



TC
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HESSENBERG MATRİS YÖNTEMİ İLE
GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCI
VE LUCAS POLİNOMLARININ
TERİMLERİNİN HESAPLANMASI**

Adem ŞAHİN

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ
2013
Her hakkı saklıdır**

TC
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HESSENBERG MATRİS YÖNTEMİ İLE
GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ
VE LUCAS POLİNOMLARININ
TERİMLERİNİN HESAPLANMASI

Adem ŞAHİN

TOKAT
2013

Her hakkı saklıdır

Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ danışmanlığında, Adem ŞAHİN tarafından hazırlanan bu çalışma ^{15.07}2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

İmza:

Üye: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

İmza:

Üye: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

İmza:

Üye : Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ

İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)


Doc. Dr. Naim ÇAĞMAN
Enstitü Müdürü
17.07.2013


TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdığı yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının herhangi bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Adem ŞAHİN



ÖZET

Doktora Tezi

HESSENBERG MATRİS YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCI VE LUCAS POLİNOMLARININ TERİMLERİNİN HESAPLANMASI

Adem ŞAHİN

Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ

Bu çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları ve bu polinomların k dizisinden oluşan A_k^∞ ve D_k^∞ matrislerinin, rekürans ilişkisi ile tanımlanan sayı ve polinomların büyük bir kısmının genel hali olduğu gösterildi. Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci ve Lucas- p polinomlarının, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının ve A_k^∞ matrisinin bileşenleri için Hessenberg matris kullanılarak matris temsilleri verildi. Bu yöntemde çeşitli Hessenberg matrisler tanımlanarak, bu matrislerin determinantının ve permanantının polinomların istenilen terimine eşit olduğu gösterildi. Daha sonra Hessenberg matris yönteminde kullanılan Hessenberg matrislerden bazıları kullanılarak Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci polinomunun terimlerini elde etmek için bir yöntem verildi. Son bölümde genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci ve Lucas- p polinomları, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları ve A_k^∞ matrisi üzerine yapılan çalışmaların, literatürde var olan birçok rekürans ilişkili sayı dizisi ve polinom için de geçerli olduğu gösterildi.

2013, 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Genelleştirilmiş Fibonacci polinomu, Genelleştirilmiş Lucas polinomu, Hessenberg matris, Determinant, Permanent.

ABSTRACT

PhD Thesis

Calculating the terms of
the Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials
with Hessenberg Matrix Method

Adem ŞAHİN

Gaziosmanpaşa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : AssT. Prof. Dr. Kenan KAYGISIZ

In this study, it is demonstrated that generalized Fibonacci and Lucas polynomials and matrices A_k^∞ and D_k^∞ which consist of k sequences of these polynomials are a general form of a great number of numbers and polynomials defined by recurrence relation. Matrix representation has been implemented in order to generalized Fibonacci and Lucas p -polynomials, generalized Fibonacci and Lucas polynomials and matrix A_k^∞ by using Hessenberg matrices. Various Hessenberg matrices have been defined in the method, and it has been shown that determinants and permanents of these matrixes are equivalent to the desired term of polynomials. Afterwards, in order to obtain the terms of Fibonacci numbers, generalized order- k Fibonacci numbers and generalized Fibonacci polynomials, a method is given by using some Hessenberg matrices which used in Hessenberg matrix method. In the last chepter, it has been demonstrated that studies on generalized Fibonacci and Lucas polynomials are also valid for many number sequences and polynomials, defined by recurrence relation, in literature.

2013, 74 pages

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Generalized Fibonacci polynomials, Generalized Lucas polynomials, Hessenberg matrix, Determinant, Permanent

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	v
SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1 Genel Tanımlar	4
2.2 A_k^∞ Matrisinin Elde Edilişi	14
2.3 D_k^∞ Matrisinin Elde Edilişi	17
3. MATERYAL VE YÖNTEM	19
3.1 Determinant ve Permanent	19
3.2 Hessenberg Matrix Yöntemi	19
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI	23
4.1 Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları ve A_k^∞ matrisi	23
4.2 Genelleştirilmiş Lucas Polinomları ve D_k^∞ matrisi	24
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS p-POLİNOMLARININ MATRİS TEMSİLLERİ	27
5.1 Genelleştirilmiş Fibonacci p -Polinomlarının Hesaplanması	29
5.2 Genelleştirilmiş Lucas p -Polinomlarının Hesaplanması	33
6. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ MATRİS TEMSİLLERİ	37
6.1 Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomlarının Hesaplanması	37
6.2 Genelleştirilmiş Lucas Polinomlarının Hesaplanması	43
7. A_k^∞ MATRİSİNİN BİLEŞENLERİNİN MATRİS TEMSİLİ	50
8. HESSENBERG MATRİS METODUNUN GENELLEŞTİRİLMESİ	56
9. UYGULAMALAR	64
10. TARTIŞMA VE SONUÇ	69
KAYNAKLAR	70

ÖZGEÇMİŞ	72
-----------------	-----------

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, desteğini esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ'a minnettarlığımı sunarım. Ayrıca, kıymetli zamanını ve fikirlerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU, Doç. Dr. Hacı AKTAŞ ve diğer tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Değerli eşim ve bir tanecik kızıma bu tezin hazırlık dönemlerinde gösterdikleri sabırdan ve destekten dolayı ayrıca teşekkür ederim. Bana güvenen ve her zaman güven veren babama, anneme ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim. İyi ki varsınız.

Doktora öğrenimim boyunca tarafıma 2211 - Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında destek veren TÜBİTAK'a desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
F_n	n . Fibonacci sayısı
L_n	n . Lucas sayısı
P_n	n . Pell sayısı
P_n	n . Perrin sayısı
Q_n	n . Pell-Lucas sayısı
J_n	n . Jacobsthal sayısı
j_n	n . Jacobsthal-Lucas sayısı
a_n	n . genelleştirilmiş Tribonacci sayısı
$f_n(x)$	n . Fibonacci polinomu
$l_n(x)$	n . Lucas polinomu
$F_n(x, y)$	n . iki değişkenli Fibonacci polinomu
$L_n(x, y)$	n . iki değişkenli Lucas polinomu
$F_{p,n}(x, y)$	n . iki değişkenli Fibonacci p -polinomu
$L_{p,n}(x, y)$	n . iki değişkenli Lucas p -polinomu
$f_{k,n}$	k -basamak Fibonacci sayılarının n . terimi
$f_{k,n}^i$	Genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarının k dizisinin i . dizisi
$l_{k,n}$	Genelleştirilmiş k -Basamak Lucas Sayılarının n . terimi
$l_{k,n}^i$	Genelleştirilmiş k -basamak Lucas sayılarının k dizisinin i . dizisi
$r_{k,n}$	k -basamak Perrin sayılarının n . terimi
$p_{k,n}^i$	Genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının k dizisinin i . dizisi
$v_{k,n}^i$	Genelleştirilmiş k -basamak Van der Laan sayılarının k dizisinin i . dizisi
$F_{k,n}(t)$	Genelleştirilmiş Fibonacci polinomunun n . terimi (k basamak)
$G_{k,n}(t)$	Genelleştirilmiş Lucas polinomunun n . terimi (k basamak)
$\det(A)$	A matrisinin determinanı
$\text{per}(A)$	A matrisinin permanenti
$a \vdash n$	$\sum_{j=1}^k ja_j = n$, her i ($1 \leq i \leq k$) için a_i negatif olmayan tamsayı
$ a $	$\sum_{j=1}^k a_j$, her i ($1 \leq i \leq k$) için a_i negatif olmayan tamsayı

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelgeler	Sayfa
Çizelge 2.1 $p = 3$ ve $p = 4$ için genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomları	6
Çizelge 2.2 $p = 3$ ve $p = 4$ için genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomları	7
Çizelge 2.3 $k = 4$ ve $k = 5$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomları	10
Çizelge 2.4 $k = 4$ için genelleştirilmiş Lucas polinomları	11
Çizelge 2.5 $k = 5$ için genelleştirilmiş Lucas polinomları	11
Çizelge 3.1 $F_n(x, y)$ nin bazı dizi ve polinomların genel hali olduğunun gösterilmesi	19
Çizelge 3.2 $L_n(x, y)$ nin bazı dizi ve polinomların genel hali olduğunun gösterilmesi	20

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Rekürans (yineleme, indirgeme) ilişkili sayı dizileri ve polinomlar birçok araştırmacının ilgisini çekmiş, bunlar üzerine pek çok araştırma yapılmıştır. Fibonacci, Lucas, Pell, Perrin, Jacobsthal, Pell-Lucas ve Jacobsthal-Lucas, ... gibi değişik sayı dizileri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu tip dizilere genel olarak Fibonacci tip diziler denir. Özellikle Fibonacci sayıları matematiğin hemen hemen her dalında (sayılar teorisi, diferansiyel denklemler, olasılık, istatistik, nümerik analiz, lineer cebir) kullanılmaktadır. Bunun yanısıra Fibonacci sayıları biyoloji, kimya, kriptoloji ve elektrik mühendisliği alanlarında geniş uygulama alanı bulmaktadır (Philippou ve ark, 2001). Son yıllarda modern bilimde, özellikle fizikte, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri geniş kullanım alanına sahiptir (Kılıç ve Stakhov, 2009). Ayrıca bu sayı dizilerinin birçok genelleştirmesi yapılmaktadır. Bu genelleştirmeler de aktif olarak diğer bilim dallarında kullanılmaktadır. Örneğin Stakhov Fibonacci- p sayıları için üreteç matrisi vermiş ve kodlama teorisi ile ilgili “golden cryptography” adlı ilginç bir uygulama yapmıştır (Stakhov, 2006a; Stakhov, 2006b; Stakhov, 2007). Swamy ağ fonksiyonları ve genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları arasında yakın ilişkilerin var olduğunu göstermiştir (Swamy, 1998). Ayrıca iki değişkenli Fibonacci ve Lucas- p polinomları teorik fizik alanında fiziksel süreçlerin modellenmesi için de kullanılmaktadır (El Naschie, 1992a; El Naschie, 1993b, El Naschie, 1994). Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile onların genelleştirmelerinin modern bilimdeki kullanım alanlarına örnekler daha da çoğaltılabilir.

Bu diziler ve polinomlar üzerine yapılan çalışmaların odak noktalarından biri bu dizi ve polinomların istenilen terimlerinin rekürans ilişkisine gerek kalmadan hesaplanabilmesidir. Örneğin 10. Fibonacci sayısı $F_{10} = 55$ olduğu rekürans formülü kullanılarak bulunabilir, fakat bizden F_{100} istenmiş olsa bu sayı 21 basamaklı “354224848179261915075” sayıdır ve bu sayıyı rekürans kullanarak bulmak zahmet gerektiren bir iştir. Rekürans ilişkisi ile tanımlanmış polinom hesaplamalarında büyük indisli polinomları hesaplamak daha da zordur.

Fibonacci tip dizilerin birçok genelleştirmesinin (gerek dizi halinde, gerek polinom halinde) bulunduğu göz önüne alınırsa bunların mümkün olduğu kadar çoğunu kapsayacak bir çalışma

nın gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Son dönemlerde bu sayı dizilerinin istenen terimlerini hesaplayabilmek için bazı teknikler geliştirilmiş ve bazı yeni yöntemler ortaya atılmıştır. Bu yöntemlerden biri de değişik Hessenberg matrisler tanımlayıp bu matrislerin determinantını ve permanentini kullanarak Fibonacci ve Lucas benzeri sayıları ve onların bazı genelleştirmelerinin terimlerini hesaplamaktır. Hesaplamalarda bilgisayar algoritmasının da kullanılabileceği dikkate alındığında bu matrislerin matematiksel olarak kolay ifade edilmesi önem arz etmektedir. Fibonacci tip sayıların belki ilk 100 teriminin rekürans kullanılarak hesaplanması bilgisayar yardımıyla kolaylıkla yapılır ancak daha büyük sayılar için yineleme ilişkisi dışında bir algoritmanın yardımına ihtiyaç vardır.

Son 50 yılda Fibonacci tip dizilerin terimlerini hesaplamak için Hessenberg matrislerden yararlanılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları şöyle sıralanabilir. Minc (1964) $n \times n$ boyutlu $(0, 1)$ -matris(bileşenleri sadece 0 ve 1 lerden oluşan matris) tanımlamış ve bu matrisin pemanentinin Miles (1960) ın tanımladığı genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarına eşit olduğunu göstermiştir. Minc 1978 yılında yayınlanan kitabında da $n \times n$ boyutunda $(0, 1)$ -matris tanımlamış ve bu matrisin permanentinin genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarına eşit olduğunu göstermiştir. Strank (1998) de yayınlanan kitabında bazı Hessenberg matrisler vermiş ve bunların determinantlarının Fibonacci sayılarına eşit olduğunu göstermiştir. G.-Y Lee ve S.-G. Lee (1995) de ve G.-Y Lee (2000) de yazarlar $(0, 1)$ -matrisler tanımlamış ve bu matrislerin permanentlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarına eşit olduğunu göstermişlerdir. Öcal ve arkadaşları (2005) genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci ve Lucas sayılarını hesaplamak için çeşitli Hessenberg matrislerinin determinantını ve permanentini kullanmışlardır. Kılıç ve Stakhov (2009) Fibonacci ve Lucas p -sayıları için permanent kullanarak bir çalışma yapmıştır. Ayrıca Kılıç ve Taşçı (2010) Hessenberg matrislerin determinantı ve permanenti üzerine çalışmışlardır. Yılmaz ve Bozkurt (2011) Pell ve Perrin dizilerinin terimlerini hesaplamak için Hessenberg matrisler tanımlamışlardır. Li (2012) Fibonacci-Hessenberg matrisler tanımlamış ve bu matrisler yardımıyla Pell ve Perrin sayıları için bazı sonuçlar elde etmiştir.

Bu çalışmada 2.Bölümde genel tanımlar verildi. Tez içinde kullanacağımız A_k^∞ ve D_k^∞ matrislerinin elde ediliş biçimleri anlatıldı. 3. Bölümde tezde kullanacağımız Hessenberg matris metodu anlatıldı. 4. Bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının

ve A_k^∞ ve D_k^∞ matrislerinin rekürans ilişkisi ile tanımlanan ve literatürde sıkça kullanılan sayı dizileri ve polinomların genel hali olduğu gösterildi. Bu bölümden sonra tezin orjinal kısmı olan 5., 6., 7., 8., ve 9. bölümlere geçildi. İlk olarak 5. bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas- p polinomları için matris temsilleri verildi. 6. Bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları için matris temsilleri verildi. 7. Bölümde A_k^∞ matrisinin bileşenleri için matris temsilleri verildi. 8. bölümde önceki bölümlerde kullanılan matris temsillerine ek olarak Hessenberg matris yönteminin bir genelleştirilmesi olan metot elde edildi. Bu metot yardımıyla Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının terimleri elde edildi. Daha önceki yöntemlerde tek seferde sadece bir terim elde edilirken yeni yöntemde bir n kare matris kullanılarak ardışık n terim aynı anda elde edildi. Son bölümde önceki bölümde yapılan çalışmaların literatürde var olan birçok dizi ve polinomada uygulanabileceği gösterildi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Genel Tanımlar

Fibonacci tip diziler ve bu dizilerin genelleştirmeleri üzerine birçok tanım yapılmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.1. Başlangıç koşulları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir. Burada F_n ; n -inci Fibonacci sayısını gösterir. Fibonacci sayılarından oluşan diziye Fibonacci dizisi denir ve $\{F_n\}$ ile gösterilir (Vajda, 1989).

Tanım 2.1.2. Başlangıç koşulları $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Lucas sayıları denir. Burada L_n ; n -inci Lucas sayısını gösterir. Lucas sayılarından oluşan diziye Lucas dizisi denir ve $\{L_n\}$ ile gösterilir (Vajda, 1989).

Tanım 2.1.3. Başlangıç koşulları $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Pell sayıları denir. Burada P_n ; n -inci Pell sayısını gösterir. Pell sayılarından oluşan diziye Pell dizisi denir ve $\{P_n\}$ ile gösterilir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.4. Başlangıç koşulları $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için,

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Pell-Lucas sayıları denir. Burada Q_n ; n -inci Pell-Lucas sayısıdır. Pell-Lucas sayılarından oluşan diziye Pell-Lucas dizisi denir ve $\{Q_n\}$ ile gösterilir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.5. Başlangıç koşulları $J_0 = 2, J_1 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için,

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Jacobsthal sayıları denir. Burada J_n ; n -inci Jacobsthal sayısıdır. Jacobsthal sayılarından oluşan diziye Jacobsthal dizisi denir ve $\{J_n\}$ gösterilir (Horadam, 1996).

