T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASAL HALKALARDA TERS TÜREVLER

Merve ÖZDEMİR
Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

Not: Tez kapağı yüksek lisans tezlerinde "Turkuaz", doktora tezlerinde "Mavi" dir.

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASAL HALKALARDA TERS TÜREVLER

Merve ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **26/01/2018**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

Merve ÖZDEMİR tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve **26/01/2018** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Asal Halkalarda Ters Türevler**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Neşet AYDIN ……………………

Başkan

Prof.Dr. Ali ERDOĞAN ……………………

Üye

Yrd. Doc.Dr. Didem YEŞİL SUNGUR ……………………

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Merve ÖZDEMİR

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Neşet AYDIN, çalışmam süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen arkadaşlarıma, başta Yrd. Doç. Dr. Didem YEŞİL SUNGUR olmak üzere tüm hocalarıma ve hayatımın her evresinde yanımda olan benden desteğini bir an olsun esirgemeyen değerli anneme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve ÖZDEMİR

Çanakkale, Ocak, 2018

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\in$	Elemanı
$\notin$	Elemanı değil
$\emptyset$	Boş küme
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\subseteq$	Kapsanır veya Eşit
$\forall$	Her
$\cong$	Eşyapılı (izomorf)
$\ni$	Öyle ki
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Gerek ve Yeter Koşul

ÖZET

ASAL HALKALARDA TERS TÜREVLER

Merve ÖZDEMİR
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman : Prof. Dr. Neşet AYDIN
26/01/2018, 61

Bu tezde asal ve yarıasal halkalar üzerinde türev, ters türev, genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş ters türev kavramları arasındaki mümkün olan ilişkilerin detaylı araştırıldığı bazı makaleler incelenmiştir.

Ayrıca M.Samman ve N.Alyamani tarafından 2007 yılında yapılan "Yarı-Asal Halkalar Üzerinde Türevler ve Ters Türevler" adlı çalışmalarında gösterilen sonuçlar ele alınmıştır. Bu sonuçlarda türev ve ters türev yerine (α,β)-ters türev ve genelleştirilmiş (α,β)-ters türev alınarak genelleştirmeler yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: Asal Halka, Yarıasal Halka, (α,β)-Türev, (α,β)-Ters Türev, Genelleştirilmiş (α,β)-Türev, Genelleştirilmiş (α,β)-Ters Türev

ABSTRACT

REVERSE DERIVATION ON PRIME RINGS

Merve ÖZDEMİR
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematics Science
Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN
26/01/2016, 61

In this thesis, the papers related to possible relations that might be occurred between generalized derivations and generalized inverse derivations have been deeply investigated.

Furthermore results obtained by M. Samman and N. Alyamani in the paper " Derivations and Reverse Derivations in Semiprime Rings " in 2007 are intensively studied. Those results have been generalized by taking inverse (α,β)-derivations and generalized (α,β)-inverse derivations instead of derivations and inverse derivations.

Keywords: Prime Ring, Semiprime Rings, (α,β)-Derivations, (α,β)-Reverse Derivations, Generalized (α,β)-Derivations, Generalized (α,β)- Reverse Derivations

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Ters türev kavramı ilk defa 1957 yılında Herstein tarafından ortaya atılmıştır. Ters türev kavramı ile ilgili sonuçlar, ters türevler ve türevler arasındaki ilişki pek çok matematikçi tarafından çeşitli koşullar altında incelenerek genelleştirilmeler yapılmış ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümde ele alınmıştır. Tezde kullanılan bazı tanımlar ve kavramlara ikinci bölüm olan genel bilgiler kısmında yer verilmiştir.

Asal halkalarda türev ve ters türevin aynı olduğu, yarıasal halkalarda ters türev ve türevin bazı koşullar altında aynı olduğu gösterilmiştir. Ters türevin daha genel olmadığı üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde asal ve yarıasal halkalarda türev ve ters türev ile ilgili elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1) R bir asal halka ve $0 \neq d$ bir ters türev ise $R \subset Z(R)$ ve d bir türevdir.

2) R bir yarıasal halka ve $0 \neq d$ bir ters türev ise $d(R) \subset Z(R)$ ve d bir türevdir

3) R bir asal halka ve $d: R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere $a, b \in R$ için $d(x) = ax + xb$ şeklinde tanımlı bir türev var ise $d = 0$ dır.

4) R bir asal halka $a, b \in R$ ve her $x \in R$ için $ax + xb = 0$ ise $a, b \in Z(R)$ ve $b = -a$ olur.

5) R bir asal halka, $I \neq (0)$ onun bir ideali, f ve $g, f(x)y + yg(x) = 0$ koşulunu sağlayan iki türev ise her $x, y, u \in I$ için $f(u)[x, y] = [x, y]g(u) = 0$ olur. Ayrıca $f(I), g(I) \subset Z(R)$ dır.

Bu çalışmanın beşinci bölümünün ilk kısmında R bir asal halka, $\alpha, \beta: R \to R$ otomorfizmalar olmak üzere, yukarıda verilen bazı sonuçlar ele alınmış, türev ve ters türev kavramları yerine $(\alpha, \beta) -$ ters türev alınarak genelleştirmeler yapılmıştır.

Bu bağlamda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

i- R asal halkası üzerinde tanımlı bir $D, (\alpha, \beta) -$ters türevnin, bir $(\alpha, \beta) -$türev ve ayrıca $R \subset Z(R)$ olduğu gösterilmiştir.

ii- R asal halkası üzerinde tanımlı bir D, $d\ (\alpha, \beta) -$ters türev ile belirlenen genelleştirilmiş $(\alpha, \beta) -$ ters türevinin bir $D, d\ (\alpha, \beta) -$ türeviyle belirlenen genelleştirilmiş $(\alpha, \beta) -$ türev olduğu ve $R \subset Z(R)$ olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümün ikinci kısmında ise R, $2-$burulmasız bir yarıasal halka, $a, b, c \in R$ ve D, F, G dönüşümleri R halkasının üç $(\alpha, \beta)-$ters türevleri olmak üzere aşağıda sıralanan ifadeler ispatlanmıştır.

i- R halkasında, α bir otomorfizma ve β bir epimorfizma olmak üzere D dönüşümünün R halkasında bir $(\alpha, \beta)-$ters türev olması için gerek ve yeter koşul merkez tarafından kapsanan $(\beta, \alpha)-$ türev olmasıdır.

ii-α ve β, R halkasında birer epimorfizma olmak üzere, eğer D dönüşümü $D(x) = c\alpha(x) + \beta(x)c$ şeklinde tanımlanan $(\alpha, \beta)-$ters türev ise $D = 0$ ve $c = 0$ dır.

iii-R halkasında, α bir epimorfizma ve β bir otomorfizma olmak üzere D, R halkasının $D(x) = a\alpha(x) + \beta(x)b$ koşulunu sağlayan bir $(\alpha, \beta)-$ ters türevi ise D, a ile belirlenmiş bir $(\alpha, \beta)-$iç türevdir.

iv- α, β otomorfizma, F ve G, R halkasının her $x, y \in R$ için $F(x)\alpha(y) + \beta(y)G(x) = 0$ koşulunu sağlayan iki $(\alpha, \beta)-$ ters türevleri ise her $x, y, z \in R$ için $F(y)\alpha([z, x]) = \beta([z, x])G(y) = 0$ ve $G(R), F(R) \subset Z(R)$ dir.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Bu kısımda tezde kullanılan bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.1. G boştan farklı bir küme ve $\diamond$ G üzerinde tanımlı ikili işlem olsun.

(1) Her $m, n, t \in G$ için $m \diamond (n \diamond t) = (m \diamond n) \diamond t$

(2) Her $m \in G$ için $m \diamond e = e \diamond m = m$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır

(3) Her $m \in G$ için $a \diamond m = m \diamond a = e$ olacak şekilde $a \in G$ vardır

(4) Her $m, n \in G$ için $m \diamond n = n \diamond m$ dır

G kümesi $\diamond$ ikili işlemine göre ilk üç özelliği sağlıyorsa bir ***grup*** denir.G grubu dördüncü özelliği de sağlıyorsa G ye $\diamond$ ikili işlemi altında ***değişmeli grup*** denir.

Tanım 2.2. G bir grup ve H, G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H, G deki ikili işleme göre kapalı ve G den indirgenmiş ikili işlem ile bir grup ise, H kümesine G nin bir ***altgrubu*** denir.

Tanım 2.3. G bir grup, $\{e_G\}$ ve G grubunun kendsine ***aşikar altgrupları*** denir.

Tanım 2.4. G grubunun aşikâr olmayan altgrubuna ***öz altgrup*** denir.

Uyarı 2.5. $(G,\diamond)$ bir grup olsun. G nin boştan farklı bir alt kümesi olan H bir altgrupdur ancak ve ancak her $x, y \in H$ için $x \diamond y^{-1} \in H$ olmasıdır.

Lemma 2.6. (Brauer's Trick). Bir toplamsal grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat. X ile Y, G grubunun iki öz altgrubu ve $G = X \cup Y$ olsun. Kabul edelim ki $X \neq G$ olsun. $G \neq X$ olmasından dolayı $a \in G$ ve $a \notin X$ olacak biçimde bir a elemanı vardır. Diğer taraftan $G = X \cup Y$ olduğundan $a \in Y$ dir. Burdan $G \subset Y$ dir. Eğer $G \not\subset Y$ olsaydı $b \notin Y$ ve $b \in G$ olan en az bir b elemanı olurdu. $G = X \cup Y$ den $b \in X$ bulunurdu. O halde $a + b \in Y$ dir. Şimdi kabul edelim ki $a + b \notin Y$ olsaydı. $a + b \in X$ olurdu. X in toplamsal olması kullanıldığında $a \in X$ elde edilir ve $a \notin X$ olmamasıyla çelişir. Sonuç olarak $a + b \in Y$ dir. Y toplamsal olduğundan $b \in Y$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde $G = Y$ olduğu açıktır.

Tanım 2.7. Bir cebirsel yapı $(R,\diamond,\circ)$ verilmiş olsun. Aşağıdaki üç özellik sağlanıyorsa $(R,\diamond,\circ)$ cebirsel yapısına halka denir.

$(R1)$ $(R,\diamond)$ değişmeli bir grupdur.

$(R2)$ $(R,\circ)$ nin birleşme özelliği var.

$(R3)$ $\circ$ işleminin $\diamond$ işlemi üzerinde soldan ve sağdan dağılma özellği vardır.

Eğer R halkası

$(R4)$ Her $m, n \in R$ için $m \circ n = n \circ m$ koşulunu sağlıyorsa ***değişmeli halka,***

$(R5)$ Her $m \in R$ için $m \circ 1_R = 1_R \circ m = m$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ elemanı var ise ***birimli halka*** adını alır.

Aksi belirtilmediği sürece bir R halkası denince $(R, +, .)$ halkası anlaşılacaktır.

Tanım 2.8. R halkasında $\emptyset \neq X$ bir alt küme olmak üzere

$$C_R(X) = \{r \in R \mid r.c = c.r, \forall c \in X\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye X in R halkasındaki ***merkezleştiricisi*** denir.

Tanım 2.9. R bir halka olsun. Halkadaki bütün elemanlarla değişmeli olan elemanların kümesine R halkasının ***merkezi*** denir ve $Z(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. $\alpha, \beta: R \to R$ dönüşümler olmak üzere

$$C_{\alpha,\beta} = \{b \in R \mid b\alpha(x) = \beta(x)b, \forall x \in R\}$$

kümesine R halkasının $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$**-merkezi** denir

Tanım 2.11. $\emptyset \neq S$, R halkasının bir altkümesi olsun.Eğer S, R halkası üzerinde tanımlı işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa, S altkümesine R halkasının bir ***althalkası*** denir.

Uyarı 2.12. Bir halkanın merkezi, o halkanın alt halkasıdır.

Tanım 2.13. I, R halkasının boş olmayan toplamsal bir altgrubu olsun.
Her $m \in R$ ve $n \in I$ için $m.n,\ n.m \in I$ ise I kümesine R halkasının ***iki taraflı ideali*** denir ve $I < R$ ile gösterilir.

Örnek 2.14. $R = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi üzerinde tanımlanan matrisler üzerinde adi toplama ve çarpma işlemiyle beraber bir halkadır. $I = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{Z}\right\}$ biçiminde tanımlanan küme de halkanın bir idealidir.

Uyarı 2.15. Her ideal bir alt halkadır ancak her alt halka bir ideal değildir.

Uyarı 2.16. Bir R halkasının boştan farklı idealleri olan X ve Y nin çarpımı da halkanın bir idealidir.

$$XY = \left\{\sum_{sonlu} x_i.y_i \mid x_i \in X, \qquad y_i \in Y\right\}$$

Tanım 2.17. Bir R halkasında her $x \in R$ için $n.x = 0$ olacak biçimde x den bağımsız n pozitif tamsayıları var ise bu sayılardan en küçük pozitif olan n sayısına R halkasının ***karakteristiği*** denir ve $charR = n$ olarak gösterilir. Böyle bir pozitif sayı yok ise R halkasının karakteristiği sıfır olarak tanımlanır.

Uyarı 2.18. Bir R halkasının karakteristiği ikiden farklı olsun. O halde $a \in R$ için $2a \in Z(R)$ iken $a \in Z(R)$ olur.

İspat. $2a \in Z(R)$ .olsun. Her $y \in R$ için $[2a, y] = 0$ dır.Yani $2[a, y] = 0$ dir. $charR \neq 2$ olduğundan her $y \in R$ için $[a, y] = 0$ bulunur. Bu da gösterir ki $a \in Z(R)$ dir.

Tanım 2.19. n, sıfırdan farklı bir tamsayı olmak üzere, R halkasında $nx = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa R ye ***n-burulmasız halka*** denir.

Tanım 2.20. P, R halkasından farklı R nin bir ideali ve X ve Y, R halkasının herhangi iki ideali olmak üzere $XY \subseteq P$ iken $X \subseteq P$ veya $Y \subseteq P$ oluyorsa P idealine ***asal ideal*** denir.

Tanım 2.21. (0) ideali asal ideal ise halkaya ***asal halka*** denir.

Uyarı 2.22. Bir R halkasında her $m, n \in R$ için $mRn = (0)$ olduğunda $m = 0$ veya $n = 0$ olması durumunda R asal halkadır.

Tanım 2.23. R halkasında bir X ideali için, $X^n = (0)$ durumunu sağlayan bir pozitif n tamsayısının bulunuyorsa X idealine ***nilpotent ideal*** denir.

Tanım 2.24. Bir halka sıfırdan farklı nilpotent ideal yok ise ***yarıasal halka*** denir.

Uyarı 2.25. Bir R halkası yarıasal halka ise her $q \in R$ için $qRq = (0)$ olduğunda $q = 0$dır.

Uyarı 2.26. Asal olan bir halka aynı zamanda bir yarıasal halkadır ancak tersi yarıasal halka için her zaman sağlanmayabilir.

Tanım 2.27. Bir R halkasında $[,]: R \times R \to R$, $[x, y] = xy - yx$ biçiminde tanımlanan fonksiyona ***Lie komütatör*** denir.

Lie komütatör işlemi, her $m, n, t \in R$ için

L1) $[m, m] = 0$

L2) $[m, n] = -[n, m]$

L3) $[m + n, t] = [m, t] + [n, t]$

L4) $[m, n + t] = [m, n] + [m, t]$

L5) $\big[m, [n, t]\big] + \big[n, [t, m]\big] + \big[t, [m, n]\big] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

özelliklerini sağlar.

Uyarı 2.28. R halkasının boş olmayan X ve Y altkümeleri için $[X, Y]$ komütatör $\{\sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \mid x_i \in X,\ y_i \in Y,\ n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.29. R halkasının bir toplamsal altgrubu olan U, $[U, R] \subset U$ şartını sağlıyorsa U altgrubuna R halkasının bir ***Lie ideali*** denir.

Tanım 2.30. R bir halka, $\alpha, \beta: R \to R$ iki dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $x\alpha(y) - \beta(y)x$ elemanı $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$***-komütatör*** olarak adlandılır ve $[x, y]_{\alpha,\beta}$ ile gösterilir.

Tanım 2.31. Bir R halkasında d toplamsal dönüşüm olmak üzere her $m, n \in R$ için

$$d(m,n) = d(m)n + md(n)$$

koşulu sağlandığında d dönüşümüne R halkasının bir ***türevi*** denir.

Örnek 2.32. $R = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası verilsin. $d: R \to R$, $d\left(\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ biçimindeki dönüşüm R halkasında bir türevdir.

Tanım 2.33. R bir halka $a \in R$ için $d_a: R \to R$ $[a,x] = ax - xa$ koşulu sağlandığında d_a toplamsal dönüşümüne ***a ile belirli bir iç türev*** denir.

Uyarı 2.34. R bir halka d, onun bir türevi olsun. $m \in Z(R)$ ise $d(m) \in Z(R)$ dir.

İspat: d bir türev ve $m \in Z(R)$ ise her $n \in R$ için $d([m,n]) = 0$ dir. Bu durumda her $n \in R$ için $0 = d([m,n]) = [d(m),n] + [m,d(n)]$ dır. $m \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $n \in R$ için $[d(m),n] = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $d(m) \in Z(R)$ dir.

Tanım2.35. Bir R halkasında d toplamsal dönüşüm olmak üzere her $m, n \in R$ için

$$d(mn) = d(n)m + nd(m)$$

koşulu sağlanıyorsa d dönüşümüne R halkasının bir ***ters türevi*** denir.

Örnek 2.36. $R = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası verilsin. $d: R \to R$, fonksiyonu

$$d\left(\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlansın. R halkası üzerinde bir ters türevdir. Üstelik türev değildir.

Tanım 2.37. $d: R \to R$ bir ters türev olmak üzere $F: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $m, n \in R$ için, $F(mn) = F(n)m + nd(m)$ $\;(F(mn) = d(n)m + nF(m))$ koşulunu sağlıyorsa F ye d ile belirlenen ***sol(sağ) genelleştirilmiş ters türev*** denir.

Tanım 2.38. d, R halkasının bir toplamsal dönüşümü ve $\alpha, \beta: R \to R$ iki dönüşüm olsun. Her $m, n \in R$ için

$$d(mn) = d(m)\alpha(n) + \beta(m)d(n)$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümüne $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$***-türev*** denir.

Tanım 2.39. R bir halka $a \in R$ için $d_a: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $x \in R$ için

$$d_a(x) = [a,x]_{\alpha,\beta}$$

olarak tanımlansın. Bu d_a dönüşümüne ***a ile belirli bir*** $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$***-iç türev*** denir

Tanım 2.40. R bir halka ve $d: R \to R$ bir (α, β)-türev olmak üzere $D: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $m, n \in R$ için

$$D(mn) = D(m)\alpha(n) + \beta(m)d(n)$$

şeklinde tanımlanan D dönüşümüne ***d* ile belirlenmiş genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ türev** denir.

Tanım 2.41. R bir halka, $d: R \to R$ toplamsal dönüşüm, $\alpha, \beta: R \to R$ iki dönüşüm olmak üzere, her $m, n \in R$ için

$$d(mn) = d(n)\alpha(m) + \beta(n)d(m)$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümüne **$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$*-ters türev*** denir.

Tanım 2.42. R bir halka, $e \in R$ olsun. $e^2 = e$ ise e elemanına ***idempotent*** eleman denir.

Tanım 2.43. R bir halka ve $d: R \to R$ bir (α, β)-ters türev olmak üzere $D: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $m, n \in R$ için

$$D(mn) = D(n)\alpha(m) + \beta(n)d(m)$$

biçiminde tanımlanan D dönüşümüne ***d* ile belirlenmiş genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ ters türev** denir.

