.10. $A \cup A^c$ .....	20
Şekil 2.11. $A \cap A^c$ .....	20
Şekil 2.12. İki konveks fuzzy küme .....	22
Şekil 2.13. Konveks olmayan fuzzy küme.....	22
Şekil 3.1. Üçgen fuzzy sayı.....	26
Şekil 3.2. Yamuk fuzzy sayı .....	27
Şekil 3.3 Sayıların komşuluğu .....	28
Şekil 3.4. $A = (-5, -1, 1)$ Kümesinin komşuluğu .....	30
Şekil 4.1. $A, B$ ve $C$ fuzzy sayıları.....	48
Şekil 4.2. $A, B$ ve $C$ fuzzy sayıları.....	50
Şekil 4.3. $A$ ve $B$ fuzzy sayıları.....	52

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Klasik mantık-fuzzy mantık arasındaki temel farklılıklar .....	6
Çizelge 2.2. Genç, orta yaşlı ve yaşlı kavramlarını temsil eden üyelik fonksiyonları....	14
Çizelge 3.1. Değişik $\alpha$ kesim katsayıları için 65 normal değerinin komşulukları .....	31
Çizelge 4.1. Örnek 4.2.1'nin karşılaştırma sonuçları .....	49
Çizelge 4.2. Örnek 4.2.2'nin karşılaştırma sonuçları .....	51



## 1. GİRİŞ

Dünyadaki bazı olayları izah etmek için kesin ifadelerde bulunmak olanaksızdır. Olaylar çoğu zaman belirsiz aynı zamanda lineer olmama gibi nitelikler taşır. Cismin ısını kaybetmesi, bir kapasitörün şarj veya deşarj olması bu lineer olmama niteliğine örnek verilebilir. Bir miktar uranyumun bozunması sırasında hangi atomun ne zaman bozunacağını bilinememesi aynı zamanda belirsiz bir durumdur. Bundan dolayı olaylar bulanıklık açısından ele alınırsa daha doğru ve faydalı neticeler elde edilebilir. Fuzzy mantık, bu anlamda kullanılacak etkili bir mantık anlayışıdır. Terimler ya da ölçülerin açık bir şekilde ölçülememesi nedeniyle çoğu kez belirli olmayan (kesin olmayan) ifadeler kullanılır. Bundan dolayı fuzzy mantık bazı sorulara basit manada evet-hayır cevabı verilemeyen durumları içerir. Bulanıklığın ve fuzzy mantığın esası buna dayanır.

Fuzzy mantığın, klasik mantık sistemlerinden farkı insan düşüncesine ve dilin mantığına daha uygun olmasıdır. Matematiksel modellemelerde ve ölçülen değerlerin yanısıra insanların düşüncesini de mühendislik sistemlerine dahil ederek bunu formülize eder. Günlük konuşma dilini kullanan fuzzy mantık, biraz yakın, çok yakın, uzak, çok uzak, gibi günlük yaşamda kullanılan kelimeler vasıtasıyla insan mantığına en çok benzeyen doğrulukla denetlemeyi sağlayabilir. Fuzzy mantık kontrolörü kullanılarak elektrikli ev aletlerinden oto elektroniğine, günlük kullanılan iş makinelerinden üretim mühendisliği gibi her alanda kendisine uygulama alanı bulabilir (Günel 1997). Klasik mantık, iki ayrık değer alabilen değişkenleri ve mantıksal anlam taşıyan işlemleri ele alır. Burada değişkenlerin aldığı iki değer farklı biçimde ifade edilebilir (doğru ve yanlış, evet ve hayır, gibi). Bu nedenle her değişken yalnızca 1 veya 0 gibi iki ayrı değer alır (Morris 1997).

Fuzzy mantık; klasik mantığa alternatif olarak geliştirilen ve günlük yaşamda kullandığımız parametrelere üyelik dereceleri atayan ve olayların hangi nicelikte gerçekleştiğini belirleyen çoklu bir mantıktır. Bulanıklık çok değer alan anlamına gelir. İkili mantık 0-1 önermelerini almasına rağmen, bulanıklık en az üç önerme alabilir. Bundan dolayı bu mantık sayesinde küme üyeleri derecelendirilmiş olur. Ayrıca bulanıklık, siyah ve beyaz arasındaki sonsuz sayıda gri tonların olduğunu gösterir. Örnek

verecek olursak uzaklıkla ilgili bir durumda, uzaklığın sadece yakın veya uzak olduğunu belirtmez, aynı zamanda ne kadar yakın veya ne kadar uzak olduğunu da açıklar.

Fuzzy mantığının bir özelliğide; basit olan durumları basit ifade etmektir. Klasik mantık bizi kesin karar vermeye zorlamaktadır. Örneğin, batı edebiyatında “Novel” isimli roman, en az 90 sayfadan oluşan bir eserdir. “Novella” ise 90 sayfadan daha az olan bir eserdir. Buna göre 92 sayfalık bir eser, “Novel” olurken, 89 sayfalık bir eser “novella” olur. Eğer bilgisayarlarımızda metnin puntosu büyütülürse sayfa sayısı artacağından Novella, Novel’e dönüşür. Bundan dolayı Fuzzy mantık bu tür yanlışlıkları önlemiş olur. Klasik mantıkta ise katı sınırlar vardır. Örneğin, uzun insanların alt sınırını 1.75 cm alırsak. Klasik mantığa göre, “Murat’ın boyu uzun mudur?” sorulduğunda, eğer Murat’ın boyu 1.75 cm’den büyükse Murat’ın boyu uzun, 1.74 cm ise boyu kısadır denilir. Oysa fuzzy mantık, Murat’ın uzun boylu ya da kısa boylu olduğunu değil ne kadar uzun veya ne kadar kısa boylu olduğunu inceler. Yani klasik mantık gibi uzuna 1, kısaya 0 gibi kesin değerler vermez. 0.1, 0.2, 0.3 ... gibi esnek değerler verir. Bundan dolayı 1.74 cm uzunluğundaki bir insana kısa (0) demek yerine 0.3 gibi bir uzunluktadır denir. Fuzzy mantığında belli sınırlar vardır ve bu sınırlar koşullara göre değişebilir. Onu klasik mantıktan ayıran özellik bu sınırların daha esnek olmasıdır. İşte bu esneklik sayesinde fuzzy mantık uygulandığı her alanda çok daha etkili ve duyarlı sonuçlar vermektedir.

İlk kez Fuzzy mantık 1960 yılında Berkeley Üniversite’sinde Dr. Lotfi Zadeh tarafından günlük hayatta kullandığımız sözcüklerdeki saklı olan belirsizliği modellemek için ortaya atılmıştır. Zadeh, fuzzy mantık teorisinin bağımsız ve tam bir teori olmaktan çok bulanıklaştırma metodunun, herhangi bir teorisinin ayrık formdan sürekli forma dönüştürülmek amacıyla genelleştirilmesi için kullanılan bir metodoloji olarak ele alınmasını amaçlıyordu (Zadeh 1973).

Fuzzy mantığının uygulaması 1973 yılında, Queen Mary Koleji’nde Profesör H. Mamdani tarafından bir buhar makinesi üzerinde uygulanmıştır. Ticari olarak kullanımı 1980 yılında, Danimarka’daki bir çimento fabrikasının fırınına kontrol etmek için kullanılmıştır. Fırında çok hassas bir denge ile oranlanması gereken sıcaklık ve oksijen

ayarını en uygun biçimde yapmıştır. Bundan başka bir uygulama da Hitachi firması tarafından 1987 yılında Sendai Metro'sunda ortaya konulmuştur. Fuzzy mantığı sayesinde trenin istenen pozisyonda durması üç kat daha iyileştirilmiş, kullanılan enerjide de %10 tasarruf edilmiştir. Daha sonra buna benzer bir sistemin Tokyo Metro'suna da kurulması düşünülmüştür. Yamaichi Securities tarafından geliştirilen fuzzy mantık esaslı uzman sistemi, Ekim 1988 yılında Tokyo Borsasındaki krizin sinyallerini onsekiz gün önce haber vermiştir.

Bu uygulamalardan sonra fuzzy mantığa olan talep artmıştır. 1989 yılında uluslararası bir çalışma ortamı oluşturabilmek için SGS, Thomson, Omron, Hitachi, NCR, IBM, Toshiba ve Matsuhita gibi dünyada önemli 51 firma tarafından LIFE (Laboratory for Interchange Fuzzy Engineering) laboratuvarları kuruldu(Günel 1997). Ayrıca LIFE'in yanısıra FLSI (Fuzzy Logic Systems Institute) araştırma merkezi kuruldu. Bu merkezin hedefi Fuzzy mantığa göre Elektronik, Otomotiv ve Üretim teknolojisi alanında yeni uygulamalar kazandırmaktır.

Fuzzy Mantık, makineleri daha etkin hale getirmiş ve birçok ürün ve üretim süreci bu makineler sayesinde artmıştır. Bu makineler arasında fotoğraf makineleri, kameralar, televizyonlar, mikro dalga fırınlar, çamaşır makineleri, elektrikli süpürgeler, otomatik şanzımanlar, motor kontrolü, metro denetim mekanizmaları, asansörler ve mikro devreler vardır. Fuzzy teorisi, her bir sözcüğün anlamında gizli olan bilinmeyeni temsil eden bir teoridir. Bu teorinin bir uygulaması olan Fuzzy yapay zeka'nın gelecekte insanlarla bilgisayarlar arasında kurulacak yakın ilişkide önemli bir rol oynayacağı beklenmektedir. Fuzzy mantığın Pilav pişirme aletlerinden asansörlere, arabaların motor ve süspansiyon sistemlerinden nükleer reaktörlerdeki soğutma ünitelerine, klimalardan elektrikli süpürgelere kadar uygulandığı birçok alan vardır.

Bu alanlarda elde edilen enerji sayesinde, iş gücü ve zaman tasarrufu adına ne kadar çok önem verilmesi gereken bir sistem olduğunu görülmektedir. Fuzzy mantığın gelecekteki uygulama alanlarının daha da genişleyeceği ön görülmektedir.

Fuzzy mantığın bir takım avantajları ve dezavantajları vardır.

### **Avantajları**

- Fuzzy mantık günlük hayatta belirsiz, zamanla değişebilen, karmaşık, iyi tanımlanamamış sistemlerin denetimine basit çözümler getirir.
- Eğer sistem basit bir matematiksel modelle tanımlanmış sistem ise o zaman klasik mantığa dayalı bir denetleme yeterli olacaktır.
- Eğer sistem karmaşık bir sistem ise klasik mantık uygulamak hem çok zor hem de maliyeti yüksek olur. Buna karşılık fuzzy mantık denetimi, klasik mantığa göre sistemi hem daha iyi inceler hem de ekonomiktir.
- Fuzzy mantık doğrudan kullanıcı girişlerine ve kullanıcının deneyimlerinden yararlanabilmesine olanak sağlamaktadır.
- Bilindiği gibi otomobillerde otomatik vites değişikliği, motorun belli hızlara ulaşmasıyla otomatik olarak gerçekleşir. Manuel vitesli bir otomobilde ise sürücü kullanım stiline göre belli durumlarda vites değiştirir. Subaru firması tarafından üretilen justy tipi otomobilde kullanılan aktarım organının değiştirilmesi, bir kayışın konumunun fuzzy mantık kullanılarak değiştirilmesi ile sağlanır. Böylece arabanın ivme ve performansı sürekli olarak ayarlanır hale gelmiş olur. Subaru firması, bu otomobillerde kullandığı fuzzy mantık üyelik fonksiyonlarını, otomobili test şoförlerine kullandırarak ve onlardan ivme ve performans açısından en iyi sonucu öğrenerek ayarlamıştır. Honda ve Nissan firmalarında bu alanda benzer çalışmalar yapmıştır.

### **Dezavantajları**

- Fuzzy mantıkta denetimde kullanılan kurallar deneyime dayanır.
- Üyelik fonksiyonunun seçiminde belirli bir metod yoktur. En uygun olan fonksiyon deneme ile bulunur. Bu işlem zaman alıcı bir işlemdir.
- Denetlenen sisteminin bir kararlılık analizi yapılamaz ve sistemin nasıl cevap vereceği tahmin edilemez. Sadece benzetim çalışması yapılabilir(Yaralıoğlu 2004).

Bu tezde, fuzzy sayılarına, sürekli parametrik aralığa dayalı yeni uzaklık ölçęi, yani yeni bir metre yöntemi tanıtılmıştır. Bu metre, bir sıralama yöntemi olarak skor değeri yöntemi ile geliştirilmiştir. Böylelikle, fuzzy sayıları sıralanmış ve sonuç bir kaç örnekte gösterilmiştir. Tezin sonucunda fuzzy sayılarının sıralanmasına önerilen uzaklık yönteminin, kıyaslanan yöntemlere göre daha az hatalı ve daha net olduğu gösterilmiştir.



## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tezde sık kullanılan bazı temel tanımlara ve kavramsal bilgilere yer verilecektir.