Tanım 2.1.6. Başlangıç koşulları $j_0 = 0, j_1 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için,

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Jacobsthal-Lucas sayıları denir. Burada j_n ; n -inci Jacobsthal-Lucas sayısıdır. Jacobsthal-Lucas sayılarından oluşan diziye Jacobsthal-Lucas dizisi denir ve $\{j_n\}$ ile gösterilir (Horadam, 1996).

Tanım 2.1.7. Başlangıç koşulları $R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için,

$$R_{n+1} = R_{n-1} + R_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Perrin sayıları denir.

Tanım 2.1.8. Başlangıç koşulları $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 2$ olmak üzere, her $n \geq 4$ doğal sayısı için,

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Tribonacci sayıları denir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.9. Başlangıç koşulları $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 3$ doğal sayısı ve p, q ve r sabit katsayıları için,

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2} + ra_{n-3}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara genelleştirilmiş Tribonacci sayıları denir (Koshy, 2001).

Burada $p = q = r = 1$ alınırsa Tribonacci sayıları elde edilir.

Tanım 2.1.10. Başlangıç koşulları $F_{p,0} = 0, F_{p,1} = F_{p,2} = \dots = F_{p,p} = 1$ olmak üzere, $p \geq 1$ ve $n > p$ doğal sayıları için,

$$F_{p,n} = F_{p,n-1} + F_{p,n-p-1} \quad (2.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Fibonacci p -sayıları denir (Stakhov, 1977).

Tanım 2.1.11. Başlangıç koşulları $L_{p,0} = p + 1, L_{p,1} = L_{p,2} = \dots = L_{p,p} = 1$ olmak üzere, $p \geq 1$ ve $n > p$ doğal sayıları için,

$$L_{p,n} = L_{p,n-1} + L_{p,n-p-1} \quad (2.2)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Lucas p -sayıları denir (Stakhov, 1977).

Tanım 2.1.12. Başlangıç koşulları $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için,

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma Fibonacci polinomu denir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.13. Başlangıç koşulları $l_0(x) = 2, l_1(x) = x$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için,

$$l_n(x) = xl_{n-1}(x) + l_{n-2}(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma Lucas polinomu denir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.14. Başlangıç koşulları $F_{p,0}(x, y) = 0$ ve $n = 1, 2, 3, \dots, p$ için $F_{p,n}(x, y) = x^{n-1}$ olmak üzere, $p \geq 1$ ve $n > p$ doğal sayıları için,

$$F_{p,n}(x, y) = xF_{p,n-1}(x, y) + yF_{p,n-p-1}(x, y) \quad (2.3)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomu denir (Tuğlu ve ark, 2011).

Tanım 2.1.15. Başlangıç koşulları $L_{p,0}(x, y) = p + 1$ ve $n = 1, 2, 3, \dots, p$ için $L_{p,n}(x, y) = x^n$ olmak üzere, $p \geq 1$ ve $n > p$ doğal sayıları için,

$$L_{p,n}(x, y) = xL_{p,n-1}(x, y) + yL_{p,n-p-1}(x, y) \quad (2.4)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomu denir (Tuğlu ve ark, 2011).

n	$p = 3$	$p = 4$
0	0	0
1	1	1
2	x	x
3	x^2	x^2
4	x^3	x^3
5	$y + x^4$	x^4
6	$2xy + x^5$	$y + x^5$
7	$x^6 + 3x^2y$	$2xy + x^6$
8	$x^7 + 4x^3y$	$x^7 + 3x^2y$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 2.1 $p = 3$ ve $p = 4$ için iki değişkenli Fibonacci p -polinomları

Tanım 2.1.16. a ve b tamsayıları $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$ şartını sağlayan sıfırdan farklı ve aralarında asal tamsayılar olsun. Başlangıç koşulları $\omega_0 = 0, \omega_1 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için $\omega_n = a\omega_{n-1} - b\omega_{n-2}$ şeklindeki bağıntı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir. Aynı şekilde başlangıç koşulları $v_0 = 2, v_1 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 2$ doğal sayısı için $v_{n+2} = av_{n+1} - bv_n$ bağıntısı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş Lucas dizisi denir (Robbins, 1993).

Bu genellemede $a = 1$ ve $b = -1$ için $\{\omega_n\}$ dizisi Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ 'e ve $\{v_n\}$ dizisi de Lucas dizisi $\{L_n\}$ 'e dönüşür. Ayrıca $a = 2$ ve $b = -1$ için $\{\omega_n\}$ dizisi Pell dizisi $\{P_n\}$ 'e dönüşür.

n	$p = 3$	$p = 4$
0	4	5
1	x	x
2	x^2	x^2
3	x^3	x^3
4	$4y + x^4$	x^4
5	$5xy + x^5$	$5y + x^5$
6	$x^6 + 6x^2y$	$6xy + x^6$
7	$x^7 + 7x^3y$	$7x^2y + x^7$
8	$x^8 + 8x^4y + 4y^2$	$8x^3y + x^8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 2.2 $p = 3$ ve $p = 4$ için iki değişkenli Lucas p -polinomları

Tanım 2.1.17. $k \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları

$$f_{k,1} = f_{k,2} = \dots = f_{k,k-2} = 0, f_{k,k-1} = f_{k,k} = 1$$

olan ve $n > k$ için

$$f_{k,n} = \sum_{j=1}^k f_{k,n-j} \quad (2.5)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara k -basamak Fibonacci sayıları (GOkF) denir (Miles, 1960).

Tanım 2.1.18. $1 \leq i \leq k$, $k \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları $1 - k \leq n \leq 0$ için

$$f_{k,n}^i = \begin{cases} 1 & i = 1 - n, \\ 0 & \text{aksi taktirde,} \end{cases}$$

olan ve $n > 0$ için

$$f_{k,n}^i = \sum_{j=1}^k c_j f_{k,n-j} \quad (2.6)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayılarının k dizisi (k SOkF) denir (Er, 1984).

Burada c_j ($1 \leq j \leq k$) sabit katsayılardır. Burada $c_j = 1$ olarak alınırsa $n \geq 1 - k$ için

$$f_{k,n}^k = f_{k,k+n-2}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.19. $1 \leq i \leq k$, $k \geq 2$ olmak üzere, başlangıç koşulları $1 - k \leq n \leq 0$ için

$$p_{k,n}^i = \begin{cases} 1 & i = 1 - n, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olan ve $n > 0$ için

$$p_{k,n}^i = 2p_{k,n-1}^i + \sum_{j=2}^k p_{k,n-j}^i \quad (2.7)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş k -basamak Pell sayılarının k dizisi ($kSOkP$) denir (Kılıç ve Taşcı, 2006).

Tanım 2.1.20. $k \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları

$$l_{k,1-k} = l_{k,2-k} = \dots = l_{k,-1} = -1 \text{ ve } l_{k,0} = k$$

olan ve $n > 0$ için

$$l_{k,n} = \sum_{j=1}^k l_{k,n-j} \quad (2.8)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş k -basamak Lucas Sayı dizisi ($GOkL$) denir (Şahin, 2010).

Tanım 2.1.21. $1 \leq i \leq k$, $k \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları $1 - k \leq n \leq 0$ için

$$l_{k,n}^i = \begin{cases} -i & , i - n < k, \\ -2n + i & , i - n = k, \\ k - i - 1 & , i - n > k \end{cases}$$

olan ve $n > 0$ için

$$l_{k,n}^i = \sum_{j=1}^k l_{k,n-j}^i \quad (2.9)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan k tane diziye genelleştirilmiş k -Basamak Lucas Sayılarının k Dizisi ($kSOkL$) denir (Şahin, 2010).

Burada verilen bir k değeri için $l_{k,n}^i$ i -inci dizinin n -inci terimidir.

Tanım 2.1.22. $1 \leq i \leq k, k \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları $1 - k \leq n \leq 0$ için

$$v_{k,n}^i = \begin{cases} 1 & i - n = k, \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

olan ve $n > 0$ için

$$v_{k,n}^i = \sum_{j=2}^k v_{k,n-j}^i \quad (2.10)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan k tane diziye genelleştirilmiş k -basamak Van der Laan sayılarının k dizisi denir (Kaygısız ve Şahin, 2013).

Tanım 2.1.23. $k \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları

$$r_{k,1-k} = (k-2), r_{k,2-k} = \dots = r_{k,-2} = r_{k,-1} = -1 \text{ ve } r_{k,0} = k,$$

olan ve $n > 0$ için

$$r_{k,n} = \sum_{j=2}^k r_{k,n-j} \quad (2.11)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş k -basamak Perrin dizisi adı verilir (Şahin, 2010).

Tanım 2.1.24. (MacHenry, 2000) $k \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı ve $P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$ core polinomu verilsin. $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci polinomu $F_{k,n}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_{k,n}(t) = 0, \quad n < 0 \quad (2.12)$$

$$F_{k,0}(t) = 1$$

$$F_{k,n}(t) = t_1 F_{k,n-1}(t) + \dots + t_k F_{k,n-k}(t), \quad n \geq 1.$$

Tanım 2.1.25. (MacHenry, 2000) $k \geq 2$ şeklinde bir tamsayı ve $P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$ polinomu verilsin. $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ olmak üzere genelleştirilmiş Lucas polinomu $G_{k,n}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
G_{k,0}(t) &= k \\
G_{k,1}(t) &= t_1 \\
G_{k,n}(t) &= G_{k-1,n}(t), 1 \leq n < k, \\
G_{k,n}(t) &= \sum_{i=1}^k t_i G_{k,n-i}(t), n \geq k.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Burada $P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$ polinomunun katsayıları uygun bir halkanın elemanlarıdır.

Teorem 2.1.26. (MacHenry ve Wong, 2012) $F_{k,n}(t)$ ve $G_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları olmak üzere $(n, k \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ ve

$$F_{k,0}(t) = 1, F_{k,-1}(t) = 0, \dots, F_{k,-k+1}(t) = 0,$$

$$G_{k,0}(t) = k, G_{k,-1}(t) = 0, \dots, G_{k,-k+1}(t) = 0$$

başlangıç koşulları için sırasıyla

$$F_{k,n}(t) = \sum_{a \vdash n} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} \tag{2.14}$$

ve

$$G_{k,n}(t) = \sum_{a \vdash n} \frac{n}{|a|} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} \tag{2.15}$$

dır. Burada her i ($1 \leq i \leq k$) için a_i negatif olmayan tamsayıdır.

Burada, $a \vdash n$ ve $|a|$ gösterimleri sırasıyla $\sum_{j=1}^k j a_j = n$ ve $\sum_{j=1}^k a_j$ yerine kullanılacaktır.

Ayrıca MacHenry ve Wong (2012) genelleştirilmiş Fibonacci Polinomlarını $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{2,n}(t) = \sum_{j=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (-1)^j \binom{n-j}{j} F_1^{n-2j} (-t_2)^j \tag{2.16}$$

şeklinde vermişlerdir. Burada $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ifadesi $n = 2k$ ve $n = 2k - 1$ durumlarının her ikisinde de k değerini veren bir semboldür.

MacHenry (1999), MacHenry ve Li (2010), MacHenry ve Wong (2011) da yazarlar genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının değişik özellikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır.

n	$k = 4$	$k = 5$
0	1	1
1	t_1	t_1
2	$t_2 + t_1^2$	$t_2 + t_1^2$
3	$t_3 + 2t_1t_2 + t_1^3$	$t_3 + 2t_1t_2 + t_1^3$
4	$t_4 + 2t_1t_3 + t_2^2 + t_1^4 + 3t_1^2t_2$	$t_4 + 2t_1t_3 + t_2^2 + t_1^4 + 3t_1^2t_2$
5	$2t_1t_4 + 2t_2t_3 + t_1^5 + 3t_1t_2^2 + 3t_1^2t_3 + 4t_1^3t_2$	$t_5 + 2t_1t_4 + 2t_2t_3 + t_1^5 + 3t_1t_2^2 + 3t_1^2t_3 + 4t_1^3t_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 2.3 $k = 4$ ve $k = 5$ için genelleştirilmiş Fibonacci polinomları

n	$k = 4$
0	4
1	t_1
2	$2t_2 + t_1^2$
3	$3t_3 + 3t_1t_2 + t_1^3$
4	$4t_4 + 4t_1t_3 + 2t_2^2 + t_1^4 + 4t_1^2t_2$
5	$5t_1t_4 + 5t_2t_3 + t_1^5 + 5t_1t_2^2 + 5t_1^2t_3 + 5t_1^3t_2$
6	$6t_2t_4 + 12t_1t_2t_3 + 2t_2^3 + 3t_2^2 + t_1^6 + 6t_1^2t_4 + 6t_1^3t_3 + 6t_1^4t_2 + 9t_1^2t_2^2$
$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 2.4 $k = 4$ için genelleştirilmiş Lucas polinomları

n	$k = 5$
0	5
1	t_1
2	$2t_2 + t_1^2$
3	$3t_3 + 3t_1t_2 + t_1^3$
4	$4t_4 + 4t_1t_3 + 2t_2^2 + t_1^4 + 4t_1^2t_2$
5	$5t_5 + 5t_1t_4 + 5t_2t_3 + t_1^5 + 5t_1t_2^2 + 5t_1^2t_3 + 5t_1^3t_2$
6	$6t_1t_5 + 6t_2t_4 + 12t_1t_2t_3 + 2t_2^3 + 3t_3^2 + t_1^6 + 6t_1^2t_4 + 6t_1^3t_3 + 6t_1^4t_2 + 9t_1^2t_2^2$
$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 2.5 $k = 5$ için genelleştirilmiş Lucas polinomları

Tanım 2.1.27. (Horn ve Johnson, 1985) Her $k > j + 1$ iken $a_{jk} = 0$ ve en az bir j için $a_{j,j+1} \neq 0$ olan, $n \times n$ matrisse alt Hessenberg matris denir.

$${}_+A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

şeklindedir.

Bundan sonraki bölümde A_k^∞ ve D_k^∞ matrislerinin nasıl elde edildiği gösterilecektir. Bu matrislere genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının k dizisi olarak bakılabilir. Aynı genelleştirilmiş k -basamak sayıların k dizisinde (Fibonacci, Pell, Lucas, ...) olduğu gibi A_k^∞ matrisinin son sütunu genelleştirilmiş Fibonacci polinomunu, D_k^∞ matrisinin son sütunu genelleştirilmiş Lucas polinomunu verir. Bu matrislerin literatürde var olan birçok genelleştirilmiş k -basamak sayıların k dizisinin (Fibonacci, Pell, Lucas, ...) genel hali olduğu 4. Bölümde gösterilmiştir.

2.2 A_k^∞ Matrisinin Elde Edilişi

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$$

core polinomu verilsin. Son satır elemanları bu polinomun katsayıları $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ vektörü olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \cdots & t_2 & t_1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde tanımlanan matrise companion matris denir. Eğer $\begin{bmatrix} t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \cdots & t_2 & t_1 \end{bmatrix}$ matrisi A matrisi ile soldan çarpılır ve bu işlem sonunda elde edilen satır A matrisinin altına satır olarak eklenirse $(A^2)_{k+1 \times k}$ matrisi elde edilir (Bunun yerine A matrisi ile yine kendisi çarpılır ve elde edilen matrisin son satırı A matrisinin altına satır olarak eklenirse $(A^2)_{k+1 \times k}$ matrisi elde edilir). Bu işlem sonsuz kez tekrarlanır. Daha sonra A matrisinin tersi olan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -t_{k-1}t_k^{-1} & -t_{k-2}t_k^{-1} & \cdots & t_1t_k^{-1} & t_k^{-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

matrisi alalınır ve A^{-1} matrisi ile yine kendisi ile çarpılıp elde edilen matrisin son satırı A matrisine üst satır olarak eklenirse, yukarı doğru sonsuz satır elde edilir. İşte bu yukarı ve aşağı doğru eklenen satırlarla birlikte elde edilen

$$A_k^\infty = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k-1}S_{(-2,1^{k-1})} & \dots & -S_{(-2,1)} & S_{(-2)} \\ (-1)^{k-1}S_{(-1,1^{k-1})} & \dots & -S_{(-1,1)} & S_{(-1)} \\ (-1)^{k-1}S_{(0,1^{k-1})} & \dots & -S_{(0,1)} & S_{(0)} \\ (-1)^{k-1}S_{(1,1^{k-1})} & \dots & -S_{(1,1)} & S_{(1)} \\ (-1)^{k-1}S_{(2,1^{k-1})} & \dots & -S_{(2,1)} & S_{(2)} \\ (-1)^{k-1}S_{(3,1^{k-1})} & \dots & -S_{(3,1)} & S_{(3)} \\ (-1)^{k-1}S_{(4,1^{k-1})} & \dots & -S_{(4,1)} & S_{(4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = ((-1)^{k-j}S_{(n,1^{k-j})})_{\infty \times k}$$

matrisi aranan matristir. $k = 3$ için A matrisinin n -inci kuvveti

$$A^n = \begin{pmatrix} S_{(n-2,1^2)} & -S_{(n-2,1)} & S_{(n-2)} \\ S_{(n-1,1^2)} & -S_{(n-1,1)} & S_{(n-1)} \\ S_{(n,1^2)} & -S_{(n,1)} & S_{(n)} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

biçimindedir. Burada $S_{(n-2)} = F_{3,n-2}(t)$, $S_{(n-1)} = F_{3,n-1}(t)$, $S_{(n)} = F_{3,n}(t)$ dir. Daha genel olarak A_k^∞ matrisinin en sağ sütunu pozitif yönde genelleştirilmiş Fibonacci polinomu $F_{k,n}(t)$ 'ye eşittir. A^n matrisinin izi genelleştirilmiş Lucas polinomuna eşittir yani $tr(A^n) = G_{k,n}(t)$ dir (MacHenry ve Wong, 2012). Ayrıca

$$S_{(n-r,1^r)} = (-1)^r \sum_{j=r+1}^n t_j S_{(n-j)}, \quad 0 \leq r \leq n \quad (2.18)$$

eşitliği sağlanır (Machenry ve Tudose, 2005).

