q – BERNSTEIN POLİNOMLARININ KING TİPLİ GENELLEŞMELERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Kadir KANAT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2012

ANKARA

Kadir KANAT tarafından hazırlanan "$q-$BERNSTEIN POLİNOMLARININ KING TİPLİ GENELLEŞMELERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ" adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah ALTIN ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Elgiz BAYRAM ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Fatma AYAZ ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tarih: 28/08/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kadir KANAT

$q-$BERNSTEIN POLİNOMLARININ KING TİPLİ GENELLEŞMELERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Doktora Tezi)

Kadir KANAT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2012

ÖZET

Korovkin tipli yaklaşım teoremleri yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla Korovkin tipli yaklaşım teoremleri geliştirilmiştir [Gadjiev ve Orhan, 2002; Duman ve ark. 2003]. Bu teoremler kullanılarak birçok lineer pozitif operatörün $q-$genelleşmelerinin veya integral tipli genelleşmelerinin yaklaşım özellikleri araştırılabilmiştir. Bu tezde ise, Lupaş [Lupaş 1987] tarafından tanımlanan Bernstein operatörünün $q-$analoğunun önce King tipli daha sonra Kantorovich tipli genelleşmeleri verilmiş ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Yaklaşım teorisinde operatörlerin düzgün yakınsaklığının araştırılması kadar bu yakınsamanın hızının değerlendirilmesi de oldukça önemli bir konudur. Bu tezde, ilk olarak Bernstein operatörünün $q-$analoğunun King tipli genelleşmesi tanımlanmıştır. Bu operatörün hem süreklilik modülü hem de Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızının, Lupaş [Lupaş 1987] tarafından verilen Bernstein operatörlerinin q-analoğunun yaklaşım hızından bazı koşullar altında daha iyi olduğu gösterilmiştir. Bu durum tezin önemini arttırmaktadır. Bununla birlikte Bernstein operatörünün q-analoğunun King tipli genelleşmesinin istatistiksel yakınsaklığı da incelenmiştir. Ayrıca bu operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenerek, istatistiksel yaklaşım hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz

sınıfından fonksiyonlar yardımıyla bulunmuştur. Bununla birlikte, Bernstein operatörörlerinin $q-$analoğunun birinci tip Kantorovich tipli genelleşmesi $q-$integral yardımıyla tanımlanarak yaklaşım özellikleri verilmiştir. Daha sonra Bernstein operatörörlerinin $q-$analoğunun ikinci tip Kantorovich tipli genelleşmesi Riemann tipli $q-$integral yardımıyla tanımlanarak her iki operatöründe istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. Son olarak, bu operatörlerin istatistiksel yaklaşım hızları süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla bulunarak karşılaştırılmış, birinci tip operatörün yaklaşım hızının daha iyi olduğu görülmüştür.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Korovkin tipli teoremler, $q-$Bernstein operatörler, $q-$genelleşmeler, King tipli operatörler, Kantorovich tipli operatörler, İstatistiksel yakınsaklık
Sayfa Adedi : 95
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Ogün DOĞRU

THE APPROXIMATION PROPERTIES OF KING TYPE GENERALIZATIONS OF $q-$ BERNSTEIN OPERATORS

(Phd. Thesis)

Kadir KANAT

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
August 2012

ABSTRACT

Korovkin type approximation theorems have fundamental role in the approximation theory. Through the aid of the concept of statistical approximation, Korovkin type theorems are developed [Gadjiev and Orhan, 2002; Duman et all, 2003]. Using these theorems, the approximation properties of the $q-$generalizations and integral-type generalizations of many linear positive operators could be investigated. In this thesis, firstly King-type then Kantorovich-type generalizations of $q-$analogue of the Bernstein operators defined by Lupaş [Lupaş 2006] are given and statistical approximation properties of these generalizations are investigated. In the approximation theory, evaluation of approximation rate is as important subject as an investigation of uniform convergence of operators. In this thesis, King-type generalization of $q-$analogue of the Bernstein operator is firstly defined. It has been shown that, in terms of both the modulus of continuity and Lipschitz class functions, the rate of convergence of this operator is better then the rate of convergence of $q-$analogue of the Bernstein operators given by Lupaş [Lupaş 1987] under some conditions. This situation increases the importance of the thesis. The statistical approximation of King-type generalization of $q-$analogue of the Bernstein operator is also investigated. Furthermore, through investigating the statistical approximation properties, statistical approximation

rate of this operator is found with the aid of modulus of continuity and Lipschitz class functions respectively. Moreover, first type Kantorovich-type generalization of $q-$analogue of the Bernstein operator is defined via $q-$integral and approximation properties are given. Then, second type Kantorovich-type generalization of $q-$analogue of the Bernstein operator is defined via Riemann type $q-$integral and the approximation properties of both operators are investigated. Lastly, statistical approximation rates of these operators are found with the aid of modulus of continuity and Lipschitz class functions and these rates are compared. It is observed that, approximation rate of the first type operator is better.

Science Code : 204.1.138
Keywords : Korovkin type theorems, $q-$Bernstein operators, $q-$generalizations, King type operators, Kantorovich type operators, Statistical approximation.
Page Number : 95
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Ogün DOĞRU

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve önerilerini benden esirgemeden destekleyen, tanımaktan ve birlikte çalışmaktan onur duyduğum değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Ogün DOĞRU'ya teşekkürlerimi bildirmeyi bir borç bilirim. Tez izleme komitesi üyeleri değerli hocalarım, Sayın Prof. Dr. Elgiz Bayram ve Sayın Prof. Dr. Nurhayat İspir'e de bu tezin oluşmasındaki katkılarından dolayı minnettarım. Ayrıca hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan canımdan çok sevdiğim babam Ahmet KANAT'a, annem Berrin KANAT'a, biricik kardeşlerim Gülsün ve Cihangir'e en içten sevgi ve saygılarımı sunarım. Son olarak, mesafelere aldırmadan her anımda yanımda olduklarını bildiğim vefalı dostlarıma da çok teşekkür eder, sevgi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\lvert K\rvert$	K kümesinin eleman sayısı
$T_n(f;x)$	$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere lineer pozitif operatörler dizisi
$e_\nu(t)$	$e_\nu(t)=t^\nu,\ \nu=0,1,2$
$\varphi_{n,s}(x)$	$\varphi_{n,s}(x)=L_n\left((t-x)^s;x\right)$ s-yinci merkezi moment
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel fonksiyonların uzayı
$C_M[a,b]$	$\lvert f(x)\rvert\le M_f$ olacak şekilde sınırlı ve $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli f fonksiyonlarının oluşturduğu uzay
$B[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki bütün sınırlı fonksiyonların uzayı
M_f	f fonksiyonuna bağlı bir sabit
$\lVert f\rVert_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında $\lVert f\rVert_{C[a,b]}=\underset{x\in[a,b]}{maks}\lvert f(x)\rvert$ ile tanımlı norm
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$[\lvert\lambda\rvert]$	$\lambda\in\mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar
$I_q(f,a;b)$	$I_q(f,a;b)=\int_a^b f(t)\,d_qt$ ile verilen $q-$integral operatörü
$G_q(f;a,b)$	$G_q(f;a,b)=\int_a^b f(x)\,d_q^Gx=\int_{bq^n}^b f(x)\,d_qx$ ile verilen kısıtlanmış $q-$integral operatörü

1. GİRİŞ

Uygulamalı Matematik ve Fonksiyonel Analiz'in arakesitinde yer alan araştırma alanlarından biri de lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusudur ve matematiğin birçok dalıyla ilişkilidir.

Alman matematikçi Weierstrass [Weierstrass 1885] sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır. 1912 yılında ise Rus matematikçi Bernstein, varlığı bilinen bu polinomun, $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır.

Bohman [Bohman 1951] ve Korovkin [Korovkin 1953] lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımına ilişkin çok önemli teoremler vermişlerdir. Korovkin'in kendi adıyla anılan teoremler bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

1.1. Teorem

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende sınırlı olsun. Eğer T_n lineer pozitif operatörler dizisi

i) $\lim_{n\to\infty} \left\| T_n(1) - 1 \right\|_{C[a,b]} = 0$

ii) $\lim_{n\to\infty} \left\| T_n(t) - x \right\|_{C[a,b]} = 0$

iii) $\lim_{n\to\infty} \left\| T_n(t^2) - x^2 \right\|_{C[a,b]} = 0$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a,b]$ aralığında $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n(f)-f\|_{C[a,b]}=0$ dır. Yani $f\in C[a,b]$ için $T_n(f)$ operatörü f ye düzgün yakınsar [Korovkin 1953].

Daha sonra Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenebilen birçok lineer pozitif operatörler (Meyer-König-Zeller operatörleri, Szasz-Mirakjan operatörleri, Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri gibi) tanımlanmıştır.

Operatörler tanımlandıktan sonra bu operatörlerin çeşitli genelleşmeleri de ele alınmıştır. Son yıllarda, Durrmeyer tipli ve Kantorovich tipli genelleşmeler olarak bilinen integral tipli genelleşmeler oldukça önem kazanmıştır [Kantorovich 1930; Durrmeyer 1967; Derriennic 1981]. Örneğin, 1950 yılında Szasz tarafından

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!},\quad x\in[0,\infty)$$

şeklinde tanımlanan Szasz operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi, Totik [Totik 1983] tarafından $x\in[0,\infty)$ için

$$K_n(f;x)=ne^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt,$$

olarak tanımlanmıştır.

Lineer pozitif operatörlerin diğer bir genelleşmesi de $q-$teori ile ilgilidir. Yaklaşımlar teorisinde $q-$genelleşme kavramı ilk kez Lupaş [Lupaş 1987] tarafından Bernstein polinomlarına uygulanmış ve Ostrovska [Ostrovska 2006] bu operatörlerin düzgün yakınsaklığını incelemiştir. Phillips [Phillips 1997] üzerinde daha sıklıkla çalışılan

$q-$Bernstein polinomlarını tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Ayrıca $q-$Bernstein polinomları ile ilgili Oruç ve Tuncer [Oruç ve Tuncer 2002], Ostrovska [Ostrovska 2003] ve Phillips [Phillips 2000]'in çalışmaları da vardır.

Daha sonra $q-$genelleşme kavramı ile birçok operatörün $q-$genelleşmesi verilmiştir. Bunlara örnek olarak Meyer-König-Zeller operatörlerinin $q-$genelleşmesi Trif [Trif 2000] tarafından tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İkinci momentlerinin açıkça elde edilmesi için Doğru ve Duman [Doğru ve Duman 2006], $q-$Meyer-König-Zeller operatörlerinin yeni bir genelleşmesini yapmışlardır. Aral ve Gupta [Aral ve Gupta 2006], Szasz-Mirakjan operatörlerinin $q-$genelleşmesini yaparak yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Agratini ve Doğru [Agratini ve Doğru 2010] ise $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin modifikasyonunun ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

Derriennic tarafından Bernstein polinomlarının diğer bir integral tipli genelleşmesi olan Durrmeyer tipli genelleşmenin $q-$Bernstein polinomlarına genişletilmesi yine Derriennic tarafından yapılmıştır [Derriennic 2004]. Gupta [Gupta 2007], $q-$Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Diğer taraftan Kantorovich tarafından verilen Bernstein polinomlarının integral tipli genelleşmesinin $q-$Bernstein polinomlarına genişletilmesi Radu [Radu 2008] tarafından yapılmış ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İspir [İspir 2001] ağırlıklı uzayda Baskakov operatörlerinin yaklaşım özellerini incelemiştir. Gupta ve Radu [Gupta ve Radu 2009] ise $q-$Baskakov-Kantorovich operatörlerini tanımlamışlar ve bu operatörlerin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Dalmanoğlu ve Doğru [Dalmanoğlu ve Doğru 2010], $q-$Meyer-König-Zeller operatörleri için Kantorovich tipli genelleşme vermişlerdir. Szasz-Mirakjan, Szasz-Mirakjan-Kantorovich, Szasz-Schurer ve Szasz-Schurer-Kantorovich operatörlerinin $q-$genelleşmeleri Mahmudov [Mahmudov 2010] tarafından ayrıca incelenmiştir.

Bu tezde, Lupaş [Lupaş 1987] tarafından tanımlanmış olan $q-$Bernstein operatörlerinin öncelikle King tipli genelleşmesi verilerek yaklaşım özellikleri ve istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. Daha sonra, Kantorovich tipli genelleşmesi verilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $q-$Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli modifikasyonu Riemann tipli $q-$integral yardımıyla geliştirilmiş ve oluşturulan operatörlerin istatistiksel yaklaşım özellikleri verilmiştir. Yukarıda sözü edilen operatörlerin $q=1$ olması durumunda klasik operatörlerin integral tipli genelleşmelerine dönüşmesi ve q yerine (q_n) dizisi alınarak bu dizinin seçimine göre yaklaşım hızının amaca uygun şekilde ayarlanabilir olması tezin önemini artırmaktadır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde ihtiyaç duyulan temel teoremlerden ve tanımlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, $q-$Bernstein operatörlerinin King tipli modifikasyonu tanımlanmış ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise $q-$Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli modifikasyonu Riemann tipli $q-$integral yardımıyla geliştirilmiş ve bu operatörlerin süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı incelenmiştir. Ayrıca Riemann tipli $q-$integral ile tanımlanan operatörlerin istatistiksel yaklaşım özellikleri de elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, Bernstein operatörlerinin $q-$analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmelerinin yaklaşım hızı ile Lupaş [Lupaş 1987] tarafından verilen Bernstein operatörlerinin $q-$analoğunun yaklaşım hızı grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

Bu kısımda lineer pozitif operatörler ve sağladığı temel özellikler, süreklilik modülünün tanımı ve bazı özelliklerinin ispatları ile Lipschitz sınıfının tanımı verilecektir. Ayrıca Korovkin teoremi ifade ve ispat edilecektir.

2.1. Tanım

Lineer normlu fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı dönüşümlere operatör denir.

2.2. Tanım

U ve V fonksiyon uzayları olmak üzere

$$A : U \to V$$

şeklindeki A operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $f, g \in U$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$$

koşulu sağlanıyor ise A operatörüne lineer operatör denir.

2.3. Tanım

g bir fonksiyon ve A bir operatör olmak üzere

$g \geq 0$ iken $A(g) \geq 0$

sağlanıyor ise A operatörüne pozitif operatör denir.

2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$g \leq f \Rightarrow L(g) \leq L(f)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$g \leq f$ olsun. $f - g \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(f-g) \geq 0 \tag{2.1}$$

elde edilir. L operatörü lineer olduğundan

$$L(f-g) = L(f) - L(g)$$

olup Eş. 2.1 den ispat tamamlanır.

2.2. Lemma

L bir lineer pozitif operatör ise

$$|L(g)| \leq L(|g|)$$

sağlanır.

İspat

Herhangi bir g fonksiyonu için

$$-|g| \le g \le |g| \tag{2.2}$$

gerçeklenir. Lemma 2.1 ve Eş. 2.2 den

$$L\left(-|g|\right) \le L(g) \le L\left(|g|\right) \tag{2.3}$$

bulunur. L lineer olduğundan

$$L\left(-|g|\right) = -L\left(|g|\right)$$

dir. Bu ifadenin Eş. 2.3 de kullanılmasıyla

$$-L\left(|g|\right) \le L(g) \le L\left(|g|\right)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

2.4. Tanım

Bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $g \in C[a,b]$ olmak üzere

$$\|g\|_{C[a,b]} = \underset{a\le x\le b}{maks}\left|g\left(x\right)\right|$$

şeklinde tanımlanır.