### 2.1. Fuzzy Mantık ve Karar Verme

Karar vericiler hangi şartlarda ve boyutlarda karar verirlerse versinler, bir belirsizlik ortamı içinde işlevlerini yerine getirmek zorundadırlar. Verilen kararların doğruluğu ise söz konusu belirsizliğin riske dönüştürülebildiği ölçüde sağlanacaktır. Ancak karar vericiler karar sürecinde klasik bilimsel yaklaşım ve bu yaklaşımın içerdiği yöntemleri kullanıyorsa, sonuçta verilen kararlar, iyi – kötü, güzel – çirkin, doğru – yanlış, evet – hayır, siyah – beyaz ya da 0 – 1 gibi zıt yönlü kararlar olacaktır. Oysa gerçek yaşam mutlak ayırım üzerine kurulu değildir. Diğer bir deyişle karar ortamlarında mutlak siyah ve mutlak beyazın yanında binlerce gri tonunun varlığı unutulmamalıdır.

Bu noktada genel anlamda karar süreçlerinde belirsizliğin nasıl öngörüleceği ve nasıl karar süreçlerinin bir parçası haline getirilebileceği yolunda çalışmalar başlamış ve bu çalışmaların sonunda alternatif bilimsel yaklaşım düşüncesi ortaya atılmıştır. Bu süreçteki son nokta Loutfi Zadeh'in Fuzzy Mantık Teorisi olmuştur. Klasik mantık ile fuzzy mantık arasındaki temel farklılıklar Çizelge 2.1'de gösterilmiştir.

**Çizelge 2.1.** Klasik mantık-fuzzy mantık arasındaki temel farklılıklar

<b>Klasik Mantık</b>	<b>Fuzzy Mantık</b>
A veya A Değil	A ve A Değil
Kesin	Kısmi
Hepsi veya Hiçbiri	Belirli Derecelerde
0 veya 1	0 ve 1 Arasında Süreklilik
İkili Birimler	Fuzzy Birimler

Zadeh'e göre fuzzy mantık çoklu değerlidir. Klasik mantığın 0 – 1 önermelerine karşılık fuzzy mantık, üç veya daha fazla sayıda önerme oluşturur (Güneş 1997).

Fuzzy mantığın başlıca özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- “doğru” , ”çok doğru” , ”az çok doğru” v.b. gibi sözel olarak ifade edilen (linguistik-dilsel-değişkenli) doğruluk derecelerine sahip olmasıdır.
- Geçerliliği kesin olmayan fakat yaklaşık olan çıkarım kurallarına sahip olmasıdır.
- Her kavramın bir derecesinin olmasıdır.
- Her mantıksal sistemin bulanıklaştırılabilmesidir.
- Fuzzy mantıkta bilginin, fuzzy kısıtlara ait değişkenlerin esnekliği veya denkliğiyle yorumlanmasıdır (Yaralıoğlu 2004).

Klasik bir küme, kesin sınırlamalarla verilen bir kümedir. Örneğin, klasik bir küme  $A = \{x | x > 6\}$  şeklinde belirtilebilir (Anonim 2018a).

Kapalı sınır noktası burada 6'dır. Burada olduğu gibi eğer  $x$  bu sayıdan büyükse  $x$ ,  $A$  kümesine aittir aksi takdirde  $x$  bu kümeye ait değildir. Klasik kümelere göre fuzzy kümeler, adından da anlaşılacağı gibi kesin limitleri olmayan bir kümedir. Yani, "kümeye ait olan"dan "kümeye ait olmayana" geçiş aşamalı olur ve fuzzy kümeler "su sıcak" veya "sıcaklık çok yüksek" gibi tanımlarda olduğu gibi modellemede çoğunlukla dilsel açıklamalara esneklik kazandıran bu düzgün geçiş üyelik fonksiyonları olarak tanımlanmaktadır.

## 2.2. Fuzzy Küme ve Üyelik Fonksiyonu Kavramları

Fuzzy küme kavramında klasik kümenin elemanıdır veya değildir ifadesi yerine kümenin şu kadar elemanıdır ya da şu kadar elemanı değildir ifadeleri yer alır. Bir eleman için eleman olma durumu 1 ve olmama durumu 0 ile değil 0 ile 1 arasındaki üyelik derecesi ile gösterilir. Büyük üyelik dereceleri az fuzzy kabul edilirken küçük üyelik dereceleri ise çok fuzzy olarak kabul edilmektedir.

Uygulamaların birçoğunda üyelik fonksiyonu, giriş bölümünde örnekte verilen boy uzunluğu gibi basit bir şekilde olmayacaktır. Fuzzy mantıkta, dilsel ifade kolaylığı sağlayacak bölgelerin sınırlarını belirtmede ve algılayıcı bilgilerine (gerçek bilgiler) ait üyelik ağırlıklarının tespit edilmesinde kullanılmak üzere uygun üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi gerekir. Üyelik fonksiyonları, sistem parametrelerini tanımlar.

$X$  bir nesnelere uzayı,  $x$  de bu uzaya ait bir eleman olsun.  $A$  kümesi de bu  $X$ 'in alt kümesi olan bir klasik küme olsun. Bu durum da her bir  $x$  için bu  $A$  kümesine aittir ya da ait değildir. Her bir  $x$  elemanı için bir karakteristik fonksiyon tanımlayarak klasik  $A$  kümesi  $(x, 0)$  veya  $(x, 1)$  sıralı ikililerle temsil edilebilir.  $(x, 0)$ 'in anlamı  $x \notin A$ ,  $(x, 1)$ 'in anlamı  $x \in A$ 'dır. Bu gösterim,  $x$  elemanının  $A$  kümesine ait olup olmadığını belirten bir gösterimdir.

Fuzzy kümelerin karakteristik fonksiyonları ise bir elemanın ilgili fuzzy kümeye üyeliğinin derecesini gösteren  $[0 - 1]$  aralığındaki değerlere sahip olmasını gösterir.

### 2.2.1. Tanım(küme ve üyelik fonksiyonu)

Bu tanımlamada  $A$  kümesi bir fuzzy küme  $\mu_A(x)$  ise bu kümeye ilişkin üyelik fonksiyonu

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in X \} \quad (2.1)$$

şeklindedir.

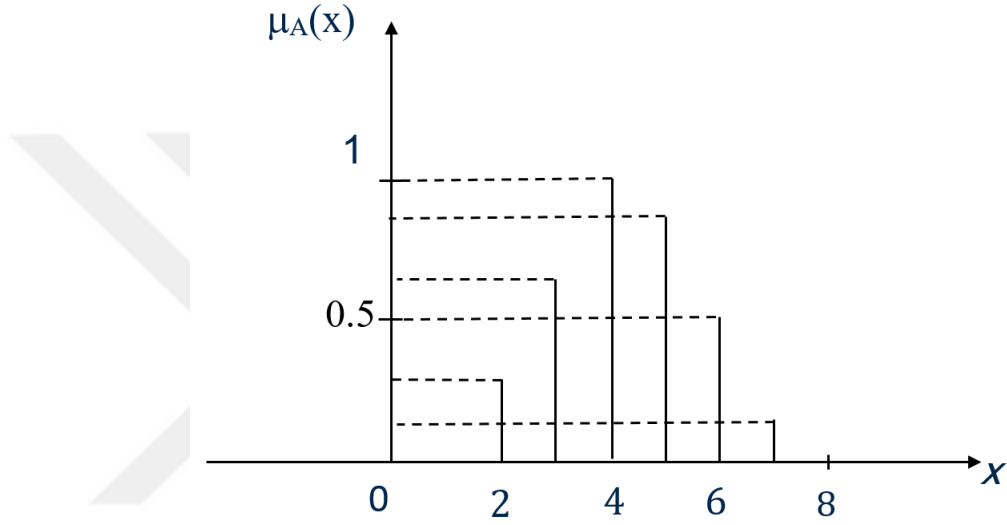
Fuzzy kümeler, hem ayrık uzayda hem de sürekli uzayda tanımlı olabilirler. Bu durum iki örnekle açıklanabilir. Öncelikle  $X$  ayrık fuzzy kümesi,

$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$  olarak öğrencinin bir dönemde alabileceği kursların kümesi olarak kabul edildiğinde fuzzy küme;

$A =$  "alınabilecek kursların sayısı" şeklinde olup şöyle tanımlanabilir:

$$A = \{ (1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.9), (6, 0.5), (7, 0.2), (8, 0.1) \} \quad (2.2)$$

Bu fuzzy küme aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



**Şekil 2.1.**  $X$  ayrık fuzzy küme

Sürekli uzaylar için de şöyle örnek verilebilir.  $X$ 'in sürekli fuzzy kümesi,

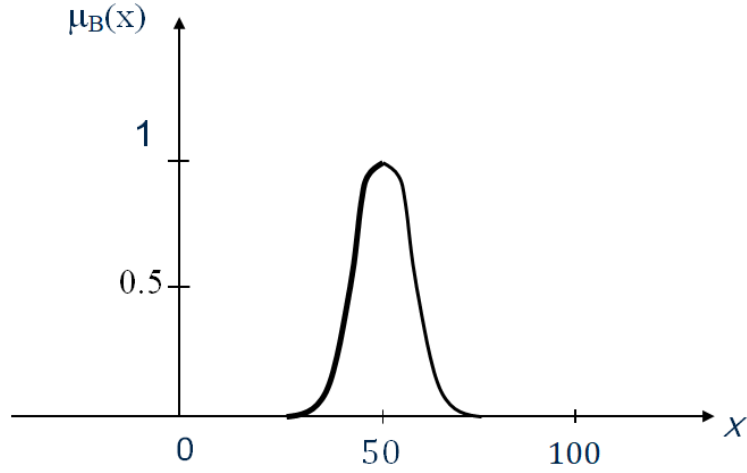
$X = \mathcal{R}^+$  insanın alabileceği olası yaş değerleri alındığında  $B$  fuzzy kümesi,

$B =$  "yaklaşık 50 yaşında" şu şekilde tanımlanabilir:

$$B = \{ (x, \mu_B(x)) \mid x \in X \} \quad (2.3)$$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4} \quad (2.4)$$

Bu küme aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.2.  $X$  sürekli fuzzy küme

$A$  fuzzy kümesini tanımlamanın diğer bir yolu ise şeklindedir:

$$A = \begin{cases} \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} & \text{ayrık uzay için} \\ \int X \mu_A(x) / X & \text{sürekli uzay için} \end{cases} \quad (2.5)$$

(2.5) eşitliğindeki toplam ve integral sembolleri ikililerinin birleşimi anlamına gelip toplam veya integrali belirtmez. Benzer şekilde, "/" ifadesi sadece bir işarettir ve bölme anlamına gelmez. Buna göre örneklerdeki fuzzy serileri yeniden yazılır ise

$$A = 0.1 / 1 + 0.3 / 2 + 0.8 / 3 + 1.0 / 4 + 0.9 / 5 + 0.5 / 6 + 0.2 / 7 + 0.1 / 8 \quad (2.6)$$

ve

$$B = \int_{R^+} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^2} / x, \quad (2.7)$$

şeklinde olacaktır. Birinci ve ikinci örnekte, fuzzy kümenin çiziminin iki şeye bağlı olduğu görülmektedir. Uygun bir evrensel deyişin tanımı ve uygun bir üyelik fonksiyonunun (ÜF) belirlenmesidir.

Burada üyelik fonksiyonunun özelliklerinin kesinlikle subjektif olduğu anlaşılmalıdır. Yani üyelik fonksiyonları aynı kavramlar için açıkça belirtilmiş olmalıdır. Bu subjektiflik, soyut fikirlerin belirsiz olma doğasından kaynaklanmaktadır ve rastgelelik ile ilgili yapılabilecek bir şey yoktur. Bu yüzden subjektiflik ve rastgele olmama, fuzzy kümelerinin çalışma alanları ile rasgele olayların nesnel işlemleri ile uğraşan olasılık teorisi arasındaki öncelikli farkı oluşturur.

### 2.3. Kullanılan Bazı Terimlerin Tanımları

#### 2.3.1. Destek (*Support*)

$A$  fuzzy kümesinin desteği  $X$  uzayındaki  $x$ 'lerden  $\mu_A(x) > 0$  koşulunu sağlayanların oluşturduğu bir kümedir.

$$\text{support}(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2.8)$$

#### 2.3.2. Çekirdek (*Core*)

$A$  fuzzy kümesinin çekirdeği  $X$  uzayındaki  $x$ 'lerden  $\mu_A(x) = 1$  koşulunu sağlayanların oluşturduğu bir kümedir.

$$\text{Core}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\} \quad (2.9)$$

#### 2.3.3. Normallik (Olağanlık)-(*Normality*)

Bir fuzzy kümenin çekirdek kümesi boş küme değilse o fuzzy küme normaldir.

### 2.3.4. Karşılık (*Crossover points*) Noktası

Fuzzy kümeyi tanımlayan üyelik fonksiyonunun 0.5 değerini aldığı noktadır.

$$\text{crossover}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 0.5\} \quad (2.10)$$

### 2.3.5. Fuzzy Tek Ton (*Singleton*)

$\mu_A(x) = 1$  koşulunu sağlayan tek bir noktaya sahip fuzzy kümedir.

### 2.3.6. $\alpha$ – Kesim ve Kuvvetli $\alpha$ – Kesimi

$A$  fuzzy sayısının  $\alpha$  – Kesimi

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.11)$$

$$A'_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

### 2.3.7. Örnek

Genç, orta yaşlı ve yaşlı insan kavramını temsil eden  $[0,80]$  aralığında tanımlı üç fuzzy kümeyi göz önüne alalım (Anonim 2018b). Sırasıyla  $A_1, A_2, A_3$ .