Lemma 2.2.1. $k \geq 2$ ve $0 \leq r \leq k-1$ için $(-1)^r S_{(n,1^r)}$, A_k^∞ matrisinin $(k-r)$. sütunu olmak üzere, $n > 0$ için

$$(-1)^r S_{(n+1,1^r)} = t_1(-1)^r S_{(n,1^r)} + \dots + t_k(-1)^r S_{(n-k+1,1^r)} \quad (2.19)$$

dir. Burada başlangıç koşulu $1-k \leq n \leq 0$ için,

$$(-1)^r S_{(n,1^r)} = \begin{cases} 1, & n = -r, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat . (2.18) eşitliği, A_k^∞ matrisi ve bu matrisin sütunları içerisindeki rekürans ilişkisi kullanılarak aranan eşitlik elde edilir.

Örnek 2.2.2. A_4^∞ matrisini elde edelim. Bunun için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_4 & t_3 & t_2 & t_1 \end{bmatrix}$$

matrisini alalım ve sırasıyla A^{-1} , A^2 ve A^3 matrislerini hesaplayalım.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{t_3}{t_4} & -\frac{t_2}{t_4} & -\frac{t_1}{t_4} & \frac{1}{t_4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_4 & t_3 & t_2 & t_1 \\ t_1 t_4 & t_4 + t_1 t_3 & t_3 + t_1 t_2 & t_2 + t_1^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_4 & t_3 & t_2 & t_1 \\ t_1 t_4 & t_4 + t_1 t_3 & t_3 + t_1 t_2 & t_2 + t_1^2 \\ t_2 t_4 + t_1^2 t_4 & t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_1^2 t_3 & t_4 + t_1 t_3 + t_2^2 + t_1^2 t_2 & t_3 + 2t_1 t_2 + t_1^3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisler yukarda verilen kuralla birleştirilirse,

$$A_4^\infty = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{t_3}{t_4} & -\frac{t_2}{t_4} & -\frac{t_1}{t_4} & \frac{1}{t_4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_4 & t_3 & t_2 & t_1 \\ t_1 t_4 & t_4 + t_1 t_3 & t_3 + t_1 t_2 & t_2 + t_1^2 \\ t_2 t_4 + t_1^2 t_4 & t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_1^2 t_3 & t_4 + t_1 t_3 + t_2^2 + t_1^2 t_2 & t_3 + 2t_1 t_2 + t_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

2.3 D_k^∞ Matrisinin Elde Edilişi

A_k^∞ matrisi elde edilirken kullanılan core polinomu

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$$

nin katsayılar vektörü olan $(t_k, t_{k-1}, \dots, t_1)$ vektörü yerine bu polinomun x 'e göre türevi

$$P'(x) = kx^{k-1} - t_1(k-1)x^{k-2} - \dots - t_{k-1}$$

polinomunun katsayılar vektörü $D = (-t_{k-1}, \dots, -t_1(k-1), k)$ alınır. D matrisi, A ve A^{-1} matrislerinin kuvvetleri ile sırasıyla soldan çarpılırsa (A nın kuvvetleri ile çarpım sonucu elde edilen satırlar sırasıyla, D matrisinin altına, A^{-1} in kuvvetleri ile çarpım sonucu elde edilen satırlar sırasıyla, D matrisinin üstüne eklenirse) son sütunu $G_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Lucas polinomunu veren $(D_k^\infty)_{\infty \times k}$ matrisi elde edilir (MacHenry ve Wong, 2012).

Örnek 2.3.1. D_4^∞ matrisine örnek verelim.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_4 & t_3 & t_2 & t_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$D = \begin{pmatrix} -t_3 & -2t_2 & -3t_1 & 4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} DA^{-1} &= \begin{pmatrix} -2t_2 + \frac{t_3^2}{t_4} & -3t_1 + t_2 \frac{t_3}{t_4} & t_1 \frac{t_3}{t_4} + 4 & -\frac{t_3}{t_4} \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} -t_3 & -2t_2 & -3t_1 & 4 \end{pmatrix} \\ DA &= \begin{pmatrix} 4t_4 & 3t_3 & 2t_2 & t_1 \end{pmatrix} \\ DA^2 &= \begin{pmatrix} t_1 t_4 & 4t_4 + t_1 t_3 & 3t_3 + t_1 t_2 & 2t_2 + t_1^2 \end{pmatrix} \\ DA^3 &= \begin{pmatrix} 2t_2 t_4 + t_1^2 t_4 & t_1 t_4 + 2t_2 t_3 + t_1^2 t_3 & 4t_4 + t_1 t_3 + 2t_2^2 + t_1^2 t_2 & 3t_3 + 3t_1 t_2 + t_1^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vektörleri elde edilir. Bu vektörler kullanılarak $k = 4$ için D_k^∞ matrisi

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2t_2 + \frac{t_3^2}{t_4} & -3t_1 + t_2 \frac{t_3}{t_4} & t_1 \frac{t_3}{t_4} + 4 & -\frac{t_3}{t_4} \\ -t_3 & -2t_2 & -3t_1 & 4 \\ 4t_4 & 3t_3 & 2t_2 & t_1 \\ t_1 t_4 & 4t_4 + t_1 t_3 & 3t_3 + t_1 t_2 & 2t_2 + t_1^2 \\ 2t_2 t_4 + t_1^2 t_4 & t_1 t_4 + 2t_2 t_3 + t_1^2 t_3 & 4t_4 + t_1 t_3 + 2t_2^2 + t_1^2 t_2 & 3t_3 + 3t_1 t_2 + t_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Determinant ve Permanent

Determinant matematiğin en önemli konularından biridir. Birçok problem determinant kullanılarak kolayca çözülebilir. Determinant teorisi, 1696 yılında Leibnitz tarafından ortaya atıldı ve kullanılmaya başlandı. Daha sonra Bezout, Vandermonde, Crammer, Lagrange ve Laplace gibi matematikçiler tarafından daha da geliştirildi. 19. yüzyılda bu matematikçilere Cauchy, Jacobi ve Sylvester’de katıldı. Bu gün determinant fizikten matematiğe, maliyeden istatistiğe bir çok bilim dalında ortak olarak kullanılmaktadır (Bozkurt ve Türen, 2003).

$A = (a_{i,j})$ bir cisim üzerinde tanımlı $n \times n$ bir kare matris olsun. A matrisinin determinanı için Leibniz tarafından verilen formül;

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)})$$

şeklindedir. Burada S_n , n elemanlı bir kümenin simetrik grubunu göstermektedir.

Bir kare matrisin permanenti de determinantına benzer olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$A = (a_{i,j})$ bir cisim üzerinde tanımlı $n \times n$ bir kare matris olsun. A matrisinin permanenti

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır (Taşcı, 2011).

3.2 Hessenberg Matrix Yöntemi

Yineleme ilişkisine sahip dizi ve polinomların istenilen terimlerini yineleme ilişkisine gerek kalmadan hesaplayabilmek büyük öneme sahiptir. Bu amaç için değişik teknikler geliştirilmiş

ve kullanılmıştır. Bu yöntemlerden biri de Hessenberg matrisler kullanarak dizi veya polinomlar için matris temsilleri vermektir. Bu yöntemde determinantı veya permanenti aranan sayı dizisinin istenilen terimini verecek şekilde boyutu genişleyen bir Hessenberg matris dizisi tanımlanır. Bu dizide bulunan matrisin determinantının veya permanentinin aradığımız dizi veya polinomun istenilen terimine eşit olduğu gösterilir. Bu yöntemde Hessenberg matrisler kullanıldığı için bu çalışmada bu yöntem Hessenber matris yöntemi olarak isimlendirilecektir.

İlk olarak bu yöntem 1964 de Minc tarafından kullanılmıştır. Minc (1964) $n \times n$ $(0, 1)$ -matris $F(n, k)$ yı, " $k \leq n + 1$ ve $i - 1 \leq j \leq i + k - 1$ şartını sağlayan (i, j) pozisyonundaki elemanlar 1 diğer elemanlar ise 0 a eşittir" şeklinde bir Hessenberg matris tanımlamış ve

$$\text{per}(F(n, k)) = f_{k, n+k-1}$$

olduğunu göstermiştir.

Örnek 3.2.1. Minc tarafından tanımlanan Hessenberg matrislere $k = 3$ için örnek verelim. Bu yöntem kullanılarak

$$\begin{aligned} \text{per}(F(3, 3)) &= \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 4 = f_{3,5}, \\ \text{per}(F(4, 3)) &= \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 7 = f_{3,6}, \\ \text{per}(F(5, 3)) &= \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 13 = f_{3,7} \dots \end{aligned}$$

şeklinde genelleştirilmiş 3-basamak Fibonacci sayıları elde edilir.

Minc'ten sonra Strank (1998) de yayınlanan kitabında bazı Hessenberg matrisler vermiş ve bunların determinantlarının Fibonacci sayılarına eşit olduğunu göstermiştir. G.-Y Lee ve S.-G. Lee (1995) de ve G.-Y Lee (2000) de yazarlar (0,1)-matrisler tanımlamış ve bu matrislerin permanentlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarına eşit olduğunu göstermişlerdir. Öcal ve arkadaşları (2005) genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci ve Lucas sayılarını hesaplamak için çeşitli Hessenberg matrislerinin determinantını ve permanentini kullanmışlardır. Kılıç ve Stakhov (2009) Fibonacci ve Lucas p -sayıları için permanent kullanarak bir çalışma yapmıştır. Ayrıca Kılıç ve Taşçı (2010) Hessenberg matrislerin determinantı ve permanenti üzerine çalışmışlardır. Yılmaz ve Bozkurt (2011) Pell ve Perrin dizilerinin terimlerini hesaplamak için Hessenberg matrisler tanımlamışlardır. Li (2012) Fibonacci-Hessenberg matrisler tanımlamış ve bu matrisler yardımıyla Pell ve Perrin sayıları için bazı sonuçlar elde etmiştir. Mesela Strang (1998)

$$E_n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklinde Hessenberg matris tanımlamış ve

$$\det E_n = F_{2n+2} \quad (3.2)$$

olduğunu göstermiştir. E_n matrisini örneklendirelim.

Örnek 3.2.2.

$$\det E_2 = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 8 = F_6$$

$$\det E_3 = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 21 = F_8$$

$$\det E_4 = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 55 = F_{10}$$

⋮

şeklinde çift indisli Fibonacci sayıları elde edilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının, A_k^∞ ve D_k^∞ matrislerinin lineer reküransa sahip birçok polinom ve dizinin genel hali olduğu gösterilecektir. Lemmaların ispatı genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının ve A_k^∞ matrisinin tanımları ve onlardan elde edilen sayı dizilerinin tanımları kullanılarak doğrudan elde edildiğinden ispatlara yer verilmemiştir.

4.1 Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları ve A_k^∞ matrisi

Lemma 4.1.1. *Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarında $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k)$ için aşağıda belirtilen şekillerde özel seçimler yaparsak (2.5), (2.7), genelleştirilmiş Fibonacci ve (2.3) elde edilir.*

- i) *Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarında $(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k) = (1, \dots, 1, 1)$ olarak alınırsa Miles tarafından tanımlanan k -basamak Fibonacci sayıları (2.5) elde edilir.*
- ii) *Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarında $(t_1, t_2, \dots, t_k) = (2, 1, \dots, 1)$ olarak alınırsa Kılıç ve Taşçı tarafından tanımlanan k -basamak Pell sayılarının k . dizisi (2.7) elde edilir.*
- iii) *Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarında $(t_1, t_2, t_3) = (p, q, r)$ olarak alındığında iki indis kayması ile genelleştirilmiş Tribonacci sayıları elde edilir.*
- iv) *Genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarında $k = p+1$ ve $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k) = (x, 0, \dots, 0, y)$ olarak alınırsa Tuğlu ve ark. tarafından tanımlanan genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomları (2.3) elde edilir.*

Lemma 4.1.2. *A_k^∞ matrisi içinde $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k)$ için aşağıda belirtilen şekillerde özel seçimler yaparsak, genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci (2.6), Pell (2.7), Van der Laan (2.10) sayılarının k dizisi elde edilir.*

- i) $c_i = t_i$ ($1 \leq i \leq k$) ve $0 \leq r \leq k-1$ için $(-1)^r S_{(n,1^r)} = f_{k,n}^{r+1}$,
- ii) $t_1 = 2, t_i = 1$ ($2 \leq i \leq k$) ve $0 \leq r \leq k-1$ için, $(-1)^r S_{(n,1^r)} = p_{k,n}^{r+1}$,
- iii) $t_1 = 0, t_i = 1$ ($2 \leq i \leq k$) ve $0 \leq r \leq k-1$ için $(-1)^r S_{(n,1^r)} = v_{k,n}^{k-r}$.

Lemma 4.1.3. (Tuglu ve ark., 2011) x, y, p nin farklı değerleri için $F_{p,n}(x, y)$ nin bazı dizi ve polinomların genel hali olduğu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	y	p	$F_{p,n}(x, y)$
x	y	1	iki değişkenli Fibonacci polinomları $F_n(x, y)$
x	1	p	Fibonacci p -polinomları $F_{p,n}(x)$
x	1	1	Fibonacci polinomları $f_n(x)$
1	1	p	Fibonacci p -sayıları $F_p(n)$
1	1	1	Fibonacci sayıları F_n
$2x$	y	p	iki değişkenli Pell p -polinomları $F_{p,n}(2x, y)$
$2x$	y	1	iki değişkenli Pell polinomları $F_n(2x, y)$
$2x$	1	p	Pell p -polinomları $P_{p,n}(x)$
$2x$	1	1	Pell polinomları $P_n(x)$
2	1	1	Pell sayıları P_n
$2x$	-1	1	ikinci tip Chebysev polinomları $U_{n-1}(x)$
x	$2y$	p	iki değişkenli Jacobsthal p -polinomları $F_{p,n}(x, 2y)$
x	$2y$	1	iki değişkenli Jacobsthal Polinomları $F_n(x, 2y)$
1	$2y$	1	Jacobsthal Polinomları $J_n(y)$
1	2	1	Jacobsthal Sayıları J_n

Çizelge 3.1 $F_{p,n}(x, y)$ nin bazı dizi ve polinomların genel hali olduğunun gösterimi

Genelleştirilmiş Fibonacci polinomları, genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomlarını kapsadığından (Lemma 4.1.1 *iv*) genelleştirilmiş Fibonacci polinomları Lemma 4.1.3 de verilen 15 çeşit dizi ve polinomun genel halidir.

4.2 Genelleştirilmiş Lucas Polinomları ve D_k^∞ matrisi

Lemma 4.2.1. Genelleştirilmiş Lucas polinomları ve D_k^∞ matrisinde $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k)$ için aşağıda belirtilen şekillerde özel seçimler yaparsak, (2.8), (2.9), (2.11) ve (2.4) dizileri

elde edilir.

i) Genelleştirilmiş Lucas polinomlarında $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k) = (1, 1, \dots, 1, 1)$ olarak alınrsa k -basamak Lucas sayıları (2.8) elde edilir.

ii) Genelleştirilmiş k -basamak Lucas sayılarının k dizisi (2.9), D_k^∞ matrisinde $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k) = (1, 1, \dots, 1, 1)$ olarak alınıp gerekli indis düzenlemeleri yapılarak elde edilmiştir (Şahin, 2010). Bunun için D_k^∞ matrisinde $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k) = (1, 1, \dots, 1, 1)$ alınrsa matrisin i . sütunu genelleştirilmiş k -basamak Lucas sayılarının k dizisinin i . dizisine eşit olur.

iii) Genelleştirilmiş Lucas polinomlarında $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k) = (1, 1, \dots, 1, 0)$ olarak alınrsa k -basamak Perrin sayıları (2.11) elde edilir. Burada $k = 3$ alınrsa klasik Perrin sayıları elde edilir.

iv) Genelleştirilmiş Lucas polinomlarında $(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k) = (x, 0, \dots, 0, y)$ ve $k = p+1$ olarak alınrsa genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomları (2.4) elde edilir.

