

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KOMPLEKS OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
Mart 2013

Her hakkı saklıdır

## TEZ ONAYI

tarafından hazırlanan " **KOMPLEKS OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ** " adlı tez çalışması 13.03.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği / oy çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** *Doç.Dr. Gülen TUNCA BAŞCANBAZ*

**Jüri Üyeleri:**

**Başkan:** *Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ*  
*Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Doç. Dr. Gülen TUNCA BAŞCANBAZ*  
*Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Doç. Dr. Ali ARAL*  
*Kırıkkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI*  
*Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Doç. Dr. Ali OLGUN*  
*Kırıkkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü*

Yukarıdaki sonucu onaylarım

**Prof. Dr. İbrahim DEMİR**  
**Enstitü Müdürü**

# ÖZET

Doktora Tezi

## KOMPLEKS OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Gülen TUNCA BAŞCANBAZ

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemma ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde, sırasıyla reel  $q$ -Szász-Mirakjan operatörü ve reel  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünün tanımları ve sağladığı bazı özellikler verilmiştir.

Tezin beşinci ve altıncı bölümleri orjinal bulguları içermektedir.

Beşinci bölümde,  $q$ -Szász-Mirakjan operatörünün kompleks formu tanımlanıp, bazı yakınsaklık özellikleri çeşitli rekürans bağıntıları elde edilerek incelenmektedir. Bununla birlikte kompleks  $q$ -Szász-Mirakjan operatörünün iyi tanımlı ve analitik olduğu ve rilmektedir. Ayrıca Voronovskaja-tipli teorem  $q$ -türev yardımıyla ispatlanmaktadır.

Altıncı bölümde, kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörü inşa edilip, bazı yaklaşım, özellikleri süreklilik modülü ve analitik fonksiyon sınıfları yardımıyla incelenerek bazı yeni sonuçlar verilmektedir. Kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünün analitikliği gösterilip, kesin yaklaşım hızı hesaplanmaktadır. Ayrıca  $q$ -türevin operatöre uygulamaları ve şekil koruma özellikleri bazı teoremler yardımıyla gösterilmektedir.

**Mart 2013 , 50 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:**  $q$ -Gamma fonksiyonu, süreklilik modülü, Voronovskaya tipli teorem, kompleks  $q$ -Szász-Mirakjan operatörü, kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörü.

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

### APPROXIMATION PROPERTIES OF COMPLEX OPERATORS

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Doç.Dr. Gülen TUNCA BAŞCANBAZ

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions, lemma and theorems that will be needed for later use are given.

In the third and fourth chapters, the definitions of the real  $q$ -Szász-Mirakjan operator and the real  $q$ -Gauss-Weierstrass operator respectively are given and some properties of them are discussed.

The fifth and sixth chapters of this thesis include the original results.

In the fifth chapter, some approximation properties by means of various recurrence relations are given for the complex  $q$ -Szász-Mirakjan operator. Moreover, we show that complex  $q$ -Szász-Mirakjan operators are well defined and analytic. Also, a Voronovskaja-type theorem is proved with the help of  $q$ -derivative.

In the sixth chapter, complex  $q$ -Gauss-Weierstrass operator is defined. Some approximation properties are studied by modulus of continuity and classes of analytic functions and new results are obtained. Analyticity of  $q$ -Gauss-Weierstrass operator is shown and the rate of convergence is given. Also, the applications of  $q$ -derivative to operator and shape preserving properties are obtained by means of some theorems.

**March 2013 , 50 pages**

**Key Words:**  $q$ -Gamma function, modulus of continuity, Voronovskaja-type theorem, complex  $q$ -Szász-Mirakjan operator, complex  $q$ -Gauss-Weierstrass operator.

## TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren Danışman Hocam Sayın Doç.Dr. Gülen TUNCA BAŞCANBAZ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve değerli hocalarım Doç.Dr. Ali ARAL (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ile Prof.Dr. Ayhan Şerbetçi (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Doktora yaptığım süre boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.

**Didem AYDIN**  
**Ankara, Mart 2013**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
SİMGELER DİZİNİ .....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER.....	3
2.1 Süreklilik Modülü .....	3
2.2 q-Analizin Temel Kavramları.....	7
2.3 Univalent Fonksiyonlar ve S Sınıfı .....	11
3. REEL Q-SZÁSZ-MIRAKJAN OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM	
ÖZELLİKLERİ .....	12
3.1 Operatörün Tanımı.....	12
3.2 Voronovskaja-Tipli Teorem.....	12
4. REEL Q-GAUSS-WEIERSTRASS OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM	
ÖZELLİKLERİ .....	14
4.1 Operatörün Tanımı ve Bazı Özellikleri .....	14
5. KOMPLEKS Q-SZÁSZ-MIRAKJAN OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM	
ÖZELLİKLERİ .....	16
5.1 Operatörün Tanımı.....	16
5.2 Voronovskaja-Tipli Teorem.....	26
6. KOMPLEKS Q-GAUSS-WEIERSTRASS OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM	
ÖZELLİKLERİ .....	31
6.1 Operatörün Yaklaşım Özellikleri.....	31
6.2 Yaklaşımın Kesin Derecesi.....	35
6.3 Şekil Koruma Özellikleri.....	40
6.4 q-Türevin Operatöre Uygulamaları.....	43
KAYNAKLAR .....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	50

## SİMGELER DİZİNİ

$(\alpha)_n$	Pochhammer sembolü
$\sim$	Denklik
$[n]_q$	$q$ -Tamsayısı
$[n]_q!$	$q$ -Faktöriyel
$\varepsilon_q(x), E_q(x)$	Üstel Fonksiyonun $q$ -Genişlemeleri
$D_q f(x)$	$f$ fonksiyonunun $q$ -türevi
$\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$	Kompleks $q$ -Gauss-Weierstrass İntegrali
$\mathbb{D}_R$	$R$ yarıçaplı açık disk
$\omega_1(f; \delta), \omega_2(f; \delta)$	Süreklilik Modülleri
$S_n(f; q; x)$	Reel $q$ -Szász-Mirakjan Operatörü
$\mathcal{W}_n(f; q, x)$	Reel $q$ -Gauss-Weierstrass İntegrali
$\Gamma_q(x)$	$q$ -Gamma fonksiyonu
$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$	$x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarındaki bölünmüş fark
$S_n(f; q; z)$	Kompleks $q$ -Szász-Mirakjan Operatörü
$\Delta_q$	$q$ -fark operatörü
$\Delta_q^k f(x_j)$	$k$ .ncı mertebeden $q$ -fark
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ da sürekli fonksiyonların uzayı

## 1. GİRİŞ

Phillips (1996),  $q$ -binom katsayılarını ve  $q$ -binom teoremini kullanarak genelleştirilmiş  $q$ -Bernstein operatörlerini tanımlamıştır. Aral (2008), reel değişkenli  $q$ -Szász-Mirakjan operatörünü tanımlayıp, bazı yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Son yıllarda yaklaşım operatörlerinin kompleks modelleri ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır.

Lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde, dikkate alınan reel değişkenli toplam veya integral operatörlerde, reel değişken ve bulunduğu aralık, kompleks değişken ve kompleks düzlemde uygun bir bölge ile değiştirilip, fonksiyon da bu bölgede analitik olarak alınarak, yaklaşım operatörlerinin kompleks modelleri Gal (2008, 2009), Lorentz (1987) tarafından inşa edilmiştir. Örneğin, kompleks Bernstein polinomlarının birim diskin her bir kapalı alt bölgesinde ve odakları 0 ve 1 olan bir elipsin kapsadığı herhangi bir kapalı kümede düzgün yakınsaklığı Lorentz (1987) tarafından elde edilmiştir. Ancak, bu çalışmalarda yaklaşım sonuçları için sayısal kestirimler hesaplanmamıştır. Kompakt disklerde sayısal kestirimler Gal (2008) tarafından elde edilmiştir. Ayrıca, kompleks Bernstein polinomlarının geometrik özellikleri incelenmiş olup, univalent (birebir ve analitik) fonksiyonların sağladığı yıldızlılık, konvekslik ve spirale benzerlik gibi bazı şekil özelliklerinin bu operatörler tarafından korunduğu Gal (2008) tarafından gösterilmiştir.

$q$ -Bernstein polinomlarının kompleks genelleştirilmesi Ostrovska (2003), Gal (2009) tarafından inşa edilmiş olup, yaklaşım için eşitsizlikler ve Voronovskaja-tipli teorem elde edilmiştir. Bu sonuçlar,  $q$ -kompleks Bernstein polinomları ve türevlerinin eş zamanlı yaklaşımındaki kesin derecelerin bulunmasını sağlar.

Son yıllarda,  $q$ -integral ve  $q$ -türev kullanılarak birçok operatörün yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. Bunlardan birisi de, Aral ve Anastassiou 2010 tarafından tanımlanan yeni  $q$ -Gauss-Weierstrass singüler integral operatörleridir. Bu çalışmada, ağırlıklı yaklaşım incelenmiş ve yaklaşım hızı, ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır. Bununla birlikte, türevlerle yaklaşım da incelenmiştir.

$q$ -Picard ve  $q$ -Gauss-Weierstrass singüler integral operatörlerinin yaklaşım özellikleri Aral (2008) tarafından çalışılmıştır. Bu operatörlerin yaklaşım ve şekil koruma özellikleri Aral ve Gal (2008) tarafından incelenmiştir. Bununla birlikte izotrop olmayan  $\beta$  uzaklığına bağlı çok değişkenli  $q$ -Picard singüler integrallerinin yaklaşım özellikleri Aral ve Anastassiou (2009) tarafından incelenmiştir.

Bazı kompleks lineer veya nonlinear integral konvolusyon operatörleri için iyi yaklaşım özellikleri Anastassiou ve Gal (2006) tarafından elde edilmiş ve orijinal fonksiyonun bazı şekil özelliklerinin operatörler tarafından korunduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmalardan yararlanarak, kompleks  $q$ -Szász Mirakjan operatörü ve kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörü inşa edilip, yaklaşım ve geometrik özellikleri incelenecektir.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak  $q$ -Szász-Mirakjan operatörünün kompleks formu tanımlanacaktır. Daha sonra kompleks  $q$ -Szász-Mirakjan operatörü dikkate alınıp, yaklaşım problemleri için gerekli olan bazı kestirimler elde edilecektir. Voronovskaja-tipli teorem,  $q$ -türev yardımı ile araştırılacaktır. Klasik Szász-Mirakjan operatörlerinin sağladığı önemli özellikler ile kompleks  $q$ -Szász-Mirakjan operatörlerinin özellikleri arasındaki ilişkiler üzerinde durulacaktır.

İkinci olarak  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünün kompleks formu tanımlanacaktır. Daha sonra kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünün yaklaşım özellikleri ile ilgili sonuçlar elde edilecektir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan temel bilgiler özet olarak sunulacaktır.

### 2.1 Süreklilik Modülü

**Tanım 2.1**  $f$ ,  $[a, b]$  de sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Her  $\delta > 0$  sayısı için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanan  $\omega$  fonksiyonuna,  $f$  fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Anastassiou ve Gal 2000).

Süreklilik modülünün bazı özellikleri aşağıdaki lemmalar ile verilecektir.

**Lemma 2.1**  $\omega(f; \delta)$  fonksiyonu  $\delta$  ya göre artandır.

**İspat.**  $0 < \delta_1 \leq \delta_2$  olsun. Bu durumda  $|x - y| \leq \delta_2$  koşulunu sağlayan  $(x, y)$  sayı çiftlerinin kümesi,  $|x - y| \leq \delta_1$  koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha geniştir. Kümelerdeki supremum kavramı düşünülürse, süreklilik modülünün tanımı gereğince

$$\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

olduğu görülür. ■

**Lemma 2.2**  $f$ ,  $[a, b]$  de sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0$$

dır.

**İspat.**  $f$  sürekli ise;  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  sayısı vardır ki  $|x - y| < \delta$  için  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  dir. Yani  $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$  dir. Bu durumda  $\delta \rightarrow 0$  için  $x \rightarrow y$  olacağından  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  gerçekleşir. Dolayısıyla

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0.$$

■

**Lemma 2.3**  $f$   $[a, b]$  de sürekli,  $m \geq 1$  ve  $m \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta).$$

**Lemma 2.4**  $f$   $[a, b]$  de sürekli ve  $\forall C > 0$  reel sayısı için

$$\omega(f; C\delta) \leq (C + 1)\omega(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** Süreklilik modülü artan olduğundan  $m < C < m + 1$  için

$$\begin{aligned} \omega(f; C\delta) &\leq \omega(f; (m + 1)\delta) \\ &\leq (m + 1)\omega(f; \delta) \\ &\leq (C + 1)\omega(f; \delta) \end{aligned}$$

bulunur. ■

**Lemma 2.5**  $f$   $[a, b]$  de sürekli ise

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** Süreklilik modülünün tanımından

$$\begin{aligned} \omega(f; |t - x|) &= \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t - x| \leq |t - x|}} |f(t) - f(x)| \\ &= \sup_{x, t \in [a, b]} |f(t) - f(x)| \\ &\geq |f(t) - f(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Lemma 2.6**  $f$   $[a, b]$  de sürekli ise

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.**

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq \omega\left(f; \frac{|t-x|}{\delta}\delta\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f; \delta) \end{aligned}$$

bulunur. ■

**Tanım 2.2**  $h \in R$ ,  $r \geq 1$ ,  $\Delta$  ileri fark operatörü ve  $f$  reel değerli bir fonksiyon olsun.  $\Delta$  ileri fark operatörünün tanımından

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^r f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(x)), \quad r \geq 2$$

eşitlikleri vardır.