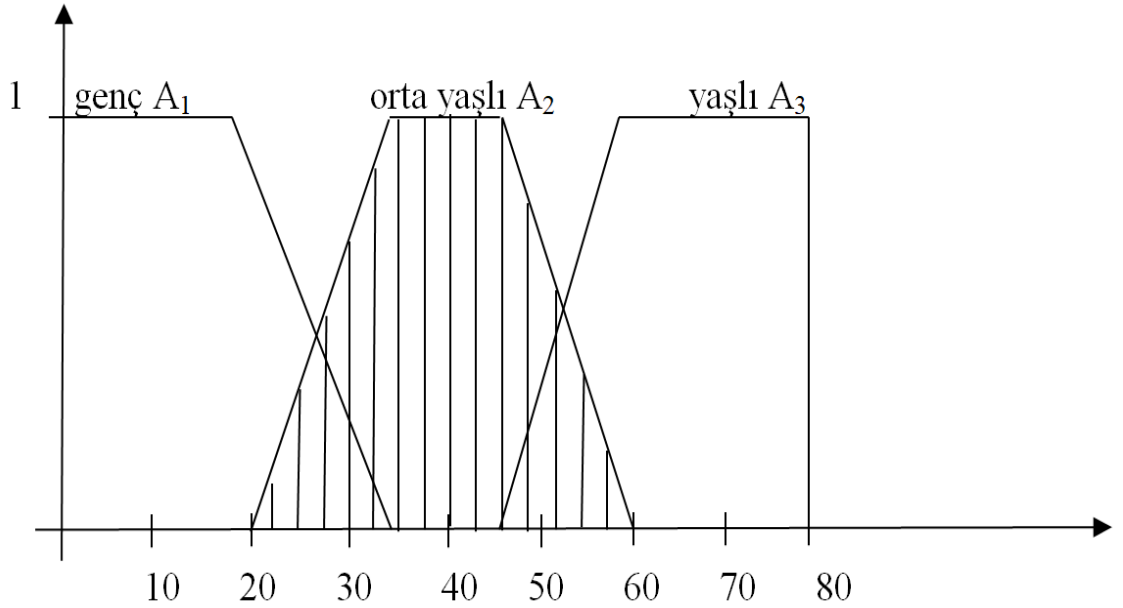
$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 20 \\ (35 - x)/15 & 20 < x \leq 35 \\ 0 & x > 35 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 20 \text{ veya } x \geq 60 \\ (x - 20)/15 & 20 < x < 35 \\ (60 - x)/15 & 45 < x < 60 \\ 1 & 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 20 \\ (35 - x)/15 & 20 < x < 35 \\ 0 & x \geq 35 \end{cases}$$

şeklinde olsun.

$A_2$  fonksiyonunun mümkün bir kesikli ayırık yaklaşımı (*discrete approximation*), Şekil 2.3'de ve sayısal değerleri Çizelge 2.2'de görülmektedir. Bu yaklaşımlar, fuzzy kümelerinin bilgisayar gösterimlerinde sıkça kullanılır. Fuzzy kümelerin en önemli kavramlarından biri  $\alpha$  –kesit ve varyantı güçlü  $\alpha$  –kesittir.



**Şekil 2.3.** Genç, orta yaşlı ve yaşlı kavramlarını temsil eden üyelik fonksiyonları ile  $A_2$ 'nin kesikli yaklaşımı gösterilmiştir.

**Çizelge 2.2.** Genç, orta yaşlı ve yaşlı kavramlarını temsil eden üyelik fonksiyonları

$X$	$A_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \dots, 58\}$	0
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \dots, 44\}$	1.00

### 2.3.8. Fuzzy Kümesinin Yüksekliği

A fuzzy kümesinin en büyük üyelik derecesine o kümenin yüksekliği denir.

$$h(A) = \sup_{x \in A} A(x) \quad (2.13)$$

şeklinde gösterilir.

### 2.4. Fuzzy Kümeleri Gösteren Simgeler

- 1- Fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu direkt gösterilir.
- 2- Fuzzy küme bir ikili kümede ikililerle de gösterilir.  $A = \{(x, \mu_A(x) \mid x \in X\}$
- 3-  $X$  bir sonlu evrensel küme  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olduğunda  $A$  fuzzy alt küme

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\}$$

veya

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

şekilde gösterilir.

İkinci ifadede + işareti toplama anlamına gelmez birleşim anlamındadır.  $X$  sınırsız evrensel küme olduğu takdirde  $A = \int_x \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$  ile gösterilir. Burada  $\int$  sembolü birleşim anlamına gelir.

## 2.5. Fuzzy Kümeler ve Temel İşlemler

$X$  evrensel küme,  $A$  ve  $B$ ,  $X$ 'in iki fuzzy alt kümesi olsun (Şekil 2.4).

### 2.5.1. Tümlen

$A$  fuzzy kümesinin tümleneni yani  $A^c$  de bir fuzzy kümedir. Ve bu küme

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X \quad (2.14)$$

üyelik fonksiyonuyla tanımlanmaktadır (Şekil 2.5).

### 2.5.2. Birleşim

$A \cup B$  işlemi  $A$  ve  $B$  kümesi için birleşim işleminin dualidir.

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \quad \forall x \in X \quad (2.15)$$

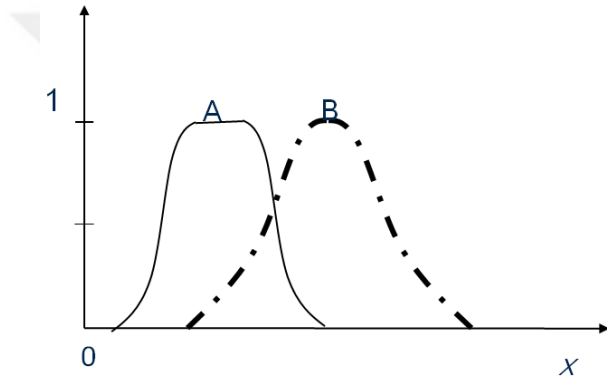
ile tanımlanır(Şekil 2.6).

### 2.5.3. Kesişim

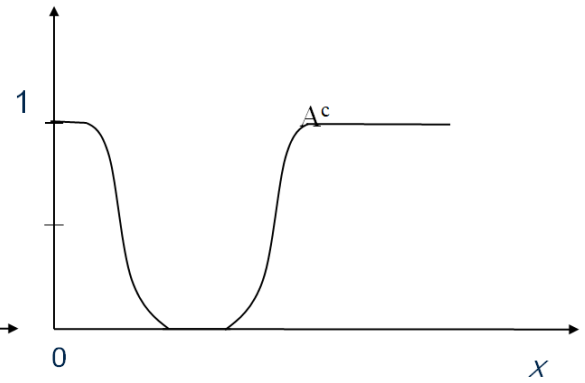
$A$  ve  $B$  kümelerinin kesişimi  $A \cap B$  üyelik fonksiyonu yardımı

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \quad \forall x \in X \quad (2.16)$$

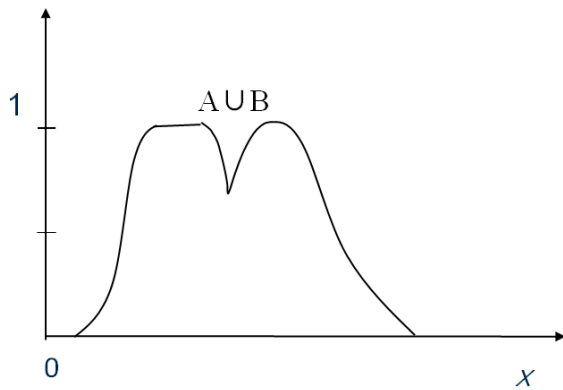
ile tanımlanır(Şekil 2.7).



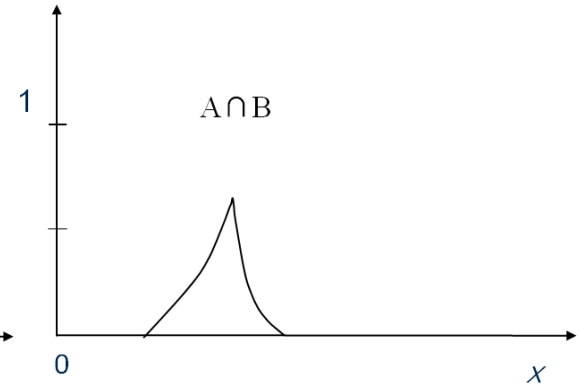
Şekil 2.4.  $A$  ve  $B$  fuzzy kümeleri



Şekil 2.5.  $A$ 'nın tamamlayıcısı



Şekil 2.6.  $A$  ve  $B$ 'nin birleşimi



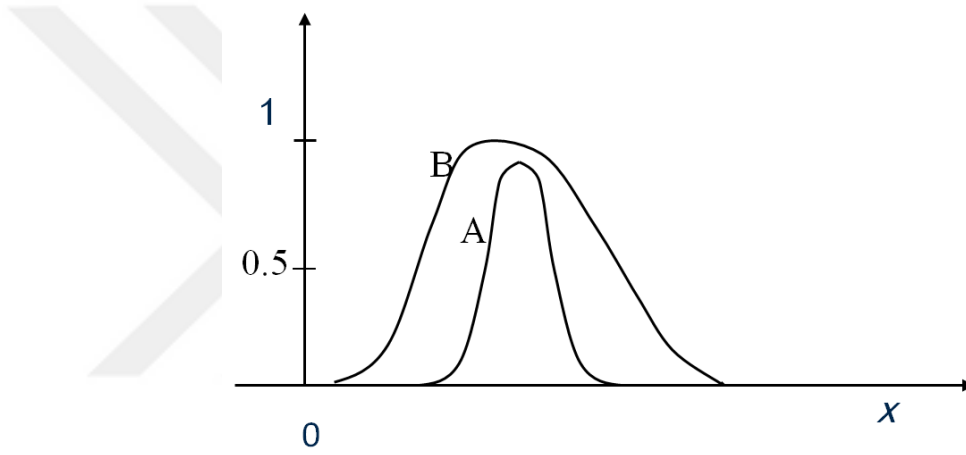
Şekil 2.7.  $A$  ve  $B$ 'nin kesişimi

### 2.5.4. Alt Küme

Eğer

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (2.17)$$

olarak tanımlanıyorsa  $A$  kümesi  $B$  kümesinin fuzzy alt kümesidir (Şekil 2.8).



Şekil 2.8. Alt küme kavramı

### 2.5.5. Boş Fuzzy Küme

Eğer

$$\forall x \in X \rightarrow \mu_A(x) = 0 \quad (2.18)$$

olarak tanımlanıyorsa  $A$  kümesine boş fuzzy küme denir.

### 2.5.6. Tam Fuzzy Küme

Eğer

$$\forall x \in X \rightarrow \mu_A(x) = 1 \quad (2.19)$$

olarak tanımlanıyorsa  $A$  kümesine tam fuzzy küme denir.

### 2.6. Fuzzy Kümelerin Temel İşlemlerinin Özellikleri

$X$  evrensel küme;  $A, B$  ve  $C, X$ 'in üç fuzzy alt kümesi olsun.

Fuzzy kümeler ve klasik kümeler arasındaki ortak özellikler:

Aynılık özelliği

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Değişme özelliği

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Birleşme özelliği

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Dağılma özelliği

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

De Morgan kuralı

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

## 2.7. Fuzzy Kümelerin Özel Özellikleri

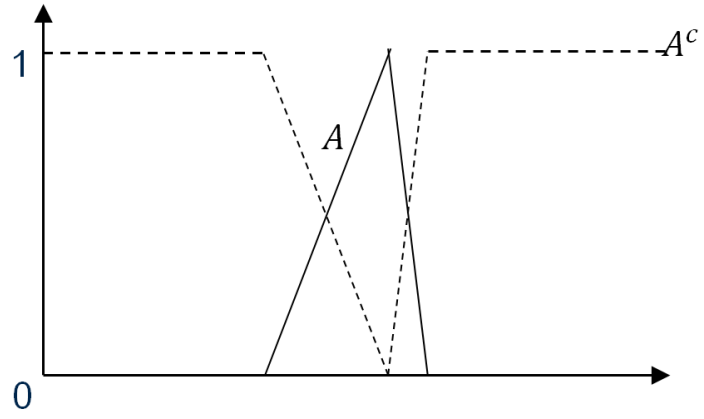
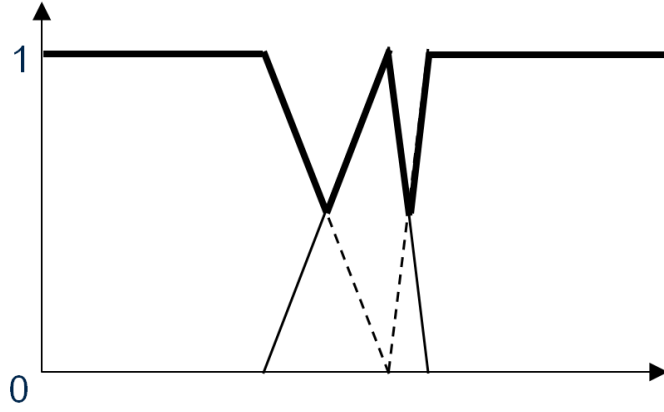
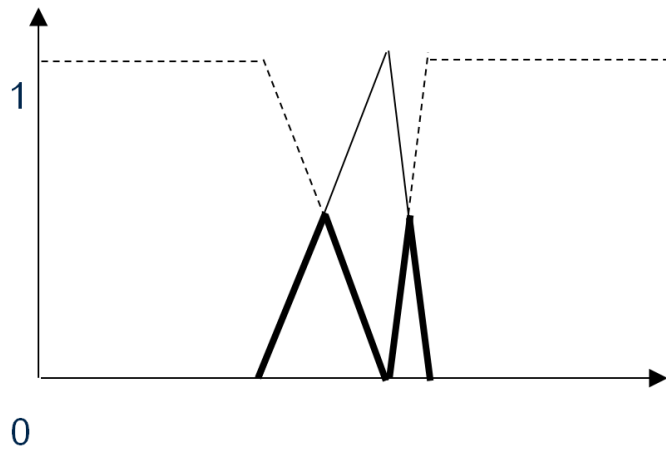
$$A \cup A^c = X$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

(a)  $A$  ve  $A^c$  klasik kümesinin  $[0,1]$  aralığındaki grafiği (Şekil 2.9)'da gösterilmiştir.