Lemma 4.2.2. (Tuglu ve ark., 2011) x, y, p nin farklı değerleri için genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomlarının bazı dizi ve polinomların genel hali olduğu aşağıdaki tablodan görülür.

x	y	p	$L_{p,n}(x, y)$
x	y	1	iki değişkenli Lucas polinomları $L_n(x, y)$
x	1	p	Lucas p -polinomları $L_{p,n}(x)$
x	1	1	Lucas polinomları $l_n(x)$
1	1	p	Lucas p -sayıları $L_p(n)$
1	1	1	Lucas sayıları L_n
$2x$	y	p	iki değişkenli Pell-Lucas p -polinomları $L_{p,n}(2x, y)$
$2x$	y	1	iki değişkenli Pell-Lucas polinomları $L_n(2x, y)$
$2x$	1	p	Pell-Lucas p -polinomları $Q_{p,n}(x)$
$2x$	1	1	Pell-Lucas polinomları $Q_n(x)$
2	1	1	Pell-Lucas sayıları Q_n
$2x$	-1	1	İkinci tip Chebysev polinomları $T_n(x)$
x	$2y$	p	iki değişkenli Jacobsthal-Lucas p -polinomları $L_{p,n}(x, 2y)$
x	$2y$	1	İki değişkenli Jacobsthal-Lucas polinomları $L_n(x, 2y)$
1	$2y$	1	Jacobsthal-Lucas polinomları $j_n(y)$
1	2	1	Jacobsthal-Lucas sayıları j_n

Çizelge 3.2 $L_{p,n}(x, y)$ nin bazı dizi ve polinomların genel hali olduğunun gösterimi

Genelleştirilmiş Lucas polinomları, genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomlarını kapsadığından (Lemma 4.2.1 *iv*) genelleştirilmiş Lucas polinomları Lemma 4.2.2 de verilen 15 çeşit dizi ve polinomun genel halidir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS p -POLİNOMLARININ MATRİS TEMSİLLERİ

Bu bölümde ilk olarak tez boyunca ispatlarda kullanacağımız ve Hessenberg matrislerin determinantlarının ve permanentlerinin hesaplanmasında büyük kolaylık sağlayan iki önemli Lemma vereceğiz.

Lemma 5.1. (Cahill ve ark., 2002) A_n , $n \geq 1$ için $n \times n$ alt Hessenberg matris ve $\det(A_0) = 1$ olsun. $\det(A_1) = a_{11}$ ve $n \geq 2$ için

$$\det(A_n) = a_{n,n} \det(A_{n-1}) + \sum_{r=1}^{n-1} \left[(-1)^{n-r} a_{n,r} \left(\prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1} \right) \det(A_{r-1}) \right]$$

dır.

Lemma 5.2. (Öcal ve ark., 2005) A_n , $n \geq 1$ için $n \times n$ alt Hessenberg matris ve $\text{per}(A_0) = 1$ olsun. $\text{per}(A_1) = a_{11}$ ve $n \geq 2$ için

$$\text{per}(A_n) = a_{n,n} \text{per}(A_{n-1}) + \sum_{r=1}^{n-1} \left[a_{n,r} \left(\prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1} \right) \text{per}(A_{r-1}) \right]$$

dır.

Literatürde Hessenberg matrisler kullanılarak yapılan matris temsillerinde bazı çalışmalarda matrislerin determinanı, bazı çalışmalarda ise permanenti kullanılmıştır. Eğer Hessenberg matrisin determinanı ve permanenti arasında bir ilişki bulunursa bu alanda yapılan çalışmalar birbirine aktarılabilir. Bu ilişki Gibson (1969) elde edilmiştir. Burada alt Hessenberg matrisler için bu ilişkinin yeni bir ispatı verilecektir.

Teorem 5.3. ${}_+A_n$ Hessenberg matrisi (2.17) de tanımlanan matris ve ${}_+A_n = (b_{ij})$ aşağıdaki şekilde tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun.

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & j - i > 1, \\ -a_{ij}, & j - i = 1, \\ a_{ij}, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$-A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & -a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

dır. Bu matrisler için

$$\det(-A_n) = \text{per}(+A_n) \text{ ve } \det(+A_n) = \text{per}(-A_n) \quad (5.1)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat . (5.1) eşitliğini ispat etmek için m üzerinde tümevarım uygulayalım. Hipotezden $m = 1$ için eşitlik sağlanır.

Farz edelim ki m den küçük ve eşit tüm pozitif tam sayılar için eşitlik sağlansın. Örneğin $\det(-A_m) = \text{per}(+A_m)$ olsun. Lemma (5.1) ve (5.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \det(-A_{m+1}) &= a_{m+1,m+1} \det(-A_m) \\ &+ \sum_{r=1}^m [(-1)^{m+1-r} a_{m+1,r} \prod_{j=r}^m b_{j,j+1} \det(-A_{r-1})] \\ &= a_{m+1,m+1} \text{per}(+A_m) \\ &+ \sum_{r=1}^m [(-1)^{m+1-r} a_{m+1,r} \prod_{j=r}^m (-a_{j,j+1}) \text{per}(+A_{r-1})] \\ &= a_{m+1,m+1} \text{per}(+A_m) \\ &+ \sum_{r=1}^m [(-1)^{m+1-r} a_{m+1,r} (-1)^{m+1-r} \prod_{j=r}^m a_{j,j+1} \text{per}(+A_{r-1})] \\ &= a_{m+1,m+1} \text{per}(+A_m) + \sum_{r=1}^m [a_{m+1,r} \prod_{j=r}^{m+1} a_{j,j+1} \text{per}(+A_{r-1})] \\ &= \text{per}(+A_{m+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\det(-A_n) = \text{per}(+A_n)$ eşitliği tüm pozitif tam sayılar için doğru olur. Benzer şekilde $\det(+A_n) = \text{per}(-A_n)$ eşitliği de ispatlanır.

Şimdi Hessenberg matris metodu kullanarak genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci ve Lucas p -polinomları için matris temsilleri verilecektir. Burada her bir polinom için 4 er farklı Hessenberg matris tanımlanacak ve bu matrislerden 2 şer tanesinin determinantının, 2 şer tanesinde permanentinin bu polinom dizilerinin istenilen terimlerine eşit olduğu gösterilecektir.

5.1 Genelleştirilmiş Fibonacci p -Polinomlarının Hesaplanması

Teorem 5.1.1. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $F_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomu ve $+W_{p,n} = (+w_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun. $i = \sqrt{-1}$ için

$$+w_{ij} = \begin{cases} i & \text{eğer } i = j - 1, \\ x & \text{eğer } i = j, \\ i^p y & \text{eğer } p = i - j, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$+W_{p,n} = \begin{bmatrix} x & i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & i & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & x & & 0 \\ i^p y & 0 & \vdots & \cdots & \\ 0 & i^p y & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & x & i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

dir. Bu durumda

$$\det(+W_{p,n}) = F_{p,n+1}(x, y) \quad (5.3)$$

dir.

İspat . (5.3) eşitliğini n üzerinde tümevarım kullanarak ispat edelim. Hipotezden $n = 1$ için eşitlik geçerlidir. Şimdi n ye eşit ve n den küçük tüm değerler için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Lemma 5.1 i kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\det(+W_{p,m+1}) &= q_{m+1,m+1} \det(+W_{p,m}) \\
&\quad + \sum_{r=1}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \left(\prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \right) \det(+W_{p,r-1}) \right] \\
&= x \det(+W_{p,m}) + \sum_{r=1}^{m-p} \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \left(\prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \right) \det(+W_{p,r-1}) \right] \\
&\quad + \sum_{r=m-p+1}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \left(\prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \right) \det(+W_{p,r-1}) \right] \\
&= x \det(+W_{p,m}) + \left[(-1)^p (i)^p y \prod_{j=m-p+1}^m i \det(+W_{p,m-p}) \right] \\
&= x \det(+W_{p,m}) + [(-1)^p y (i)^p \cdot (i)^p \det(+W_{p,m-p})] \\
&= x \det(+W_{p,m}) + y \det(+W_{p,m-p})
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Tümevarım hipotezinden ve $F_{p,n}(x, y)$ nin tanımından

$$\det(+W_{p,m+1}) = x F_{p,m+1}(x, y) + y F_{p,m-p+1}(x, y) = F_{p,m+2}(x, y)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, (5.3) tüm n pozitif tamsayıları için sağlanır.

Örnek 5.1.2. Teorem 5.1.1 yi kullanarak $p = 4$ için $F_{p,n}(x, y)$ nin 6. terimini elde edelim;

$$F_{4,6}(x, y) = \det \begin{bmatrix} x & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & i \\ i^4 y & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = y + x^5.$$

Teorem 5.1.3. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $F_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomu ve ${}_nM_{p,n} = (m_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun.

$${}_n m_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } j = i + 1, \\ x & \text{eğer } i = j, \\ y & \text{eğer } i - j = p, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_n M_{p,n} = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$\det({}_n M_{p,n}) = F_{p,n+1}(x, y)$$

dır.

İspat . İspat Lemma 5.1 kullanılarak Teorem 5.1.1 in ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 5.1.4. Teorem 5.1.3 yi kullanarak $p = 3$ için $F_{p,n}(x, y)$ nin 6. terimini elde edelim;

$$F_{3,6}(x, y) = \det \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ y & 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & y & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = 2xy + x^5.$$

Teorem 5.1.5. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $F_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomu ve ${}_n W_{p,n} = (w_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun.

$i = \sqrt{-1}$ için

$$-w_{rs} = \begin{cases} -i & \text{eğer } s - r = 1, \\ x & \text{eğer } r = s, \\ i^p y & \text{eğer } p = r - s \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}(-W_{p,n}) = F_{p,n+1}(x, y)$$

dır.

İspat . Teorem 5.1.1 den $\det(+W_{p,n}) = F_{p,n+1}(x, y)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3 den $\text{per}(-W_{p,n}) = \det(+W_{p,n})$ eşitliği elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilerek istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 5.1.6. Teorem 5.1.5 yi kullanarak $p = 3$ için $F_{p,n}(x, y)$ nin 6. terimini elde edelim;

$$F_{3,6}(x, y) = \text{per} \begin{bmatrix} x & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -i & 0 \\ -iy & 0 & 0 & x & -i \\ 0 & -iy & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = 2xy + x^5$$

dir.

Teorem 5.1.7. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $F_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomu ve $+M_{p,n} = (+m_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun.

$$+m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j = i + 1, \\ x & \text{eğer } i = j, \\ y & \text{eğer } i - j = p, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}(+M_{p,n}) = F_{p,n+1}(x, y)$$

dır.

İspat . Teorem 5.1.3 den $\det(-M_{p,n}) = F_{p,n+1}(x, y)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3 den $\text{per}(+M_{p,n}) = \det(-M_{p,n})$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

5.2 Genelleştirilmiş Lucas p -Polinomlarının Hesaplanması

Teorem 5.2.1. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $L_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomu ve $+V_{p,n} = (+v_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun. $i = \sqrt{-1}$ için

$$+v_{rs} = \begin{cases} i & \text{eğer } r = s - 1, \\ x & \text{eğer } r = s, \\ i^p y & \text{eğer } p = r - s \text{ ve } s \neq 1, \\ (p+1)i^p y & \text{eğer } p = r - s \text{ ve } s = 1, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$+V_{p,n} = \begin{bmatrix} x & i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & i & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & x & & 0 \\ (p+1)i^p y & 0 & \vdots & \cdots & \\ 0 & i^p y & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & x & i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

dır. Bu durumda

$$\det(+V_{p,n}) = L_{p,n}(x, y) \quad (5.5)$$

dır.

İspat . (5.5) eşitliğini n üzerinde tümevarım kullanarak ispat edelim. Hipotezden $n = 1$ için eşitlik geçerlidir. Şimdi n ye eşit ve n den küçük tüm değerler için eşitliğin sağlandığını

varsayalım. Lemma 5.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\det({}_+V_{p,n+1}) &= q_{n+1,n+1} \det({}_+V_{p,n}) + \sum_{r=1}^n \left[(-1)^{n+1-r} q_{n+1,r} \left(\prod_{j=r}^n q_{j,j+1} \right) \det({}_+V_{p,r-1}) \right] \\
&= x \det({}_+V_{p,n}) + \sum_{r=1}^{n-p} \left[(-1)^{n+1-r} q_{n+1,r} \left(\prod_{j=r}^n q_{j,j+1} \right) \det({}_+V_{p,r-1}) \right] \\
&\quad + \sum_{r=n-p+1}^n \left[(-1)^{n+1-r} q_{n+1,r} \left(\prod_{j=r}^n q_{j,j+1} \right) \det({}_+V_{p,r-1}) \right] \\
&= x \det({}_+V_{p,n}) + \left[(-1)^p (i)^p y \prod_{j=n-p+1}^n i \det({}_+V_{p,n-p}) \right] \\
&= x \det({}_+V_{p,n}) + [(-1)^p y (i)^p \cdot (i)^p \det({}_+V_{p,n-p})] \\
&= x \det({}_+V_{p,n}) + y \det({}_+V_{p,n-p})
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Tümevarım hipotezi ve $L_{p,n}(x, y)$ 'nin tanımından

$$\det({}_+V_{p,n+1}) = xL_{p,n}(x, y) + yL_{p,n-p}(x, y) = L_{p,n+1}(x, y)$$

elde edilir. Böylece (5.5) eşitliği tüm pozitif tam sayılar için sağlanmış olur.

Teorem 5.2.2. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $L_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomu ve ${}_+N_{p,n} = ({}_+n_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matrisi olsun.

$${}_+n_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } j = i + 1, \\ x & \text{eğer } i = j, \\ y & \text{eğer } p = i - j \text{ ve } j \neq 1, \\ (p+1)y & \text{eğer } p = i - j \text{ ve } j = 1, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$-N_{p,n} = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (p+1)y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

dır. Bu durumda

$$\det(-N_{p,n}) = L_{p,n}(x, y)$$

dır.

İspat . İspat Lemma 5.1 kullanılarak Teorem 5.2.1 in ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 5.2.3. Teorem 5.2.1'i kullanarak $p = 4$ için $L_{p,n}(x, y)$ nin 5. terimini elde edelim;

$$L_{4,5}(x, y) = \det \begin{bmatrix} x & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & i \\ 5i^4y & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = 5y + x^5$$

dir.

Teorem 5.2.4. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $L_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomu ve $-V_{p,n} = (-v_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matrisi olsun. $i = \sqrt{-1}$ için

$$-v_{rs} = \begin{cases} -i & \text{eğer } s - r = 1, \\ x & \text{eğer } r = s, \\ i^p y & \text{eğer } p = r - s \text{ ve } s \neq 1, \\ (p+1)i^p y & \text{eğer } p = r - s \text{ ve } s = 1, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}(-V_{p,n}) = L_{p,n}(x, y)$$

dır.

İspat . Teorem 5.2.1 den $\det(+V_{p,n}) = L_{p,n}(x, y)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3 den $\text{per}(-V_{p,n}) = \det(+V_{p,n})$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 5.2.5. Teorem 5.2.4'i kullanarak $p = 4$ için $L_{p,n}(x, y)$ nin 6. terimini elde edelim;

$$L_{4,6}(x, y) = \text{per} \begin{bmatrix} x & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -i & 0 \\ 5y & 0 & 0 & 0 & x & -i \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = 6xy + x^6$$

elde edilir.

Teorem 5.2.6. $p, n \geq 1$ birer tamsayı, $L_{p,n}(x, y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomu ve $+N_{p,n} = (+n_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matrisi olsun.

$$+n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j = i + 1, \\ x & \text{eğer } i = j, \\ y & \text{eğer } i - j = p \text{ ve } j \neq 1, \\ (p + 1)y & \text{eğer } i - j = p \text{ ve } j = 1, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}(+N_{p,n}) = L_{p,n}(x, y)$$

dır.

İspat . Teorem 5.2.2 den $\det(-N_{p,n}) = L_{p,n}(x, y)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3 den $\text{per}(+N_{p,n}) = \det(-N_{p,n})$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ MATRİS TEMSİLLERİ

Bu bölümde Hessenberg matris metodu kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları için matris temsilleri verilecektir. Burada her bir polinom için 4 er farklı Hessenberg matris tanımlanacak ve bu matrislerden 2 şer tanesinin determinantının, 2 şer tanesinde permanentinin bu polinom dizilerinin istenilen terimlerine eşit olduğu gösterilecektir.