$f \in C[0,1]$  olsun. Bu uzayda norm

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

ile verilir.  $\delta > 0$ ,  $r \geq 1$  tamsayısı için  $f$  fonksiyonunun  $r$  nci mertebeden düzgünlük modülü

$$\omega_r(f; \delta) = \max_{h \leq \delta} \|\Delta_h^r f\|$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.3**  $D \subset \mathbb{C}$  bir bölge,  $f(z)$   $D$  de tanımlı bir kompleks fonksiyon olsun. Eğer  $f(z)$   $D$  nin her bir  $c$  noktasının bir komşuluğunda  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  şeklinde bir kuvvet serisine açılabilirse  $f$  ye  $D$  de analitiktir denir (Kodaira 1978).

**Teorem 2.1** (Vitali)  $\Omega, \mathbb{C}$  de bir bölge ve  $F \subset \Omega$  kümesi  $\Omega$  da en az bir yığılma noktasına sahip olsun.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Omega$  da analitik fonksiyonların bir dizisi olmak üzere,  $\Omega$  daki her bir  $K$  kompakt altkümeye  $|f_n(z)| \leq M(K)$ ,  $n = 1, 2, \dots, z \in K$  koşulu sağlanacak şekilde bir  $M(K)$  sayısı varsa ve her bir  $z \in F$  için  $(f_n(z))_n$   $F$  de noktasal yakınsak ise,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\Omega$  nın kompakt altkümelerinde düzgün yakınsaktır (Kohr ve Mocanu 2005).

Bu çalışmada,  $\Omega$  bölgesi;  $R > 1$  olmak üzere,

$$\Omega = \mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\},$$

açık diskleri,  $F$ ;  $\mathbb{D}_R$  nin içinde bir aralık ve kompakt alt kümeler ise  $1 \leq r < R$  olmak üzere

$$\overline{\mathbb{D}}_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$$

kapalı diskleri olacaktır.

**Teorem 2.2** (Cauchy Formülü)  $r > 0$ ,  $f : \overline{\mathbb{D}}_r \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu  $\mathbb{D}_r$  de analitik ve  $\overline{\mathbb{D}}_r$  da sürekli olsun. Bu durumda herhangi bir  $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$  ve her  $|z| < r$  için  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$  ve  $i^2 = -1$  olmak üzere

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z)^{p+1}} du$$

gerçeklenir (Kohr ve Mocanu 2005).

**Teorem 2.3** (Weierstrass)  $\Omega \subset \mathbb{C}$  açık küme olsun.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Omega$  da analitik fonksiyonların dizisi,  $f$  analitik fonksiyonuna  $\Omega$  da yakınsak ve  $\Omega$  nın her bir kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak olsun. Bu durumda,  $\Omega$  nın kompakt alt kümelerinde  $p \in \mathbb{N}$  için  $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$   $p$ .türevlerin dizisi  $f^{(p)}$  ye düzgün yakınsar.

Gerçekten Cauchy formülü ile

$$f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_n(u) - f(u)}{(u-z)^{p+1}} du$$

yazabiliriz. Modül alınrsa teorem gerçekleşir (Kohr ve Mocanu 2005).

**Teorem 2.4** (Maksimum Modül Prensibi) Eğer  $\Omega \subset \mathbb{C}$  sınırlı bir bölge ve  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  da analitik ve  $\overline{\Omega}$  da sürekli ise,  $\Omega$  nın sınırı  $\Gamma$  olmak üzere

$$\max \{|f(z)|; z \in \overline{\Omega}\} = \max \{|f(z)|; z \in \Gamma\}$$

eşitliği vardır (Kohr ve Mocanu 2005).

**Teorem 2.5** (Bernstein Eşitsizliği)  $a_k \in \mathbb{C}$  ve her  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  için  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  olsun.  $r > 0$  için  $\|P_n\|_r$  normu

$$\|P_n\|_r = \max \{P_n(z); |z| \leq r\}$$

olmak üzere aşağıdakiler gerçekleşir.

*i.* Her  $|z| \leq 1$  için  $|P'_n(z)| \leq n \|P_n\|_1$

*ii.* Eğer  $r > 0$  ise her  $|z| \leq r$  için  $|P'_n(z)| \leq \frac{n}{r} \|P_n\|_r$  (Gal 2009).

## 2.2 $q$ -Analizin Temel Kavramları

**Tanım 2.4**  $q > 0$  ve  $\lambda$  negatif olmayan bir reel sayı olsun.  $[\lambda]_q$ ,

$$[\lambda]_q = \begin{cases} \frac{1-q^\lambda}{1-q} & , q \neq 1 \\ \lambda & , q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $q$ -sayısını gösterir. Eğer  $\lambda = n$  negatif olmayan bir tamsayı ise  $[n]_q$ ,  $q$ -tamsayısını gösterir (Phillips 2003).

**Tanım 2.5**  $n$  negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere  $[n]_q$   $q$ -tamsayısının faktöriyeli

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve  $n$  nin  $q$ -faktöriyeli denir (Phillips 2003).

**Tanım 2.6** Pochhammer sembolünün  $q$ -genişlemesi

$$(a; q)_0 = 1, \quad (a; q)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, a \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır (Kac ve Cheung 2002).

**Tanım 2.7**  $(x; q)_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - xq^{k-1})$  olmak üzere  $e^x$  üstel fonksiyonunun  $q$ -genişlemeleri sırasıyla

$$\varepsilon_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} x^n = \frac{1}{((1-q)x; q)_\infty}, \quad |x| < \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1, \quad (2.2)$$

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q!} x^n = (-1-q)x ; q)_{\infty}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |q| < 1 \quad (2.3)$$

dir. Burada (2.2) ve (2.3) den

$$\varepsilon_q(x)E_q(-x) = 1$$

ve

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \varepsilon_q(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} E_q(x) = e^x$$

bulunur (Kac ve Cheung 2002).

**Tanım 2.8**  $q > 0$  olsun. Bir  $f$  fonksiyonunun  $q$ -türevi

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, \quad x \neq 0, \quad D_q f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} D_q f(x) \quad (2.4)$$

ile tanımlanır ve  $D_q^0 f := f$ ,  $D_q^n f := D_q(D_q^{n-1} f)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Bununla birlikte iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün  $q$ -türevi

$$D_q(u(x)v(x)) = D_q(u(x))v(x) + u(qx)D_q(v(x)), \quad (2.5)$$

$$D_q\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(qx)D_q(u(x)) - u(qx)D_q(v(x))}{v(x)v(qx)} \quad (2.6)$$

şeklindedir (Kac ve Cheung 2002).

**Tanım 2.9**  $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $[a, b]$  aralığına ait noktalar olsun.

$$\begin{aligned} & f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ = & \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

ifadesine  $f$  fonksiyonunun  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarındaki bölünmüş farkı denir. Ayrıca bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

şeklinde de gösterilebilir (Phillips 2003).

**Tanım 2.10**  $\forall j, k \geq 0$  için

$$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$$

ve

$$\Delta^{k+1} f(x_j) = \Delta^k f(x_{j+1}) - \Delta^k f(x_j)$$

şeklinde tanımlanan  $\Delta$  operatörüne ileri fark operatörü denir (Phillips 2003).

**Teorem 2.6**  $\forall j, k \geq 0$  için  $x_j = j$  olmak üzere

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{\Delta^k f(x_j)}{k!}$$

eşitliği sağlanır (Phillips 2003).

**Tanım 2.11** ( $q$ -fark)  $\forall j, k \geq 0$  için  $x_j = [j]$  olsun.  $\Delta_q^0 f(x_j) = f(x_j)$  ve  $\Delta_q^1 f(x_j) = \Delta_q f(x_j)$  olmak üzere  $k \geq 0$  tamsayısı için  $q$ -fark

$$\Delta_q^{k+1} f(x_j) = \Delta_q^k f(x_{j+1}) - q^k \Delta_q^k f(x_j)$$

şeklinde yazılabilir (Phillips 2003).

**Tanım 2.12**  $q$ -gamma integrali

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1} E_q(-qx) d_q x, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\Gamma_q(t+1) = [t]_q \Gamma_q(t) \text{ ve } \Gamma_q(1) = 1$$

eşitlikleri sağlanır (Kac ve Cheung 2002).

**Tanım 2.13**  $0 < q < 1$  ve  $x > 0$  için  $q$ -gama fonksiyonu

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^x; q)_\infty} (1-q)^{1-x}$$

şeklinde tanımlanır. Euler-Gamma fonksiyonunun  $q$ -genişlemesi,  $E_q$ , (2.3) eşitliği ile verilen fonksiyon olmak üzere,

$$c_q(x) \Gamma_q(x) = \frac{1-q}{\ln q^{-1}} q^{\frac{x(x-1)}{2}} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{E_q((1-q)t)} dt, \quad x > 0$$

formülü ile tanımlanır, buradaki  $c_q(x)$  aşağıdaki şartları sağlar.

**a)**  $c_q(x+1) = c_q(x)$ ,

**b)**  $c_q(n) = 1, n = 0, 1, 2, \dots$ ,

**c)**  $\lim_{q \rightarrow 1^-} c_q(x) = 1$  (Atakishiyev ve Atakishiyeva 2001).

**Tanım 2.14**  $q$ -Jackson İntegrali ve  $q$ -Genelleştirilmiş İntegrali sırasıyla

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n) q^n, \quad a \in R \quad (2.8)$$

ve

$$\int_0^{\frac{\infty}{A}} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right) \frac{q^n}{A}, \quad A > 0 \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca  $[a, b]$  aralığındaki  $q$ -Jackson integrali

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir. Jackson integralinde,  $u(x) = \gamma x^\beta$  fonksiyonu için değişken değiştirme formülü

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) d_q u = \int_a^b f(u(x)) D_{q^{1/\beta}} u(x) d_{q^{1/\beta}} x \quad (2.11)$$

şeklinde verilir (Kac ve Cheung 2002).

$q$ -türev için genel bir zincir kuralı yoktur.  $f(u(x))$  formundaki bir fonksiyon için  $q$ -türev;  $\alpha, \beta$  sabit ve  $u = u(x) = \alpha x^\beta$  olmak üzere aşağıdaki biçimde verilir.

$$D_q f(u(x)) = (D_{q^\beta} f)(u(x)) D_q u(x). \quad (2.12)$$

**Tanım 2.15** ( $q$ -L'Hospital Kuralı)  $f$  ve  $g$ ,  $a$  noktasını içeren herhangi bir aralıkta, sürekli ve  $q$ -türevlenebilir fonksiyonlar ve  $q \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  için  $(D_q g)(x) \neq 0$  olsun.

Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ve  $\frac{\Lambda}{q} \in (0, 1)$  vardır öyleki her  $q \in (\frac{\Lambda}{q}, 1) \cup (1, \frac{\Lambda}{q^{-1}})$  için

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(D_q f)(x)}{(D_q g)(x)} = L$$

ise,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

dir.

**Teorem 2.7** (*q-Lagrange*)  $f(x)$   $[a, b]$  aralığında sürekli fonksiyon olsun.  $\overset{\wedge}{q} \in (0, 1)$  vardır öyleki  $\forall q \in (\overset{\wedge}{q}, 1) \cup (1, \overset{\wedge}{q}^{-1})$  ( $\exists \xi \in (a, b)$ ) :  $f(b) - f(a) = (D_q f)(\xi)(b - a)$  dir.

### 2.3 Univalent Fonksiyonlar ve S sınıfı

**Tanım 2.16** Bir  $D$  bölgesinde birebir ve analitik  $f$  fonksiyonuna, bu bölgede univalent fonksiyon denir (Duren 1983).

**Teorem 2.8**  $f(z)$  fonksiyonu bir  $D$  bölgesinde univalent ise bu bölgede  $f'(z) \neq 0$  dir (Duren 1983).

**Tanım 2.17**  $|z| < 1$  dairesinde univalent olan ve  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  şartlarını sağlayan  $f(z)$  fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa  $S$  sınıfı denir. Dolayısıyla  $S$  deki her  $f(z)$  fonksiyonunun seri açılımı,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindedir (Duren 1983).

**Tanım 2.18** Bir  $D$  bölgesinin her noktası  $D$  deki sabit bir  $O$  noktasına  $D$  nin içinde kalan bir doğru parçası ile birleştirilebiliyorsa  $D$  ye  $O$  noktasına göre yıldızlı (starlike) bölge denilir. Orijine göre yıldızlı olan bir bölgeye ise sadece, yıldızlı bölge denir (Duren 1983).