Önerme 2.44. (Herstein I.N. 1976 Lemma 1.1.8) R bir yarıasal halka ve $a \in R$ elemanı $x, y \in R$ olmak üzere bütün $xy - yx$ elemanları ile değişmeli ise o zaman $a \in Z(R)$ olur.

Tanım 2.45. R bir halka ve S, R halkasının bir alt kümesi olmak üzere $F : R \to R$ bir dönüşüm olsun. Her $s \in S$ için $[s, F(s)] \in Z(R)$, $([s, F(s)] = 0)$ oluyor ise F dönüşümüne, S kümesi üzerinde ***centralizing(commuting) dönüşüm*** denir.

Tanım 2.46. R bir halka ve S, R halkasının bir alt kümesi olmak üzere $F: R \to R$ bir dönüşüm olsun. Her $s \in S$ için $F(s)s + sF(s) \in Z(R)$, $(F(s)s + sF(s) = 0)$ oluyor ise F dönüşümüne, S kümesi üzerinde ***skew-centralizing(skew-commuting) dönüşüm*** denir.

Tanım 2.47. $(A, +)$ bir değişmeli grup olsun.

$$[\,,]: A \times A \to A$$
$$(m, n) \to [m, n]$$

biçimde tanımlanan dönüşüm her $m, n, t \in A$ için

i. $[m, m] = 0$

ii. $[m, n + t] = [m, n] + [m, t]$ ve
$[m + n, t] = [m, t] + [n, t]$

iii. $\big[m, [n, t]\big] + \big[n, [t, m]\big] + \big[t, [m, n]\big] = 0$ (*Jacobi özdeşliği*)

koşullarını sağlıyorsa A değişmeli grubuna üzerinde tanımlanan [,] işlemi ile birlikte bir ***Lie halka*** denir.

Uyarı 2.48. R bir halka olmak üzere her $r, s \in R$ için $[r, s] = rs - sr$ olacak biçimde tanımlanan işlem ile bir ***Lie halka*** dır.

BÖLÜM 3
HALKALARDA TÜREVLER

Bu bölümde türevli asal halkalarda halkanın hangi durumlarda değişmeli olduğunu araştıran makaleler incelenmiştir.

3.1 Asal Halkalar Üzerinde Türevler

Posner'in (Posner E.C 1957) makalesi boyunca, R bir asal halka, d bir türev olarak alınmıştır.

Lemma 3.1.1. R bir asal halka, d bir türev ve $a \in R$ olsun. $ad(R) = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat. Hipotezden her $r \in R$ için, $ad(r) = 0$ olduğundan r yerine rs, $s \in R$ alınırsa

$$0 = ad(rs) = a(d(r)s + rd(s)) = ad(r)s + ard(s)$$

olur. Yine hipotezden $ad(r) = 0$ olduğundan her $r,s \in R$ için, $ard(s) = 0$ bulunur. Buradan her $s \in R$ için $aRd(s) = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $a = 0$ veya her $s \in R$ için, $d(s) = 0$ olur. Dolayısıyla $a = 0$ veya $d = 0$ bulunur.

Lemma 3.1.2. R bir asal halka ve $p, q, r \in R$ olsun. Her $x \in R$ için, $pxqxr = 0$ ise p, q, r den en az biri sıfırdır.

İspat. $x,y \in R$ için $x + y \in R$ olduğuna göre hipotezden $p(x + y)q(x + y)r = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 0 = p(x + y)q(x + y)r &= p(xq + yq)(xr + yr) \\ &= p(xqxr + xqyr + yqxr + yqyr) \\ &= pxqxr + pxqyr + pyqxr + pyqyr \end{aligned}$$

olduğundan ilk ve son terim hipotezden sıfır olacağından dolayı her $x,y \in R$ için,

$$pxqyr + pyqxr = 0$$

elde edilir.

$px = 0$ ise $pxqyr = 0$ ve buradan her $y \in R$ için, $pyqxr = 0$ yani $pRqxr = 0$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ için, $p = 0$ veya $qxr = 0$ elde edilir.

$px = 0$ ise, her $z \in R$ için, $pxz = 0$ dır. Buradan her $z \in R$ için, $p = 0$ veya $qxzr = 0$ yani $p = 0$ veya $qxRr = 0$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ için, $p = 0$ veya $qx = 0$ veya $r = 0$ elde edilir.

$px = 0$ eşitliğinde x yerine xqxr alınırsa $p(xqxr) = 0$ bulunur. Buradan her $x \in R$ için, $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qxqxr = 0$ olur. $qx = 0$ da x yerine xqxq alınırsa $x \in R$ için, $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qxqxq = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $p \neq 0$ ve $r \neq 0$ olsun. $qxqxq = 0$ eşitliğinde x yerine x + y, $y \in R$ alınırsa;

$$0 = q(x + y)q(x + y)q = q(xq + yq)(xq + yq)$$
$$= q(xqxq + xqyq + yqxq + yqyq)$$
$$= qxqxq + qxqyq + qyqxq + qyqyq$$

bulunur. Burada ilk ve son terim hipotezden sıfır olacağından dolayı her $x, y \in R$ için, $qxqyq + qyqxq = 0$ elde edilir. Burada y yerine xqy alınırsa

$$0 = qxq(xqy)q + q(xqy)qxq$$
$$= (qxqxq)yq + qxqyqxq$$

olur. Burada ilk terim hipotezden sıfır olacağından her $x, y \in R$ için, $qxqyqxq = 0$ elde edilir. Buradan her $x \in R$ için $(qxq)R(qxq) = 0$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ için, $qxq = 0$ yani $qRq = 0$ bulunur. Dolayısıyla $q = 0$ elde edilir.

Teorem 3.1.3. R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka ve d_1, d_2 R halkasının türevi olsun. d_1d_2 türev ise d_1 ve d_2 den en az birisi sıfırdır.

İspat. d_1d_2 türev olduğundan her $x, y \in R$ için, $d_1d_2(xy) = d_1d_2(x)y + xd_1d_2(y)$ dir. Bununla birlikte d_1 ve d_2 türev olduğundan her $x,y \in R$ için

$$d_1d_2(xy) = d_1(d_2(xy))$$
$$= d_1(d_2(x)y + xd_2(y))$$
$$= d_1(d_2(x)y) + d_1(xd_2(y))$$
$$= d_1d_2(x)y + d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + xd_1d_2(y)$$

elde edilir. Son eşitlik ile birlikte düşünülürse

$$d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) = 0, \ \forall x,y \in R \qquad (3.1)$$

bulunur. (3.1) eşitliğinde x yerine $xd_1(z)$, $z \in R$ alınırsa

$$0 = d_2(xd_1(z))d_1(y) + d_1(xd_1(z))d_2(y)$$
$$= (d_2(x)d_1(z) + xd_2d_1(z))d_1(y) + (d_1(x)d_1(z) + xd_1^2(z))d_2(y)$$
$$= d_2(x)d_1(z)d_1(y) + xd_2d_1(z)d_1(y) + d_1(x)d_1(z)d_2(y) + xd_1^2(z)d_2(y)$$
$$= d_2(x)d_1(z)d_1(y) + d_1(x)d_1(z)d_2(y) + x(d_2d_1(z)d_1(y) + d_1^2(z)d_2(y))$$

elde edilir. Burada üçüncü terim (3.1) eşitliğinde x yerine $d_1(z)$ alındığında sıfıra eşit olacağından

$$d_2(x)d_1(z)d_1(y) + d_1(x)d_1(z)d_2(y) = 0, \ \forall x, y, z \in R \qquad (3.2)$$

olur. Tekrar (3.1) eşitliğinde x yerine z alınırsa, $d_2(z)d_1(y) + d_1(z)d_2(y) = 0$ yani her y, $z \in R$ için, $d_1(z)d_2(y) = -d_2(z)d_1(y)$ bulunur. Bu eşitlik (3.2) eşitliğinde yerine yazılırsa her x, y, $z \in R$ için, $d_2(x)d_1(z)d_1(y) - d_1(x)d_2(z)d_1(y) = 0$ olur. Bulunan eşitlik sağdan $d_1(y)$ parantezine alınırsa her x, y, $z \in R$ için, $(d_2(x)d_1(z) - d_1(x)d_2(z))d_1(y) = 0$ elde edilir. Burada Lemma 3.1.1 kullanılırsa $d_1 = 0$ veya $\forall x, z \in R$ için $d_2(x)d_1(z) - d_1(x)d_2(z) = 0$ bulunur. Kabul edelim ki her x, $z \in R$ için, $d_2(x)d_1(z) - d_1(x)d_2(z) = 0$ olsun. (3.1) eşitliğinde y yerine z alınırsa her x, $z \in R$ için, $d_2(x)d_1(z) + d_1(x)d_2(z) = 0$ olur. Bu iki eşitlik toplanırsa $2d_2(x)d_1(z) = 0$ ve charR $\neq 2$ olduğu kullanılırsa her x, $z \in R$ için $d_2(x)d_1(z) = 0$ elde edilir. Tekrar Lemma 3.1.1 kullanılarak $d_1 = 0$ veya her $x \in R$ için, $d_2(x) = 0$ bulunur. Buradan $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Lemma 3.1.4. R bir asal halka ve d bir türev olsun. Her $x \in R$ için $xd(x) - d(x)x = 0$ ise R halkası komütatif veya $d = 0$ dır.

İspat. $y \in R$ için, hipotezde x yerine $x + y$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= (x + y)d(x + y) - d(x + y)(x + y) \\
&= (x + y)(d(x) + d(y)) - (d(x) + d(y))(x + y) \\
&= xd(x) + xd(y) + yd(x) + yd(y) - d(x)x - d(x)y - d(y)x - d(y)y \\
&= xd(x) - d(x)x + yd(y) - d(y)y + xd(y) + yd(x) - d(x)y - d(y)x
\end{aligned}
$$

olur. Hipotezden $xd(x) - d(x)x = 0$ ve $yd(y) - d(y)y = 0$ olacağından her x, $y \in R$ için, $xd(y) - d(x)y = d(y)x - yd(x)$ bulunur. d bir türev olduğundan her x, $y \in R$ için, $d(xy) = xd(y) + d(x)y$ eşitliğinden

$$2xd(y) = d(y)x - yd(x) + d(xy), \quad \forall x, y \in R \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) eşitliğinde y yerine xr, $r \in R$ alınırsa $2xd(xr) = d(xr)x - (xr)d(x) + d(x^2r)$ yani $2x(d(x)r + xd(r)) = (d(x)r + xd(r))x - xrd(x) + d(x^2)r + x^2d(r)$ olur. Burada hipotez kullanıldığında

$$x^2d(r) = d(x)rx + xd(r)x - xrd(x), \quad \forall x, r \in R \tag{3.4}$$

bulunur. (3.3) eşitliğinde y yerine $r \in R$ için, rx alınırsa $2xd(rx) = d(rx)x - (rx)d(x) + d(xrx)$ ve buradan hipotez kullanıldığında

$$d(r)x^2 = xd(r)x + xrd(x) - d(x)rx, \quad \forall x, r \in R \tag{3.5}$$

olur. (3.4) ve (3.5) eşitlikleri toplanırsa

$$x^2d(r) + d(r)x^2 = 2xd(r)x, \ \ \forall x, r\in R \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$x(d(r)x - xd(r)) = (d(r)x - xd(r))x, \ \ \forall x, r\in R \tag{3.7}$$

olur. (3.7) eşitliğinde x yerine x + d(r) alınırsa, her x, $r\in R$ için $d(r)(d(r)x - xd(r)) = (d(r)x - xd(r))d(r)$ elde edilir. Burada $I_{d(r)}(x)= [d(r),x]$ şeklinde tanımlan d(r) ile belirlenen iç türev düşünüldüğünde her x, $r\in R$ için $I^2_{d(r)}(x) = 0$ bulunur.

Kabul edelim ki $charR \neq 2$ olsun. Teorem 3.1.3 kullanılarak her x, $r\in R$ için $I_{d(r)}(x) = 0$ olacağından $0 = [d(r),x] = d(r)x - xd(r), \ \forall x, r\in R$ bulunur. Buradan her $r\in R$ için, $d(r) \in Z$ elde edilir.

D, x ile belirlenen iç türevi D(r) = [x,r] şeklinde ifade edilsin. Her $r\in R$ için, $xd(r) - d(r)x = 0$ olduğundan $D(d(r)) = 0$ dır. Teorem 3.1.3 kullanılarak d = 0 veya D = 0 bulunur. Yani d = 0 veya her $r\in R$ için, $xr - rx = 0$ ve buradan d = 0 veya R halkası komütatiftir.

Eğer charR = 2 ise (3.6) kullanılarak $x^2d(r) + d(r)x^2 = 2xd(r)x=0$ ve buradan her $x,r\in R$ için, $x^2d(r) = d(r)x^2$ bulunur. Yani d(r), R halkasının her elemanının karesi ile komütatiftir.

R, charR = 2 olan bir asal halka ve $e\in R$, R halkasının her elemanının karesi ile komütatif olsun.

$$x^2e = ex^2, \ \ \forall x\in R \tag{3.8}$$

olur. (3.8) eşitliğinde x yerine x + y alınırsa $(x + y)^2e = e(x + y)^2$ ve buradan

$$(xy + yx)e = e(xy + yx), \ \ \forall x, y\in R \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde y yerine xe, $e\in R$ alınır ve (3.8) eşitliği kullanılırsa

$$xexe = exex, \ \ \forall x\in R \tag{3.10}$$

olur. (3.9) eşitliğinde y yerine e alınırsa

$$xe^2 = e^2x, \ \forall x \in R \tag{3.11}$$

bulunur. Böylece her $x \in R$ için,

$$\begin{aligned}(xe + ex)^2 &= (xe + ex)(xe + ex) \\ &= xexe + xe^2x + ex^2e + exex \\ &= xexe + exex + xe^2x + ex^2x\end{aligned}$$

olur. charR = 2 olduğu ve (3.10) eşitliği kullanılarak

$$(xe + ex)^2 = xe^2x + ex^2x$$

bulunur. (3.11) ve (3.8) eşitlikleri kullanılarak

$$(xe + ex)^2 = 0, \ \forall x \in R \tag{3.12}$$

elde edilir. Varsayalım ki $a,b \in R$ için $ab = 0$ olsun. (3.9) eşitliğinden $(ab + ba)e = e(ab + ba)$ ve kabulümüzden

$$bae = eba \tag{3.13}$$

bulunur. $ab = 0$ ise $0 = aab = a^2b$ olduğundan (3.13) eşitliğinden $ba^2e = eba^2$ olur. Ayrıca (3.8) eşitliğinden $ba^2e = bea^2$ elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}(be + eb)a^2 &= bea^2 + eba^2 \\ &= ba^2e + eba^2 \\ &= eba^2 + eba^2 \\ &= 2eba^2\end{aligned}$$

ve charR = 2 olduğu kullanılarak $(be + eb)a^2$ elde edilir. Yani $ab=0$ ise

$$(be + eb)a^2 = 0 \tag{3.14}$$

bulunur. Aynı şekilde $ab = 0$ ise her $x \in R$ için $(xa)b = 0$ dir. (3.14) eşitliğinde a yerine xa alınırsa $(be + eb)(xa)^2 = 0$ ve Lemma 3.1.2 kullanılarak $be + eb = 0$ veya $a = 0$ bulunur. $be + eb = 0$ ise charR = 2 olduğundan $be = eb$ olur. $(be + eb)(xa)^2 = 0$ eşitliğinde b yerine bv, $v \in R$ alınırsa

$$0 = (bve + ebv)(xa)^2$$
$$= (bve + ebv)(xa)(xa)$$

olur. Lemma 3.1.2 kullanılarak $bve + ebv = 0$ veya $a = 0$ elde edilir.

$bve + ebv = 0$ ise $be = eb$ olduğu kullanılır ve yeniden düzenlenirse $b(ve + ev) = 0$ bulunur. e ile belirlenen iç türev düşünülürse Lemma 3.1.1 kullanılarak $b = 0$ veya $ve + ev = 0$ olur. $ve + ev = 0$ ise $\mathrm{char}R = 2$ olduğundan her $v \in R$ için $ve = ev$ elde edilir. Yani $a = 0$, $b = 0$ veya $e \in Z(R)$ olur. (3.12) eşitliğinden $0 = (xe + ex)^2 = (xe + ex)(xe + ex)$ yazılır. a yerine, $xe + ex$, b yerine $xe + ex$, $x \in R$ alınırsa $xe + ex = 0$ veya $e \in Z(R)$ olur. Yani e, R halkasındaki her elemanın karesi ile değişmeli olduğunda her $x \in R$ için $xe + ex = 0$ veya $e \in Z(R)$ olur. Her $x, r \in R$ için $x^2 d(r) = d(r)x^2$ olduğuna göre buradan her $r \in R$ için $d(r) \in Z(R)$ elde edilir.

Varsayalım ki $y \in R$ için, $d(y) = 0$ olsun. Buna göre $d(xy) = d(x)y + xd(y) = d(x)y$ ve $d(xy) \in Z(R)$ olduğundan $d(x)y \in Z(R)$ bulunur.

$d \neq 0$ olsun. O zaman $d(x) \neq 0$ olacak biçimde en az bir $x \in R$ vardır. $d(x)y \in Z(R)$ olduğundan her $a \in R$ için $d(x)ya = ad(x)y$ dir. Buradan her $a \in R$ için,

$$\begin{aligned} d(x)(ya + ay) &= d(x)ya + d(x)ay \\ &= ad(x)y + d(x)ay \\ &= ad(x)y + ad(x)y \\ &= 2ad(x)y \end{aligned}$$

ve $\mathrm{char}R = 2$ olduğundan her $a \in R$ için, $d(x)(ya + ay) = 0$ dır. Yani, eğer $d(y) = 0$ ise her $a \in R$ için $d(x)(ya + ay) = 0$ bulunur. $d(x) \neq 0$ olduğunda $d(x) \in Z(R)$ ve $d(y) = 0$ olduğunda $y \in Z(R)$ elde edilir.

Her $c \in R$ için, $d(c^2) = d(c)c + cd(c)$ dir. $d(c) \in Z(R)$ olduğundan her $c \in R$ için, $d(c^2) = 2d(c)c$ ve $\mathrm{char}R = 2$ olduğundan $d(c^2) = 0$ dır. Bir önceki paragraf kullanılarak her $c \in R$ için, $c^2 \in Z$ elde edilir. Yani her $c, a \in R$ için $c^2 a = ac^2$ dir. Öyleyse a elemanı R halkasındaki her elemanın karesi ile değişmelidir. Bu durumda yukarıdaki e yerine a elemanı düşünülürse her $a \in R$ için $a \in Z(R)$ olur. Dolayısıyla R halkası komütatiftir.

Lemma 3.1.5.: A bir Lie halkası ve I, onun bir ideali olsun. $d \in A$ ve her $a \in I$ için $da.a = 0$ olsun. O zaman her $x \in A$ ve $a \in I$ için, $(dx.a)a = 0$ dır.