2.5. Tanım

$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $g_n : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan $\left(g_n\right)$ dizisine fonksiyon dizisi denir.

2.6. Tanım

$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $A_n : X\to Y$, $A_n\left(f;x\right)=\left(A_n\left(f\right)\right)\left(x\right)$ şeklinde tanımlanan $\left(A_n\right)$ dizisine operatör dizisi denir.

2.7. Tanım

Her $x\in\left[a,b\right]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n - g\| = \lim_{n\to\infty}\underset{a\le x\le b}{maks}\left|g_n\left(x\right)-g\left(x\right)\right| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $\left(g_n\right)$ fonksiyonlar dizisi g fonksiyonuna $C\left[a,b\right]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve bu

$$g_n\left(x\right)\underset{\rightarrow}{\rightarrow} g\left(x\right)$$

notasyonu ile gösterilir.

2.8. Tanım

$$\varphi_{n,s}(x) = L_n\left((t-x)^s; x\right), \ \{s = 0,1,2,...\} \tag{2.4}$$

ile tanımlanan ifadelere (L_n) operatör dizisinin s-yinci merkezi momentleri denir [Lorentz 1953].

2.1. Teorem

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f \tag{2.5}$$

olsun. Eğer (L_n) lineer pozitif operatör dizisi, her $x \in [a,b]$ için

i. $L_n(1,x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} 1$

ii. $L_n(t,x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} x$

iii. $L_n(t^2,x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} x^2$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ de $L_n(f;x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} f(x)$ dir [Korovkin 1953].

İspat

Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki, $|t-x| \le \delta$ için

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon$$

olur. Eş. 2.5 ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t)-f(x)| \le |f(t)| + |f(x)| \le 2M_f \tag{2.6}$$

yazılabilir. Eğer, $|t-x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{2.7}$$

olur. Eş. 2.6 ve Eş. 2.7 den

$$|f(t)-f(x)| \le 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$|t-x| \le \delta$ için $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$

ve

$|t-x|>\delta$ için $|f(t)-f(x)| \le 2M_f \dfrac{(t-x)^2}{\delta^2}$

olur. Dolayısıyla her $x,t \in [a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.8}$$

gerçeklenir. (i), (ii), (iii) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f)-f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Operatörün lineerlik özelliği ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned} |L_n(f(t);x)-f(x)| &= |L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)| \\ &= |L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)| \\ &= |L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)| \end{aligned}$$

ve

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \le |L_n(f(t)-f(x);x)| + |f(x)||L_n(1;x)-1|$$

yazılabilir. Lemma 2.2 den

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \le L_n(|f(t)-f(x)|;x) + |f(x)||L_n(1;x)-1|$$

olup, Eş. 2.5 den

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+M_f\left|L_n(1;x)-1\right|$$

yazabiliriz. (L_n) monoton artan olduğundan Eş. 2.8 den

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\le L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M_f\left|L_n(1;x)-1\right| \tag{2.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan (L_n) lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n\left(t^2;x\right)-x^2-x^2+2x^2\right.\\
&\quad\left.-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\right\}\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n\left(t^2;x\right)-x^2+2x^2\right.\\
&\quad\left.-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)-x^2\right\}\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\right.\\
&\quad\left.+2x\left(x-L_n(t;x)\right)+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son ifade Eş. 2.9 da kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right| \le \varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\Big\{&\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\\ &+2x\left(x-L_n\left(t;x\right)\right)+x^2\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\Big\}\\ &+M_f\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|\end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. (i), (ii), (iii) koşullarının Eş. 2.10 da kullanılmasıyla

$$\left\|L_n\left(f\right)-f\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\{\underset{a\le x\le b}{maks}\left|L_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\right\}=0$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

2.9. Tanım

$f\in C\left[a,b\right]$ olsun. $\forall\delta>0$ için

$$\omega\left(f;\delta\right)=\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\ |t-x|\le\delta}}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right| \tag{2.11}$$

ile tanımlanan $\omega\left(f;\delta\right)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $\omega\left(f;\delta\right)\ge 0$

ii. $\delta_1\le\delta_2$ ise $\omega\left(f;\delta_1\right)\le\omega\left(f;\delta_2\right)$

iii. $m\in\mathbb{N}$ için $\omega\left(f;m\delta\right)\le m\omega\left(f;\delta\right)$

iv. $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için $\omega\left(f;\lambda\delta\right)\le\left(\lambda+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$

v. $\lim_{\delta \to 0} \omega(f;\delta) = 0$

vi. $|f(t) - f(x)| \le \omega(f;|t-x|)$

vii. $|f(t) - f(x)| \le \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f;\delta)$

İspat

i. Süreklilik modülü, tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.

ii. $\delta_1 \le \delta_2$ için $|t-x| \le \delta_2$ bölgesinin $|t-x| \le \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden ispat tamamlanır.

iii. Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |t-x| \le m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir. Burada

$$|t-x| \le m\delta \Rightarrow x - m\delta \le t \le x + m\delta$$

olup, $t = x + mh$ seçimiyle $|h| \le \delta$ ve

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \le \delta}} |f(x+mh) - f(x)|$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\le\delta}}\left|f(x+mh)-f(x)\right|=\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\le\delta}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left[f\left(x+(k+1)h\right)-f(x+kh)\right]\right|$$

olup eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\le\delta}}\left|f(x+mh)-f(x)\right| &\le \sum_{k=0}^{m-1}\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\le\delta}}\left|f\left(x+(k+1)h\right)-f(x+kh)\right|\\ &\le \omega(f;\delta)+\ldots+\omega(f;\delta)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\omega(f;m\delta)\le m\omega(f;\delta)$$

elde edilir.

iv. $\lambda\in\mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmını $[|\lambda|]$ ile gösterilirse bu durumda

$$[|\lambda|]\le\lambda<[|\lambda|]+1$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu açıktır. O halde bu eşitsizliklerden ve (ii) özelliğinde ispat edilen $\omega(f;\delta)$ nın azalmayan fonksiyon olması kullanılırsa

$$\omega(f;\lambda\delta)\le\omega\left(f;\left([|\lambda|]+1\right)\delta\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. $[|\lambda|]$ pozitif bir tam sayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanabilir. Bu durumda

$$\omega\left(f;\left([|\lambda|]+1\right)\delta\right)\leq\left([|\lambda|]+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca her $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ için

$$[|\lambda|]+1<\lambda+1$$

olduğundan

$$\omega\left(f;\left([|\lambda|]+1\right)\delta\right)\leq\left(\lambda+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\omega\left(f;\lambda\delta\right)\leq\left(\lambda+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

yazılır, böylece ispat tamamlanır.

v. $|t-x|\leq\delta$ eşitsizliğindeki δ nın sıfıra yaklaşması $t\to x$ olması anlamına gelir. f fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımına göre $t\to x$ için $\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\to 0$ olduğundan ispat açıktır.

vi. $\omega\left(f;\delta\right)$ ifadesinde $\delta=|t-x|$ seçilirse

$$\omega\left(f;|t-x|\right)=\sup_{x\in[a,b]}\left|f(t)-f(x)\right|$$

elde edilir. O halde $\left|f(t)-f(x)\right|$ lerin supremumu $\omega\left(f;|t-x|\right)$ olacağından ispat aşikardır.

vii. (vi) özelliğinden

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq\omega\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

2.10. Tanım (Lipschitz Sınıfı Fonksiyonlar)

$0<\alpha\leq 1$ ve $t,x\in[0,1]$ olmak üzere

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq M\left|t-x\right|^{\alpha} \tag{2.12}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfındandır denir. Buradaki M ye Lipschitz sabiti denir ve $f\in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

2.2. q – Analiz

q-analiz, sayılar teorisi ve ortogonal polinomlar gibi, matematiğin birçok farklı alanlarında kullanılmasının yanı sıra görecelik teorisi ve kuantum mekaniği gibi bilim dallarında da uygulama alanlarına sahip olduğu bilinmektedir.

Bu bağlamda q-analizin en önemli isimlerinden olan Frank Hilton Jackson (1870 -1960), XX. yy başlarında q-türev ve q-integral tanımlarıyla, q-analizin sistematik şekilde ilerlemesine önderlik etmiştir. Son yıllarda klasik analizde bilinen birçok tanım ve teoremin $q-$ genelleşmeleri üzerine çalışılmaktadır [Gauchman 2004, Marinkovich ve ark. 2008].

q-analizdeki hızlı gelişmeler, q-tamsayılarını içeren Bernstein polinomlarının yeni genelleştirmelerinin keşfine yol açmıştır. Bu yönde ilk çalışmaları yapan kişi Alexandru Lupaş'tır. 1987 de Bernstein operatörlerinin q-analoğunu tanımlanmış ve yakınsaklığını incelemiştir. J.P.King ise 2003 te klasik Bernstein polinomları için ikinci momentleri koruyan bir genelleştirme vermiştir.

$q-$ analizin temel ifadeleri, Kac ve Cheung [Kac ve Cheung 2002] 'un Quantum Calculus adlı kitabında, detaylar ise Andrews ve Askey [Andrews ve Askey 1999] 'in Special Functions adlı kitabında bulunabilir.
$q>0$ olmak üzere, negatif olmayan bir r tamsayısı için,

$$[r]_q=\begin{cases}\dfrac{1-q^r}{1-q} & , \; q\neq 1\\ r & , \; q=1\end{cases}$$

ifadesine r'nin $q-$ tamsayısı denir. Bu tezde $[r]_q:=[r]$ şeklinde kullanılacaktır.

$q>0$ olmak üzere, $r\in\mathbb{N}$ için r nin $q-$ tamsayısı,

$$[r] = \begin{cases} 1+q+...+q^{r-1} & , \ q \neq 1 \\ r & , \ q = 1 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

$q > 0$ olmak üzere, $r \in \mathbb{N}$

$$[r]! = \begin{cases} [1][2]...[r], & r = 1,2, \ ... \\ 1 & , \quad r = 0. \end{cases}$$

ifadesine r 'nin $q-$faktöriyeli ve $n \geq r \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-r]![r]!}$$

ifadesine de $\binom{n}{r}$ nin $q-$binom analoğu denir. $q = 1$ durumunda klasik binom katsayısı elde edilir.

$q \in (0,1) \cup (1,\infty)$ olmak üzere, $q-$diferensiyel operatörü

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, \ x \neq 0; \ \ D_q f(0) = \lim_{x \to 0} D_q f(x)$$

ile tanımlıdır. Bu tanımdan

$$D_q x^n = [n] x^{n-1} \tag{2.13}$$

olduğu açıkça görülür.

Tanımdan hareketle iki fonksiyonun çarpımının $q-$diferensiyeli de

$$D_q\left(u(x)v(x)\right)=D_q\left(u(x)\right)v(x)+u(qx)D_q\left(v(x)\right)$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$n\geq 1$ için $(x-a)_q^n=(x-a)(x-qa)...\left(x-q^{n-1}a\right)$ olmak üzere

$$D_q\left((x-a)_q^n\right)=[n](x-a)_q^{n-1} \tag{2.14}$$

olduğu açıkça görülür.

$[a,b]$ aralığında f fonksiyonunun $q-$integrali,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,d_qt&=\int_0^b f(t)\,d_qt-\int_0^a f(t)\,d_qt\\&=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\left(bf\left(q^jb\right)-af\left(q^ja\right)\right)q^j\end{aligned}$$

ile tanımlanır [Jackson, 1910].

Bu tanımda $a=0$ alındığında f 'nin $[0,b]$ aralığında $q-$integrali

$$\int_0^b f(t)\,d_qt=(1-q)\ b\sum_{j=0}^{\infty}f\left(q^jb\right)q^j\ ,\ 0<q<1$$

olarak tanımlanmıştır [Jackson, 1910].

$[0,b]$ aralığında f fonksiyonu Riemann integrallenebilir ise

$$\int_0^b f(t)\,dt=\lim_{q\to 1^-}\int_0^b f(t)\,d_q t$$

dir.

Daha sonra f 'nin $[a,b]$ aralığında Riemann tipli $q-$integrali

$$\int_a^b f(t)\,d_q^R t=(1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} f\left(a+(b-a)q^j\right)q^j\ ,\ 0<q<1$$

olarak tanımlanmıştır [Stankovich ve ark., 2006]. Riemann tipli $q-$integral lineer ve pozitif bir operatördür ve bu integral Hölder eşitsizliğini de sağlar. Yani:

$$\alpha,\beta>1 \text{ ve } \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \text{ için } \int_a^b \left|f(t)g(t)\right| d_q^R t\le\left(\int_a^b \left|f(t)\right|^{\alpha} d_q^R t\right)^{1/\alpha}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^{\beta} d_q^R t\right)^{1/\beta}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. BERNSTEIN OPERATÖRÜNÜN q-ANALOĞUNUN KING TİPLİ GENELLEŞMESİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Lupaş [Lupaş 1987] tarafından verilen Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King tipli genelleşmesi tanımlanarak istatistiksel yaklaşım hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

3.1. Tanım

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ olmak üzere, Bernstein polinomu

$$B_n(f;x):=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad n=1,2,... \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [Bernstein 1912].

3.2. Tanım

$f\in C[0,1]$ olsun. $R_{n,q}:C[0,1]\to C[0,1]$ lineer operatör olmak üzere, Bernstein operatörünün q-analoğu Lupaş tarafından,

$$R_{n,q}(f)=R_n(f,q;x):=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)b_{nk}(q;x) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada

$$b_{nk}\left(q;x\right):=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^{k}\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)...\left(1-x+q^{n-1}x\right)} \tag{3.3}$$

dir [Lupaş 1987].

Ayrıca $q-$analizden,

$$\left[k\right]=\begin{cases} \dfrac{1-q^{k}}{1-q} &, \quad q\neq 1 \\ k &, \quad q=1 \end{cases},$$

$$\left[k\right]!=\begin{cases} \left[k\right]\left[k-1\right]...\left[1\right], & k=1,2,... \\ 1 &, \quad k=0 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{\left[n\right]!}{\left[k\right]!\left[n-k\right]!} \qquad \left(n\geq k\geq 0\right)$$

eşitlikleri bilinmektedir [Andrews ve ark. 1999].

$R_n\left(f,1;x\right)=B_n\left(f;x\right)$ olduğu açıktır. Ayrıca $C\left[0,1\right]$ üzerinde, her $q>0$ ve $n=1,2,...$ için $R_n\left(f,q;x\right)$ ler lineer pozitif operatörlerdir.

Newton binom formülünün bir genişlemesi olan

$$\left(1+x\right)\left(1+qx\right)...\left(1+q^{n-1}x\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}q^{k(k-1)/2}x^{k} \tag{3.4}$$

kullanılmasıyla, $x \in [0,1]$ için

$$\sum_{k=0}^{n} b_{nk}(q;x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)} = 1 \tag{3.5}$$

elde edilmektedir.