**Tanım 2.19** Bir  $D$  bölgesinde univalent bir  $f(z)$  fonksiyonu,  $D$  yi yıldızlı bir bölgeye dönüştürüyorsa  $f(z)$  ye yıldızlı fonksiyon denilir (Duren 1983).

### 3. REEL $Q$ -SZÁSZ- MİRÁKJAN OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

#### 3.1 Operatörün Tanımı

Szász-Mirakjan operatörünün  $q$ -genişlemesi Aral (2008) tarafından  $0 < q < 1$  olmak üzere

$$S_n^q(f)(x) := E_q \left( - [n]_q \frac{x}{b_n} \right) \sum_{j=0}^{\infty} f \left( \frac{[j]_q}{[n]_q} b_n \right) \frac{([n]_q x)^j}{[j]_q! (b_n)^j}$$

tanımlanmıştır. Burada  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pozitif sayıların artan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  olacak şekilde iraksak bir dizisi,  $0 \leq x < \frac{b_n}{(1-q)[n]_q}$  ve  $f \in C[0, \infty)$  olarak alınmıştır, ayrıca  $e_m(t) := t^m$ ,  $m = 0, 1, 2$  olmak üzere

$$S_n^q(e_0; x) = 1,$$

$$S_n^q(e_1; x) = x,$$

$$S_n^q(e_2; x) = qx^2 + \frac{b_n}{[n]_q} x$$

eşitlikleri vardır. Bu çalışmada aşağıdaki Voronovskaja-tipli teorem elde edilmiştir.

#### 3.2 Voronovskaja-Tipli Teorem

**Teorem 3.1**  $f \in C[0, \infty)$  fonksiyonu sınırlı olsun ve  $0 < q_n < 1$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $q_n \rightarrow 1$  olacak şekilde  $q = q_n$  dizisi seçelim. Yeterince büyük  $n$  için  $x \in \left[0, \frac{b_n}{(1-q)[n]_q}\right)$  noktasında  $f$  nin ikinci mertebeden türevi  $f''(x)$  mevcut olsun. Eğer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$  ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{q_n}}{b_n} (S_n^{q_n}(f; x) - f(x)) = \frac{1}{2} x f''(x)$$

elde edilir.

Bu teorem,  $q$ -Taylor açılımı ve  $q$ -L'Hospital kuralı kullanılarak ispatlanmaktadır (Aral 2008).

**Sonuç 3.1**  $f \in C[0, \infty)$  sınırlı fonksiyon ve  $0 < q_n < 1$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $q_n \rightarrow 1$  olacak şekilde  $q = q_n$  dizisi seçelim. Yeterince büyük  $n$  için  $x \in \left(0, \frac{b_n}{(1-q)[n]_q}\right)$

noktasında  $f$  nin ikinci mertebeden  $q$ -türevi  $D_q^2 f(x)$  mevcut olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0 \text{ ise,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{q_n}}{b_n} (S_n^{q_n}(f; x) - f(x)) = \frac{1}{2} x \lim_{q_n \rightarrow 1} D_{q_n}^2 f(x)$$

gerçeklenir, eğer  $x \in \left[0, \frac{b_n}{(1-q)[n]_q}\right)$  noktasında  $f$  nin ikinci mertebeden türevi  $f''(x)$  varsa bu durumda yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{q_n}}{b_n} (S_n^{q_n}(f; x) - f(x)) = \frac{1}{2} x f''(x)$$

şeklinde bulunur.

**Uyarı 3.1** Sıfırı içermeyen bir aralıkta sürekli bir fonksiyon, sürekli  $q$ -türevlenebilirdir.

Bu nedenle sıfırı içermeyen bir aralıktaki her  $x$  için,  $f$  nin  $q$ -türevleri sonlu olduğundan Voronovskaja-tipli teoremden,  $q$ -türevlenebilme şartı çıkarılabilir. Diğer bir deyişle, Voronovskaja-tipli teorem sürekli ve sınırlı fonksiyonlar için sağlanır.

**Sonuç 3.2**  $f \in C[0, \infty)$  sınırlı fonksiyon ve  $0 < q_n < 1$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $q_n \rightarrow 1$  olacak şekilde  $q = q_n$  dizisi seçelim. Eğer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$  ise, yeterince büyük  $n$  ve her  $x \in \left(0, \frac{b_n}{(1-q)[n]_q}\right)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{q_n}}{b_n} (S_n^{q_n}(f; x) - f(x)) = \frac{1}{2} x \lim_{q_n \rightarrow 1} D_{q_n}^2 f(x)$$

sağlanır.

## 4. REEL $Q$ -GAUSS-WEIERSTRASS OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

$\zeta > 0$  ve  $f \in \mathbb{R}$  de sürekli olmak üzere, Gauss-Weierstrass singüler integrali

$$W_\zeta(f, x) := \frac{1}{\sqrt{\pi\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-\frac{t^2}{\zeta}} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

olarak tanımlanır. Bu integral,  $f$  ye göre lineer ve pozitiftir (Anastassiou ve Gal 2000).

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  açık birim disk ve  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , fonksiyonu  $\mathbb{D}$  de analitik ve  $\overline{\mathbb{D}}$  de sürekli olsun. Kompleks Gauss-Weierstrass operatörü

$$W_\zeta(f, z) := \frac{1}{\sqrt{\pi\zeta}} \int_{-\pi}^{\pi} f(ze^{it}) e^{-\frac{t^2}{\zeta}} dt$$

olarak tanımlanır (Gal 2009).

### 4.1 Operatörün Tanımı ve Bazı Özellikleri

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in (0, 1)$  ve  $x \in \mathbb{R}$  için,  $f$  nin  $q$ -Gauss-Weierstrass integrali

$$\begin{aligned} & W_n(f; q, x) \\ & : = \frac{\sqrt{[n]}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\sqrt{[n]}\sqrt{1-q^2}} f(x+t) E_{q^2} \left( -q^2 [n] \frac{t^2}{4} \right) d_q t \end{aligned} \quad (4.1)$$

olarak tanımlanmaktadır (Anastassiou ve Aral 2010).

**Lemma 4.1** Her  $k \in \mathbb{N}$  için

$$W_n(t^k; q, x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{2^j \Gamma_{q^2}(\frac{j+1}{2})}{[n]^{\frac{j}{2}} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} x^{k-j}$$

sağlanır.

**İspat.** (4.1) den

$$\begin{aligned}
& W_n(t^k; q, x) \\
&= \frac{\sqrt{[n]}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]}\sqrt{1-q^2}}} (x+t)^k E_{q^2} \left( -q^2 [n] \frac{t^2}{4} \right) d_q t \\
&= \frac{\sqrt{[n]}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]}\sqrt{1-q^2}}} t^j E_{q^2} \left( -q^2 [n] \frac{t^2}{4} \right) d_q t. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

$q$ -türev tanımını kullanarak  $t = 2 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{[n]}}$  ifadesinin  $q$ -türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
D_{q^2}(t) &= \frac{2}{\sqrt{[n]}} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{q^2 u}}{(1-q^2)u} \\
&= \frac{2}{(q+1)\sqrt{[n]}\sqrt{u}} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

bulunur.  $\beta = \frac{1}{2}$  iken  $q$ -integral için değişken değiştirme formülü (2.11) den ve sonra (2.7) ve (4.3) den  $j = 0, 1, \dots, k$  için

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]}\sqrt{1-q^2}}} t^j E_{q^2} \left( -q^2 [n] \frac{t^2}{4} \right) d_q t \\
&= \frac{2^{j+1}}{(q+1)[n]^{\frac{j+1}{2}}} \int_0^{\frac{1}{1-q^2}} u^{\frac{j-1}{2}} E_{q^2}(-q^2 u) d_{q^2} u \\
&= \frac{2^{j+1} \Gamma_{q^2}(\frac{j+1}{2})}{[n]^{\frac{j+1}{2}} (q+1)}.
\end{aligned}$$

Böylece (4.2) den istenilen sonuç elde edilir. ■

**Uyarı 4.1** (4.1) de verilen  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörü  $W_n$ , (2.9)  $q$ -genelleştirilmiş integral formülü yardımıyla aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$W_n(f; q, x) := \frac{\sqrt{[n]}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\infty}{\sqrt{[n]}\sqrt{1-q^2}}} f(x+t) E_{q^2} \left( -q^2 [n] \frac{t^2}{4} \right) d_q t.$$

Ayrıca Anasstasiou ve Aral (2010) bu çalışmalarında, ağırlıklı uzaylarda yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

## 5. KOMPLEKS $Q$ -SZÁSZ- MİRAKJAN OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

### 5.1 Operatörün Tanımı

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için Szász-Mirakjan operatörü

$$S_n f(x) := e^{-nx} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{n}\right) \frac{(nx)^j}{j!}, \quad x \in [0, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanmıştır (Szász 1959). Buradaki  $f$ ,  $S_n f(x)$  in  $f(x)$  e yakınsaklığı için, üstel büyüyen bir fonksiyon, yani  $\forall x \in [0, \infty)$  için,  $C, B > 0$  olmak  $|f(x)| \leq C e^{Bx}$  olarak alınmıştır. Gal (2008, 2009) daki sonuçlar, kompleks Favard-Szász-Mirakjan operatörlerine (Gal 2008a) de genişletilmiştir. Bu çalışmada, kompleks Favard-Szász-Mirakjan operatörleri, reel formda  $x$  yerine  $z$  alınarak

$$S_n f(z) := e^{-nz} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{n}\right) \frac{(nz)^j}{j!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde elde edilmiştir.  $f$  fonksiyonu  $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  açık diskinde analitik olarak kabul edilip,  $S_n f(z)$  operatörleri ile yaklaşımda,  $f : [R, \infty) \cup \overline{D_R} \rightarrow C$  olarak alınmış ve üstel büyüyen  $f : [0, \infty) \rightarrow C$  fonksiyonunun, merkezi orijinde olan açık bir diskte analitik olan bir fonksiyona üstel büyümeyi koruyarak devam ettiği kabul edilmiş ve merkezi orijinde olan kapalı disklerde sayısal kestirimler elde edilmiştir.  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pozitif sayıların artan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  olacak şekilde ıraksak bir dizisi olmak üzere, Stypinsky (1974), Szász-Chlodovsky operatörünü

$$L_n f(x) := e^{-\frac{nx}{b_n}} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{n}\right) \left(\frac{nx}{b_n}\right)^j \frac{1}{j!}, \quad x \in [0, b_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde inşa etmiştir. Chlodovsky tür genelleştirilmiş operatörler için son zamanlarda yapılan çalışmalar Karsli (2011) de detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Voronovskaja-

tipli sonuçlar için Butzer-Karsli (2009) ve Karsli (2011) çalışmalarına ve referanslarına bakılabilir. Szász-Mirakjan operatörünün  $q$ -genişlemesi Aral tarafından  $0 < q < 1$  olmak üzere

$$S_n^q(f)(x) := E_q \left( - [n]_q \frac{x}{b_n} \right) \sum_{j=0}^{\infty} f \left( \frac{[j]_q}{[n]_q} b_n \right) \frac{([n]_q x)^j}{[j]_q! (b_n)^j} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Aral 2008). Burada  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pozitif sayıların artan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  koşulunu sağlayan bir dizi,  $0 \leq x < \frac{b_n}{(1-q)[n]_q}$  ve  $f \in C[0, \infty)$  dir.

Mahmudov (2010), kompleks  $q$ -Szász-Mirakjan operatörünü  $q > 1$  olmak üzere,  $[0, \infty)$  aralığında sürekli ve sınırlı fonksiyonlar için

$$M_{n,q}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} f \left( \frac{[k]}{[n]} \right) \frac{1}{q^{k(k-1)/2}} \frac{[n]^k z^k}{[k]!} \varepsilon_q(-[n] q^{-k} z)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada  $f$  fonksiyonları uygun kompakt disklerde analitik alınarak, yakınsaklık için eşitsizlikler, Voronovskaja-tipli teorem elde edilmiştir. Bununla birlikte yakınsaklık hızı hesaplanmıştır.

Bu bölümde, (5.1) ile tanımlanan  $q$ -Szász-Mirakjan operatörünün kompleks formu tanımlanıp, yaklaşımla ilgili olan eşitsizlikler ve Voronovskaja-tipli teorem elde edilecektir.

**Tanım 5.1**  $n \in \mathbb{N}$  ve  $f$  fonksiyonu  $f : [R, \infty) \cup \overline{\mathbb{D}_R} \rightarrow \mathbb{C}$ , üstel büyüyen ve 0 merkezli açık diskte analitik devama sahip bir fonksiyon olmak üzere, kompleks  $q$ -Szász-Mirakjan operatörü (5.1) ile verilen  $S_n^q(f)(x)$  operatöründe  $x$  yerine  $z$  alınarak

$$\begin{aligned} S_n^q(f; z) &= S_n(f; q; z) \\ &= : E_q \left( - [n]_q \frac{z}{b_n} \right) \sum_{k=0}^{\infty} f \left( \frac{[k]_q}{[n]_q} b_n \right) \frac{([n]_q z)^k}{[k]_q! (b_n)^k} \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır.