İspat. R_x, x tarfından sağ çarpmayı göstersin. Her $x \in A$ ve $a \in I$ için $d(R_x R^2_a) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Lie halkası için Jacobi özdeşliğini $R_{xa} = R_x R_a - R_a R_x$ olarak yazılabilir. I' nın ideal olması kullanılarak her $x \in A$ için, $xa \in I$ ve $a + xa \in I$ bulunur. $da.a = 0$

ise $(dxa)xa = 0$ ve $(d(a + xa))(a + xa) = 0$ dır. Buradan

$0 = d(a + xa)(a + xa) = (da + dxa)(a + xa) = (da)a + (da)(xa) + (dxa)a + d(xa)xa$

yani $(da)(xa) + (dxa)a = 0$ ve buradan her $x\in A$ ve $a\in I$ için, $d(R_aR_{xa} + R_{xa}R_a) = 0$ bulunur. Bu ifade yeniden düzenlenecek olursa $0 = d(R_aR_{xa} + R_{xa}R_a) = d(R_a(R_xR_a - R_aR_x) + (R_xR_a - R_aR_x)R_a) = d(R_aR_xR_a - R^2{}_aR_x + R_xR^2{}_a - R_aR_xR_a)$ yani her $x\in A$ ve $a\in I$ için, $d(R_xR^2{}_a - R^2{}_aR_x) = 0$ ve $d(R^2{}_a) = 0$ olduğu kullanılacak olursa her $x\in A$ ve $a\in I$ için, $d(R_xR^2{}_a) = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.6. R bir asal halka ve d R üzerinde bir türev ve her $x\in R$ için $xd(x) - d(x)x\in Z(R)$ olsun. Bu durumda d bir sıfır türev değil ise R halkası komütatiftir.

İspat. A, R halkasının türevlerinin bir Lie halkası ve I, A halkasının $x\in R$ için, $I_x = [x,a]$ şeklinde tanımlanan iç türevleri içeren bir ideali olsun. $d_1, d_2\in A$ için $[d_1,d_2]$, A halkasındaki türevlerin çarpımını ifade etsin. Kabul edelim ki $[(d,I_x),I_x] = (0)$ olsun. Lemma 3.1.5 kullanılarak her $a\in R$, $I_a\in I$, $x\in R$ için $[[[d,I_a]I_x]I_x] = (0)$ ve buradan he $a,x\in R$ için $x(xd(a) - d(a)x) - (xd(a) - d(a)x)x = x^2d(a) - xd(a)x - xd(a)x + d(a)x^2\in Z(R)$ yani

$$x^2d(a) + d(a)x^2 - 2xd(a)x\in Z,\quad \forall x, a\in R \tag{3.15}$$

elde edilir. $x\in R$ için (3.15) eşitliği kullanılırsa $x(x^2d(a) + d(a)x^2 - 2xd(a)x) = (x^2d(a) + d(a)x^2 - 2xd(a)x)x$ elde edilir. Bu ifade açılacak olursa $x^3d(a) + xd(a)x^2 - 2x^2d(a)x = x^2d(a)x + d(a)x^3 - 2xd(a)x^2$ ve buradan

$$3xd(a)x^2 + x^3d(a) = 3x^2d(a)x + d(a)x^3,\quad \forall x, a\in R \tag{3.16}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\mathrm{char}R = 3$ olsun. Her $x\in R$ için, (3.16) eşitliğinden $x^3d(a) = d(a)x^3$ yani $x^3d(a) - d(a)x^3 = 0$ ve buradan $I_x{}^3d = (0)$ bulunur. Teorem 3.1.3 kullanılarak $d = 0$ veya her $x\in R$ için $x^3\in Z(R)$ elde edilir. Eğer her $x\in R$ için $x^3\in Z(R)$ ise her $x, y\in R$ için $(x + y)^3 - x^3 - y^3\in Z(R)$ olur. Bu ifade açılırsa $(x + y)^3 - x^3 - y^3 = (x + y)(x + y)(x + y) - x^3 - y^3 = (x^2 + xy + yx + y^2)(x + y) - x^3 - y^3 = x^3 + x^2y + xyx + xy^2 + yx^2 + yxy + y^2x + y^3 - x^3 - y^3$ ve buradan

$$x^2y + xyx + xy^2 + yx^2 + yxy + y^2x\in Z(R),\quad \forall x,y\in R \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.17) de x yerine –x alınırsa $(-x)^2y + (-x)y(-x) + (-x)y^2 + y(-x)^2 + y(-x)y + y^2 (-$

x) $\in Z(R)$, yani

$$x^2y + xyx + yx^2 - (y^2x + yxy + xy^2) \in Z(R), \quad \forall x, y \in R \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.17) ve (3.18) eşitlikleri toplanırsa her $x, y \in R$ için $x^2y + xyx + xy^2 \in Z(R)$ elde edilir. Bu ifadede y yerine xy alınırsa $x^3y + x^2yx + xyx^2 = x(x^2y + xyx + yx^2) \in Z(R)$ bulunur. Kabul edelim ki her $x, y \in R$ için $x^2y + xyx + yx^2 = 0$ olsun. charR = 3 olduğu kullanılırsa $x(xy - yx) - (xy - yx)x = x^2y - xyx - xyx + yx^2 = x^2y + yx^2 - 2xy = -xy - 2xy = -3xy = 0$ bulunur. Yani her $y \in R$ için, $I_x^2 = (0)$ dır. Teorem 3.1.3 kullanılarak R halkası komütatif bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. Şimdi de charR $\neq$ 3 olsun. (3.16) eşitliğinde a yerine $x \in R$ alınır ve $x \in R$ için $x^3 \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa $3xd(x)x^2 + x^3d(x) = 3x^2d(x)x + d(x)x^3$ ve buradan

$$\begin{aligned}
x^3d(x) - d(x)x^3 &= 3x^2d(x)x - 3xd(x)x^2 \\
&= 3x(d(x)x - xd(x))x \\
&= 3xd(x)x^2 - 3x^2d(x)x \\
&= 3xd(x)x^2 - 3d(x)x^3 \\
&= 3(xd(x) - d(x)x)x^2
\end{aligned}$$

yani

$$x^3d(x) - d(x)x^3 = 3(xd(x) - d(x)x)x^2, \quad \forall x \in R \tag{3.19}$$

elde edilir. Ayrıca

$$(xd(x) - d(x)x)x = xd(x)x - d(x)x^2 \tag{3.20}$$

ve $xd(x) - d(x)x \in Z(R)$ olduğundan $(xd(x) - d(x)x)x = x(xd(x) - d(x)x)$ dir. Buradan

$$(xd(x) - d(x)x)x = x^2d(x) - xd(x)x \tag{3.21}$$

olur. (3.20) ve (3.21) eşitlikleri toplanırsa

$$2(xd(x) - d(x)x)x = x^2d(x) - xd(x)x^2 \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinde a yerine xd(a) alınırsa

$0 = 3xd(xd(a))x^2 + x^3d(xd(a)) – 3x^2d(xd(a))x – d(xd(a))x^3$

$=3x(d(x)d(a) + xd(d(a)))x^2 + x^3(d(x)d(a) + xd(d(a))) – 3x^2(d(x)d(a) + xd(d(a)))x – (d(x)d(a) + xd(d(a)))x^3$

$= 3xd(x)d(a)x^2 + 3x^2d^2(a)x^2 + x^3d(x)d(a) + x^4d^2(a) – 3x^2d(x)d(a)x – 3x^3d^2(x)x – d(x)d(a)x^3 – xd^2(a)x^3$

$= 3x^2d^2(a)x^2 + x^4d^2(a) – 3x^3d^2(a)x – xd^2(a)x^3 + 3xd(x)d(a)x^2 + x^3d(x)d(a) – 3x^2d(x)d(a)x – d(x)d(a)x^3$

olur. (3.16) eşitliğinden $3x^2d^2(a)x^2 + x^4d^2(a) – 3x^3d^2(a)x – xd^2(a)x^3 = 0$ olacağından

$$3xd(x)d(a)x^2 + x^3d(x)d(a) – 3x^2d(x)d(a)x – d(x)d(a)x^3 = 0, \quad \forall x, a\in R \qquad (3.23)$$

elde edilir. (3.16) eşitliği soldan d(x) ile çarpılırsa

$$3d(x)xd(a)x^2 + d(x)x^3d(a) – 3d(x)x^2d(a)x – d(x)d(a)x^3 = 0\,, \quad \forall x, a\in R \qquad (3.24)$$

elde edilir. (3.23) eşitliğinden (3.24) eşitliği çıkartılırsa ve (3.19) ile (3.22) eşitlikleri kullanılırsa her $x,a\in R$ için $(xd(x) –d(x)x)(d(a)x^2 + x^2d(a) – 2xd(x)x) = 0$ bulunur. Eğer $x\in R$ için $xd(x) –d(x)x \neq 0$ ise asal halkanın merkezi tamlık bölgesi olduğundan

$$d(a)x^2 + x^2d(a) – 2xd(x)x = 0, \quad \forall x, a\in R \qquad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) eşitliğinde a yerine xa alınır ve (3.25) eşitliği kullanılırsa

$0 = d(xa)x^2 + x^2d(xa) – 2xd(x)x$

$= (d(x)a + xd(a))x^2 + x^2(d(x)a + xd(a)) – 2x(d(x)a + xd(a))x$

$= d(x)ax^2 + xd(a)x^2 + x^2d(x)a + x^3d(a) – 2xd(x)ax – 2x^2d(a)x$

$= xd(a)x^2 + x^3d(a) – 2x^2d(a)x$

$= x(d(a)x^2 + x^2d(a) – 2xd(x)x)$

yani

$$d(x)ax^2 + x^2d(x)a – 2xd(x)ax = 0, \quad \forall a\in R \qquad (3.26)$$

bulunur. (3.25) eşitliğinde a yerine x alınırsa $d(x)x^2 + x^2d(x) – 2xd(x)x = 0$ elde edilir. Bu ifade sağdan a ile çarpılırsa

$$d(x)x^2a + x^2d(x)a - 2xd(x)xa = 0, \quad \forall a\in R \tag{3.27}$$

bulunur. (3.26) eşitliğinden (3.27) eşitliği çıkartılırsa

$$d(x)(ax^2 - x^2a) - 2xd(x)(ax - xa) = 0, \quad \forall a\in R \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28) eşitliğinde $x\in R$ için, a yerine xa alınırsa

$$d(x)x(ax^2 - x^2a) - 2xd(x)x(ax - xa) = 0, \quad \forall a\in R \tag{3.29}$$

bulunur. (3.28) eşitliğini $x\in R$ için, soldan x ile çarparsak

$$xd(x)(ax^2 - x^2a) - 2x^2d(x)(ax - xa) = 0, \quad \forall a\in R \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinden (3.29) eşitliği çıkartılır ve $xd(x) - d(x)x\in Z(R)$ olduğu kullanılırsa
$xd(x) - d(x)x(ax^2 - x^2 a - 2x(ax - xa)) = 0$ bulunur. $xd(x) - d(x)x \neq 0$ ise

$$ax^2 - x^2 a - 2x(ax - xa) = 0, \quad \forall a\in R \tag{3.31}$$

elde edilir. Böylece $0 = ax^2 - x^2 a - 2x(ax - xa) = ax^2 - x^2 a - 2xax + 2x^2a = ax^2 + x^2a - xax - xax$ bulunur. Yani $x(xa - ax) = (xa - ax)x$ ve buradan $I_x^2 = (0)$ bulunur. Teorem 3.1.3 kullanılarak $a\in Z(R)$ veya $\text{char}R \neq 2$ olduğundan $xd(x) = d(x)x$ elde edilir. Sonuç olarak $\text{char}R \neq 2$ olduğunda da her $x\in R$ için $xd(x) = d(x)x$ bulunur ve Lemma 3.1.4 kullanılarak ispat tamamlanır.

Şimdi de $\text{char}R = 2$ olsun. (3.31) eşitliğinden her $x\in R$ için $xd(x) = d(x)x$ veya $x^2\in Z(R)$ dir. Eğer $x\in R$ için, $xd(x) \neq d(x)x$ ise $x^2\in Z(R)$ veya $x^2 \neq 0$ dır. Eğer $x^2 = 0$ ise $0 = d(x^2) = d(xx) = d(x)x + xd(x)$ bu ise $xd(x) \neq d(x)x$ olması çelişir. Kabul edelim ki $a\in R$ olsun. $xd(x)$ nın a^2 ile komütatif olduğunu gösterelim. $x^2\in Z(R)$ olduğundan (3.21) den $(xax)^2\in Z(R)$ veya $(xax)d(xax) = d(xax)xax$ dır. Eğer $(xax)^2\in Z(R)$ ise $(xax)(xax) = xax^2ax = x^2(xa^2x) \in Z(R)$ ve buradan $xa^2x\in Z(R)$ dir. $x^2 \neq 0$ ise $x^2xa^2x = x^2a^2x^2\in Z(R)$ olur. Eğer $a^2\notin Z(R)$ ise $ad(a) = d(a)a$ ve $(xax)d(xax) = d(xax)(xax)$ dır. Buna göre $(xax)d(xax) = (xax)(d(x)ax + xd(ax)) =$

$(xax)(d(x)ax + xd(a)x + xad(x))$ olur. O halde $(xax)(d(x)ax + xd(a)x + xad(x)) = (d(x)ax + xd(a)x + xad(x))xax$ ve buradan $xaxd(x)ax + xax^2d(a)x + xax^2ad(x) = d(x)ax^2ax + xd(a)x^2ax + xad(x)xax$ bulunur. $x^2 \in Z(R)$, $ad(a) + d(a)a = 0$ ve $xd(x) + d(x)x \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa $0 = xa(xd(x) + d(x)x)ax + (x(ad(a) + d(a)a)x + xa^2d(x) + d(x)a^2x)x^2 = (xd(x) + d(x)x)xa^2x + (xa^2d(x) + d(x)a^2x)x^2$ olur. Eğer x sağ sıfır bölen değil ise $xd(x) + d(x)x \in Z(R)$ olduğu kullanılarak $0 = ((xd(x) + d(x)x)xa^2 + (xa^2d(x) + d(x)a^2x)x)x = xa^2(xd(x) + d(x)x) + (xa^2d(x) + d(x)a^2x)x = xa^2xd(x) + xa^2d(x)x + xa^2d(x)x + d(x)a^2x^2 = xa^2xd(x) + d(x)a^2x^2 + 2xa^2d(x)x$ elde edilir. $charR = 2$ olduğu kullanılırsa $xa^2xd(x) + d(x)a^2x^2 = 0$ olur. $x^2 \in Z(R)$ ve x, sol sıfır bölen değil ise $0 = xa^2xd(x) + d(x)a^2x^2 = xa^2xd(x) + x^2d(x)a^2 = x(a^2xd(x) + xd(x)a^2)$ ve buradan $a \in R$ için $a^2xd(x) + xd(x)a^2 = 0$ bulunur. Böylece her $x \in R$ için $xd(x) = d(x)x$ olur. Lemma 3.1.4 kullanılarak $x^3 \in Z(R)$ ve $xd(x) \in Z(R)$ veya $xd(x) = d(x)x$ bulunur. x, sıfır bölen olmadığından her $x \in R$ için Lemma 3.1.4 kullanılarak R halkası değişmeli olur.

Bu çalışmada (Herstein I.N 1978) R bir asal halka, $0 \neq d$ türev ve $charR \neq 2$ olsun. Her x, $y \in R$ için, $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ olması durumunda R halkasının değişmeli olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.1.7. R bir halka, $d^3 \neq 0$ olacak şekilde d, R halkasının bir türevi olsun. Bu durumda A, her $r \in R$ için, $d(r)$ tarafından üretilen R halkasının althalkası, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat. $d(R) = \{d(r) \mid r \in R\}$ dir. $d^3 \neq 0$ ve $d(R) \subset A$ olduğundan $d^2(A) \neq 0$ dır. Çünkü her $a \in R$ için, $d^2(a) = 0$ alınırsa $d^3(a) = d(d^2(a)) = d(0) = 0$ olur. Bu durum $d^3 \neq 0$ olmasıyla çelişir.

Kabul edelim ki $y \in A$ için, $d^2(y) \neq 0$ olsun. $d(xy) \in A$ ise $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ve y, $d(x) \in A$ oldukları kullanılırsa, A alt halka olduğundan her $x \in R$ için, $xd(y) \in A$ olur. Yani $Rd(y) \subset A$ bulunur. Benzer şekilde $d(yx) \in A$ olduğundan her $x \in R$ için $d(y)x \in A$ dır. Yani $d(y)R \subset A$ elde edilir. $r,s \in R$ için $d(rd(y)s) \in A$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} d(rd(y)s) &= d(r)d(y)s + rd(d(y)s) \\ &= d(r)d()s + r(d(d(y))s + d(y)d(s)) \\ &= d(r)d(y)s + rd^2(y)s + rd(y)d(s) \end{aligned}$$

eşitliğinde $rd(y)$, $d(y)s \in A$ olduğu kullanılırsa her $r,s \in R$ için $rd^2(y)s \in A$ elde edilir. Yani $Rd^2(y)R \subset A$ bulunur. $r \in R$ için, $rd(y) \in R$ olduğuna göre $d(rd(y)) \in A$ olur.

$d(rd(y)) = d(r)d(y) + rd^2(y)$ ve buradan $d(r)d(y) \in A$ ve A bir althalka olduğundan her $r \in R$ için $rd^2(y) \in A$ bulunur. Yani $Rd^2(y) \subset A$ elde edilir. Benzer şekilde $d^2(y)R \subset A$ olur.

$Rd^2(y)R \subset A$, $d^2(y)R \subset A$ ve $Rd^2(y) \subset A$ olduğundan R halkasının ideali A da $d^2(y)$ tarafından üretilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.8. R bir asal halka, $0 \neq d$ türev ve $charR \neq 2$ olsun. Her $m,n \in R$ için, $[d(m),d(n)]$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. A kümesi her $m \in R$ için $d(m)$ ile üretilen R halkasının bir althalkası olsun. Her $m,n \in R$ için $[d(m),d(n)]$ olduğundan A halkası komütatiftir. $a \in A$ ve $m \in R$ için, $am \in R$ olduğundan $d(am) \in A$ dır. Dolayısıyla $d(am) = d(a)m + ad(m)$ olduğundan $d(a)m + ad(m) \in A$ bulunur. $b \in A$ için, $0 = bd(am) - d(am)b = d(a)(bm - mb) = d(a)[b,m]$ olur. Eğer $A \not\subset Z(R)$ ise $d(A) = (0)$ ve her $m \in R$ için, $d(m) \in A$ ise $d(R) \subset A$ bulunur. O halde $d^2(R) \subset d(A) = (0)$ olduğundan her $m \in R$ için $d^2(m) = 0$ elde edilir. Bu ifade de m yerine mn, $n \in R$ alınır ve her $m \in R$ için $d^2(m) = 0$ olduğu kullanılırsa $0 = d^2(mn) = d(d(mn)) = d(d(m)n + md(n)) = d(d(m)n) + d(md(n)) = d^2(m)n + 2d(m)d(n) + md^2(n) = 2d(m)d(n)$ bulunur. $charR \neq 2$ olduğundan her $m,n \in R$ için $d(m)d(n) = 0$ elde edilir. Her $m \in R$ için $d(m)d(R) = (0)$ olduğundan Lemma 3.1.1 den her $m \in R$ için $d(m) = 0$ veya $d = 0$ olur. Dolayısıyla $d = 0$ elde edilir. Fakat bu $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \subset Z(R)$ dir. $A \subset Z(R)$ ve $d(R) \subset A$ olduğundan $d(R) \subset Z(R)$ olur. Böylece R halkası değişmelidir.