3.1. Lemma

Lupaş tarafından Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 ile verilen Bernstein operatörünün q-analoğu için aşağıdaki özellikler sağlanmaktadır [Lupaş 1987]:

i. $R_n(1,q;x) = 1$,

ii. $R_n(t,q;x) = x$,

iii. $R_n(t^2,q;x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{[n]} - \dfrac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}\left(1-\dfrac{1}{[n]}\right)$. (3.6)

3.1. Bernstein Operatörünün $q-$ analoğunun King Tipli Genelleşmesi ve Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, $f \in C[0,1]$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1)$ için Lupaş tarafından verilen Bernstein operatörünün $q-$analoğunun King tipli genelleşmesi olan $R_n^*(f,q;x)$ tanımlanarak, istatistiksel yaklaşım hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımı ile verilecektir. Ayrıca $[0,1]$ aralığının bazı alt aralıklarında $n \geq 2$ için

$$q[n] > 1 \tag{3.7}$$

koşulu ile $R_n^*(f,q;x)$ operatörünün yaklaşım hızının klasik $q-$Bernstein operatörünün yaklaşım hızından daha iyi olduğu bulunacaktır.

3.3. Tanım

$\{r_n(x)\}$, $[0,1]$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $0 \le r_n(x) \le 1$ olsun. $f \in C[0,1]$, $0 \le x \le 1$, $0 < q < 1$ için $R_n^* : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörü,

$$R_n^*(f,q;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2} r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır [Doğru ve Kanat 2012a]. $r_n(x) = x$ özel durumu için bu polinom, Eş. 3.2 ye dönüşür. Burada $r_n(x)$ yerine $r_n^*(x)$,

$$\begin{cases} r_1^*(x) = x^2 \\ r_n^*(x) = -\dfrac{1+x^2[n](1-q)}{2(q[n]-1)} + \dfrac{\sqrt{1+2x^2[n](2q[n]-q-1)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{2(q[n]-1)} \end{cases}$$

şeklinde seçilirse, Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesi için

i. $R_n^*(1,q;x) = 1$

ii. $R_n^*(t,q;x) = r_n^*(x)$

$$= -\frac{1+x^2[n](1-q)}{2(q[n]-1)} + \frac{\sqrt{1+2x^2[n](2q[n]-q-1)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{2(q[n]-1)}, \quad n = 2,3,\ldots \quad (3.9)$$

iii. $R_n^*\left(t^2,q;x\right)=x^2$

özellikleri elde edilecektir. Burada Eş. 3.7 den bulunan

$$2q[n]-q-1>1-q$$

eşitsizliği ve

$$1+2x^2[n](1-q)+x^4[n]^2(1-q)^2=\left(1+x^2[n](1-q)\right)^2$$

eşitliği kullanılırsa $r_n^*(x)\geq 0$ elde edilir. Bununla birlikte $x\in[0,1]$ için Eş. 3.7 den

$$0<4q[n]\left(q[n]-1\right)\left(1-x^2\right)$$

elde edilir ki bu yüzden

$$1+2x^2[n]\left(2q[n]-q-1\right)+x^4[n]^2(1-q)^2\leq\left(2\left(q[n]-1\right)+x^2[n](1-q)+1\right)^2$$

yazılabilir. Sonuç olarak son eşitsizlik kullanılarak $r_n^*(x)\leq 1$ bulunur.

Ayrıca $0<q_n<1$ için

$$\lim_{n\to\infty}q_n=1,\ \lim_{n\to\infty}q_n^n=a\ \ (a<1)\ \text{ve}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{[n]_{q_n}}=0 \tag{3.10}$$

olacak şekilde bir $q=\left(q_n\right)$ dizisi seçilirse

$$\lim_{n\to\infty} r_n^*\left(x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1+x^2\left[n\right]_{q_n}\left(1-q_n\right)}{2\left(q_n\left[n\right]_{q_n}-1\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{1+2x^2\left[n\right]_{q_n}\left(2q_n\left[n\right]_{q_n}-q_n-1\right)+x^4\left[n\right]_{q_n}^2\left(1-q_n\right)^2}}{2\left(q_n\left[n\right]_{q_n}-1\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1+x^2\left(1-q_n^n\right)}{2\left(q_n\dfrac{1-q_n^n}{1-q_n}-1\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\left[n\right]_{q_n}^2}+2x^2\left(2q_n-\dfrac{q_n}{\left[n\right]_{q_n}}-\dfrac{1}{\left[n\right]_{q_n}}\right)+x^4\left(1-q_n\right)^2}}{2\left(q_n-\dfrac{1}{\left[n\right]_{q_n}}\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\left(1+x^2\left(1-q_n^n\right)\right)\left(1-q_n\right)}{2\left(q_n\left(1-q_n^n\right)-1+q_n\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\left[n\right]_{q_n}^2}+2x^2\left(2q_n-\dfrac{q_n}{\left[n\right]_{q_n}}-\dfrac{1}{\left[n\right]_{q_n}}\right)+x^4\left(1-q_n\right)^2}}{2\left(q_n-\dfrac{1}{\left[n\right]_{q_n}}\right)}\right)$$

$$=x$$

bulunur.

Şimdi Eş. 3.8 ile verilen Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesinin yaklaşım hızı, Eş. 2.11 ile tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

3.1. Teorem

(q_n), herbir $n \geq 2$ için $0 < q_n \leq 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. $\delta > 0$ iken her $x \in [0,1]$ ve $f \in C[0,1]$ için Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesinin süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\left|R_n^*(f, q_n; x) - f(x)\right| \leq 2\omega\left(f; \delta_n^*(x)\right)$$

dir. Burada

$$\delta_n^*(x) = \left(2x^2 + x\left(\frac{1 + x^2 [n]_{q_n} (1 - q_n)}{q_n [n]_{q_n} - 1} - \frac{\sqrt{1 + 2x^2 [n]_{q_n} \left(2q_n [n]_{q_n} - q_n - 1\right) + x^4 [n]_{q_n}^2 (1 - q_n)^2}}{q_n [n]_{q_n} - 1} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

olur ve $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n^*(x) = 0$ dır [Doğru ve Kanat 2012a].

İspat

Her $x \in [0,1]$ için

$$R_n^*(f, q; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} r_n^k(x) \left(1 - r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1 - r_n(x) + q r_n(x)\right) \ldots \left(1 - r_n(x) + q^{n-1} r_n(x)\right)}$$

olduğundan ve lineerlik özelliğinden dolayı

$$\left|R_n^*\left(f,q;x\right)-f\left(x\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)...\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right.$$

$$\left.-f\left(x\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)...\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)-f\left(x\right)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)...\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)-f\left(x\right)\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)...\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)} \tag{3.12}$$

elde edilir. Biliyoruz ki, süreklilik modülü

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left(\frac{\left|t-x\right|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $t=\dfrac{[k]}{[n]}$ seçilirse

$$\left|f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left(\frac{\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu sonuç Eş. 3.12 de yerine yazılır ve lineer pozitif operatörlerin monotonluğu kullanılırsa

$$\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta(x)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|}{\delta}\omega\left(f;\delta(x)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\omega\left(f;\delta(x)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}+R_n^*(1,q;x)\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right\} \quad (3.13)$$

bulunur. Burada

$$K=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}$$

olarak seçilirse

$$K=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|\left(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$K\le\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]}{[n]}-x\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]}{[n]}-x\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(R_n^*(1,q;x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]}{[n]}-x\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.14}$$

elde edilir. Eş. 3.14, Eş. 3.13 de yerine yazılırsa

$$\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right|\le\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]}{[n]}-x\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]^2}{[n]^2}-2x\frac{[k]}{[n]}+x^2\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta\left(x\right)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]^2}{[n]^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right.\right.$$

$$-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]}{[n]}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}$$

$$\left.\left.+x^2\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

olur. Buradan

$$\left|R_n^*\left(f,q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\omega\left(f;\delta\left(x\right)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(R_n^*\left(t^2,q;x\right)-2xR_n^*\left(t,q;x\right)+x^2R_n^*\left(1,q;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{3.15}$$

elde edilir. Sonuç olarak, Eş. 3.15 de Eş. 3.9 eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\left|R_n^*\left(f,q;x\right)-f\left(x\right)\right|$$

$$\leq\omega\left(f;\delta\left(x\right)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n]\left(2q[n]-q-1\right)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

bulunur. Burada $\delta\left(x\right)=\delta_n^*\left(x\right)$ gibi alınmalıdır. Son olarak, $0\leq q_n<1$ için Eş. 3.10 ‘un koşullarını sağlayan bir $\left(q_n\right)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}\delta_n^*=0$ olduğu gösterilecektir.

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n^*(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n]_{q_n}(1-q_n)}{2\left(q_n[n]_{q_n}-1\right)}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n]_{q_n}\left(2q_n[n]_{q_n}-q_n-1\right)+x^4[n]_{q_n}^2(1-q_n)^2}}{2\left(q_n[n]_{q_n}-1\right)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2x^2+x\left(\frac{1+x^2\left(1-q_n^n\right)}{q_n\left(\frac{1-q_n^n}{1-q_n}\right)-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2\left(\frac{1-q_n^n}{1-q_n}\right)\left(2q_n\left(\frac{1-q_n^n}{1-q_n}\right)-q_n-1\right)+x^4\left(1-q_n^n\right)^2}}{q_n\left(\frac{1-q_n^n}{1-q_n}\right)-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2x^2+x\left(\frac{\left(1+x^2\left(1-q_n^n\right)\right)(1-q_n)}{q_n\left(1-q_n^n\right)-1+q_n}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\sqrt{(1-q_n)^2+2x^2\left(1-q_n^n\right)\left(2q_n\left(1-q_n^n\right)-\left(1-q_n^2\right)\right)+x^4\left(1-q_n^n\right)^2(1-q_n)^2}}{q_n\left(1-q_n^n\right)-1+q_n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2x^2-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=0$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Lupaş [Lupaş 1987] tarafından Bernstein operatörlerinin q-analoğunun süreklilik modülü ile yaklaşım hızı

$$\left|R_n(f,q;x)-f(x)\right|\le\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{x(1-x)}{[n]}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Dolayısıyla, Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesinin süreklilik modülüyle yaklaşım hızının daha iyi sonuç vermesi için

$$2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n](2q[n]-q-1)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)\leq\frac{x(1-x)}{[n]}$$

olması gerekmektedir.

Özel olarak Eş. 3.7 olduğu ve $x\leq\frac{1}{2[n]+1}$ kabul edilirse

$$2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n](2q[n]-q-1)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$<2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n](1-q)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$=2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2[n](1-q)\right)^2}}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$=2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$=2x^2-\frac{x(1-x)}{[n]}=x\left(2x-\frac{(1-x)}{[n]}\right)$$

$$<2x-\frac{(1-x)}{[n]}=x\left(\frac{2[n]+1}{[n]}\right)-\frac{1}{[n]}$$

$$<\frac{1}{2[n]+1}\left(\frac{2[n]+1}{[n]}\right)-\frac{1}{[n]}=0$$

olur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.1. Sonuç

Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesinin süreklilik modülü ile yaklaşım hızı, Eş. 3.7 ve $x \leq \frac{1}{2[n]+1}$ alındığında Lupaş [Lupaş 1987] tarafından verilen Bernstein operatörlerinin q-analoğunun süreklilik modülü ile yaklaşım hızından daha iyidir [Doğru ve Kanat 2012a].

3.2. Bernstein Operatörünün $q-$analoğunun King Tipli Genelleşmesinin Lipschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda,

$$r_n(x)=-\frac{1+x^2[n](1-q)}{2(q[n]-1)}+\frac{\sqrt{1+2x^2[n](2q[n]-q-1)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{2(q[n]-1)},\ n=2,3,... \tag{3.16}$$

olmak üzere, Eş. 3.8 ile verilen Bernstein operatörünün q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesinin yaklaşım hızı Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

3.2. Teorem

$0<\alpha\leq 1$ için $f \in Lip_M(\alpha)$ ise

$$\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right|$$

$$\leq M\left\{2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n](2q[n]-q-1)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \quad (3.17)$$

dir [Doğru ve Kanat 2012a].

İspat

Eş. 3.16 kullanılırsa

$$R_n^*(1,q;x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)(1-r_n(x))^{n-k}}{(1-r_n(x)+qr_n(x))\ldots(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x))}=1$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)(1-r_n(x))^{n-k}}{(1-r_n(x)+qr_n(x))\ldots(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x))}\right. \\ &\qquad \left. -f(x)\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)(1-r_n(x))^{n-k}}{(1-r_n(x)+qr_n(x))\ldots(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x))}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)-f(x)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)(1-r_n(x))^{n-k}}{(1-r_n(x)+qr_n(x))\ldots(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x))}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $0\leq r_n(x)\leq 1$, $0\leq x\leq 1$ ve $0<q<1$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)(1-r_n(x))^{n-k}}{(1-r_n(x)+qr_n(x))\ldots(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x))}\geq 0$$

olduğundan, üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)-f(x)\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)} \quad (3.18)$$

olur. Eş. 2.12 de $t=\dfrac{[k]}{[n]}$ seçilirse

$$\left|f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)-f(x)\right| \le M\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|^{\alpha}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik Eş. 3.18 de kullanılırsa

$$\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right| \le M\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|^{\alpha}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right\} \quad (3.19)$$

elde edilir. $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ seçilirse $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olur. Böylece Eş. 3.19 dan dolayı

$$\begin{aligned}\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right| &\le M\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|^{\alpha}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\quad\times\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}} \\ &= M\sum_{k=0}^{n}\left\{\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k(x)\left(1-r_n(x)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n(x)+qr_n(x)\right)\ldots\left(1-r_n(x)+q^{n-1}r_n(x)\right)}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

$$\times\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

olarak bulunur. Son eşitliğe, Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|R_n^*\left(f,q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times\left\{R_n^*\left(1,q;x\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]}{[n]}-x\right|^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\leq M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]^2}{[n]^2}-2x\frac{[k]}{[n]}+x^2\right)\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]^2}{[n]^2}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\right.$$

$$-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]}{[n]}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)\ldots\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}$$

$$+x^2\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}r_n^k\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)^{n-k}}{\left(1-r_n\left(x\right)+qr_n\left(x\right)\right)...\left(1-r_n\left(x\right)+q^{n-1}r_n\left(x\right)\right)}\Bigg\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{R_n^*\left(t^2,q;x\right)-2xR_n^*\left(t,q;x\right)+x^2R_n^*\left(1,q;x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur. Eş. 3.9 dan dolayı

$$\left|R_n^*\left(f,q;x\right)-f\left(x\right)\right|$$

$$\leq M\left\{2x^2+x\left(\frac{1+x^2\left[n\right]\left(1-q\right)}{q\left[n\right]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2\left[n\right]\left(2q\left[n\right]-q-1\right)+x^4\left[n\right]^2\left(1-q\right)^2}}{q\left[n\right]-1}\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur.

Lupaş, [Lupaş 1987] de Bernstein operatörlerinin q-analoğunun Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızını

$$\left|R_n\left(f,q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left\{\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

şeklinde verdiği bilinmektedir.

