



**MAGNETOHİDRODİNAMİK AKIŞ VE ISI TRANSFERİNİN FARKLI
GEOMETRİLERDE İNCELENMESİ**

Hayriye YETİM

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2018

Hayriye YETİM tarafından hazırlanan “MAGNETOHİDRODİNAMİK AKIŞ VE ISI TRANSFERİNİN FARKLI GEOMETRİLERDE İNCELENMESİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Fatma AYZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Doç. Dr. Tuncay KARAÇAY

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Rabia AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 08/01/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hayriye YETİM

08/01/2018

MAGNETOHİDRODİNAMİK AKIŞ VE ISI TRANSFERİNİN FARKLI
DÜZLEMLERDE İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hayriye YETİM

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2018

ÖZET

Bu çalışmada, manyeto-hidrodinamik veya kısaca MHD akışı da denilen akış problemleri, farklı akış geometrileri için incelenmiştir. Öncelikle iki boyutlu momentum denkleminin çözümü; paralel levhalar için diferansiyel dönüşüm yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu yöntem Taylor serisi katsayılarının, fonksiyonun türevlerini almadan cebirsel işlemlerle bulunmasıdır. İlave olarak, Diferansiyel Dönüşüm metodu; düz levhalar yerine paralel disklerden geçen üç boyutlu MHD akışına da uygulanmış ve ısı transferi etkileri de göz önüne alınarak farklı akış parametreleri için Taylor seri çözümleri Maple 15 programı kullanılarak elde edilmiştir. Sonuç olarak, grafikleri bu parametreler cinsinden yorumlanmıştır.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : DTM, MHD akışı, ısı transferi
Sayfa Adedi : 63
Danışman : Prof. Dr. Fatma AYZ

INVESTIGATION OF MAGNETOHYDRODYNAMIC FLOW AND HEAT
TRANSFER IN DIFFERENT GEOMETRIES

(M. Sc. Thesis)

Hayriye YETİM

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2018

ABSTRACT

In this work, magnetohydrodynamics, also called MHD flow problems have been investigated for different flow geometries. First of all, the solution of the 2-D momentum equation is calculated by Differential Transform method for parallel plates. This method requires that the coefficients of Taylor series are obtained by algebraic operations without differentiating the function. Additionally, this method has also been applied to 3-D MHD flow through parallel circular disks instead of parallel plates and the Taylor series solutions, by taking into consideration of the heat transfer effects, have been obtained by Maple 15 program for different flow parameters. As a result, the graphs were interpreted in terms of these flow parameters.

Science Code : 20406
Key Words : DTM, MHD flow, heat transfer
Page Number : 63
Supervisor : Prof. Dr. Fatma AYZ

TEŞEKKÜR

Bu alıőmam sűresince her tűrlű yardım ve fedakârlığı esirgemeyen, bilgi ve tecrűbe ile alıőmama yardımcı olan danıőmanım Gazi Ŭniversitesi űđretim elemanı Sayın Prof. Dr. Fatma AYZA' a teőekkűrlerimi sunarım.

Benden maddi, manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teőekkűr ederim.

Tezimin hazırlarken beni cesaretlendiren ve manevi desteđini esirgemeyen arkadaőlarım Őűkran İNAL, Betűl AYDIN ve Makbule İMEN e teőekkűr ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. MHD AKIŞI	5
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler.....	5
2.2. Maxwell Denklemi	8
2.2.1. Gauss yasası.....	9
2.2.2. Faraday yasası	10
2.2.3. Amper yasası	11
2.2.4. B'nin diverjansı.....	12
2.2.5. Ohm yasası.....	13
2.3. Süreklilik Denklemi.....	14
2.4. Hareket Denklemi.....	16
2.5. Enerji Denklemi.....	18
2.6. Diferansiyel Dönüşüm Metodu	18
2.7. En Küçük Kareler Metodu.....	19
3. PARALEL PLAKALAR ARASINDA BİR VİSKOZ MHD AKIŞKANIN KARARSIZ SIKIŞTIRMA AKIŞI	23
3.1. Problemin Tanımı	23
3.2. Problemin Çözümü.....	28
3.3. Problemin Sonuçları	30

4. DARALAN LEVHA VE GÖZENEKLİ BİR ZEMİN ORTAMI İLE SINIRLANDIRILMIŞ BİR KANALDA MHD AKIŞI VE ISI TRANSFERİ	33
4.1. Problemin Tanımı	34
4.2. Problemin Çözümü	37
4.3. Problemin Sonuçları	38
5. PARALEL DİSKLER ARASINDAKİ KARARSIZ AKIŞ İÇİN ISI TRANSFER ANALİZİ	45
5.1. Problemin Tanımı	45
5.2. Problemin Çözümü	48
5.3. Problemin Sonuçları	50
5.3.1. Emme akışı $A > 0$	50
5.3.2. Püskürtme durumu ($A < 0$)	54
6. SONUÇ	57
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Bazı fonksiyonların DTM tablosu	19



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Doğrusal akım.....	24
Şekil 3.2. S değeri sabitlendiğinde M magnetik parametresinin farklı değerleri için normal hız profili.....	31
Şekil 3.3. $S = 1.5$ sabit değeri alındığında M magnetik parametresinin farklı değerleri için boylamsal hız profili	31
Şekil 3.4. $M = 1$ olduğunda, S nin farklı değerleri için normal hız profili	31
Şekil 3.5. $M = 1$ sabit olduğunda S nin farklı değerleri için boylamsal hız profili...	32
Şekil 4.1. Problemin geometrisi.....	35
Şekil 4.2. $c = 3, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5, M = 1, R = 2$ değerleri için K nin aksenal hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi	39
Şekil 4.3. $c = 3, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5, R = 2, K = 0.001$ değerleri için M nin aksenal hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi	40
Şekil 4.4. $M = 1, c = 3, K = 0.001, \alpha = 0.1, R = 2$ değerleri için λ nin aksenal hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi	40
Şekil 4.5. $M = 1, c = 3, K = 0.001, \alpha = 0.1, \lambda = 0.1$ değerleri için R in aksenal hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi	40
Şekil 4.6. $M = 1, K = 0.001, R = 2, \alpha = 0.1$ değerleri için c ve λ nin $f'(\eta)$ üzerinde etkisi	41
Şekil 4.7. $M = 1, c = 3, K = 0.001, R = 2, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5$ değerleri için Pr nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	41
Şekil 4.8. $M = 1, c = 3, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5$ değerleri için K nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	41
Şekil 4.9. $M = 1, c = 3, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1$ ve $K = 0.001$ değerleri için λ nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	42
Şekil 4.10. $c = 3, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1, K = 0.001, \lambda = 0.5$ değerleri için M nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	42
Şekil 4.11. $c = 3, M = 1, Pr = 2, \alpha = 0.1, K = 0.001, \lambda = 0.5$ değerleri için R nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	42
Şekil 4.12. $M = 1, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1, K = 0.001, \lambda = 0.5$ değerleri için c nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	43

Şekil	Sayfa
Şekil 4.12. $M = 1, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1, K = 0.001, \lambda = 0.5$ değerleri için c nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	43
Şekil 5.1. Problemin geometrisi.....	46
Şekil 5.2. A nın $f'(\eta)$ üzerinde etkisi.....	51
Şekil 5.3. A nın $f(\eta)$ üzerinde etkisi	51
Şekil 5.4. S nın $f'(\eta)$ üzerinde etkisi.....	52
Şekil 5.5. A nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi	52
Şekil 5.6. S nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	52
Şekil 5.7. $\theta(\eta)$ üzerinde Pr nın etkisi	53
Şekil 5.8. $\theta(\eta)$ üzerinde Ec nin etkisi	53
Şekil 5.9. $\theta(\eta)$ üzerinde χ nin etkisi.....	53
Şekil 5.10. $f'(\eta)$ üzerinde A nın etkisi.....	54
Şekil 5.11. $f(\eta)$ üzerinde A nın etkisi	54
Şekil 5.12. $f'(\eta)$ üzerinde S nın etkisi.....	55
Şekil 5.13. S nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi.....	55
Şekil 5.14. A nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi	55
Şekil 5.15. $\theta(\eta)$ üzerinde Pr nin etkisi	56
Şekil 5.16. $\theta(\eta)$ üzerinde Ec nin etkisi	56
Şekil 5.17. $\theta(\eta)$ üzerinde χ nin etkisi	56

1. GİRİŞ

Manyetohidrodinamik, manyetik alan varlığında iletken bir akışkanın hareketi ile ilgilenen akışkanlar mekaniğinin bir dalıdır. Bazen hidromagnetik veya magneto-akışkan dinamikler olarak da adlandırılır. Manyetik kuvvet çizgileri boyunca iletken bir materyalin hareketi, genellikle akışkanın elektrik akımının neden olduğu potansiyel farklılıklar oluşturur. Bu akımlar ile manyetik alanlar onları oluşturan manyetik alanları değiştirir. Başka bir ifade ile akışkanın akışı sistemin elektromanyetik durumunu değiştirir. Öte yandan, manyetik alan boyunca elektrik akımının akışı, akışkanın akışını etkileyen Lorentz kuvveti olarak adlandırılan bir cisim kuvvetiyle ilişkilidir. Manyetohidrodinamiği tanımlayan ve karakterize eden hidrodinamik ve elektrodinamik arasındaki bağıdır [1]. Burada bahsi geçen akışkanlar; plazmalar, sıvı metaller, tuzlu sular ve elektrolitlerdir. Magnetohidrodinamik; magneto, hidro ve dinamik kelimelerinden oluşmaktadır ve bu kelimeler anlamları sırasıyla manyetik alan, sıvı ve hareket demektir. Magnetohidrodinamik kısaca MHD olarak gösterilmiştir.

MHD aerodinamik ısıtma, MHD akışkan dinamikleri, MHD güç jeneratörleri, nükleer reaktörlerin soğutulması, MHD pompaları, elektromanyetik döküm, jeotermal enerji ekstraktörleri, otomobil motorlarında hareketli parçaların soğutulması, akış sayacıları, sınır tabaka kontrolü, kontrol ve yeniden giriş problemleri, hız artırıcılar, ısı yalıtkanları, nükleer atık imhası, yeni güç üreten sistemlerin oluşturulması, elektrostatik çökeltme, ısı izolatörleri, füzyon işlemleri, jeofizik ve kağıt üretimi, biyomedikal mühendislik, endüstriyel enerji mühendisliği, maden endüstrisinde, petrol ve polimer teknolojisi gibi birçok önemli uygulama alanlarına sahiptir.

Kesin olarak MHD nin ne zaman ortaya çıktığı bilinmemektedir. Fakat birçok araştırmacı tarafından MHD akış kavramının başlangıcı olarak 19. yüzyıl fizikçisi olan Faraday ın Thames nehrinde yaptığı deney baz alınmaktadır. Bu kavramın temelleri Michael Faraday(1832) ın Thames nehrinde basit bir MHD güç üretici kurması ile atılmıştır. Bu nehre iki bakır elektrot yerleştirerek, düzenekte voltaj oluştuğunu gözlemlemiştir. Varsaydığı gibi bu çalışmada elektriksel olarak iletken bir akışkan olan tuzlu suyun hareketinin manyetik alan varlığı altında elektrik akımı meydana getirdiğini göstermiştir. Rithcie(1832) paralel plakalar arasında Poiseuille akışını incelemiş ve bu inceleme sonucunda elektrik ve manyetik alana dik yönde bir kuvvet oluştuğunu keşfetmiştir.

Astrofizikçilerin evrende çok sayıda manyetik alan ve plazmanın bulunduğunu fark etmeleriyle de bu alandaki çalışmalar oldukça önem kazanmaya başlamıştır [2]. Gök cisimlerde bulunan akışkanların ve manyetik alanların ilişkisinde MHD kavramı ile karşılaşmışlardır. MHD kavramı Alfven tarafından ilk kez 1942 yılında kullanılmıştır ve bu tarihten itibaren MHD bir bilim dalı olarak karşımıza çıkmaktadır. Alfven in bu çalışmaları 1970 yılında Nobel ödülü kazanmasını sağlamıştır. Alfven ve arkadaşları, Alfven in daha önce bulduğu olguların manyetik alanda elektriksel olarak iletken bir ortamda davranışlarını araştırmıştır. Yapılan çalışmalarda MHD akışına, boyutsuzluk sayılarına, MHD dalgalarına yoğunlaşmıştır. Alfven dalgasının keşfedilmesi bu konu için dönüm noktası olmuştur. Aynı zamanlarda, Jeofizikçiler dünyanın manyetik alanının çekirdeğin sıvı metalindeki dinamo hareketi tarafından üretildiğinden şüphelenmeye başlamıştır. Bu Larmor tarafından 1919 yılında ilk kez hipotez olarak ortaya atılmıştır [2].

Plazma fizikçileri 1950 lerde MHD akışa ilgi duymaya başlamıştır. Çünkü kontrollü termonükleer füzyon son yıllarda daha çok önem kazanmıştır. Manyetik alanlar tarafından sınırlanan plazmaların kararlılığı konusunda da büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Öte yandan mühendislikte MHD daha yavaş gelişme göstermiştir [2]. Mühendislikte MHD nin gelişmesi elektromanyetik pompayı icat eden J. Hartmann ın bazı öncü çalışmaları ile başlamıştır. Hartmann homojen manyetik alanın var olduğu bir ortamda cıva akışının hem teorik hem de deneysel olarak araştırmasını yapmıştır [2]. Hartmann iki sonsuz paralel durağan plakalar ve iki sonsuz durağan ve yalıtıcı plaka arasında araştırmalarını yapmıştır. Bu iki çalışmada da manyetik alanın, indüklenen elektrik akımlarının ve sürtünme kuvvetinin hız üzerinde güçlü bir etki yaptığını göstermiştir. Bu çalışmalarından dolayı Hartmann sıvı metal MHD nin babası olarak görülmüştür ve manyetik alan varlığında kanal akışlarını tanımlamak için Hartman akımı terimi kullanılmaktadır [2]. Hartmann'ın 1960 yılından önce araştırmalarının olmasına rağmen MHD akışı bu yıldan sonra mühendislikte yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Değişimin ivme kazanması (i) hızla çoğalan reaktörlerde soğutucu olarak sıvı sodyum kullanılması ve bunun pompalanması gerekliliği; (ii) kontrollü termonükleer füzyon, sıcak plazmanın manyetik kuvvetlerle materyal yüzeylerinde sınırlandırılması gerekliliği; (iii) MHD'nin elektrik üretiminde enerji verimliliği ihtimali olduğu düşünülmesi sonucu ortaya çıkmıştır. Fakat (iii) in başarısız olduğu ortaya çıktığından dolayı elektrik üretimi konusuna ilgi azalmıştır [2]. Metalürjik endüstride MHD araştırmalarının 1970 yılında artmaya başlamasının nedeni ekonomik faktörler olmuştur. MHD metalürji endüstrisinde yaygın olarak

kullanılmaya başlamıştır. Ayrıca alüminyum ve yüksek performanslı alaşımların üretiminde daha fazla verimlilik, kontrol arayışı metalürjide MHD in dönüm noktası olmuştur. Sıvı metal MHD prensipleri sıvı metalleri ısıtmak, pompalamak, erimiş metalleri karıştırmak ve erimiş maddenin fiziksel ve kimyasal özelliklerini homojen hale getirmek, sıvı fazın hareketini ve şeklini kontrol etmek, eritme hareketini kontrol etmek ve yüksek oranda reaktif olan titanyum gibi metalleri eritmek için metalurjik işlemlerde büyük ölçüde kullanılmıştır. Lorentz kuvveti bu akışı kontrol etmek için kilit noktadır. Daha ucuz, daha iyi ve daha tutarlı malzemeler üretmek için MHD, döküm ve rafine işlemleri üzerinde kontrol etme konusunda eşsiz bir yöntem sunmuştur [2].

Bu tezde 2. Bölümde MHD akışı ve özellikleri, boyutsuzluk sayıları, Maxwell denklemleri, süreklilik denklemi, hareket denklemi ve enerji denklemleri tanıtılmış ve ayrıca denklemleri çözmek için kullandığımız diferansiyel dönüşüm metodu ve en küçük kareler metodundan kısaca bahsedilmiştir. 3. Bölümde Paralel iki plaka arasındaki MHD akışın incelenmiş, MHD akış problemi gerekli düzenlemeler yapılarak en sade hale getirilmiş, bu probleme diferansiyel dönüşüm metodu ile en küçük kareler metodu kullanılarak sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlarla grafikleri çizilmiştir. 4. Bölümde küçülen gözenekli tabaka ve az geçirgen olan tabakayla sınırlandırılmış bir bölgede bulunan iletken viskoz akışkanın hareketi ve ısı transferi diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak incelenmiştir. İlk olarak bu denklemler benzerlik dönüşümleri yardımıyla sade hale getirilmiş daha sonra diferansiyel dönüşüm metodu uygulanarak yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Bu yöntem yardımıyla elde edilen sonuçlar grafiksel olarak gösterilmiştir. 5. Bölümde iki paralel disk arasında iletken bir akışkan MHD sıkıştırma akışı ve ısı transferi denklemleri analiz edilmiştir. Denklemler dönüşümler uygulanarak sadeleştirilmiştir. Diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla hız ve ısı profillerinin yaklaşık çözümleri elde edilmiş ve farklı parametreler için bu değerler grafiklerle incelenmiştir. 6. Bölüm de ise tüm çalışmaların sonuçları değişik parametreler için değerlendirilmiş ve özetlenmiştir.