Bu çalışmada (Herstein I.N. 1979) karakteristiği ikiden farklı asal halkada bir $a \in R$ için, $[d(R), a] = 0$ ise $a \in Z(R)$ olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.1.9. R bir asal halka ve $0 \neq d$, R halkasının türevi $a \in R$ ve her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olsun. Eğer $charR \neq 2$ ise $a \in Z(R)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $a \notin Z(R)$ olsun. O halde hipotezden her $x,y \in R$ için, $ad(xy) = d(xy)a$ olur. Buradan $ad(xy) - d(xy)a = 0$ yani her $x,y \in R$ için, $[a,d(xy)] = 0$ elde edilir. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ olduğu kullanılırsa $[a,d(xy)] = [a, d(x)y + xd(y)] = 0$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= a(d(x)y + xd(y)) - (d(x)y + xd(y))a \\ &= ad(x)y + axd(y) - d(x)ya - xd(y)a \\ &= d(x)ay - d(x)ya + axd(y) - xad(y) \\ &= d(x)(ay - ya) + (ax - xa)d(y) \end{aligned}$$

yani

$$d(x)[a,y] + [a,x]d(y) = 0, \quad \forall x,y \in R \tag{3.32}$$

elde edilir. $y \in R$ için, $ay = ya$ olsun. Buradan $ay - ya = 0$ yani $[a,y] = 0$ olur. $[a,y] = 0$ olduğundan (3.32) eşitliğinden her $x \in R$ için, $[a,x]d(y) = 0$ olur. Dolayısıyla $r \in R$ için

$[a,xr]d(y) = 0$ bulunur. Böylece

$$0 = [a,xr]d(y) = x[a,r]d(y) + [a,x]rd(y)$$

ve buradan $[a,r] = 0$ olduğundan her $x, r \in R$ için, $[a,x]rd(y) = 0$ yani her $x \in R$ için, $[a,x]Rd(y) = 0$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ için, $[a,x] = 0$ veya $y \in R$ için, $d(y) = 0$ ve buradan $a \in Z(R)$ veya $y \in R$ için $d(y) = 0$ elde edilir. $a \notin Z(R)$ olduğundan $d(y) = 0$ bulunur. Yani $y \in R$ için $ay = ya$ ise $d(y) = 0$ bulunur. $C_R(a) = \{y \in R \mid ya = ay\}$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olduğundan $d(x) \in C_R(a)$ dır. Buradan her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olduğundan $d(d(x)) = 0$ dır. Yani her $x \in R$ için $d^2(x) = 0$ ve buradan $d^2 = 0$ elde edilir. Teorem 3.1.3 kullanılarak $d = 0$ bulunur. Bu ise $d \neq 0$ olmasıyla çelişir. Buradan $a \in Z(R)$ elde edilir.

3.2 Yarıasal Halkalar Üzerinde Türevler

Bu çalışmada (Samman M.S. 2003) asal ve yarıasal halkalarda türevlerin bazı özellikleri araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlardan birisi ise şu şekildedir. R bir yarıasal halka, I onun sıfırdan farklı bir ideali ve f, g dönüşümleri R halkası üzerinde iki türev olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ için $f(x)y + yf(x) = 0$ koşulu sağlanıyorsa her $x, y, u \in I$ için $f(u)[x,y] = [x,y]g(u) = 0$ olduğu da gösterilmiştir.

Not-1. R bir yarıasal halka ve I onun ideali olsun. O zaman $Z(I) \subset Z(R)$ dır.

İspat. $a \in Z(I)$, $x \in R$ için $ax \in I$ olduğundan, $0 = [a, ax] = a[a, x]$ elde edilir. Bu eşitlikte x yerine xr, $r \in R$ alınırsa $a[a, xr] = ax[a, r] + a[a, x]$ bulunur. $[a, x] = 0$ olması kullanılarak eşitlik düzenlenirse her $x \in R$ için $a[a, xr] = ax[a, r]$ olur. Buradan

$$aR[a,r] = aR(ar - ra) = 0, \ \forall r \in R \tag{3.33}$$

bulunur. (3.33) eşitliği soldan r ile çarpılırsa

$$raR(ar - ra) = 0, \ \forall r \in R \tag{3.34}$$

elde edilir. Bu (3.34) eşitliğinde $a \in Z(R)$ olması kullanılarak eşitlik düzenlenir ve $a(rR)[a,r] \subset aR[a,r] = (0)$ olduğu da kullanılırsa

$$arR[a,r] = 0, \ \forall r \in R \tag{3.35}$$

bulunur. Şimdi (3.34) ve (3.35) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılırsa $[a,r]R[a,r]=0$ elde edilir. R yarıasal halka olduğundan her $r\in R\ için\ [a,r]=0$ olur. O halde $a\in Z(R)$ dir.

Lemma 3.2.1. R bir yarıasal halka, I onun sıfırdan farklı iki yanlı ideali ve $a\in I$ olsun. Bu durumda her $x\in I$ için $axa=0$ ise $a=0$ dır.

İspat. Hipotezde $v\in R$ olmak üzere x yerine $vx\in I$ alınırsa $avxa=0$ olur. Bu eşitlik soldan x çarpılırsa her $v\in R$ için $xavxa=0$ elde edilir. Yani $xaRxa=0$ olur. R yarıasal halka olduğundan her $x\in I$ için $xa=0$ elde edilir.

Öte yandan hipotezde $v\in R$ olmak üzere x yerine $xv\in I$ alınırsa $axva=0$ olur. Bu eşitlik sağdan x çarpılırsa her $v\in R$ için $axvax=0$ elde edilir. Yani $axRax=0$ olur. R yarıasal halka olduğundan her $x\in I$ için $ax=0$ elde edilir.

Buradan her $x\in I$ için $ax=xa$ bulunur. Bu da $ax-xa=0$ demektir. Yani $a\in Z(I)$ dır. Not-1 kullanılarak $a\in Z(I)\subset Z(R)$ elde edilir. O zaman $a\in Z(R)$ dir.

Hipotezde x yerine a alınırsa $a^3=0$ olur. Bir yarıasal halkanın merkezinde sıfırdan farklı nilpotent eleman bulunmadığından $a=0$ elde edilir.

Böylece Lemma 3.2.1 ile bir R halkasındaki yarıasallık özelliği halkanın idealline genelleştirilmiş olur.

Teorem 3.2.2. R bir yarıasal halka, $I\neq(0)$, R halkasının bir ideali, f ve g,

$$f(x)y+yg(x)=0,\forall x,y\in I \tag{3.36}$$

koşulunu sağlayan iki türev olsun. O zaman her $x,y,u\in I$ elemanları için $f(u)[x,y]=[x,y]g(u)=0$ ve $f(I)\subset Z(R)$, $g(I)\subset Z(R)$ dir.

İspat. Hipotezde verilen (3.36) eşitliğinde x yerine yx, $y\in I$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(yx)y+yg(yx) &= f(y)xy+yf(x)y+yg(y)x+y^2g(x) \\ &= f(y)xy+yg(y)x+y(f(x)y+yg(x)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$f(y)xy+yg(y)x=0,\ \forall x,y\in I \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.36) eşitliğinden $yg(y)=-f(y)y$ olur. Bu durumda (3.37) eşitliğinden $0=f(y)xy-f(y)yx=f(y)[x,y]=-f(y)[y,x]$ ve böylece

$$f(y)[y,x]=0,\ \forall x,y\in I \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) eşitliğinde x yerine wx, $w \in I$ yazalırsa $f(y)[y,wx] = f(y)w[y,x] + f(y)[y,w]x = 0$ bulunur. Burada (3.38) eşitliği kullanılarak bu eşitlik düzenlenirse

$$f(y)w[y,x], \ \forall x,y,w \in I \tag{3.39}$$

elde edilir. Şimdi (3.38) eşitliğinde y yerine $u+y$, $u \in I$ yazılırsa $0 = f(y+u)[y+u,x] = \big(f(y)+f(u)\big)([y,x]+[u,x]) = f(y)[y,x] + f(u)[y,x] + f(y)[u,x] + f(u)[u,x]$ elde edilir. (3.38) eşitliği kullanıldığında

$$f(u)[x,y] + \ f(y)[u,x] = 0, \forall u,y,x \in I \tag{3.40}$$

bulunur. (3.40) eşitliği soldan $f(u)[x,y]v$, $v \in I$ elemanı ile çarpılırsa

$$f(u)[x,y]vf(u)[x,y] + f(u)[x,y]vf(y)[u,x] = 0, \ \forall x,y,u,v \in I \tag{3.41}$$

olur. $w = [x,y]vf(y) \in I$ ile gösterilerek bu son eşitlik tekrar düzenlenir se her $\forall v \in R$ için $f(u)w[x,y] = \ f(u)[x,y]vf(u)[x,y] = 0$ bulunur. Yani $f(u)[x,y]Rf(u)[x,y] = 0$ olur. R bir yarıasal halka olduğundan

$$f(u)[x,y] = 0, \ \forall x,y,u \in I \tag{3.42}$$

elde edilir. Şimdi (3.42) eşitliğinde x yerine $xf(u)$ yazalırsa

$$0 = f(u)[xf(u),y] = f(u)x[f(u),y] + f(u)[x,y]f(u)$$

bulunur. Bu son eşitlik (3.42) eşitliğinden yararlanılarak tekrar düzenlenirse

$$f(u)x[f(u),y] = 0, \ \ \forall x,y,u, \in I \tag{3.43}$$

olur. (3.43) eşitliğinde x yerine yx yazılırsa

$$f\ (u)yx[f(u),y] = 0, \forall x,y,u, \in I \tag{3.44}$$

elde edilir. Şimdi (3.43) eşitliği soldan $-y$ çarpılarak

$$-yf\ (u)x[f(u),y]=0, \forall x,y,u, \in I \tag{3.45}$$

bulunur. (3.44) ve (3.45) eşitliklerini taraf tarafa toplanırsa

$$(f(u)y-yf(u)x[f(u),y]=[f(u),y]x[f(u),y]=0, \forall x,y,u, \in I \tag{3.46}$$

olur. Lemma 3.2.1 den her $y,u \in I$ elemanları için $[f(u),y]=0$ elde edilir. Böylece $f(u) \subset Z(I) \subset Z(R)$ bulunur.

Öte yandan $f(u) \in Z(R)$ olduğundan (3.42) eşitliğinden $0=f(u)[x,y]=[x,y]f(u)$ olur. Böylece (3.36) eşitliği de düşünülerek $0=[x,y]f(u)=xyf(u)-yxf(u)=xf(u)y-yf(u)x=-xyg(u)+yxg(u)=(yx-xy)g(u)=[y,x]g(u)$ elde edilir. Buradan

$$[x,y]g(u)=0,\ \forall x,y,u, \in I \tag{3.47}$$

bulunur. (3.47) eşitliğinde x yerine $xg(u)$ alınırsa $0=[xg(u),y]g(u)=x[g(u),y]g(u)+[x,y]g(u)g(u)$ olur. Burada (3.47) eşitliği kullanıldığında $x[g(u),y]g(u)=0$ bulunur. Elde edilen bu eşitlik soldan $[g(u),y]g(u)$ ile çarpılırsa

$$[g(u),y]g(u)x[g(u),y]g(u)=0,\ \forall x,y,u, \in I \tag{3.48}$$

olur. (3.48) eşitliğinde Lemma 3.2.1 uygulanırsa

$$[g(u),y]g(u)=0,\ \forall y,u \in I \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.49) eşitliğinde y yerine $yv,\ v \in I$ yazılırsa $0=[g(u),yv]g(u)=[g(u),y]vg(u)+y[g(u),v]g(u)$ olur. Burada (3.49) eşitliği kullanılırsa

$$[g(u),y]vg(u)=0,\ \forall y,u,v \in I \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) eşitliği sağdan $y \in I$ ile çarpılarak

$$[g(u),y]vg(u)y=0,, \forall y,u,v \in I \tag{3.51}$$

bulunur. (3.50) eşitliğinde v yerine vy alınırsa

$$[g(u), y]vyg(u) = 0, \ \forall y, u, v \in I \tag{3.52}$$

olur. (3.51) ve (3.52) eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$[g(u), y]v[g(u), y] = 0, \forall y, v, u \in I \tag{3.53}$$

elde edilir. Lemma 3.2.1 uygulanırsa her $y, u \in I$ için $[g(u), y] = 0$ elde edilir. Böylece $g(u) \subset Z(I)$ olur. Uyarı 2.48 ile $g(u) \subset Z(I) \subset Z(R)$ elde edilir. Bu ise ispatı bitirir.

Teorem 3.2.2 ile her $x \in I$ için $f(x), g(x) \in Z(R)$ dir. O halde f ve g türevleri I ideali üzerinde merkezleştiren oldukları açıktır ve böylece (Bell H. E. & Martindale W. S., 1987, Theorem 4) çalışmalarının sonucu olarak $f = g = 0$ olur. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.2.3. R değişmeli olmayan bir asal halka, $I \neq (0)$ ideali ve f, g dönüşümleri R üzerinde tanımlı ve

$$f(x)y + yg(x) = 0, \forall x, y \in I \tag{3.54}$$

koşulunu sağlayan iki türev olsun. O zaman $f = g = 0$ dır.

Uyarı 3.2.4. a) İleride kullanılacak olan iyi bilinen bazı sonuçlar şu şekildedir.

i. R bir asal halka ise, sıfırdan farklı I ideali de asal althalkadır.
   Çünkü, I ideal ise aynı zamanda althalkadır. $a, b \in$ I için $aRIb \subset aIb = (0)$ olur. R asal olduğundan $a = 0$ veya $Ib = 0$ bulunur. Buradan $a = 0$ veya $IRb = 0$ diyebiliriz. Böylece $a = 0$ veya $I = (0)$ veya $b = 0$ olur. $I \neq (0)$ olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ bulunur.

ii. Değişmeli olmayan bir R asal halkasının sıfırdan farklı değişmeli ideali yoktur. Çünkü sıfırdan farklı bir ideali değişmeli olursa halka asal olduğundan halka da değişmeli olur.

b) R değişmeli olmayan bir asal halka, $I \neq (0)$ ideali olsun. Eğer her $x \in I$ için $f(x)x = 0$ ise $f = 0$ dır.

Çünkü Sonuç 3.2.3 de (3.54) eşitliğinden $g = 0$ ve $y = x$ alınırsa her $x \in I$ için $f(x)x = 0$ ve böylece $f = 0$ bulunur.

Teorem 3.2.5. R değişmeli olmayan bir asal halka, I onun sıfırdan farklı bir ideali olsun. f ve g dönüşümleri R halkasında

$$f(x)xy + yg(x)x = 0, \ \forall x, y \in I \tag{3.55}$$

koşulunu sağlayan iki türev olsun. O zaman $f = g = 0$ dır.

İspat. (3.55) eşitliğinde $x, y \in I$ olmak üzere x yerine $x + y$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+y)(x+y)y + yg(x+y)(x+y) \\ &= \big(f(x)+f(y)\big)(x+y)y + y\big(g(x)+g(y)\big)(x+y) \\ &= \big(f(x)+f(y)\big)(xy+y^2) + \big(yg(x)+yg(y)\big)(x+y) \\ &= (f(x)xy + yg(x)x) + (f(y)y^2 + yg(y)y) + f(x)y^2 + f(y)xy \\ &\quad + yg(x)y + yg(y)x \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.55) eşitliği kullanılarak tekrar düzenlenirse

$$(f(x)y + f(y)x)y + y(g(x)y + g(y)x) = 0, \ \forall x, y \in I \tag{3.56}$$

bulunur. (3.56) eşitliğinde x yerine xy yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (f(xy)y + f(y)xy)y + y(g(xy)y + g(y)xy) \\ &= (f(x)y^2 + xf(y)y + f(y)xy)y + y(g(x)y^2 + xg(y)y + g(y)xy) \\ &= f(x)y^3 + xf(y)y^2 + f(y)xy^2 + yg(x)y^2 + yxg(y)y + yg(y)xy \\ &= (f(x)y^3 + f(y)xy^2 + yg(x)y^2 + yg(y)xy) + (xf(y)y^2 + yxg(y)y) \\ &= (f(x)y^2 + f(y)xy + yg(x)y + yg(y)x)y + (xf(y)y^2 + yxg(y)y \\ &= \big((f(x)y + f(y)x)y + y(g(x)y + g(y)x)\big)y + xf(y)y^2 + yxg(y)y \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$(f(x)y^3 + f(y)xy^2 + yg(x)y^2 + yg(y)xy) + (xf(y)y^2 + yxg(y)y) = 0 \tag{3.57}$$

bulunur. (3.56) ve (3.57) eşitlikleri tekrar düzenlenirse

$$xf(y)y^2 + yxg(y)y = 0, \forall x, y \in I \tag{3.58}$$

eşitliği elde edilir. (3.55) eşitliğinde de $x = y$ alınırsa

$$f(y)y^2 + yg(y)y = 0 \,, \forall y \in I \tag{3.59}$$

olur. (3.59) eşitliği soldan x ile çarpılarak

$$xf(y)y^2 + xyg(y)y = 0 \,, \forall x, y \in I \tag{3.60}$$

eşitliği bulunur. (3.58) ve (3.60) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp tekrar düzenlenirse $yxg(y)y - xyg(y)y = (yx - xy)g(y)y = [y, x]g(y)y = 0$ olur. Yani

$$[x, y]g(y)y = 0, \; \forall x, y \in I \tag{3.61}$$

elde edilir. (3.61) eşitliğinde x yerine $xv, v \in I$ alınır ve yine (3.61) eşitliğinden yararlanarak düzenlenirse $0 = [xv, y]g(y)y = x[v, y]g(y)y + [x, y]vg(y)y = [x, y]vg(y)y$ elde edilir. Buradan

$$[x, y]vg(y)y = 0, \; \forall x, y, v \in I \tag{3.62}$$

bulunur. Uyarı 3.2.4 (a) ile I ideali asal althalka olduğundan her $x, y \in I$, için $[x, y] = 0$ veya $g(y)y = 0$ olur. Yani her $y \in I$ elemanı için $y \in Z(I)$ veya $g(y)y = 0$ elde edilir. I ideali değişmeli olmadığından her $y \in I$ elemanı için $g(y)y = 0$ olur. Bu ise Uyarı 3.2.4 (b) den R halkası üzerinde $g = 0$ olduğunu görülür.

Şimdi de $f = 0$ olduğunu gösterelim. $g = 0$ olduğundan (3.55) numaralı eşitlikden her $x, y \in I$ için $f(x)xy = 0$ elde edilir. Burada y yerine vy, $v \in I$ yazılırsa her $v \in I$ elemanı için $f(x)xvy = 0$ bulunur. I sıfırdan farklı ideal ve R asal halka olduğundan her $x \in I$ için $f(x)x = 0$ ve böylece R üzerinde $f = 0$ elde edilir.

Şimdi aşağıdaki uyarıyı vererek makaleyi sonlandıralım.

Uyarı 3.2.6. Sonuç 3.2.3 de sırasıyla $y = x, g = f$ ve $y = x, g = -f$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

a. R değişmeli olmayan bir asal halka,$(0) \neq I$ bir ideali ve f dönüşümü de I üzerinde skew-commuting türev ise o zaman R halkası üzerinde $f = 0$ olur.
b. R değişmeli olmayan bir asal halka,$(0) \neq I$ ideali f, R de semi-commuting türev ise

$f = 0$ dır.

c. Burada (a) ve (b) den (Posner E. C., 1957 Lemma 3) sırasıyla skew-commuting ve semi-commuting için gösterilmiş olur.

BÖLÜM 4
HALKALARDA TERS TÜREVLER

4.1 Asal Halkalarda Ters Türevler

Tezin bu bölümünde Herstein tarafından (Herstein I.N. 1957) bir asal halkada ters türev bulunamayacağı gösterilmiştir.