Bu nedenle, Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesinin Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızının daha iyi olması için Eş. 3.9 kullanıldığında

$$R_n^*\left((t-x)^2,q_n;x\right)=R_n^*\left(t^2,q;x\right)-2xR_n^*\left(t,q;x\right)+x^2R_n^*\left(1,q;x\right)$$

$$=2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n]\left(2q[n]-q-1\right)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)$$

$$\leq\frac{x(1-x)}{[n]} \tag{3.20}$$

olmalıdır. Özel olarak $n\geq 2$ için Eş. 3.7 ve $x\leq\dfrac{1}{2[n]+1}$ alınırsa

$$2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n]\left(2q[n]-q-1\right)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$<2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{1+2x^2[n](1-q)+x^4[n]^2(1-q)^2}}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$=2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2[n](1-q)\right)^2}}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$=2x^2+x\left(\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}-\frac{1+x^2[n](1-q)}{q[n]-1}\right)-\frac{x(1-x)}{[n]}$$

$$=2x^2-\frac{x(1-x)}{[n]}=x\left(2x-\frac{(1-x)}{[n]}\right)$$

$$<2x-\frac{(1-x)}{[n]}=x\left(\frac{2[n]+1}{[n]}\right)-\frac{1}{[n]}$$

$$<\frac{1}{2[n]+1}\left(\frac{2[n]+1}{[n]}\right)-\frac{1}{[n]}=0$$

olur ve böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.2. Sonuç

Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmesinin Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı, $n \geq 2$ ve $x \leq \dfrac{1}{2[n]+1}$ koşulları altında Lupaş [Lupaş 1987] tarafından verilen Bernstein operatörlerinin q-analoğunun Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızından daha iyidir [Doğru ve Kanat 2012a].

3.3. Bernstein Operatörünün $q-$analoğunun King Tipli Genelleşmesinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda öncelikle istatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatıldıktan sonra, Eş. 3.8 ve Eş. 3.16 ile tanımlanan Bernstein operatörünün q-analoğunun King tipli genelleşmesinin istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir. Bu operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenip, istatistiksel yaklaşım hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla bulunacaktır.

3.3.1. İstatistiksel yakınsaklık

K kümesi, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Öncelikle "yoğunluk" kavramını ele alalım.

3.5. Tanım

Bir $K \subset \mathbb{N}$ altkümesi için

$$\lim_n \frac{1}{n}|K_n|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [Niven 1991]. Burada $|K_n|$, K kümesinin eleman sayısını gösterir.

3.6. Tanım

$x := (x_k)$ reel tanımlı bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda $x := (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_k x_k = L$ ile gösterilir [Fast 1951].

Tanımından da görüleceği gibi, istatistiksel yakınsaklıkta, bir L sayısının ε komşuluğu dışında dizinin sonsuz çoklukta elemanı bulunmasına karşın, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olabilir. Bu ise bize istatistiksel yakınsaklığın klasik yakınsaklıktan daha genel bir kavram olduğunu gösterir. Dolayısıyla yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.

Lineer pozitif operatörler için istatistiksel yaklaşım veren Korovkin tipli bir teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir [Gadjiev ve Orhan 2002].

3.3. Teorem

M_f, f ye bağlı bir sabit olmak üzere, $[a,b]$ aralığında

$$|f(x)| \leq M_f, \qquad -\infty < x < \infty,$$

olacak şekilde sınırlı ve bu aralığın her noktasında sürekli f fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $C_M\left[a,b\right]$ ile gösterilsin.

Eğer $A_n : C_M\left[a,b\right] \to B\left[a,b\right]$ lineer pozitif operatörler dizisi, $e_\nu\left(t\right) = t^\nu$, $\nu = 0,1,2$ için

$$st - \lim_n \left\| A_n\left(e_\nu;.\right) - e_\nu \right\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarını gerçekliyorsa, her $f \in C_M\left[a,b\right]$ için

$$st - \lim_n \left\| A_n\left(f;.\right) - f \right\|_B = 0$$

sağlanır. Burada $B\left[a,b\right]$ ile $\left[a,b\right]$ aralığındaki bütün sınırlı fonksiyonların uzayı gösterilmektedir [Gadjiev ve Orhan 2002].

3.3.2. Bernstein operatörünün $q-$analoğunun King tipli genelleşmesinin istatistiksel yakınsaklığı

Bu kısımda amacımız, $R_n^*\left(f,q;x\right)$ operatörünün istatistiksel yakınsaklığını incelemektir. Bunun için aşağıdaki teoremi verelim.

3.4. Teorem

$q := \left(q_n\right)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere,

$$st - \lim_n q_n = 1,\; st - \lim_n q_n^n = a,\; \left(a < 1\right) \text{ ve } st - \lim_n \frac{1}{\left[n\right]} = 0 \tag{3.21}$$

şartları sağlansın. Bu takdirde, $f \in C[0,1]$ olmak üzere, Eş. 3.8 ve Eş. 3.16 ile tanımlanan operatör için

$$\delta_n^*(x) = R_n^*\left((t-x)^2, q_n; x\right)$$

ise

$$\left|R_n^*(f, q_n; x) - f(x)\right| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\delta_n^*(x)}\right)$$

sağlanır [Doğru ve Kanat 2012a].

İspat

Teorem 3.1 in ispatına benzer şekilde, $q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere Eş. 3.21 şartlarını sağlayacak şekilde seçilir ve Eş. 3.11 deki $\delta_n^*(x)$ göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

3.5. Teorem

$q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere Eş. 3.21 koşullarını sağlasın. Bu takdirde, $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$\delta_n = \sqrt{\frac{2}{9[n]}} \tag{3.22}$$

ise

$$\left\| R_n^*\left(f,q_n;.\right)-f\left(.\right)\right\|_{C[0,1]} \leq 2\omega\left(f,\delta_n\right)$$

dir [Doğru ve Kanat 2012a].

İspat

Teorem 3.4 de elde ettiğimiz

$$\left|R_n^*\left(f,q_n;x\right)-f\left(x\right)\right| \leq 2\omega\left(f,\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{R_n^*\left(\left(t-x\right)^2,q_n;x\right)}\right\} \tag{3.23}$$

eşitsizliğinde özel olarak $n \geq 2$ için $x \leq \dfrac{1}{2\left[n\right]+1}$ alınırsa, Eş. 3.20 den

$$R_n^*\left(\left(t-x\right)^2,q_n;x\right) \leq \sqrt{\frac{2}{9\left[n\right]}} \tag{3.24}$$

bulunur. Burada Eş. 3.24, Eş. 3.23 de kullanılır ve yeni elde edilen eşitsizliğin her iki tarafında $\left[0,1\right]$ üzerinden maksimum alınırsa ispat tamamlanır.

3.6. Teorem

$q:=\left(q_n\right)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere Eş. 3.21 koşullarını sağlasın. Bu takdirde, $f \in Lip_M\left(\alpha\right)$ olmak üzere δ_n Eş. 3.22 deki gibi alınırsa

$$\left\| R_n^*\left(f,q_n;.\right)-f\left(.\right)\right\|_{C[0,1]} \leq 2\omega\left(f,\delta_n\right)$$

dir [Doğru ve Kanat 2012a].

İspat

$q:=(q_n)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere Eş. 3.21 ile verilen koşulları sağlasın ve $0<\alpha\leq 1$ için $f\in Lip_M(\alpha)$ olsun. Burada $R_n^*(f,q;x)$ in lineerliği ve monotonluğundan

$$\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right|\leq R_n^*\left(\left|f(t)-f(x)\right|,q;x\right)\leq MR_n^*\left(\left|t-x\right|^{\alpha},q;x\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere, Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|R_n^*(f,q;x)-f(x)\right|\leq M\left\{R_n^*\left((e_1-x)^2,q;x\right)\right\}^{\alpha/2}$$

olur. Böylece δ_n, Eş. 3.22 deki gibi alınırsa ispat tamamlanır.

4. BERNSTEIN OPERATÖRÜNÜN q -ANALOĞUNUN KANTOROVICH TİPLİ GENELLEŞMESİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

4.1. Bernstein Operatörünün $q-$ analoğunun Kantorovich Tipli Genelleşmesi

f , $[0,1]$ aralığında $q-$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1)$ için Lupaş tarafından verilen Bernstein operatörünün $q-$ analoğunun Kantorovich tipli bir genelleşmesi

$$\tilde{R}_n(f,q;x) = [n+1] \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} f(t)\, d_q t \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{-k} q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır [Doğru ve Kanat 2012b].

4.1. Lemma

$\tilde{R}_n(f,q;x)$ operatörü için

$$\tilde{R}_n(e_0,q;x) = 1$$

dir [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$$\tilde{R}_n(e_0,q;x) = [n+1] \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q t \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{-k} q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)} \tag{4.2}$$

ifadesinde

$$[k+1]-[k]=q^k,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q},\ 0<q<1 \tag{4.3}$$

oldukları kullanılır ve $q-$ integralin tanımından yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q t &= \int_{0}^{[k+1]/[n+1]} d_q t - \int_{0}^{[k]/[n+1]} d_q t \\
&= (1-q)\frac{[k+1]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^j - (1-q)\frac{[k]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^j \\
&= \frac{(1-q)}{[n+1]}\left([k+1]-[k]\right)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \\
&= \frac{q^k}{[n+1]}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Eş. 4.4 ün Eş. 4.2 de kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

4.2. Lemma

$\tilde{R}_n(f,q;x)$ operatörü için

$$\tilde{R}_n(e_1,q;x) = \frac{[n]}{[n+1]}x + \frac{1}{[2][n+1]}$$

dir [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$\tilde{R}_n(f,q;x)$ operatöründe f yerine $e_1(x)$ alınırsa

$$\tilde{R}_n(e_1,q;x)=[n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)} \tag{4.5}$$

elde edilir. Eş. 4.5 deki $q-$ integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t &= \int_{0}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t-\int_{0}^{[k]/[n+1]} t d_q t \\ &=(1-q)\frac{[k+1]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j}\frac{[k+1]}{[n+1]}-(1-q)\frac{[k]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j}\frac{[k]}{[n+1]} \\ &=(1-q)\left(\frac{[k+1]^2}{[n+1]^2}-\frac{[k]^2}{[n+1]^2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j} \end{aligned} \tag{4.6}$$

sonucuna ulaşılır. $0<q<1$ ve $[k+1]=1+q[k]$ olduğu kullanılırsa,

$$\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t=\frac{q^k}{[n+1]^2}\left([k]+\frac{1}{[2]}\right)$$

bulunur. Bu ifade, Eş. 4.5 de yerine yazılırsa,

$$\tilde{R}_n(e_1,q;x)=[n+1]\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k}{[n+1]^2}\left([k]+\frac{1}{[2]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$= \frac{[n]}{[n+1]} \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]}{[n]} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+ \frac{1}{[2]} \frac{1}{[n+1]} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$= \frac{[n]}{[n+1]} R_n(e_1,q;x) + \frac{1}{[2][n+1]} R_n(e_0,q;x)$$

olup, Eş. 3.6 dan

$$\tilde{R}_n(e_1,q;x) = \frac{[n]}{[n+1]} x + \frac{1}{[2][n+1]}$$

elde edilir.

4.3. Lemma

$\tilde{R}_n(f,q;x)$ operatöründe f yerine $e_2(x)$ alınırsa

$$\tilde{R}_n(e_2,q;x) = \frac{[n]^2}{[n+1]^2} \left\{ x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]} - \frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx} \left(1 - \frac{1}{[n]}\right) \right\}$$

$$+ \frac{(2q+1)}{[3]} \frac{[n]}{[n+1]^2} x + \frac{1}{[3]} \frac{1}{[n+1]^2}$$

olur [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$\tilde{R}_n\left(f,q;x\right)$ operatöründe f yerine $e_2\left(x\right)$ alındığında

$$\tilde{R}_n\left(e_2,q;x\right)=\left[n+1\right]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}t^2 d_q t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $q-$ integral tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}t^2 d_q t &= \int_{0}^{[k+1]/[n+1]}t^2 d_q t-\int_{0}^{[k]/[n+1]}t^2 d_q t\\ &=\left(1-q\right)\frac{\left[k+1\right]^3}{\left[n+1\right]^3}\sum_{j=0}^{\infty}q^{3j}-\left(1-q\right)\frac{\left[k\right]^3}{\left[n+1\right]^3}\sum_{j=0}^{\infty}q^{3j}\\ &=\frac{\left(1-q\right)}{\left[n+1\right]^3}\left(\left[k+1\right]^3-\left[k\right]^3\right)\sum_{j=0}^{\infty}q^{3j}\\ &=\frac{q^k}{\left[n+1\right]^3}\frac{\left(1-q\right)}{\left(1-q^3\right)}\left(\left[k+1\right]^2+\left[k+1\right]\left[k\right]+\left[k\right]^2\right)\\ &=\frac{1}{\left[3\right]}\frac{q^k}{\left[n+1\right]^3}\left(\left[k+1\right]^2+\left[k+1\right]\left[k\right]+\left[k\right]^2\right)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\left[k+1\right]=1+q\left[k\right]$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}t^2 d_q t &=\frac{1}{\left[3\right]}\frac{q^k}{\left[n+1\right]^3}\left(\left[k\right]^2\left(1+q+q^2\right)+\left[k\right]\left(2q+1\right)+1\right)\\ &=\frac{q^k}{\left[n+1\right]^3}\left(\left[k\right]^2+\frac{\left(2q+1\right)}{\left[3\right]}\left[k\right]+\frac{1}{\left[3\right]}\right)\end{aligned}$$

olur. Elde edilenler $\tilde{R}_n\left(e_2,q;x\right)$ de yerine yazılırsa,

$$\tilde{R}_n\left(e_2,q;x\right)=\frac{1}{\left[n+1\right]^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\left[k\right]^2+\frac{\left(2q+1\right)}{\left[3\right]}\left[k\right]+\frac{1}{\left[3\right]}\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\tilde{R}_n\left(e_2,q;x\right)&=\frac{\left[n\right]^2}{\left[n+1\right]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[k\right]^2}{\left[n\right]^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}\\&+\frac{2q+1}{\left[3\right]}\frac{\left[n\right]}{\left[n+1\right]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[k\right]}{\left[n\right]}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}\\&+\frac{1}{\left[3\right]}\frac{1}{\left[n+1\right]^2}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}\\&=\frac{\left[n\right]^2}{\left[n+1\right]^2}R_n\left(e_2,q;x\right)+\frac{2q+1}{\left[3\right]}\frac{\left[n\right]}{\left[n+1\right]^2}R_n\left(e_1,q;x\right)\\&+\frac{1}{\left[3\right]}\frac{1}{\left[n+1\right]^2}R_n\left(e_0,q;x\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Eş. 3.6 dan

$$\begin{aligned}\tilde{R}_n\left(e_2,q;x\right)&=\frac{\left[n\right]^2}{\left[n+1\right]^2}\left\{x^2+\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]}-\frac{x^2\left(1-x\right)\left(1-q\right)}{1-x+qx}\left(1-\frac{1}{\left[n\right]}\right)\right\}\\&+\frac{2q+1}{\left[3\right]}\frac{\left[n\right]}{\left[n+1\right]^2}x+\frac{1}{\left[3\right]}\frac{1}{\left[n+1\right]^2}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

4.2. Bernstein Operatörünün $q-$analoğunun Kantorovich Tipli Genelleşmesinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda $\tilde{R}_n\left(f,q;x\right)$ operatörünün düzgün yakınsaklığı incelenecektir.