(b)  $A \cup A^c = X$  matematiksel ifadesinin  $[0,1]$  aralığındaki grafiği (Şekil 2.10)'da gösterilmiştir.

(c)  $A \cap A^c = \emptyset$  matematiksel ifadesinin  $[0,1]$  aralığındaki grafiği (Şekil 2.11)'de gösterilmiştir.

Şekil 2.9.  $A$  ve  $A^c$ Şekil 2.10.  $A \cup A^c$ Şekil 2.11.  $A \cap A^c$

### 2.7.1. Örnek

$X = \{a, b, c\}, A = \{(a, 0.3), (b, 0.6), (c, 0.5)\}, B = \{(a, 0.2), (b, 0.7), (c, 0.4)\}$  olsun.

$$A \cup B = A \vee B = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{(a, 0.3), (b, 0.7), (c, 0.5)\}$$

$$A \cap B = A \wedge B = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{(a, 0.2), (b, 0.6), (c, 0.4)\}$$

elde edilir.  $A^c = \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.5)\}$  olup

$$A \cap A^c = \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.5)\} \neq \emptyset$$

$$A \cup A^c = \{(a, 0.7), (b, 0.6), (c, 0.5)\} \neq X$$

olduğu görülür.

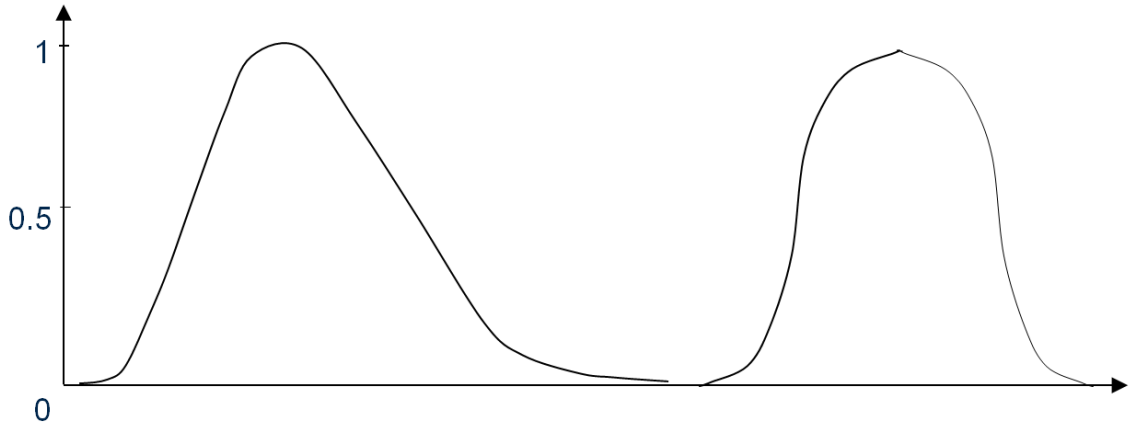
## 2.8. Fuzzy Kümelerde Konvekslik, Cebirsel İşlemler ve Kartezyen Çarpımı

### 2.8.1. Konvekslik

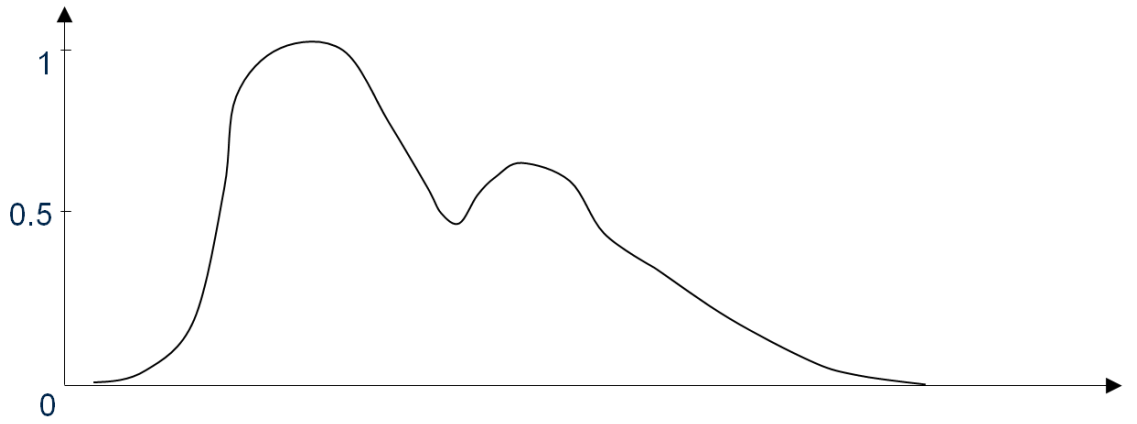
$x_1, x_2 \in X$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  olmak üzere

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \quad (2.20)$$

şartını sağlayan küme konvektir. Başka bir deyişle, bir kümenin tüm alfa seviye kümeleri konveks ise o küme de konvektir. Şekil 2.12 ve 2.13'de konveks olan ve konveks olmayan fuzzy kümeler gösterilmiştir.



Şekil 2.12. İki konveks fuzzy küme



Şekil 2.13. Konveks olmayan fuzzy küme

### 2.8.2. Fuzzy kümelerinin kartezyen çarpımı

$A_1, A_2, \dots, A_n$  sırasıyla  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uzaylarında tanımlı fuzzy kümeler olduğu varsayıldığında bu kümelerin kartezyen çarpımı  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  uzayında fuzzy küme olacaktır. Bu kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)}(x) = \min_i \{\mu_{A_i}(x_i) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_i\} \quad (2.21)$$

şeklindedir.

### 2.8.3. Fuzzy kümelerinde cebirsel toplam

$A$  ve  $B$  kümelerinin cebirsel toplamı  $C = A + B$  ye ait üyelik fonksiyonu yardımıyla

$$C = \{ (x, \mu_{A+B}(x)) \mid x \in X \}$$

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır.

### 2.8.4. Fuzzy kümelerinde cebirsel çarpım

$A$  ve  $B$  kümelerinin cebirsel çarpımı  $C = A.B$  ye ait üyelik fonksiyonu yardımıyla

$$C = \{ (x, \mu_{A.B}(x)) \mid x \in X \}$$

$$\mu_{A.B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezde kullanılan metodlara ve bu metodların kullanım'ına yer verilmiştir.

#### 3.1. Fuzzy Sayılar

Bu kısım fuzzy sayılara ayrılmıştır. Fuzzy sayı terimleri “10'a yakın, 7 civarında” gibi kesin olmayan sayısal nicelikleri ele almak için kullanılır (Chen *et al.* 1992).  $\mu_A(x)$  ile gösterilen üyelik fonksiyonu  $[0,1]$  aralığında değer alır.  $\mu_A(x)=0$  ise  $x$  sayısı kümenin elemanı değildir.  $\mu_A(x)=1$  ise  $x$  sayısı kesinlikle kümenin elemanıdır. Diğer durumlarda  $x$ 'in kümede olması fuzzy olarak tanımlanmıştır.  $\mu_A(x)$  değeri 1'e yaklaştıkça  $x$  elemanının kümedeki üyeliği artar (Aksoy vd 2003). Fuzzy sayılar farklı biçimlerde ifade edilebilir. Üçgensel ve yamuk fuzzy sayıların tanımları ilerleyen bölümlerde yapılmıştır.

##### 3.1.1. Fuzzy sayıların tanımlanması

Bir fuzzy  $A$  kümesi, aşağıdaki koşulları sağladığında,  $X$  üzerinde bir fuzzy sayı olarak adlandırılır. Kısacası normal ve konveks olan fuzzy kümeye fuzzy sayı denir.

- Fuzzy  $A$  kümesi konveks olsun.
- Fuzzy  $A$  kümesi normal olsun.
- $\forall \alpha \in [0,1]$  ,  $A_\alpha$  kapalı küme olsun.
- Fuzzy  $A$  kümesinin desteği yani  $supp(A)$  sınırlı olsun.

##### 3.1.2. Genelleştirilmiş fuzzy sayılar

Fuzzy sayıların genellemesi olarak Atanassov sezgisel fuzzy sayı kavramını tanımlamıştır. Daha sonra (Çoker 1997) tarafından sezgisel fuzzy topolojik uzay tanımlanmıştır.

### 3.1.3. Sezgisel fuzzy küme

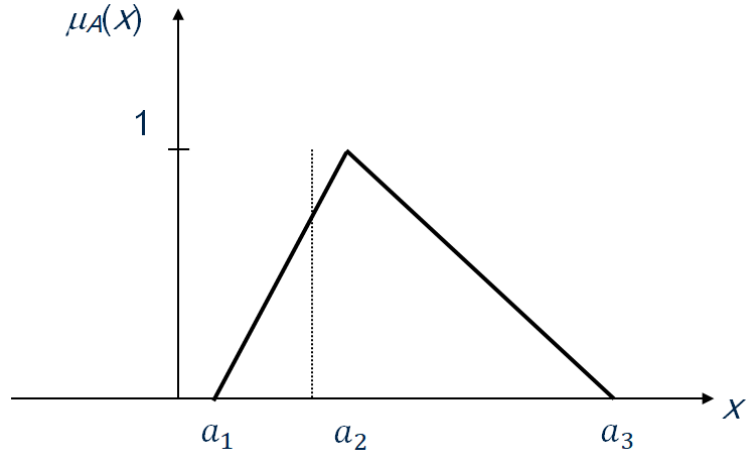
$X$  boştan farklı bir küme olsun.  $X$  üzerinde  $A \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$  kümesine  $X$ 'de bir sezgisel fuzzy küme denir. Burada,  $\mu_A: X \rightarrow I$  fonksiyonu her bir  $x \in X$  için  $x$ 'in  $A$ 'ya ait olma derecesini ve  $\nu_A: X \rightarrow I$  fonksiyonu  $A$ 'ya ait olmama derecesini gösteren fuzzy kümelerdir ve her  $x \in X$  için  $0 < \mu_A(x) + \nu_A(x) < 1$  dir. (Atanassov 1986).  $A$  bir fuzzy küme olmak üzere her bir  $x \in X$ 'in  $A$ 'ya ait olma derecesi  $A(x)$ , ait olmama derecesi  $1 - A(x)$  olarak düşünüldüğünde bu  $A$  fuzzy kümesi bir sezgisel fuzzy küme olarak göz önüne alınabilir. Yani  $A$  fuzzy kümesi özel olarak;  $A^* \{ \langle x, A(x), 1 - A(x) \rangle : x \in X \}$  sezgisel fuzzy kümesi şeklinde yazılabilir.

### 3.1.4. Üçgensel fuzzy sayılar

Üçgensel fuzzy sayılar  $(a_1, a_2, a_3)$  gibi üçlüler ile gösterilir.  $a_1, a_2, a_3$  parametreleri sırasıyla en küçük değeri, alınabilecek en büyük değeri ve en geniş değeri temsil etmektedir.  $A = (a_1, a_2, a_3)$  şeklindeki bir üçgensel fuzzy sayı için üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & x > a_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır (Kaufmann and Gupta 1988).



Şekil 3.1. Üçgen fuzzy sayı

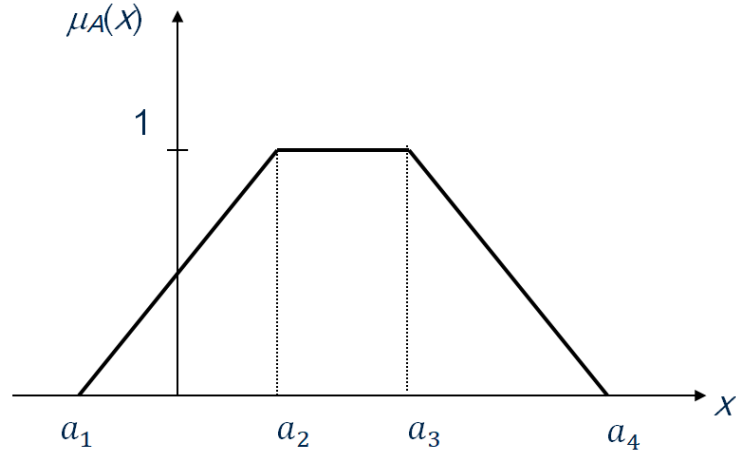
### 3.1.5. Yamuksal fuzzy sayılar

Yamuksal fuzzy sayılar  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  şeklindeki dörtlülerle ifade edilir. Burada  $[a_2, a_3]$  aralığı, büyüklüğün kesinlikle gösterilebildiği sayıları ifade eder.  $a_1$  ve  $a_4$  sırasıyla alt ve üst sınırlardır.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  şeklindeki bir yamuksal fuzzy sayı için üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & x > a_4 \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklindedir (Kaufmann and Gupta 1988).