**Uyarı 5.1**  $0 < q < 1$  ve  $q$  sabit bir değer olmak üzere,  $n \rightarrow \infty$  iken  $\frac{1}{[n]} \rightarrow 1 - q$  dur.  $S_n^q(f; z)$  nin yakınsaklık özelliklerini sağlaması için,  $0 < q_n < 1$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $q_n \rightarrow 1$  olacak şekilde  $q = q_n$  dizisi seçelim. Böylece  $n \rightarrow \infty$  için  $[n]_{q_n} \rightarrow \infty$  dır. Diğer yandan  $(b_n)$  pozitif sayıların dizisi olmak üzere  $n \rightarrow \infty$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  ve  $R_{n, q_n} = \frac{b_n}{[n]_{q_n}(1-q_n)} \rightarrow \infty$  sağlanır. Gerçekten  $q_n$  dizisi,  $q_n = \frac{n}{n+1}$  seçilirse  $n \rightarrow \infty$  için  $q_n^n \rightarrow \frac{1}{e}$  dir ve bu da  $n \rightarrow \infty$  için  $R_{n, q_n} = \frac{b_n}{[n]_{q_n}(1-q_n)} = \frac{b_n}{1-q_n^n} \rightarrow \infty$  olduğunu gösterir.

**Lemma 5.1**  $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ,  $R_{n, q} = \frac{b_n}{[n]_q(1-q)}$  olmak üzere  $1 < R < R_{n, q}$  ve

$$f : [R, \infty) \cup \overline{\mathbb{D}_R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$[R, \infty) \cup \overline{\mathbb{D}_R}$  de sürekli,  $\mathbb{D}_R$  de analitik olsun. Yani her  $z \in \mathbb{D}_R$  için  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  serisi ve  $M, C, B > 0$  sabitleri ile her  $k = 0, 1, \dots$  için  $|c_k| \leq \frac{MA^k}{k!}$  şartını sağlayan  $A \in (\frac{1}{R}, 1)$  vardır. Buradan, her  $z \in \mathbb{D}_R$  için  $|f(z)| \leq Me^{A|z|}$  ve her  $x \in [R, \infty)$  için  $|f(x)| \leq Ce^{Bx}$  şartları sağlanır). Böylece  $S_n^q(f; z)$   $\mathbb{D}_R$  de, iyi tanımlıdır ve  $z$  nin analitik bir fonksiyonudur.

**İspat.**  $\alpha_{q, k} := \frac{([n]_q)^k |z|^k}{[k]_q! (b_n)^k} e^{B \left( \frac{[k]_q}{[n]_q} b_n \right)}$  olmak üzere (5.2) nin modülü alınarak

$$\begin{aligned} |S_n^q(f; z)| &\leq \left| E_q \left( -[n]_q \frac{z}{b_n} \right) \right| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_q)^k |z|^k}{[k]_q! (b_n)^k} \left| f \left( \frac{[k]_q}{[n]_q} b_n \right) \right| \\ &\leq C \left| E_q \left( -[n]_q \frac{z}{b_n} \right) \right| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{q, k} \end{aligned}$$

bulunur. Oran testi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1, q}}{\alpha_{k, q}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[n]_{q_n} |z|}{b_n [k+1]_q} e^{B_m \left( \frac{[k+1]_q}{[n]_q} b_n - \frac{[k]_q}{[n]_q} b_n \right)} \\ &= \frac{[n]_q}{b_n} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{B_m q^k \frac{b_n}{[n]_q} |z|}}{[k+1]_q} \\ &= \frac{[n]_q}{b_n} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r e^{B_m q^k \frac{b_n}{[n]_q} |z|}}{\frac{1-q^{k+1}}{1-q}} \\ &= \frac{[n]_q}{b_n} (1-q) |z|, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da serinin  $|z| < R$  için yakımsak olduğunu gösterir. Hipotezden  $R < R_{n,q} := \frac{b_n}{[n]_{(1-q)}}$  dir. Böylece  $S_n^q(f; z)$  iyi tanımlıdır ve  $z$  nin analitik bir fonksiyonudur. Ayrıca  $S_n^q(f; z)$  operatörünün analitikliği,  $f$  üzerindeki hipotezden elde edilebilir (Gergen vd. 1963). ■

**Teorem 5.1** *Kabul edelim ki Lemma 5.1 deki şartlar sağlansın. Ayrıca  $0 < q_n < 1$  olmak üzere  $q = q_n$  dizisi  $n \rightarrow \infty$  iken  $q_n \rightarrow 1$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $\frac{b_n}{[n]_{q_n}} \rightarrow 0$  koşullarını gerçeklesin.*

*i.  $1 \leq r < \frac{1}{A}$  keyfi sabit olsun. Her  $|z| \leq r$  ve  $n > n_o$  için*

$$C_{r,A} = \left(1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}\right) \frac{MA}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^k < \infty$$

*olmak üzere*

$$|S_n^{q_n}(f; z) - f(z)| \leq C_{r,A}.$$

*ii.  $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$  ve  $C_{r_1,A}$  (i) deki gibi verilsin. Kompleks  $q$ - Szász-Mirakjan operatörünün eş zamanlı yaklaşımı için*

$$|D_{q_n}^{(p)}(S_n^{q_n}(f; z)) - D_{q_n}^{(p)}f(z)| \leq C_{r_1,A} \frac{p!r_1}{(r_1 - r)^{p+1}}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

**İspat. i.** Aral (2008),  $q$ - Szász-Mirakjan operatörünün bölünmüş farklar yardımı ile,

$$S_n^q(f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} f \left[ 0, \frac{b_n [1]_q}{[n]_q}, \dots, \frac{b_n [j]_q}{[n]_q} \right] x^j$$

şeklinde yazılabileceğini göstermiştir. Kompleks  $q$ -Szász Mirakjan operatöründe  $e_k(z) = z^k$  yazılırsa, derecesi  $\leq k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) olan  $T_{n,k}(z) := S_n^q(e_k; z)$  polinomu elde edilir. Burada her  $z \in \mathbb{C}$  için

$$T_{n,0}(z) = 1, T_{n,1}(z) = z$$

sağlanır. Bununla birlikte  $T_{n,k}(z)$  ifadesinin  $z \neq 0$  için  $q$ -türevi alınırsa, her  $z \in \mathbb{C}$  ve  $k = 0, 1, 2, \dots$  için

$$\begin{aligned}
& D_q(T_{n,k}(z)) \\
&= -\frac{[n]_{q_n}}{b_n} E_q \left( -[n]_{q_n} q_n \frac{z}{b_n} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{[j]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n \right)^k \frac{([n]_{q_n} q_n z)^j}{[j]_{q_n}! (b_n)^j} \\
&\quad + E_q \left( -[n]_{q_n} \frac{z}{b_n} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{[j]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n \right)^k \frac{([n]_{q_n})^j [j]_{q_n} z^{j-1}}{[j]_{q_n}! (b_n)^j} \frac{z [n]_{q_n} b_n}{z b_n [n]_{q_n}} \\
&= \frac{[n]_{q_n}}{z b_n} T_{n,k+1}(z) \\
&\quad - \frac{[n]_{q_n}}{b_n} E_q \left( -[n]_{q_n} q_n \frac{z}{b_n} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{[j]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n \right)^k \frac{([n]_{q_n} q_n z)^j}{[j]_{q_n}! (b_n)^j}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$T_{n,k}(z) = z T_{n,k-1}(q_n z) + \frac{z b_n}{[n]_{q_n}} D_q(T_{n,k-1}(z)). \quad (5.3)$$

(5.3) eşitliğinde  $T_{n,k}(z) - z^k$  farkı hesaplanarak devam edilirse

$$\begin{aligned}
T_{n,k}(z) - z^k &= \frac{z b_n}{[n]_{q_n}} D_q(T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}) + z [T_{n,k-1}(q_n z) - (q_n z)^{k-1}] \\
&\quad + \frac{z b_n}{[n]_{q_n}} [k-1]_{q_n} z^{k-2} + z^{k-1} q_n^{k-1} z - z^k \\
&= \frac{z b_n}{[n]_{q_n}} D_q(T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}) + z [T_{n,k-1}(q_n z) - (q_n z)^{k-1}] \\
&\quad + \frac{[k-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n z^{k-1} + z^k (q_n^{k-1} - 1) \\
&= \frac{z b_n}{[n]_{q_n}} D_q(T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}) + z [T_{n,k-1}(q_n z) - (q_n z)^{k-1}] \\
&\quad + \frac{[k-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n z^{k-1} - z^k (1 - q_n) [k-1]_{q_n}
\end{aligned} \quad (5.4)$$

bulunur.  $1 \leq r < R$  olsun.  $\overline{\mathbb{D}}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  olmak üzere  $C(\overline{\mathbb{D}}_r)$  deki norm

$$\|f\|_r = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}_r} |f(z)|$$

ile gösterilsin. Derecesi  $\leq k$  olan  $P_k(z)$  kompleks polinomu için,  $\overline{\mathbb{D}}_r$  da Bernstein eşitsizliği

$$|P'_k(z)| \leq \frac{k}{r} \|P_k\|_r,$$

kompleks analizde ortalama değer teoremi ile birleştirilirse, her  $|z| \leq r$  ve

$$|D_q(P_k(z))| \leq |P'_k(z)|_r \leq \frac{k}{r} \|P_k\|_r \quad (5.5)$$

gerçeklenir. Şimdi (5.4) ve (5.5) eşitsizliklerini kullanarak  $T_{n,k}(z) - z^k$  ifadesinin normunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned} & |T_{n,k}(z) - z^k| \\ & \leq \frac{rb_n}{[n]_{q_n}} |D_q(T_{n,k-1}(z) - z^{k-1})| + r |T_{n,k-1}(q_n z) - (q_n z)^{k-1}| \\ & \quad + \frac{[k-1]_{q_n} b_n r^{k-1} + r^k [k-1]_{q_n} |1 - q_n|}{[n]_{q_n}} \\ & \leq \frac{rb_n}{[n]_{q_n}} \|T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}\|_r \frac{k-1}{r} \\ & \quad + r |T_{n,k-1}(q_n z) - (q_n z)^{k-1}| + r^{k-1} \frac{[k-1]_{q_n} b_n + r^k [k-1]_{q_n} |1 - q_n|}{[n]_{q_n}}. \end{aligned}$$

Buradan norma geçilirse

$$\begin{aligned}
& \|T_{n,k}(z) - z^k\|_r \\
& \leq \frac{(k-1)b_n}{[n]_{q_n}} \|T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}\|_r + r \|T_{n,k-1}(q_n z) - (q_n z)^{k-1}\|_r \\
& \quad + \frac{[k-1]_{q_n} b_n r^{k-1} + r^k [k-1]_{q_n} |1 - q_n|}{[n]_{q_n}} \\
& \leq \frac{(k-1)b_n}{[n]_{q_n}} \|T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}\|_r + r \|T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}\|_r + \\
& \quad + r^k [k-1]_{q_n} \left(1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}\right) \\
& = \left(\frac{(k-1)b_n}{[n]_{q_n}} + r\right) \|T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}\|_r + r^k k \left(1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}\right).
\end{aligned}$$

$k$  üzerinden tümevarım yapılarak işleme devam edilirse, her  $k \geq 2$  için indirgeme bağıntısı

$$\|T_{n,k}(z) - z^k\|_r \leq \frac{(k+1)!r^k}{2} \left(1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}\right)$$

sağlanır. Burada bir  $n_0$  sayısı vardır öyleki her  $n \geq n_0$  için  $\frac{b_n}{[n]_{q_n}} < 1$  gerçekleşir. Kabul edelim ki bu eşitsizlik  $k$  için doğru olsun.  $k+1$  için doğruluğunu gösterelim.  $0 < q_n < 1$  için  $[k]_{q_n} < k+1$  olduğundan ve yukarıdaki indirgeme formülünden her  $k \geq 2$  ve her  $n \geq n_0$  için,

$$\begin{aligned}
& \|T_{n,k+1}(z) - z^{k+1}\|_r \\
& \leq \left( r + \frac{k}{[n]_{q_n}} b_n \right) \|T_{n,k}(z) - z^k\|_r + r^{k+1} [k]_{q_n} \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right) \\
& \leq \left( r + \frac{k}{[n]_{q_n}} b_n \right) \frac{(k+1)! r^k}{2} \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right) + r^{k+1} (k+1) \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right) \\
& \leq \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right) \frac{r^{k+1}}{2} \left\{ (k+1)! k \frac{b_n}{[n]_{q_n}} + (k+1)! + 2(k+1) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten her  $k \geq 2$  ve her  $n \geq n_0$  için

$$\|T_{n,k+1}(z) - z^{k+1}\|_r \leq \frac{(k+2)!}{2} r^{k+1} \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right). \quad (5.6)$$