Lemma 4.1.1. A bir halka olmak üzere $a \in A$ için $T(a) = \{r \in A \mid r(ax - xa) = 0\ , \forall x \in A\}$ kümesi tanımlansın. O zaman $T(a)$, A halkasının iki yanlı idealidir.

İspat. A bir halka olduğundan $0_A \in A$ dır. Her $x \in A$ için $0_A(ax - xa) = 0_A ax - xa0_A = 0_A$ olur. Buradan $0_A \in T(a)$ olur. O halde $T(a) \neq \emptyset$ dır.

Şimdi $r, s \in T(a)$ ve her $x \in A$ için hipotezden $r(ax - xa) = r[a, x] = 0$ ve $s(ax - xa) = s[a, x] = 0$ dir. Bu durumda $(r + s)(ax - xa) = (r + s)[a, x] = r[a, x] + s[a, x] = 0$ olur. Yani $r + s \in T(a)$ olur. $r \in T(a)$ ve $u \in A$ için $ur[a, x] = u(r[a, x]) = 0$ dır. O halde $ur \in T(a)$ olur. Öte yandan $r \in T(a)$ ve $ux \in A$ için $0 = r[a, ux] = ru[a, x] + r[a, u]x$ dır. Hipotezden $r[a, u]x = 0$ olduğu görülür. O halde her $x \in A$ için $ru[a, x] = 0$ dır. Buradan $ru \in T(a)$ olur. Yani $T(a)$ bir idealdir.

Lemma 4.1.2. A bir asal halka ve $a \in A - \mathrm{Z(A)}$ ise $T(a) = (0)$ dır.

İspat. Hipotezden $a \in A - \mathrm{Z(A)}$ olduğundan $ab - ba = [a, b] \neq 0$ olacak şekilde bir $b \in A$ vardır. Kabul edelim ki $T(a) \neq (0)$ olsun. $r \in T(a)$ alınırsa her $x \in A$ için $0 = r[a, x]$ dır. Her $r \in T(a)$ için yapılabileceğinden

$$T(a)[a, x] = (0), \forall x \in A \tag{4.1}$$

olur. (4.1) eşitliğinde x yerine xr, $r \in A$ alınır ve yine (4.1) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $(0) = T(a)[a, xr] = T(a)[a, x]r + T(a)x[a, r] = T(a)x[a, r]$ bulunur. Yani her $x, r \in A$ için $T(a)x[a, r] = (0)$ dır. A bir asal halka olduğundan $T(a) = (0)$ veya $[a, r] = 0$ olur. $T(a) \neq 0$ olduğundan $[a, r] = 0$ olur. Bu durumda $a \in \mathrm{Z(R)}$ olur ki bu da çelişkidir. O halde $T(a) = 0$ dır.

Çalışmanın bu kısmında aşağıdaki teorem ile bir asal halkada her ters türevin bir türev olduğu gösterilmektedir. Dolayısıyla bir asal halkada ters türev çalışmanın anlamlı olmadığı gösteriliyor.

Teorem 4.1.3. A bir asal halka ve $d \neq 0$ bir ters türev ise A halkası değişmeli ve d bir türevdir.

İspat. $a, b, c \in A$ olmak üzere

$$d\big(a(bc)\big) = d(bc)a + bcd(a) = d(c)ba + cd(b)a + bcd(a) \qquad (4.2)$$

olur. Öte yandan

$$d\big((ab)c\big) = d(c)ab + cd(ab) = d(c)ab + cd(b)a + cbd(a) \qquad (4.3)$$

bulunur. Bu durumda $a(bc) = (ab)c$ olması kullanılarak (4.2) ve (4.3) eşitliklerinden $d(c)ba + bcd(a) = d(c)ab + cbd(a)$ bulunur. O halde

$$[b,c]d(a) = d(c)[a,b], \forall a,b,c \in A \qquad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) eşitliğinde $c = b$ seçilirse

$$d(b)[a,b] = 0, \forall a,b \in A \qquad (4.5)$$

bulunur. Bu durumda

$$T(a) = \{r \in A \mid r(ax - xa) = 0 \,, \forall x \in A\}$$

kümesi düşünülürse d(b) $\in T(b)$ olduğu görülür. Hipotezden $0 \neq d(b) \ \in T(b)$ dır. $T(b) \neq 0$ olduğundan Lemma 4.1.2 den $b \in Z$ olur. Yani $d(b) \neq 0$ ise $b \in$ Z(A) dır.

Şimdi kabul edelim ki $b \in A$ için $d(b) = 0$ olsun. d sıfırdan farlı bir türev olduğundan en az bir $a \in A$ için $d(a) \neq 0$ dır. O halde önceki paragraftan $a \in$ Z(A) dır. Aynı zamanda

$$d(a+b) = d(a) + d(b) = d(a) \neq 0$$

olur. O zaman $a + b \in$ Z(A) dir. Z(A) toplamaya kapalı olduğundan $a \in$ Z(A) ve $b \in$ Z(A) olur. O halde halka değişmelidir. Bu durumda

$$d(ab) = d(b)a + bd(a) = d(a)b + ad(b)$$

olur. Yani d bir türevdir.

Bu çalışmada (Ibraheem A.M., 2016) F, R halkası üzerinde bir genelleştirilmiş ters türev olmak üzere F ters türevi R halkasının bir sağ idealini merkezliyor ise halkanın değişmeli olduğu gösterilmiştir.

Lemma 4.1.4. R bir asal halka, d dönüşümü R üzerinde bir ters türev olsun. Her $r \in R$ ve $a \in R$ için $ad(r) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat. $a \in R$ olsun. Hipotezden

$$ad(r) = 0, \forall r \in R \tag{4.6}$$

olur. (4.6) eşitliğinde r yerine sr $s \in R$ alarak elde edilen eşitlik ters türev özellikleri ve hipotez uygulanarak düzenlenirse $0 = ad(sr) = ad(r)s + ard(s) = ard(s)$ ve böylece

$$ard(s) = 0, \forall r, s \in R \tag{4.7}$$

elde edilir. R asal halka olduğundan $a = 0$ veya her $s \in R$ için $d(s) = 0$ bulunur. Böylece istenen gösterilmiş olur.

Lemma 4.1.5. I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer d, I üzerinde bir sıfır ters türevi ise R halkası üzerinde de bir sıfır ters türevidir.

İspat. $I \neq (0)$, R halkasının bir sağ ideali olsun. Kabul edelim ki

$$d(I) = (0) \tag{4.8}$$

olsun. I bir sağ ideal olduğundan $IR \subseteq I$ dır. O halde bu kapsama bağıntısı (4.8) eşitliğinde uygulanırsa $0 = d(IR) = d(R)I + Rd(I)$ bulunur. Bu son eşitlik (4.8) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$d(R)I = (0) \tag{4.9}$$

elde edilir. $I \neq (0)$ bir sağ ideal olduğundan Lemma 4.1.5 den $d(R) = (0)$ bulunur.

Lemma 4.1.6. I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer I değişmeli ise R halkası da değişmelidir.

İspat. Hipotezden $x, y \in I$ ve $r \in R$ için $0 = [x, yr] = y[x, r]$ bulunur. Böylece her $x \in I$ ve $r \in R$ için $I[x, r] = (0)$ olur. Asal halkada sıfırdan farklı bir idealin sağ (sol) sıfırlayanı sıfır olduğundan her $x \in I$ ve $r \in R$ için $[x, r] = 0$ elde edilir. Burada $x \in I$ yerine $s \in R$ olmak üzere xs yazılır ve bu eşitlik kullanılırsa her $r, s \in R$ için $I[s, r] = (0)$ bulunur. Halka asal olduğundan her $r, s \in R$ için $[s, r] = 0$ elde edilir. Böylece R halkası değişmelidir.

Teorem 4.1.7. R bir asal halka, $I \neq (0)$ bir sağ ideali ve $d \neq 0$, R halkası üzerinde bir ters türev olsun. Her $a \in I$ için $[a, d(a)] \in Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. Hipotezden

$$[a, d(a)] \in Z(R),\ \forall a \in I \tag{4.10}$$

dır. (4.10) eşitliğinde a yerine a^2 yazılırsa ve (4.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $Z(R) \ni [a^2, d(a^2)] = [a^2, d(a)a + ad(a)] = [a^2, d(a)a] + [a^2, ad(a)] =$
$a[a, d(a)]a + [a, d(a)]a^2 + a^2[a, d(a)] + a[a, d(a)]a = 4a^2[a, d(a)]$ olur. Bu durumda

$$4a^2[a, d(a)] \in Z(R) \tag{4.11}$$

bulunur. O halde $[4a^2[a, d(a)], d(a)] = 0$ dır. (4.10) ve (4.11) eşitlikleri kullanılarak son eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [4a^2[a, d(a)], d(a)] = 4[a^2, d(a)][a, d(a)] = [a^2, d(a)]4[a, d(a)] \\ &= (a[a, d(a)] + [a, d(a)]a)2(2[a, d(a)]) = 2a[a, d(a)]2(2[a, d(a)]) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$[a^2, d(a)] = 0, \forall a \in I \tag{4.12}$$

$$2[a, d(a)] = 0, \forall a \in I \tag{4.13}$$

bulunur. (4.10) ve (4.13) eşitliklerinde her $a, b \in I$ için a yerine $a + b$ yazılırsa $[a + b, d(a + b)] = [a, d(a)] + [a, d(b)] + [b, d(a)] + [b, d(b)]$ olur. Bu son eşitlik (4.10) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $[a, d(b)] + [b, d(a)] \in$ Z(R) bulunur. Benzer şekilde $2[a + b, d(a + b)] = 2[a, d(b)] + [b, d(a)] \in$ Z(R) bulunur. Buradan (4.12) eşitliği ile elde edilen bu sonuçlar birlikte ele alınarak

$$[ab + ba, d(a)] + [a^2, d(b)] = 0\ , \forall a, b \in I \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) eşitliğinde b yerine ba yazılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= [aba + ba^2, d(a)] + [a^2, d(ba)] \\
&= [aba, d(a)] + [ba^2, d(a)] + [a^2, d(a)b + ad(b)] \\
&= a[ba, d(a)] + [ab, d(a)]a + b[a^2, d(a)] + [b, d(a)]a^2 + [a^2, d(a)b] \\
&+ [a^2, ad(b)] \\
&= ab[a, d(a)] + a[b, d(a)]a + a[b, d(a)]a + [a, d(a)]ba + b[a^2, d(a)] \\
&+ [b, d(a)]a^2 + [a^2, d(a)]b + d(a)[a^2, b] + a[a^2, d(b)]
\end{aligned}
$$

olur. Bu son eşitlik (4.13) ve (4.14) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse her $a, b \in I$ için $[ab + ba, d(a)]a - a[ab + ba, d(a)] + d(a)[\, a^2, b] = 0$ bulunur. Buradan

$$
[[b, d(a)], a^2] + \ d(a)[\, a^2, b] = 0, \forall a, b \in I \tag{4.15}
$$

elde edilir. Şimdi (4.15) eşitliğinde $[b, d(a)]$ yerine a^2 yazılırsa

$$
d(a)[\, a^2, b] = 0, \forall a, b \in I \tag{4.16}
$$

elde edilir. (4.16) eşitliğinde $d(a)$ yerine $d(a)r\ r \in R$ yazılırsa her $a, b \in I$ ve $r \in R$ için $d(a)r[\, a^2, b] = 0$ olur. R asal halka olduğundan $d(a) = 0$ veya $[\, a^2, b] = 0$ bulunur. Eğer her $a \in I$ için $d(a) = 0$ seçilirse Lemma 4.1.5 den $d(R) = 0$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Buradan her $a, b \in I$ için $[\, a^2, b] = 0$ olur. O halde I ideali değişmelidir. Burada Lemma 4.1.7 kullanılarak R halkasının değişmeli olduğu bulunur.

Teorem 4.1.8. R bir asal halka ve I, R halkasının bir sağ ideali olsun. d dönüşümü R halkası üzerinde bir ters türev ve $f,\ d$ ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş ters türev olmak üzere; eğer $f,\ I$ üzerinde merkezleyici ise her $a \in I \cup Z(R)$ için $f(a) \in$ Z(R) olur.

İspat. Hipotezden $f,\ I$ üzerinde merkezleyici olduğundan

$$
[a, f(a)] \in Z,, \forall a \in I \tag{4.17}
$$

olur. Her $a, b \in I$ için (4.17) eşitliğinde a yerine $a + b$ yazılır ve eşitlik düzenlenirse

$$
[a, f(b)] + [b, f(a)] \in \mathrm{Z(R)}\ , \forall a, b \in I \tag{4.18}
$$

elde edilir. Buradan $a \in Z(R)$ için (4.18) eşitliği düzenlenirse

$$[b, f(a)] \in \mathrm{Z(R)}, \forall a, b \in I \tag{4.19}$$

bulunur. Şimdi (4.19) eşitliğinde her $a, b \in I$ için b yerine $bf(a)$ yazılırsa $[b, f(a)]f(a) \in$ Z(R) elde edilir. Buradan $[b, f(a)] = 0$ veya $f(a) \in$ Z(R) elde edilir.

Kabul edelim ki $[b, f(a)] = 0$ olsun. O halde $f(a) \in C_R(I)$ olur. Böylece $f(a) \in$ Z(R) elde edilir. Öte yandan$[b, f(a)] \neq 0$ olsun. Buradan $[b, f(a)]f(a) \in$ Z(R) dir. Uyarı 2.23 kullanılırsa $f(a) \in$ Z(R) olur. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 4.1.9. R bir asal halka, I sıfırdan farklı bir sağ ideal ve F, sıfırdan farklı bir d ters türevi ile belirlenmiş genelleştirilmiş ters türev olsun. Eğer her $a \in I$ için $[a, f(a)] = 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. Hipotezden

$$[a, f(a)] = 0, \forall a \in I \tag{4.20}$$

olur. Şimdi (4.20) eşitliğinde a yerine $a + b$ yazılırsa ve (4.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $0 = [a + b, f(a + b)] = [a, f(a)] + [a, f(b)] + [b, f(a)] + [b, f(b)] = [a, f(b)] + [b, f(a)]$ olur ve buradan

$$[a, f(b)] + [b, f(a)] = 0, \forall a, b \in I \tag{4.21}$$

elde edilir. Şimdi (4.21) eşitliğinde b yerine ba alınır ve (4.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $0 = [a, f(ba)] + [ba, f(a)] = [a, f(a)b + ad(b)] + b[a, f(a)] + [b, f(a)]a = [a, f(a)]b + f(a)[a, b] + a[a, d(b)] + b[a, f(a)] + [b, f(a)]a$ bulunur. Burada son eşitlik tekrar (4.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$f(a)[a, b] + a[a, d(b)] + [b, f(a)]a = 0, \forall a, b \in I \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) eşitliğinde a yerine b alınır ve (4.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $f(b)[b, b] + b[b, d(b)] + [b, f(b)]b = 0$ bulunur. Yani,

$$b[b, d(b)] = 0, \forall b \in I \tag{4.23}$$

olur. Şimdi (4.22) eşitliğinde $d(b)$ yerine her $r \in R$ için $d(b)r$ alınırsa $0 = f(a)[a, b] +$

$a[a,d(b)r]+[b,f(a)]a=f(a)[a,b]+a[a,d(b)]r+ad(b)[a,r]+[b,f(a)]a$ bulunur. Bu son eşitlikte a yerine b alınır ve (4.23) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$bd(b)[b,r]=0, \forall b \in I, \forall r \in R \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir . (4.24) eşitliğinde r yerine $s \in R$ olmak üzere $rs \in R$ alınır ve eşitlik düzenlenirse $0=bd(b)[b,rs]=bd(b)[b,r]s+bd(b)r[b,s]$ bulunur. Burada tekrar (4.24) eşiliği kullanılarak düzenlenirse her $r,s \in R$ ve her $b \in I$ için $bd(b)r[b,s]=0$ bulunur. R asal halka olduğundan her $s \in R$ ve her $b \in I$ için $bd(b)=0$ veya $[b,s]=0$ olur. Böylece R bir asal halka ve $bd(b) \neq 0$ olacağından $[b,s]=0$ olur. O halde $b \in Z(R)$ dir. Bu da $I \subseteq Z(R)$ demektir. Buradan lemma 4.1.4 kullanıldığında R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Teorem 4.1.10. R bir asal halka ve I, R halkasının $I \cap Z(R) \neq (0)$ koşulunu sağlayan bir sağ ideali olsun. f dönüşümü R üzerinde sıfırdan farklı bir d ters türevi ile belirlenmiş genelleştirilmiş ters türev olsun. Eğer her $a \in I$ için $[a,f(a)]=0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat. $Z(R) \neq 0$ olarak alalım. f, I ideali üzerinde merkezleyen olduğunda, R halkasının değişmeli olduğu Teorem 4.1.9 de gösterildi. f, I ideali üzerinde merkezleyen dönüşüm olduğundan $[a,f(a)] \in$ Z(R) dir. O halde (4.18) eşitliğinden her $a,b \in I$ için $[a,f(b)]+[b,f(a)] \in Z$ olur. Buradan $0 \neq r \in Z(R)$ olmak üzere (4.18) eşitliğinde b yerine ar alınır ve $[a,f(a)] \in Z$ olması kullanılarak düzenlenirse $[a,f(ar)]+[ar,f(a)]=$ $[a,f(r)a+rd(a)]+[a,f(a)]r+a[r,f(a)]=[a,f(r)a]+[a,rd(a)]+[a,f(a)]r=$ $[a,f(r)]a+r[a,d(a)]+[a,r]d(a)+[a,f(a)]r$ olur. Yani

$$[a,f(r)]a+r[a,d(a)]+[a,f(a)]r \in Z,\ \forall a \in I, r \in R \tag{4.25}$$

bulunur. (4.25) eşitliğinde Lemma 4.1.4 kullanılırsa $f(r) \in$ Z(R) bulunur ve f dönüşümünün I ideali üzerinde merkezleyen dönüşüm olduğundan

$$r[a,d(a)] \in \mathrm{Z(R)},\ \forall a \in I, r \in R \tag{4.26}$$

elde edilir. Buradan Uyarı 2.23 den yararlanarak ve $0 \neq r \in$ Z(R), $r[a,d(a)] \in$ Z(R) olması kullanılarak her $a \in I$ için $[a,d(a)] \in$ Z(R) elde edilir. O halde d sıfırdan farklı bir ters türev ve I idealini merkezleyen olduğundan Teorem 4.1.7 kullanılarak R halkasının değişmeli olduğu elde edilir.

4.2 Yarıasal Halkalar Üzerinde Ters Türevler

Aşağıdaki örneklerde ters türevler ve türevler arasındaki mümkün olan bütün ilişkileri araştıran (Samman M.S., ve Alyamani N. 2007) makalesi incelenmiştir.

Örnek 4.2.1 S değişmeli bir halka ve $S^2 \neq 0$ olsun. $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in S \right\}$ halkası üzerinde d: $R \to R$, $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan dönüşüm hem türev hem de ters türevdir.

Çözüm. a, b, c, d ∈ S olmak üzere $x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ elemanlarını alalım. S halka olduğundan $a + c,\ b + d \in S$ dir. Buradan

$$x + y = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$$

bulunur.

$$x.y = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$$

elde edilir. O halde R bir halkadır.

Şimdi $x = y$ alırsak, yani ; $x = y = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$d(xy) = d\left(\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde $\forall a \in R$ için $S^2 \neq 0$ seçilmelidir. $x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ olmak üzere $d(x) = d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d(y) = d\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olması kullanılarak

$$d(x)y + xd(y) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$d(xy) = d\left(\begin{bmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ elde edilir. Böylece $d,\ R$ de bir türevdir.