2. MHD AKIŞI

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde MHD akışına ait bazı tanım ve kullanacağımız teoremler açıklanmıştır.

2.1.1. Tanım

Newtonyen akış adını Isaac Newton'dan alan ve onun tarafından ortaya atılmış Newton viskozite yasasına dayanan bir akış türüdür. Deformasyon hızı kayma gerilmesi ile orantılıdır. Su, hava, benzin ve yağlar gibi akışkanlar bu tip akışkanlara birer örnektir. Bir boyutlu kayma gerilmesi

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

şeklinde tanımlıdır [3]. Burada τ kayma gerilmesini ve μ akışkanın viskozite katsayısını ifade etmektedir. Bu tip akışkanların viskoziteleri sıcaklık ve basınçtan etkilenirler ve sıcaklık viskoziteyi basınçtan daha fazla etkilemektedir.

2.1.2. Tanım

Sistemdeki herhangi bir noktadaki akışkanın özellikleri zaman içinde değişime uğruyorsa bu akışkanlara kararsız akışkan denir. Eğer akışkanın özellikleri zamana göre değişmiyorsa bu akışkana ise kararlı akışkan denir.

2.1.3. Tanım

Akışım sıkıştırılmaz olup olmadığı belirlemek için akışım yoğunluğundaki değişime bakılır. Eğer akışkan hacmini koruyorsa yani yoğunluk (özkütle) akış boyunca sabit kalıyorsa (ihmal edilebiliyorsa) bu tip akışkanlara sıkıştırılmaz akışkan denir. Aksi halde sıkıştırılabilir akışkan denir. Gazlar sıkıştırılabilir akışkanlar iken sıvılar sıkıştırılmaz akışkanlardır. Akışkanın bu kriterini belirlemek için Mach sayısı kullanılmıştır.

2.1.4. Tanım

Aksisimetri akış probleminde bulunan bütün niceliklerin açıdan bağımsız olduğunu ifade etmektedir. Örneğin problem silindirik koordinat sistemi (r, θ, z) üzerine tanımlıysa artık aksisimetriklikten dolayı bu problem (r, z) düzlemine sınırlandırılmaktadır.

2.1.5. Tanım

Düzgün akım çizgileri ile karakterize edilen düzenli akışkan hareketine laminar akış denir. Yani sınır duvarlarına paralel bir çizgiyle düz bir biçimde hareket eder. Düşük akış hızlarına sahiptirler. Reynolds sayısı akışkanın laminar veya türbülanslı olup olmadığını belirlemede kullanılmıştır.

2.1.6. Tanım

Hartmann sayısı M manyetohidrodinamik için önemli bir boyutsuz sayıdır. Viskoz kuvvetle elektro manyetik kuvvetin oranı olarak tanımlanır ve

$$M = BL \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

formülü ile ifade edilir. Burada B magnetik alan, L karakteristik uzunluk ölçeği, μ akışkanın viskozitesi, σ akışkanın elektriksel iletkenliğidir. M değerlerinin küçük olduğu durumlarda hız manyetik alandan etkilenmiyor gibi ilerlemektedir [4].

2.1.7. Tanım

Prandtl sayısı Pr , boyutsuz bir sayı olup momentum yayılımının(viskozite) termal yayılıma oranı olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

Burada, k akışkanın ısı iletkenliği, μ dinamik viskozite ve C_p sabit basınçta sıvının özgül ısı kapasitesidir ve bu sayı yalnızca akışkanın türüne ve haline bağlıdır. Akışkanın fiziksel

özelliklerini karakterize eder. Hidrodinamik ve termal sınır tabakaları arasındaki benzerlik derecesini ifade eder [4].

2.1.8. Tanım

Reynolds sayısı Re , sıvı atalet kuvvetinin moleküler sürtünmeye(viskoziteye) olan oranıdır. Viskoz akışkan akışın hidrodinamik koşullarını karakterize eder. Akış hareketlerini (laminer, türbülant ve geçiş akış) belirler. Re sayısı düşük değerli ise akış laminer akış olarak karakterize edilirken yüksek değerli ise türbülans meydana gelir. Ayrıca Re sayısı viskozite etkilerinin akış alanına nasıl etki ettiğini tanımlamamızda kullanılır. Eğer Re sayısı küçükse viskozitenin etkileri bütün akışkan alanında önemliken büyük olması durumunda katı cismin sınır bölgesinde ince tabaka üzerinde etkilidir. Bu sayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

Burada, L karakteristik uzunluk, U akışkanın hızı, ρ akışkanın yoğunluğu, μ akışkanın dinamik viskozite, ν kinematik viskozitedir [4].

2.1.9. Tanım

Akışkanlar mekaniğinde kullanılan bir başka boyutsuz sayı da Eckert sayısıdır. Akışın kinetik enerjisi ve sınır tabaka entalpi farkı arasındaki ilişkisini ifade eder ve ısı yayılımını karakterize etmek için kullanılır ve

$$E_c = \frac{u^2}{C_p \Delta T}$$

formülü ile tanımlanır. Burada u yerel akım hızı, C_p sabit basınçlı lokal spesifik ısı, ΔT sıcaklıklar arasındaki farkı temsil etmektedir [4].

2.1.10. Tanım

Bir boyutsuzluk sayısı olan magnetik Reynolds sayısı konveksiyon teriminin difüzyon terimine göre önemini ifade etmek için kullanılır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$Rm = \frac{UL}{\eta} = \sigma\mu UL$$

şeklinde tanımlıdır. Bu ifadeye σ akışkanın elektriksel iletkenliğini, μ boş uzayın magnetik geçirgenliğini, L akışkan akışının karakteristik uzunluk ölçeği ve U da akışkanın hızını ifade etmektedir [2].

2.1.11. Teorem

D , S kapalı yüzeyinin çevrelediği üç boyutlu uzay bölgesi ve \vec{n} de yüzeye ait dışa doğru yönlendirilmiş birim normal vektör olsun. Eğer \vec{F} , D bölgesinde sürekli kısmi türevleri olan bir vektör alanı ise

$$\int_{\text{hacim}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy dz = \oint_{\text{yüzey}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{s} \quad (2.1)$$

dir [5].

2.1.12. Teorem

C , basit kapalı, parçalı düzgün, pozitif yönlü bir eğri ve bu eğrinin çevrelediği yüzey S olsun. Yüzey üzerinde pozitif tarafa yönlendirilmiş birim normal vektör \vec{n} ve \vec{F} nin bileşenleri $S \cup C$ de sürekli ve diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_{\text{yüzey}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s} = \oint_{\text{sınır eğrisi}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.2)$$

dir [5].

2.2. Maxwell Denklemi

Elektrik ve manyetizmanın bütün hikayesi q yükü ile başlar. Bu yüke kaynak yük denir. Evrene Q test yükü olarak adlandırılan bir başka yük koyarsak, buradaki temel soru q nun Q ya ne tür bir güç uyguladığıdır. Q üzerindeki kuvvet yükler arasındaki ayırma mesafesi, hız ve ivmeye bağlıdır [7].

2.2.1. Gauss yasası

İki durağan elektrik yükü, yüklerin büyüklüklerinin çarpımı ile doğru ve yükler arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı bir kuvvetle birbirini iter veya çeker. Bu elektrikli yükler arasındaki etkileşim Coulomb yasası ile tanımlanır. Burada Q ve q yük, r yükler arasındaki uzaklık ve ϵ_0 bağıl geçirgenlik sabiti olarak tanımlanmıştır. Bu durumda; kuvvet aşağıdaki gibi formüle edilmiştir.

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \quad (2.3)$$

Elektrik alanı E , kuvvet F ve bir pozitif test yükü Q olmak üzere uzayda elektrik alanı, birim yük başına uygulanan elektrik kuvvetidir. Yani

$$F = EQ \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Q pozitif ise elektrik alanı ile kuvvet aynı yönde negatif ise elektrik alanı ile kuvvet zıt yöndedir. Eş. 2.3 ve Eş. 2.4 kullanılırsa,

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r} \quad (2.5)$$

olarak bulunur. Noktasal yüklerden oluşan elektrik alanını hesaplamak için Eş. 2.5 her bir yük için tek tek hesaplandıktan sonra vektörel olarak birbirine eklenir. Yani herhangi bir noktada bir grup kaynak yükünden kaynaklanan toplam elektrik alanı, tüm yüklerin elektrik alanlarının vektör toplamına eşittir [8]. Yükü çevreleyen herhangi bir yüzeydeki akı ise $\frac{q}{\epsilon_0}$ olarak tanımlanmıştır. Elektrik alan vektör toplamı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \quad (2.6)$$

Bu sonucu toplanabilirlik ilkesi kullanılarak n kaynak yüke genişletebiliriz. Bu durumda yüzeylerden geçen yüklerin tümünün akısı aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\int_{yüzey} E dS = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{yüzey} E_i dA \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{q_i}{\epsilon_0} \right) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

Burada Q_{enc} kapalı yüzeydeki toplam yükü ifade eder [7]. Bu ifadeye Eş. 2.1 deki diverjans teoremi uygulanırsa

$$\int_{yüzey} E dS = \int_{hacim} (\nabla E) dV = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

olur. Burada Q_{enc} yerine p yük yoğunluğunun integralini yazalım. Yani

$$Q_{enc} = \int_{hacim} p dV \quad (2.9)$$

olduğundan Eş. 2.8 ifadesi

$$\int_{hacim} (\nabla E) dV = \frac{\int_{hacim} \rho dV}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

olur. Buradan

$$(\nabla E) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

olarak bulunur. Gauss yasası denir.

2.2.2. Faraday yasası

Zamanla değişen manyetik alan kapalı bir devrede elektromotor kuvvet üretir. Elektromotor kuvvet kısaca e.m.k olarak gösterilmiştir. Sabit bir alan içinde iletken bir çerçeveyi hareket ettirdiğimizde oluşan elektromotor kuvvet için akı şöyle tanımlanmıştır [6].

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.12)$$

Yani e.m.k, manyetik akının zamanla değişimi ile doğru orantılıdır. Faraday, döngü hareket ettiğinde zamanla değişen manyetik alanın e.m.k. e neden olduğunu bulmuştur. Ayrıca değişen manyetik alanların elektrik alanı indüklediğini varsaymıştır. Manyetik alan da elektrik alanı gibi alan çizgilerinin sayısı ile orantılıdır. Yani Faraday'ın bulduğu manyetik akı $\phi_B = \int_S B dA$ dır [7]. Burada B manyetik alanı ifade etmektedir. Buradan,

$$\int E dl = \varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int B da \quad (2.13)$$

olarak bulunur. Eş. 2.13 deki ifadeye Eş. 2.2 deki Stokes teoremi uygulanırsa

$$\int (\nabla \times E) da = -\frac{d}{dt} \int B da \quad (2.14)$$

eşitliği elde edilir. Eş. 2.13 ve Eş. 2.14 deki eşitlikler kullanılırsa

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B \quad (2.15)$$

olur. Statik alanda manyetik alan B sabit olduğundan dolayı

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.16)$$

olur.

2.2.3. Amper yasası

Jean-Baptiste-Biot ve Felix Savart'ın yaptığı deneyler sonucunda elde edilmiştir. Sonuç olarak manyetik alan, I akımı ve akımı taşıyan telin uzunluğu dl ile doğru orantılı, r mesafesinin karesi ile ters orantılı olduğunu bulmuşlardır. Matematiksel olarak kararlı bir akım geçen telin toplam manyetik alanı;

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \times \vec{r}}{r^2} \quad (2.17)$$

denklemini ifade edilir. Bu denkleme Biot-Savart yasası denir. Bu denklemde μ_0 boş uzayın manyetik geçirgenliğini göstermektedir. Sonsuz doğrusal tel için manyetik alan:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2.18)$$

olarak bulunmuştur [6]. B nin r yarıçaplı çember üzerinden eğrisel integralini hesaplırsak

$$\int B dl = \mu_0 I_{enc} \quad (2.19)$$

dir. Burada I_{enc} kapalı eğri içinde kalan net akımdır. Eğri dışında kalan akımlar katkı sağlamaz. Yük akışı hacimsel bir J akım yoğunluğu ile verilmişse, eğri içinde kalan akım miktarı

$$I_{enc} = \int_{\underline{s}} J \cdot dA \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Eş. 2.19 da yerine yazılır ve Eş. 2.2 deki Stokes teoremi uygulanırsa

$$\int B dl = \int_{\underline{s}} (\nabla \times B) dA = \mu_0 \int_{\underline{s}} J dA \quad (2.21)$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (2.22)$$

olur. Eş. 2.22 ifadesine diverjans teoremi uygulanırsa,

$$\nabla \cdot (\nabla \times B) = \nabla \cdot (\mu_0 J) = \mu_0 (\nabla \cdot J) \quad (2.23)$$

bulunur. Burada

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot E) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E \right) \quad (2.24)$$

olup, Eş. 2.23 de yerine yazılırsa

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E \quad (2.25)$$

elde edilir.

2.2.4. B'nin diverjansı

Herhangi bir F vektör alanı için rotasyonelin diverjansı sıfıra eşittir. Bu durumda

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 \quad (2.26)$$

olur. $(\nabla \times E)$ ifadesini dıvejans operatörüne uygularsak

$$\nabla \cdot (\nabla \times E) = 0 \quad (2.27)$$

olduğunu görürüz ve

$$\nabla \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot B) = 0 \quad (2.28)$$

elde ederiz. Eş. 2.28'deki eşitlikten

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.29)$$

ifadesini buluruz [7].

2.2.5. Ohm yasası

Elektrik alanı ve manyetik alandan oluşan bir bölgede iki tür kuvvet oluşmaktadır. Bu kuvvetler elektrik kuvveti ve manyetik kuvvettir. İlk olarak manyetik alanda oluşan kuvvet açıklanmıştır. Bu kuvvetin yük Q ile orantılı, manyetik alan B ve yük hızı v ile dik açılı olduğu gösterilmiştir. Matematiksel olarak ifade edilirse kuvvet

$$F_{mag} = Q(v \times B) \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha önce elektrik alanında oluşan elektriksel kuvvet $F_{elek} = QE$ şeklinde verilmişti. Bu kuvvetler yardımıyla bir Q yükü üzerindeki toplam elektromanyetik kuvveti veren Lorentz kuvvetinin ifadesini buluruz. Lorentz kuvveti matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$F = Q(E + (v \times B)) \quad (2.31)$$

Akım yoğunluğu J birim yüke etkiyen kuvvetle orantılıdır. Bu durumda

$$J = \frac{\sigma F}{Q} = \sigma(E + v \times B) \quad (2.32)$$

olur. İletken içerisinde yüklerin hızı küçük olduğunda

$$J = \sigma E \quad (2.33)$$

dir [5].

2.3. Süreklilik Denklemi

Süreklilik denklemi hem türev hem de integral yaklaşımı ile elde edilebilir. Burada süreklilik denklemi oluştururken türev yaklaşımını kullanılmıştır. Süreklilik denklemini ispatlamak için kütle korunumu yasası baz alınmıştır. Bu yasaya göre kütle ne yok edilebilir ne de yoktan var edilebilir fakat şekil değiştirebilir. İlk olarak sabit konumlu ve sonlu bir kontrol hacmi (açık sistem) tanımlanmıştır. Bu kontrol hacminin yoğunluğu ρ ve kartezyen koordinat sisteminde boyutları dx, dy, dz olarak kabul edilmiştir. Bu durumda hacim $dV = dxdydz$ olur. Kontrol hacminin içindeki kütle:

$$\rho dV = \rho dxdydz \quad (2.34)$$

olarak bulunur. x, y ve z yönlerindeki hız bileşenleri sırasıyla u, v ve w olarak tanımlansın. Kontrol hacminin yüzeylerinin her birinden kütle giriş ve çıkış oranlarını hesaplamak için Taylor serisi açılımı kullanılmıştır. Bir yüzeyle kontrol hacminin merkezi arasında $\frac{dx}{2}$ kadar mesafe olduğu kabul edilirse x in sağ yönündeki yüzeyin ρu değeri

$$(\rho u)_{\text{sağ yüzün merkezi}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \dots \quad (2.35)$$

olur [3]. Bu yüzeylerdeki akışlar Taylor serisinin ilk iki terimi kullanılarak gösterilirse kontrol hacminin yüzeylerinden giren ve çıkan kütle miktarları:

$$(\rho u)_{\text{sağ yüzün merkezi}} \cong \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$(\rho w)_{\text{ön yüzün merkezi}} \cong \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \quad (2.36)$$

$$(\rho w)_{\text{arka yüzün merkezi}} \cong \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

$$(\rho v)_{\text{üst yüzün merkezi}} \cong \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$(\rho v)_{\text{alt yüzün merkezi}} \cong \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

olarak yazılabilir. Yüzeylerden birinin giren veya çıkan kütleli debisi: yoğunluk, yüzey alanı ve yüzün merkezindeki hızın normal bileşeninin çarpımına eşittir [3].