6.1 Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomlarının Hesaplanması

Teorem 6.1.1. $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $F_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomu (2.12) ve ${}_+Q_{k,n} = ({}_+q_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için

$${}_+q_{rs} = \begin{cases} i^{|r-s|} \cdot \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{r-s}} & \text{eğer } -1 \leq r-s < k, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_+Q_{k,n} = \begin{bmatrix} t_1 & it_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & t_1 & it_2 & 0 & \cdots & 0 \\ i^2 \frac{t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ i^{k-1} \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & i^{k-2} \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & i^{k-3} \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & i^{k-4} \frac{t_{k-3}}{t_2^{k-4}} & \cdots & 0 \\ 0 & i^{k-1} \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & i^{k-2} \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & i^{k-3} \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

dır. Bu durumda

$$\det({}_+Q_{k,n}) = F_{k,n}(t) \quad (6.2)$$

dir.

İspat . $\det(+Q_{k,n}) = F_{k,n}(t)$ eşitliğini m üzerinde tümevarım kullanarak ispat edelim. Hipotezden $m = 1$ için eşitlik geçerlidir.

Şimdi m ye eşit ve m den küçük tüm değerler için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Lemma 5.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \det(+Q_{k,m+1}) \\
&= q_{m+1,m+1} \det(+Q_{k,m}) \\
&\quad + \sum_{r=1}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det(+Q_{k,r-1}) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,m}) + \sum_{r=1}^{m-k+1} \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det(+Q_{k,r-1}) \right] \\
&\quad + \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det(+Q_{k,r-1}) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,m}) + \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det(+Q_{k,r-1}) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,m}) + \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} \cdot i^{m+1-r} \frac{t_{m-r+2}}{t_2^{m-r+1}} \prod_{j=r}^m i t_2 \det(+Q_{k,r-1}) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,m}) \\
&\quad + \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} \cdot i^{m+1-r} \frac{t_{m-r+2}}{t_2^{m-r+1}} \cdot i^{m+1-r} \cdot t_2^{m-r+1} \det(+Q_{k,r-1}) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,m}) + \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} \cdot i^{m+1-r} t_{m-r+2} \cdot i^{m+1-r} \cdot \det(+Q_{k,r-1}) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,m}) + \sum_{r=m-k+2}^m t_{m-r+2} \det(+Q_{k,r-1}) \\
&= t_1 \det(+Q_{k,m}) + t_2 \det(+Q_{k,m-1}) + \cdots + t_k \det(+Q_{k,m-(k-1)})
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Tümevarım hipotezinden ve genelleştirilmiş Fibonacci polinomu tanımından

$$\det(+Q_{k,m+1}) = t_1 F_{k,m}(t) + t_2 F_{k,m-1}(t) + \cdots + t_k F_{k,m-(k-1)}(t) = F_{k,m+1}(t)$$

elde edilir. Böylece eşitliğin tüm pozitif tam sayılar için sağlandığı gösterilmiş olur.

Örnek 6.1.2. Teorem 6.1.1 kullanılarak $k = 6$ için 4. genelleştirilmiş Fibonacci polinomunu elde edelim;

$$F_{6,5}(t) = \det \begin{bmatrix} t_1 & it_2 & 0 & 0 \\ i & t_1 & it_2 & 0 \\ \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 \\ \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 \end{bmatrix} = t_1^4 + 3t_1^2t_2 + t_2^2 + 2t_1t_3 + t_4.$$

Sonuç 6.1.3. (Öcal ve ark., 2005) $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $f_{k,n}$ genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları ve $H_{n,k} = (h_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun.

$$h_{rs} = \begin{cases} i^{|r-s|} & \text{eğer } -1 \leq r-s < k, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (6.3)$$

Bu durumda

$$\det(H_{n,k}) = f_{k,k+n-1} \quad (6.4)$$

dır.

İspat . Teorem 6.1.1 de $t_i = 1$ olarak alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 6.1.4. $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $F_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomu (2.12) ve $-B_{k,n} = (-b_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ için

$$-b_{ij} = \begin{cases} -t_2 & \text{eğer } j = i+1, \\ \frac{t_{i-j+1}}{t_2^{(i-j)}} & \text{eğer } 0 \leq i-j < k, \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$-B_{k,n} = \begin{bmatrix} t_1 & -t_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t_1 & -t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t_3}{t_2^2} & 1 & t_1 & -t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \frac{t_{k-3}}{t_2^{k-4}} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

dır. Bu durumda

$$\det(-B_{k,n}) = F_{k,n}(t)$$

dir.

İspat . $\det(-B_{k,n}) = F_{k,n}(t)$ eşitliğini m üzerinde tümevarım kullanarak ispat edelim. Hipotezden $m = 1$ için eşitlik geçerlidir.

Şimdi m ye eşit ve m den küçük tüm değerler için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Lemma 5.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \det(-B_{k,m+1}) \\ &= b_{m+1,m+1} \det(-B_{k,m}) \\ & \quad + \sum_{r=1}^m ((-1)^{m+1-r} b_{m+1,r} \prod_{j=r}^m b_{j,j+1} \det(-B_{k,r-1})) \\ &= t_1 \det(-B_{k,m}) + \sum_{r=1}^{m-k+1} [(-1)^{m+1-r} b_{m+1,r} \prod_{j=r}^m b_{j,j+1} \det(-B_{k,r-1})] \\ & \quad + \sum_{r=m-k+2}^m [(-1)^{m+1-r} b_{m+1,r} \prod_{j=r}^m b_{j,j+1} \det(-B_{k,r-1})] \\ &= t_1 \det(-B_{k,m}) + \sum_{r=m-k+2}^m [(-1)^{m+1-r} \cdot \frac{t_{m-r+2}}{t_2^{(m-r+1)}} \prod_{j=r}^m (-t_2) \det(-B_{k,r-1})] \\ &= t_1 \det(-B_{k,m}) \\ & \quad + \sum_{r=m-k+2}^m [(-1)^{m+1-r} \cdot \frac{t_{m-r+2}}{t_2^{(m-r+1)}} \cdot (-1)^{m+1-r} t_2^{(m-r+1)} \det(-B_{k,r-1})] \\ &= t_1 \det(-B_{k,m}) + \sum_{r=m-k+2}^m [t_{m-r+2} \cdot \det(-B_{k,r-1})] \\ &= t_1 \det(-B_{k,m}) + t_2 \det(-B_{k,m-1}) + \cdots + t_k \det(-B_{k,m-(k-1)}) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Tümevarım hipotezinden ve genelleştirilmiş Fibonacci polinomu tanımından

$$\det(-B_{k,m+1}) = t_1 F_{k,m} + t_2 F_{k,m-1} + \cdots + t_k F_{k,m-(k-1)} = F_{k,m+1}$$

elde edilir. Böylece eşitlik tüm pozitif tam sayılar için geçerlidir.

Örnek 6.1.5. Teorem 6.1.4 kullanılarak $k = 4$ için 5. genelleştirilmiş Fibonacci polinomunu elde edelim;

$$F_{4,5}(t) = \det \begin{bmatrix} t_1 & -t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & -t_2 & 0 & 0 \\ \frac{t_3}{t_2} & 1 & t_1 & -t_2 & 0 \\ \frac{t_4}{t_2} & \frac{t_3}{t_2} & 1 & t_1 & -t_2 \\ 0 & \frac{t_4}{t_2} & \frac{t_3}{t_2} & 1 & t_1 \end{bmatrix}$$

$$= t_1^5 + 4t_1^3t_2 + 3t_1t_2^2 + 3t_1^2t_3 + 2t_2t_3 + 2t_1t_4.$$

Sonuç 6.1.6. (Öcal ve ark., 2005) $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $f_{k,n}$ genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları ve $F_{n,k} = (f_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun.

$$f_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } j = i + 1, \\ 1 & \text{eğer } 0 \leq i - j < k, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (6.6)$$

olmak üzere

$$\det(F_{n,k}) = f_{k,k+n-1} \quad (6.7)$$

dir.

İspat . Teorem 6.1.4 de $t_i = 1$ alınırsa istenilen elde edilir.

Teorem 6.1.7. $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $F_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomu (2.12) ve $-Q_{k,n} = (-q_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için

$$-q_{rs} = \begin{cases} i^{r-s} \cdot \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{(r-s)}} & \text{eğer } -1 \leq r - s < k, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}(-Q_{k,n}) = F_{k,n}(t)$$

dir.

İspat . Teorem 6.1.1 den $\det(+Q_{k,n}) = F_{k,n}(t)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3 den $\text{per}(-Q_{k,n}) = \det(+Q_{k,n})$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 6.1.8. Teorem 6.1.7 kullanılarak $k = 5$ için 6. genelleştirilmiş Fibonacci polinomunu elde edelim.

$$\begin{aligned}
 F_{5,6}(t) &= \text{per} \begin{bmatrix} t_1 & -it_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & t_1 & -it_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & -it_2 & 0 & 0 \\ \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & -it_2 & 0 \\ \frac{t_5}{t_2^4} & \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & -it_2 \\ 0 & \frac{t_5}{t_2^4} & \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 \end{bmatrix} \\
 &= t_1^6 + 5t_1^4t_2 + 6t_1^2t_2^2 + t_2^3 + 4t_1^3t_3 + t_3^2 + 6t_1t_2t_3 + 3t_1^2t_4 + 2t_2t_4 + 2t_1t_5.
 \end{aligned}$$

Sonuç 6.1.9. (Öcal ve ark., 2005) $n \geq 1$, $k \geq 2$ birer tamsayı, $f_{k,n}$ genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları ve $H_{k,n} = (h_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun.

$$h_{rs} = \begin{cases} i^{r-s} & \text{eğer } -1 \leq r-s < k, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}(H_{k,n}) = f_{k,k+n-1}$$

dir.

İspat . Teorem 6.1.7 de $t_i = 1$ alınırsa istenilen elde edilir.

Teorem 6.1.10. $n \geq 1$, $k \geq 2$ birer tamsayı, $F_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomu (2.12) ve ${}_+B_{k,n} = ({}_+b_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ için

$${}_+b_{ij} = \begin{cases} \frac{t_{i-j+1}}{t_2^{(i-j)}} & \text{eğer } -1 \leq i-j < k, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}({}_+B_{k,n}) = F_{k,n}(t)$$

dir.

İspat . Teorem 6.1.4 den $\det(-B_{k,n}) = F_{k,n}(t)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3 den $\text{per}({}_+B_{k,n}) = \det(-B_{k,n})$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1.11. (Minc, 1964) $n \geq 1$, $k \geq 2$ birer tamsayı, $f_{k,n}$ genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları ve $D_{k,n} = (d_{ij})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun.

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } -1 \leq i - j < k, \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\text{per}(D_{k,n}) = f_{k,k+n-1}$$

dır.

İspat . Teorem 6.1.10 de $t_i = 1$ alınırsa istenilen elde edilir.

6.2 Genelleştirilmiş Lucas Polinomlarının Hesaplanması

Teorem 6.2.1. $n \geq 1$, $k \geq 2$ birer tamsayı, $G_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Lucas polinomu (2.13) ve ${}_+C_{k,n} = ({}_+c_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için

$${}_+c_{rs} = \begin{cases} i^{|r-s|} \cdot \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{r-s}}, & \text{eğer } s \neq 1 \text{ ve } -1 \leq r-s < k, \\ i^{|r-s|} \cdot \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{r-s}} \cdot (r-s+1), & \text{eğer } s = 1 \text{ ve } -1 \leq r-s < k, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_+C_{k,n} = \begin{bmatrix} t_1 & it_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2i & t_1 & it_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3i^2 \frac{t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ki^{k-1} \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & i^{k-2} \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & i^{k-3} \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & i^{k-4} \frac{t_{k-3}}{t_2^{k-4}} & \cdots & 0 \\ 0 & i^{k-1} \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & i^{k-2} \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & i^{k-3} \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & it_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i & t_1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\det({}_+C_{k,n}) = G_{k,n}(t) \quad (6.8)$$

dir.

İspat . (6.8) eşitliğini m üzerinde tümevarım kullanarak ispat edelim. Hipotezden $m = 1$ için eşitlik geçerlidir.

Şimdi m ye eşit ve m den küçük tüm değerler için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Lemma 5.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \det({}_+C_{k,m+1}) &= q_{m+1,m+1} \det({}_+C_{k,m}) \\ &+ \sum_{r=1}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det({}_+C_{k,r-1}) \right] \\ &= t_1 \det({}_+C_{k,m}) + \sum_{r=1}^{m-k+1} \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det({}_+C_{k,r-1}) \right] \\ &+ \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det({}_+C_{k,r-1}) \right] \end{aligned}$$

dır. $m > k$ için

$$\begin{aligned} \det({}_+C_{k,m+1}) &= t_1 \det({}_+C_{k,m}) \\ &+ \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} q_{m+1,r} \prod_{j=r}^m q_{j,j+1} \det({}_+C_{k,r-1}) \right] \\ &= t_1 \det({}_+C_{k,m}) \\ &+ \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-1)^{m+1-r} . i^{m+1-r} \frac{t_{m-r+2}}{t_2^{(m-r+1)}} \prod_{j=r}^m i t_2 \det({}_+C_{k,r-1}) \right] \\ &= t_1 \det({}_+C_{k,m}) \\ &+ \sum_{r=m-k+2}^m \left[(-i)^{m+1-r} \frac{t_{m-r+2}}{t_2^{(m-r+1)}} . i^{m+1-r} . t_2^{(m-r+1)} \det({}_+C_{k,r-1}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t_1 \det(+C_{k,m}) + \sum_{r=m-k+2}^m t_{m-r+2} \det(+C_{k,r-1}) \\
&= t_1 \det(+C_{k,m}) + t_2 \det(+C_{k,m-1}) + \cdots + t_k \det(+C_{k,m-(k-1)})
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Tümevarım hipotezinden ve genelleştirilmiş Lucas Polinomu tanımından

$$\det(+C_{k,m+1}) = t_1 G_{k,m}(t) + \cdots + t_k G_{k,m-(k-1)}(t) = G_{k,m+1}(t)$$

elde edilir.

$m \leq k$ için

$$\begin{aligned}
\det(+C_{k,k}) &= q_{k,k} \det(+C_{k,k-1}) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{k-1} \left[(-1)^{k-r} q_{k,r} \prod_{j=r}^{k-1} q_{j,j+1} \det(+C_{k,r-1}) \right] \\
&\quad t_1 \det(+C_{k,k-1}) + (-1)^1 q_{k,k-1} \prod_{j=k-1}^{k-1} q_{j,j+1} \det(+C_{k,k-2}) + \\
&\quad \cdots + (-1)^{k-1} q_{k,1} \prod_{j=1}^{k-1} q_{j,j+1} \det(+C_{k,0}) \\
&= t_1 \det(+C_{k,k-1}) + (-1)^1 i \cdot t_2 \det(+C_{k,k-2}) + \\
&\quad \cdots + (-1)^{k-1} k i^{k-1} \frac{t_k}{t_2^{k-1}} i^{k-1} \cdot t_2^{k-1} \det(+C_{k,0}) \\
&= t_1 \det(+C_{k,k-1}) + t_2 \det(+C_{k,k-2}) + \cdots + k t_k \det(+C_{k,0}) \\
&= t_1 G_{k,k-1}(t) + t_2 \det G_{k,k-2} + \cdots + t_k k
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (6.8) eşitliği tüm pozitif tam sayılar için geçerlidir.

Teorem 6.2.2. $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $G_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Lucas polinomu (2.13) ve $-H_{k,n} = (-h_{rs})$, aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ için

$$-h_{rs} = \begin{cases} -t_2, & \text{eğer } s = r + 1, \\ \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{(r-s)}}, & \text{eğer } r \neq 1 \text{ ve } 0 \leq r - s < k, \\ \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{(r-s)}} \cdot (r - s + 1), & \text{eğer } i = 1 \text{ ve } 0 \leq i - j < k, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$-H_{k,n} = \begin{bmatrix} t_1 & -t_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & t_1 & -t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3\frac{t_3}{t_2^2} & 1 & t_1 & -t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\frac{t_k}{t_2^{k-1}} & \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -t_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_1 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$\det(-H_{k,n}) = G_{k,n}(t) \quad (6.9)$$

dir.