Diğer taraftan

$$d(y)x + yd(x) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ca \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ca \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. S halkasının değişmeli olduğu kullanılarak

$$d(xy) = d(y)x + yd(x)$$

olduğu görülür. Buradan d, R de ters türevdir.

Örnek 4.2.2 Örnek 4.2.1 deki R matrisler halkasını ele alalım. R üzerinde

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dönüşümü bir türevdir ancak ters türev değildir.

İspat. $x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $x.y = \begin{bmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. dönüşümünün tanımından $d(xy) = \begin{bmatrix} 0 & ad \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Ayrıca $d(x) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d(y) = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğu kullanılarak

$$d(x)y + xd(y) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ad \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ad \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ olur. O halde d bir türevdir. Benzer biçimde

$$d(y)x + yd(x) = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & cd \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cd \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Burada $d(xy) \neq d(y)x + yd(x)$ olduğundan ters türev değildir. Böylece bu şekide tanımlanan dönüşüm bir türev olmasına rağmen ters türev değildir.

Örnek 4.2.3. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi olmak üzere,

$$R = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$ halkası üzerinde ve $d: R \to R$

$$d\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. d dönüşüm bir türev değil fakat bir ters türevdir.

Çözüm: $x = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ olmak üzere

$$d(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ olur. Böylece

$$d(y)x + yd(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & be - af \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Ayrıca $x.y = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & af-be \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

olduğundan

$$d(xy) = d\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & af-be \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & be-af \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $d(xy) = d(y)x + xd(y)$ eşitliği sağlandığından d bir ters türevdir. Diğer taraftan

$$d(x)y + xd(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & af-be \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda $d(x).y + xd(y) \neq d(xy)$ olduğundan d bir türev değildir.

O halde yukarıda tanımlanan d dönüşümü bir ters türev fakat türev değildir.

Önerme 4.2.4. R bir halka ve d dönüşümü R halkası üzerinde tanımlı bir ters türev olsun. Bu durumda

i- char$R = 2$ ise d^2 bir türevdir.

ii- e bir idempotent eleman ise $ed(e)e = 0$ dır.

iii- e bir idempotent eleman ve $[e, d(e)] = 0$ ise $d(e) = 0$ dır . Öte yandan, R bir yarıasal halka olmak üzere eğer $0 \neq d$ ise e, R halkasının birim elemanıdır.

iv- $1_R \in R$ ise $d(1_R) = 0$ dır.

v- R değişmeli olmayan bir halka ise ;

$$d(xy^n) = \begin{cases} y^n d(x) & n\, çift \\ y^{n-1} d(yx) & n\, tek \end{cases} \text{ dır.}$$

Özel olarak;

$$d(x^n) = \begin{cases} x^{n-1} d(x) & n\ tek \\ 0 & n\ çift \end{cases}$$

olur.

İspat: (i) Ters türev tanımı uygulanarak

$$d^2(xy) = d\big(d(xy)\big) = d\big(d(y)x + yd(x)\big) = d(d(y)x) + d\big(yd(x)\big)$$
$$= d(x)d(y) + xd^2(y) + d^2(x)y + d(x)d(y)$$

$$= d^2(x)y + xd^2(y) + 2d(x)d(y) = d^2(x)y + xd^2(y)$$

elde edilir. Böylece d^2 bir türev olur.

(ii) e elemanının idempotent eleman olduğu kullanılarak $d(e) = d(e^2) = d(e)e + ed(e)$ bulunur. Böylece $d(e) = d(e)e + ed(e)$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliği sağdan ve soldan e ile çarpalım.

$$ed(e)e = e\big(d(e)e + ed(e)\big)e = ed(e)e^2 + e^2d(e)e$$

Bulunur. Burada $e^2 = e$ olması kullanılarak;

$$ed(e)e = ed(e)e + ed(e)e = 2ed(e)e = 0$$

elde edilir.

(iii) Hipotezden $ed(e) = d(e)e$ dır. Buradan e elemanının idempotent olması da kullanılarak

$$d(e) = d(e^2) = d(e)e + ed(e) = 2ed(e)$$

bulunur. Yani $d(e) = 2ed(e)$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan e ile çarpılır ve $e^2 = e$ olması kullanılırsa;

$$ed(e) = 2e^2d(e) = 2ed(e)$$

elde edilir. O halde $d(e)e = ed(e) = 0$ bulunur. Bunun yardımıyla

$$d(e) = d(e^2) = d(e)e + ed(e) = 0 + 0 = 0$$

olduğu görülür.

(iv) Her $x \in R$ için $d(x) = d(x.1_R) = d(1_R).x + 1_Rd(x) = d(1_R)x + d(x)$ olur. Buradan her $x \in R$ için $d(1_R)x = 0$ bulunur. Özel olarak $x = 1_R$ alınırsa,

$$0 = d(1_R).1_R = d(1_R)$$

elde edilir.

(v) Her $x \in R$ için $d(x^2) = d(x.x) = d(x)x + xd(x) = 0$ olur. Eğer n bir çift tamsayı, yani bir $k \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $n = 2k$ ise

$$d(xy^n) = d(x(y^k)^2) = d((y^k)^2)x + (y^k)^2d(x)$$

olur. Hipotezden $d((y^k)^2) = 0$ olması kullanılarak yukarıdaki eşitlik tekrar düzenlenirse; $d(xy^n) = y^nd(x)$ elde edilir. Şimdi eğer n tek ise, yani bir $k \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $n = 2k + 1$ ise

$$d(xy^n) = d(xy.y^{2k}) = d((xy)(y^k)^2) = d((y^k)^2)xy + (y^k)^2d(xy)$$

bulunur. Hipotezden $d((y^k)^2) = 0$ olduğundan $d((y^k)^2)xy = 0$ olur. Böylece $d(xy^n) = y^{2k}d(xy) = y^{n-1}d(xy)$ elde edilir. Buradan $d(xy^n) = y^{n-1}d(xy)$ olduğu görülür.

Eğer n tek ise, yani bir $k \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $n = 2k + 1$ ise

$$d(x^n) = d(x(x)^{2k}) = d((x^k)^2)x + (x^k)^2d(x) = x^{2k}d(x) = x^{n-1}d(x)$$

olduğu görülür. Benzer biçimde eğer n bir çift tamsayı, yani bir $k \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $n = 2k$ ise

$$d(x^n) = d(x^k.x^k) = d(x^k).x^k + x^k.d(x^k) = 0$$

elde edilir.

Önerme 4.2.5. R bir yarıasal halka olsun ve $d: R \to R$ bir dönüşüm olsun.d dönüşümü R halkası üzerinde bir ters türevdir ancak ve ancak $d(R) \subset$ Z(R) olan bir türevdir.

İspat. d, R halkası üzerinde bir ters türev olsun. Bu durumda her $x, y \in R$ için ; $d(xy^2) = d(y^2)x + y^2d(x) = (d(y)y + yd(y))x + y^2d(x) = d(y)yx + yd(y)x + y^2d(x)$ olmasından

$$d(xy^2) = d(y)yx + yd(y)x + y^2d(x), \forall x, y \in R \qquad (4.27)$$

bulunur. Benzer biçimde $xy2 = xy.y$ olması kullanılarak $d(xy.y) = d(y)xy + yd(xy) = d(y)xy + y\big(d(y)x + yd(x)\big) = d(y)xy + yd(y)x + y^2d(x)$ olur.Buradan

$$d(xy^2) = d(y)xy + yd(y)x + y^2d(x), \forall x, y \in R \qquad (4.28)$$

bulunur. (4.27) ve (4.28) eşitliklerinden yaralanarak

$$d(y)[y, x] = 0, \forall x, y \in R \qquad (4.29)$$

elde edilir. Şimdi (4.29) eşitliğinde x yerine zx, $z \in R$ alınırsa

$$d(y)[y, zx] = d(y)z[y, x] + d(y)[y, z]x$$

olur. (4.29) eşitliğinden

$$d(y)z[y, x] = 0, \forall x, y, z \in R \qquad (4.30)$$

bulunur. (4.29) eşitliğinde y yerine $u \in R$ olmak üzere $u + y$, $u \in R$ alınırsa

$$0 = d(u + y)[u + y, x] = \big(d(u) + d(y)\big)([u, x] + [y, x])$$
$$= d(u)[u, x] + d(u)[y, x] + d(y)[u, x] + d(y)[y, x]$$

elde edilir. Bu eşitlikte $d(u)[u, x] = 0$ ve $d(y)[y, x] = 0$ olması kullanılırsa $0 = d(u)[y, x] + d(y)[u, x]$ olur. Yani

$$d(y)[u,x] = -d(u)[y,x] = d(u)[x,y]\ , \forall x,y,u \in R \tag{4.31}$$

bulunur. (4.30) eşitliğinde z yerine $[u,x]zd(u)$ alınırsa

$$0 = d(y)[u,x]zd(y)[y,x] = dy)[u,x]z(-d(y)[u,x])$$

ve böylece

$$d(y)[u,x]zd(y)[u,x] = 0, \forall x,y,z,u \in R \tag{4.32}$$

elde edilir. R bir yarıasal halka olduğundan

$$d(y)[u,x] = 0,\ \forall x,y,u \in R \tag{4.33}$$

bulunur. Şimdi (4.33) eşitliğinde u yerine $ud(y)$, $d(y) \in R$ alınırsa

$$0 = d(y)[ud(y),x] = d(y)u[d(y),x] + d(y)[u,x]d(y)$$

elde edilir. (4.33) eşitliğinden

$$d(y)u[d(y),x] = 0,\ \forall\, u,x,y \in R \tag{4.34}$$

bulunur. (4.34) eşitliğinde u yerine $xu,\ \ x \in R$ alınırsa

$$d(y)xu[d(y),x] = 0,\ \forall x,y,u \in R \tag{4.35}$$

olur. (4.34) eşitliğini soldan $-x$ ile çaparsak

$$-xd(y)u[d(y),x] = 0,\ \forall x,y,u \in R \tag{4.36}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (4.35) ve (4.36) eşitliklerini taraf tarafa toplanırsa

$$0 = \big(d(y)x - xd(y)\big)u[d(y),x] = [d(y),x]u[d(y),x], \qquad \forall x,y,u \in R$$

eşitliği bulunur. R bir yarıasal halka olduğundan

$$[d(y),x] = 0,\ \forall x,y \in R$$

olur. Bu ise her $y \in R$ için $d(y) \in Z$ demektir. Buradan $d(R) \subset$ Z(R) elde edilir. O halde

$$d(xy) = d(y)x + yd(x) = xd(y) + d(x)y$$

olduğu görülür. Böylece d bir türevdir.

Sonuç 4.2.6. R bir asal halka olsun. R üzerinde sıfırdan farklı bir ters türev var ise R değişmelidir.

İspat. R bir asal halka olduğundan aynı zamanda bir yarıasal halkadır. Önerme 4.2.5 den d bir ters türev ise $d(R) \subset$ Z(R) ve d bir türevdir. Yani her $m \in R$ için, $d(m) \in$ Z(R) dir. Her $m, n, t \in R$ için $t[m, n] \in R$ dir. Buradan

$$d(t[m,n]) = d(t)[m,n] + td([m,n]) = dt[m,n] + t[d(m),n] + t[m,d(n)]$$

elde edilir.$d(m), d(n) \in$ Z(R) olduğu kullanıldığında $t[d(m), n] = t[m, d(n)] = 0$ olur. Böylece

$$d(t[m,n]) = d(t)[m,n] \in \mathrm{Z(R)}$$

bulunur. Burada Önerme 2.44 ile $[m, n] \in$ Z(R) veya her $t \in R$ için $d(t) = 0$ elde edilir. $d \neq 0$ olduğundan her $m, n \in$ Z(R) için $[m, n] \in$ Z(R) olur. n yerine $mn \in R$ alınırsa $[m, mn] = m[m, n] \in$ Z(R) bulunur. $[m, n] \in$ Z(R) olduğundan Önerme 2.44 ile $m \in$ Z(R) veya her $n \in R$ elemanı için $[m, n] = 0$, yani $m \in$ Z(R) elde edilir.

Önerme 4.2.7 : R bir yarıasal halka ve $a, b \in R$ olsun. $d: R \to R$ dönüşümü $d(x) = ax + xb$ dönüşümü bir ters türev ise $d = 0$ dır.

İspat. Tanımdan $x, y \in R$ için $d(x) = ax + xb,\ d(y) = ay + yb\ dir$. Buna göre

$$d(xy) = d(y)x + yd(x) = (ay + yb)x + y(ax + xb) \qquad (4.37)$$

$$d(xy) = axy + xyb \qquad (4.38)$$

olur. (4.37) ve (4.38) eşitliklerinden $ayx + ybx + yax + yxb = axy + xyb$ bulunur. O halde $ybx + yax = a(xy - yx) + (xy - yx)b$ elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$y(a + b)x = d([x, y]), \forall x, y \in R, \qquad (4.39)$$

bulunur. (4.39) eşitliğinde $x = y$ alınırsa

$$x(a + b)x = 0, \forall x \in R \qquad (4.40)$$

elde edilir. (4.40) eşitliğinde x yerine $x + y,\ y \in R$ yazılırsa $0 = (x + y)(a + b)(x + y) =$

$x(a+b)x + x(a+b)y + y(a+b)x + y(a+b)y$ bulunur. (4.40) eşitliğinden yararlanılarak eşitlik düzenlerse

$$0 = x(a+b)y + y(a+b)x, \ \forall x, y \ \in R$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte x yerine xy alınırsa

$$xy(a+b)y + y(a+b)xy = 0$$

olur. Burada (4.40) eşitliğinden $xy(a+b)y = 0$ olması kullanılırsa $y(a+b)xy = 0$ bulunur. Bu eşitlik sağdan $(a+b)$ ile çarpılırsa

$$y(a+b)xy(a+b) = 0, \qquad \forall\, x \in R$$

elde edilir. R bir yarıasal halka olduğundan her $y \in R$ için $y(a+b) = 0$ olur. Bu eşitlik soldan $(a+b)$ ile çarpılırsa her $y \in R$ için $(a+b)y(a+b) = 0$ ve burada R halkasının yarıasal olması kullanılarak $a + b = 0$ bulunur. Buna göre (4.39) eşitliğinden $d([x,y]) = 0,\ \forall x, y \in R$ olur. Bu durumda $0 = d([x,y]) = a[x,y] + [x,y]b$ ve $b = -a$ olması kullanılırsa $a[x,y] - [x,y]a = 0$ elde edilir. Buradan

$$\big[a, [x,y]\big] = 0, \forall x, y \in R$$

olduğu görülür. Önerme 2.44 den $a \in \mathrm{Z(R)}$ bulunur. Buradan $a = -b \in \mathrm{Z(R)}$ olması kullanılarak $d(x) = ax + xb = ax - xa = ax - ax = 0$ elde edilir. O halde $d = 0$ olur.

Lemma 4.2.7. R bir yarıasal halka, $a, b \in R$ ve her $x \in R$ için $ax + xb = 0$ olsun. Bu durumda $a, b \in \mathrm{Z(R)}$ ve $b = -a$ dır.

İspat. Hipotezden

$$ax + xb = 0, \forall x \in R \tag{4.41}$$

biliniyor. Yukarıdaki (4.41) eşitliğinde x yerine $xy,\ y \in R$ alınırsa

$$axy + xyb = 0, \forall\, x, y \in R \tag{4.42}$$

olur. (4.41) eşitliği sağdan y ile çarpılır ve (4.42) ile eşitlenirse

$$(ax + xb)y = axy + xby = axy + xyb$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse her $x, y \in R$ için $xby = xyb$ yani $x(by - yb) = 0$ olur. Buradan her $y \in R$ için $R(by - yb) = (0)$ elde edilir. R halkasının yarıasal olması kullanılırsa $\forall y \in R$ için $[b, y] = 0$ ve buradan $b \in Z$ elde edilir. Hipotezden her $x \in R$ için $0 = ax + xb = ax + bx = (a+b)x$ olur. Yine R halkasının yarıasal olması kullanılarak $a + b = 0$ ve böylece $a = -b$ elde edilir.

Sonuç 4.2.8. R bir yarıasal halka ve f, g R halkasının iki türevi olsun. Bu durumda her $\forall\, x, y \in R$ için $f(x)y + yg(x) = 0$ ise $f(R) \subset$ Z(R) ve $g(R) \subset$ Z(R) olur.

İspat. Kabul edelim ki $x \in R$ için $f(x) = a$ ve $g(x) = b$ olsun. O halde hipotezden her $y \in R$ için $ay + yb = 0$ olur. Lemma 4.2.7 den $a = -b \in$ Z(R) elde edilir. Buradan $f(x) = -g(x) \in$ Z(R) bulunur. Bunu her $x \in R$ için yapabileceğimizden $f(R) \subset$ Z(R) ve $g(R) \subset$ Z(R) elde edilir.

Sonuç 4.2.9. R değişmeli olmayan bir asal halka ve d, R üzerinde skew commuting olsun. O zaman $d = 0$ dır.

İspat. d dönüşümü R halkası üzerinde skew commuting olduğudan her $x \in R$ için, $d(x)x + xd(x) = 0$dır. Varsayalım ki ; $d(x) = a$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $ax + xa = 0$ olur. Lemma 4.2.7 den $d(R) \subset$ Z(R) elde edilir. Sonuç 4.2.6 dan R değişmeli veya $d = 0$ olur. R değişmeli olmadığından $d = 0$ bulunur.

Sonuç 4.2.10. R değişmeli olmayan bir yarıasal halka olsun. O zaman R karakteristiği iki olan değişmeli bir halkadır.

İspat. R değişmeli olmayan bir yarıasal halka olduğundan her $x, y \in R$ için $xy + yx = 0$ dır. Lemma 4.2.7 de $a = b = y$ alınırsa $y = -y \in$ Z(R) bulunur. O halde R değişmeli bir halkadır. Üstelik her $x \in R$ için $x = -x$ yani $2x = 0$ bulunur. O halde R değişmeli halkasının karakteristiği iki olur.

Bu çalışmada (Aboubakr A. Gonzalez S 2014) ters türev notasyonu genelleştirilerek, genelleştirilmiş ters türev tanımlanmıştır. Ayrıca yarıasal halkaların idealleri üzerinde genelleştirilmiş ters türevler ile genelleştirilmiş türevler arasındaki ilişki incelenmiştir.

Lemma 4.2.11. R bir yarıasal halka ve $I \neq 0$ bir sol ideal olsun. Eğer R halkasının I idealini merkezleyen sıfırdan farklı bir d türevi varsa o zaman R halkasının merkezi tarafından kapsanılan sıfırdan farklı bir ideali vardır.

Lemma 4.2.12. R bir $2-$burulmasız yarıasal halka olsun. O zaman R üzerindeki her bir genelleştirilmiş jordan türev bir (sol ve sağ) genelleştirilmiş türevdir.

Önerme 4.2.13. Bir R asal halkasının her sıfırdan farklı tek yanlı idealinin merkezleştiricisi halkanın merkezine eşittir. Özel olarak R halkasının sıfırdan farklı bir ideali merkez tarafından kapsanıyor ise R halkası değişmelidir.

Örnek 4.2.14. S bir halka olmak üzere $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in S \right\}$ kümesi matrislerdeki toplama ve çarpma işlemiyle bir halkadır. R halkası üzerinde aşağıdaki dönüşümleri tanımlayalım.

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, için $d(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ için $d(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e-g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. Ayrıca $XY = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ag \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bulunur.