Kontrol hacmine giren net kütleli debi:

$$\sum_{\text{giren}} m \cong \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \quad (2.37)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde çıkan net kütleli debi,

$$\sum_{\text{çıkan}} m \cong \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \quad (2.38)$$

olarak bulunur. Kontrol hacminin içinde bulunan kütle değişim oranı, kontrol hacminin sınırlarından giren ve çıkan kütle oranına eşittir. Yani

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \sum_{\text{giren}} m - \sum_{\text{çıkan}} m \quad (2.39)$$

şeklindedir. Bu eşitlikte Eş. 2.37 ve Eş. 2.38 yerine yazılırsa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} dx dy dz \quad (2.40)$$

elde edilir. $dx dy dz$ ifadesi ortak olduğundan sadeleştirilirse kartezyen koordinatlarda süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} = 0 \quad (2.41)$$

olarak bulunur.

2.4. Hareket Denklemi

Hareket denklemini oluşturmak için Newton'un ikinci yasası kullanılmıştır. Bu yasaya göre kuvvet, ivme ve kütle çarpımına eşittir. Yani matematiksel olarak

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.42)$$

olarak tanımlıdır. Bu denklemde ivme hızın zamana göre türevine eşittir.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.43)$$

Eş. 2.43 deki ifadeyi Eş. 2.42 de yerine yazarsak

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.44)$$

elde edilir. Hareket denklemini elde etmek için de bir kontrol hacmi kullanılmıştır. Kontrol hacminin merkezindeki yoğunluk ρ , hız bileşenleri de u, v ve w olarak tanımlanmıştır. Ayrıca σ_{ij} gerilme tensörü (basınç kuvveti + viskoz kuvvet) de kontrol hacminin merkezinde kabul edilmiştir. Toplam kuvvet, hacmin içindeki sıvıya etki eden kütle kuvveti ile hacmin yüzeyine etki eden yüzey kuvveti olarak ikiye ayrılır. Bu toplam kuvvet; yerçekimi, elektromanyetik, merkezkaç ve dengeleyici kuvveti içeren kütle kuvveti ile basınç, viskoz ve reaksiyon kuvvetlerini içeren yüzey kuvveti toplamına eşittir. Bu kuvvetlerin toplamı aşağıda sadece tek bir yüzey için gösterilmiştir. x –bileşeni göz önüne alındığında bu kuvvet aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sum F_x = \sum F_{x,kütle} + \sum F_{x,yüzey} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV + \sum_{çıkan} \beta m u - \sum_{giren} \beta m u \quad (2.45)$$

Eş. 2.45 denkleminin sağ tarafındaki ilk terim,

$$\int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV \cong \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dx dy dz \quad (2.46)$$

denktir. Kontrol yüzeyinden çıkan ve giren momentum akışı hesaplanırken Taylor açılımı kullanılmıştır. Birinci mertebeden Taylor açılımı kullanılırsa kontrol yüzeyinden çıkan momentum akışı

$$\sum_{\text{çıkkan}} \beta mu - \sum_{\text{giren}} \beta mu \cong \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho wu) \right) dx dy dz \quad (2.47)$$

olarak bulunur. Burada β katsayısı 1 olarak alınmıştır[3]. x – yönüne etki eden kuvvetlerinin toplamı düşünölsün. Bazı analizlerde elektrik ve manyetik kuvvetler gibi kütle kuvvetleri de hesaplamaya katılırken burada sadece en yaygın olarak kullanılan ve sıvı parçacıktaki her moleküle etki eden yer çekimi kuvvetini göz önüne alınacaktır. Üç boyutlu yer çekimi vektörü,

$$\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k} \quad (2.48)$$

olarak yazılır [3] ve g yerçekimi kuvveti ve ρ ortalama yoğunluk olduğunda x – yönündeki kütle kuvveti,

$$\sum F_{x,\text{kütle}} = \sum F_{x,\text{yerçekimi}} \cong \rho g_x dx dy dz \quad (2.49)$$

olarak bulunur. İkinci dereceden büyük değeri ihmal edilerek Taylor serisi açılımı yardımıyla bulunan x – bileşeni yönündeki net yüzey kuvveti,

$$\sum F_{x,\text{yüzey}} \cong \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} \right) dx dy dz \quad (2.50)$$

olarak bulunur [3]. Eş. 2.46, Eş. 2.47, Eş. 2.49 ve Eş. 2.50 de bulunan ortak terim $dx dy dz$ ler sadeleştirilebilir. Bu eşitlikler Eş. 2.45 ifadesinde yerine yazılır ve yeniden düzenlenirse x - yönündeki momentum denklemi bulunmuş olur.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho wu) = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} \quad (2.51)$$

Yukarıdaki yaptığımız işlemler yardımıyla benzer şekilde y ve x - yönlerindeki momentum denklemleri elde edilir. x, y ve z - yönlerinde bulduğumuz denklemler tek bir vektör denklemi şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir [3].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (2.52)$$

2.5. Enerji Denklemi

Enerji denklemi termodinamiğin birinci yasasından türetilmiştir. Termodinamiğin birinci yasası gereği sistemdeki toplam enerji değişimi, ortama eklenen ısı değişimi ile sistemde yapılan işin değişiminin toplamına eşittir. Bu ifadeye göre enerji ne yaratılabilir ne de yok edilebilir sadece şekil değiştirir. Gerekli işlemler kullanılarak enerji denklemi

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \varphi + \frac{J^2}{\sigma} \quad (2.53)$$

şeklinde elde edilir. Burada φ aşağıdaki gibi tanımlıdır. μ sıvı viskozitesidir.

$$\varphi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (2.54)$$

2.6. Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için kullanılan yöntemlerinden biridir. 1986 yılında ilk kez Zhou tarafından kullanılmıştır. R kümesinde $x = x_0$ herhangi bir nokta olsun. $f(x)$ fonksiyonu da R kümesi üzerinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun x_0 noktası civarında seri açılımı yazılabilir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü:

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.55)$$

şeklinde ifade edilebilir[9]. Bu fonksiyonun ters dönüşümü ise

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.56)$$

dır. Yukarıdaki tanımlara bakıldığında, diferansiyel dönüşüm yönteminin Taylor seri açılımını esas aldığı, sadece katsayıların hesaplanmasında cebirsel ardışık hesaplamaların

sağladığı kolayca görülebilir. Bu yöntem kısaca DTM ile gösterilmiştir. Uygulamalarda $f(x)$ fonksiyonu sonlu seri toplamı olarak ifade edilmektedir. Bu durumda Eş. 2.56,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.57)$$

olur. Burada

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.58)$$

Kalan terimi ihmal edilmiştir. Küçük harfler fonksiyonun kendisini büyük harfler de dönüşümü tanımlamaktadır. Çizelge 1. de sıklıkla kullanılan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların dönüşüm altındaki görüntüsü verilmiştir.

Çizelge 2.1. Bazı fonksiyonların DTM tablosu

Orijinal Fonksiyon	DTM
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F(k) = g(k) \pm H(k)$
$f(x) = ag(x)$	$F(k) = aG(k), a$ sabit bir sayı
$f(x) = g(x)h(x)$	$F(k) = \sum_{l=0}^k G(k-l)H(l)$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$
$x(t) = t^m$	$X(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$

2.7. En Küçük Kareler Metodu

Diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan nümerik yöntemlerden biridir. D diferansiyel operatörü bir U fonksiyonuna uygulandığında yeni fonksiyon P fonksiyonuna eşit olsun. Yani

$$D(U(x)) = P(x) \quad (2.59)$$

dir. Lineer bağımsız bir kümeden seçilen temel fonksiyonların lineer kombinasyonu da y fonksiyonu ile gösterilsin ve u fonksiyonu U nun yaklaşık çözümüne eşit olsun [10]. Yani

$$U \cong u = \sum_{i=1}^n c_i T_i \quad (2.60)$$

olsun. Eş. 2.59 da U fonksiyonu yerine u yaklaşık seri toplamı yazılırsa bu ifade P fonksiyonuna eşit değildir. Bu durumda hatayı;

$$R(x) = D(u(x)) - P(x) \neq 0 \quad (2.61)$$

şeklinde gösterebiliriz. Eğer hata fonksiyonu çözüme eşit olursa rezidü 0 a eşit olur. En küçük kareler metodunda amaç hatayı küçültmeye zorlamaktır. Yani,

$$\int_x R(x) W_i(x) dx = 0, \quad i=0...n \quad (2.62)$$

olur. Burada W_i ağırlık fonksiyonlarıdır ve u fonksiyonundaki bilinmeyen c_i sayıları kadardır. Yukarıdaki integralde ağırlık fonksiyonuna göre metod isimleri değişmektedir. En küçük kareler metodunda amaç hata teriminin karesini en küçük yapacak değerlerini bulmaktır. Bu durumda Eş. 2.62 aşağıdaki gibi

$$S = \int_x R(x)^2 dx = 0 \quad (2.63)$$

elde edilmiştir. Bu integralin minimum değerini bulmak için bütün bilinmeyen parametrelere göre S nin türevi 0 a eşitlenmektedir.

$$\frac{\partial S}{\partial c_i} = 2 \int_x R(x) \frac{\partial R}{\partial c_i} dx = 0 \quad (2.64)$$

dir. Bu durumda

$$W_i(x) = 2 \frac{\partial R}{\partial c_i} \quad (2.65)$$

olarak bulunur. 2 sayısını ihmal edersek En Küçük Kareler metodunun ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$W_i(x) = \frac{\partial R}{\partial c_i} \quad (2.66)$$

Böylece Eş. 2.66 dan c_i ler çözülerek seri çözümündeki hatanın miktarında küçülme sağlanmaktadır.





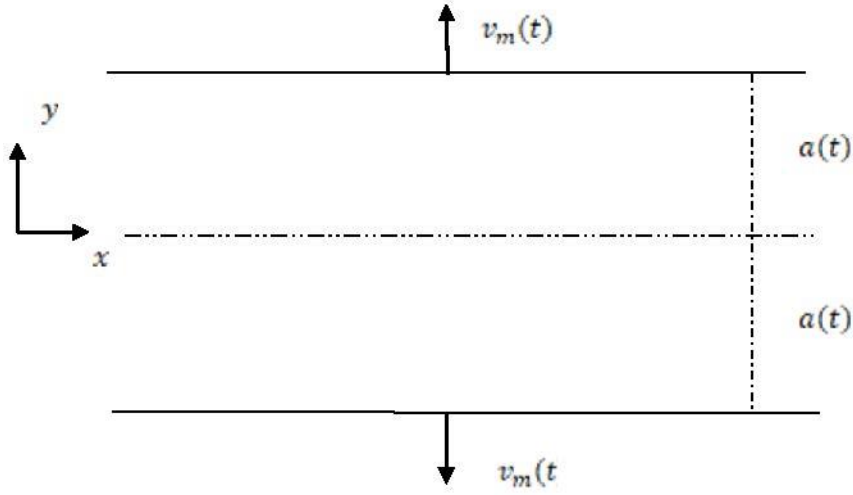
3. PARALEL PLAKALAR ARASINDA BİR VİSKOZ MHD AKIŞKANIN KARARSIZ SIKIŞTIRMA AKIŞI

Bir elektromanyetik alanın etkisi altındaki bir akışkanın akışı, diğer bir deyişle, hareket eden paralel plakalar arasındaki bir MHD sıvısı sıkıştırma akışına neden olur. Böyle bir akış problemi, sıvı-metal yağlama içeren rulman uygulamaları için uygundur. Yağlayıcı olarak bir MHD akışkanının kullanılması ilgi çekicidir. Çünkü aşırı çalışma koşullarında yağ viskozitesinin beklenmedik bir şekilde değişmesini önler [11].

S. Bhattacharyya ve diğerleri iki paralel disk arasındaki iletken bir viskoz akışkan filminin hareketi üzerine çalışma yapmıştır. Burada alttaki diskin keyfi zamana bağlı açışal hızla döndüğünü varsaymış ve düzgün aksenal bir manyetik alanın etkisini de dahil etmiştir [12]. D. C. Kuzma ve diğerleri manyetohidrodinamik sıkıştırma filmlerini deneysel ve teorik olarak incelemiştir. Sıkıştırma filmlerine uygulanan manyetohidrodinamik yağlama teorisi sıvı-atalet etkilerini ve kaldırma kuvvetlerini kapsayacak şekilde genişletilmiştir [13]. E. A. Hamza disklere dik olarak uygulanan manyetik alanın varlığında iki paralel disk arasında sıkışan elektriksel olarak iletken bir akışkan hareketini incelemiştir. Bu çalışmada elektromanyetik kuvvetlerin yük taşıma kapasitesini önemli ölçüde arttırdığı gösterilmiştir [14]. W. F. Hughes ve diğerleri iki paralel disk arasında manyetik alan varlığında elektriksel olarak iletken, sıkıştırılmaz, viskoz akışkanın hareketini incelemiştir. Bu disklerden birinin sabit açışal hızla hareket ettiğini varsaymıştır [15]. D. C. Kuzma ve diğerleri dıştan basınçlı bir itme yatağında manyetohidrodinamik yağlama akışını hem teorik hem de deneysel olarak araştırmıştır [16].

3.1. Problemin Tanımı

İki sonsuz paralel plakalar arasındaki bir sıkıştırılmayan iki boyutlu viskoz akışkanın doğrusal kararsız hidromagnetik sıkıştırma akışını düşünelim. Herhangi bir t anında plakalar arasındaki mesafe $2a(t)$ olsun. Kanalın merkez eksenini x –ekseni, normalini de y –ekseni olarak alalım. $B = (0, B_0, 0)$ magnetik alanını y eksenini boyunca uygulayalım. İndüklenmiş magnetik alanı yok sayalım (Bu alanın yok sayılmasının nedeni Re değerinin küçük olmasıdır). Magnetik alanın sabit gücü H_0 olsun ve akışkanın akışına dik yönde uygulansın. Magnetik geçirgenlik μ_0 olduğunda $B_0 = \mu_0 H_0$ olarak tanımlıdır. Burada plakalar, kanalın merkez eksenine simetrik olarak hareket ettiği varsayılmaktadır.



Şekil 3.1. Doğrusal akım

Yukarıda verilen kabulleri kullanırsak kararsız akışı tanımlayan süreklilik ve hareket denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - J \times B \quad (3.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

şekline dönüşür [11]. Burada x ve y eksenleri boyunca hız bileşenleri sırasıyla u ve v dir. ϑ kinematik viskoziteyi ve ρ sıvının yoğunluğunu, σ akışkanın elektrik iletkenliğini göstermektedir. Elektrik alanı ihmal edildiğinden dolayı $J = \sigma(E + u \times B)$ eşitliği $J = \sigma(u \times B)$ haline dönüşür.

$$u \times B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{bmatrix} = uB_0 k \quad (3.4)$$

$$J \times B = \sigma(u \times B) \times B = \sigma \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & uB_0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma u B_0^2 i \quad (3.5)$$

bulunur. ω girdap fonksiyonu ve genelleştirilmiş basınç h aşağıdaki gibi tanımlıdır [11].

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.6)$$

$$h = \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + p \quad (3.7)$$

Eş. 3.6 ve Eş. 3.7 fonksiyonlarının x ve y ye göre türevleri alınırsa

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir. Şimdi Eş. 3.2 denkleminin sol tarafına $\rho \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ ifadesi ve Eş. 3.3 denkleminin sol tarafına da $\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ifadesi eklenip çıkarılır, Eş. 3.5 deki bulduğumuz ifade Eş. 3.2 denkleminde yazılır ve bu denklemlerde bulunan $\frac{\partial p}{\partial x}$ ve $\frac{\partial p}{\partial y}$ ifadeleri denklemlerin sol taraflarına alınırsa

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\rho \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma B_0^2 u \quad (3.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

elde edilir. Eş. 3.1 deki süreklilik denklemi kullanılarak

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.15)$$

bulunur. Eş. 3.6-Eş. 3.11 ifadeleri Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 denklemlerinde kullanılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v\omega \right) = -\vartheta \frac{\partial \omega}{\partial y} - \sigma B_0^2 u \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\omega \right) = \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (3.18)$$

olarak bulunur. Eş. 3.17 in y ye ve Eş. 3.18 in x e göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \omega - v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = -\vartheta \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \omega + u \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \vartheta \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

bulunur. Eş. 3.19 ve Eş. 3.20 eşitliklerinden

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \omega \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\vartheta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - \sigma B_0^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.21)$$

elde edilir. Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 ifadeleri

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \vartheta \nabla^2 \omega - \sigma B_0^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.22)$$

olarak bulunur. u ve v hız bileşenlerinin sınır koşulları

$$y = a, \quad u(x, y, z, t) = 0, \quad v(x, y, z, t) = v_m(t) \quad (3.23)$$

$$y = 0, \quad v(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = 0 \quad (3.24)$$

şeklindedir. Burada $v_m(t) = \frac{da}{dt}$ plakaların hızlarıdır. Eş. 3.23 deki sınır koşulu üst plakada sıkışmama koşulu iken Eş. 3.24 deki koşul $y = 0$ 'da akışın simetrisinden elde edilmiştir [11].