İspat . İspat Lemma 5.1 kullanılarak Teorem 6.2.1 in ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 6.2.3. Eşitlik (6.8) yı kullanarak $k = 5$ için 6. genelleştirilmiş Lucas polinomunu elde edelim;

$$\begin{aligned} \det({}_+C_{5,6}) &= \det \begin{bmatrix} t_1 & it_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & t_1 & it_2 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 & 0 & 0 \\ 4\frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 & 0 \\ 5\frac{t_5}{t_2^4} & \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 \\ 0 & \frac{t_5}{t_2^4} & \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 \end{bmatrix} \\ &= t_1^6 + 6t_1^4t_2 + 9t_1^2t_2^2 + 2t_2^3 + 6t_1^3t_3 + 3t_3^2 + 12t_1t_2t_3 \\ &\quad + 6t_1^2t_4 + 6t_2t_4 + 6t_1t_5 \\ &= G_{5,6}(t). \end{aligned}$$

Örnek 6.2.4. (6.9) eşitliği kullanılarak $k = 4$ için 5. genelleştirilmiş Lucas polinomunu elde edelim;

$$\begin{aligned}
\det(-H_{4,5}) &= \det \begin{bmatrix} t_1 & -t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & t_1 & -t_2 & 0 & 0 \\ 3\frac{t_3}{t_2^2} & 1 & t_1 & -t_2 & 0 \\ 4\frac{t_4}{t_2^3} & \frac{t_3}{t_2^2} & 1 & t_1 & -t_2 \\ 0 & \frac{t_4}{t_2^3} & \frac{t_3}{t_2^2} & 1 & t_1 \end{bmatrix} \\
&= t_1^5 + 5t_1^3t_2 + 5t_1t_2^2 + 5t_1^2t_3 + 5t_2t_3 + 5t_1t_4 \\
&= G_{4,5}(t).
\end{aligned}$$

Teorem 6.2.5. $n \geq 1$, $k \geq 2$ birer tamsayı, $G_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Lucas polinomu (2.13) ve $-C_{k,n} = (-c_{rs})$ aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matrisi olsun. $t_0 = 1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için

$$-c_{rs} = \begin{cases} i^{(r-s)} \cdot \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{(r-s)}}, & \text{eğer } s \neq 1 \text{ ve } -1 \leq r-s < k, \\ i^{(r-s)} \cdot \frac{t_{r-s+1}}{t_2^{(r-s)}} \cdot (r-s+1), & \text{eğer } s = 1 \text{ ve } -1 \leq r-s < k, \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$-C_{k,n} = \begin{bmatrix} t_1 & -it_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2i & t_1 & -it_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3i^2\frac{t_3}{t_2^2} & i & t_1 & -it_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ki^{k-1}\frac{t_k}{t_2^{k-1}} & i^{k-2}\frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & i^{k-3}\frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & i^{k-4}\frac{t_{k-3}}{t_2^{k-4}} & \cdots & 0 \\ 0 & i^{k-1}\frac{t_k}{t_2^{k-1}} & i^{k-2}\frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & i^{k-3}\frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_1 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$\text{per}(-C_{k,n}) = G_{k,n}(t) \tag{6.10}$$

dir.

İspat . Teorem 6.2.1 den $\det({}_+C_{k,n}) = G_{k,n}(t)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3 den $\text{per}(-C_{k,n}) = \det({}_+C_{k,n})$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 6.2.6. (6.10) eşitliğini kullanarak $k = 4$ için 3. genelleştirilmiş Lucas polinomunu elde edelim;

$$\begin{aligned} \text{per}(-C_{4,3}) &= \text{per} \begin{bmatrix} t_1 & -it_2 & 0 \\ 2i & t_1 & -it_2 \\ 3\frac{-t_3}{t_2} & i & t_1 \end{bmatrix} \\ &= t_1^3 + 3t_1t_2 + 3t_3. \end{aligned}$$

Teorem 6.2.7. $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $G_{k,n}(t)$ genelleştirilmiş Lucas polinomu (2.13) ve ${}_+H_{k,n} = ({}_+h_{ij})$ aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ için

$${}_+h_{ij} = \begin{cases} \frac{t_{i-j+1}}{t_2^{(i-j)}}, & \text{eğer } j \neq 1 \text{ ve } -1 \leq i-j < k, \\ \frac{t_{i-j+1}}{t_2^{(i-j)}} \cdot (i-j+1), & \text{eğer } j = 1 \text{ ve } 0 \leq i-j < k, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_+H_{k,n} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & t_1 & t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3\frac{t_3}{t_2} & 1 & t_1 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\frac{t_k}{t_2^{k-1}} & \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \frac{t_{k-3}}{t_2^{k-4}} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{t_k}{t_2^{k-1}} & \frac{t_{k-1}}{t_2^{k-2}} & \frac{t_{k-2}}{t_2^{k-3}} & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_1 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$\text{per}({}_+H_{k,n}) = G_{k,n}(t) \quad (6.11)$$

dir.

İspat . Teorem 6.2.2 den $\det(-H_{k,n}) = G_{k,n}(t)$ elde edildi. Teorem 5.3 den $\text{per}(+H_{k,n}) = \det(-H_{k,n})$ elde edilir. Bu iki sonuç birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

7. A_k^∞ MATRİSİNİN BİLEŞENLERİNİN MATRİS TEMSİLİ

Bu bölümde Hessenberg matris metodu kullanarak A_k^∞ matrisinin bileşenleri(gelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının k dizisi) için matris temsilleri verilecektir. Burada 4 farklı Hessenberg matris tanımlanacak ve bu matrislerden 2 tanesinin determinantının, 2 tanesinde permanentinin bu polinom dizilerinin istenilen terimlerine eşit olduğu gösterilecektir. A_k^∞ matrisinin herbir sütunu bir polinom dizisidir. Bu k tane polinom dizisinin herbiri aynı matris kullanılarak sadece indis ötelemesi ile elde edilecektir.

Teorem 7.1. $n \geq 1, k \geq 2$ birer tamsayı, $(-1)^r S_{(n,1^r)}$, $A_{(k)}^\infty$ matrisinin $(k-r)$. sütununun n . terimi ve ${}_+Q_{k,n}^r = ({}_+q_{uv})$ aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için

$${}_+q_{uv} = \begin{cases} i^{|u-v|} \cdot \frac{t_{u-v+1}}{t_2^{u-v}}, & \text{eğer } -1 \leq u-v < k \text{ ve } v \neq 1, \\ i^{u-1} \cdot \frac{t_{r+u}}{t_2^{u-1}}, & \text{eğer } 0 < u < k-r+1 \text{ ve } v = 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_+Q_{k,n}^r = \begin{bmatrix} t_{r+1} & it_2 & 0 & \cdots & 0 \\ i \frac{t_{r+2}}{t_2} & t_1 & it_2 & \cdots & 0 \\ i^2 \frac{t_{r+3}}{t_2^2} & i & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i^{(k-r-1)} \frac{t_k}{t_2^{k-r-1}} & i^{(k-r-2)} \frac{t_{k-r-1}}{t_2^{(k-r-2)}} & i^{k-r-3} \frac{t_{k-r-2}}{t_2^{k-r-3}} & \cdots & 0 \\ 0 & i^{k-r-1} \frac{t_{k-r}}{t_2^{k-r-1}} & i^{k-r-2} \frac{t_{k-r-1}}{t_2^{k-r-2}} & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & it_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$\det({}_+Q_{k,n}^r) = (-1)^r S_{(n,1^r)} \quad (7.1)$$

dir.

İspat . (7.1) eşitliğini n üzerinde tümevarım kullanarak ispat edelim. Hipotezden $n = 1$ için eşitlik geçerlidir. Başlangıç koşulları

$r = 0$	$r = 1$	$\dots$	$r = k - 2$	$r = k - 1$
0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$	$\vdots$		1	0
0	0	$\dots$	0	0
0	1		$\vdots$	$\vdots$
1	0	$\dots$	0	0

nı göz önüne alıp ilk olarak her bir dizi için ilk k terimin verilen matrisin determinanı yardımıyla bulunacağını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\det(+Q_{k,k-r}^r) &= q_{k-r,k-r} \det(+Q_{k,k-r-1}^r) \\
&+ \sum_{s=1}^{k-r-1} \left[(-1)^{k-r-s} q_{k-r,s} \prod_{v=s}^{k-r-1} q_{v,v+1} \det(+Q_{k,s-1}^r) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,k-r-1}^r) + (-1)^1 q_{k-r,k-r-1} i t_2 \det(+Q_{k,k-r-2}^r) \\
&+ \dots + (-1)^{k-r-1} q_{k-r,1} (i t_2)^{k-r-1} \det(+Q_{k,0}^r) \\
&= t_1 \det(+Q_{k,k-r-1}^r) + (-1)^1 i \cdot i t_2 \det(+Q_{k,k-r-2}^r) \\
&+ \dots + (-1)^{k-r-1} (i)^{k-r-1} \frac{t_k}{t_2^{k-r-1}} (i t_2)^{k-r-1} \det(+Q_{k,0}^r) \\
&= t_1 \det(+Q_{k,k-r-1}^r) + t_2 \det(+Q_{k,k-r-2}^r) + \dots + t_k
\end{aligned}$$

dır. Buradan her bir r için k tane başlangıç koşulu elde edilir. Şimdi k dan büyük tüm tam sayılar için eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim.

Şimdi n ye eşit ve n den küçük tüm değerler için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Lemma 5.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\det(+Q_{k,n+1}^r) &= q_{n+1,n+1} \det(+Q_{k,n}^r) \\
&+ \sum_{s=1}^n \left[(-1)^{n+1-s} q_{n+1,s} \prod_{v=s}^n q_{v,v+1} \det(+Q_{k,s-1}^r) \right] \\
&= t_1 \det(+Q_{k,n}^r) + \sum_{s=1}^{n-k+1} \left[(-1)^{n+1-s} q_{n+1,s} \prod_{v=s}^n q_{v,v+1} \det(+Q_{k,s-1}^r) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=n-k+2}^n \left[(-1)^{n+1-s} q_{n+1,s} \prod_{v=s}^n q_{v,v+1} \det(+Q_{k,s-1}^r) \right] \\
& = t_1 \det(+Q_{k,n}^r) + \sum_{s=n-k+2}^n \left[(-1)^{n+1-s} q_{n+1,s} \prod_{v=s}^n q_{v,v+1} \det(+Q_{k,s-1}^r) \right] \\
& = t_1 \det(+Q_{k,n}^r) + \sum_{s=n-k+2}^n \left[(-1)^{n+1-s} \cdot i^{n+1-s} \frac{t_{n-s+2}}{t_2^{(n-s+1)}} \prod_{v=s}^n i t_2 \det(+Q_{k,s-1}^r) \right] \\
& = t_1 \det(+Q_{k,n}^r) \\
& + \sum_{s=n-k+2}^n \left[(-1)^{n+1-s} \cdot i^{n+1-s} \frac{t_{n-s+2}}{t_2^{(n-s+1)}} \cdot i^{n+1-s} \cdot t_2^{(n-s+1)} \det(+Q_{k,s-1}^r) \right] \\
& = t_1 \det(+Q_{k,n}^r) + \sum_{s=n-k+2}^n \left[(-1)^{n+1-s} \cdot i^{n+1-s} t_{n-s+2} \cdot i^{n+1-s} \cdot \det(+Q_{k,s-1}^r) \right] \\
& = t_1 \det(+Q_{k,n}^r) + \sum_{s=n-k+2}^n t_{n-s+2} \det(+Q_{k,s-1}^r) \\
& = t_1 \det(+Q_{k,n}^r) + t_2 \det(+Q_{k,n-1}^r) + \cdots + t_k \det(+Q_{k,n-(k-1)}^r)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Tümevarım hipotezinden ve Lemma 2.2.1 den

$$\det(+Q_{k,n+1}) = t_1 (-1)^r S_{(n,1^r)} + \cdots + t_k (-1)^r S_{(n-k+1,1^r)} = (-1)^r S_{(n+1,1^r)}$$

elde edilir. Böylece sonucun tüm pozitif tam sayılar için doğru olduğu gösterilir.

Örnek 7.2. Teorem 7.1 i kullanarak $k = 5$ için $S_{(4,1^2)}$ i hesaplayalım;

$$S_{(4,1^2)} = \det \begin{bmatrix} t_3 & it_2 & 0 & 0 \\ \frac{it_4}{t_2} & t_1 & it_2 & 0 \\ \frac{i^2 t_5}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 \\ 0 & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 \end{bmatrix} = t_1^3 t_3 + t_3^2 + 2t_1 t_2 t_3 + t_1^2 t_4 + t_2 t_4 + t_1 t_5.$$

Teorem 7.3. $n \geq 1$, $k \geq 2$ ve $0 \leq r \leq k-1$ birer tamsayı, $(-1)^r S_{(n,1^r)}$, A_k^∞ matrisinin $(k-r)$. sütununun n . terimi ve $-B_{k,n}^r = (-b_{uv})$ aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ için

$$-b_{uv} = \begin{cases} -t_2, & \text{eğer } j = i+1, \\ \frac{t_{i-j+1}}{t_2^{(i-j)}}, & \text{eğer } 0 \leq i-j < k \text{ ve } j \neq 1, \\ \frac{t_{r+i}}{t_2^{(i-1)}}, & \text{eğer } 0 < i < k-r+1 \text{ ve } j = 1, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$-B_{k,n}^r = \begin{bmatrix} t_{r+1} & -t_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t_{r+2}}{t_2} & t_1 & -t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t_{r+3}}{t_2^2} & 1 & t_1 & -t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{t_k}{t_2^{k-r-1}} & \frac{t_{k-r-1}}{t_2^{k-r-2}} & \frac{t_{k-r-2}}{t_2^{k-r-3}} & \frac{t_{k-r-3}}{t_2^{k-r-4}} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{t_{k-r}}{t_2^{k-r-1}} & \frac{t_{k-r-1}}{t_2^{k-r-2}} & \frac{t_{k-r-2}}{t_2^{k-r-3}} & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -t_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_1 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$\det(-B_{k,n}^r) = (-1)^r S_{(n,1^r)} \quad (7.2)$$

elde edilir.

İspat . İspat Lemma 5.1 kullanılarak Teorem 7.1 in ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 7.4. Teorem 7.3 kullanılarak $k = 4$ için $-S_{(5,1)}$ yi elde edelim;

$$\begin{aligned} -S_{(5,1)} &= \det \begin{bmatrix} t_2 & -t_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_3}{t_2} & t_1 & -t_2 & 0 & 0 \\ \frac{t_4}{t_2^2} & 1 & t_1 & -t_2 & 0 \\ 0 & \frac{t_3}{t_2^2} & 1 & t_1 & -t_2 \\ 0 & \frac{t_4}{t_2^2} & \frac{t_3}{t_2^2} & 1 & t_1 \end{bmatrix} \\ &= t_1^4 t_2 + 3t_1^2 t_2^2 + t_2^3 + t_1^3 t_3 + t_3^2 + 4t_1 t_2 t_3 + t_1^2 t_4 + 2t_2 t_4. \end{aligned}$$

Teorem 7.5. $n \geq 1$, $k \geq 2$ ve $0 \leq r \leq k-1$ birer tamsayı, $(-1)^r S_{(n,1^r)}$, A_k^∞ matrisinin $(k-r)$. sütununun n . terimi ve $-Q_{k,n}^r = (-q_{uv})$ aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için

$$-q_{uv} = \begin{cases} i^{(u-v)} \cdot \frac{t_{u-v+1}}{t_2^{(u-v)}}, & \text{eğer } -1 \leq u-v < k \text{ ve } j \neq 1, \\ i^{(u-1)} \cdot \frac{t_{r+u}}{t_2^{(u-1)}}, & \text{eğer } 0 < u < k-r+1 \text{ ve } v = 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$-Q_{k,n}^r = \begin{bmatrix} t_{r+1} & -it_2 & \cdots & 0 \\ i\frac{t_{r+2}}{t_2} & t_1 & -it_2 & \cdots & 0 \\ i^2\frac{t_{r+3}}{t_2^2} & i & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ i^{(k-r-1)}\frac{t_k}{t_2^{k-r-1}} & i^{(k-r-2)}\frac{t_{k-r-1}}{t_2^{(k-r-2)}} & i^{k-r-3}\frac{t_{k-r-2}}{t_2^{k-r-3}} & \cdots & 0 \\ 0 & i^{k-r-1}\frac{t_{k-r}}{t_2^{k-r-1}} & i^{k-r-2}\frac{t_{k-r-1}}{t_2^{k-r-2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -it_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda

$$\text{per}(-Q_{k,n}^r) = (-1)^r S_{(n,1^r)} \quad (7.3)$$

dir.