4.4. Lemma

$0<a<b$ ve $0<q<1$ olmak üzere f fonksiyonu $\left[0,b\right]$ aralığında tanımlı monoton artan bir fonksiyon ise bu durumda $I_q\left(f,a;b\right)=\int_a^b f\left(t\right)d_qt$ ile verilen $q-$integral operatörü pozitiftir.

4.1. Teorem

$q=\left(q_n\right)$ dizisi, $0<q_n<1$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} q_n=1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[n\right]}=0 \tag{4.7}$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde, f fonksiyonu, $\left[0,1\right]$ aralığında sürekli ve monoton artan ise o taktirde,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{R}_n\left(f,q;.\right)-f\left(.\right)\right\|_{C[0,1]}=0$$

sağlanır [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

Lemma 4.4 göstermektedir ki f monoton artan bir fonksiyon ise $\tilde{R}_n(f,q;x)$ operatörü lineer pozitif bir operatördür. Lemma 4.2 ve Lemma 4.3 te q yerine Eş. 4.7 deki koşulları sağlayan bir (q_n) dizisi seçilir ve $[n]_{q_n} = \dfrac{[n+1]_{q_n} - 1}{q_n}$ eşitliği kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}} = 1$$

olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla da,

$$\tilde{R}_n(e_0,q;x) \rightrightarrows 1 \quad (n\to\infty)$$

$$\tilde{R}_n(e_1,q;x) \rightrightarrows x \quad (n\to\infty)$$

$$\tilde{R}_n(e_2,q;x) \rightrightarrows x^2 \quad (n\to\infty)$$

elde edilir. Böylece Korovkin teoreminin koşulları gerçeklenmiş olur.

4.1. Sonuç

Lemma 4.1, Lemma 4.2 ve Lemma 4.3 te özel olarak $q=1$ alınırsa

$$\tilde{R}_n(e_0,1;x) = 1$$

$$\tilde{R}_n(e_1,1;x) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\tilde{R}_n\left(e_2,1;x\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{\left(n+1\right)^2}x^2+\frac{2n}{\left(n+1\right)^2}x+\frac{1}{3\left(n+1\right)^2}$$

elde edilir ki bu da bulunan ifadelerin klasik Bernstein-Kantorovich operatörü için bulunan sonuçlara indirgendiğini gösterir [Altomare ve Campiti 1994].

4.3. Bernstein Operatörünün $q-$analoğunun Kantorovich Tipli Genelleşmesinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda Eş. 4.1 ile tanımlanan Lupaş operatörünün Kantorovich tipli bir genelleşmesinin istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir. Daha sonra [Marinkovich ve ark. 2008] tarafından tanımlanan "Riemann tipli $q-$integral" kavramından bahsedilecek ve bu yeni $q-$integral tanımı kullanılarak Eş. 4.1 operatörünün "Lupaş operatörünün ikinci tip Kantorovich genelleşmesi" adını vereceğimiz farklı bir formu tanımlanacaktır. Bu operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenip, istatistiksel yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla bulunacaktır.

4.3.1. Bernstein operatörünün $q-$analoğunun Kantorovich tipli genelleşmesinin istatistiksel yakınsaklığı

Bu kısımda amacımız, Eş. 4.1 ile verilen operatörün istatistiksel yakınsaklığını incelemektir. Bunun için aşağıdaki teoremi verelim.

4.2. Teorem

$q:=\left(q_n\right)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere,

$$st-\lim_n q_n=1,\ st-\lim_n q_n^n=a\ ,\ \left(a<1\right)\ \text{ve}\ st-\lim_n\frac{1}{\left[n\right]}=0 \tag{4.8}$$

şartları sağlansın. Bu takdirde, f, $[0,1]$ aralığında tanımlanmış sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere, Eş. 4.1 operatörü için

$$st-\lim_{n}\left\|\tilde{R}_n\left(f,q_n;.\right)-f\right\|_{C[0,1]}=0$$

sağlanır [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$\tilde{R}_n\left(f,q;x\right)$ lineer pozitif bir operatör olduğundan, eğer, $\nu=0,1,2$ için

$$st-\lim_{n}\left\|\tilde{R}_n\left(e_\nu,q_n;.\right)-e_\nu\right\|_{C[0,1]}=0 \tag{4.9}$$

olduğu gösterilirse, Teorem 3.3 den dolayı ispat tamamlanmış olur.

$\nu=0$ için Lemma 4.1 den

$$st-\lim_{n}\left\|\tilde{R}_n\left(e_0,q_n;.\right)-e_0\right\|_{C[0,1]}=0$$

olduğu açıktır.

$\nu=1$ için Lemma 4.2 den

$$\tilde{R}_n\left(e_1,q_n;x\right)-e_1\left(x\right)=\left(\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}}-1\right)x+\frac{1}{[2]_{q_n}[n+1]_{q_n}}$$

yazılabilir. Bu ifadede

$$\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}}=\frac{[n+1]_{q_n}-1}{q_n\,[n+1]_{q_n}}=\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\,[n+1]_{q_n}} \tag{4.10}$$

eşitliği kullanır ve her iki tarafın $[0,1]$ üzerinden maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{R}_n\left(e_1,q_n;x\right)-e_1\right\|_{C[0,1]} &\leq \left|\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\,[n+1]_{q_n}}\right)-1\right|+\frac{1}{[2]_{q_n}\,[n+1]_{q_n}}\\ &\leq \left(\frac{1}{q_n}-1\right)+\left(\frac{1}{q_n}+\frac{1}{[2]_{q_n}}\right)\frac{1}{[n+1]_{q_n}}\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Şimdi verilen bir $\varepsilon>0$ için

$$T:=\left\{k:\left\|\tilde{R}_n\left(e_1,q_k;.\right)-e_1\right\|_{C[0,1]}\geq\varepsilon\right\},$$

$$T_1:=\left\{k:\left(\frac{1}{q_k}-1\right)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$T_2:=\left\{k:\left(\frac{1}{q_k}+\frac{1}{[2]_{q_k}}\right)\frac{1}{[k+1]_{q_k}}\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eş. 4.11 eşitsizliğinden $T\subseteq T_1\cup T_2$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}\delta\left\{k\leq n:\left\|\tilde{R}_n\left(e_1,q_k;.\right)-e_1\right\|_{C[0,1]}\geq\varepsilon\right\} &\leq \delta\left\{k\leq n:\left(\frac{1}{q_k}-1\right)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\ &\leq \delta\left\{k\leq n:\left(\frac{1}{q_k}+\frac{1}{[2]_{q_k}}\right)\frac{1}{[k+1]_{q_k}}\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca Eş 4.8 koşullarından dolayı

$$st-\lim_{n}\left(\frac{1}{q_n}-1\right)=0,$$

$$st-\lim_{n}\left(\frac{1}{q_n}+\frac{1}{[2]_{q_n}}\right)\frac{1}{[n+1]_{q_n}}=0$$

olduğu görülür. Diğer taraftan yoğunluk tanımı kullanılırsa,

$$\delta\left\{k\le n:\left(\frac{1}{q_k}-1\right)\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}=0$$

ve

$$\delta\left\{k\le n:\left(\frac{1}{q_k}+\frac{1}{[2]_{q_k}}\right)\frac{1}{[k+1]_{q_k}}\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}=0$$

elde edilir ve burada Eş. 4.12 göz önüne alınırsa

$$st-\lim_{n}\left\|\tilde{R}_n\left(e_1,q_n;.\right)-e_1\right\|_{C[0,1]}=0$$

olduğu görülür.

$\nu=2$ için Lemma 4.3 den dolayı

$$\tilde{R}_n\left(e_2,q_n;x\right)-e_2\left(x\right)=\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}\left\{x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_{q_n}}-\frac{x^2(1-x)(1-q_n)}{1-x+q_nx}\left(1-\frac{1}{[n]_{q_n}}\right)\right\}$$

$$+\frac{(2q_n+1)}{[3]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2}x+\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}-x^2$$

yazılabilir. Buradan da

$$\tilde{R}_n(e_2,q_n;x)-e_2(x)\leq\left(\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}-1\right)x^2+\frac{[n]_{q_n}x(1-x)}{[n+1]_{q_n}^2}$$
$$+\frac{(2q_n+1)}{[3]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2}x+\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}$$

olduğu açıkça görülür. Son eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[0,1]$ üzerinden maksimumu alınırsa,

$$\left\|\tilde{R}_n(e_2,q_n;.)-e_2\right\|_{C[0,1]}\leq\left|\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}-1\right|+\frac{[n]_{q_n}}{4[n+1]_{q_n}^2}$$
$$+\frac{(2q_n+1)}{[3]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2}+\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}$$
$$\leq\left(1-\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}\right)+\frac{[n]_{q_n}}{4[n+1]_{q_n}^2}$$
$$+\frac{(2q_n+1)}{[3]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2}+\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}$$

olur. Eş. 4.10 kullanıldığında

$$\left\|\tilde{R}_n\left(e_2,q_n;.\right)-e_2\right\|_{C[0,1]} \leq \left(1-\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\left[n+1\right]_{q_n}}\right)^2\right)$$
$$+\frac{1}{4\left[n+1\right]_{q_n}}\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\left[n+1\right]_{q_n}}\right)$$
$$+\frac{\left(2q_n+1\right)}{\left[3\right]_{q_n}}\frac{1}{\left[n+1\right]_{q_n}}\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\left[n+1\right]_{q_n}}\right)$$
$$+\frac{1}{\left[3\right]_{q_n}}\frac{1}{\left[n+1\right]_{q_n}^2} \tag{4.13}$$

elde edilir. Burada,

$$\alpha_n = 1-\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\left[n+1\right]_{q_n}}\right)^2$$
$$\beta_n = \frac{1}{4\left[n+1\right]_{q_n}}\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\left[n+1\right]_{q_n}}\right)$$
$$\gamma_n = \frac{\left(2q_n+1\right)}{\left[3\right]_{q_n}}\frac{1}{\left[n+1\right]_{q_n}}\left(\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n\left[n+1\right]_{q_n}}\right)$$
$$\eta_n = \frac{1}{\left[3\right]_{q_n}}\frac{1}{\left[n+1\right]_{q_n}^2}$$

olarak seçilirse, Eş. 4.8 koşullarından

$$st-\lim_n \alpha_n = st-\lim_n \beta_n = st-\lim_n \gamma_n = st-\lim_n \eta_n = 0 \tag{4.14}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Diğer taraftan bir $\varepsilon > 0$ için

$$U := \left\{ k : \left\| \tilde{R}_n\left(e_2, q_k; .\right) - e_2 \right\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon \right\},$$

$$U_1 := \left\{ k : \alpha_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$U_2 := \left\{ k : \beta_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$U_3 := \left\{ k : \gamma_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$U_4 := \left\{ k : \eta_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eş. 4.13 den dolayı $U \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ olduğu açıktır. Dolayısıyla da

$$\delta\left\{ k \leq n : \left\| \tilde{R}_n\left(e_2, q_k; .\right) - e_2 \right\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon \right\} \leq \delta\left\{ k \leq n : \alpha_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} + \delta\left\{ k \leq n : \beta_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\}$$

$$\leq \delta\left\{ k \leq n : \gamma_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} + \delta\left\{ k \leq n : \eta_k \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \tag{4.15}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş. 4.14 ün Eş. 4.15 de kullanılmasıyla

$$st - \lim_n \left\| \tilde{R}_n\left(e_2, q_n; .\right) - e_2 \right\|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.3 ün şartları sağlanmış ve dolayısıyla da teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.3.2. Kısıtlanmış $q-$integral ve Riemann tipli $q-$integral tanımları ve özellikleri

4.1. Tanım

a, b ve q reel sayılar olmak üzere $0<a<b$ ve $q\in(0,1)$ olsun. Kısıtlanmış $q-$integral, klasik $q-$integral tanımında $a=bq^n$ alınmasıyla

$$G_q(f;a,b)=\int_a^b f(x)\,d_q^G x=\int_{bq^n}^b f(x)\,d_q x=(1-q)b\sum_{j=0}^{n-1} f(q^j b)q^j \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır [Gauchmann 2004].

Burada Eş. 4.16 ile tanımlanan integral aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $[a,b]$ aralığında $f(x)\geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,d_q^G x\geq\int_a^b g(x)\,d_q^G x$ dir.

ii. $a<c_k<b$ olmak üzere $\int_a^b f(x)\,d_q^G x=\int_a^{c_k} f(x)\,d_q^G x+\int_{c_k}^b f(x)\,d_q^G x$ dir.

iii. $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir ise,

$$\lim_{q\to 1}\int_a^b f(x)\,d_q^G x=\int_a^b f(x)\,d_q x \tag{4.17}$$

dir.

4.2. Tanım

a, b ve q reel sayılar olmak üzere $0<a<b$ ve $q\in(0,1)$ olsun. Riemann tipli $q-$integral

$$R_q\left(f;a,b\right)=\int_a^b f\left(x\right)d_q^R x=\left(1-q\right)\left(b-a\right)\sum_{j=0}^{\infty} f\left(a+\left(b-a\right)q^j\right)q^j \tag{4.18}$$

ile tanımlanır [Marinkovich ve ark. 2008]. Klasik $q-$integral tanımından farklı olarak bu tanım tek bir seri ile gösterildiğinden sadece integral aralığındaki noktaları içerir. Eş. 4.18 ile verilen seri yakınsaksa, f fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında "$qR-$integrallenebilirdir" denir.

Şimdi amacımız, daha önce oluşturduğumuz $\tilde{R}_n\left(f,q;x\right)$ operatöründe klasik $q-$integral yerine Riemann tipli $q-$integral kullanıp, operatörü yeniden tanımlamaktır. Bu sayede yeni tanımlanan operatörün yaklaşım hızı elde edilebilir. Öncelikle Riemann tipli $q-$integral ile ilgili olarak aşağıdaki lemmaları verelim.

4.5. Lemma

$R_q\left(f;a,b\right)$ operatörü lineer pozitif bir operatördür.

İspat

Eş. 4.18 den

$$\begin{aligned}R_q\left(\left(\alpha f+\beta g\right)\left(t\right);a,b\right)&=\int_a^b\left(\alpha f+\beta g\right)\left(t\right)d_q^R t\\&=\left(1-q\right)\left(b-a\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left[\left(\alpha f+\beta g\right)\left(a+\left(b-a\right)q^j\right)q^j\right]\\&=\left(1-q\right)\left(b-a\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left[\alpha f\left(a+\left(b-a\right)q^j\right)q^j+\beta g\left(a+\left(b-a\right)q^j\right)q^j\right]\\&=\alpha\left(1-q\right)\left(b-a\right)\sum_{j=0}^{\infty} f\left(a+\left(b-a\right)q^j\right)q^j\\&\quad+\beta\left(1-q\right)\left(b-a\right)\sum_{j=0}^{\infty} g\left(a+\left(b-a\right)q^j\right)q^j\end{aligned}$$

$$= \alpha R_q\left(f(t);a,b\right)+\beta R_q\left(g(t);a,b\right)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $R_q\left(f;a,b\right)$ operatörü lineerdir. $f \geq 0$ ise Eş. 4.18 den $R_q\left(f;a,b\right)$ nin pozitif olduğu açıktır. Böylece $\forall x \in [a,b]$ için

$$f(x) \geq g(x) \text{ ise } R_q\left(f;a,b\right) \geq R_q\left(g;a,b\right) \tag{4.19}$$

yazılabilir.