Şimdi her  $z \in \mathbb{D}_R$  için,

$$S_n^{q_n}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n^{q_n}(e_k; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z) \quad (5.7)$$

yazılabileceğini gösterelim. Herhangi bir  $m \in \mathbb{N}$  için,

$$|z| \leq r < R \text{ için } f_m(z) = \sum_{j=0}^m c_j z^j \text{ ve } x \in (r, \infty) \text{ için } f_m(x) = f(x)$$

tanımlansın.  $f$  üzerindeki hipotezden, herhangi bir  $m \in \mathbb{N}$  için,  $x \in [0, \infty)$  olmak üzere  $|f_m(x)| \leq C_m e^{B_m x}$  eşitsizliği sağlanır. Oran testinden, her bir sabit  $m$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ve  $z$  için,

$$|S_n^{q_n}(f_m; z)| \leq C_m \left| E_q \left( -[n]_{q_n} \frac{z}{b_n} \right) \right| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_{q_n})^k |z|^k}{[k]_{q_n}! (b_n)^k} e^{B_m \left( \frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n \right)} < \infty.$$

Böylece,  $S_n^{q_n}(f_m; z)$  iyi tanımlıdır. Bununla birlikte

$$|z| \leq r \text{ için } f_{m,k}(z) = c_k e_k(z) \text{ ve } x \in (r, \infty) \text{ için } f_{m,k}(x) = \frac{f(x)}{m+1}$$

şeklinde alınsın.  $f_{m,k}$   $[0, \infty)$  aralığında üstel büyümeye sahip olur ve

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^m f_{m,k}(z)$$

eşitliği sağlanır.  $S_n^{q_n}$  lineer olduğundan her  $|z| \leq r$  için

$$S_n^{q_n}(f_m; z) = \sum_{k=0}^m c_k S_n^{q_n}(e_k; z)$$

elde edilir. Böylece herhangi bir sabit  $n \in \mathbb{N}$  ve  $|z| \leq r$  için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_n^{q_n}(f_m; z) = S_n^{q_n}(f; z)$$

sağlanır. Bu ifade

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r = 0$$

ve  $|z| \leq r$  için

$$\begin{aligned} & |S_n^{q_n}(f_m) - S_n^{q_n}(f)| \\ & \leq \left| E_q \left( -[n]_{q_n} \frac{z}{b_n} \right) \right| \varepsilon_q \left( [n]_{q_n} \frac{|z|}{b_n} \right) \|f_m - f\|_r \\ & \leq M_{r,n} \|f_m - f\|_r \end{aligned}$$

eşitsizliğinden sağlanır. Sonuç olarak operatörün

$$S_n^{q_n}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n^{q_n}(e_k)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z)$$

şeklinde yazılabileceği gösterilmiş olur.  $c_k$  üzerindeki hipotezden,  $|z| \leq r$  ve  $1 \leq r < \frac{1}{A}$  için

$$C_{r,A} = \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right) \frac{MA}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1) (rA)^{k-1} < \infty.$$

elde edilir. Buradan ve (5.6) dan

$$\begin{aligned} & |S_n^{q_n}(f)(z) - f(z)| \\ & \leq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| |T_{n,k}(z) - z^k| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{MA^k (k+1)!}{k! 2} r^k \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right) \\ & = \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \right) \frac{MA}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1) (rA)^k \\ & = C_{r,A} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\sum_{k=2}^{\infty} u^k$  ve türevi olan  $\sum_{k=2}^{\infty} ku^{k-1}$  serileri, açık birim disk tarafından kapanan kompakt disklerde mutlak ve düzgün yakınsaktır.  $0 < q < 1$  ise,  $n \rightarrow \infty$  için  $\frac{1}{[n]_q} \rightarrow 1 - q$  ve  $b_n \rightarrow \infty$  olduğundan,  $z \in \mathbb{D}_R$  için  $S_n^{q_n}(f)(z)$ ,  $f(z)$  ye yakınsamaz. Bu durumda  $0 < q_n < 1$  ve  $n \rightarrow \infty$  için  $q_n \rightarrow 1$  olacak şekilde bir  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi seçilirse,  $|z| \leq r$ ,  $1 \leq r < R$  için  $\frac{b_n}{[n]_{q_n}} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) dir. Bu durumda açık birim disk tarafından içerilen her bir kompakt diskte yakınsama düzgün olur. Böylece

$$|S_n^{q_n}(f)(z) - f(z)| \leq C_{r,A}$$

elde edilir.

ii.  $\gamma$ , 0 merkezli,  $r_1 > r$  yarıçaplı çember olmak üzere,  $|z| \leq r$  ve  $v \in \gamma$  için  $|v - z| \geq r_1 - r$  dir. Cauchy Formülünden her  $|z| \leq r$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} & |D_{q_n}^{(p)} S_n^{q_n}(f)(z) - D_{q_n}^{(p)} f(z)| \\ & \leq \left| S_n^{q_n^{(p)}}(f)(z) - f^{(p)}(z) \right| \\ & \leq \frac{p!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{S_n^{q_n} f(v) - f(v)}{(v - z)^{p+1}} dv \right| \\ & \leq C_{r_1,A} \frac{p!}{2\pi} \frac{2\pi r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \\ & = C_{r_1,A} \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$q_n = 1$  için, kompleks Favard-Szász-Mirakjan operatörü için benzer sonuçlar Gal (2008) tarafından hesaplanmıştır. ■

Şimdi, kompleks  $q$ -Szász-Mirakjan operatörü için Voronovskaja-tipli sonucu verelim. Reel  $q$ -Szász-Mirakjan operatörü için benzer sonuç Aral (2008) tarafından verilmiştir.

## 5.2 Voronovskaja-Tipli Teorem

**Teorem 5.2** *Teorem 5.1 in koşulları altında, kabul edelim ki  $1 \leq r < \frac{1}{q_n A}$  keyfi sabit olsun. Aşağıdaki eşitsizlik her  $|z| \leq r$  ve yeterince büyük  $n$  için sağlanır.*

$$\begin{aligned} & \left| S_n^{q_n}(f)(z) - f(z) - \frac{z b_n}{2 [n]_{q_n}} D_{q_n}^2(f(z)) \right| \\ & \leq \left\{ \frac{r b_n}{[n]_{q_n}} \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} + 2 \right) + 2 \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} \right\} \frac{M A^2 |z|}{r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1) (q_n A r)^{k-2}. \end{aligned}$$

**İspat.**  $k = 0, 1, \dots$  olmak üzere  $e_k(z) = z^k$  için  $T_{n,k}(z) = S_n^{q_n}(e_k)(z)$  olduğundan ve Teorem 5.1 (i) nin ispatından

$$S_n^{q_n}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z)$$

yazabiliriz. Her  $z \in \mathbb{D}_R$  için

$$\begin{aligned} & \left| S_n^{q_n}(f)(z) - f(z) - \frac{z b_n}{2 [n]_{q_n}} D_{q_n}^2(f(z)) \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \left| T_{n,k}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1} [k]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 5.1 (i) nin ispatında,  $T_{n,k}(z)$  için yazdığımız indirgeme bağıntısından yararlanarak yeni bir indirgeme bağıntısı tanımlayalım.

$$E_{k,n}(z) = T_{n,k}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1} [k]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}}$$

olsun. Buradan  $k \geq 2$  ve  $z \in \mathbb{D}_R$  için

$$E_{k-1,n}(z) = T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2} [k-2]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}}$$

dir.  $E_{k-1,n}(z)$  ifadesinin  $q$ - türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
& D_q(E_{k-1,n}(z)) \\
&= \frac{[n]_{q_n}}{zb_n} \left\{ E_{k,n}(z) + \frac{z^{k-1} [k]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} - q_n^{k-1} z^k \right. \\
&\quad \left. - z \left( T_{n,k-1}(q_n z) - (q_n z)^{k-1} - \frac{(q_n z)^{k-2} [k-2]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{q_n^{k-2} z^{k-1} [k-2]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{z^{k-1} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} - \frac{z^{k-2} [k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n^2}{2 [n]_{q_n}^2} \right\} \\
&= \frac{[n]_{q_n}}{zb_n} \left\{ E_{k,n}(z) - zE_{k-1,n}(q_n z) + z^k (1 - q_n^{k-1}) + \frac{2z^{k-1} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{z^{k-1} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \left( [k]_{q_n} - q_n^{k-2} [k-2]_{q_n} \right) - \frac{z^{k-2} [k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n^2}{2 [n]_{q_n}^2} \right\} \\
&= \frac{[n]_{q_n}}{zb_n} \left\{ E_{k,n}(z) - zE_{k-1,n}(q_n z) + z^k (1 - q_n) [k-1]_{q_n} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{z^{k-1} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \left( [k]_{q_n} - q_n^{k-2} [k-2]_{q_n} - 2 \right) - \frac{z^{k-2} [k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n^2}{2 [n]_{q_n}^2} \right\}.
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{zb_n}{[n]_{q_n}} D_q(E_{k-1,n}(z)) &= E_{k,n}(z) - zE_{k-1,n}(q_n z) + z^k (1 - q_n) [k-1]_{q_n} \\
&\quad - \frac{z^{k-2} [k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n^2}{2 [n]_{q_n}^2} \\
&\quad + \frac{z^{k-1} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \left( [k]_{q_n} - 2 - q_n^{k-2} [k-2]_{q_n} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& E_{k,n}(z) \\
&= \frac{z b_n}{[n]_{q_n}} D_q(E_{k-1,n}(z)) + z |E_{k-1,n}(q_n z)| - z^k (1 - q_n) [k - 1]_{q_n} \\
&\quad + \frac{z^{k-2} [k - 2]_{q_n}^2 [k - 1]_{q_n} b_n^2}{2 [n]_{q_n}^2} \\
&\quad - \frac{z^{k-1} [k - 1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \left( [k]_{q_n} - 2 - q_n^{k-2} [k - 2]_{q_n} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $E_{k,n}(z)$  ifadesinin modülü alınarak devam edilirse, her  $k \geq 2$  ve her  $|z| \leq r$  için

$$\begin{aligned}
|E_{k,n}(z)| &\leq \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} 2 \|D_q(E_{k-1,n}(z))\|_r \\
&\quad + |z| |E_{k-1,n}(q_n z)| + \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} |z|^{k-2} \frac{[k - 2]_{q_n}^2 [k - 1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} \\
&\quad + |z|^k |1 - q_n| [k - 1]_{q_n} \\
&\quad + \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} |z|^{k-2} [k - 1]_{q_n} \left( [k - 2]_{q_n} q_n^{k-2} - ([k]_{q_n} - 2) \right) \\
&\leq r |E_{k-1,n}(q_n z)| + \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} \left\{ 2 \left( \frac{k-1}{r} \right) \|E_{k-1,n}\|_r \right. \\
&\quad \left. + r^{k-2} [k - 1]_{q_n} \left| [k - 2]_{q_n} q_n^{k-2} - ([k]_{q_n} - 2) \right| \right. \\
&\quad \left. + \frac{r^{k-3} [k - 2]_{q_n}^2 [k - 1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} + r^k (1 - q_n) [k - 1]_{q_n} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
|E_{k,n}(z)| &\leq r |E_{k-1,n}(q_n z)| \\
&+ \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} \left\{ 2 \frac{k-1}{r} \|E_{k-1,n}(z)\|_r + r^{k-3} \frac{[k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n}{[n]_{q_n}} \right. \\
&\quad \left. + r^{k-2} [k-1]_{q_n} \left| [k-2]_{q_n} - ([k]_{q_n} - 2) \right| \right\} \\
&\leq r |E_{k-1,n}(q_n z)| \\
&+ \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} \left\{ 2 \frac{k-1}{r} \|T_{k-1,n}(z) - e_{k-1}\|_r \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{r^{k-2} [k-2]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{2 [n]_{q_n}} + r^{k-3} \frac{[k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n}{[n]_{q_n}} \right. \\
&\quad \left. + r^{k-2} [k-1]_{q_n} \left| [k-2]_{q_n} - ([k]_{q_n} - 2) \right| \right\} \\
&\leq r |E_{k-1,n}(q_n z)| + \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} \left\{ 2 \frac{k-1}{r} \frac{k! b_n r^{k-2}}{2 [n]_{q_n}} + \frac{k-1}{r} \frac{r^{k-2} [k-2]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{[n]_{q_n}} \right. \\
&\quad \left. + r^{k-3} \frac{[k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n}{[n]_{q_n}} + r^{k-2} [k-1]_{q_n} \left| [k-2]_{q_n} - ([k]_{q_n} - 2) \right| \right\} \\
&\leq r |E_{k-1,n}(q_n z)| + \frac{|z| b_n}{2 [n]_{q_n}} \left\{ \frac{(k-1) k! b_n r^{k-3}}{[n]_{q_n}} + \frac{(k-1) r^{k-3} [k-2]_{q_n} [k-1]_{q_n} b_n}{[n]_{q_n}} \right. \\
&\quad \left. + r^{k-3} \frac{[k-2]_{q_n}^2 [k-1]_{q_n} b_n}{[n]_{q_n}} + 2 r^{k-2} [k-2]_{q_n} [k-1]_{q_n} \right\} \\
&\leq r |E_{k-1,n}(q_n z)| + \frac{3 |z| (k+1)! b_n^2 r^{k-3}}{2 [n]_{q_n}^2} + \frac{2 |z| (k-1)(k-2) b_n r^{k-2}}{2 [n]_{q_n}} \\
&= r |E_{k-1,n}(q_n z)| + (k+1)! \left( \frac{3 |z| (k+1)! b_n^2 r^{k-3}}{2 [n]_{q_n}^2} + \frac{2 |z| b_n r^{k-2}}{2 [n]_{q_n}} \right)
\end{aligned}$$