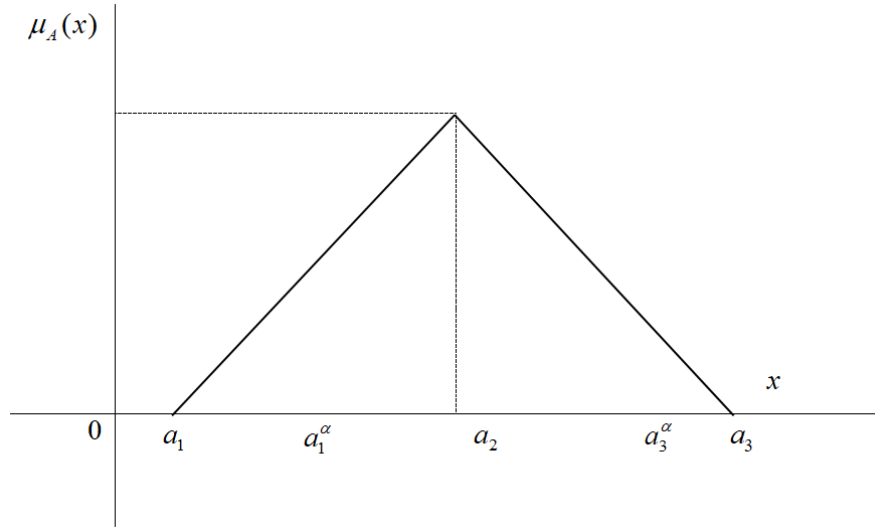
**Şekil 3.2.** Yamuk fuzzy sayı

### 3.1.6. Üçgensel ve yamuksal fuzzy sayıların farklı tanımı

Eğer  $A$ ,  $\mathbb{R} \in (-\infty, +\infty)$ da söz konusu kümenin bir elemanı ise  $\mu_A(x)$  üyelik fonksiyonu  $\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  aralığında oluşur. Diğer bir deyişle  $A$  kümesi  $A = [a_1, a_3]$  aralığında ise genel olarak  $\mu_A(x)$  üyelik fonksiyonu (3.3) formülüyle gösterilebilir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ 1 & a_1 < x < a_3 \\ 0 & x > a_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

Üyelik fonksiyonları genellikle, üçgensel üyelik fonksiyonları ve yamuk üyelik fonksiyonları olmak üzere iki başlık altında incelenmektedir.  $\mu_A(x)$  üçgensel üyelik fonksiyonu, (3.1) formülünde tanımlanmıştır. (3.1) formülüne göre küme,  $A = [a_1, a_2, a_3]$  olmalıdır. Burada  $a_2$  normal değerli üyelik olarak tanımlanabilir. Fuzzy mantık bu noktada bir  $\alpha$  katsayısına bağlı olarak  $a_2$ 'ye yakın değerlerin, bu değere yüklenen anlam ile temsil edileceğini varsaymaktadır. Diğer bir deyişle  $a_2$ 'deki belirsizlik, varsayılacak ya da dağılıma göre bulunabilecek bir  $\alpha$  katsayısı ile tolere edilebilir. Söz konusu komşuluk Şekil 3.3'de gösterilmiştir (Lootsma 1997).



**Şekil 3.3.** Sayıların komşuluğu

$\alpha$  değeri fuzzy mantık terminolojisinde kesim katsayısı olarak adlandırılır.  $a_1^\alpha$  ve  $a_3^\alpha$  sayıları  $a_2$  normal değerinin komşuluğunu oluşturan aralığın alt ve üst sınır değerleridir. Başka bir deyişle  $a_1^\alpha$  ve  $a_3^\alpha$  aralığındaki tüm sayılar  $a_2$  normal değeri ile aynı anlama sahiptir.  $a_1^\alpha$  ve  $a_3^\alpha$  değerleri (3.4) ve (3.5) formülleri yardımıyla bulunabilir (Terano,1997).

$$\frac{a_1^\alpha - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha \quad (3.4)$$

$$\frac{a_3 - a_3^\alpha}{a_3 - a_2} = \alpha \quad (3.5)$$

(3.4) ve (3.5) formüllerinden  $\forall \alpha \in [0,1]$  için  $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]$  aralığı oluşturulabilir.  $a_1^\alpha$  ve  $a_3^\alpha$  değerleri

$$a_1^\alpha = \alpha(a_2 - a_1) + a_1 \quad (3.6)$$

$$a_3^\alpha = a_3 - (a_3 - a_2)\alpha \quad (3.7)$$

şeklindedir.

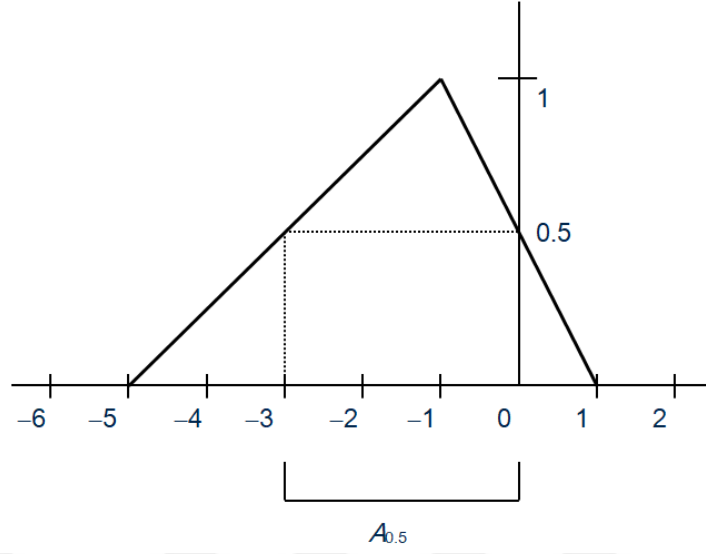
Örneğin üçgensel fuzzy mantık sayılarına ilişkin küme  $A = (-5, -1, 1)$  ise bu durumda (3.1) formülünden üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \frac{x+5}{4}, & -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

olarak bulunur. Eğer karar verici  $\alpha$  kesim katsayısını 0,5 olarak saptamışsa  $-1$  normal değerinin komşuları (3.6) ve (3.7) formüllerinden

$a_1^{0.5} = -3$  ve  $a_3^{0.5} = 0$  olarak bulunacaktır. Başka bir deyişle  $-1$  normal değeri ile aynı anlam düzeyinde bulunan sayılar kümesi  $[-3, 0]$  aralığıdır. Söz konusu ilişki Şekil 3.4'de gösterilmiştir.

Eğer fuzzy mantık sayılarına ilişkin kümede normal kabul edilen iki değer varsa başka bir deyişle küme,  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  şeklinde 4 belirleyici değerden oluşuyorsa bu durumda üyelik fonksiyonu yamuk üyelik fonksiyonu tipinde oluşacaktır. Yamuk üyelik fonksiyonu (3.2) formülünde gösterilmiştir.



**Şekil 3.4.**  $A = (-5, -1, 1)$  kümesinin komşuluğu

### 3.1.7. Örnek

Başarı notunun 65 olduğu bir kariyer belirleme sınavı yılda iki kez yapılmaktadır. Adaylar, bir üst kariyer grubuna geçebilmek için bu sınavda başarılı olmak zorundadırlar. Sınavda 100 soru sorulmakta ve her soru 1,25 puan ile değerlendirilmektedir. Adaylar bu sınava sınırsız sayıda girme hakkına sahiptirler. Ancak sınav komisyonu, geçmiş sınav sonuçlarını değerlendirdiğinde 65 puanın altında bu puana yakın skorların birikimi arttırdığını saptamıştır. Sınav komisyonu, hem bu birikimi azaltacak hem de sınav adaletini sağlayacak yeni ve daha esnek bir sınav sistemi tasarlamak istemektedirler.

Sınav komisyonu, karar verme teknikleri üzerine yaptıkları ön araştırmada fuzzy mantığın mevcut sorun için bir çözüm oluşturabileceğine karar vermişlerdir. Çünkü sınav komisyonu için 65 puan ile 65 puana oldukça yakın ve 65 puanın altındaki değerler istatistiksel açıdan bir anlam farklılığı taşımamaktadır.

Komisyon, bu noktada 65 puanını normal değer seçmiş ve  $(0,65,100)$  fuzzy kümesinde aşağıdaki üçgensel üyelik fonksiyonunu oluşturmuştur.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x-0}{65-0}, & 0 \leq x \leq 65 \\ \frac{100-x}{100-65}, & 65 \leq x \leq 100 \\ 0, & x > 100 \end{cases}$$

Bu fonksiyonda  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 65$  ve  $a_3 = 100$  kabulleri yapılmış ve 65 normal değerinin komşuluğu için aşağıdaki formüller elde edilmiştir.

$$a_1^\alpha = 65.\alpha$$

$$a_3^\alpha = 100 - 35.\alpha$$

Sınav komisyonu, değişik  $\alpha$ -kesim katsayıları için 65 normal değerinin komşuluklarını bu formüller yardımıyla hesapladıklarında aşağıdaki çizelgeyi elde etmişlerdir (Yaralıoğlu 2004).

**Çizelge 3.1.** Değişik  $\alpha$  kesim katsayıları için 65 normal değerinin komşulukları

$\alpha$	65 Normal Değerinin Komşuluğu	Düzeltilmiş Aralık
0.99	64.350 – 65.350	63.750 – 66.250
0.97	63.050 – 66.050	62.500 – 66.250
0.95	61.750 – 66.750	61.250 – 67.500
0.94	61.100 – 67.100	61.250 – 67.500
0.93	60.450 – 67.450	60.000 – 67.500
0.90	58.500 – 68.500	58.750 – 68.750
0.88	57.200 – 69.200	57.500 – 70.000
0.85	55.250 – 70.250	56.250 – 70.000
0.80	52.000 – 72.000	52.500 – 72.500

Hesaplamalarda değişik  $\alpha$ -kesim katsayıları için elde edilen komşuluklar tablonun 2. sütununda, puan artışlarının 1. 25 olması durumuna göre düzeltilmiş komşuluklar ise tablonun 3. sütununda gösterilmiştir.

Sınav komisyonu, bu tablodan yararlanarak gerçekleştirilen sınavlarda 65 puan çevresindeki yığılmanın genişliğine göre uygun  $\alpha$ -kesim katsayısını seçebileceğini ve bu şekilde de hem yığılmaları engelleyebileceği hem de sınav adaletini sağlayabileceği kanısına varmıştır.

### 3.2. Fuzzy Metrik Uzayı

Boştan farklı bir küme üzerinde metrik ve iki nokta arasındaki uzaklık kavramının nasıl tanımlanacağı matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. 1906 yılında Frechet, boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapısı üzerinde çalışmış. Kümenin farklı iki elemanı arasındaki uzaklığın pozitif bir reel sayı olması gerektiğini göstermiştir. Örneğin küme tanımına göre mavi renkteki gömleklerin kümesi oluşturulabilir. Fakat renk anlayışı kişiden kişiye değiştigiinden bu kümenin elemanları tek türlü tanımlanamamaktadır. Eğer mavi renklerin tonlarına  $[0,1]$  aralığındaki sayılar karşılık getirilirse bu küme herkesin kabul edebileceği ve daha kullanışlı bir küme olarak tanımlanabilir.

Zadeh (1965), fuzzy küme tanımını yaparak bilimin birçok dalına önemli uygulamalarını bulmuş ve kendisi bir Elektrik Elektronik mühendisi olmasına rağmen böyle bir çalışma yapmakla fuzzy küme kavramının teknoloji ile gerçekte ne kadar yakından ilgili olduğunu göstermiştir. Böylece fuzzy küme üzerinde de metrik yapısını oluşturmak fuzzy matematiğin temel konularından biri olmuştur.

### 3.2.1. Fuzzy metrik uzayın temel kavramı

#### Sürekli t – norm:

$*$  :  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  bir ikili işlem olsun. Eğer  $*$  işlemi

$\forall a, b, c, d \in [0,1]$  için

- (1)  $a * b = b * a$
- (2)  $a * (b * c) = (a * b) * c$
- (3)  $*$  sürekli
- (4)  $a * 1 = a$
- (5)  $a \leq c$  ve  $b \leq d$  iken  $a * b \leq c * d$

şartları sağlanıyorsa  $*$  a sürekli t-norm denir (Schweizer and Sklar 1960).