4.6. Lemma ($q-$ Hölder Eşitsizliği)

$0<q<1$, $0<a<b$ ve α, β pozitif reel sayılar olmak üzere $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ olsun. Bu durumda, $[a,b]$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$R_q\left(|fg|;a,b\right) \leq \left(R_q\left(|f|^{\alpha};a,b\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(R_q\left(|g|^{\beta}\beta;a,b\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$qR-$integralin tanımından

$$R_q\left(|fg|;a,b\right)=\int_a^b \left|f(t)g(t)\right| d_q^R t$$

$$=(1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left|f\left(a+(b-a)q^j\right)g\left(a+(b-a)q^j\right)\right|q^j$$

$$=(1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left|\left(f\left(a+(b-a)q^{j}\right)q^{\frac{j}{\alpha}}\right)\left(g\left(a+(b-a)q^{j}\right)q^{\frac{j}{\beta}}\right)\right|$$

elde edilir. Burada Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$R_q\left(|fg|;a,b\right)\leq(1-q)(b-a)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|f\left(a+(b-a)q^{j}\right)\right|^{\alpha}q^{j}\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|g\left(a+(b-a)q^{j}\right)\right|^{\beta}q^{j}\right)^{1/\beta}$$

$$\leq\left((1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left|f\left(a+(b-a)q^{j}\right)\right|^{\alpha}q^{j}\right)^{1/\alpha}$$

$$\times\left((1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left|g\left(a+(b-a)q^{j}\right)\right|^{\beta}q^{j}\right)^{1/\beta}$$

$$=\left(\int_a^b|f(t)|^{\alpha}\,d_q^Rt\right)^{1/\alpha}\left(\int_a^b|g(t)|^{\beta}\,d_q^Rt\right)^{1/\beta}$$

$$=\left(R_q\left(|f|^{\alpha};a,b\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(R_q\left(|g|^{\beta};a,b\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanır.

4.3.3. Bernstein operatörünün $q-$analoğunun ikinci tip Kantorovich tipli genelleşmesinin istatistiksel yakınsaklığı

Şimdi, $\tilde{R}_n(f,q;x)$ operatöründe klasik $q-$integral yerine Riemann tipli $q-$integral kullanılmasıyla oluşturulan "Lupaş operatörünün İkinci Tip Kantorovich Genelleşmesi", f, $[0,1]$ aralığında $qR-$integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $n\in\mathbb{N}$ ve $q\in(0,1)$ için

$$\hat{R}_n(f,q;x)=[n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}f(t)\,d_q^Rt\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)} \tag{4.20}$$

ile tanımlanır [Doğru ve Kanat 2012b].

4.3. Teorem

$q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere Eş. 4.8 ile verilen koşulları sağlasın. O halde, her $f \in C[0,1]$ için

$$st - \lim_n \left\| \hat{R}_n(f, q_n; .) - f \right\|_{C[0,1]} = 0$$

sağlanır [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

Lemma 4.5 den $\hat{R}_n(f, q_n; x)$ operatörünün lineer pozitif bir operatör olduğu açıktır. $\hat{R}_n(f, q_n; x)$ operatörünün Teorem 3.3 ün koşullarını sağladığını göstermek ispat için yeterlidir. Bu amaçla $i = 0,1,2$ için $\hat{R}_n(e_i, q; x)$ ifadeleri elde edilmelidir. İlk olarak, Eş. 4.18 de $b = [k+1]/[n+1]$ ve $a = [k]/[n+1]$ alınırsa $b - a = q^k / [n+1]$ olacağından aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t = (1-q)\frac{q^k}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{q^k}{[n+1]},$$

$$\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q^R t = (1-q)\frac{q^k}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{[k]}{[n+1]} + \frac{q^k}{[n+1]}q^j\right)q^j$$

$$= (1-q)\frac{q^k}{[n+1]^2}\left\{[k]\sum_{j=0}^{\infty} q^j + q^k\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}\right\}$$

$$=\frac{1}{[n+1]^2}\left\{[k]q^k+\frac{1}{[2]}q^{2k}\right\},$$

$$\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q^R t=(1-q)\frac{q^k}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{[k]}{[n+1]}+\frac{q^k}{[n+1]}q^j\right)^2 q^j$$

$$=(1-q)\frac{q^k}{[n+1]^3}\sum_{j=0}^{\infty}\left([k]^2+2[k]q^kq^j+q^{2k}q^{2j}\right)q^j$$

$$=(1-q)\frac{q^k}{[n+1]^3}\left\{[k]^2\sum_{j=0}^{\infty}q^j+2[k]q^k\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j}+q^{2k}\sum_{j=0}^{\infty}q^{3j}\right\}$$

$$=(1-q)\frac{q^k}{[n+1]^3}\left\{[k]^2\frac{1}{1-q}+2[k]q^k\frac{1}{1-q^2}+q^{2k}\frac{1}{1-q^3}\right\}$$

$$=\frac{1}{[n+1]^3}\left\{q^k[k]^2+\frac{2q^{2k}}{[2]}[k]+\frac{q^{3k}}{[3]}\right\}. \tag{4.21}$$

Yukarıdaki integraller yardımıyla, $i=0,1,2$ için $\hat{R}_n(e_i,q;x)$ ifadeleri hesaplanacak olursa, $i=0$ için

$$\hat{R}_n(e_0,q;x)=[n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$=[n+1]\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k}{[n+1]}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$=1 \tag{4.22}$$

elde edilir. $i=1$ için

$$\hat{R}_n\left(e_1,q;x\right)=\left[n+1\right]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q^R t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\left[n+1\right]}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left[k\right]q^k+\frac{1}{\left[2\right]}q^{2k}\right\}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\left[n+1\right]}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left[k\right]+\frac{1}{\left[2\right]}q^k\right\}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

olup,

$$q^k=\left(q-1\right)\left[k\right]+1 \tag{4.23}$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\hat{R}_n\left(e_1,q;x\right)=\frac{\left[n\right]}{\left[n+1\right]}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[k\right]}{\left[n\right]}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\left[2\right]\left[n+1\right]}\sum_{k=0}^{n}\left(\left(q-1\right)\left[k\right]+1\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

$$=\frac{\left[n\right]}{\left[n+1\right]}R_n\left(e_1,q;x\right)$$

$$+\frac{\left(q-1\right)\left[n\right]}{\left[2\right]\left[n+1\right]}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[k\right]}{\left[n\right]}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

$$+\frac{1}{\left[2\right]\left[n+1\right]}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)\ldots\left(1-x+q^{n-1}x\right)}$$

$$=\frac{\left[n\right]}{\left[n+1\right]}\left(\frac{q-1}{\left[2\right]}+1\right)R_n\left(e_1,q;x\right)+\frac{1}{\left[2\right]\left[n+1\right]}R_n\left(e_0,q;x\right)$$

$$=\frac{2q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}x+\frac{1}{[2][n+1]} \tag{4.24}$$

elde edilir. Son olarak $i=2$ için

$$\hat{R}_n(e_2,q;x)=[n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q^R t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$=\frac{1}{[n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\left\{q^k[k]^2+\frac{2q^{2k}}{[2]}[k]+\frac{q^{3k}}{[3]}\right\}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$=\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]^2}{[n]^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+\frac{2}{[2][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}q^k[k]\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+\frac{1}{[3][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}q^{2k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

ifadesinde Eş. 4.23 eşitliği kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\hat{R}_n(e_2,q;x)=\frac{[n]^2}{[n+1]^2}R_n(e_2,q;x)$$

$$+\frac{2}{[2][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\left((q-1)[k]+1\right)[k]\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+\frac{1}{[3][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\left((q-1)[k]+1\right)^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\dots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$=\frac{[n]^2}{[n+1]^2}R_n(e_2,q;x)$$

$$+\frac{2(q-1)[n]^2}{[2][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]^2}{[n]^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+\frac{2[n]}{[2][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]}{[n]}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+\frac{(q-1)^2[n]^2}{[3][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]^2}{[n]^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+\frac{2(q-1)[n]}{[3][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]}{[n]}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$+\frac{1}{[3][n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)}$$

$$=\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left\{1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right\}R_n(e_2,q;x)$$

$$+\frac{[n]}{[n+1]^2}\left\{\frac{2}{[2]}+\frac{2(q-1)}{[3]}\right\}R_n(e_1,q;x)+\frac{1}{[3][n+1]^2}R_n(e_0,q;x)$$

$$=\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left\{1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right\}\left\{x^2+\frac{x(1-x)}{[n]}-\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}\left(1-\frac{1}{[n]}\right)\right\}$$

$$+\frac{[n]}{[n+1]^2}\left\{\frac{2}{[2]}+\frac{2(q-1)}{[3]}\right\}x+\frac{1}{[3][n+1]^2} \tag{4.25}$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 4.22 ifadesinden,

$$st-\lim_{n}\left\|\hat{R}_n(e_0,q_n;.)-e_0\right\|_{C[0,1]}=0$$

olduğu açıktır. Ayrıca Eş. 4.24 den dolayı

$$\hat{R}_n\left(e_1,q_n;x\right)-e_1\left(x\right)=\left(\frac{2q_n}{[2]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}}-1\right)x+\frac{1}{[2]_{q_n}[n+1]_{q_n}}$$

$$=\left(\frac{2}{[2]_{q_n}}\left(1-\frac{1}{[n+1]_{q_n}}\right)-1\right)x+\frac{1}{[2]_{q_n}[n+1]_{q_n}}$$

$$=\left(\left(\frac{2}{[2]_{q_n}}-1\right)-\frac{2}{[2]_{q_n}[n+1]_{q_n}}\right)x+\frac{1}{[2]_{q_n}[n+1]_{q_n}}$$

yazılır. Eşitliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\left\|\hat{R}_n\left(e_1,q_n;.\right)-e_1\right\|_{C[0,1]}\leq\frac{1-q_n}{[2]_{q_n}}+\frac{3}{[2]_{q_n}[n+1]_{q_n}} \tag{4.26}$$

bulunur.

Şimdi verilen bir $\varepsilon>0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$N:=\left\{k:\left\|\hat{R}_n\left(e_1,q_k;.\right)-e_1\right\|_{C[0,1]}\geq\varepsilon\right\},$$

$$N_1:=\left\{k:\frac{1-q_k}{[2]_{q_k}}\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$N_1:=\left\{k:\frac{3}{[2]_{q_k}[k+1]_{q_k}}\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Eş. 4.26 dan $N\subseteq N_1\cup N_2$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\delta\left\{k \le n : \left\|\hat{R}_n\left(e_1, q_k;.\right) - e_1\right\|_{C[0,1]} \ge \varepsilon\right\} \le \delta\left\{k \le n : \frac{1-q_k}{[2]_{q_k}} \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \delta\left\{k \le n : \frac{3}{[2]_{q_k}[k+1]_{q_k}} \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş. 4.8 koşullarından dolayı eşitsizliğin sağ tarafı sıfır olur ve

$$st - \lim_n \left\|\hat{R}_n\left(e_1, q_n;.\right) - e_1\right\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği bulunur.

Benzer şekilde, $\hat{R}_n\left(e_2, q; x\right)$ için Eş. 4.25 deki ifadeden

$$\begin{aligned}
\hat{R}_n\left(e_2, q; x\right) - e_2\left(x\right) \le & \frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left\{1 + \frac{2(q-1)}{[2]} + \frac{(q-1)^2}{[3]}\right\}x^2 \\
& + \frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left\{1 + \frac{2(q-1)}{[2]} + \frac{(q-1)^2}{[3]}\right\}\frac{x(1-x)}{[n]} \\
& + \frac{[n]}{[n+1]^2}\left\{\frac{2}{[2]} + \frac{2(q-1)}{[3]}\right\}x + \frac{1}{[3][n+1]^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.10 u kullanıp, eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{R}_n\left(e_2, q_n;.\right) - e_2\right\|_{C[0,1]} \le & \frac{1}{q_n^2}\left(1 - \frac{1}{[n+1]_{q_n}}\right)^2\left\{\frac{2(q_n-1)}{[2]_{q_n}} + \frac{(q_n-1)^2}{[3]_{q_n}}\right\} \\
& + \frac{1}{4q_n[n+1]_{q_n}}\left(1 - \frac{1}{[n+1]_{q_n}}\right)\left\{1 + \frac{2(q_n-1)}{[2]_{q_n}} + \frac{(q_n-1)^2}{[3]_{q_n}}\right\}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{q_n\left[n+1\right]_{q_n}}\left(1-\frac{1}{\left[n+1\right]_{q_n}}\right)\left\{\frac{2}{\left[2\right]_{q_n}}+\frac{2\left(q_n-1\right)}{\left[3\right]_{q_n}}\right\}$$

$$+\frac{1}{\left[3\right]_{q_n}\left[n+1\right]_{q_n}^2}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi verilen bir $\varepsilon>0$ için,

$$M:=\left\{k:\left\|\hat{R}_n\left(e_2,q_k;.\right)-e_2\right\|_{C[0,1]}\geq\varepsilon\right\},$$

$$M_1:=\left\{k:\frac{1}{q_k^2}\left(1-\frac{1}{\left[k+1\right]_{q_k}}\right)^2\left\{\frac{2\left(q_k-1\right)}{\left[2\right]_{q_k}}+\frac{\left(q_k-1\right)^2}{\left[3\right]_{q_k}}\right\}\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

$$M_2:=\left\{k:\frac{1}{4q_k\left[k+1\right]_{q_k}}\left(1-\frac{1}{\left[k+1\right]_{q_k}}\right)\left\{1+\frac{2\left(q_k-1\right)}{\left[2\right]_{q_k}}+\frac{\left(q_k-1\right)^2}{\left[3\right]_{q_k}}\right\}\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

$$M_3:=\left\{k:\frac{1}{q_k\left[k+1\right]_{q_k}}\left(1-\frac{1}{\left[k+1\right]_{q_k}}\right)\left\{\frac{2}{\left[2\right]_{q_k}}+\frac{2\left(q_k-1\right)}{\left[3\right]_{q_k}}\right\}\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

$$M_4:=\left\{k:\frac{1}{\left[3\right]_{q_k}\left[k+1\right]_{q_k}^2}\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $M\subseteq M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4$ olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\delta\left\{k\leq n:\left\|\hat{R}_n\left(e_2,q_k;.\right)-e_2\right\|_{C[0,1]}\geq\varepsilon\right\}$$

$$\leq \delta\left\{k \leq n : \frac{1}{q_k^2}\left(1-\frac{1}{[k+1]_{q_k}}\right)^2 \left\{\frac{2(q_k-1)}{[2]_{q_k}}+\frac{(q_k-1)^2}{[3]_{q_k}}\right\} \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$+\delta\left\{k \leq n : \frac{1}{4q_k[k+1]_{q_k}}\left(1-\frac{1}{[k+1]_{q_k}}\right)\left\{1+\frac{2(q_k-1)}{[2]_{q_k}}+\frac{(q_k-1)^2}{[3]_{q_k}}\right\} \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$+\delta\left\{k \leq n : \frac{1}{q_k[k+1]_{q_k}}\left(1-\frac{1}{[k+1]_{q_k}}\right)\left\{\frac{2}{[2]_{q_k}}+\frac{2(q_k-1)}{[3]_{q_k}}\right\} \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$+\delta\left\{k \leq n : \frac{1}{[3]_{q_k}[k+1]_{q_k}^2} \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş. 4.8 den yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının sıfır olduğu görülmektedir. O halde

$$\delta\left\{k \leq n : \left\|\hat{R}_n(e_2, q_k;.)-e_2\right\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\right\}=0$$

olur ve böylece,

$$st-\lim_n\left\|\hat{R}_n(e_2, q_n;.)-e_2\right\|_{C[0,1]}=0$$

eşitliği bulunur. Sonuç olarak, $i=0,1,2$ için

$$st-\lim_n\left\|\hat{R}_n(e_i, q_n;.)-e_i\right\|_{C[0,1]}=0$$

olup, Teorem 3.3 den ispat tamamlanır.