$$= r |E_{k-1,n}(q_n z)| + \frac{|z|}{2} \left( \frac{3b_n^2}{[n]_{q_n}^2} + \frac{2rb_n}{[n]_{q_n}} \right) r^{k-3} (k+1)!$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten her  $|z| \leq r$  için

$$\begin{aligned} & \left| S_n^{q_n}(f; z) - f(z) - \frac{zb_n}{2[n]_{q_n}} D_q^2(f(z)) \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |E_{k,n}(z)| \\ & \leq \left\{ \frac{rb_n}{[n]_{q_n}} \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} + 2 \right) + 2 \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} \right\} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q_n^{k-2} M A^k |z| r^{k-3} (k+1)!}{k!} \\ & \leq \left\{ \frac{rb_n}{[n]_{q_n}} \left( 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} + 2 \right) + 2 \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} \right\} \frac{M A^2 |z|}{r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1) (q_n A r)^{k-2} \end{aligned}$$

bulunur.  $q_n r A < 1$  olduğundan  $\sum_{k=2}^{\infty} (k+1) (q_n r A)^{k-2} < \infty$  dir. Böylece ispat tamamlanır. Bu teoremden,  $S_n^{q_n}(f; z)$  operatörü ile yaklaşım hızı arttırılmış olur. ■

## 6. KOMPLEKS $Q$ -GAUSS-WEIERSTRASS OPERATÖRÜ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

**Tanım 6.1**  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  açık birim disk ve

$A(\overline{\mathbb{D}}) = \{f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ } \mathbb{D} \text{ de analitik, } \overline{\mathbb{D}} \text{ da sürekli, } f(0) = 0, D_q f(0) = 1\}$  olsun.  $\xi > 0, q \in (0, 1)$  ve  $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$  olmak üzere,  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  için kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass integrali

$$\mathcal{W}_\xi(f)(z) := \mathcal{W}_\xi(f; q, z) := \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} f(ze^{-it}) E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_{qt} \quad (6.1)$$

olarak tanımlanır.

**Uyarı 6.1** (6.1) eşitliğinde tanımlanan  $\mathcal{W}_\xi(f)(z)$  kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörü, Tanım 2.10 kullanılarak,  $q$ -genelleştirilmiş integral yardımıyla yeniden

$$\mathcal{W}_\xi(f; q, z) = \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\infty}{\sqrt{(1-q^2)/\xi}}} f(ze^{-it}) E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_{qt}$$

şeklinde yazılabilir.

### 6.1 Operatörün Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünün bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

**Lemma 6.1**  $\mathcal{W}_\xi(1; q, z) = 1$  dir.

**İspat.** (2.4) eşitliği kullanılarak  $t = \sqrt{\xi} \sqrt{u}$  nin  $q$ -türevi

$$\begin{aligned} D_{q^2}(t) &= \sqrt{\xi} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{q^2 u}}{(1-q^2)u} \\ &= \sqrt{\xi} \frac{1}{(q+1)\sqrt{u}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

olarak elde edilir. Bununla birlikte,  $q$ -integral için (2.11) değişken değiştirme formülü kullanılırsa  $\beta = \frac{1}{2}$  için (2.7) den

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_{qt} &= \frac{\sqrt{\xi}}{(q+1)} \int_0^{\frac{1}{1-q^2}} u^{-\frac{1}{2}} E_{q^2}(-q^2 u) d_{q^2 u} \\ &= \frac{\sqrt{\xi}}{(q+1)} \Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\mathcal{W}_\xi(1; q, z) = 1$  sağlanır. ■

**Teorem 6.1**  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu  $\overline{\mathbb{D}}$  da sürekli olsun.

*i.*  $z \in \overline{\mathbb{D}}, \xi \in (0, 1]$  için

$$\omega_1(f; \xi)_{\partial\mathbb{D}} = \sup \{ |f(e^{i(x-t)}) - f(e^{-it})|; x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq \xi \}$$

olmak üzere

$$|\mathcal{W}_\xi(f; q, z) - f(z)| \leq \omega_1(f; \sqrt{\xi})_{\partial\mathbb{D}} \left( 1 + \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \right)$$

gerçeklenir.

*ii.* Süreklilik modülü

$$\omega_1(f; \delta)_{\overline{\mathbb{D}}} = \sup \{ |f(z_1) - f(z_2)|; z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}, |z_1 - z_2| \leq \delta \}$$

olmak üzere

$$\omega_1(\mathcal{W}_\xi(f; q, z); \delta)_{\overline{\mathbb{D}}} \leq C \omega_1(f; \delta)_{\overline{\mathbb{D}}}, \quad \forall \delta > 0, \xi > 0$$

sağlanır.

*iii.* Her  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  için,  $C$  pozitif bir sabit olmak üzere,

$$|\mathcal{W}_\xi(f; q, z) - \mathcal{W}_\eta(f; q, z)| \leq C \left| \sqrt{\xi} - \sqrt{\eta} \right|$$

gerçeklenir.

**İspat.** *i.*  $\mathcal{W}_\xi(1; q, z) = 1$  olduğundan,  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  için

$$|\mathcal{W}_\xi(f; q, z) - f(z)| \leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |f(ze^{-it}) - f(z)| E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t$$

elde edilir. Maksimum modül prensibinden,

$$|\mathcal{W}_\xi(f; q, z) - f(z)| \leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \omega_1(f; |z| |1 - e^{-it}|)_{\partial\mathbb{D}} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t$$

yazılabilir. Bu ifade

$$|z| |1 - e^{-it}| \leq 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \leq t, \quad \forall t > 0$$

eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{W}_\xi(f; q, z) - f(z)| \\
&= \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \omega_1\left(f; 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \right)_{\partial\mathbb{D}} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\
&\leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \omega_1(f; t)_{\partial\mathbb{D}} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\
&\leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{\xi}}\right) \omega_1(f; \sqrt{\xi})_{\partial\mathbb{D}} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\
&= \omega_1(f; \sqrt{\xi})_{\partial\mathbb{D}} \left(1 + \frac{(q+1)}{\xi\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} t E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$q$ -integral için (2.11) değişken değiştirme formülü kullanılarak  $\beta = \frac{1}{2}$  ve (2.7) den

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} t E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t &= \frac{\xi}{(q+1)} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}} E_{q^2}(-q^2 u) d_{q^2} u \\
&= \frac{\xi}{(q+1)} \Gamma_{q^2}(1) = \frac{\xi}{(q+1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$|\mathcal{W}_\xi(f; q, z) - f(z)| \leq \omega_1(f; \sqrt{\xi})_{\partial\mathbb{D}} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

**ii.**  $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$  için  $|z_1 - z_2| \leq \delta$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{W}_\xi(f; q, z_1) - \mathcal{W}_\xi(f; q, z_2)| \\
&\leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |f(z_1 e^{-it}) - f(z_2 e^{-it})| E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\
&\leq \omega_1(f; |z_1 - z_2|)_{\overline{\mathbb{D}}} \mathcal{W}_\xi(1; q, z) \\
&\leq \omega_1(f; \delta)_{\overline{\mathbb{D}}}
\end{aligned}$$

sağlanır. Buradan  $|z_1 - z_2| \leq \delta$  için supremum alınarak devam edilirse,

$$\omega_1(\mathcal{W}_\xi(f; q, z); \delta)_{\mathbb{D}} \leq \omega_1(f; \delta)_{\mathbb{D}}$$

elde edilir.

**iii.** Aşağıdaki eşitsizlik kolaylıkla elde edilebilir.

$$|\mathcal{W}_\xi(f; q, z) - \mathcal{W}_\eta(f; q, z)| \leq \frac{(q+1)\|f\|}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \left| \frac{E_{q^2}(-q^2 \frac{t^2}{\xi})}{\sqrt{\xi}} - \frac{E_{q^2}(-q^2 \frac{t^2}{\eta})}{\sqrt{\eta}} \right| d_q t.$$

$q$ -ortalama değer teoremini (Rajković et al 2002) uygulamak için, öncelikle  $E_{q^2}(-q^2 \frac{t^2}{\xi})$  ifadesinin  $\xi$  ye göre  $q$ -türevi alınıp (2.7) formülü kullanılırsa  $u(\xi) = -q^2 \frac{t^2}{\xi}$  için

$$D_{q^2} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) = D_{\frac{1}{q^2}} E_{q^2}(u) D_{q^2} u(\xi)$$

bulunur. Ayrıca (2.4) den,

$$D_{q^2}(\sqrt{\xi}) = \frac{\sqrt{\xi}(q-1)}{\xi(q^2-1)} = \frac{1}{(q+1)\sqrt{\xi}}$$

bulunur. Bu sonuçlar aşağıdaki formülde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & D_{\frac{1}{q^2}} E_{q^2}(u) D_{q^2} u(\xi) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)}}{[j]_{q^2}!} D_{\frac{1}{q^2}} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right)^j \frac{(-q^2 \frac{t^2}{\xi}) (\frac{1}{q^2} - 1)}{(q^2 - 1)\xi} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)}}{[j]_{q^2}!} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right)^j \left[ \frac{1}{q^{2j}} - 1 \right] \frac{1}{(\frac{1}{q^2} - 1)(-q^2 \frac{t^2}{\xi})} \left( \frac{t^2}{\xi^2} \right) \\ &= \left( \frac{t^2}{\xi^2} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)}}{[j]_{q^2}!} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right)^{j-1} \frac{1}{q^{2j-2}} \frac{1-q^{2j}}{(1-q^2)} \\ &= \left( \frac{t^2}{\xi^2} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)}}{[j+1]_{q^2}!} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right)^j [j+1]_{q^2} \\ &= \left( \frac{t^2}{\xi^2} \right) E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bölümün  $q$ -türev tanımı kullanılarak devam edilirse,

$$\begin{aligned}
D_{q^2} \left( \frac{E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right)}{\sqrt{\xi}} \right) &= \frac{D_{q^2} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) \sqrt{\xi} - E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) D_{q^2} \sqrt{\xi}}{\sqrt{q^2 \xi} \sqrt{\xi}} \\
&= \frac{1}{q\xi} \left[ \left( \frac{t^2}{\xi^2} \right) E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) \sqrt{\xi} - \frac{E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right)}{(q+1)\sqrt{\xi}} \right] \\
&= \frac{1}{q\xi} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) \left[ \left( \frac{t^2}{\xi^2} \right) \sqrt{\xi} - \frac{1}{(q+1)\sqrt{\xi}} \right] \\
&= \frac{1}{q\xi^{\frac{5}{2}}} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) \left[ t^2 - \frac{\xi}{(q+1)} \right]
\end{aligned}$$

bulunur.  $q$ -ortalama değer teoreminden,

$$\left| \frac{E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right)}{\sqrt{\xi}} - \frac{E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\eta} \right)}{\sqrt{\eta}} \right| = \left| \sqrt{\eta} - \sqrt{\xi} \right| \frac{E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{c} \right)}{qc^{\frac{5}{2}}} \left| t^2 - \frac{c}{(q+1)} \right|$$

sağlanacak şekilde bir  $c \in (\xi, \eta)$  vardır.

Sonuç olarak

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} t^2 E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{c} \right) d_q t < \infty \text{ ve } \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{c} \right) d_q t < \infty$$

gerçeklenir, bu da ispatı tamamlar. ■

## 6.2 Yaklaşımın Kesin Derecesi

Yaklaşım hızının kesinliği için (6.1) deki  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünü düzenleyelim.

$\xi > 0$ ,  $q \in (0, 1)$  ve  $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$  olmak üzere, kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünü  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  için

$$\mathcal{W}_{\xi}^*(f; q, z) := \frac{(q+1)}{2\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2} \left( \frac{1}{2} \right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} (f(ze^{-it}) + f(ze^{it})) E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t$$

şeklinde tanımlayalım.

Yukarıda verilen  $W_{\xi}^*(f; q, z)$  yeniden düzenlenmiş kompleks  $q$ -Gauss-Weierstrass operatörünün yaklaşım özelliklerini aşağıdaki teoremden verelim.