Herhangi bir zamanda paralel iki plaka arasındaki mesafe $2a(t)$ olduğunda eğer boyutsuzluk değişkeni $\eta = y/a(t)$ ile gösterilirse Eş. 3.16 ve Eş. 3.22 denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a(t)\partial \eta} = 0 \quad (3.25)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{a(t)\partial \eta} \right) = \vartheta \nabla^2 \omega - \sigma B_0^2 \frac{\partial u}{a(t)\partial \eta} \quad (3.26)$$

olur. Eş. 3.23 ve Eş. 3.24 sınır koşulları da

$$\eta = 1, \quad u(x, \eta, t) = 0, \quad v(x, \eta, t) = v_m(t) \quad (3.27)$$

$$\eta = 0, \quad v(x, \eta, t) = 0, \quad \frac{\partial u(x, \eta, t)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.28)$$

olur. Hız bileşenlerini

$$u = \frac{(C-x)}{a(t)} v_m(t) f'(\eta), \quad v = v_m(t) f(\eta), \quad \omega = -\frac{(C-x)}{a(t)} v_m(t) f''(\eta) \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlansın. Burada C kanala giriş şartları ile ilgili bir sabittir [11]. Eş. 2.25 ve Eş. 2.26 denklemlerinde bu hız bileşenlerini kullanırsak süreklilik denklemi sağlanır. Eş. 2.26 denklemi

$$\frac{av_m(t)}{\vartheta} (ff'''' - f'f'' - \eta f'''' - 2f'') + \frac{a^2}{\vartheta v_m(t)} \frac{dv_m}{dt} f'' = f^{iv} - M^2 f'' \quad (3.30)$$

haline dönüşür. Burada $M^2 = \frac{\sigma B_0^2}{\vartheta}$ ve fonksiyonlar η ya göre türevleri göstermektedir. Eş. 3.27 ve Eş. 3.28 sınır koşulları da düzenlenirse

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0 \quad (3.31)$$

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0 \quad (3.32)$$

elde edilir. S ve Q fonksiyonları

$$S = \frac{av_m(t)}{\vartheta}, \quad SQ = \frac{a^2}{\vartheta v_m(t)} \frac{dv_m}{dt} \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların her biri t ye bağlıdır. Fakat benzer çözümler elde etmek için bu parametreler bir sabit olarak alınmıştır. Eş. 3.33 ün sağ tarafındaki eşitliğin integrali alınır, $t = 0$ da plakalar arasındaki fark $2a_0$ olduğundan

$$a(t) = (2\vartheta St + a_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

olur. $S > 0$ olduğunda $\eta = 0$ (veya $y = 0$) a göre plakalar simetrik olarak hareket eder. Aksine $S < 0$ olduğunda plakalar birbirine yaklaşır ve sıkıştırma akışı, $a(t) > 0$ olduğu sürece benzer hız profilleri ile varolur. Eş. 3.33 ve Eş. 3.34 den, $Q = -1$ olarak bulunur. Bu durumda Eş. 3.30 denklemini

$$S(ff'''' - f'f''' - \eta f'''' - 3f'') = f^{iv} - M^2 f'' \quad (3.35)$$

ifadesine dönüşür [11].

3.2. Problemin Çözümü

Eş. 3.35 denkleminde diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)F[k+4] - S(\sum_{s=0}^k (k-s+1)(k-s+2)(k-s+3)F[s]F[k-s+3] \\ & - \sum_{s=0}^k (s+1)(k-s+1)(k-s+2)F[s+1]F[k-s+2] - \sum_{s=0}^k \delta(s-1)(k-s+1)(k-s+2)(k-s+3)F[k-s+3] \\ & - 3(k+1)(k+2)F[k+2] - M^2(k+1)(k+2)F[k+2] = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir. Eş. 3.32 deki başlangıç koşullarına dönüşüm metodu uygulanırsa

$$F[0] = 0, \quad F[1] = a_1, \quad F[2] = 0, \quad F[3] = a_2 \quad (3.37)$$

olur. Burada, a_1, a_2 değerleri başlangıçta belli olmayıp serinin ardışık katsayıları bu değerler cinsinden Maple15 programı yardımı ile elde edilir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$$F[4] = 0 ,$$

$$F[5] = \frac{1}{20} M^2 a_2 - \frac{1}{5} S a_2 ,$$

$$F[6] = 0 ,$$

$$F[7] = \frac{1}{840} M^4 a_2 + \frac{1}{420} M^2 S a_1 a_2 - \frac{1}{84} M^2 S a_2 - \frac{1}{105} S^2 a_1 a_2 + \frac{1}{35} S^2 a_1 a_2 - \frac{1}{70} S a_2^2 ,$$

$$F[8] = 0 ,$$

$$F[9] = -\frac{1}{3360} S M^4 a_2 - \frac{1}{945} M^2 S^2 a_1 a_2 + \frac{13}{7560} M^2 S^2 a_2 + \frac{1}{378} S^3 a_1 a_2 - \frac{1}{315} S^3 a_2 + \frac{1}{315} S^2 a_2^2 + \frac{1}{10080} S a_1 M^4 a_2 + \frac{1}{7560} M^2 S^2 a_1^2 a_2 - \frac{1}{1890} S^3 a_1^2 a_2 - \frac{1}{1260} a_1 S^2 a_2^2 - \frac{1}{1680} S M^2 a_2^2 + \frac{1}{60480} M^6 a_2 ,$$

⋮

Bu katsayıları Eş. 2.57 deki seri toplamında yerine yazarsak

$$\begin{aligned} f(\eta) = & a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \left(\frac{1}{20} M^2 a_2 - \frac{1}{5} S a_2 \right) \eta^5 + \left(\frac{1}{840} M^4 a_2 + \frac{1}{420} M^2 S a_1 a_2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{84} M^2 S a_2 - \frac{1}{105} S^2 a_1 a_2 + \frac{1}{35} S^2 a_2 - \frac{1}{70} S a_2^2 \right) \eta^7 + \left(-\frac{1}{3360} S M^4 a_2 - \frac{1}{945} M^2 S^2 a_1 a_2 + \right. \\ & \left. \frac{13}{7560} M^2 S^2 a_2 + \frac{1}{378} S^3 a_1 a_2 - \frac{1}{315} S^3 a_2 + \frac{1}{315} S^2 a_2^2 + \frac{1}{10080} S a_1 M^4 a_2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{7560} M^2 S^2 a_1^2 a_2 - \frac{1}{1890} S^3 a_1^2 a_2 - \frac{1}{1260} a_1 S^2 a_2^2 - \frac{1}{1680} S M^2 a_2^2 + \frac{1}{60480} M^6 a_2 \right) \eta^9 + \\ & \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

olur. Eş. 3.38 deki $f(\eta)$ fonksiyonuna en küçük kareler metodu kullanılarak 2 terim daha eklenir ve bu terimlerin katsayılarına a_3 ve a_4 denirse,

$$\begin{aligned}
f(\eta) = & a_1\eta + a_2\eta^2 + \left(\frac{1}{20} M^2 a_2 - \frac{1}{5} S a_2\right)\eta^5 + \left(\frac{1}{840} M^4 a_2 + \frac{1}{420} M^2 S a_1 a_2 - \right. \\
& \left. \frac{1}{84} M^2 S a_2 - \frac{1}{105} S^2 a_1 a_2 + \frac{1}{35} S^2 a_2 - \frac{1}{70} S a_2^2\right)\eta^7 + \left(-\frac{1}{3360} S M^4 a_2 - \frac{1}{945} M^2 S^2 a_1 a_2 + \right. \\
& \left. \frac{13}{7560} M^2 S^2 a_2 + \frac{1}{378} S^3 a_1 a_2 - \frac{1}{315} S^3 a_2 + \frac{1}{315} S^2 a_2^2 + \frac{1}{10080} S a_1 M^4 a_2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{7560} M^2 S^2 a_1^2 a_2 - \frac{1}{1890} S^3 a_1^2 a_2 - \frac{1}{1260} a_1 S^2 a_2^2 - \frac{1}{1680} S M^2 a_2^2 + \frac{1}{60480} M^6 a_2\right) + \dots + \\
& a_3\eta^{15} + a_4\eta^{16}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

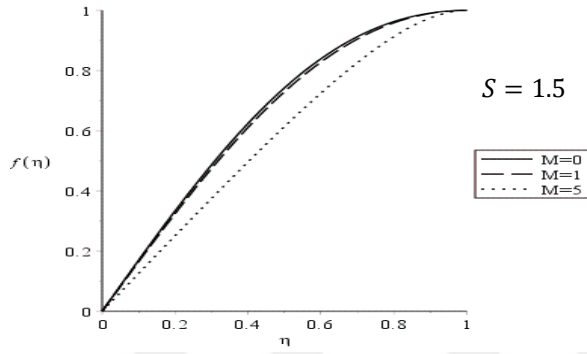
elde ederiz. Böylece toplamda dört bilinmeyen terim a_1, a_2, a_3, a_4 cinsinden seri toplamı elde edilmiş olur. Bu bilinmeyen parametreler sınır değerleri çözüme uygulandığında denklem sisteminin çözümünden elde edilmiş olur.

Diferansiyel dönüşüm metodu ve en küçük kareler metodu kullanılarak, iki levha arasındaki iki boyutlu kararsız viskoz MHD akışının akışı için yaklaşık analitik çözümler yukarıda bahsedildiği gibi elde edilmiştir. DTM'dan sonra en küçük kareler metodunu uygulamamızın nedeni uç noktalarda meydana gelen ıraksamayı ortadan kaldırmak ve sınır değerlerinin probleme dahil edilmesi içindir. Bu elde ettiğimiz analitik çözümlerin farklı parametre değerleri için nasıl değiştiği aşağıda gösterilmiştir.

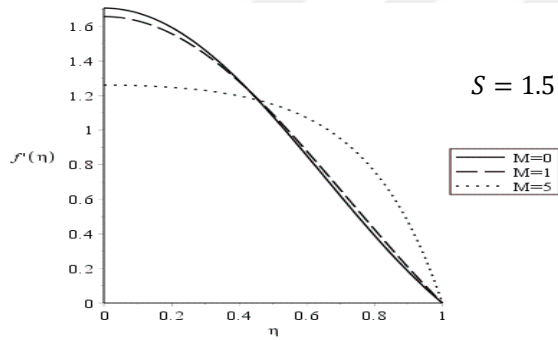
3.3. Problemin Sonuçları

Şekil 3.2. $\eta = 0$ dan $\eta = 1$ e kadar belirli bir zaman aralığında, M manyetik parametresinin çeşitli değerleri için normal hızın azaldığını göstermektedir. Bunun nedeni uygulanan manyetik alanın oluşturduğu Lorentz kuvvetinin akışkan hareketine karşı koymasındır. Dolayısıyla bu kuvvet akışın yavaşlamasına sebep olur. Yani akışkanın elektrik iletkenliğini arttırmak veya manyetik alanın büyüklüğünü arttırmak y yönündeki hızın tekdüze olarak azalmasına neden olur. Burada S sabit bir pozitif değerdir. Şekil 3.3 de belirli bir zamanda M manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boylamsal hızının $0 < \eta < 0.5$ e kadar azalırken $0.5 < \eta < 1$ e kadar arttığını göstermektedir. Yani plakaların simetrik olarak birbirinden uzaklaştığı durumda x -yönündeki başlangıç hızının M 'nin artan değerleri için önce azaldığı sonra arttığını gösterir. Burada S sabit bir pozitif değerdir. Şekil 3.4. belirli bir zamanda S nın farklı değerleri için normal hızın $\eta = 0$ dan $\eta = 1$ e kadar arttığını gösterir. Yani y yönünde S nın artan değerleri için bir artış olduğunu ifade eder. Burada M magnetik parametresi sabit bir pozitif değerdir. Şekil 3.5.

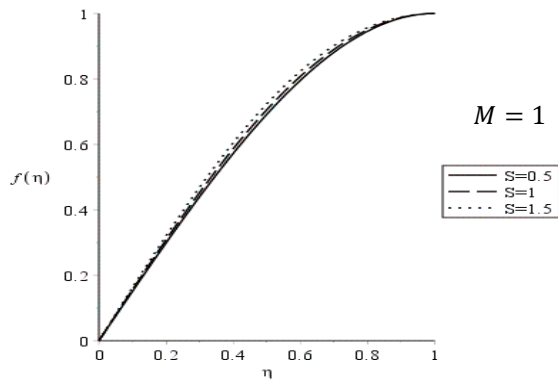
te belirli bir zamanda S in farklı değerleri için boylamsal hızın $0 < \eta < 0.4$ e kadar artarken $0.4 < \eta < 1$ e kadar azaldığını göstermektedir. Burada M magnetik parametresi sabit bir pozitif değerdir. S değerindeki artma, kinematik viskozitede bir azalışa, plakalar arasındaki mesafede artışa veya plakaların hareket hızında bir artışa bağlanabilir.



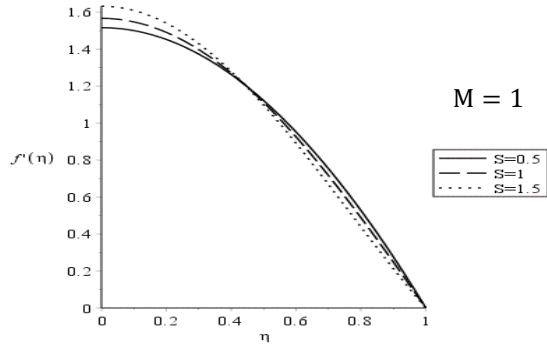
Şekil 3.2. S değeri sabitlendiğinde M magnetik parametresinin farklı değerleri için normal hız profili



Şekil 3.3. $S = 1.5$ sabit değeri alındığında M magnetik parametresinin farklı değerleri için boylamsal hız profili



Şekil 3.4. $M = 1$ olduğunda, S nin farklı değerleri için normal hız profili



Şekil 3.5. $M = 1$ sabit olduğunda S nin farklı değerleri için boylamsal hız profili



4. DARALAN LEVHA VE GÖZENEKLİ BİR ZEMİN ORTAMI İLE SINIRLANDIRILMIŞ BİR KANALDA MHD AKIŞI VE ISI TRANSFERİ

Gerilen/daralan yüzeylere bağlı ısı transferi ve viskoz akışkanın sınır tabakası çalışması ısı transferinde önemli bir konudur. Örneğin bir kalıptan polimer tabakalarının ekstrüzyonu, plastik filmlerin çizimi, ince duvarlı polyester ısı torbası, cam elyafı ve kağıt üretimi gibi çeşitli mühendislik ve endüstriyel uygulamaları vardır. Sonuç ürününün daha kaliteli olması için levhadaki ısı transferi oranını ve sürüklenmeyi kontrol etmek çok önemlidir [17].

Crane sınırındaki hızı sabit bir noktadaki uzaklığa orantılı olan bir daralma sacının akışını incelemiş ve kapalı formlu çözümünü bulmuştur [17]. T. C. Chiam enine manyetik alanın varlığında güç yasa hızı dağılımı ile germe plakasına bağlı sınır tabakası akışı çalışmıştır. Büyük manyetik parametreler için linerleştirilmiş çözümler sunmuştur [18]. I. C. Liu enine manyetik alana tabi bir daralma tabakası üzerinde, gözenekli bir ortamda ikinci derecede elektriksel olarak iletken bir akışkanın akışını ve ısı transferini araştırmıştır [19]. Z. Abbas ve arkadaşları salınımlı gerilme yüzeyi üzerinde ikinci derecedeki bir viskoelastik sıvının iki boyutlu kararsız MHD sınır tabakası akışını incelemiştir. Araştırılan problemi benzerlik dönüşümü kullanılarak doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denkleme indirgemıştır[20]. Muhaimin ve arkadaşları emme varlığında küçülen bir tabaka nedeniyle manyetohidrodinamik viskoz akış üzerine çalışma yapmıştır. İki boyutlu ve aksel simetri daralma durumlarını tartışmıştır [21]. T. Hayat ve arkadaşları gözenekli küçülen bir yüzeyi geçen ikinci derecedeki akışkanın dönme akışını incelemiştir. Kısmi diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklemlere dönüştürmüş ve homotopi analiz metodu kullanılarak çözmüştür [22]. M. Sajid ve arkadaşları daralan bir tabaka hesabıyla manyetohidrodinamik viskoz akışkanla çalışmıştır. Bu çalışmada homotopi analiz yöntemi kullanılmıştır [23]. T. G. Fang ve arkadaşları daralan bir tabaka üzerinde MHD akışını analiz etmiştir. Çözüm de kapalı formlu bir denklemlerle ifade edilmiştir [24]. N. F. M. Noor ve arkadaşları gözenekli bir ortamda büzülen bir tabakada manyetohidrodinamik sınır tabakası akışı ve ısı transferini ilk kez düşünmüşlerdir. Emme ve gözeneklilik parametrelerinin, ısı aktarım hızı, hız ve sıcak profilleri üzerindeki etkilerini incelenmiştir [25]. N. F. M. Noor ve arkadaşları büzülen bir tabakada manyetohidrodinamik viskoz

akışını analitik olarak incelemişlerdir. Pade yaklaşımıyla Adomian ayrıştırma yöntemi birlikte kullanılarak çözümler elde etmişlerdir [26]. D. S. Chauhan ve arkadaşları daralan bir levha ve geçirimsiz bir plakayla sınırlandırılmış bir kanaldaki viskoz sıkıştırılmaz iletken sıvının MHD akışı ve ısı transferini incelemiştir [27].