### 3.2.2. Fuzzy metrik uzayı

$X$  boş olmayan herhangi bir küme,  $*$  işlemi sürekli bir t-norm ve  $M$  de  $X^2 \times (0, \infty)$  üzerinde bir fuzzy küme olsun. Eğer  $M, \forall x, y, z \in X$  ve  $t, s > 0$  için:

- (1)  $M(x, y, t) > 0$
- (2)  $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$
- (3)  $M(x, y, t) = M(y, x, t)$
- (4)  $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$
- (5)  $M(x, y, .): (0, \infty) \rightarrow [0,1]$  sürekli.

koşulları sağlanıyorsa  $M$ 'ye  $X$  üzerinde bir fuzzy metrik ve  $(X, M, *)$  üçlüsüne de fuzzy metrik uzayı denir. Burada  $M(x, y, t)$  nin anlamı,  $t$  ye göre  $x$  ve  $y$  arasındaki yakınlığın derecesi olarak yorumlanabilir (Georg and Veeramani 1994).

### 3.3. Fuzzy Sıralamalar

Denkliklerin benzerliklere genelleştirilebileceği gibi klasik sıralamalar da aynı zamanda bulanıklaştırılabilir. Bu başlıkta yansıyan dönüşlü ve max-min geçişli fuzzy bağıntılar konu edilecektir (Dubois *et al.* 1978).

#### 3.3.1. Ters simetri

Klasik ikili  $R$  bağıntı için ters simetri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\forall (x, y) \in X^2, \text{ eğer } x R y \text{ ve } y R x, \text{ ise } x = y.$$

Bu da

$$\forall (x, y) \in X^2, x \neq y, \text{ ise } \mu_R(x, y) = 0 \text{ veya } \mu_R(y, x) = 0,$$

demektir.

#### 3.3.2. Mükemmel ters simetri (Zadeh 1971)

Bir  $R$  fuzzy bağıntısı ancak ve ancak

$\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \mu_R(x, y) > 0$  ve  $\mu_R(y, x) = 0$  olması durumunda mükemmel ters simetriktir.

Ters simetri (Kaufmann 1975): Bir  $R$  fuzzy bağıntısı ya

$\forall (x, y) \in X^2, x \neq y$  ve  $\mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x)$  ya da

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0$$

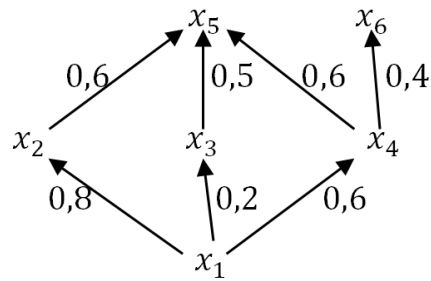
olması durumunda anti simetrik olarak tanımlanır.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere mükemmel ters simetri, ters simetri özelliğini barındırmaktadır.

### 3.3.3. Fuzzy kısmi sıralama

Bir  $P$  fuzzy bağıntısı, dönüşlü, max-min geçişli ve mükemmel ters simetrik olduğunda  $X$ 'de bir fuzzy kısmi sıralama olarak adlandırılır.  $X$  uzayı sonlu iken  $p$  fuzzy bağıntısını bir üçgen matris veya bir Hasse diagramı olarak göstermek mümkündür. Bir fuzzy Hasse diagramı ise düğümleri ancak  $X$ 'in elemanları iken değerli ve anlamlıdır.  $x$ 'i,  $y$ 'ye taşıyan bağıntı ancak ve ancak  $\mu_p(x, y) > 0$  iken tanımlıdır. Mükemmel ters simetri ve geçişkenlik sayesinde grafik periodsuz (döngüsüz) dur (Zadeh 1971).

$$\mu_p = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,2 & 0,6 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### 3.3.4. Lineer sıralama

( $L$  bir lineer fuzzy sıralaması iken)

$\forall x, \forall y$  eğer  $x \neq y$ , ve  $\mu_L(x, y) > 0$  veya  $\mu_P(y, x) > 0$  şartı sağlanırsa  $L$  bir fuzzy kısmi sıralamadır.

Bir fuzzy lineer sıralamanın  $\alpha$ - kesimi, fuzzy olmayan lineer bir sıralamadır.

### 3.3.5. Fuzzy ön sıralama (preorder)

Bir fuzzy ön sıralama, mükemmel ters simetrik olmayan, dönüşlü ve geçişli bir fuzzy bağıntısıdır.

## 3.4. Yeni Metre İçin Özel Tanımlar

Bulanık sayıların temel tanımları (Zimmermann, 1991), (Wang *et al.* 2001a), (Wang *et al.* 2001b) ve (Saneifard *et al.* 2011) den alınmıştır.

### 3.4.1. Tanım ( $\alpha$ -düzeyi kümesi)

Fuzzy sayı  $A \in F'$  nin

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha, A_\alpha) \quad (3.8)$$

şeklinde temsil edildiğini varsayalım.

Burada,

$A_\alpha = \{x: \mu_A(x) \geq \alpha\}$ , Fuzzy sayı  $A$ 'nın  $\alpha$  düzeyi kümesidir. Bu tezde, normal ve konveks fuzzy sayıları kullandığımız için  $\alpha$ -seviyesi kümeleri parçalı formunda temsil edilebilir:

$$\forall \alpha \in [0,1]: A_\alpha = [L_A(\alpha), R_A(\alpha)] \subset (-\infty, +\infty), \quad (3.9)$$

Burada,  $L : [0,1] \rightarrow (-\infty, +\infty)$  monoton olarak azalmayan bir soldan sürekli fonksiyondur. ve  $R : [0,1] \rightarrow (-\infty, +\infty)$  monoton olarak artmayan sağdan sürekli bir fonksiyondur.

$L(\cdot)$  ve  $R(\cdot)$  işlevleri fuzzy bir sayının soldan ve sağdan sırasıyla ifade etmektedir. Başka bir deyişle

$$L(\alpha) = \mu_{\uparrow}^{-1}(\alpha), R(\alpha) = \mu_{\downarrow}^{-1}(\alpha) \quad (3.10)$$

dır.

Burada,  $L(\alpha) = \mu_{\uparrow}^{-1}(\alpha)$  ve  $R(\alpha) = \mu_{\downarrow}^{-1}(\alpha)$  sırasıyla üyelik fonksiyonlarının artan ve azalan kısımlarının quasi-inverse fonksiyonlarını ifade eder. Sonuç olarak, L-R gösterimi olarak adlandırılan fuzzy sayı  $A$ 'nın ayrışma gösterimi,

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha, [L_A(\alpha), R_A(\alpha)]) \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır.

### 3.4.2. Tanım ( $A$ 'nın ağırlıklı ortalama ve ağırlıklı genişliği)

Aşağıdaki değerler fuzzy sayı  $A$ 'nın ağırlıklı ortalamasını ve ağırlıklı genişliğini oluşturur:

$$I(A) = \int_0^1 (cL_A(\alpha) + (1-c)R_A(\alpha))p(\alpha)d\alpha$$

ve

(3.11)

$$D(A) = \int_0^1 (R_A(\alpha) - L_A(\alpha))p(\alpha)d\alpha$$

Burada,  $0 \leq c \leq 1$ , fuzzy sayılarda işlemler yürütmede "optimizm / pesimizm" katsayısını gösterir.

$P: [0,1] \rightarrow [0, +\infty)$ , fonksiyonu fuzzylik derecelerinin öneminin dağılım yoğunluğunu gösterir. Burada  $\int_0^1 p(\alpha)d\alpha = 1$  dir. Bazı durumlarda, aşağıdaki gibi kabul edilebilir.

$$p(\alpha) = (k+1)\alpha^k, k = 0,1,2, \dots$$

### 3.4.3. Tanım (parametrik mesafe)

İki keyfi fuzzy sayı  $A$  ve  $B$  için:

$$d_p(A, B) = \sqrt{[I(A) - I(B)]^2 + [D(A) - D(B)]^2} \quad (3.12)$$

fuzzy sayılar  $A$  ve  $B$  arasındaki parametrik mesafe veya aralık olarak adlandırılır (Nasibove 2007).

### 3.4.4. Tanım (genelleştirilmiş yamuk fuzzy sayı)

$a \leq b \leq c \leq d, 0 < \omega < 1$  olduğu genelleştirilmiş trapezoid (yamuk) fuzzy sayı

$A = (a, b, c, d; \omega)$  üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer  $\omega = 1 \rightarrow A$  normal yamuk fuzzy sayıdır.

Eğer  $a = b$  ve  $c = d \rightarrow A$  crisp aralıktır.

Eğer  $b = c \rightarrow A$  genelleştirilmiş bir üçgensel fuzzy sayıdır.

Eğer  $a = b = c = d$  ve  $\omega = 1 \rightarrow A$  gerçek bir sayıdır.

### 3.4.5. Tanım (aralık yaklaştırma operatörü)

$I: F \rightarrow (\mathbb{R}'$  de kapalı aralıkların seti) operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa herhangi  $A \in F$  için bu operatöre aralık yaklaştırma operatörü denir.

(a)  $I(A) \subseteq \text{supp}(A)$

(b)  $\text{core}(A) \subseteq I(A)$

(c)  $\forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0)$  olmak üzere

eğer  $d(u, v) < \delta$  olduğunda

$\Rightarrow d(I(u), I(v)) < \varepsilon$  yazılır.

Burada  $d: F \rightarrow [0, +\infty)$ , tüm fuzzy sayıların ailesi içinde tanımlanan bir metriği belirtir (Grzegorzewski 2002).

### 3.4.6. Tanım (sürekli aralıklı yakınsama operatörü)

Herhangi bir  $A, B \in F$  için (c) koşulunu sağlayan bir aralık yaklaşırma operatörüne sürekli aralıklı yakınsama operatörü denir (Grzegorzewski 2002).

## 3.5. Parametrik Aralığa Dayalı Genel Fuzzy Sayılar İçin, Yeni Uzaklık Ölçeği

### 3.5.1. Fuzzy parametrik aralıklı mesafe ölçütünün inşası

$\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1, \alpha_1)$  ve  $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2, \alpha_2)$  iki genelleştirilmiş fuzzy sayı olduğu varsayılın,  $\tilde{A}_1$  ve  $\tilde{A}_2$  arasındaki aralık mesafesi şu şekilde hesaplanır:

Aralık Mesafe Ölçütü yazarların isminin baş harfine göre *ER* kullanılacaktır.

$$ER(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \int_0^1 \left( \gamma \sqrt{(\tilde{A}_{1\omega_1}^- - \tilde{A}_{2\omega_2}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} + (1 - \gamma) \sqrt{(\tilde{A}_{1\omega_1}^+ - \tilde{A}_{2\omega_2}^+)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \right) d\alpha \quad (3.14)$$

Her fuzzy sayı için parametrik aralığı

$$C_{d_p}(A) = [\tilde{A}_1^-, \tilde{A}_1^+] \quad (3.15)$$

olarak alalım (Saneifard 2011). Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_1^- = \int_0^1 L_{A_1}(\alpha) \cdot p(\alpha) d\alpha \\ \tilde{A}_1^+ = \int_0^1 R_{A_1}(\alpha) \cdot p(\alpha) d\alpha \end{array} \right\}$$

dir.

Bu tezde ayrıca

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \gamma\alpha_1 \\ \omega_2 = \gamma\alpha_2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 0 \leftrightarrow \gamma = 0 \\ \omega_1 = \alpha_1 \leftrightarrow \gamma = 1 \\ \omega_2 = 0 \leftrightarrow \gamma = 0 \\ \omega_2 = \alpha_2 \leftrightarrow \gamma = 1 \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

ve  $\gamma + (1 - \gamma) = 1$  dir. Burada  $\gamma \in [0,1]$  dir.

Böylece

$$\begin{aligned} ER(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) &= \int_0^1 \gamma \sqrt{(\tilde{A}_{1\omega_1}^- - \tilde{A}_{2\omega_2}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} d\alpha \\ &\quad + \int_0^1 (1 - \gamma) \sqrt{(\tilde{A}_{1\omega_1}^+ - \tilde{A}_{2\omega_2}^+)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} d\alpha \\ &= \gamma \int_0^1 \sqrt{(\tilde{A}_{\gamma\alpha_1}^- - \tilde{A}_{\gamma\alpha_2}^-)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma\alpha_2)^2} d\alpha + (1 - \gamma) \int_0^1 \sqrt{(\tilde{A}_{\gamma\alpha_1}^+ - \tilde{A}_{\gamma\alpha_2}^+)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma\alpha_2)^2} d\alpha \\ &= \gamma + (1 - \gamma) \int_0^1 \left( \sqrt{(\tilde{A}_{\gamma\alpha_1}^- - \tilde{A}_{\gamma\alpha_2}^-)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma\alpha_2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\tilde{A}_{\gamma\alpha_1}^+ - \tilde{A}_{\gamma\alpha_2}^+)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma\alpha_2)^2} \right) d\alpha \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left( \sqrt{(\tilde{A}_{\gamma\alpha_1}^- - \tilde{A}_{\gamma\alpha_2}^-)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma\alpha_2)^2} \right. \\ \left. + \sqrt{(\tilde{A}_{\gamma\alpha_1}^+ - \tilde{A}_{\gamma\alpha_2}^+)^2 + (\gamma\alpha_1 - \gamma\alpha_2)^2} \right) d\alpha$$

elde edilir.

### 3.5.2. Metrik özellikleri

Burada, yeni tanımlanan  $ER$  uzaklık ölçüsünün, bir uzaklık metriğinin aşağıdaki özelliklerini karşıladığı gösterilmektedir.