**Teorem 6.2** *i.*  $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$  olsun. Her  $\xi \in (0, 1]$  ve  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  için,

$$|\mathcal{W}_\xi^*(f; q, z) - f(z)| \leq C\omega_2\left(f; \sqrt{\xi}\right)_{\partial\mathbb{D}}$$

gerçeklenir.

*ii.*  $R > 1$ ,  $z \in \mathbb{D}_R$  ve  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  olduğunu kabul edelim. Eğer  $f$  fonksiyonu,  $s = 0$  için sabit değil ve  $s \in \mathbb{N}$  için derecesi  $\leq s - 1$  olan bir polinom değilse, her  $1 \leq r < r_1 < R$ ,  $\xi \in (0, 1]$  ve  $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için

$$\left\| (\mathcal{W}_\xi^*)^{(s)}(f) - f^{(s)} \right\|_r \sim \xi$$

denkliği sağlanır ve bu denklikteki sabitler sadece  $f$ ,  $q$ ,  $p$ ,  $r$  ve  $r_1$  e bağlıdır.

**İspat. i.**

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_\xi^*(f; q, z) - f(z) \\ &= \frac{(q+1)}{2\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} (f(ze^{-it}) - 2f(z) + f(ze^{it})) E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \end{aligned}$$

eşitliğini ele alalım.  $|z| = 1$  için, bu ifadenin mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & |\mathcal{W}_\xi^*(f; q, z) - f(z)| \\ &\leq \frac{(q+1)}{2\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |f(ze^{-it}) - 2f(z) + f(ze^{it})| E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ &\leq \frac{(q+1)}{2\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \omega_2(f; t)_{\partial\mathbb{D}} E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ &\leq \omega_2\left(f; \sqrt{\xi}\right)_{\partial\mathbb{D}} \frac{(q+1)}{2\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \left(\frac{t}{\sqrt{\xi}} + 1\right)^2 E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t. \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4) eşitliği kullanılarak  $t = \sqrt{\xi}\sqrt{u}$  nin  $q$ -türevi

$$\begin{aligned} D_{q^2}(t) &= \sqrt{\xi} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{q^2 u}}{(1-q^2)u} \\ &= \sqrt{\xi} \frac{1}{(q+1)\sqrt{u}} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca  $\beta = \frac{1}{2}$  olmak üzere (2.11) eşitliği ile verilen  $q$ -integralinin değişken değiştirme formülünü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{(q+1)}{2\xi\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} t^2 E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ &= \frac{1}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{1-q^2}} u^{\frac{1}{2}} E_{q^2}(-q^2 u) d_{q^2} u \\ &= \frac{\Gamma_{q^2}\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} < \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{(q+1)}{\xi\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} t E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t &= \frac{1}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{1-q^2}} E_{q^2}(-q^2 u) d_{q^2} u \\ &= \frac{1}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii.  $r \geq 1$  için

$$\omega_2\left(f; \sqrt{\xi}\right)_{\partial\mathbb{D}_R} = \sup \left\{ \Delta_u^2 f(re^{it}) : |u| < \sqrt{\xi} \right\}$$

olmak üzere,

$$\omega_2\left(f; \sqrt{\xi}\right) \leq C_{r,q}(f) \xi$$

eşitsizliği sağlanır. (i) den her  $\xi \in (0, 1]$  ve  $z \in \overline{\mathbb{D}_R}$  için

$$\|\mathcal{W}_\xi^*(f) - f\|_r \leq C_{r,q}(f) \xi$$

gerçeklenir (Gal 2009). Şimdi, Cauchy türev formülünü kullanarak (ii) deki üst sınırı bulalım.

$\gamma$ , yarıçapı  $r_1 > 1$  olan 0 merkezli bir çember olsun.  $u \in \gamma$  için

$$\begin{aligned} \left| D_q^{(s)} f(z) - D_q^{(s)} (\mathcal{W}_\xi^*(f))(z) \right| &= \frac{s!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(u) - \mathcal{W}_\xi^*(f)(u)}{(u-z)^{s+1}} du \right| \\ &\leq C_{r_1,q}(f) \xi \frac{s! r_1}{(r_1 - r)^{s+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. (ii) deki alt sınırı hesaplamak için öncelikle  $\mathcal{W}_\xi^*$  operatörünün seri gösterimini bulalım. (i) kullanılarak,  $\mathcal{W}_\xi^*(f)$  operatörü için

$$d_k^*(\xi, q) = \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \cos(kt) E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t$$

olmak üzere seri gösterimi

$$\mathcal{W}_\xi^*(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k^*(\xi, q) z^k$$

şeklinde yazılabilir.  $[0, t]$  aralığında  $h(t) = \cos kt$  fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |d_k^*(\xi, q)| &\leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |\cos kt| E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ &\leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} (1+kt) E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ &= 1 + k \frac{\sqrt{\xi}}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

elde edilir.  $z = re^{i\varphi}$  alınırsa,  $q$ -türev kullanılarak

$$\begin{aligned} &[D_q^{(s)} f(z) - D_q^{(s)} (\mathcal{W}_\xi^*)(f)(z)] e^{-ip\varphi} \\ &= \sum_{k=s}^{\infty} a_k [k]_q [k-1]_{q^2} \dots [k-s+1]_q r^{k-s} e^{i(k-s-p)\varphi} [1 - d_k^*(\xi, q)] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $-\pi$  den  $\pi$  ye integral alınarak devam edilirse

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [D_q^{(s)} f(z) - D_q^{(s)} (\mathcal{W}_\xi^*)(f)(z)] e^{-ip\varphi} d\varphi \\ &= a_{s+p} [s+p]_q [s+p-1]_q \dots [p+1]_q r^p [1 - d_{s+p}^*(\xi, q)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, (6.3) kullanılıp mutlak değer alınırsa  $\xi \in (0, 1]$  için

$$\begin{aligned}
& \|D_q^{(s)} f - D_q^{(s)} (\mathcal{W}_\xi^*) (f)\|_r \\
& \geq |a_{s+p}| [s+p]_q [s+p-1]_q \dots [p+1]_q r^p |1 - d_{s+p}^* (\xi, q)| \\
& \geq |a_{s+p}| [s+p]_q [s+p-1]_q \dots [p+1]_q r^p |1 - |d_{s+p}^* (\xi, q)|| \\
& \geq |a_{s+p}| [s+p]_q [s+p-1]_q \dots [p+1]_q r^p (s+p) \frac{\sqrt{\xi}}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \\
& \geq |a_{s+p}| [s+p]_q [s+p-1]_q \dots [p+1]_q r^p (s+p) \frac{\xi}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak,  $s = 0$ ,  $p \geq 1$  ve  $\xi \in (0, 1]$  için

$$\|f - \mathcal{W}_\xi^* (f)\|_r \geq |a_p| r^p \frac{\xi}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})}$$

bulunur. Böylece, eğer  $(0, 1]$  aralığında  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$  ve  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|f - \mathcal{W}_{\xi_k}^* (f)\|_r}{\xi_k} = 0$  olacak şekilde bir  $(\xi_k)_k$  alt dizisi varsa, her  $p \geq 1$  için  $a_p = 0$  dır; yani  $f$  fonksiyonu  $\overline{\mathbb{D}_R}$  de sabittir. Bu nedenle, eğer  $f$  sabit değilse,  $\xi \in (0, 1]$  için  $\|f - \mathcal{W}_\xi^* (f)\|_r \geq \xi C_{r,q} (f)$  olacak şekilde bir  $C_{r,q} (f) > 0$  sabiti vardır. Şimdi,  $s \geq 1$  olduğunu düşünelim.  $\xi \in (0, 1]$  ve her  $p \geq 0$  için

$$\begin{aligned}
& \|D_q^{(s)} f - D_q^{(s)} (\mathcal{W}_\xi^*) (f)\|_r \\
& \geq |a_{s+p}| [s+p]_q [s+p-1]_q \dots [p+1]_q r^p (s+p) \frac{\xi}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde, eğer  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|D_q^{(s)} f - D_q^{(s)} (\mathcal{W}_{\xi_k}^*) (f)\|_r}{\xi_k} = 0$  olacak şekilde  $(0, 1]$  aralığında  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$  koşulunu sağlayan bir  $(\xi_k)_k$  alt dizisi varsa, her  $p \geq 0$  için  $a_{s+p} = 0$  dır yani  $f$ ,  $\overline{\mathbb{D}_R}$  da derecesi  $\leq s-1$  olan bir polinomdur. Böylece, eğer  $f$  derecesi  $\leq s-1$  olan bir polinom değilse  $\xi \in (0, 1]$  için

$$\|D_q^{(s)} f - D_q^{(s)} (\mathcal{W}_\xi^*) (f)\|_r \geq \xi C_{r,q} (f)$$

olacak şekilde bir  $C_{r,q} (f) > 0$  sabiti vardır. Böylece ispat tamamlanır. ■

### 6.3 Şekil Koruma Özellikleri

Bu bölümde Tanım 6.1 de verilen  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$  operatörünün bazı geometrik özellikleri incelenecektir. Öncelikle aşağıdaki fonksiyon sınıflarını tanımlayalım.

$$S_2 = \left\{ f ; \mathbb{D} \text{ de analitik, } f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, z \in \mathbb{D}, |a_1| \geq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \right\}, \quad (6.4)$$

$$S_3 = \{ f \in A(\overline{\mathbb{D}}); |D_q^2 f(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D} \}, \quad (6.5)$$

$$\mathfrak{P} = \{ f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}; \mathbb{D} \text{ de analitik, } f(0) = 1, \operatorname{Re}[f(z)] > 0, \forall z \in \mathbb{D} \}. \quad (6.6)$$

Eğer  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$   $\mathbb{D}$  de analitik ise, her  $\xi > 0$  için,  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$  operatörü  $\mathbb{D}$  de analitiktir ve

$$d_k(\xi, q) := \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} e^{it} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t \quad (6.7)$$

olmak üzere  $\forall z \in \mathbb{D}$  için

$$\mathcal{W}_\xi(f; q, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k(\xi, q) z^k \quad (6.8)$$

gerçeklenir. Bununla birlikte, eğer  $f$   $\overline{\mathbb{D}}$  da sürekli ise,  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$  operatörü de  $\overline{\mathbb{D}}$  da sürekli dir.

**İspat.**  $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$  noktasındaki sürekliliği göstermek için,  $z_n \in \overline{\mathbb{D}}$  dizisini  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) olacak şekilde seçelim. Lemma 6.1 den

$$\begin{aligned} & |\mathcal{W}_\xi(f; q, z_n) - \mathcal{W}_\xi(f; q, z_0)| \\ & \leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |f(z_n e^{it}) - f(z_0 e^{it})| E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t \\ & \leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \omega_1(f; |z_n e^{it} - z_0 e^{it}|) E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t \\ & = \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \omega_1(f; |z_n - z_0|) E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t \\ & = \omega_1(f; |z_n - z_0|) \end{aligned}$$

yazılabilir.  $f$  nin  $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$  daki sürekliliğinden, açıkça  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$  operatörünün  $z_0$  noktasındaki sürekliliği de sağlanır.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ,  $z \in \mathbb{D}$  operatörde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{W}_\xi(f; q, z) \\
&= \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{ikt} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t \\
&= \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} (1-q) \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} \\
& \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{ik \left( \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} \right) q^n} E_{q^2} \left( \frac{-q^2 \left( \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} q^n \right)^2}{\xi} \right) q^n \\
&= \frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{ik \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} q^n} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{q^{2n}}{1-q^2} \right) q^n \tag{6.9}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |g_{n,k}| < \infty$  olsun. Bu durumda  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}$  mutlak yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,k}$$

eşitliği sağlanır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\left| a_k e^{ik \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} q^n} \right| = |a_k|$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  serisi yakınsak ve  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{ik \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} q^n}$  serisi düzgün yakınsaktır. Bununla birlikte (2.8) ve (2.7) den

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{q^{2n}}{1-q^2} \right) q^n &= \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{1}{1-q^2}} t^{-\frac{1}{2}} E_{q^2}(-q^2 t) d_q t \\
&= 1
\end{aligned}$$

yazabiliriz. (6.9) daki seriler yer değiştirebilir olduğundan,

$$\begin{aligned}
d_k(\xi, q) &= \frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ik \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} q^n} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{q^{2n}}{1-q^2} \right) q^n \\
&= \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} e^{-ikt} E_{q^2} \left( -q^2 \frac{t^2}{\xi} \right) d_q t
\end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\xi(f; q, z) &= \frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} e^{ik\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}q^n} E_{q^2}\left(-q^2\frac{q^{2n}}{1-q^2}\right) q^n \\ &= \frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k(\xi, q) z^k\end{aligned}$$

sağlanır. ■

**Teorem 6.3** Her  $\xi > 0$  için

$$\mathcal{W}_\xi(S_2) \subset S_2 \text{ ve } \mathcal{W}_\xi(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$$

kapsamaları sağlanır.