4.1. Problemin Tanımı

Daralan bir tabaka ve gözenekli bir ortam kanalı ile sınırlandırılmış yatay bir kanalda elektriksel olarak iletken, sıkıştırılmaz, viskoz akışkanın akışını düşünelim. Bir w_0 emme sabiti kanalın üst daralma tabakasına uygulansın. Kanalın alttaki gözenekli zemini, çok küçük k_0 geçirgenliğine sahip olsun. Gözenekli yataktaki akışı Darcy kanunuyla modelliyoruz. Dolayısıyla, gözenekli zemindeki akış, herhangi bir dış basınç gradyanı yokluğunda sıfır kabul edilir. Saffman tarafından önerilen bir kayma şartı, sıvı gözenekli bir ortam ara yüzüne uygulanır. Bu sınır koşuluyla gözenekli zeminin geçirgenliği kanaldaki akışı etkiler. Dolayısıyla, gözenekli zeminin özelliği yatay kanalın alt sınırında kaymayı sağlamaktadır. Bir manyetik alan sabiti olan B_0 yatay kanalın normali yönünde uygulansın. Manyetik Reynolds sayısı küçük olduğundan dolayı indüklenen manyetik alan ihmal edilir. Harici elektrik alanı uygulanmaz ve iyonlaşmış sıvının kutuplaşma oranı önemsizdir. Bu yüzden E elektrik alanı sıfır kabul edilsin. Kartezyen koordinat sistemi (x, y, z) gözenekli zemin yüzeyinde orijin olarak kabul edilsin. x -ekseni ve y -ekseni gözenekli zeminin yüzeyleri olarak alınır ve z -ekseni yüzeyin normalidir. x, y ve z yönlerindeki hız bileşenleri $(u, v$ ve $w)$ dır. T kanaldaki sıvının sıcaklığıdır. Kanalın genişliği h olarak kabul edilsin ve böylece kanalın duvarları $z = 0$ ve $z = h$ olur. Isı transferi ve MHD akışın mevcut probleminin ana deklemini aşağıdaki gibi olur [17].

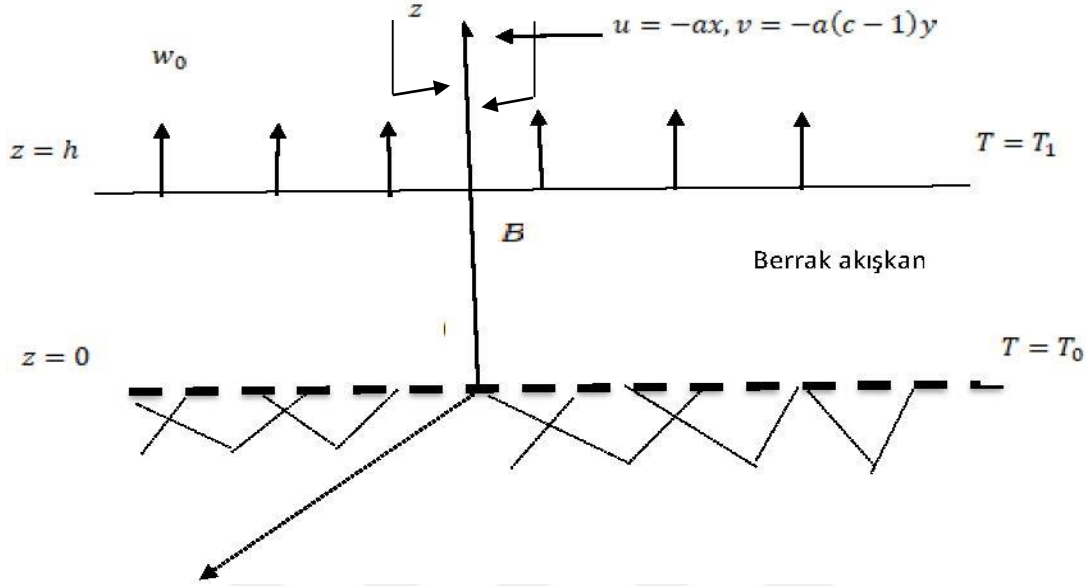
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - J \times B \quad (4.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - J \times B \quad (4.3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4.4)$$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.5)$$



Şekil 4.1. Problemin geometrisi

İlgili sınır koşulları aşağıdaki gibidir [17].

$$z = h \text{ da, } u = -ax, \quad v = -a(c-1)y, \quad w = w_0, \quad T = T_1 \quad (4.6)$$

$$z = 0 \text{ da } \tau_{zx} = \frac{\mu\alpha}{\sqrt{k_0}} u, \quad \tau_{zy} = \frac{\mu\alpha}{\sqrt{k_0}} v, \quad w = 0, \quad T = T_0 \quad (4.7)$$

Burada P basıncı, ρ akışkanın yoğunluğunu, ϑ kinematik viskoziteyi, σ elektriksel iletkenliği, C_p sabit basınçta özgül ısıyı, k berrak akışkan ortamındaki termal iletkenliği, T_0 gözenekli ortam duvarındaki sıcaklık, T_1 üstteki germe duvarındaki sıcaklığı, k_0 gözenekli ortamdaki geçirgenliği, μ berrak sıvının viskozitesini ve α da sadece gözenekli düzey yapısına bağlı olan boyutsuzluk sabitidir.

Burada $a > 0$ daralma sabitidir. c bir sabittir. $c = 1$ yalnızca x – yönlü daralmaya, $c = 2$ de aksisimetrik daralmaya karşılık gelir. Aşağıda benzerlik dönüşümleri verilmiştir.

$$u = axf'(\eta), \quad v = a(c-1)yf'(\eta), \quad w = -ahcf(\eta), \quad \eta = \frac{z}{h}, \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (4.8)$$

Burada $T_1 - T_0 = Dx$ ve D sıfır olmayan bir sabittir [17]. Yukarıda tanımlanan benzerlik dönüşümleri Eş. 4.1 denkleminde uygulanırsa

$$af' + a(c - 1)f' - acf' = 0 \quad (4.9)$$

olup süreklilik denklemi sağlanır.

$$u \times B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix} = vB_0i - uB_0j$$

$$J \times B = \sigma(u \times B) \times B = \sigma \begin{bmatrix} i & j & k \\ vB_0 & -uB_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix} = \sigma(-uB_0^2i - vB_0^2j)$$

Bu bulunan ifade Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 denklemlerinde yerine yazılır ve benzerlik dönüşümleri Eş. 4.2-Eş. 4.4 denklemlerine uygularsak

$$a^2xf'f' - a^2ff'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{axf'''}{h^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} axf' \quad (4.10)$$

$$a^2(c - 1)^2yf'f' - a^2c(c - 1)yff'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{a(c-1)yf'''}{h^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} a(c - 1)yf' \quad (4.11)$$

$$a^2hc^2ff'2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \vartheta(a^2hc^2ff'') \quad (4.12)$$

bulunur. Eş. 4.10 denkleminin y ve z ye göre türevlerini alıp, Eş. 4.11 denkleminin x ve z ye göre türevi ve Eş. 4.12 denkleminin de x ve y ye göre türevleri alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\frac{ah^2}{\vartheta} (2 - c)f'f'' + \frac{ah^2}{\vartheta} cff''' + f^4 - \frac{\sigma B_0^2 h^2}{\rho \vartheta} f'' = 0 \quad (4.13)$$

elde edilir. Hartman sayısı $M = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \vartheta}}$, boyutsuz daralma parametresi $R = \frac{ah^2}{\vartheta}$,

Prandtl sayısı $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$, geçirgenlik parametresi $K = \frac{\sqrt{k_0}}{h}$ olarak tanımlıdır. Bu tanımlanan ifadeler Eş. 4.13 deki denklemde kullanılırsa

$$f^{(4)} - M^2 f'' - R((2 - c)f'f'' - cff''') = 0 \quad (4.14)$$

olarak elde edilir. Şimdi yukarıda tanımlanan dönüşümleri Eş. 4.5 denklemine uygulayalım.

$$\rho(axDf'\theta - acDf\theta') - \frac{k}{h^2}\theta'' = 0 \quad (4.15)$$

$$\theta'' = \frac{C_p\mu}{k} \frac{ah^2}{\vartheta} (f'\theta - cf\theta') \quad (4.16)$$

$$\theta'' = RPr (f'\theta - cf\theta') \quad (4.17)$$

elde ederiz. Sınır koşullarına da dönüşümler uygulanırsa

$$f' = -1, f = -\frac{w_0}{ach} = -\lambda, \theta = 1, \eta = 1 \quad (4.18)$$

$$f = 0, f'' = \frac{\alpha}{K} f', \theta = 0, \eta = 0 \quad (4.19)$$

elde edilir.

4.2. Problemin Çözümü

Diferansiyel dönüşüm metodu Eş. 4.14 ve Eş. 4.17 ye uygulanırsa

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)F[k+4] - M^2(k+1)(k+2)F[k+2] - R((2-c) \sum_{s=0}^k (s+1)(k-s+1)(k-s+2)F[s+1]F[k-s+2] - c \sum_{s=0}^k (k-s+1)(k-s+2)(k-s+3)F[s]F[k-s+3]) = 0 \quad (4.20)$$

$$(k+1)(k+2)\theta[k+2] - RPr(\sum_{s=0}^k (s+1)F[s+1]\theta[k-s] - c \sum_{s=0}^k (k-s+1)F[s]\theta[k-s+1]) = 0 \quad (4.21)$$

olur. Başlangıç koşulları da

$$F[0] = 0, F[1] = a_1, F[2] = \frac{\alpha}{2K}F[1], F[3] = a_2, \theta[0] = 0, \theta[1] = a_3 \quad (4.22)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$F[4] = \frac{1}{12} \frac{a_1(-Ra_1c + M^2 + 2Ra_1)\alpha}{K},$$

$$F[5] = \frac{1}{60} \frac{-6K^2Ra_1a_2c - 2\alpha^2Ra_1^2c + 3K^2M^2a_2 + 6K^2Ra_1a_2 + 4\alpha^2Ra_1^2}{K^2},$$

$$F[6] = \frac{1}{360} \frac{1}{K} (\alpha a_1 (3R^2 a_1^2 c^2 - 4M^2 R a_1 c - 8R^2 a_1^2 c + M^4 + 4M^2 R a_1 + 4R^2 a_1^2 - 24R a_2 c + 36R a_2),$$

⋮

$$\theta[2] = 0,$$

$$\theta[3] = -\frac{1}{6} RePr a_1 a_3 (c - 1),$$

$$\theta[4] = -\frac{1}{12} \frac{\alpha RPr a_1 a_3 (c-2)}{K},$$

⋮

olarak bulunur. Bu katsayılar Eş. 2.57 deki seri toplamının içine yazılırsa

$$f(\eta) = a_1 \eta + \frac{\alpha a_1}{K} \eta^2 + a_2 \eta^3 + \left(\frac{1}{12} \frac{a_1 (-R a_1 c + M^2 + 2R a_1) \alpha}{K} \right) \eta^4 + \left(\frac{1}{60} \frac{-6K^2 R a_1 a_2 c - 2\alpha^2 R a_1^2 c + 3K^2 M^2 a_2 + 6K^2 R a_1 a_2 + 4\alpha^2 R a_1^2}{K^2} \right) \eta^5 + \left(\frac{1}{360} \frac{1}{K} (\alpha a_1 (3R^2 a_1^2 c^2 - 4M^2 R a_1 c - 8R^2 a_1^2 c + M^4 + 4M^2 R a_1 + 4R^2 a_1^2 - 24R a_2 c + 36R a_2)) \right) \eta^6 + \dots \quad (4.23)$$

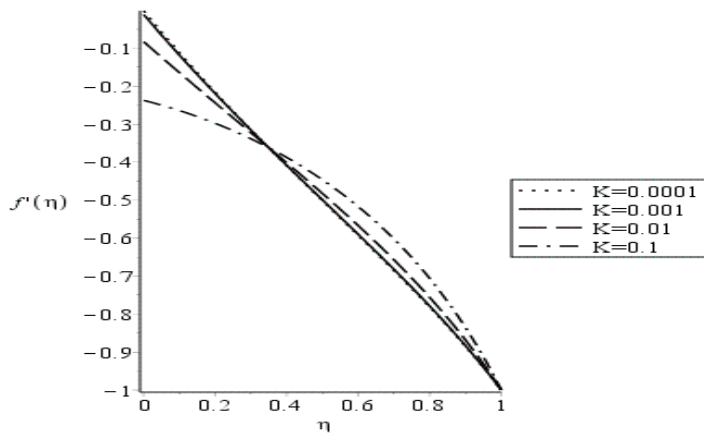
$$\theta(\eta) = a_3 \eta + \left(-\frac{1}{6} RePr a_1 a_3 (c - 1) \right) \eta^3 + \left(-\frac{1}{12} \frac{\alpha RPr a_1 a_3 (c-2)}{K} \right) \eta^4 + \dots \quad (4.24)$$

olur. Bu denklemler çok küçük geçirgenliğe sahip gözenekli zemin ve daralan tabaka ile sınırlı yatay kanaldaki ısı transferi ve MHD akımının seri çözümüdür. MHD akışının ve ısı transferinin gözenekli zemin ve daralan tabakadaki özellikleri yatay kanalda incelenmiştir. Burada kısmi diferansiyel denklemler benzerlik dönüşümleri kullanılarak adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür ve diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak seri çözümler elde edilmiştir.

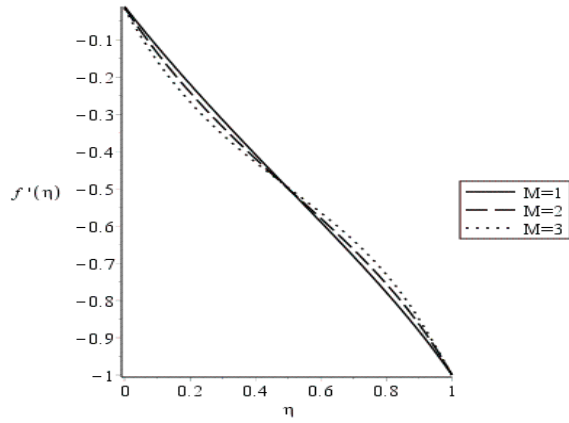
4.3. Problemin Sonuçları

Denklemlerin ilgili parametrelerinin farklı değerleri için grafiklerini inceleyelim. Şekil 4.2-4.6 ilgili parametrelerin çeşitli değerleri için aksenal hız varyasyonellerini göstermektedir. Şekil 4.2. K geçirgenlik parametresinin artmasıyla kanaldaki aksenal hızın gözenekli zeminin yakınında arttığını gösterirken buna karşın üstteki daralan levhanın yakınında azaldığını göstermektedir. Geçirgenlik, akış kolaylığı ölçüsüdür ve gözenekli zeminin

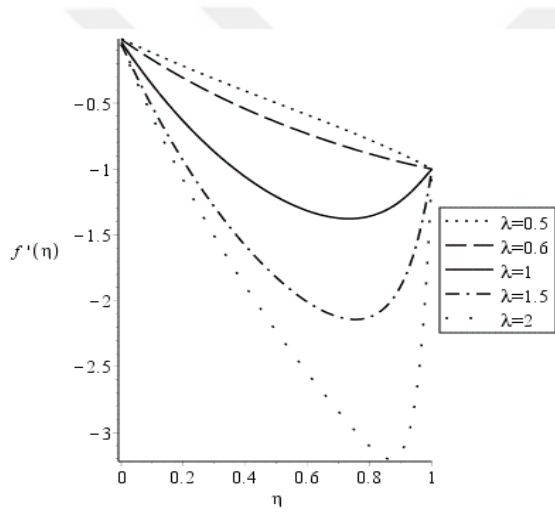
yakınında akışkanın akışını arttırır. Doymuş gözenekli zemin ortamında akışkanın etkisi kanalın bir duvarında kayma meydana getirmektedir ve bunun sonucu olarak bu duvarda akışkanın hızı sıfıra eşit olmamaktadır. Oluşan bu kayma gözenekli tabanın yapısına ve geçirgenlik parametresine bağlıdır ve sınır şartı vasıtasıyla akışkanın akışını etkiler. Şekil 4.3. de Lorentz kuvveti akışa karşı koyduğundan ve üst duvar yakınında sıvının akışının yavaşlamasına yol açarken gözenekli zeminin yakınında artmasına neden olduğundan M manyetik parametresinin artışı ile üst büzülme tabakasının yakınında aksel hızın azaldığını göstermektedir. Şekil 4.4. emme parametresi (λ) değerinin artmasıyla aksel akış büyüklüğünün arttığını göstermektedir. Şekil 4.5. da daralma parametresi (R) artması üst tabakanın yakınında akışın azaldığını gösterirken gözenekli zeminin yakınında arttığını göstermektedir. Şekil 4.6. da üst duvarın yakınında aksisimetrik büzülmeden oluşan aksel akış sadece x -kseninin büzülmesi ile oluşan aksel akıştan daha büyük iken gözenekli ortamda ters etki gözlenmektedir. Şekil 4.7. de Pr değerindeki artış kanaldaki sıcaklığın düşmesine ve sınır tabakası kalınlığının azalmasına neden olur. Pr değeri arttıkça termal yayılma azalır ve bu da enerji aktarım yeteneğini azaltır dolayısıyla sıcaklık düşer. Şekil 4.8. de K geçirgenlik parametresinin artması ile kanal boyunca sıcaklığın düştüğü gösterilmiştir. Şekil 4.9. da emme parametresi (λ) arttıkça kanaldaki sıcaklığın düştüğü gösterilmiştir. Şekil 4.10. da manyetik parametre M değeri arttıkça sıcaklığın azaldığı gösterilmiştir. Şekil 4.11. de daralma parametresi (R) arttıkça kanaldaki sıcaklığın azaldığı gösterilmiştir. Şekil 4.12. de $c = 2$ aksisimetrik daralma durumu için kanal boyunca sıcaklık $c = 1$ tek yönlü daralma durumuna göre daha düşüktür.