Böylece $d(XY) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} d(X)Y + Xd(Y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & e-g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = d(XY) \end{aligned}$$

olduğundan d bir türevdir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d(Y)X + Yd(X) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e-g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = d(XY) \end{aligned}$$

olduğundan aynı zaman da d bir ters türevdir.

Yukarıdaki biçimde tanımlanan F dönüşümünü alalım. Tanımından

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(XY) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} F(Y)X + Yd(X) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F(XY) \end{aligned}$$

elde edlilir. Böylece F, d ile belirlenmiş bir sol genelleştirilmiş ters türevdir. Benzer biçimde

$$d(Y)X + YF(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e-g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F(XY)$$

olduğundan aynı zamanda F, d ile belirlenmiş bir sağ genelleştirilmiş ters türevdir. Üstelik benzer hesaplamalar ile F, dönüşümünün d ile belirlenmiş bir sol genelleştirilmiş türev ve sağ genelleştirilmiş türev olduğu da görülebilir.

Örnek 4.2.15. R halkası Örnek 4.2.14 de verilen halka olsun. Bu halka üzerinde

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ve \ d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a & c-a \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleri tanımlansın. Yukarıdaki örnekte yapılan işlemler ile d dönüşümünün bir türev, ters türev olduğunu ve F dönüşümünün d ile belirlenmiş sol genelleştirilmiş türev olduğunu görmek kolaydır. Fakat F, d ile belirlenmiş sağ genelleştirilmiş türev değildir. Üstelik F, d ile belirlenmiş ne sol genelleştirilmiş ters türev ne de sağ genelleştirilmiş ters türevdir.

Örnek 4.2.16. $\mathbb{R}$ bütün reel sayıları göstermek üzere matrisler

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

halkasını ele alalım. Bu halka üzerinde $F, d: R \to R$ dönüşümleri

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b+e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ve$$

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan d dönüşümünün hem ters türev hem de türev olduğu kolayca görülür. Ayrıca F, d ile belirlenmiş bir sol genelleştirilmiş ters türevdir. Fakat sağ genelleştirilmiş türev değildir.

Örnek 4.2.17. Örnek 4.2.15 de verilen R halkası ele alalım. R halkası üzerinde $F, d: R \to R$ dönüşümleri

$$F\left(\begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ ve d}\left(\begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & b-d\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. F, d ile belirlenmiş bir sağ genelleştirilmiş ters türevdir. Fakat bir sol genelleştirilmiş türev değildir.

Çalışmanın bu kesimde yarıasal halkaların idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevler incelenmiştir.

Teorem 4.2.18. R bir yarıasal halka ve $I \neq (0)$ bir ideal olsun. $F: I \to R,\ I$ üzerinde sıfırdan farklı d ters türevi ile belirlenmiş bir sol genelleştirilmiş ters türev vardır ancak ve ancak $d,\ I$ üzerinde $d(I) \subseteq C_R(I)$ koşulunu sağlayan bir türev ve $F,\ I$ üzerinde $F(I) \subseteq C_R(I)$ koşulunu sağlayan d ile belirlenmiş bir sağ türevdir.

Teorem 4.2.19. R bir yarıasal halka ve $I \neq (0)$ bir ideal olsun. $F: I \to R,\ I$ üzerinde sıfırdan farklı d ters türevi ile belirlenmiş bir sağ genelleştirilmiş ters türev vardır ancak ve ancak $d,\ I$ üzerinde $d(I) \subseteq C_R(I)$ koşulunu sağlayan bir türev ve $F,\ I$ üzerinde $F(I) \subseteq C_R(I)$ koşulunu sağlayan d ile belirlenmiş bir sağ türevdir.

Sonuç 4.2.20. R bir asal halka olsun. Eğer R üzerinde sıfırdan farklı d ters türevi ile belirlenmiş bir sol genelleştirilmiş (veya sağ genelleştirilmiş) ters türevi var ise o zaman R halkasının sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanan ideali vardır.

Sonuç 4.2.21. $R,\ 2-$burulmasız yarıasal halka olsun. Eğer R üzerinde sıfırdan farklı d ters türevi ile belirlenmiş bir sol F genelleştirilmiş (veya sağ genelleştirilmiş) ters türevi var ise F, d ile belirlenmiş bir sağ genelleştirilmiş (veya sol genelleştirilmiş) ters türevdir. Ayrıca d bir türev ve F bir d türevi ile belirlenmiş bir sol genelleştirilmiş (veya sağ genelleştirilmiş) türevdir.

Sonuç 4.2.22. $I,\ R$ yarıasal halkası üzerinde çift yanlı ideal olmak üzere, bir $d: I \to R$ dönüşümü ters türevdir ancak ve ancak d türevi I üzerinde merkezleyici ve $d(I) \subseteq C_R(I)$ dır.

Tanım 4.2.23. F dönüşümü hem sol ve hem sağ genelleştirilmiş türev ise bir genelleştirilmiş türev denir.

Sonuç 4.2.24. R yarıasal halkası üzerinde F bir genelleştirilmiş ters türevdir ancak ve ancak F bir merkezleyeci genelleştirilmiş türevdir.

Sonuç 4.2.25. R bir asal halka ve I onun sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer I

üzerinde sıfırdan farklı d ters türevi ile belirlenmiş bir $F: I \rightarrow I$ sol genelleştirilmiş (veya sağ genelleştirilmiş) ters türev varsa R değişmelidir.

Aşağıda verilen örnek yarıasal koşulunun gerekli olduğunu göstermektedir

Örnek 4.2.25. R Örnek 4.2.15 de verilen halka ve $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ biçiminde tanımlanan R halkasının bir ideal olsun. $F, d: R \rightarrow R$ dönüşümlerini

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $d,\ I$ üzerinde sıfırdan farklı bir ters türev ve türevdir. Aynı zamanda $F,\ I$ üzerinde sağ genelleştirilmiş ters türevdir. Fakat F bir sol genelleştirilmiş türev değildir ve $d(I), F(I) \nsubseteq C_R(I)$ dır.

BÖLÜM 5
HALKALARDA $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ −TERS TÜREVLER

Bu bölümde M. S. Samman ve A. B. Thaheem tarafından 2003 yılında ve M. Samman ve N. Alyamani tarafından 2007 yılında yapılan çalışmalarda gösterilen sonuçlar türev veya ters türev yerine $(\alpha, \beta) -$ ters türev alınarak genelleştirilmiştir.

5.1. Asal Halkalarda $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ −Ters Türevler

Bu bölümde asal halkalar üzerinde (α, β) −ters türev ve genelleştirilmiş (α, β) −ters türevlerin sırasıyla (α, β) −türev ve genelleştirilmiş (α, β) −türev olduğu gösterilmiştir.

Teorem 5.1.1. R bir asal halka, β, R halkasının bir otomorfizması ve α, R halkasının bir homomorfizması olsun. $0 \neq D$ dönüşümü bir $(\alpha, \beta) -$ ters türevdir ancak ve ancak R değişmeli ve D bir (α, β) −türevdir.

İspat. (⇒:) $x, y, z \in R$ olmak üzere $x(yz) = (xy)z$ olmasını kullanarak her iki elemana da $(\alpha, \beta) -$ ters türev uygulanırsa

$$\begin{aligned} D\big(x(yz)\big) &= D(yz)\alpha(x) + \beta(yz)D(x) \\ &= D(z)\alpha(y)\alpha(x) + \beta(z)D(y)\alpha(x) + \beta(y)\beta(z)D(x) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$D\big(x(yz)\big) = D(z)\alpha(y)\alpha(x) + \beta(z)D(y)\alpha(x) + \beta(y)\beta(z)D(x) \tag{5.1}$$

elde edilir. Öte yandan benzer hesaplamayla

$$D\big((xy)z\big) = D(z)\alpha(x)\alpha(y) + \beta(z)D(y)\alpha(x) + \beta(z)\beta(y)D(x) \tag{5.2}$$

olur. $(xy)z = x(yz)$ eşit olduğundan (5.1) ve (5.2) birbirine eşittir. O halde bu eşitlikler düzenlenirse

$$D(z)\alpha([x, y]) + \beta([z, y])D(x) = 0, \ \forall x, y, z \in R \tag{5.3}$$

bulunur. Eğer (5.3) eşitliğinde $x = y$ alınırsa

$$\beta([z,x])D(x) = 0, \ \forall x, z \in R \tag{5.4}$$

olduğu görülür. (5.4) eşitliğinde $z \in R$ olmak üzere z yerine zy alınır ve yine (5.4) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\beta([z,x])\beta(y)D(x) = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

bulunur. β bir otomorfizma ve R asal olduğundan her $x \in R$ için $x \in Z(R)$ veya $D(x) = 0$ bulunur. Şimdi $A = \{x \in R \mid x \in Z(R)\}$ ve $B = \{x \in R \mid D(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. $R = AUB$ olduğu açıktır. Ayrıca A ve B kümelerinin R nin birer toplamsal altgrubu olduğu kolayca görülür. Bir grup iki öz altgrubun bileşimi olarak yazılamayacağından $R = A$ veya $R = B$ elde edilir. Eğer $R = B$ ise $D = 0$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $R = A$ dir. Yani R halkası değişmelidir. Bu durumda $D(xy) = D(yx) = D(x)\alpha(y) + \beta(x)D(y)$ olur. Yani D, bir (α, β) −türev olmasıdır.

(⇐:) R halkası değişmeli olduğundan sağlandığını görmek kolaydır.

Teorem 5.1.2. R bir asal halka, β, R halkasının bir otomorfizması ve α, R halkasının bir homomorfizması olsun. Sıfırdan farklı D dönüşümü, d, (α, β) −ters türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş (α, β) −ters türevdir ancak ve ancak R değişmeli bir halka ve D dönüşümü $d, (\alpha, \beta)$ −türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş (α, β) −türevdir.

İspat. d bir (α, β) −ters türev olsun. Teorem 5.1.1 den d (α, β) −türev ve R değişmeli halka olur. R halkasının değişmeli olduğu kullanılırsa

$$D(xy) = D(yx) = D(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y), \qquad \forall x, y \in R$$

elde edilir. Böylece de D dönüşümü $d, (\alpha, \beta)$ −türeviyle belirlenen genelleştirilmiş (α, β) − türev olur.

(⇐:) R halkası değişmeli olduğundan sağlandığını görmek kolaydır.

5.2. Yarıasal Halkalarda $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ −Ters Türevler

Bu bölümde Samman ve Alyamani tarafından yarıasal halkalarda türevler ve ters türevler ile ilgili yaptıkları çalışmadaki sonuçlar (α, β) ters türevler için genelleştirilmiştir. Aşağıdaki teorem (Samman M.S., and Alyamani N. 2007 Önerme 3.1) çalışmasındaki önermenin bir genelleştirmesidir.

Teorem 5.2.1. R bir yarıasal halka, α otomorfizma ve β epimorfizma olsun. D dönüşümü R halkasının bir (α, β) −ters türevidir ancak ve ancak $D(R) \subset Z(R)$ olan bir (β, α) − türevdir.

İspat. D, $D(R) \subset Z(R)$ olan bir (β, α) −türev olsun. O halde $D(xy) = D(x)\beta(y) +$

$\alpha(x)D(y) = D(y)\alpha(x) + \beta(y)D(x)$ olur. Böylece D bir (α,β) −ters türevdir.

Tersine D bir (α,β) −ters türev olsun. O halde $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned} D\big(x(yz)\big) &= D(yz)\alpha(x) + \beta(yz)D(x) \\ &= \big(D(z)\alpha(y) + \beta(z)D(y)\big)\alpha(x) + \beta(y)\beta(z)D(x) \\ &= D(z)\alpha(y)\alpha(x) + \beta(z)D(y)\alpha(x) + \beta(y)\beta(z)D(x) \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} D\big((xy)z\big) &= D(z)\alpha(xy) + \beta(z)D(xy) \\ &= D(z)\alpha(x)\alpha(y) + \beta(z)\big(D(y)\alpha(x) + \beta(y)D(x)\big) \\ &= D(z)\alpha(x)\alpha(y) + \beta(z)D(y)\alpha(x) + \beta(z)\beta(y)D(x) \end{aligned}$$

elde edilir. $D\big(x(yz)\big) = D\big((xy)z\big)$ olduğundan

$$\beta([y,z])D(x) = D(z)\alpha([x,y]), \forall x, y, z \in R \tag{5.5}$$

bulunur. (5.5) eşitliğinde z yerine y alınırsa

$$D(y)\alpha([x,y]) = 0, \ \ \forall x, y \in R \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir. (5.6) eşitliğinde x yerine $z \in R$ olmak üzere zx alınırsa ve (5.6) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $0 = D(y)\alpha([zx,y]) = D(y)\alpha(z[x,y] + [z,y]x) = D(y)\alpha(z)\alpha([x,y]) + D(y)\alpha([z,y])\alpha(x)$ elde edilir. Böylece

$$D(y)\alpha(z)\alpha([x,y]) = 0, \ \ \forall x, y, z \in R \tag{5.7}$$

bulunur. $u \in R$ olmak üzere (5.6) eşitliğinde y yerine $u + y$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= D(u+y)\alpha([u+y,x]) = \big(D(u) + D(y)\big)\big(\alpha([u,x]) + \alpha([y,x])\big) \\ &= D(u)\alpha([u,x]) + D(u)\alpha([y,x]) + D(y)\alpha([u,x]) + D(y)\alpha([y,x]) \end{aligned}$$

olur. (5.6) eşitliği kullanılırsa $D(u)\alpha([y,x]) + D(y)\alpha([u,x]) = 0, \forall x, y, u \in R$ olur. Böylece

$$D(u)\alpha([x,y]) = D(y)\alpha([u,x]), \ \ \forall x, y, u \in R \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (5.7) eşitliğinde z yerine $[u,x]z\alpha^{-1}(D(u))$ alınır ve (5.7) eşitliği kullanılarak tekrar düzenlenirse $0 = D(y)\alpha\left([u,x]z\alpha^{-1}\big(D(u)\big)\right)\alpha([x,y]) = D(y)\alpha([u,x])\alpha(z)D(u)\alpha([x,y]) = D(y)\alpha([u,x])\alpha(z)D(y)\alpha([u,x])$ bulunur. α bir otomorfima ve R halkası yarıasal halka olduğundan

$$D(y)\alpha([u,x]) = 0, \forall x,y,u \in R \tag{5.9}$$

bulunur. (5.9) eşitliğinde u yerine $\alpha^{-1}(D(y))$ yazılırsa

$$D(y)\alpha([\alpha^{-1}(D(y)),x]) = D(y)[D(y),\alpha(x)] = 0, \forall x,y \in R$$

elde edilir. Uyarı 2.44 den her $y \in R$ için $D(y) \in Z(R)$ dır.Böylece $D(R) \subset Z(R)$ elde edilir. Buradan $D(xy) = D(y)\alpha(x) + \beta(y)D(x) = D(x)\beta(y) + \alpha(x)D(y)$ olur. Yani D bir $(\beta,\alpha)-$türevdir.

Lemma 5.2.2. R bir 2-burulmasız yarıasal halka, $c \in R$, α,β epimorfizma ve $D: R \to R$, $D(x) = c\alpha(x) + \beta(x)c$ şeklinde tanımlansın. Eğer D bir $(\alpha,\beta)-$ters türev ise $D = 0$ ve $c = 0$ olur.

İspat. $x,y \in R$ olmak üzere hipotezde x yerine xy yazılır ve D dönüşümünün bir $(\alpha,\beta)-$ters türev olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
D(xy) &= D(y)\alpha(x) + \beta(y)D(x) \\
&= (c\alpha(y) + \beta(y)c)\alpha(x) + \beta(y)(c\alpha(x) + \beta(x)c) \\
&= c\alpha(y)\alpha(x) + \beta(y)c\alpha(x) + \beta(y)c\alpha(x) + \beta(y)\beta(x)c \\
&= c\alpha(yx) + 2\beta(y)c\alpha(x) + \beta(yx)c \\
&= D(yx) + 2\beta(y)c\alpha(x)
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$D([x,y]) = 2\beta(y)c\alpha(x), \forall x,y \in R \tag{5.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
D(yx) &= D(x)\alpha(y) + \beta(x)D(y) \\
&= (c\alpha(x) + \beta(x)c)\alpha(y) + \beta(x)(c\alpha(y) + \beta(y)c) \\
&= c\alpha(x)\alpha(y) + \beta(x)c\alpha(y) + \beta(x)c\alpha(y) + \beta(x)\beta(y)c \\
&= c\alpha(xy) + 2\beta(x)c\alpha(y) + \beta(xy)c \\
&= D(xy) + 2\beta(x)c\alpha(y)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$D([y,x]) = 2\beta(x)c\alpha(y), \forall x,y \in R$$

bulunur. $D([x,y]) + D([y,x]) = 0$ ve R, 2-burulmasız olduğundan

$$\beta(x)c\alpha(y) + \beta(y)c\alpha(x) = 0, \forall x, y \in R \tag{5.11}$$

elde edilir. Şimdi (5.11) eşitliğinde $z \in R$ olmak üzere x yerine xz yazılırsa ve (5.11) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(xz)c\alpha(y) + \beta(y)c\alpha(xz) \\ &= \beta(x)\beta(z)c\alpha(y) + \beta(y)c\alpha(x)\alpha(z) \\ &= \beta(x)\beta(z)c\alpha(y) - \beta(x)c\alpha(y)\alpha(z) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\beta(x)(\beta(z)c\alpha(y) - c\alpha(y)\alpha(z))=0, \ \forall x, y, z \in R \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.11) eşitliğinden yararlanılarak her $y, z \in R$ için $\big(\beta(y)c + c\alpha(y)\big)\alpha(z) = 0$ bulunur. Böylece yine β bir epimorfizma ve R nın yarıasal halka olması kullanılarak son eşitlik düzenlenirse

$$\beta(y)c + c\alpha(y) = 0, , \forall y \in R \tag{5.13}$$

elde edilir. O halde $D = 0$ dır. Buradan (5.10) eşitliğine dönülürse $0 = D([x,y]) = 2\beta(y)c\alpha(x)$ olur. Yani her $x, y \in R$ için $2\beta(y)c\alpha(x) = 0$ bulunur. R yarıasal halkası $2-$burulmasız olduğundan $\beta(y)c\alpha(x) = 0$ olur. Bulunan son eşitlik soldan $c\alpha(x)$ çarpılırsa her $y \in R$ için $c\alpha(x)\,\beta(y)c\alpha(x) = 0$ dır. R yarıasal halka ve β epimorfima olduğundan her $x \in R$ için $c\alpha(x) = 0$ bulunur. Bu eşitlik soldan $\alpha(x)$ ile çarpılırsa her $x \in R$ için $\alpha(x)\,c\alpha(x) = 0$ elde edilir. Burada yine R nın yarıasal halka ve α nın epimorfima olması kullnılırsa $c = 0$ bulunur.

Örnek 5.2.3. S birimli değişmeli bir halka olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in S\right\}$ matrisler halkası olsun. $\alpha\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$, $\beta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ için $D : R \to R$, $D(X) = A\alpha(X) + \beta(X)B$ olarak tanımlansın. O halde D, $(\alpha, \beta)-$ ters türevdir ancak $(\alpha, \beta)-$ türev değildir.