4.3.4. Bernstein operatörünün $q-$analoğunun Kantorovich tipli genelleşmesinin istatistiksel yaklaşım hızı

Bu kısımda, Eş. 4.1 ve Eş. 4.20 ile tanımladığımız Lupaş operatörünün birinci ve ikinci tip Kantorovich genelleşmelerinin istatistiksel yaklaşım hızları süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla incelenecektir.

Öncelikle, $\tilde{R}_n(f,q;x)$ ve $\hat{R}_n(f,q;x)$ operatörlerinin birinci ve ikinci momentleri bulunmalıdır. Lemma 4.2, Lemma 4.3, Eş. 4.24 ve Eş. 4.25 den, $i=0,1,2$ için $e_i(t)=t^i$ olmak üzere,

$$\tilde{R}_n\left((e_1-x),q;x\right)=\tilde{R}_n(e_1,q;x)-x\tilde{R}_n(e_0,q;x)=\left(\frac{[n]}{[n+1]}-1\right)x+\frac{1}{[2][n+1]},$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_n\left((e_1-x)^2,q;x\right)&=\tilde{R}_n(e_2,q;x)-2x\tilde{R}_n(e_1,q;x)+x^2\tilde{R}_n(e_0,q;x)\\&=\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left\{x^2+\frac{x(1-x)}{[n]}-\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}\left(1-\frac{1}{[n]}\right)\right\}\\&+\frac{(2q+1)}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]^2}x+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}\\&-2x\left(\frac{[n]}{[n+1]}x+\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}\right)+x^2\\&=\left(\frac{[n]}{[n+1]}-1\right)^2x^2+\frac{[n]x(1-x)}{[n+1]^2}-\frac{[n]([n]-1)}{[n+1]^2}\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}\\&+\frac{1}{[n+1]}\left(\frac{(2q+1)}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]}-\frac{2}{[2]}\right)x+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}\end{aligned}\tag{4.27}$$

ve

$$\hat{R}_n\left(\left(e_1-x\right),q;x\right)=\hat{R}_n\left(e_1,q;x\right)-x\hat{R}_n\left(e_0,q;x\right)$$

$$=\left(\frac{2q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}-1\right)x+\frac{1}{[2][n+1]},$$

$$\hat{R}_n\left(\left(e_1-x\right)^2,q;x\right)=\hat{R}_n\left(e_2,q;x\right)-2x\hat{R}_n\left(e_1,q;x\right)+x^2\hat{R}_n\left(e_0,q;x\right)$$

$$=\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left\{1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right\}$$

$$\times\left\{x^2+\frac{x(1-x)}{[n]}-\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}\left(1-\frac{1}{[n]}\right)\right\}$$

$$+\frac{[n]}{[n+1]^2}\left\{\frac{2}{[2]}+\frac{2(q-1)}{[3]}\right\}x+\frac{1}{[3][n+1]^2}$$

$$-2x\left(\frac{2q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}x+\frac{1}{[2][n+1]}\right)+x^2$$

$$=\left\{\frac{[n]}{[n+1]}\left(\frac{[n]}{[n+1]}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)-\frac{4q}{[2]}\right)+1\right\}x^2$$

$$+\frac{[n]}{[n+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)x(1-x)$$

$$-\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)\left(1-\frac{1}{[n]}\right)\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}$$

$$+\frac{1}{[n+1]}\left\{\frac{[n]}{[n+1]}\left(\frac{2}{[2]}+\frac{2(q-1)}{[3]}\right)-\frac{2}{[2]}\right\}x$$

$$+\frac{1}{[3][n+1]^2} \qquad (4.28)$$

olarak elde edilir.

Süreklilik modülü yardımıyla istatistiksel yaklaşım hızının incelenmesi

Bu kısımda, $\tilde{R}_n$ ve $\hat{R}_n$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

4.4. Teorem

$q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere Eş. 4.8 ile verilen koşulları sağlasın. Bu takdirde, her monoton artan $f \in C[0,1]$ için

$$\tilde{\delta}_n = \left\{ \left(\frac{[n]}{[n+1]} - 1 \right)^2 x^2 + \frac{[n]}{[n+1]^2} x(1-x) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[n+1]} \left(\frac{(2q_n+1)}{[3]} \frac{[n]}{[n+1]} - \frac{2}{[2]} \right) x + \frac{1}{[3]} \frac{1}{[n+1]^2} \right\}^{1/2} \qquad (4.29)$$

ise

$$\left| \tilde{R}_n(f, q_n; x) - f(x) \right| \le 2\omega\left(f; \tilde{\delta}_n(x) \right)$$

dir [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$f \in C[0,1]$ ve monoton artan bir fonksiyon olsun. $\tilde{R}_n(f, q; x)$ operatörünün lineerlik ve monotonluk özelliği kullanılırsa,

$$\left|\tilde{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| \le \tilde{R}_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,q;x\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}\left|f(t)-f(x)\right| d_q t\right)$$

yazılır. Burada

$$r_{n,k,q}(x)=[n+1]\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{q^{-k}q^{k(k-1)/2}x^k(1-x)^{n-k}}{(1-x+qx)\ldots(1-x+q^{n-1}x)} \tag{4.30}$$

dir. $q-$integralin monotonluğundan ve süreklilik modülünün

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta) \tag{4.31}$$

özelliğinden dolayı

$$\left|\tilde{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta(x))\, d_q t\right)$$

$$=\omega(f;\delta(x))\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}|t-x|\, d_q t\right)\right\}$$

yazılır. Şimdi yukarıdaki eşitlikteki Riemann tipli $q-$integrale, $q-$Cauchy Schwarz eşitliği uygulanırsa,

$$\left|\tilde{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| \le \omega(f;\delta(x))\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2\, d_q t\right)^{1/2}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q t\right)^{1/2}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left(r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2\,d_qt\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left(r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}d_qt\right)^{1/2}\right\}$$

elde edilir. Toplam için klasik Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$\left|\tilde{R}_n(f,q;x)-f(x)\right|\le\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2\,d_qt\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=0}^{n}r_{n,k,q}(x)\frac{q^k}{[n+1]}\right)^{1/2}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2\,d_qt\right)^{1/2}\right\},$$

olur, diğer bir ifadeyle

$$\left|\tilde{R}_n(f,q;x)-f(x)\right|\le\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\tilde{R}_n\left((e_1-x)^2,q;x\right)\right)^{1/2}\right\}\tag{4.32}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.27 den dolayı

$$\tilde{R}_n\left((e_1-x)^2,q;x\right)\le\left(\frac{[n]}{[n+1]}-1\right)^2x^2+\frac{[n]x(1-x)}{[n+1]^2}+\frac{1}{[n+1]}\left(\frac{(2q+1)}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]}-\frac{2}{[2]}\right)x$$

$$+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}\tag{4.33}$$

olur. Burada q yerine Eş. 4.8 eşitliğini sağlayacak şekilde bir (q_n) dizisi seçilsin. Eş. 4.30 ve Eş. 4.31 den

$$\delta_n(x)=\left\{\left(\frac{[n]}{[n+1]}-1\right)^2 x^2+\frac{[n]}{[n+1]^2}x(1-x)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{[n+1]}\left(\frac{(2q+1)}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]}-\frac{2}{[2]}\right)x+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}\right\}^{1/2}$$

alınırsa,

$$\left|\tilde{R}_n(f,q_n;x)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f;\tilde{\delta}_n(x)\right)$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

4.5. Teorem

$q:=(q_n)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere Eş. 4.8 ile verilen koşulları sağlasın. Bu takdirde, her $f\in C[0,1]$ için,

$$\hat{\delta}_n(x)=\left(\hat{R}_n\left((e_1-x)^2,q_n;x\right)\right)^{1/2} \tag{4.34}$$

ise

$$\left|\hat{R}_n(f,q_n;x)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f;\hat{\delta}_n(x)\right)$$

dir [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$f \in C[0,1]$ olsun. $\hat{R}_n(f,q;x)$ operatörünün lineerlik ve monotonluk özelliği kullanılırsa

$$\left|\hat{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| \le \hat{R}_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,q;x\right)$$

$$=[n+1]\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} \left|f(t)-f(x)\right| d_q^R t\right)$$

yazılabilir. Burada $r_{n,k,q}(x)$, Eş. 4.30 ile tanımlanmıştır. Riemann tipli $q-$integralin monotonluğundan ve Eş. 4.31 den

$$\left|\hat{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| \le [n+1]\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta(x)\right) d_q^R t\right)$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} |t-x|\, d_q^R t\right)\right\}$$

yazılır. Şimdi yukarıdaki eşitlikteki Riemann tipli $q-$integrale, $q-$Cauchy Schwarz eşitliğini uygulanırsa,

$$\left|\hat{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| \le \omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} (t-x)^2\, d_q^R t\right)^{1/2}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t\right)^{1/2}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left(r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} (t-x)^2\, d_q^R t\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left(r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t\right)^{1/2}\right\}$$

elde edilir. Toplam için klasik Cauchy Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left|\hat{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| \le \omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2\,d_q^R t\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\frac{q^k}{[n+1]}\right)^{1/2}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2\,d_q^R t\right)^{1/2}\right\},$$

bulunur, diğer bir ifadeyle

$$\left|\hat{R}_n(f,q;x)-f(x)\right| = \omega\left(f;\delta(x)\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\hat{R}_n\left((e_1-x)^2,q;x\right)\right)^{1/2}\right\} \tag{4.35}$$

olur. Burada q yerine Eş. 4.8 eşitliğini sağlayacak şekilde bir (q_n) dizisi seçilsin. Eş. 4.28 eşitliği kullanılır ve

$$\delta_n(x)=\left(\hat{R}_n\left((e_1-x)^2,q_n;x\right)\right)^{1/2}$$

alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Özel olarak, Eş. 4.29 ile verilen $\tilde{\delta}_n(x)$ ve Eş. 4.34 ile verilen $\hat{\delta}_n(x)$ karşılaştırıldığında

$$\left(\frac{[n]}{[n+1]}-1\right)^2 x^2+\frac{[n]}{[n+1]^2}x(1-x)+\frac{1}{[n+1]}\left(\frac{(2q+1)}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]}-\frac{2}{[2]}\right)x+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}$$

$$-\left\{\frac{[n]}{[n+1]}\left(\frac{[n]}{[n+1]}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)-\frac{4q}{[2]}\right)+1\right\}x^2$$

$$-\frac{[n]}{[n+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)x(1-x)$$

$$+\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)\left(1-\frac{1}{[n]}\right)\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}$$

$$-\frac{1}{[n+1]}\left\{\frac{[n]}{[n+1]}\left(\frac{2}{[2]}+\frac{2(q-1)}{[3]}\right)-\frac{2}{[2]}\right\}x-\frac{1}{[3][n+1]^2}$$

$$=\frac{[n]}{[n+1]}\left\{\frac{4q}{[2]}+2-\left(\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)\frac{[n]}{[n+1]}\right\}x^2$$

$$-\left\{\frac{[n]}{[n+1]^2}\left(\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)\right\}x(1-x)$$

$$+\frac{[n]^2}{[n+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)\left(1-\frac{1}{[n]}\right)\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}$$

$$+\frac{[n]}{[n+1]^2}\left(\frac{3}{[3]}-\frac{2}{[2]}\right)x$$

$$>0$$

olur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.2. Sonuç

$\tilde{R}_n$ operatörünün süreklilik modülü ile yaklaşım hızı $\hat{R}_n$ operatörünün süreklilik modülü ile yaklaşım hızından daha iyidir [Doğru ve Kanat 2012b].

Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızının incelenmesi

Bu kısımda $\tilde{R}_n$ ve $\hat{R}_n$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

4.6. Teorem

$f \in Lip_M(\alpha)$ olsun. $q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere Eş. 4.8 ile verilen koşulları sağlasın. Bu durumda, $\tilde{\delta}_n(x)$, Eş. 4.29 ile verilmek üzere,

$$\left|\tilde{R}_n(f, q_n; x) - f(x)\right| \leq M\tilde{\delta}_n^{\alpha}(x)$$

eşitsizliği sağlanır [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$f \in Lip_M(\alpha)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Burada $\tilde{R}_n(f, q; x)$ in lineerliği ve monotonluğundan

$$\left|\tilde{R}_n(f, q; x) - f(x)\right| \leq \tilde{R}_n\left(\left|f(t) - f(x)\right|, q; x\right) \leq M\tilde{R}_n\left(\left|t - x\right|^{\alpha}, q; x\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe $p = \dfrac{2}{\alpha}$ ve $q = \dfrac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere, Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\tilde{R}_n(f, q; x) - f(x)\right| \leq M\left\{\tilde{R}_n\left((e_1 - x)^2, q; x\right)\right\}^{\alpha/2}$$

olur. $q:=(q_n)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere Eş. 4.8 ile verilen koşulları sağlasın. Eş. 4.29 ile verilen $\tilde{\delta}_n(x)$ göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

4.7. Teorem

$f\in Lip_M(\alpha)$ olsun. $q:=(q_n)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere Eş. 4.8 ile verilen koşulları sağlasın. Bu durumda, $\hat{\delta}_n(x)$, Eş. 4.34 ile verilmek üzere,

$$\left|\hat{R}_n(f,q_n;x)-f(x)\right|\leq M\hat{\delta}_n^{\alpha}(x)$$

eşitsizliği sağlanır [Doğru ve Kanat 2012b].