I. Herhangi iki genelleştirilmiş fuzzy sayı  $\tilde{A}, \tilde{B}$  için

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0$$

II. Herhangi iki genelleştirilmiş fuzzy sayı  $\tilde{A}, \tilde{B}$  için

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d(\tilde{B}, \tilde{A})$$

III. Herhangi üç genelleştirilmiş fuzzy sayı  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  için

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) + d(\tilde{B}, \tilde{C}) \geq d(\tilde{A}, \tilde{C})$$

dır (Eslamipoor *et al.* 2014).

Birinci ve ikinci özelliklerin doğruluğu temel metrik özelliklerinden kolayca gösterilebilir. Burada üçüncü özellik ispatlanacaktır.  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$  olacak şekilde  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  üç genelleştirilmiş fuzzy sayısı olsun. Ayrıca  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sırasıyla  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 'ye

karşılık gelen kesimler olsun. Her  $\gamma$  için, sayılar soldan  $(A_{\omega_1}^-, \omega_1)$ ,  $(B_{\omega_2}^-, \omega_2)$  ve  $(C_{\omega_3}^-, \omega_3)$  olup aşağıdaki gibidir.

$$\sqrt{(A_{\omega_1}^- - B_{\omega_2}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} + \sqrt{(B_{\omega_2}^- - C_{\omega_3}^-)^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2} \geq \sqrt{(A_{\omega_1}^- - C_{\omega_3}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_3)^2}.$$

Böylece

$$\int_0^1 \left( \sqrt{(A_{\omega_1}^- - B_{\omega_2}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} + \sqrt{(B_{\omega_2}^- - C_{\omega_3}^-)^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2} \right) d\alpha \geq \int_0^1 \sqrt{(A_{\omega_1}^- - C_{\omega_3}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_3)^2} d\alpha$$

dir.

Sayıların sağ tarafı

$$\int_0^1 \left( \sqrt{(A_{\omega_1}^+ - B_{\omega_2}^+)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} + \sqrt{(B_{\omega_2}^+ - C_{\omega_3}^+)^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2} \right) d\alpha \geq \int_0^1 \sqrt{(A_{\omega_1}^+ - C_{\omega_3}^+)^2 + (\omega_1 - \omega_3)^2} d\alpha$$

dır. Böylece sonuç olarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\sqrt{(A_{\omega_1}^- - B_{\omega_2}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} + \sqrt{(A_{\omega_1}^+ - B_{\omega_2}^+)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}) d\alpha \\
& \quad + \int_0^1 (\sqrt{(B_{\omega_2}^- - C_{\omega_3}^-)^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2} \\
& \quad + \sqrt{(B_{\omega_2}^+ - C_{\omega_3}^+)^2 + (\omega_2 - \omega_3)^2}) d\alpha \\
& \quad \geq \int_0^1 (\sqrt{(A_{\omega_1}^- - C_{\omega_3}^-)^2 + (\omega_1 - \omega_3)^2} + \\
& \quad \sqrt{(A_{\omega_1}^+ - C_{\omega_3}^+)^2 + (\omega_1 - \omega_3)^2}) d\alpha
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olup buradan

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) + d(\tilde{B}, \tilde{C}) \geq d(\tilde{A}, \tilde{C})$$

elde edilir.

### 3.5.3. Genelleştirilmiş fuzzy sayıların sıralanması

Burada sıralama işlemini gerçekleştirmek için fuzzy bir başlangıç orijin sayısı düşünmemizi gerektirir. Böylece bu tekil orijin fuzzy sayı, tüm  $x$  değerleri için sıfır üyelik değerlerine sahiptir, sadece  $x = 0$  hariç.  $x = 0$  için üyelik fonksiyonu 1 değerine sahiptir. Başka bir deyişle üyelik fonksiyonu  $x = 0$  için değeri 1 ve  $x \neq 0$  için 0'dır. Bu tezde orijin sayısını  $O$  ile gösterilmiştir.

$$\mu_O(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

olup ve sonuç olarak

$$\tilde{O}^- = \int_0^1 L_O(\alpha) \cdot p(\alpha) d\alpha$$

(3.18)

$$\tilde{O}^+ = \int_0^1 R_O(\alpha) \cdot p(\alpha) d\alpha$$

şeklinde yazılır. Ayrıca

$$\tilde{O}^- = \tilde{O}^+ = 0$$

olup

Bunun için

$$ER(\tilde{A}, \tilde{O}) = \int_0^1 \sqrt{(\tilde{A}^- - \tilde{O}^-)^2} \cdot d\alpha + \int_0^1 \sqrt{(\tilde{A}^+ - \tilde{O}^+)^2} \cdot d\alpha$$

(3.19)

$$ER(\tilde{A}, \tilde{O}) = \int_0^1 |\tilde{A}^-| \cdot d\alpha + \int_0^1 |\tilde{A}^+| \cdot d\alpha$$

yazılır.

Ayrıca herhangi bir  $A \in E$  için,  $ER(\tilde{A}, \tilde{O}) = ER(-\tilde{A}, \tilde{O})$  olduğu açıktır.

Herhangi  $A$  ve  $B \in E$  için sıralama  $ER$  uzaklığına göre

$$1) ER(\tilde{A}, \tilde{O}) > ER(\tilde{B}, \tilde{O}) \rightarrow A > B$$

$$2) ER(\tilde{A}, \tilde{O}) < ER(\tilde{B}, \tilde{O}) \rightarrow A < B$$

$$3) ER(\tilde{A}, \tilde{O}) = ER(\tilde{B}, \tilde{O}) \rightarrow A = B$$

şeklinde tanımlanır.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Farklı sıralama yöntemlerinin aynı fuzzy sayı kümesi için farklı sıralama sonuçları elde etmesinden dolayı fuzzy sayıların sıralanması daha karmaşık hale gelmiştir. Farklı araştırmacılar, fuzzy sayıları sıralamak için farklı teknikler geliştirmişlerdir. Ancak hâlen farklı mevcut koşullar altında fuzzy sayı türlerini sıralamada ortak sonuç alınabilecek bir yöntem aranmaktadır. Bununla birlikte, tüm durumlarda tatmin edici bir sonuç veren bir yöntem yoktur. Bu tezde fuzzy sayıları minimum hata ile sıralamak için bir yöntem önerilmiştir.

Buraya kadar aralıklara dayalı fuzzy sayıların sıralanması için bir uzaklık ölçütü önerildi ve *ER* olarak adlandırıldı. Bunun devamında skor değerine dayalı fuzzy sayıları sıralamak için bir yöntem daha sunulmuştur.

##### 4.1. Skor Değeri ve Yeni Yöntemin Tanımı

Her genelleştirilmiş fuzzy sayı  $A$  için,  $ON$  (orta nokta) noktası değeri

$$ON = \frac{(\tilde{A}^- - \tilde{A}^+)}{2}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu  $ON$ , fuzzy sayı  $A'$ 'nin parametrik aralığının orta noktasıdır. Yani

$$C_{d_p}(A) = [\tilde{A}^-, \tilde{A}^+] \text{ burada } \begin{cases} \tilde{A}^- = \int_0^1 L_A(\alpha) \cdot p(\alpha) d\alpha \\ \tilde{A}^+ = \int_0^1 R_A(\alpha) \cdot p(\alpha) d\alpha \end{cases}$$

dır.

Geçen bölümden  $ER$  tanımı ve orijin nokta tanımından

$$ER_{sd}(\tilde{A}) = \frac{ER(\tilde{A}, \tilde{O})}{1+ON} \quad (4.1)$$

$$ER_{sd}(\tilde{A}) = \frac{ER(\tilde{A}, \tilde{O})}{1 + \frac{(\tilde{A}^- - \tilde{A}^+)}{2}}$$

olup, Genelleştirilmiş fuzzy sayılar, Skor değerine (SD) göre sıralanır. Daha büyük bir skor değerine sahip olan fuzzy sayı daha büyük bir sıraya karşılık gelir.

$A$  ve  $B \in E$  için,  $A$  ve  $B$ 'nin sıralaması Skor değeri ile

- 1)  $ER_{sd}(\tilde{A}) > ER_{sd}(\tilde{B}) \rightarrow A > B$
- 2)  $ER_{sd}(\tilde{A}) < ER_{sd}(\tilde{B}) \rightarrow A < B$
- 3)  $ER_{sd}(\tilde{A}) = ER_{sd}(\tilde{B}) \rightarrow A = B$

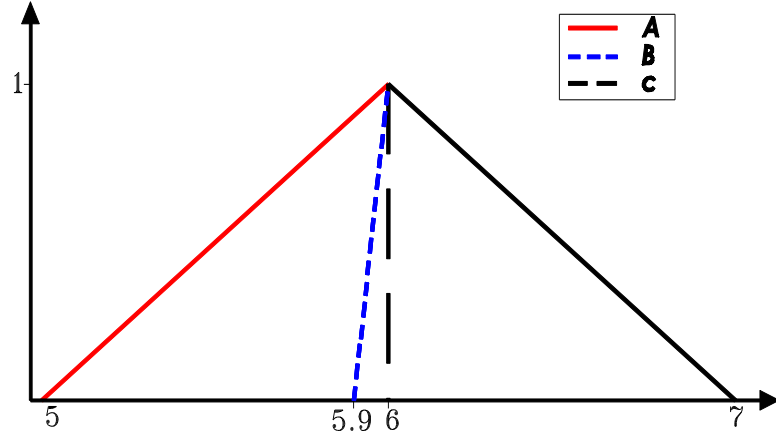
olacak şekilde tanımlanır.

## 4.2. Sayısal Örnekler

Tezin bu bölümünde, önerilen yöntem ile diğer yazarlar tarafından önerilen yöntemleri karşılaştırılmıştır.

### 4.2.1. Örnek

$A = (6,1,1)$ ,  $B = (6,0,1,1)$ , ve  $C = (6,0,1)$  şeklinde üç fuzzy olsun (Şekil 4.1). Bu veriler (Abbasbandy and Hajjari 2009)'dan alınmıştır.



**Şekil 4.1.**  $A$ ,  $B$  ve  $C$  fuzzy sayıları

Yeni fuzzy metre yani  $ER$  ölçüsünün temeli olduğu, parametrik aralık kullanımı ile, her fuzzy sayısı için parametrik aralık değerleri aşağıdaki gibidir.

$$(\tilde{A}^- = 2.83, \tilde{A}^+ = 3.16), (\tilde{B}^- = 2.98, \tilde{B}^+ = 3.16) \text{ ve } (\tilde{C}^- = 3, \tilde{C}^+ = 3.16)$$

Böylece fuzzy sayıların yeni fuzzy metre kullanarak, sıralaması

$A < B < C$  dir.

Çizelge 4.1'de bu tezde elde edilen sonuç ile başka sıralama yöntemlerinin sonuçları karşılaştırılmıştır (Chen 1985; Chu and Tsao 2002; Abbasbandy and Asady 2006; Abbasbandy and Hajjari 2009).

Yeni metod'a (skor değeri) göre, sıralama skor değerleri (4.1)'den elde edilir.

$$ER_{sd}(\tilde{A}) = 1.499, ER_{sd}(\tilde{B}) = 1.508 \text{ ve } ER_{sd}(\tilde{C}) = 1.509$$

Böylece,  $A$ ,  $B$  ve  $C$  sayılarının sıralaması  $A < B < C$  olur. Hâlbuki (Chu and Tsao 2002) yaklaşımına göre, sıralama düzeni  $A < C < B$  dir. Şekil 4.1'den açıktır ki sıralama

sonuçları, (Abbasbandy and Hajjari 2009)'dan elde edilen yaklaşım sonuçları ile aynıdır. Yani sıralama sonucu  $A < B < C$  dir. Buda önerilen yöntemle elde edilen sonucun aynı olduğunu gösterir.

**Çizelge 4.1.** Örnek 1'in karşılaştırma sonuçları

Fuzzy sayılar→ Metodlar↓	$A = (6,1,1)$	$B = (6,0,1,1)$	$C = (6,0,1)$	Sonuçlar
Yeni metod $ER^*$	5.99	6.14	6.16	$A < B < C$
$p = 1$ için Sign Distance	6.12	12.45	12.50	$A < B < C$
$p = 2$ için Sign Distance	8.52	8.82	8.85	$A < B < C$
Chu-Tsao	3.000	3.126	3.085	$A < C < B$
Chen Distance	6.021	6.349	6.351	$A < B < C$
Yeni metod $ER_{SD}^*$	1.499	1.508	1.509	$A < B < C$

#### 4.2.2. Örnek

$A = (1,2,5)$ ,  $B = (0,3,4)$  ve  $C = (2,2.5,3)$ (Şekil 4.2), şeklinde üç fuzzy sayı alalım. Yeni fuzzy metre ölçüsünün temeli olduğu parametrik aralık kullanımı ile, her fuzzy sayısı için parametrik aralık değerleri aşağıdaki gibidir.