Çözüm. $X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \in R$ için

$\alpha(X) = \alpha\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z & y \\ 0 & x \end{bmatrix}, \beta(X) = \beta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha(Y) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \beta(Y) = \beta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

elde edilir.

$$D(X) = A\alpha(X) + \beta(X)B$$

olması kullanılarak

$D(X) = D\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & y \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir. Benzer şekilde

$$D(Y) = A\alpha(Y) + \beta(Y)B$$

olması kullanılarak

$D(Y) = D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & b \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. Şimdi

$XY = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx+cy \\ 0 & zc \end{bmatrix}$ olur. O halde

$D(XY) = D\left(\begin{bmatrix} ax & bx+cy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cz-ax & bx+cy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} D(Y)\alpha(X) + \beta(Y)D(X) &= \begin{bmatrix} c-a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & y \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z-x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} zc-ax & yc+bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$D(Y)\alpha(X) + \beta(Y)D(X) = \begin{bmatrix} zc-ax & yc+bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D(XY)$$

olur. Öte yandan $D(X)\alpha(Y) + \beta(X)D(Y) = \begin{bmatrix} z-x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & b \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c-a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} cz-xa & ay+bz \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

Buradan görülür ki

$$\begin{aligned} D(X)\alpha(Y) + \beta(X)D(Y) = \begin{bmatrix} cz-xa & ay+bz \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} zc-ax & yc+bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= D(Y)\alpha(X) + \beta(Y)D(X) \end{aligned}$$

O halde $(\alpha,\beta)-$ ters türevdir fakat $(\alpha,\beta)-$ türev değildir.

Lemma 5.2.4. R bir halka, α,β R üzerinde tanımlı iki dönüşüm olsun. $a,b \in R$ olmak üzere $D(x) = a\alpha(x) + \beta(x)b$ olarak tanımlanan dönüşüm $(\alpha,\beta)-$ ters türev ise

$$a\big(\alpha(xy) - \alpha(y)\alpha(x)\big) + \big(\beta(xy) - \beta(y)\beta(x)\big)b = \beta(y)(b+a)\alpha(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Hipotezden

$$D(xy) = a\alpha(xy) + \beta(xy)b, \;\; \forall x, y \in R \tag{5.14}$$

elde edilir. Öte yandan $D, (\alpha, \beta) -$ ters türev olduğundan

$$\begin{aligned} D(xy) &= D(y)\alpha(x) + \beta(y)D(x) \\ &= (a\alpha(y) + \beta(y)b)\alpha(x) + \beta(y)(a\alpha(x) + \beta(x)b) \\ &= a\alpha(y)\alpha(x) + \beta(y)b\alpha(x) + \beta(y)a\alpha(x) + \beta(y)\beta(x)b \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan son eşitlik ve (5.14) eşitliğinden yararlanılarak $a\alpha(y)\alpha(x) + \beta(y)b\alpha(x) + \beta(y)a\alpha(x) + \beta(y)\beta(x)b = a\alpha(xy) + \beta(xy)b$ eşitliği bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$a\big(\alpha(xy) - \alpha(yx)\big) + \big(\beta(xy) - \beta(yx)\big)b = \beta(y)(b + a)\alpha(x) \tag{5.15}$$

bulunur.

Teorem 5.2.5. R bir 2-burulmasız yarıasal halka ve R üzerinde tanımlı α, epimorfizma, β otomorfizma olsun. $D: R \to R$ dönüşümü $a, b \in R$ olmak üzere $D(x) = a\alpha(x) + \beta(x)b$ biçiminde tanımlansın. Eğer D sıfırdan farklı $(\alpha, \beta) -$ ters türev ise D, a ile belirlenmiş $(\alpha, \beta) -$ iç türevdir.

İspat. Lemma 5.2.4 den her $x, y \in R$ için $D([x, y]) = \beta(y)(b + a)\alpha(x)$ olur. Benzer şekilde her $x, y \in R$ için $D([y, x]) = \beta(x)(b + a)\alpha(y)$ olduğu görülür. Böylece $D([x, y]) + D([y, x]) = 0$ bulunur. Buradan

$$\beta(x)(b + a)\alpha(y) + \beta(y)(b + a)\alpha(x) = 0, \forall x, y \in R \tag{5.16}$$

olur. (5.16) eşitliğinde x yerine xz alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(xz)(b + a)\alpha(y) + \beta(y)(b + a)\alpha(xz) \\ &= \beta(x)\beta(z)(b + a)\alpha(y) + \beta(y)(b + a)\alpha(x)\alpha(z) \\ &= \beta(x)\beta(z)(b + a)\alpha(y) - \beta(x)(b + a)\alpha(y)\alpha(z) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $x, y, z \in R$ için $\beta(x)\big(\beta(z)(b + a)\alpha(y) - (b + a)\alpha(y)\alpha(z)\big) = 0$ olur. O zaman β epimorfizma ve R bir yarıasal halka olduğundan her $y, z \in R$ için $\beta(z)(b + a)\alpha(y) - (b + a)\alpha(y)\alpha(z) = 0$ bulunur. Bu eşitlik (5.16) kullanılarak düzenlenirse $\big(\beta(y)(b + a) + (b + a)\alpha(y)\big)\alpha(z) = 0$ olur. α epimorfizma ve R bir yarıasal halka olduğundan

$$\beta(y)(b+a)+(b+a)\alpha(y)=0, \forall y \in R \tag{5.17}$$

olur. Şimdi (5.16) eşitliğide (5.17) eşitliği kullanılarak düzenlenirse $0=\beta(x)(b+a)\alpha(y)+\beta(y)(b+a)\alpha(x)=-\beta(x)\beta(y)(b+a)-\beta(y)\beta(x)(b+a)=\beta(x)\beta(y)(b+a)+\beta(y)\beta(x)(b+a)$ olur. Buradan

$$\beta(xy+yx)(b+a)=0, \forall x,y \in R \tag{5.18}$$

bulunur. (5.18) eşitliğinde y yerine yz alınırsa ve $x(yz)+(yz)x=y(xz+zx)+[x,y]z$ özdeşliğinden yararlanılarak tekrar düzenlenirse her $x,y,z \in R$ için $\beta(y(xz+zx)+[x,y]z)(b+a)=(\beta(y)\beta(xz+zx)+\beta([x,y])\beta(z))(b+a)$ olur. (5.18) eşitliğinden yararlanılarak düzenlendiğinde her $x,y,z \in R$ için $\beta([x,y])\beta(z))(b+a)=0$ bulunur. Bu son eşitlikte $z=\beta^{-1}(b+a)z[x,y]$ alınırsa ve β nın otomorfizma olması kullanılarak her $z \in R$ için $\beta([x,y])(b+a)\beta(z))\beta([x,y])(b+a)=0$ bulunur. R bir yarıasal halka olduğundan her $x,y \in R$ için $([x,y])(b+a)=0$ elde edilir. Yani

$$\beta(xy-yx)(b+a)=0, \forall x,y \in R \tag{5.19}$$

olur. (5.18) ve (5.19) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa her $x,y \in R$ için $2\beta(xy)(b+a)=0$ bulunur. Üstelik R nın $2-$burulmasız yarıasal halka olmasından $\beta(xy)(b+a)=0$ olur. Buradan $(b+a)=0$ dır. Yani $b=-a$ dır. Hipotezde verilen D türev tanımından $D(x)=a\alpha(x)-\beta(x)a=[a,x]_{\alpha,\beta}$ bulunur. O zaman D nin a ile belirlenmiş $(\alpha,\beta)-$türev olduğu görülür.

Bu teoremden faydanılarak aşağıdaki sonuç verilebir. Bu sonuçta $D=0$ ve $\alpha,\beta=I_R$ alınması durumunda (Samman M.S., and Alyamani N. 2007. Lemma 3.5) in daha genelleştirilmiş biçimidir.

Sonuç 5.2.6. R bir 2- burulmazsız yarıasal halka, R üzerinde tanımlı α, epimorfizma, β otomorfizma olsun. $D: R \rightarrow R$,$a,b \in R$ olmak üzere $D(x)=a\alpha(x)+\beta(x)b$ dönüşümü bir $(\alpha,\beta)-$ ters türev olmak üzere $D(R)=0$ ise $a=-b \in C_{\alpha,\beta}$ dır.

Aşağıdaki teorem(Samman M.S., and Alyamani N. 2007. Proposition 3.4) ün farklı bir genelleştirmesidir.

Teorem 5.2.7. R bir 2- burkulmaz yarıasal halka, R üzerinde tanımlı α, anti-epimorfizma, β anti-otomorfizma olsun. $D : R \to R$, $a, b \in R$ olmak üzere $D(x) = a\alpha(x) + \beta(x)b$ dönüşümü tanımlansın. Eğer D sıfırdan farklı bir $(\alpha, \beta)-$ ters türev ise D, a ile belirlenmiş bir (α, β) $-$iç türevdir.

İspat. (5.15) eşitliğinde α, β anti-homomorfizma alınırsa her $x, y \in R$ için $\beta(y)(b + a)\alpha(x) = 0$ olur. R bir yarıasal halka olduğundan $b + a = 0$ bulunur. O halde $b = -a$ olur. Şimdi hipotezde verilen türev tanımı ve $b = -a$ olması kullanılarak düzenlenirse $D(x) = a\alpha(x) - \beta(x)a = [a, x]_{\alpha,\beta}$ elde edilir. Buradan D nin a ile belirlenmiş bir (α, β) $-$iç türev olduğu görülür.

Teorem 5.2.8 R bir yarıasal halka, α, β otomorfizma ve F, G dönüşümleri R üzerinde bir $(\alpha, \beta) -$ ters türev olmak üzere

$$F(x)\alpha(y) + \beta(y)G(x) = 0, \forall x, y \in R \tag{5.20}$$

koşulu sağlanıyor ise her $x, y, z \in R$ için $F(y)\alpha([z, x]) = \beta([z, x])G(y) = 0$ olur ve $G(R) \subset Z(R)$, $F(R) \subset Z(R)$ dır.

İspat. Hipotezde verilen (5.20) eşitliğinde x yerine xy alınırsa $F(xy)\alpha(y) + \beta(y)G(xy) = F(y)\alpha(x)\alpha(y) + \beta(y)F(x)\alpha(y) + \beta(y)G(y)\alpha(x) + \beta(y)\beta(y)G(x)$
$= F(y)\alpha(xy) + \beta(y)G(y)\alpha(x) + \beta(y)\big(F(x)\alpha(y) + \beta(y)G(x)\big)$ olur. Bu eşitlik (5.20) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$F(y)\alpha(xy) + \beta(y)G(y)\alpha(x) = 0, \forall x, y \in R \tag{5.21}$$

bulunur. Şimdi (5.20) eşitliğinde $x = y$ alınırsa $0 = F(y)\alpha(y) + \beta(y)G(y)$ olur. Buradan $\beta(y)G(y) = -F(y)\alpha(y)$ elde edilir. Son eşitlik (5.21) eşitliğinde kullanılırsa $F(y)\alpha(xy) + \beta(y)G(y)\alpha(x) = F(y)\alpha(xy) - F(y)\alpha(yx) = 0$ olur. Böylece

$$F(y)\alpha([x, y]) = 0, , \forall x, y \in R \tag{5.22}$$

Olur. Diğer taraftan (5.22) eşitliğinde $z \in R$ için x yerine $\alpha^{-1}(z)x$ alınırsa $F(y)\alpha([\,\alpha^{-1}(z)x, y]) = 0$ olur. Yani,

$$F(y)z\alpha([x, y]) = 0, \forall x, y, z \in R \tag{5.23}$$

bulunur. Eşitlik (5.20) de y yerine $y+z$ alınır ve (5.22) eşitliğinden yararlanarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= F(y+z)\alpha([x,y+z]) = \big(F(y)+F(z)\big)\alpha([x,y]+[x,z]) \\ &= F(y)\alpha([x,y]) + F(z)\alpha([x,y]) + F(y)\alpha([x,z]) + F(z)\alpha([x,z]) \\ &= F(y)\alpha([x,z]) + F(z)\alpha([x,y]) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $F(y)\alpha([x,z]) = -F(z)\alpha([x,y])$ olur. Böylece

$$F(y)\alpha([z,x]) = F(z)\alpha([x,y]), \forall x,y,z \in R \tag{5.24}$$

elde edilir. Şimdi $v \in R$ için $F(y)\alpha([z,x])vF(y)\alpha([z,x])$ alınırsa ve (5.24) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$F(y)\alpha([z,x])vF(y)\,\alpha([z,x]) = F(y)\,\alpha([z,x])vF(z)\alpha([x,y]) \tag{5.25}$$

olur. Şimdi (5.25) eşitliğinde $w = \alpha([z,x])vF(z)$ alınır ve eşitlik (5.23) kullanılırsa her $x,y,z \in R$ için $F(y)\alpha([z,x])vF(y)\alpha([z,x]) = F(y)w\alpha([x,y]) = 0$ bulunur. Böylece R bir yarıasal halka olduğundan

$$F(y)\alpha([z,x]) = 0, \forall x,y,z \in R \tag{5.26}$$

olur. Şimdi (5.26) eşitliğinde z yerine $z\alpha^{-1}(F(y))$ alınırsa $F(y)\alpha([z\alpha^{-1}(F(y)),x]) = F(y)\alpha(z)[F(y),\alpha(x)] + F(y)\alpha([z,x])F(y)$ bulunur. Bu son eşitlik (5.26) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$F(y)\alpha(z)[F(y),\alpha(x)] = 0, \forall x,y,z \in R \tag{5.27}$$

elde edilir. Eşitlik (5.27) de z yerine xz alınırsa

$$F(y)\alpha(x)\alpha(z)[F(y),\alpha(x)] = 0, \forall x,y,z \in R \tag{5.28}$$

bulunur.(5.27) eşitliği soldan $-\alpha(x)$ ile çapılırsa

$$-\alpha(x)F(y)\alpha(z)[F(y),\alpha(x)] = 0, \forall x,y,z \in R \tag{5.29}$$

olur. (5.28) ve (5.29) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$[F(y), \alpha(x)]\alpha(z)[F(y), \alpha(x)] = 0, \forall x, y, z \in R$$

olur. Buradan R nın yarıasal halka olmasından yararlanılarak

$$[F(y), \alpha(x)] = 0, \forall x, y \in R \tag{5.30}$$

elde edilir. O halde görülür ki $F(R) \subset Z(R)$ dir. Diğer taraftan (5.20) eşitliğinde y yerine $[x, y]$ alınırsa ve eşitlik (5.22) kullanılarak düzenlenirse

$$\beta([x, y])G(x) = 0, \forall x, y \in R \tag{5.31}$$

bulunur. (5.31) eşitliğinde y yerine $y\beta^{-1}(z)$ alınır ve (5.31) kullanılarak düzenlenirse

$$\beta([x, y])zG(x) = 0, \forall x, y, z \in R \tag{5.32}$$

elde edilir. Eşitlik (5.31) de x yerine $x + z$ alınırsa ve (5.31) kullanılarak düzenlenirse $0 = \beta([x + z, y])G(x + z) = \big(\beta([x, y]) + \beta([z, y])\big)\big(G(x) + G(z)\big) = \beta([x, y])G(x) + \beta([x, y])G(z) + \beta([z, y])G(x) + \beta([z, y])G(z) = \beta([x, y])G(z) + \beta([z, y])G(x)$ olur. Yani

$$\beta([x, y])G(z) = \beta([y, z])G(x), \forall x, y, z \in R \tag{5.33}$$

bulunur. Kabul edelim ki $v \in R$ için $\beta([x, y])G(z)v\beta([x, y])G(z)$ olsun. O halde (5.33) eşitliği kullanılırsa

$$\beta([x, y])G(z)v\beta([x, y])G(z) = \beta([x, y])G(z)v\beta([y, z])G(x) \tag{5.34}$$

olur. . Şimdi (5.34) eşitliğinde $w = G(z)v\beta([y, z])$ alınır ve eşitlik (5.32) kullanılırsa her $x, y, z \in R$ için $\beta([x, y])G(z)v\beta([x, y])G(z) = \beta([x, y])wG(x) = 0$ olur. Böylece R nin yarıasal halka olması kullanılırsa

$$\beta([x, y])G(z) = 0, \forall x, y, z \in R \tag{5.35}$$

bulunur. (5.35) eşitliğinde y yerine $\beta^{-1}(G(y))$ alınırsa $\beta([x,\beta^{-1}(G(y))w])G(z) = [\beta(x),G(y)]\beta(w)G(z) + G(y)\beta([x,w])G(z)$ bulunur. Bu son eşitlik (5.35) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$[\beta(x),G(y)]\beta(w)G(z) = 0, \forall x,y,z,w \in R \tag{5.36}$$

elde edilir. (5.36) eşitliğinde w yerine wx alınırsa

$$[\beta(x),G(y)]\beta(w)\beta(x),G(z) = 0, \forall x,y,z,w \in R \tag{5.37}$$

bulunur. (5.36) eşitliği sağdan $-\beta(x)$ ile çarpılırsa

$$-[\beta(x),G(y)]\beta(w)G(z)\beta(x) = 0, \forall x,y,z,w \in R \tag{5.38}$$

elde edilir. (5.37) ve (5.38) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$[\beta(x),G(y)]\beta(w)[\beta(x),G(z)] = 0, \forall x,y,z,w \in R$$

olur. Buradan

$$[\beta(x),G(y)]\beta(w)[\beta(x),G(y)] = 0, \forall x,y,w \in R$$

olur. R nin bir yarıasal olması ve β nın otomorfizma kullanılarak bu son eşitlikten her $x,y \in R$ için $[\beta(x),G(y)] = 0$ bulunur. O halde görülür ki $G(R) \subset Z(R)$ dir.

KAYNAKLAR

Aboubakr A., Gonzalez S. 2014. Generalized Reverse Derivations on Semiprime Rings. Fayoum and Oviedo. Translated from

Aydın N., Kandamar H., 2015a. *Soyut Cebir* (3. Baskı). Paradigma Akademi. Çanakkale.

Aydın N., Kandamar H., Kaya K., 2015b. *Soyut Cebir Problemleri ve Çözümleri*. Paradigma Akademi. Çanakkale.

Bell H.E., Martindale W.S., 1987. Centralizing Mappings of Semiprime Rings. Canad. Math. Bull. 30: 92-101.

Herstein I.N., 1957. Jordan Derivations of Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8, 1104-1110

Herstein I. N., 1976. *Ring With Involution*. Univ. Of Chicago Press. Chicago.

Herstein I. N., 1979. A Note on Derivations II. Canad. Math. Bull. 22: 509-511.

Herstein I. N., 1969. *Topics in Ring Theory*. Univ. Of Chicago Press. Chicago.

Ibraheem A.M., 2016. Ring Ideals and Generalized Reverse Derivations on Prime Rings. American Journal of Computational and Applied Mathematics. 6(4) : 162-164

Posner E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8: 1093-1100.

Samman M.S., Thaheem A.B., 2003. Derivations on Semiprime Rings. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 5(4) : 465-472.

Samman M.S., and Alyamani N. 2007. Derivations and Reverse Derivations in Semiprime Rings. International Mathematical Forum. 39 :1895-1902

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: MERVE ÖZDEMİR

Doğum Yeri: ALAŞEHİR/MANİSA

Doğum Tarihi: 20.01.1991

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

Öğe Dershaneleri / 2011 Ocak – 2012 Haziran

Merve Özel Ders Merkezi – Matematik ve Geometri Öğretmeni / 2015 Ağustos – 2017 Haziran

Doğa Okulları – Matematik ve Geometri Öğretmeni / 2016 Eylül – 2017 Ocak

C Şıkkı Eğitim Kurumları – Matematik ve Geometri Öğretmeni / 2017 Şubat – 2017 Haziran

Süreç Özel Öğretim Kursu – Matematik ve Geometri Öğretmeni / 2017 eylül –

İLETİŞİM

E-posta Adresi: mat.merve3545@gmail.com