İspat. Teorem 7.1 den $\det(+Q_{k,n}) = (-1)^r S_{(n,1^r)}$ elde edildi. Teorem 5.3 den $\text{per}(-Q_{k,n}^r) = \det(+Q_{k,n}^r)$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 7.6. $n \geq 1$, $k \geq 2$ ve $0 \leq r \leq k-1$ birer tamsayı, $(-1)^r S_{(n,1^r)}$, A_k^∞ matrisinin $(k-r)$. sütununun n . terimi ve $+B_{k,n}^r = (+b_{ij})$ aşağıdaki gibi tanımlanan $n \times n$ alt Hessenberg matris olsun. $t_0 = 1$ için

$$+b_{ij} = \begin{cases} -t_2, & \text{eğer } j = i+1 \text{ ve } j \neq 1, \\ \frac{t_{i-j+1}}{t_2^{(i-j)}}, & \text{eğer } 0 \leq i-j < k \text{ ve } j \neq 1, \\ \frac{t_{r+i}}{t_2^{(i-1)}}, & \text{eğer } 0 < i < k-r+1 \text{ ve } j = 1, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_+B_{k,n}^r = \begin{bmatrix} t_{r+1} & t_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t_{r+2}}{t_2} & t_1 & t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t_{r+3}}{t_2^2} & 1 & t_1 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{t_k}{t_2^{k-r-1}} & \frac{t_{k-r-1}}{t_2^{k-r-2}} & \frac{t_{k-r-2}}{t_2^{k-r-3}} & \frac{t_{k-r-3}}{t_2^{k-r-4}} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{t_{k-r}}{t_2^{k-r-1}} & \frac{t_{k-r-1}}{t_2^{k-r-2}} & \frac{t_{k-r-2}}{t_2^{k-r-3}} & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_1 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$\text{per}({}_+B_{k,n}^r) = (-1)^r S_{(n,1^r)} \quad (7.4)$$

dır.

İspat . Teorem 7.3 den $\det(-B_{k,n}^r) = (-1)^r S_{(n,1^r)}$ elde edildi. Teorem 5.3 den $\text{per}({}_+B_{k,n}^r) = \det(-B_{k,n}^r)$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

8. HESSENBERG MATRİS METODUNUN GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde Hessenberg matris metodunun bir genelleştirilmesi elde edilecektir.

2011 yılında Chen ve Yu

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & \cdots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{11} & h_{12} & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & \cdots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} & 0 \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,n-1} & h_{n,n} & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\tilde{H}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} [\alpha]_{n \times 1} & [L]_{n \times n} \\ \hline h & [\beta^T]_{1 \times n} \end{array} \right]_{(n+1) \times (n+1)} \quad (8.1)$$

şekilde üç matris tanımladılar. Daha sonra e_n, I_n birim matrisinin n . sütunu olmak üzere

$$\det(H) = (-1)^n h \cdot \det(\tilde{H}), \quad (8.2)$$

$$L = H^{-1} + h^{-1} \alpha \beta^T \quad (8.3)$$

ve

$$H\alpha + he_n = 0 \quad (8.4)$$

eşitliklerini elde ettiler. Bizde (8.2), (8.3) ve (8.4) eşitlikleri ve Hessenberg matrislerin determinantını kullanarak aşağıdaki Lemmayı elde ederiz.

Lemma 8.1. e_1 , I_n matrisinin ilk sütunu ve L , β , h matrisleri (8.1) de tanımlı matrisler olsun. Bu durumda,

$$\beta^T H + h e_1 = 0 \quad (8.5)$$

dır.

Chen ve Yu tarafından yapılan yukardaki çalışmada H matrisinin Hessenberg matris olması ve bu tez çalışmasının 5,6 ve 7. bölümlerinin Hessenberg matris kullanılarak oluşturulması 8. bölümün oluşması için motivasyon oluşturmıştır. Sonuç (6.1.3) ve Sonuç (6.1.6) de genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları (6.3) ve (6.6) Hessenberg matrislerinin determinanı kullanılarak elde edildi. Burada $n \times n$ lik bir matrisin determinantı bize sadece dizinin tek bir terimini vermektedir. Şimdi vereceğimiz yöntemde yine aynı Hessenberg matrisleri kullanarak bu dizinin ardışık n tane terimini $(f_{k,m-1}, \dots, f_{k,m-n})$ elde edeceğiz.

Teorem 8.2. $k \geq 2$ bir tamsayı, $H_{n,k}$, (6.3) de tanımlanan Hessenberg matris ve

$$\tilde{H}_{n,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots \\ & H_{n,k} & & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$(\tilde{H}_{n,k})^{-1} = \begin{bmatrix} f_{k,k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ if_{k,k} & -if_{k,k-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ i^{(n-3)}f_{k,n+k-4} & i^{(n-1)}f_{k,n+k-5} & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ i^{(n-2)}f_{k,n+k-3} & i^{(n)}f_{k,n+k-4} & i^{(n-4)}f_{k,n+k-5} & \ddots & 0 & 0 \\ i^{(n-1)}f_{k,n+k-2} & i^{(n+1)}f_{k,n+k-3} & i^{(n-3)}f_{k,n+k-4} & \ddots & -if_{k,k-1} & 0 \\ i^{(n+1)}f_{k,n+k-1} & i^{(n-1)}f_{k,n+k-2} & i^{(n-2)}f_{k,n+k-3} & \cdots & if_{k,k} & f_{k,k-1} \end{bmatrix}$$

dir. Burada $i = \sqrt{-1}$ dir.

İspat .

$$(\tilde{H}_{n,k})^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} [\alpha]_{n \times 1} & [L]_{n \times n} \\ \hline h & [\beta^T]_{1 \times n} \end{array} \right]_{(n+1) \times (n+1)}$$

matrisini oluşturalım ve matrisin şekilde ayrılmış olan 4 bileşenini teker teker elde edelim.

i) (8.2) ve (6.4) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \det(H_{n,k}) &= (-1)^n h \cdot \det(\tilde{H}_{n,k}) \\ \Rightarrow h &= \frac{\det(H_{n,k})}{(-1)^n \det(\tilde{H}_{n,k})} = \frac{f_{k,n+k-1}}{(-1)^n i^{n-1}} = i^{n+1} f_{k,n+k-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) (8.4) ve (8.5) eşitlikleri kullanılarak

$$[\alpha] = -(H_{n,k})^{-1} (i)^{n+1} f_{k,n+k-1} e_n = \begin{bmatrix} f_{k,k-1} \\ i f_{k,k} \\ \vdots \\ i^{(n-2)} f_{k,n+k-3} \\ i^{(n-1)} f_{k,n+k-2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} [\beta^T] &= -(H_{n,k})^{-1} (i)^{n+1} f_{k,n+k-1} e_1 \\ \Rightarrow [\beta] &= \begin{bmatrix} i^{(n-1)} f_{k,n+k-2} & i^{(n-2)} f_{k,n+k-3} & \cdots & i f_{k,k} & f_{k,k-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) (8.3) eşitliği kullanılarak $[L] = (H_{n,k})^{-1} + ((i)^{n+1} f_{k,n+k-1})^{-1} \alpha \beta^T$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -i f_{k,k-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ i^{(n-1)} f_{k,n+k-5} & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ i^{(n)} f_{k,n+k-4} & i^{(n-4)} f_{k,n+k-5} & \ddots & 0 & 0 \\ i^{(n+1)} f_{k,n+k-3} & i^{(n-3)} f_{k,n+k-4} & \ddots & -i f_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak bu üç adım birleştirilirse ispat tamamlanır.

Örnek 8.3. Teorem 8.2 i kullanarak genelleştirilmiş 4-basamak Fibonacci sayılarının ardışık 6 terimini elde edelim;

$$\det H_{5,4} = \det \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & 0 \\ -1 & i & 1 & i & 0 \\ -i & -1 & i & 1 & i \\ 0 & -i & -1 & i & 1 \end{bmatrix} = 15 = f_{4,8}$$

olmak üzere $H_{5,4}$ matrisine üstten bir satır ve sağdan bir sütun ekleyerek;

$$\tilde{H}_{5,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & 1 & i & 0 & 0 \\ -i & -1 & i & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & -1 & i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini elde edelim. Bu matrisin tersi alınırsa ($\tilde{H}_{5,4}^{-1}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ -4i & 2i & 1 & -i & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2i & 1 & -i & 0 \\ -15 & 8 & -4i & -2 & i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ if_{4,4} & -if_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_{4,5} & f_{4,4} & -if_{4,3} & 0 & 0 & 0 \\ -if_{4,6} & if_{4,5} & f_{4,4} & -if_{4,3} & 0 & 0 \\ f_{4,7} & -f_{4,6} & if_{4,5} & f_{4,4} & -if_{4,3} & 0 \\ -f_{4,8} & f_{4,7} & -if_{4,6} & -f_{4,5} & if_{4,4} & f_{4,3} \end{bmatrix}$$

elde edilir ki burada $f_{4,8}$ in yanında 6 ardışık terim aynı anda elde edilmiş olur.

Teorem 8.4. $k \geq 2$ bir tamsayı, $F_{n,k}$, (6.6) da tanımlı Hessenberg matris ve

$$\tilde{F}_{n,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots \\ & F_{n,k} & & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$(\tilde{F}_{n,k})^{-1} = \begin{bmatrix} f_{k,k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{k,k} & -f_{k,k-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{k,n+k-4} & -f_{k,n+k-5} & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ f_{k,n+k-3} & -f_{k,n+k-4} & -f_{k,n+k-5} & \ddots & 0 & 0 \\ f_{k,n+k-2} & -f_{k,n+k-3} & -f_{k,n+k-4} & \ddots & -f_{k,k-1} & 0 \\ -f_{k,n+k-1} & f_{k,n+k-2} & f_{k,n+k-3} & \cdots & f_{k,k} & f_{k,k-1} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat . İspat (6.7) eşitliği kullanılarak, Teorem 8.2 in ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 8.5. Teorem 8.4 yi kullanarak genelleştirilmiş 4-basamak Fibonacci sayılarından bazılarını elde edelim;

$$\det F_{5,4} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 15 = f_{4,8}$$

$$\tilde{F}_{5,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. $\widetilde{F}_{5,4}$ nın tersi

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{5,4}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ -15 & 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{4,4} & -f_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{4,5} & -f_{4,4} & -if_{4,3} & 0 & 0 & 0 \\ f_{4,6} & -f_{4,5} & -f_{4,4} & -f_{4,3} & 0 & 0 \\ f_{4,7} & -f_{4,6} & -f_{4,5} & -f_{4,4} & -f_{4,3} & 0 \\ -f_{4,8} & f_{4,7} & f_{4,6} & f_{4,5} & f_{4,4} & f_{4,3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur ki bu da bizim $f_{4,8}$ in yanında ardışık 6 terimi de aynı anda elde etmemizi sağlar.

Bölüm 6 da (6.1) matrisinin determinantının genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının n . terimine eşit olduğu gösterilmişti. Yeni elde edilen yöntemde ise yine (6.1) matrisi kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının ardışık n terimi aynı anda elde edilir.

Teorem 8.6. $n \geq 1$ bir tamsayı, ${}_+Q_{k,n}$, (6.1) da tanımlı Hessenberg matris ve

$${}_+\widetilde{Q}_{k,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & Q_{k,n} & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $(\widetilde{Q}_{k,n})^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{i}{t_2} F_{k,1}(t) & -\frac{i}{t_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ i^{(n-3)} \frac{1}{t_2^{n-3}} F_{k,n-3}(t) & i^{(n-4)} \frac{1}{t_2^{n-3}} F_{k,n-4}(t) & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ i^{(n-2)} \frac{1}{t_2^{n-2}} F_{k,n-2}(t) & i^{(n-3)} \frac{1}{t_2^{n-2}} F_{k,n-3}(t) & i^{(n-4)} \frac{1}{t_2^{n-3}} F_{k,n-4}(t) & \ddots & 0 & 0 \\ i^{(n-1)} \frac{1}{t_2^{n-1}} F_{k,n-1}(t) & i^{(n-2)} \frac{1}{t_2^{n-1}} F_{k,n-2}(t) & i^{(n-3)} \frac{1}{t_2^{n-2}} F_{k,n-3}(t) & \ddots & -\frac{i}{t_2} & 0 \\ i^{(n+1)} \frac{1}{t_2^{n+1}} F_{k,n}(t) & i^{(n-1)} \frac{1}{t_2^{n-1}} F_{k,n-1}(t) & i^{(n-2)} \frac{1}{t_2^{n-2}} F_{k,n-2}(t) & \cdots & i \frac{1}{t_2} F_{k,1}(t) & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ dir.

İspat . İspat (6.2) eşitliği kullanılarak, Teorem 8.2 in ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 8.7. Teorem 8.6 u kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarını elde edelim.

$$\begin{aligned} \det Q_{6,4} &= \det \begin{bmatrix} t_1 & it_2 & 0 & 0 \\ i & t_1 & it_2 & 0 \\ \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 \\ \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 \end{bmatrix} \\ &= t_4 + 2t_1t_3 + t_2^2 + t_1^4 + 3t_1^2t_2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu matrise üstten bir satır ve sağdan bir sütun eklersek

$$\widetilde{Q}_{6,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & it_2 & 0 & 0 & 0 \\ i & t_1 & it_2 & 0 & 0 \\ \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & it_2 & 0 \\ \frac{-it_4}{t_2^3} & \frac{-t_3}{t_2^2} & i & t_1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. $\widetilde{Q}_{6,4}$ matrisinin tersi alınırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\frac{t_1}{t_2} & -\frac{i}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{t_2^2}(-t_2 - t_1^2) & \frac{t_1}{t_2^2} & -\frac{i}{t_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{t_2^3}(-it_3 - 2it_1t_2 - it_1^3) & \frac{1}{t_2^3}(it_2 + it_1^2) & \frac{t_1}{t_2^2} & -\frac{i}{t_2} & 0 \\ \frac{1}{t_2^3}(it_4 + 2it_1t_3 + it_2^2 + it_1^4 + 3it_1^2t_2) & \frac{1}{t_2^3}(-it_3 - 2it_1t_2 - it_1^3) & \frac{1}{t_2^2}(-t_2 - t_1^2) & i\frac{t_1}{t_2} & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir ki bu bize sadece bu polinomun 4. terimini değil aynı zamanda ardışık 4 terimini katsayı farkı ile elde etmemizi sağlar.

Bu Teoremlerde de görüldüğü gibi elde edilen yeni yöntem önceki bölümlerde yapılan çalışmaları yeni bir boyuta taşımaktadır. Yani terimleri Hessenberg matrisin determinantı ve permanenti kullanılarak hesaplanabilen her dizi ve polinoma bu yeni yöntem uygulanabilir. Örneğin Strang (1998) E_n matrisinin determinantının F_{2n} e eşit olduğunu gösterdi. Şimdi yeni yöntemle aynı matrisi kullanarak çift indisli Fibonacci sayılarının ardışık n tanesini elde edelim.

Sonuç 8.8. E_n , (3.1) de verilen matris, F_n n . Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\widetilde{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ & E_n & & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

matrisinin tersi alınırsa

$$(\widetilde{E}_n)^{-1} = \begin{bmatrix} F_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -F_4 & F_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{(n-2)}F_{2n-2} & (-1)^{(n-3)}F_{2n-4} & \ddots & 0 & 0 \\ (-1)^{(n-1)}F_{2n} & (-1)^{(n-2)}F_{2n-2} & \ddots & F_2 & 0 \\ (-1)^nF_{2n+2} & (-1)^{(n-1)}F_{2n} & \dots & -F_4 & F_2 \end{bmatrix}.$$

elde edilir.

İspat . İspat (3.2) eşitliği kullanılarak Teorem 8.2 ün ispatına benzer olarak yapılır.

9. UYGULAMALAR

Bu bölümde elde, önceki bölümlerde elde ettiğimiz sonuçların, 40 dan fazla rekürans ilişkisine sahip dizi ve polinom için de geçerli olduğu gösterilecektir.