İspat

$f\in Lip_M(\alpha)$ ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Burada $\hat{R}_n(f,q;x)$ in lineerliği ve monotonluğundan

$$\left|\hat{R}_n(f,q;x)-f(x)\right|\leq \hat{R}_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|,q;x\right)\leq M\hat{R}_n\left(\left|t-x\right|^{\alpha},q;x\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere, Hölder eşitsizliği uygulanırsa

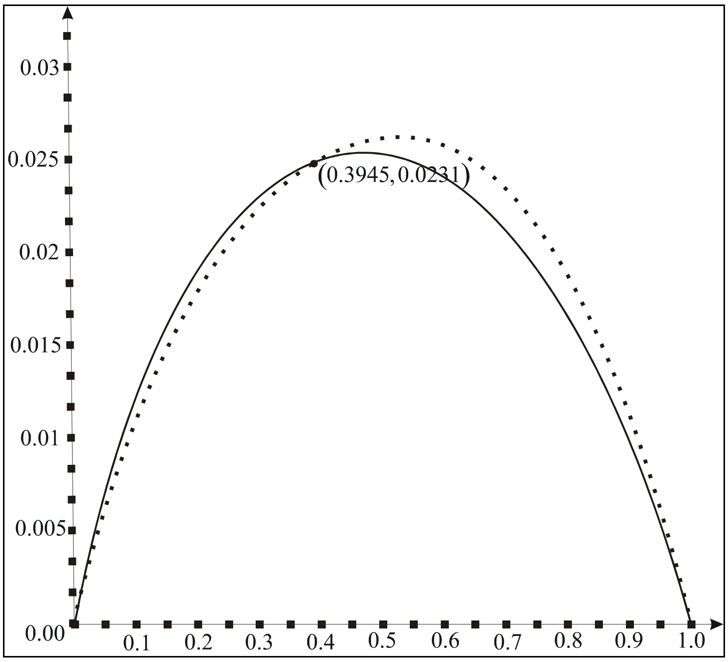
$$\left|\hat{R}_n(f,q;x)-f(x)\right|\leq M\left\{\hat{R}_n\left((e_1-x)^2,q;x\right)\right\}^{\alpha/2}$$

olur. $q:=(q_n)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere Eş. 4.8 ile verilen koşulları sağlasın. Eş. 4.34 ile verilen $\hat{\delta}_n(x)$ göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

5. GRAFİKLER

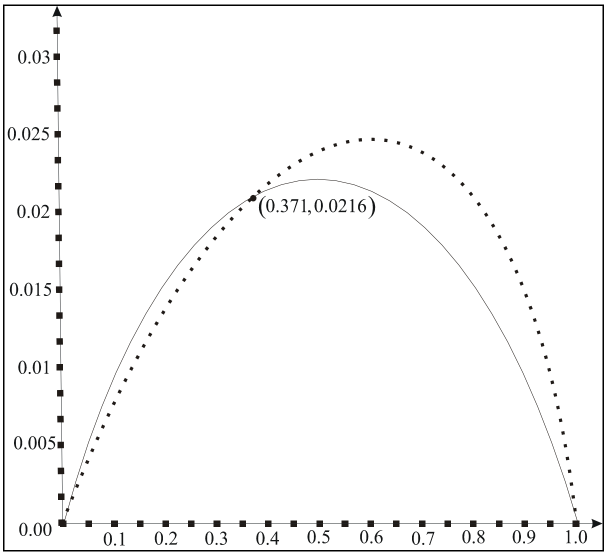
Bu bölümde bazı $n \geq 2$ ve $0 < q < 1$ değerleri için, Bernstein operatörlerinin q-analoğunun King [King 2003] tipli genelleşmelerinin yaklaşım hızı ile Lupaş [Lupaş 1987] tarafından verilen Bernstein operatörlerinin q-analoğunun yaklaşım hızı grafikler yardımıyla karşılaştırılacaktır. Aşağıdaki grafiklerde, "___" ile $R_n\left(f,q;x\right)$ için δ_n, "**……**" ile $R_n^*\left(f,q;x\right)$ için δ_n^* gösterilecektir.

1) $n = 10$ için:



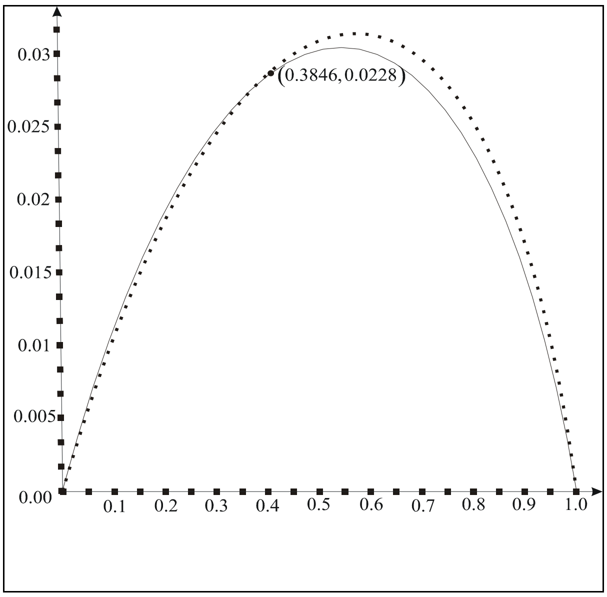
Şekil 5.1. $q = \dfrac{999}{1000}$ için δ_{10} ve δ_{10}^* ın karşılaştırılması

2) $n = 10$ için:



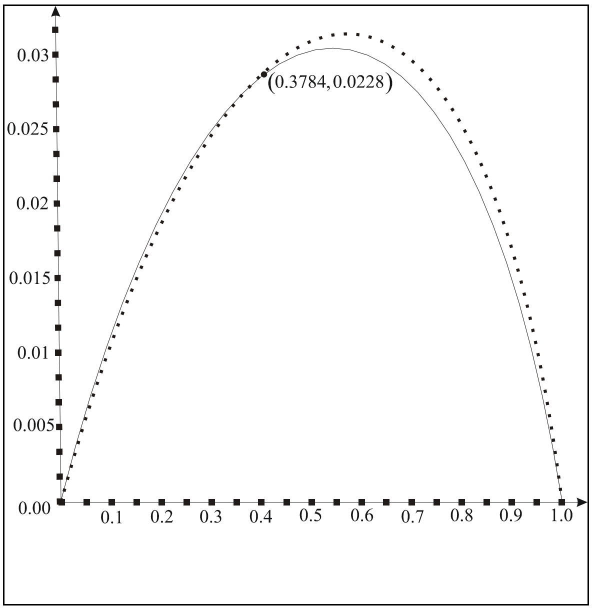
Şekil 5.2. $q = \dfrac{9999}{10000}$ için δ_{10} ve δ_{10}^{*} ın karşılaştırılması

3) $n = 10$ için:



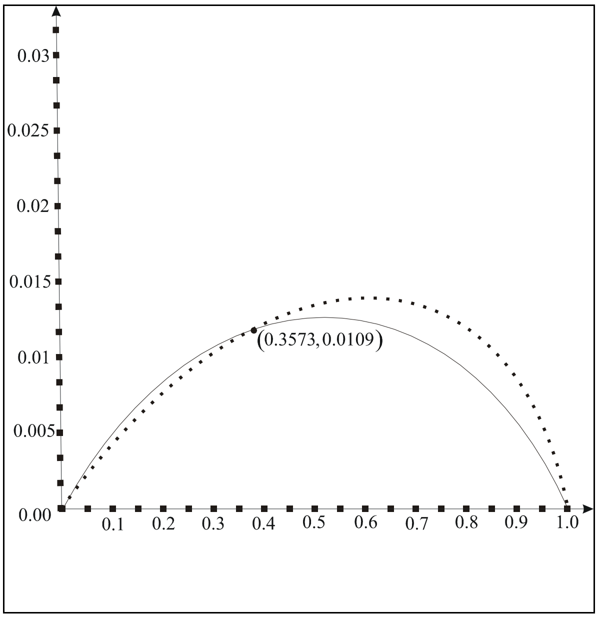
Şekil 5.3. $q = \dfrac{99999}{100000}$ için δ_{10} ve δ_{10}^{*} ın karşılaştırılması

4) $n=10$ için:



Şekil 5.4. $q=\dfrac{999999}{1000000}$ için δ_{10} ve δ_{10}^{*} ın karşılaştırılması

5) $n=20$ için:



Şekil 5.5. $q=\dfrac{9999}{10000}$ için δ_{20} ve δ_{20}^{*} ın karşılaştırılması

5.1. Sonuç

Yukarıdaki grafikler yardımıyla, $q[n]>1$ ve $x \leq \dfrac{1}{2[n]+1}$ olduğunda $n \geq 2$ ve $0<q<1$ için $R_n^*(f,q;x)$ operatörünün yaklaşım hızının, $R_n(f,q;x)$ operatörünün yaklaşım hızından daha iyi olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

Agratini, O., Linear Operators That Preserve Some Test Functions, ***Int. J. Math. Sci. Art.,*** 94136: 1-11 (2006).

Agratini, O., Doğru, O., "Weighted Statistical Approximation by $q-$Szasz Type Operators That Preserve Some Test Functions" **Taiwan. J. Math**., 14(4): 1283-1296 (2010).

Altomare, F., Campiti, M., "Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications"', ***de Gruyter Stud. Math.***, 17, Walter de Gruyter , Berlin, New York ,141-265 (1994).

Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R., Special Functions, ***Cambridge Univ. Press***, 481-542 (1999).

Aral, A., Gupta, V., "The $q-$derivative and Application to $q-$Szasz–Mirakyan Operators", ***Calcolo,*** 43: 151-170 (2006).

Bernstein, S.N., "Démonstration du Théorem de Weierstrass Fondée sur le Calculu des Probabilités", ***Comp. Comm. Soc. Mat. Charkow Sér.,*** 13(2): 1-2 (1912).

Bohman, H., "On Approximation of Continuous and Analytic Functions", ***Arkiffür Math***., 2(3): 43-56 (1951).

Dalmanoğlu, Ö., Doğru O., "Statistical Approximation Properties of Kantorovich type $q-$MKZ operators", ***Creat. Math. Inform***., 19: 15-24 (2010).

Dalmanoğlu, Ö., Doğru O., "On Statistical Approximation Properties of Kantorovich type $q-$Bernstein operators", ***Math. Comput. Modelling*****,** 52(5-6): 760–771 (2010).

Derriennic, M.M., "Sur l'approximation de Functions Intégrables sur [0,1] par des Polynomes de Bernstein Modifies", ***J. Approx. Theory***, 31: 325-343 (1981).

Derriennic, M.M., "Modified Bernstein Polynomials and Jacobi Polynomials in $q-$calculus", ***Arxiv Math***., 0410206 (2): 1-24 (2004).

Doğru, O., Duman, O., "Statistical Approximation of Meyer-König and Zeller operators Based on The q-integers", ***Publ. Math. Debrecen*****,** 68: 199-214 (2006).

Doğru, O., Kanat, K., "Statistical Approximation Properties of King-type Modification of Lupaş Operators", ***Computers and Mathematics with Applications*,** 64(4): 511-517 (2012a).

Doğru, O., Kanat, K., "On Statistical Approximation Properties of Kantorovich type Lupaş Operators", ***Mathematical and Computer Modelling*,** 55: 1610-1621 (2012b).

Durrmeyer, J.L., "Une Formule D'inversion de la Transformeé de Laplace: Applications a la Theorie des Moments", ***Thése de 3e cycle, Facultié des Sciences de l.Université de Paris***, 1-90 (1967).

Fast, H., "Sur la Convergence Statistique", ***Collog. Math***., 2: 241-244 (1951).

Gadjiev, A.D., Orhan, C., "Some Approximation Theorems via Statistical Convergence", ***Rocky Mountain J. Math.***, 32 (1): 129-138 (2002).

Gauchman, H., "Integral Inequalities in Calculus", ***Comput. Math. Appl.***, 47: 281-300 (2004).

Gupta, V., "Some Approximation Properties of $q-$Durrmeyer operators", ***Appl. Math. Comput.*,** 172-178 (2007).

Gupta, V., Radu C., "Statistical Approximation Properties of $q-$Baskokov-Kantorovich Operators", ***Cent. Eur. J. Math***., 7(4): 809-818 (2009).

İspir N., On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces, ***Turk J. Math***., 25: 355-365 (2001).

Jackson, F.H., "On the $q-$definite Integrals", ***Quart. J. Math.*,** 41: 193-203 (1910).

Kac, V., Cheung, P., "Quantum Calculus", ***Universitext. Springer-Verlag***, New York, 1-85 (2002).

Kantorovich, L.V., "Sur Certains Developpements Suivant les Polynomesde la Forme de S. Bernstein", ***I, II, C.R. Acad. USSR*,** 563-568, 595-600 (1930).

King, J.P., "Positive Linear Operators Which Preserve x^2, ***Acta Math. Hungar.***", 99: 203-208 (2003).

Korovkin, P.P., "On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions", ***Dokl. Akad. Nauk*,** 90: 961-964 (1953).

Lorentz, G.G., "Bernstein polynomials", ***University of Toronto Press, Mathematical Expositions*,** 10-130 (1953).

Lupaş, A., "A $q-$analogue of the Bernstein operator", ***University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus***, 9 (1987).

Mahmudov, N.I., "On q-parametric Szász-Mirakjan;Operators", ***Mediterr. J. Math.***, 7(3): 297-311 (2010).

Marinkovich, S., Rajkovich, P., Stankovich, M.,. The Inequalities for Some Types of $q-$integrals, ***Comput. Math. Appl***, 56: 2490-2498 (2008).

Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H., "An Introduction to the Theory of Numbers", 5th Ed., ***Wiley***, New York, 10-24 (1980).

Oruç, H., Tuncer N., "On the Convergence and Iterates of $q-$Bernstein Polynomials", ***J. Approx. Theory,*** 117: 301-313 (2002).

Ostrovska, S., "$q-$Bernstein Polynomials and Their Iterates", ***J. Approx. Theory.***, 123: 232-255 (2003).

Ostrovska, S., "On the Lupaş $q-$analogue of the Bernstein Operator", ***Rocky Mountain. J. Math.***, 36(5): 1615-1629 (2006).

Phillips, G.M., "Bernstein Polynomials Based on the q-integers", ***Ann. Numer. Math.***, 4: 511-518 (1997).

Phillips, G.M., "A Generalization of the Bernstein Polynomials Based on the $q-$integers", ***Anziam J.***, 42: 79-86 (2000).

Radu, C., "Statistical Approximation Properties of Kantorovich Operator Based on $q-$integers", ***Creat. Math. Inform.***, 17(2): 75-84 (2008).

Stankovic, M.S., Rajkovic, P.M., Marinkovic, S.D., "Inequalities Which Include q–Integrals", ***Bulletin T. CXXXIII de l'Academie serbe des sciences et des arts, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Sciences Mathématiques***, 31: 137–146 (2006).

Trif, T., "Meyer-König and Zeller Operators Based on the $q-$integers", ***Rev. Anal. Numer. Theor. Approx***. 29: 221-229 (2000).

Totik, V.,. "Approximation by Szasz–Mirakjan–-Kantorovich operators in $L^p(p>1)$", ***Analysis Mathematica,*** 9(2): 147–167 (1983).

Weierstrass, K., “Über die Aanalytische Darstellbarkeit Sogenannter Willküricher Funktionen Einer Reellen Veranderlichen”, ***Sitzungsberichte der Akademiezu Berlin***, 633-639, 789-805 (1885).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: KANAT, Kadir
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 25.09.1980 Hatay
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 202 10 78
e-mail	: kadirkanat@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Doktora	Gazi Üniversitesi / Matematik ABD	2012
Yüksek lisans	İzzet Baysal Üniversitesi / Matematik ABD	2005
Lisans	İzzet Baysal Üniversitesi / Matematik B.	2002
Lise	İstiklal Makzume Anadolu Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2002-2006	İzzet Baysal Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2006-2012	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar ve Bildiriler

1. Doğru, O., **Kanat, K.**, "Statistical Approximation Properties of King-Type Modification of Lupaş Operators", ***Computers and Mathematics with Applications***, 64:4 511-517 (2012).

2. Doğru, O., **Kanat, K.**, "On Statistical Approximation Properties of the Kantorovich Type Lupaş Operators", ***Mathematical and Computer Modelling***, *55*: 1610-1621 (2012).

İlgi Alanları

Yaklaşımlar teorisi, İstatistiksel yakınsaklık