**İspat.** Teorem 6.3 den

$$\begin{aligned}& |d_k(\xi, q)| \\ & \leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |e^{it}| E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ & \leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} E_{q^2}\left(-q^2\frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ & = 1\end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{W}_\xi(f; q, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k(\xi, q) z^k.$$

Burada  $f \in S_2$  olduğundan

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k d_k(\xi, q)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \leq a_1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\mathcal{W}_\xi(f; q, z) \in S_2$$

dir.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathfrak{P}$ , yani  $a_0 = f(0) = 1$  olsun. Eğer

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y), z = x + iy \in \mathbb{D}$$

ise, her  $z = x + iy \in \mathbb{D}$  için  $U(x, y) > 0$  dır.  $a_0 = f(0) = 1$  koşulu ile

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\xi(f; q, 0) &= a_0 = 1 \text{ ve } \forall z = re^{it} \text{ için} \\ \mathcal{W}_\xi(f; q, z) &= \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} U(r \cos(t-u), r \sin(t-u)) E_{q^2}\left(-q^2 \frac{u^2}{\xi}\right) d_q u \\ &\quad + i \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} V(r \cos(t-u), r \sin(t-u)) E_{q^2}\left(-q^2 \frac{u^2}{\xi}\right) d_q u \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\mathcal{W}_\xi(f; q, z)] &= \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} U(r \cos(t-u), r \sin(t-u)) E_{q^2}\left(-q^2 \frac{u^2}{\xi}\right) d_q u > 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z) \in \mathfrak{P}$  elde edilir. ■

**Uyarı 6.2** Eğer  $f \in S_2$  ise,  $f$   $D$  de yıldızlıdır (ve univalenttir). Teorem 6.4 den  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$  operatörü, bu şekil koruma özelliklerine sahiptir (Alexander 1915).

#### 6.4 $q$ -Türevin $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$ Operatörüne Uygulamaları

Bu bölümde,  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$  ( $\xi > 0$ ) kompleks operatörünün bazı özellikleri  $q$ -türev yardımıyla verilecektir.

**Lemma 6.2**  $d_k(\xi, q)$ , (6.7) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} d_k(\xi, q) = 1.$$

**İspat.** (2.8) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} d_k(\xi, q) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi}\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} e^{-ikt} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ik \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} q^n} E_{q^2}\left(-\frac{q^2}{1-q^2} q^{2n}\right) q^n \end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitlikte seri düzgün yakınsak olduğundan, seri ile limit yer değiştirebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} d_k(\xi, q) &= \frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\xi \rightarrow 0} e^{-i\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}q^n} E_{q^2}\left(-\frac{q^2}{1-q^2}q^{2n}\right) q^n \\
&= \frac{\sqrt{1-q^2}}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} E_{q^2}\left(-\frac{q^2}{1-q^2}q^{2n}\right) q^n \\
&= \frac{1}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{1-q^2}} u^{-\frac{1}{2}} E_{q^2}(-q^2 u) d_{q^2} u \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 6.4**  $d_1(\xi, q)$ , (6.7) eşitliğindeki gibi tanımlansın.  $S_3^q$  (6.5) ile tanımlanan küme olmak üzere, her  $\xi > 0$  için

$$S_{3,d_1(\xi,q)}^q = \{f \in S_3^q; |D_q^2 f(z)| \leq d_1(\xi, q)\}$$

ve

$$S_{\frac{M}{d_1(\xi,q)}}^q = \left\{f \in S_M^q; |D_q f(z)| \leq \frac{M}{d_1(\xi, q)}\right\}$$

olduğunda

$$\frac{1}{d_1(\xi, q)} \mathcal{W}_\xi\left(S_{3,d_1(\xi,q)}^q\right) \subset S_3^q, \quad \frac{1}{d_1(\xi, q)} \mathcal{W}_\xi\left(S_M^q\right) \subset S_{\frac{M}{d_1(\xi,q)}}^q,$$

kapsamaları gerçekleşir.

**İspat.** Şimdi  $f \in S_{3,d_1(\xi,q)}^q$  olsun.  $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$  olduğundan  $f(0) = a_0 = 0$ ,  $D_q f(0) = a_1 = 1$  eşitlikleri sağlanır. Bununla birlikte Teorem 6.3 den  $\mathcal{W}_\xi(f; q, z)$  sürekli olduğundan  $q$ -türevini alabiliriz. Böylece

$$\frac{1}{d_1(\xi, q)} \mathcal{W}_\xi(f; q, 0) = 0, \quad \frac{1}{d_1(\xi, q)} D_q \mathcal{W}_\xi(f; q, 0) = a_1 = 1.$$

Bununla birlikte

$$D_q^2 \mathcal{W}_\xi(f; q, z) = \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} D_q^2 f(ze^{-it}) e^{-2it} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t$$

ve

$$|D_q^2 f(z)| \leq |d_1(\xi, q)|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{d_1(\xi, q)} D_q^2 \mathcal{W}_\xi(f; q, z) \right| \\ & \leq \frac{(q+1)}{|d_1(\xi, q)| \sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |D_q^2 f(ze^{-it})| |e^{-2it}| E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ & \leq \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\frac{1}{d_1(\xi, q)} \mathcal{W}_\xi(f) \in S_3^q$  sağlanır. Şimdi,  $f \in S_M^q$  yani  $|D_q f(z)| \leq M$  olsun. Bu eşitsizlik kullanılarak devam edilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{d_1(\xi, q)} D_q \mathcal{W}_\xi(f; q, z) \right| \\ & \leq \frac{(q+1)}{|d_1(\xi, q)| \sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} |D_q f(ze^{-it})| |e^{-it}| E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t \\ & \leq \frac{M}{|d_1(\xi, q)|} \frac{(q+1)}{\sqrt{\xi} \Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}} E_{q^2}\left(-q^2 \frac{t^2}{\xi}\right) d_q t = \frac{M}{|d_1(\xi, q)|}, \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da  $\frac{1}{d_1(\xi, q)} \mathcal{W}_\xi(f) \in S_{\frac{M}{|d_1(\xi, q)|}}^q$  olduğunu ispatlar. ■

## KAYNAKLAR

- Alexander, J.W. 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple region. *Annals of Mathematics, Second series* Vol. 17; Number 1; pp. 12-22.
- Anastassiou, G.A. and Gal, S.G. 2000. Approximation theory: Moduli of continuity and global smoothness preservation, Birkhäuser-Boston, 525 p., Boston, MA.
- Anastassiou, G.A. and Gal, S.G. 2006. Geometric and approximation properties of some singular integrals in the unit disk. *J. Ineq. Appl.* Article ID 17231; 19 pages.
- Anastassiou, G.A. and Gal, S.G. 2006. Geometric and approximation properties of some complex rotation-invariant integral operators in the unit disk. *J. Comp. Anal. Appl.*, Vol. 8; Number 4; pp. 357-368.
- Anastassiou, G.A. and Aral, A. 2009. Generalized Picard singular integrals. *Comput.Math. Appl.*, Vol. 57; Number 5; pp. 821–830.
- Aral, A and Gal, S.G. 2008.  $q$ -generalizations of the Picard and Gauss-Weierstrass singular integrals. *Taiwanese J. Math.*, Vol. 12; Number 9; pp. 2501-2515.
- Aral, A. 2008. A generalization of Szász-Mirakjan operators based on  $q$ -integers. *Math. Comput.Modelling*, Vol. 47; Number 9-10; pp. 1052-1062.
- Atakishiyev, N.M. and Atakishiyeva, M.K. 2001. A  $q$ -Analog of the Euler gamma integral. *Theoret. Math. Phys.*, Vol. 129; Number 1; pp. 1325–1334.
- Butzer, L. and Karsli, H. 2009. Voronovskaya-Type Theorems for Derivatives of the Bernstein-Chlodovsky Polynomials and the Szász-Mirakjan Operator. *Commentationes Mathematicae*, Vol. 49; Number 1; pp. 33-58.

- Karsli, H. 2011. Recent results on Chlodovsky operators. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, Vol. 56; Number 2; pp. 423–436.
- De Vore, R.A. and Lorentz, G.G. 1993. *Constructive Approximation*. Vol. 303; Springer-Verlag, 449 p., Singapore.
- Duren, P.L. 1983. *Univalent Functions*. Springer-Verlag, 376 p., New York.
- Gal, S.G. 2005. *Global Smoothness and Shape Preserving Interpolation by Classical Operators*. Birkhauser Publ., 146 p., Basel, Berlin.
- Gal, S.G. 2008. *Shape Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials*. Birkhauser Publ., 349 p., Boston.
- Gal, S.G. 2008. Voronovskaja's theorem and iterations for complex Bernstein polynomials in compact disks. *Mediterr. J. Math.*, Vol. 5; Number 3; pp. 253-272.
- Gal, S.G. 2008. Exact orders in simultaneous approximation by complex Bernstein-Stancu polynomials. *Revue d'Anal. Numer. Theor. de L'Approx. (Cluj-Napoca)*, Vol. 37; Number 1; pp. 47-52.
- Gal, S.G. 2008. Approximation and geometric properties of complex Favard-Szasz-Mirakjan operators in compact disks. *Comput. Math. Appl.*, Vol. 56; pp. 1121-1127.
- Gal, S.G. 2008. Shape preserving approximation by complex polynomials in the unit disk. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin., (N.S.)* Vol. 3; Number 2; pp. 323-337.
- Gal, S.G. 2008. Approximation and geometric properties of some nonlinear complex integral convolution operators. *Integral Transforms Spec. Funct.*, Vol. 19; pp. 367-375.
- Gal, S.G. 2009. Exact orders in simultaneous approximation by complex Bernstein polynomials. *J. Concr. Applic. Math.*, Vol. 7; Number 3; pp. 215-220.

- Gal, S.G. 2009. Approximation by Complex Bernstein and Convolution type Operators. World Scientific Publishing, 337 p., Singapore, London.
- Gasper, G. and Rahman, M. 1990. Basic Hypergeometric Series, Cambridge University Press, 428 p., Cambridge.
- Gergen, J. J., Dressel, F. G. and Purcell, W. H. 1963. Convergence of extended Bernstein polynomials in the complex domain. Pacific J. Math., Vol. 13; Number 4; pp. 1171-1180.
- Graham, I. and Kohr, G. 2003. Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions, Marcel Dekker, Inc., 528 p., New York.
- Kac, V. and Cheung, P. 2002. Quantum Calculus, Universitext, Springer-Verlag, 112 p., New York.
- Kodaira, K. 1978. Introduction to Complex Analysis. Cambridge University Press, 256 p.
- Kohr, G. and Mocanu, P.T. 2005. Special Chapters of Complex Analysis, Cluj University press, 267 p., Cluj-Napoca.
- Lorentz, G. G. 1953. Bernstein Polynomials, University of Toronto Press, 134 pp., Toronto.
- Lorentz, G.G. 1987. Approximation of Functions, Chelsea Publ., 187 p., New York.
- Mahmudov, N.I. 2010. Approximation properties of complex  $q$ -Szász-Mirakjan operators in compact disks. Computers & Mathematics with Applications, Vol. 60; Number 6; pp. 1784-1791.
- Ostrowska, S. 2003.  $q$ -Bernstein polynomials and their iterates. J. Approx. Theory, Vol. 123; pp. 232-255.
- Phillips, G.M. 1997. Bernstein polynomials based on the  $q$ -integers. Ann. Numer. Math., Vol. 4; pp. 511-518.

- Phillips, G.M. 2003. Interpolation and Approximation by Polynomials. Springer-Verlag, 312 p., New York, Berlin.
- Rajković, P.M., Stanković, M.S. and Marinkovic, S.D. 2002. Mean value theorems in  $q$ -Calculus. Math. Vesnic., Vol. 54; pp. 171–178.
- Stancu, D.D. 1968. Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., Vol. 13; pp. 1173–1194.
- Stanica, P. 2003. Netted matrices. Int. J. Math. Math. Sci., Vol. 39; pp. 2507–2518.
- Stypinski, Z. 1974. Theorem of Voronovskaya for Szász-Chlodovsky operators, Funct. Approximatio Comment. Math., Vol. 1; pp. 133-137.
- Szász, O. 1959. Generalization of S. Bernstein's polynomials to infinite interval. J. Res. Nat. Bur. Standards, Vol. 45; pp. 239–245.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Didem AYDIN  
**Doğum Yeri** : Samsun/Merkez  
**Doğum Tarihi** : 13.09.1978  
**Medeni Hali** : Bekar  
**Yabancı Dili** : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

**Lise** : 19 Mayıs Lisesi (1995)  
**Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi  
Matematik Bölümü (2001)  
**Yüksek Lisans** : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı (2007)

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Kırıkkale Üniversitesi, Fen Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi (2004-2008)  
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi (2008-...)

### Yayımları:

**Aydın, D.** and Aral, A. 2013. Some Approximation Properties of Complex  $q$ -Gauss-Weierstrass Type Integral Operators in the Unit Disk. Fasc. Mathematica, Tom XX (2013), Issue No. 1, 165-178.

**Aydın, D.** 2012. On Complex  $q$ -Szász-Mirakjan Operators Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. Volume 61, Number 2, Pages 51-66. ISSN 1303-5991.