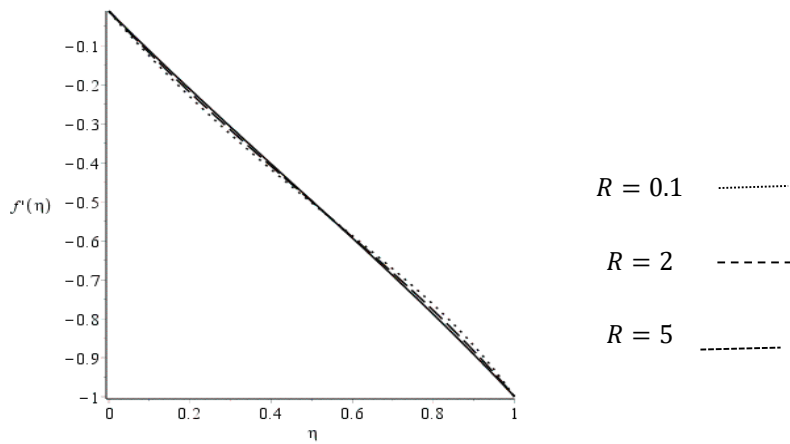
Şekil 4.2. $c = 3, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5, M = 1, R = 2$ değerleri için K nın aksel hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi



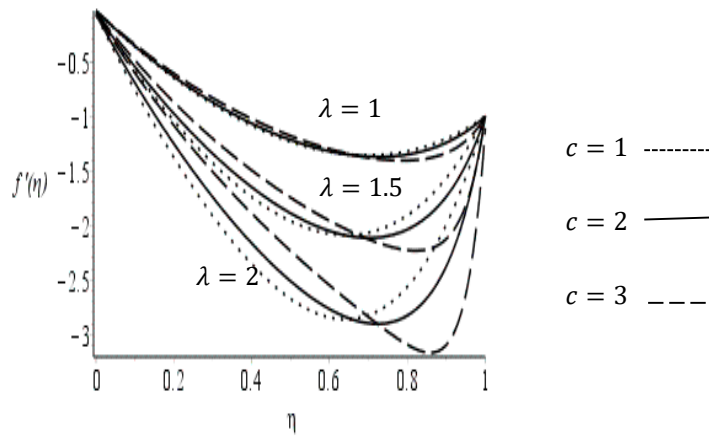
Şekil 4.3. $c = 3, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5, R = 2, K = 0.001$ değerleri için M nin aksel hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi



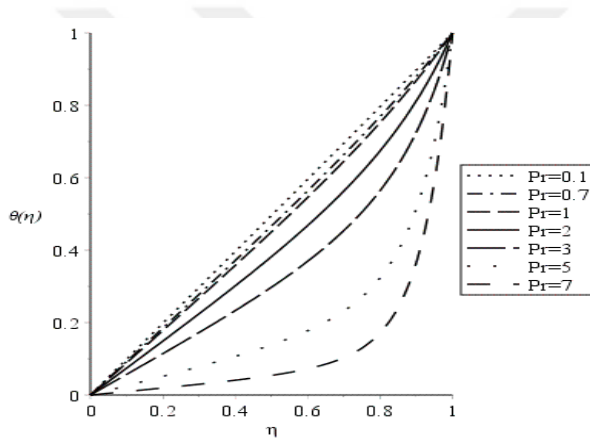
Şekil 4.4. $M = 1, c = 3, K = 0.001, \alpha = 0.1, R = 2$ değerleri için λ nın aksel hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi



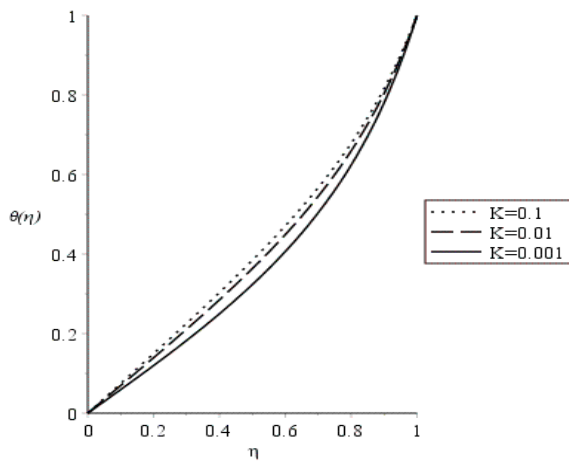
Şekil 4.5. $M = 1, c = 3, K = 0.001, \alpha = 0.1, \lambda = 0.1$ değerleri için R in aksel hız $f'(\eta)$ üzerinde etkisi



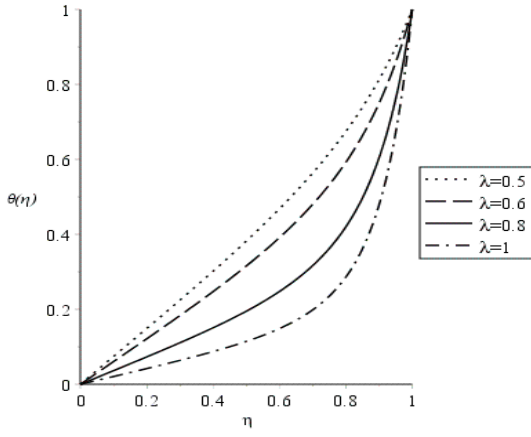
Şekil 4.6. $M = 1, K = 0.001, R = 2, \alpha = 0.1$ değerleri için c ve λ nin $f'(\eta)$ üzerinde etkisi



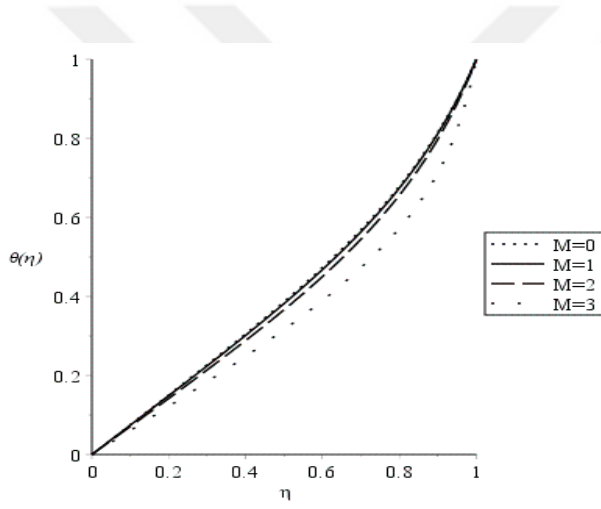
Şekil 4.7. $M = 1, c = 3, K = 0.001, R = 2, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5$ değerleri için Pr nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi



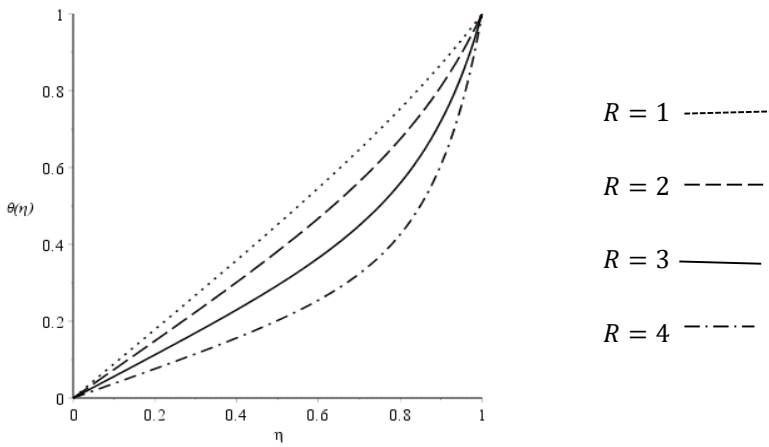
Şekil 4.8. $M = 1, c = 3, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1, \lambda = 0.5$ değerleri için K nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi



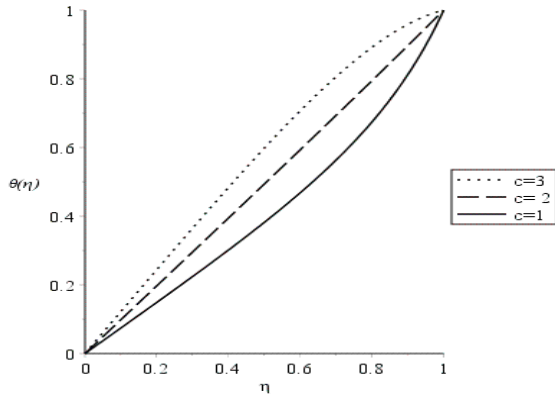
Şekil 4.9. $M = 1, c = 3, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1$ ve $K = 0.001$ değerleri için λ nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi



Şekil 4.10. $c = 3, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1, K = 0.001, \lambda = 0.5$ değerleri için M nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi



Şekil 4.11. $c = 3, M = 1, Pr = 2, \alpha = 0.1, K = 0.001, \lambda = 0.5$ değerleri için R nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi



Şekil 4.12. $M = 1, R = 2, Pr = 2, \alpha = 0.1, K = 0.001, \lambda = 0.5$ değerleri için c nin $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi





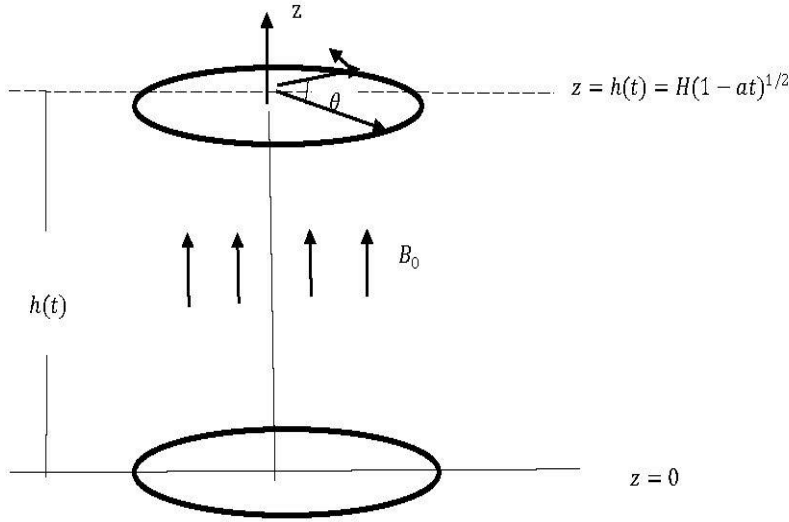
5. PARALEL DİSKLER ARASINDAKİ KARARSIZ AKIŞ İÇİN ISI TRANSFER ANALİZİ

Hızlı hareket eden motorlar ve içinde yağlayıcılar olan makinelerde ısı transferi aktif bir araştırma konusu olmuştur. Ayrıca hidrodinamik makineler, mekanik bileşenlerin geçici yüklenmesinde, sıvı metal yağlamalı rulmanlar ve güç aktarımındaki sıkışmış filmler gibi uygulama alanlarına sahiptir [28].

M. Siddiqui iki paralel sonsuz plaka arasındaki viskoz MHD akışkanının iki boyutlu kararsız akışını analiz etmiştir. İki sonsuz plakanın birbirine simetrik olarak yaklaştığını ve sıkıştırma akışına neden olduğunu kabul edilmiştir [11]. G. Domairy ve arkadaşları iki manyetik paralel sonsuz diskler arasındaki MHD sıkma akışını incelemiştir. Burada disklerin biri geçirimsiz diğeri de ya emme ya da enjeksiyon ile gözeneklidir. Eylemsizlik, elektromanyetik kuvvetler ve emme veya enjeksiyonun birleştirilmiş etkisi araştırmıştır [29]. A. A. Joneidi ve arkadaşları disklerin gözenekliliği hesaba katılarak iki paralel disk arasındaki manyetohidrodinamik sıkışma akışını incelemiştir. Hız profilleri üzerinde emme veya enjeksiyon, Reynolds sayısı, sıkıştırma ve Hartmann sayısının etkileri incelenmiştir [30].

5.1. Problemin Tanımı

Sıkıştırılmayan viskoz akışkanın MHD akışını, aralarındaki mesafe $h(t) = H(1 - at)^{1/2}$ iki paralel diskten oluşan bir sistem aracılığıyla ele alalım. Orantılı manyetik alan $B_0(1 - at)^{1/2}$ disklerin normaline uygulanır. İndüklenmiş manyetik alanın var olmadığını varsayalım. T_w ve T_h sırasıyla $z = 0$ ve $z = h(t)$ deki sıcaklık sabitlerini gösterecektir. $z = h(t)$ deki üst disk alt sabite $\frac{aH(1-at)^{-1/2}}{2}$ hızıyla yaklaşarak veya uzaklaşarak hareket etsin. (r, φ, z) silindirik koordinatları seçelim. Akış rotasyonel simetri ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) olduğundan $V = (u, v, w)$ hızının v bileşenini 0 a eşit almamıza izin verir. Yani akışkanın hızı açıdan bağımsızdır. Sonuç olarak kararsız iki boyutlu viskoz akışkanın akış ve ısı transferinin ana denklemi aşağıdaki gibi yazılır [28].



Şekil 5.1. Problemin geometrisi

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho} B^2(t) u \quad (5.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (5.3)$$

$$C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{K_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \vartheta \left\{ 2 \frac{u^2}{r^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \quad (5.4)$$

Sınır koşulları da

$$u = 0, \quad w = \frac{dh}{dt}, \quad T = T_h, \quad z = h(t) \quad (5.5)$$

$$u = 0, \quad w = w_0, \quad T = T_w, \quad z = 0 \quad (5.6)$$

dir. Burada u ve w sırasıyla r ve z yönlerindeki hız bileşenleri, μ dinamik viskozite, P basınç ve ρ 'da yoğunluktur. Ayrıca T sıcaklık, K_0 termal iletkenlik, C_p özısı, ϑ kinematik viskozite ve w_0 püskürtme/emme hızıdır [28]. Aşağıda benzerlik dönüşümleri verilmiştir.

$$u = \frac{ar}{2(1-at)} f'(\eta), w = -\frac{aH}{(1-at)^{\frac{1}{2}}} f(\eta), B(t) = \frac{B_0}{(1-at)^{\frac{1}{2}}}, \eta = \frac{z}{H(1-at)^{\frac{1}{2}}}, \theta = \frac{T-T_h}{T_w-T_h} \quad (5.7)$$

Şimdi bu dönüşümleri Eş. 5.1- Eş. 5.4 denklemlerine uygulayalım.

$$\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) + \frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) - \frac{a}{(1-at)} f'(\eta) = 0 \quad (5.8)$$

$$\rho \left(\frac{a^2 r f'(\eta)}{2(1-at)^2} + \frac{1}{2} \frac{a^2 r f''(\eta) z}{H(1-at)^{\frac{5}{2}}} + \frac{a^2 r f'(\eta) f'(\eta)}{4(1-at)^2} + \frac{a^2 r f(\eta) f''(\eta)}{2(1-at)^2} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(0 + \frac{a r f'''(\eta)}{2H^2(1-at)^2} + \frac{a f'(\eta)}{2r(1-at)} - \frac{a f'(\eta)}{2r(1-at)^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho} B^2(t) \frac{a r f'(\eta)}{2(1-at)} \quad (5.9)$$

$$\rho \left(\frac{-1}{2} \frac{a^2 H f(\eta)}{(1-at)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2 f'(\eta) z}{2(1-at)^2} + 0 + \frac{a^2 H f(\eta) f'(\eta)}{(1-at)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(0 - \frac{a f''(\eta)}{H(1-at)^{\frac{3}{2}}} + 0 \right) \quad (5.10)$$

$$C_p \left(\frac{z a (T_w - T_h) \theta'(\eta)}{H(1-at)^{\frac{3}{2}}} + 0 - \frac{a (T_w - T_h) f(\eta) \theta'(\eta)}{(1-at)} \right) = \frac{K_0}{\rho} \left(0 + \frac{(T_w - T_h) \theta''(\eta)}{H^2(1-at)} + 0 \right) + \vartheta \left\{ 2 \frac{a^2 f'(\eta) f'(\eta)}{4(1-at)^2} - \frac{a^2 r^2 f''(\eta) f''(\eta)}{4H^2(1-at)^3} + \frac{2a^2 f'(\eta) f'(\eta)}{(1-at)^2} + \frac{a^2 f'(\eta) f'(\eta)}{2(1-at)^2} + 0 + 0 \right\} \quad (5.11)$$

elde edilir. Eş. 5.9 denkleminin z ye ve Eş. 5.10 denkleminin r ye göre türevi alınıp basınç gradienti yok edilirse ve Eş. 5.11 denkleminde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$f^{(4)} - S(\eta f'''' + 3f'' - 2f f''') - (M^2) f'' = 0 \quad (5.12)$$

$$\theta'' + SPr(2f\theta' - \eta\theta') + PrEc(f''^2 + 12\chi^2 f'^2) = 0 \quad (5.13)$$

elde edilir. Bu denklemlerde

$$S = \frac{aH^2}{2\vartheta}, M^2 = \frac{\sigma B_0^2 H^2}{\vartheta}, Pr = \frac{\mu C_p}{K_0}, Ec = \frac{1}{C_p(T_w - T_h)} \left(\frac{ar}{2(1-at)} \right)^2, \chi^2 = \frac{H^2(1-at)}{r^2} \quad (5.14)$$

dir. Burada S sıkıştırma sayısı, A emme/püskürtme parametresi, M Hartman sayısı, Pr Prandtl sabiti, Ec düzenlenmiş Eckert sayısı ve χ boyutsuzluk uzunluğudur [28]. Sınır koşulları da

$$f(0) = A, f'(0) = 0, \theta(0) = 1 \quad (5.15)$$

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f'(1) = 0, \quad \theta(1) = 0 \quad (5.16)$$

olarak bulunur.