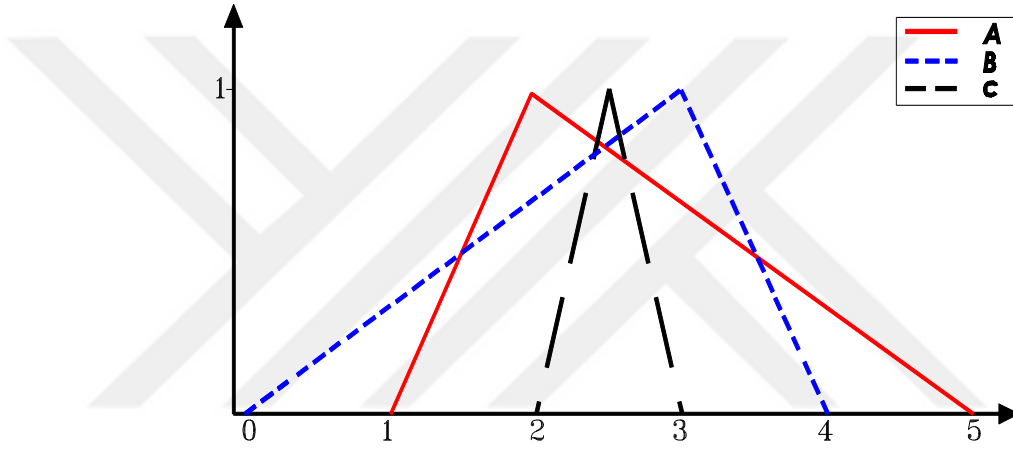
$$(\tilde{A}^- = 0.83, \tilde{A}^+ = 1.5), (\tilde{B}^- = 1, \tilde{B}^+ = 1.66) \text{ ve } (\tilde{C}^- = 1.16, \tilde{C}^+ = 1.33),$$

bu nedenle sıralama sırası  $A < C < B$ , dir.

Yeni metod (skor değeri)'a göre, sıralama skor değerleri (4.1)'den aşağıdaki gibi elde ediliyor.

$$ER_{sd}(\tilde{A}) = 1.076, ER_{sd}(\tilde{B}) = 1.141 \text{ ve } ER_{sd}(\tilde{C}) = 1.109 \text{ olur.}$$

Böylece,  $A, B$  ve  $C$  sayılarının sıralaması  $A < C < B$  olur.



**Şekil 4.2.**  $A, B$  ve  $C$  fuzzy sayıları

Görülğü gibi, yeni gelişmiş sıralama yöntemi (ER) daha kesindir ve fuzzy sayıları sıralamada daha net bir sonuç vermektedir.

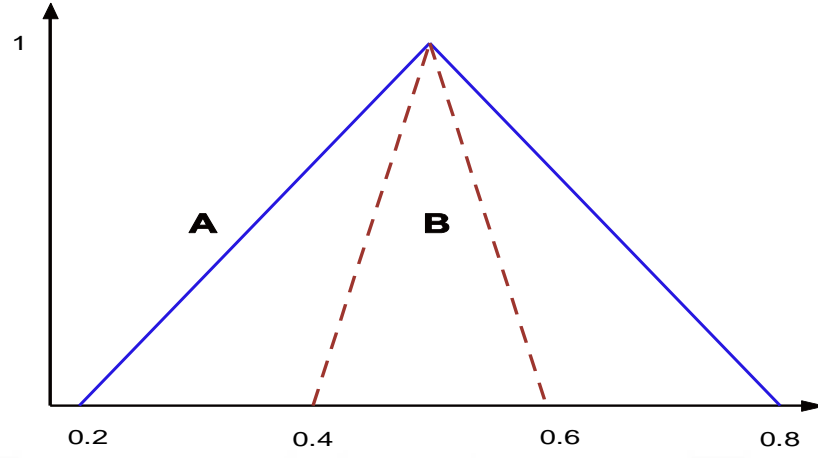
**Çizelge 4.2.** Örnek 4.2.2'nin karşılaştırm sonuçları

Fuzzy sayılar→ Metodlar↓	$A = (1,2,5)$	$B = (0,3,4)$	$C = (2,2.5,3)$	Sonuçlar
Yeni metod ER*	2.33	2.66	2.49	$A < C < B$
$p = 1$ için Sign Distance	3	3	3	$A \sim B \sim C$
$p = 2$ için Sign Distance	2.16	2.70	2.70	$A < B \sim C$
Chen Distance	2.50	2.50	2.50	$A \sim B \sim C$
Chu-Tsao	0.74	0.74	0.75	$A \sim B < C$

Burada başka bir örnekle önerdiğimiz yeni yöntem yani Skor değeri ile (4.1) den iki simetrik üçgen fuzzy sayıyı sıralayalım.

#### 4.2.3. Örnek

A ve B gibi iki simetrik üçgen fuzzy sayılarını gözönüne alalım.  $A = (0.5,0.3,0.3)$  ve  $B = (0.5,0.1,0.1)$ , Şekil 4.3'de gösterildiği gibi.



**Şekil 4.3.** *A* ve *B* fuzzy sayıları

Yeni yöntem  $ER_{sd}$ 'e göre, sıralamadaki skor değerleri

$$ER_{sd}(\tilde{A}) = 0.40, \text{ ve } ER_{sd}(\tilde{B}) = 0.39$$

elde edilir.

Böylece, fuzzy sayıların sıralamadaki sırası  $B < A$  olur. İki fuzzy sayı *A* ve *B* aynı mod ve simetrik yayılıma sahip olduğundan, mevcut yöntemlerin çoğunun uygun sonuçları vermediği görülmektedir. Örneğin (Abbasbandy and Hajjari 2009)'da farklı indeks (*p*) değerleri kullanıldığında farklı sıralama sonuçları elde edilir.  $p = 1$  ve  $p = 2$  olduğunda, fuzzy sayıların sıralama sonuçları sırasıyla  $A \sim B$  ve  $B < A$ 'dır. Bu esnada, (Chu and Tsao 2002) ve (Chen 1985) yaklaşımları kullanarak sıralama sırası aynı, yani  $A \sim B$  dir. En uygun değerlerin çeşitli indeksleri kullanıldığında farklı sıralama yöntemleri elde edilmektedir. Hâlbuki karar vericiler sezgisel olarak  $B < A$  sonucunu tercih eder.

## 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Fuzzy sayıların sıralamasında sıklıkla kullanılan mesafe yöntemleri olmasına rağmen bu yöntemlerin çoğunda ayırım yapılmadığı için iyi bir sonuç alınmaz. Bu tezde, bir mesafe ölçüsüne dayalı geliştirilmiş fuzzy sayıların sıralanması için yeni bir yöntem sunulmuştur. Önerilen aralık mesafesi ölçümü kullanılmış ve geliştirilmiş fuzzy sayıların orijinal sayısı gibi genel koşullar, fuzzy sayıları sıralamak için özel koşullar kullanılmıştır. Önerilen sıralama yönteminin diğer yaklaşımlarla bazı sayısal örnekler üzerinde karşılaştırılması yapılmıştır. Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’de görüldüğü gibi yeni metodun belirsiz veya kesin olmayan bir durumu olmadığı görülmüştür. Diğer yöntemlerin sonuçlarının açık ve net olmadığı halde yeni metod ile net sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışma sonucunda, önerilen yöntemin daha iyi olduğu görülmüş ve bu yaklaşımın bazı faydalı özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir.

**KAYNAKLAR**

- Abbasbandy, S., Asady, B., 2006. Ranking of fuzzy numbers by sign distance., *Information Science*. 176, 2405 - 2416.
- Abbasbandy, S., Hajjari, T., 2009. A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers., *Computer and Mathematics with Appl.* 57, 413 - 419.
- Adamo, M. 1980, Fuzzy decision trees, *Fuzzy Sets Syst.*, 4, 207-219,
- Anonim, 2018a. <http://mekatronik.kocaeli.edu.tr/dokuman/dersnotu/DERS2-03-10-2012-16-11-39-1857287725.pdf> (15.02.2018)
- Anonim, 2018b. <https://paperzz.com/doc/5044938/bulan%C4%B1k-mant%C4%B1k-%E2%80%93-k%C3%BCmeler>, (11.02.2018)
- Asady, B., Zendehnam, A., 2007. Ranking fuzzy numbers by distance minimization, *Appl. Math Model.* 31, 2589 - 2598.
- Atanassov, K., 1986, Intuitionistic Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87-96,
- Chakraborty, C., Chakraborty, D., 2006. A theoretical development on fuzzy distance measure for fuzzy numbers. *Math. Comput. Model.* 43, 254–261.
- Chang, W. K. 1981, Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions, *International Conference on Policy Analysis and Informations Systems*, Tamkang University, R. O. C., 163-171.
- Chen, S. H., 1985. Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, *Fuzzy Sets and Systems*. 17, 113- 129.
- Chen, S., Hwang, C., 1992. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*, in collaboration with Hwang, F., Springer – Verlag, Germany.
- Chu, T., Tsao, C., 2002. Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point, *Comput. Math. Appl.* 43, 11- 117.
- Çoker, D., 1997. An Introduction to Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 88, 81-89.
- Dubois, D., Prade H., 1978. *Fuzzy Sets and Systems -Theory and Applications*, *Mathematics in Science and Engineering Volume*. 144, Toronto.
- Eslamipoor, R., Hosseininasab, H., Sepehriar, A., 2014. An Improved Ranking Method For Generalized Fuzzy Numbers Based On Euclidian Distance Concept, *Afr. Mat.* 26 (7-8), 1291-1297
- George, A., Veeramani, P., 1994. On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 64: 395-399.
- Grzegorzewski, P., 2002. Nearest interval approximation of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*. 130, 321 - 330.
- Guha, D., Chakraborty, D., 2010. A new approach to fuzzy distance measure and similarity measure between two generalized fuzzy numbers. *Appl. Soft Comput.* 10, 90–99
- Günel, Ü., 1997. Bulanık Mantık, *Otomasyon dergisi*, No.55,56,s.50-55.
- Kaufman, A. ve Gupta, M.M., 1988. *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Elsevier Science Publishers B.V., Netherlands.
- Kaufmann, A., 1975. *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*. Vol. 1: *Fundamental Theoretical Elements*, Academic Press, New York.
- Morris, M., Mano 1997. *Sayısal Tasarım*, MEB Yayınları, s.26.

- Murakami, S. H. Maeda, and S., 1983, Imamura, Fuzzy decision analysis on development of centralized regional energycontrol system, Proceeding of the IFAC Symposium Marseille, 363-368,
- Nasibov, E. N., 2007. Fuzzy least squares regression model based of weighted distance between fuzzy numbers, Automatic Control and Computer. Science. 41, 10 – 17.
- Saneifard, R., 2009. A method for defuzzification by weighted distance, International Journal of Industrial Mathematics. 3, 209 - 217.9
- Saneifard, R., 2009. Ranking L-R fuzzy numbers with weighted averaging based on levels, International Journal of Industrial Mathematics. 2, 163 - 173.
- Saneifard, R., Allahviranloo, T., Hosseinzadeh, F., Mikaeilvand, N., 2007. Euclidean ranking DMUs with fuzzy data in DEA, Applied Mathematical Sciences. 60, 2989 -2998.
- Saneifard, R., Saneifard, R., 2011. An Approximation Approach to Fuzzy Numbers by Continuous Parametric Interval, Aust. J. B. Appl. Sciences, 3, 505-515
- Schwiezer, B., Sklar, A., 1960, Stastical metric spaces. Paci.c J. Math.,vol. 10, pp. 313-334.
- Singh, P., 2015. Distance and similarity measures for multiple-attribute decision making with dual hesitantfuzzy sets. J Comput Appl Math, 1–16.
- Tran, L., Duckstein, L., 2002. Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure. Fuzzy Sets Syst.130(3), 331–341.
- Wang, M. L., Wang, H. F., Lung, L. C., 2005. Ranking fuzzy numbers based on lexicographic screening procedure, International Journal of Information Technology and decision making. 4, 663 – 678.
- Wang, T., Lu, Z., Li, F., 2002. Bidirectional approximate reasoning based on weighted similarity measures fvague sets. J Comput Eng Sci 24, 96–100.
- Wang, X. and Kerre, E.E., 2001. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities I. Fuzzy Sets Syst. 118, 375–385.
- Wang, X., Kerre, E-E., 2001. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II), Fuzzy Sets and Systems 118, pp.387-405.
- Yaralıoğlu, K., 2004. Uygulamada Karar Destek Yöntemleri. İlkem Ofset, İzmir. [www.deu.edu.tr/userweb/k.yaralioglu/dosyalar/bul\\_man.doc](http://www.deu.edu.tr/userweb/k.yaralioglu/dosyalar/bul_man.doc)
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338–353.
- Zadeh, L. A., 1971. Similarity relations and fuzzy orderings. Inf. Sci. 3, 177–200.
- Zadeh, L., A., 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Transactions on Systems, man, and Cybernetics, Vol. SMC-3, No. 1.,28-44, January.
- Zimmermann, H. J., 1991. Fuzzy sets theory and its applications, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

## ÖZGEÇMİŞ

Elmira ABBASİ 1985 yılında İran'da Güney Azerbaycan'ın Urmie şehrinde doğmuştur. İlk, orta, ve lise eğitimini Urmie'de tamamlamıştır. 2003'de Salmas Azad Üniversitesinde matematik öğretmenliği bölümüne girmiştir. 2010 yılında, uygulamalı matematik dalında Hamedan Azad Üniversitesinde yüksek lisansa girmiş ve 2012'de bu alandan mezun olmuştur. 2013 yılında da Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında doktora eğitimine başlamıştır. Evli olup ve bir kızı vardır.