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{z=h(t)}, \quad q_w = -k_0 \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=h(t)} \quad (5.17)$$

olduğunda yüzeysel sürtünme katsayısı ve Nusselt sayısı

$$C_{fr} = \frac{\tau_{rz} \Big|_{z=h(t)}}{\rho \left(\frac{-aH}{1} \right)^2 \frac{2(1-at)^2}{2}}, \quad N_u = \frac{Hq_w}{K_0(T_w - T_h)} \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlıdır.

5.2. Problemin Çözümü

Eş. 5.12 ve Eş. 5.13 denklemlerine diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)F[k+4] - S(\sum_{s=0}^k \delta(s-1)(k-s+1)(k-s+2)(k-s+3)F[k-s+3] + 3(k+1)(k+2)F[k+2] - 2\sum_{s=0}^k (k-s+1)(k-s+2)(k-s+3)F[s]F[k-s+3]) - (M^2)(k+1)(k+2)F[k+2] = 0 \quad (5.19)$$

$$(k+1)(k+2)\theta[k+2] + SPr(2\sum_{s=0}^k (k-s+1)F[s]\theta[k-s+1] - \sum_{s=0}^k \delta(s-1)(k-s+1)\theta[k-s+1]) - PrEc(\sum_{s=0}^k (s+1)(s+2)(k-s+1)(k-s+2)F[s+2]F[k-s+2] + 12(\chi^2)\sum_{s=0}^k (s+1)(k-s+1)F[s+1]F[k-s+1]) = 0 \quad (5.20)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulları da

$$F[0] = A, \quad F[1] = 0, \quad \theta[0] = 1, \quad F[2] = a_1, \quad F[3] = a_2, \quad \theta[1] = a_3 \quad (5.21)$$

olur.

$$F[4] = \frac{-1}{2}ASa_2 + \frac{1}{12}M^2a_1 + \frac{1}{4Sa_1},$$

$$F[5] = \frac{A^2 S^2 a_2}{5} - \frac{AM^2 Sa_1}{30} - \frac{AS^2 a_1}{10} - \frac{AS^2 a_2}{10} + \frac{SM^2 a_1}{60} + \frac{M^2 a_2}{20} + \frac{S^2 a_1}{20} + \frac{Sa_2}{5},$$

$$F[6] = -\frac{A^3 S^3 a_2}{15} + \frac{A^2 M^2 S^2 a_1}{90} + \frac{A^2 S^3 a_1}{30} + \frac{A^2 S^3 a_2}{30} - \frac{AM^2 S^2 a_1}{180} - \frac{M^2 ASa_2}{30} - \frac{AS^3 a_1}{60} + \frac{M^4 a_1}{360} - \frac{7AS^2 a_2}{60} + \frac{M^2 Sa_1}{60} + \frac{S^2 a_1}{40} - \frac{Sa_1 a_2}{30},$$

⋮

dir.

$$\theta[2] = -APrSa_3 + 2EcPra_1^2,$$

$$\theta[3] = \frac{2A^2 Pr^2 S^2 a_3}{3} - \frac{4AEcSPr^2 a_1^2}{3} - \frac{APr^2 S^2 a_3}{3} + \frac{2EcSPr^2 a_1^2}{3} + 4PrEca_1 a_2 + \frac{PrSa_3}{6},$$

$$\theta[4] = -\frac{A^3 Pr^3 S^3 a_3}{3} + \frac{2A^2 EcPr^3 S^2 a_1^2}{3} + \frac{A^2 Pr^3 S^3 a_3}{6} - \frac{AEcPr^3 S^2 a_1^2}{3} - 2AEcPr^2 Sa_1 a_2 - 2AEcPrSa_1 a_2 - \frac{APr^2 S^2 a_3}{12} + \frac{EcM^2 Pra_1^2}{3} + 4EcPra_1^2 \chi^2 + EcPrSa_1^2 + 3EcPra_2^2 - \frac{PrSa_1 a_3}{6},$$

⋮

bulunur.

Bu katsayıları Eş. 2.57'deki seri toplamının içine yazarsak

$$\begin{aligned} f(\eta) = & A + a_1 \eta^2 + a_2 \eta^3 + \left(\frac{-1}{2} ASa_2 + \frac{1}{12} M^2 a_1 + \frac{1}{4Sa_1} \right) \eta^4 + \left(\frac{A^2 S^2 a_2}{5} - \frac{AM^2 Sa_1}{30} - \right. \\ & \left. \frac{AS^2 a_1}{10} - \frac{AS^2 a_2}{10} + \frac{SM^2 a_1}{60} + \frac{M^2 a_2}{20} + \frac{S^2 a_1}{20} + \frac{Sa_2}{5} \right) \eta^5 + \left(-\frac{A^3 S^3 a_2}{15} + \frac{A^2 M^2 S^2 a_1}{90} + \frac{A^2 S^3 a_1}{30} + \right. \\ & \left. \frac{A^2 S^3 a_2}{30} - \frac{AM^2 S^2 a_1}{180} - \frac{M^2 ASa_2}{30} - \frac{AS^3 a_1}{60} + \frac{M^4 a_1}{360} - \frac{7AS^2 a_2}{60} + \frac{M^2 Sa_1}{60} + \frac{S^2 a_1}{40} - \frac{Sa_1 a_2}{30} \right) \eta^6 + \\ & \dots \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \theta(\eta) = & 1 + a_3 \eta + (-APrSa_3 + 2EcPra_1^2) \eta^2 + \left(\frac{2A^2 Pr^2 S^2 a_3}{3} - \frac{4AEcSPr^2 a_1^2}{3} - \frac{APr^2 S^2 a_3}{3} + \right. \\ & \left. \frac{2EcSPr^2 a_1^2}{3} + 4PrEca_1 a_2 + \frac{PrSa_3}{6} \right) \eta^3 + \left(-\frac{A^3 Pr^3 S^3 a_3}{3} + \frac{2A^2 EcPr^3 S^2 a_1^2}{3} + \frac{A^2 Pr^3 S^3 a_3}{6} - \right. \end{aligned}$$

$$\frac{AEcPr^3S^2a_1^2}{3} - 2AEcPr^2Sa_1a_2 - 2AEcPrSa_1a_2 - \frac{APr^2S^2a_3}{12} + \frac{EcM^2Pra_1^2}{3} + 4EcPra_1^2\chi^2 + EcPrSa_1^2 + 3EcPra_2^2 - \frac{PrSa_1a_3}{6} \eta^4 + \dots \quad (5.23)$$

olarak bulunmuştur. Diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak paralel iki disk arasındaki kararsız viskoz MHD akışının akışı için yaklaşık analitik çözümler elde edilmiştir.

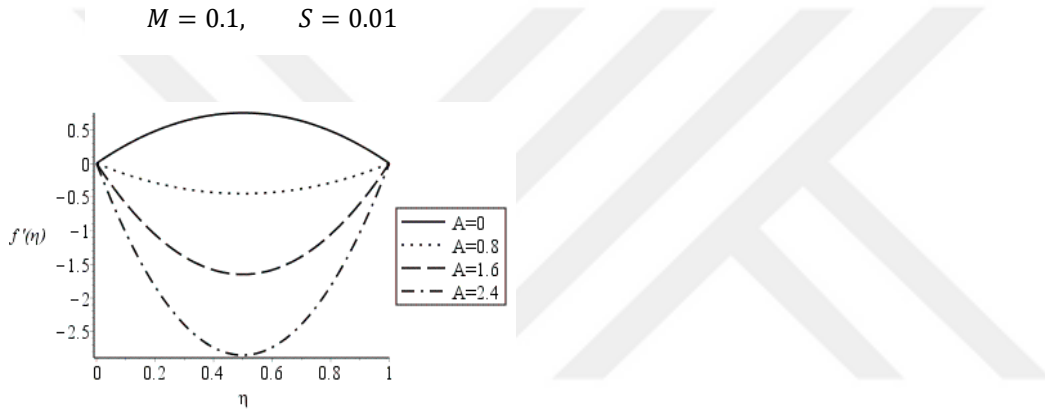
5.3. Problemin Sonuçları

Denklemlerdeki A, S, M, Pr, Ec ve χ parametrelerinin hız ve sıcaklık profilleri üzerindeki etkilerini incelenmiştir. Şekiller A emme/püskürtme parametresinin hızın radyal ve aksel bileşenleri ile sıcaklık bileşenleri üzerindeki etkilerini göstermektedir. Bu denklemleri emme ve püskürtme parametresinin negatif ve pozitif değerler almasına göre iki alt başlıkta gösterilmiştir.

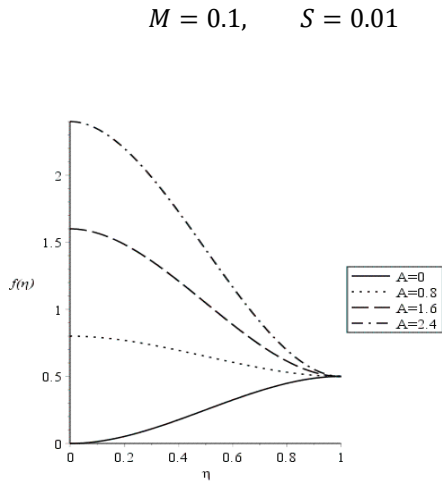
5.3.1. Emme akışı $A > 0$

Şekil 5.2. (A) gözeneklilik parametresinin radyal hız üzerindeki etkilerini göstermektedir. A nın artan değerleri için radyal hızın arttığı gösterilmiştir. Bununla birlikte, sınır tabakası kalınlığı A nın azalan bir fonksiyonudur. Şekil 5.3. de A nın artan değerleri için $f(\eta)$ hız fonksiyonu artmıştır. Diskin geçirgen yapısı akışkan parçacıklarının sınıra daha yakın hareket etmesine ve sınır tabakasının daha ince olmasına olanak tanımıştır. S nin değeri eğer sıfırdan büyükse üst ve alt disk arasındaki mesafe artmakta sıfırdan küçük olması durumundaysa mesafe azalmaktadır. Sıkma sayısındaki artış, kinematik viskozitede azalma ve plakaların hareket ettirilme hızındaki artış ile ilişkilendirilebilir. Şekil 5.4. de $0 < \eta < 0.5$ aralığında $f(\eta)$ in mutlağı S nin artan değerleri için artarken $0.5 < \eta < 1$ aralığında S nin artan değerleri için mutlak hızın azaldığı gösterilmiştir. Şekil 5.5. $\theta(\eta)$ in A nın artan bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Başka bir ifade ile termal sınır tabakası A nın artması ile incelmektedir. Şekil 5.6. da S değerleri artarken sıcaklık ve termal sınır tabaka kalınlığının azaldığı gösterilmiştir. Şekil 5.7. de büyük viskoz dağılımı etkisinden dolayı sıcaklık profili artan Pr değerleri için artış göstermektedir. Öte yandan termal sınır tabakası Pr ile ters orantılıdır. Yani yüksek Pr değerleri için düşük termal iletkenlik ince termal sınır tabakasına karşılık gelirken, düşük Pr değerleri yüksek ısı iletkenliğine dolayısıyla yüksek termal difüzyon hızına sahiptir. Ayrıca düşük değerli Pr sayısı düşük

viskoziteli sıvılara karşılık gelirken yüksek değerli Pr sayısı yüksek viskoziteli yağlara karşılık gelmektedir. Şekil 5.8. de Ec sayısı artarken $\theta(\eta)$ fonksiyonunda arttığı gösterilmiştir. Eckert sayısının arttırılması termal sınır tabakası kalınlığının azalmasına neden olur. Eckert sayısındaki artış kinetik enerjinin büyük olduğunu ve dolayısıyla hızın daha yüksek olduğunu, parçacıklar yüksek hıza ulaştığında titreşimlerin arttığını ve bunun sonucu olarak parçacıkların çarpmasının arttığını ifade eder. Bu artan çarpışma sınır tabakasında ısı yayılımını sağlar dolayısıyla sıcaklık profilinde artışa neden olur. Şekil 5.9. da artan χ sayısına karşılık $\theta(\eta)$ in değerinin de arttığı gösterilmiştir. χ sayısının arttırılması termal sınır tabakası kalınlığının azalmasına neden olur.

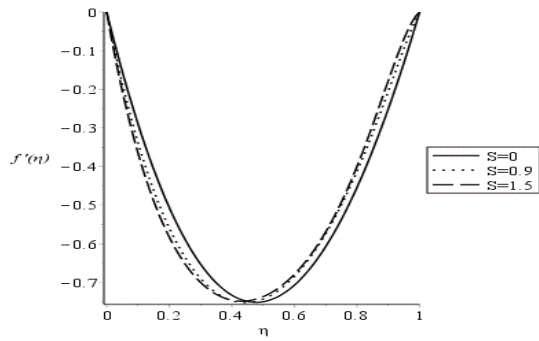


Şekil 5.2. A nın $f'(\eta)$ üzerinde etkisi



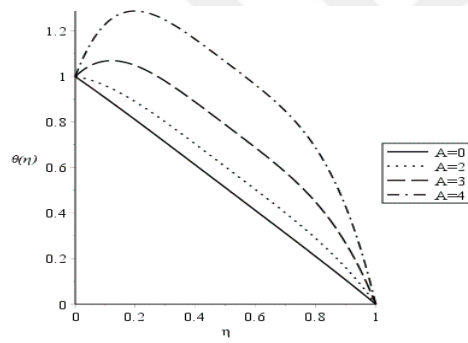
Şekil 5.3. A nın $f(\eta)$ üzerinde etkisi

$$M = 1.0, \quad A = 1.0$$



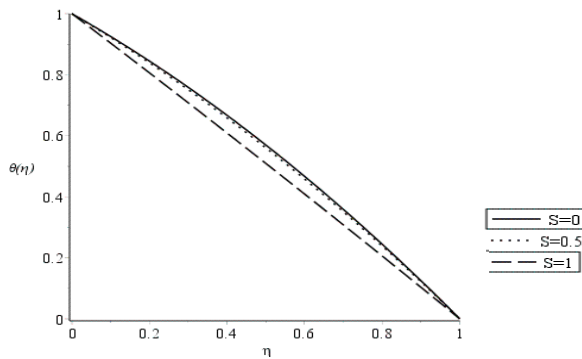
Şekil 5.4. S nın $f'(\eta)$ üzerinde etkisi

$$M = 0.1, \quad S = 0.01, \quad Pr = 0.2, \quad Ec = 0.3, \quad \chi = 0.1$$



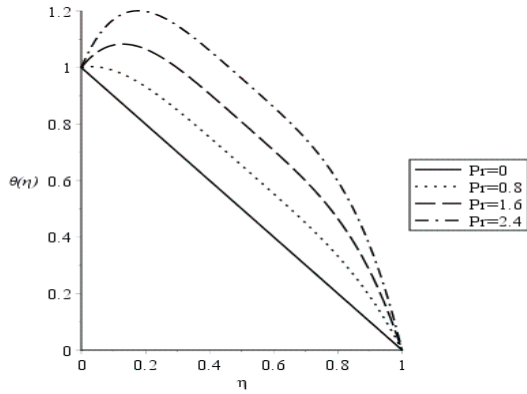
Şekil 5.5. A nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi

$$M = 0.5, \quad A = 1, \quad Pr = 0.1, \quad Ec = 0.1, \quad \chi = 0.1$$



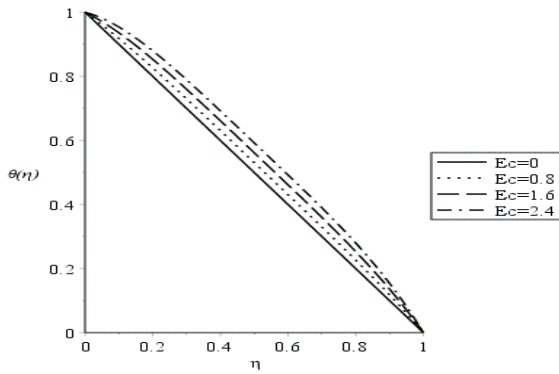
Şekil 5.6. S nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi

$$A = 1, M = 0.2, S = 0.01, Ec = 1.0, \chi = 0.1$$



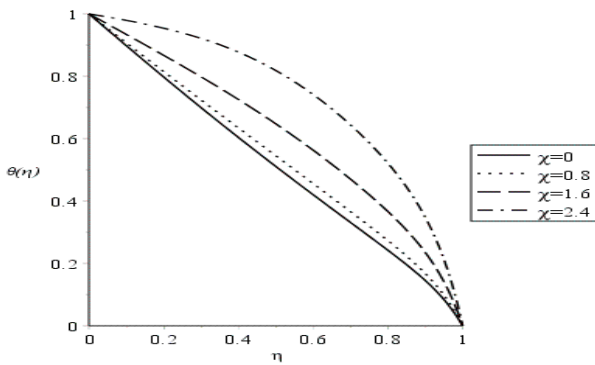
Şekil 5.7. $\theta(\eta)$ üzerinde Pr nin etkisi

$$A = 1, M = 0.5, S = 0.01, Pr = 0.2, \chi = 0.1$$



Şekil 5.8. $\theta(\eta)$ üzerinde Ec nin etkisi

$$A = 1, M = 0.1, S = 0.01, Ec = 1.0, Pr = 0.1$$

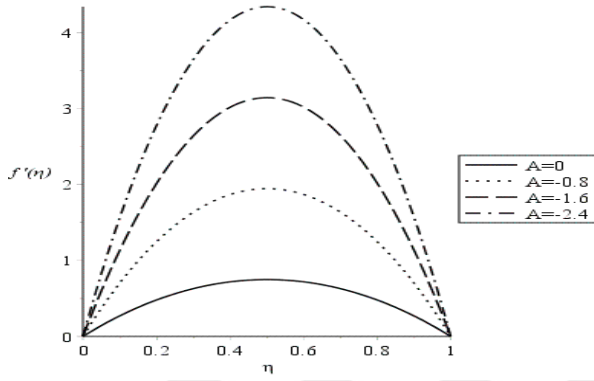


Şekil 5.9. $\theta(\eta)$ üzerinde χ nin etkisi

5.3.2. Püskürtme durumu ($A < 0$)

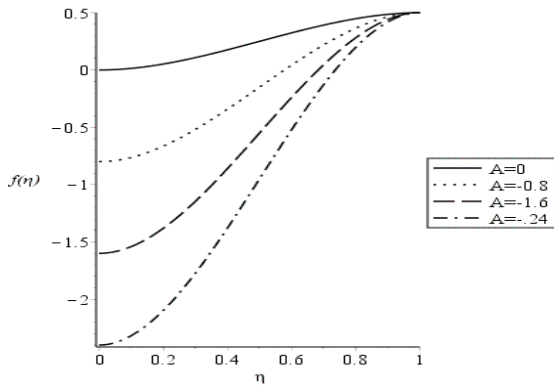
Şekil 5.10.– Şekil 5.17. de enjeksiyon durumunda fiziksel parametrelerin hız ve sıcaklık dağılımları üzerindeki etkileri gösterilmiştir. İlgili parametrelerin hız profillerine etkileri daha önce gösterilen emme durumunun tersi olduğu görülmektedir. Bununla birlikte sıcaklık dağılımının davranışı hem emme hem de enjeksiyon olayları için değişme göstermemiştir.

$$M = 0.5, \quad S = 0.01$$



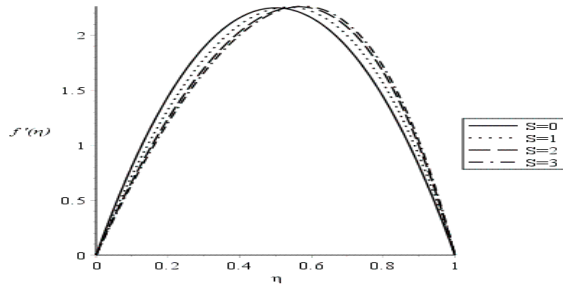
Şekil 5.10. $f'(\eta)$ üzerinde A nın etkisi

$$M = 0.5, \quad S = 0.01$$



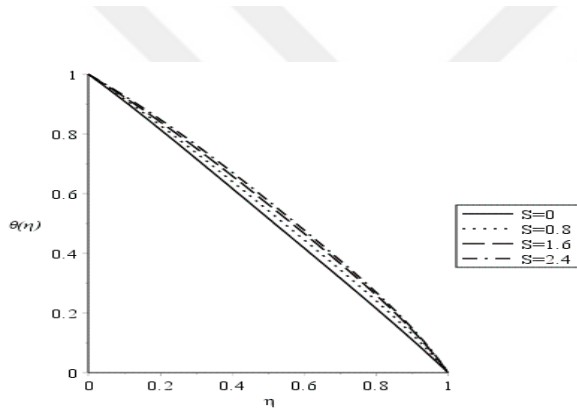
Şekil 5.11. $f(\eta)$ üzerinde A nın etkisi

$$M = 0.1, \quad A = -1$$



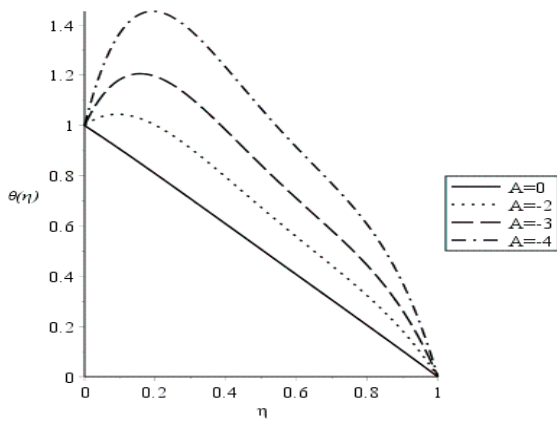
Şekil 5.12. $f'(\eta)$ üzerinde S nın etkisi

$$A = -1.0, M = 0.5, Pr = 0.1, Ec = 0.1, \chi = 0.1$$



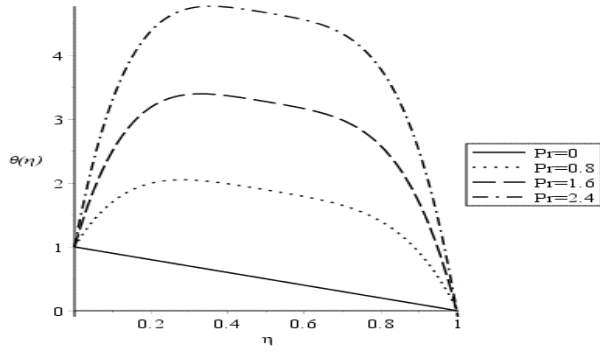
Şekil 5.13. S nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi

$$M = 0.5, S = 0.01, Pr = 0.2, Ec = 0.3, \chi = 0.1$$



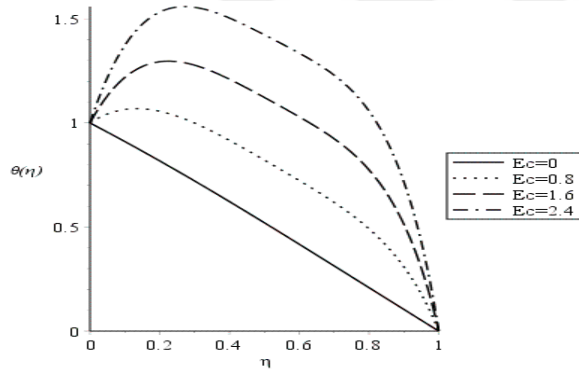
Şekil 5.14. A nın $\theta(\eta)$ üzerinde etkisi

$$A = -1.0, M = 0.2, S = 0.01, Ec = 1.0, \chi = 0.1$$



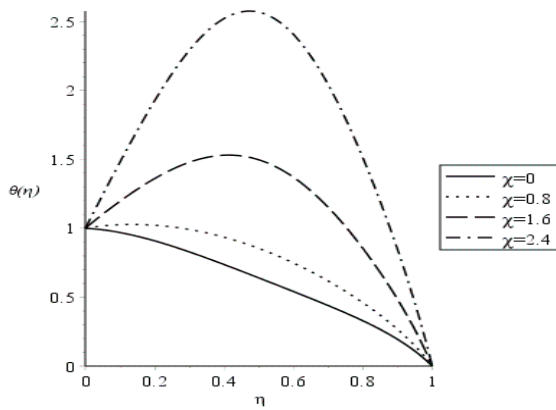
Şekil 5.15. $\theta(\eta)$ üzerinde Pr nin etkisi

$$A = -1.0, M = 0.5, S = 1, Pr = 0.2, \chi = 0.1$$



Şekil 5.16. $\theta(\eta)$ üzerinde Ec nin etkisi

$$A = -1.0, M = 0.5, S = 1, Pr = 0.2, Ec = 0.3$$



Şekil 5.17. $\theta(\eta)$ üzerinde χ nin etkisi

6. SONUÇ

Bu tezde farklı geometriler için akış problemleri incelenmiştir. Kütle, momentum ve enerji denklemlerinde gerekli dönüşümler yapılarak bu denklemler adi diferansiyel denklemlere indirgenmiştir. İlgili parametre koşullarının hız ve sıcaklık profilleri üzerine etkileri grafiklerle gösterilmiştir.

Bölüm 3 te bahsettiğimiz iki paralel levha arasındaki sıkıştırma akışı denklemlerini çözmek için diferansiyel dönüşüm metodu ve en küçük kareler metodu uygulanmıştır. Öncelikle manyetik alanın varlığı ve yokluğunda denklemler incelenmiştir. Buna göre

- Manyetik alanın artmasıyla hızın azaldığı gözlemlenmiştir.
- Sıkıştırma katsayısının manyetik alanın tam tersi olarak arttığı gösterilmiştir.

Bölüm 4 te manyetik alan varlığında daralan levha ve gözenekli bir zemin ortamı ile sınırlandırılmış bir kanalda MHD akışı ve ısı transferi DTM ile çözülmüştür. Parametrelerin denklem üzerine etkileri grafik yardımı ile gösterilmiştir.

- Manyetik alan, geçirgenlik parametresi ve boyutsuz büzülme parametresinin üst kanala bitişik kanalda arttığı diğer duvarda ise azaldığı gösterilmiştir.
- Prandtl sayısı arttıkça sıcaklık değeri azalmaktadır. Geçirgenlik parametresi sıcaklığı düşürmektedir. Ayrıca boyutsuz büzülme parametresi ve manyetik alanın da arttıkça sıcaklığı azalttığı gösterilmiştir. Bunun sebebi yüzey sürtünmesi ve daralan yüzeydeki soğuma oranı olduğu görülmektedir.
- Emme parametresi arttığında boylamsal hız artarken aksine sıcaklığın azalttığı gösterilmiştir.

Bölüm 5’te paralel diskler arasındaki sıkıştırma akışı ısı transfer analizinin farklı parametreler için grafikleri gösterilmiştir. Emme ve enjeksiyon durumları incelenmiştir.

- Hız profillerini etkileyen parametrelerin emme durumundaki grafikleri enjeksiyon durumundaki grafiklerin tersini göstermektedir.
- Prandtl sayısı arttıkça sıcaklıkta artar. Eckert sayısı da Prandtl sayısı ile benzer etkiler göstermiştir.



KAYNAKLAR

1. Roberts, P. H. (1967). *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Longmans, London: Green and Co ltd.
2. Davidson, P. A. (2001). *An Introduction to Magnetohydrodynamics* (2nd. Edition). United Kingdom: Cambridge University Press.
3. Cimbala, J. M., and Çengel, Y. (2014). *Fluid mechanics fundamentals and applications* (3rd Edition). New York: McGraw-Hill Education.
4. Kunes, J. (2012). *Dimensionless physical quantities in science and engineering* (1st Edition). USA: Elsevier 2012.
5. Sağel, M. K.(2006). *Vektörel Analiz*. (3. Baskı). Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.
6. Griffiths. D. J. (1996). *Elektromanyetik teori*. (Çev. B. Karaoğlu). İstanbul: Arte Güven Yayınevi.
7. Battista, N. A. (2010). *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. New York: Stony Brooks Cole.
8. Jewett Jr, J. W., and Serway, R. A. (2008). *Physics for scientists and engineers with modern physics*. Thomson Brooks/Cole, pp.1505.
9. Ayaz, F. (2004). Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152(3), 649-657.
10. Ganji, D. D., and Hatami, M. (2014). Heat transfer and nanofluid flow in suction and blowing process between parallel disks in presence of variable magnetic field. *Journal of Molecular Liquids*, 190, 159-168.
11. Ansari, A., Irum, S., and Siddiqui, M. A. (2008) Unsteady squeezing flow of a viscous MHD fluid between parallel plates, a solution using the homotopy perturbation. *Mathematical Modelling and Analysis* , Vol. 13, 565-576.
12. Bhattacharyya, S., and Pal, A. (1997). Unsteady mhd squeezing flow between two parallel rotating discs. *Mechanics Research Communications*, 24(6),615–623.
13. Donnelly, R. J., Kuzma, D. C., and Maki, E. R., (1964). The magnetohydrodynamic squeeze film. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(3), 395-400.
14. Hamza, E. A. (1991). The magnetohydrodynamic effect on a fluid film squeezed between two rotating surfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 24(4), 547-554.
15. Elco, R. A., and Hughes W. F. (1962). The magnetohydrodynamic effect on a fluid film squeezed between two rotating surfaces. *Journal of Mechanics*, 13(1), 21-32.

16. Donnelly, R. J., Kuzma, D. C., and Maki, E. R. (1962). Magnetohydrodynamic lubrication flow between parallel plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 26(3), 537-543.
17. Agrawal, R., and Chauhan D. S. (2013). MHD flow ad heat transfer in a channel bounded by a shrinking sheet and a porous medium bed: homotopy analysis method . *International Scholarly Research Notices:Thermodynamics*, Vol.2013, 1-10.
18. Chiam, T. C. (1995). Hydromagnetic flow over a surface stretching with a power-law velocity. *International Journal of Engineering Science*, 33(3), 429-435.
19. Liu, I. C. (2005). Flow and heat transfer of an electrically conducting fluid of second grade in a porous medium over a stretching sheet subject to a transverse magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(4), 465-474.
20. Abbas, Z., Hayat, T., Oberlack, M., and Wang, Y. (2008). Hydromagnetic flow in a viscoelastic fluid due to the oscillatory stretching surface. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(8), 783-793.
21. Kandasamy, M. R., and Khamis, A. B. (2008). Effect of heat and mass transfer on nonlinear MHD boundary layer flow over a shrinking sheet in the presence of suction. *Applied Mathematics and Mechanics*, 29(10), 1309-1317.
22. Hayat, T., Javed, T., and Sajid, M. (2008). Analytic solution for MHD rotating flow of second grade fluid over a shrinking surface. *Physics Letters A*, 372(18), 3264-3273.
23. Hayat, T., and Sajid, M. (2009). The application of homotopy analysis method for MHD viscous flow due to a shrinking sheet. *Chaos, Solution & Fractals*, 39(3), 1317-1323.
24. Fang, T. G., and Zhang, J. (2009). Closed-form exact solutions of MHD viscous flow over a shrinking sheet. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(7), 2853-2857.
25. Hashim, I. and Noor, N. F. M. (2009). MHD flow ad heat transfer adjacent to a permeable shrinking sheet embedded in a porous medium. *Sains Malaysiana*, 38(4), 559-565.
26. Hashim, I., Kechil, S. A., and Noor, N. F. M. (2010).Simple non-pertubative solution for MHD viscous flow due to a shrinking sheet. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(2), 144-148.
27. Agrawal, R. and Chauhan D. S. (2011). MHD flow and heat transfer in a channel bounded by a shrinking sheet and a plate with porous substrate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 84(5), 1034-1046.
28. Ahmed, N., Jan, S. U., Khan, S. F., Khan, U., ve Mohyud-Din, S.T. (2015). Heat transfer analysis for squeezing flow between paralel disks. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 23(2), 445-450.

29. Aziz, A., and Domairy, G. (2009). Approximate analysis of MHD squeeze flow between two parallel disks with suction or injection by homotopy perturbation method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009, 1-19.
30. Babaelahi, M., Domairy, G., and Joneidi, A.A. (2011). Effect of mass transfer on the flow in the magnetohydrodynamic squeeze film between two parallel disks with one porous disk. *Chemical Engineering Communications*. 198(3), 299–311.





ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YETİM, Hayriye
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 18.08.1987, Tirebolu
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0 533 659 9235
 e-mail : hayriye_ytmmath28@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Atatürk Üniversitesi/Matematik Bölümü	2009
Lise	Eynesil YDA Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
-		

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Kitap okumak , Film izlemek, Spor yapmak



GAZİ GELECEKTİR..