Sonuç 9.1. x , y ve p nin farklı değerleri için Teorem 5.1.1, Teorem 5.1.3, Teorem 5.1.5 ve Teorem 5.1.7 tekrar ifade edilirse aşağıdaki tablo elde edilir;

x	y	p	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{p,n+1}(x, y),$
x	y	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{(n+1)}(x, y),$
x	1	p	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{p,(n+1)}(x),$
x	1	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = f_{(n+1)}(x),$
1	1	p	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_p(n+1),$
1	1	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{(n+1)},$
$2x$	y	p	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{p,(n+1)}(2x, y),$
$2x$	y	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{(n+1)}(2x, y),$
$2x$	1	p	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = P_{p,(n+1)}(x),$
$2x$	1	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = P_{(n+1)}(x),$
2	1	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = P_{(n+1)},$
$2x$	-1	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = U_n(x),$
x	$2y$	p	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{p,(n+1)}(x, 2y),$
x	$2y$	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = F_{(n+1)}(x, 2y),$
1	$2y$	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = J_{(n+1)}(y),$
1	2	1	$\det(+W_{p,n}) = \det(-M_{p,n}) = \text{per}(-W_{p,n}) = \text{per}(+M_{p,n}) = J_{(n+1)}.$

Çizelge 9.1

İspat . Lemma 4.1.3 den genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p -polinomlarının tabloda verilen dizi ve polinomların genel hali olduğu görülür. Teorem 5.1.1, Teorem 5.1.3, Teorem 5.1.5 ve Teorem 5.1.7 de x , y ve p nin farklı değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 9.2. x , y ve p nin farklı değerleri için Teorem 5.2.1, Teorem 5.2.2, Teorem 5.2.4 ve Teorem 5.2.6 tekrar ifade edilirse aşağıdaki tablo elde edilir;

x	y	p	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_{p,n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$
x	y	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$
x	1	p	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_{p,n}(\mathbf{x}),$
x	1	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = l_n(x),$
1	1	p	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_p(\mathbf{n}),$
1	1	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_n,$
$2x$	y	p	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_{p,n}(2\mathbf{x}, \mathbf{y}),$
$2x$	y	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_n(2\mathbf{x}, \mathbf{y}),$
$2x$	1	p	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{Q}_{p,n}(\mathbf{x}),$
$2x$	1	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{Q}_n(\mathbf{x}),$
2	1	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{Q}_n,$
$2x$	-1	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{T}_n(\mathbf{x}),$
x	$2y$	p	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_{p,n}(\mathbf{x}, 2\mathbf{y}),$
x	$2y$	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{L}_n(\mathbf{x}, 2\mathbf{y}),$
1	$2y$	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = \mathbf{j}_n(\mathbf{y}),$
1	2	1	$\det(+V_{p,n}) = \det(-N_{p,n}) = \text{per}(-V_{p,n}) = \text{per}(+N_{p,n}) = j_n.$

Çizelge 9.2

İspat . Lemma 4.2.2 den genelleştirilmiş iki değişkenli Lucas p -polinomlarının tabloda verilen dizi ve polinomların genel hali olduğu görülür. Teorem 5.2.1, Teorem 5.2.2, Teorem 5.2.4 ve Teorem 5.2.6 de x , y ve p nin farklı değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 9.3. Teorem 6.1.1, Teorem 6.1.4, Teorem 6.1.7 ve Teorem 6.1.10 ü t_i lerin farklı değerleri için tekrar ifade edelim.

i) $t_i = c_j$ ($1 \leq i, j \leq k$) için

$$\det(+Q_{k,n}) = \det(-B_{k,n}) = \text{per}(-Q_{k,n}) = \text{per}(+B_{k,n}) = f_{k,n}^1$$

elde edilir.

ii) $t_1 = 2$ ve $t_i = 1$ ($2 \leq i \leq k$) için

$$\det(+Q_{k,n}) = \det(-B_{k,n}) = \text{per}(-Q_{k,n}) = \text{per}(+B_{k,n}) = p_{k,n}^k$$

elde edilir.

iii) $t_1 = 0$ ve $t_i = 1$ ($2 \leq i \leq k$) için

$$\det(+Q_{k,n}) = \det(-B_{k,n}) = \text{per}(-Q_{k,n}) = \text{per}(+B_{k,n}) = v_{k,n}^k$$

elde edilir.

iv) $k = 3$ ve $t_1 = p, t_2 = q, t_3 = r$ için

$$\det(+Q_{k,n}) = \det(-B_{k,n}) = \text{per}(-Q_{k,n}) = \text{per}(+B_{k,n}) = a_{n-2}$$

elde edilir.

v) $k = 3$ ve $t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 1$ için

$$\det(+Q_{k,n}) = \det(-B_{k,n}) = \text{per}(-Q_{k,n}) = \text{per}(+B_{k,n}) = t_{n-2}$$

elde edilir (Burada t_n klasik Tribonacci sayı dizisidir).

İspat . Lemma 4.1.2-(i), 4.1.1-ii, 4.1.2-(iii) ve 4.1.1-iii den geliştirilmiş Fibonacci polinomlarının $f_{k,n}^1, p_{k,n}^k, v_{k,n}^k, a_n$ dizilerinin genel hali olduğu görülür. Teorem 6.1.1, Teorem 6.1.4, Teorem 6.1.7 ve Teorem 6.1.10 de t_i lerin farklı değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 9.4. Teorem 6.2.1, Teorem 6.2.2, Teorem 6.2.5 ve Teorem 6.2.7 ü t_i lerin farklı değerleri için tekrar ifade edelim.

i) $t_i = 1$ ($1 \leq i \leq k$) için

$$\det(+C_{k,n}) = \det(-H_{k,n}) = \text{per}(-C_{k,n}) = \text{per}(+H_{k,n}) = l_n$$

elde edilir.

ii) $t_k = 0$ ve $t_i = 1$ ($1 \leq i \leq k-1$) için

$$\det(+C_{k,n}) = \det(-H_{k,n}) = \text{per}(-C_{k,n}) = \text{per}(+H_{k,n}) = r_{k,n}$$

elde edilir.

iii) $t_k = 0, t_i = 1$ ($1 \leq i \leq k-1$) ve $k = 3$ için

$$\det(+C_{k,n}) = \det(-H_{k,n}) = \text{per}(-C_{k,n}) = \text{per}(+H_{k,n}) = R_n$$

elde edilir. (Burada R_n klasik Perrin sayı dizisidir).

İspat . Lemma 4.2.1 ve 4.2.1-iii den geliştirilmiş Fibonacci polinomlarının geliştirilmiş k -basamak Lucas ve Perrin sayılarının ve klasik Perrin sayılarının genel hali olduğu görülür.

Teorem 6.2.1, Teorem 6.2.2, Teorem 6.2.5 ve Teorem 6.2.7 de t_i lerin ve k nın farklı değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 9.5. *Teorem 7.1, Teorem 7.3, Teorem 7.5 ve Teorem 7.6 ü t_i lerin farklı değerleri için tekrar ifade edelim.*

i) $t_i = c_j$ ($1 \leq i, j \leq k$) ve $0 \leq r \leq k - 1$ için

$$\det(+Q_{k,n}^r) = \det(-B_{k,n}^r) = \text{per}(-Q_{k,n}^r) = \text{per}(+B_{k,n}^r) = f_{k,n}^{r+1}$$

elde edilir.

ii) $t_1 = 2, t_i = 1$ ($2 \leq i \leq k$) ve $0 \leq r \leq k - 1$ için

$$\det(+Q_{k,n}^r) = \det(-B_{k,n}^r) = \text{per}(-Q_{k,n}^r) = \text{per}(+B_{k,n}^r) = p_{k,n}^{r+1}$$

elde edilir.

iii) $t_1 = 0, t_i = 1$ ($2 \leq i \leq k$) ve $0 \leq r \leq k$ için

$$\det(+Q_{k,n}^r) = \det(-B_{k,n}^r) = \text{per}(-Q_{k,n}^r) = \text{per}(+B_{k,n}^r) = v_{k,n}^{k-r}$$

elde edilir.

İspat . Lemma 4.1.2 den genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının $f_{k,n}^i, p_{k,n}^i, v_{k,n}^i$ dizilerinin genel hali olduğu görülür. Teorem 7.1, Teorem 7.3, Teorem 7.5 ve Teorem 7.6 de t_i lerin farklı değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Son olarak Hessenberg matrislerin determinanti ve permanentinin kombinasyon kullanılarak elde edilebileceğini gösterelim.

Sonuç 9.6. *Bu çalışmada geçen standart gösterimler dikkate alındığında*

$$\det(+Q_{k,n}) = \det(-B_{k,n}) = \text{per}(-Q_{k,n}) = \text{per}(+B_{k,n}) = \sum_{a \vdash n} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k}$$

dır.

İspat . Teorem 6.1.1, Teorem 6.1.4, Teorem (6.1.7) ve Teorem 6.1.10 dan ve (2.14) eşitliğinden elde edilir.

Sonuç 9.7. *Bu çalışmada geçen standart gösterimler dikkate alındığında*

$$\det({}_+C_{k,n}) = \det({}_-H_{k,n}) = \text{per}({}_-C_{k,n}) = \text{per}({}_+H_{k,n}) = \sum_{a \vdash n} \frac{n}{|a|} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k}$$

dır.

İspat . Teorem 6.2.1, Teorem 6.2.2, Teorem 6.2.5 ve Teorem 6.2.7 dan ve (2.15) eşitliğinden elde edilir.

Sonuç 9.8. *Bu çalışmada geçen standart gösterimler dikkate alındığında*

$$\begin{aligned} \det({}_+Q_{k,n}^r) &= \det({}_-B_{k,n}^r) = \text{per}({}_-Q_{k,n}^r) = \text{per}({}_+B_{k,n}^r) \\ &= \sum_{j=r+1}^k t_j \left[\sum_{a \vdash n-j+r} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} \right]. \end{aligned}$$

dır.

İspat . Teorem 7.1, Teorem 7.3, Teorem 7.5 ve Teorem 7.6 dan, (2.14) ve (2.18) eşitliklerinden elde edilir.

10. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Trueman Machenry tarafından 2000 yılında tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının, rekürans ilişkisi ile tanımlanan sayı ve polinomların büyük bir kısmının genel hali olduğuna dikkat çekildi. Sonra yine MacHenry tarafından tanımlanan $A_{(k)}^{\infty}$ matrisinin genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci, Pell, Van der Laan, vb. sayı dizilerinin k dizisini kapsadığı gösterildi. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarının istenilen terimini ve $A_{(k)}^{\infty}$ matrisinin bileşenlerini hesaplamak için Hessenberg matris yöntemi kullanıldı. Bu yöntemde çeşitli Hessenberg matrisler tanımlanıp, bu matrislerin determinanı ve permanentının polinomların istenilen terimine eşit olduğu gösterildi. Daha sonra (Chen ve Yu, 2011) de Hessenberg matrisler için verilen eşitliklerden esinlenilerek Hessenberg matrisler üzerine yeni bir çalışma yapıldı. Bu çalışmada Hessenberg matris yönteminde kullanılan matrislerden bazıları kullanılarak Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş k -basamak Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının terimlerini elde etmek için yeni bir yöntem verildi. Bu yöntemde önceki bölümlerde kullanılan Hessenberg matrislere bir satır ve bir sütun ekleyerek elde edilen matrisin tersi alındı. Bu ters matris incelendiğinde bu matrisin, ekleme yapılmadan önce verilen hessenberg matrisin determinanı sonucu elde edilen terim ve ondan geriye doğru ardışık n tane terimi içerdiği görüldü. Verilen bu yeni yöntem literatürde var olan ve bir Hessenberg matrisin determinanı veya permanentı kullanılarak elde edilen tüm dizi ve polinoma uygulanabilir. Bu çalışmada son bölümde önceki bölümlerde elde edilen temel sonuçların, literatürde var olan birçok rekürans ilişkili sayı dizisi ve polinom için de geçerli olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

- Bozkurt, D. ve Türen, B., 2003. Lineer Cebir. SEL-ÜN Vakfı yayınları, Konya.
- Chen Y-H. ve Yu C-Y., 2011. A new algorithm for computing the inverse ve the determinant of a Hessenberg matrix. *Appl. Math. Comput.*, 218, 4433-4436.
- Cahill, N.D., D'Errico, J.R.D., Narayan, A. ve Narayan, J.Y., 2002. Fibonacci determinants. *College Math. J.*, 33, 221-225.
- El Naschie, M.S., 1992. Quantum mechanics and the possibility of a Cantorian space-time. *Chaos Solitons and Fractals*, 1, 485-487.
- El Naschie, M.S., 1993. On dimensions of Cantor set related systems. *Chaos Solitons and Fractals*, 3, 675-685.
- El Naschie, M.S., 1994. Is quantum space a random cantor set with a golden mean dimension at the core. *Chaos Solitons and Fractals*, 4 (2), 177-179.
- Er, M.C., 1984 Sums of Fibonacci numbers by Matrix Methods. *Fibonacci Quart.*, 22(3), 204-207.
- Gibson P. M., 1969. An identity between permanents and determinants. *Amer. Math. Monthly.*, 76, 270-271.
- Horadam, A.F., 1996. Jacobsthal Representation Numbers. *Fib. Quart.* 34, 40- 54.
- Horn R. and Johnson C., 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, USA.
- Kaygısız, K. ve Şahin, A., 2013. Generalized Van der Laan and Perrin polynomials, and Generalizations of Van der Laan and Perrin Numbers. *Selcuk Journal of Applied Math.*, 14(1), 89-103.
- Kılıç, E. ve Taşcı, D., 2006. The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order- k Pell numbers. *Taiwanese J. Math.*, 10 (2006), 1661-1670.
- Kılıç, E. ve Stakhov, A.P., 2009. On the Fibonacci and Lucas p -numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents of certain matrices. *Chaos Solitons and Fractals*, 40, 2210-2221.
- Kılıç, E. ve Taşcı, D., 2010. On the generalized Fibonacci and Pell sequences by Hessenberg matrices. *Ars Combin.*, 94, 161-174.
- Koshy, T., 2001 *Fibonacci and Lucas numbers with Applications*. John Wiley and Sons, New York.
- Lee, G.-Y. ve Lee, S.-G., 1995. A note on generalized Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 33, 273-278.
- Lee, G.-Y., 2000. k -Lucas numbers and associated bipartite graphs. *Linear Algebra Appl.*, 320, 51-61.
- Li, H.-C., 2012. On Fibonacci Hessenberg matrices and the Pell and Perrin numbers. *Appl. Math. and Comput.*, 218, 8353-8358.
- MacHenry, T., 1999. A Subgroup of the Group of Units in the Ring of Arithmetic Functions. *Rocky Mountain J. Math.*, 29(3), 1055-1065.
- MacHenry, T., 2000. Generalized Fibonacci and Lucas polynomials and Multiplicative Arithmetic Functions. *Fibonacci Quart.*, 38, 17-24.
- MacHenry, T. ve Tudose, G., 2005. Reflections on Symmetric Polynomials and Arithmetic Functions, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 35(3), (2005), 901-926.

- MacHenry, T. ve Huilan Li, 2010. The Convolution Ring of Arithmetic Functions and Symmetric polynomials. arXiv:1009.1892v1.
- MacHenry, T. ve Wong, K., 2011. Degree k Linear Recursions mod (p) and Number Fields. Rocky Mountain J. Math., 41(4), 1303-1327.
- MacHenry, T. ve Wong, K., 2012. A Correspondence Between Isobaric Rings and Multiplicative Arithmetic Functions. Rocky Mountain J. Math., 42(4), 1247-1290.
- Miles, E.P., 1960. Generalized Fibonacci Numbers and Associated Matrices. Amer. Math. Monthly, 67(1960), 745-752.
- Minc, H., 1964. Permanents of $(0,1)$ -circulants. Canad. Math. Bull. 7(2), 253-263.
- Minc, H., 1978. Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, Permanents. Vol.6, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1978.
- Öcal, A.A., Tuğlu, N. ve Altınışık, E. 2005. On the representation of k -generalized Fibonacci and Lucas Numbers, Appl. Math. Comput., 170, 584-596.
- Philippou, A.N., Bergum, G.E. ve Horadam, A.F., 2001. Fibonacci Numbers and Their Applications. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- Robbins, N., 1984. Beginning Number Theory. Wm. C. Brown Publishes, Oxford.
- Stakhov AP., 1977. Introduction into algorithmic measurement theory. Moscow: Publishing House, Soviet Radio, Rusya.
- Stakhov AP., 2006. Fibonacci matrices, a generalization of the Cassini formula, and a new coding theory. Chaos, Solitons and Fractals, 30(1), 56-66.
- Stakhov AP. ve Rozin B. 2006. The golden algebraic equations. Chaos, Solitons and Fractals, 27, 1415-1421.
- Stakhov AP., 2007. The golden matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons and Fractals, 32(3), 1138-46.
- Strang G., 1998. Introduction to linear algebra. 2nd ed. Wellesley-Cambridge: Wellesley MA.
- Swamy, M.N.S., 1998. Network properties of a pair of generalized polinomları. Proceedings of the Midwest Symposium on Systems and Circuits.
- Şahin, A., 2010. Bazı genelleştirilmiş k -basamak sayı dizilerinin incelenmesi. Gaziosmanpaşa Üni. Fen Bil. Enst, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Tokat.
- Taşcı, D., 2011. Lineer Cebir. Öziş Matbaacılık, Ankara.
- Tuglu, N., Kocer, G. ve Stakhov, A., 2011. Bivariate Fibonacci like p -polynomials, Appl. Math. Comput., 217, 10239-10246.
- Vajda, S., 1989. Fibonacci and Lucas numbers, and Golden section. Theory and Application. John Wiley and Sons, New York, 24-61.
- Wenchang, C., 1997. Determinant, Permanent, and MacMahon's Theorem. Linear Algebra Appl., 255, 171-183.
- Yılmaz, F. ve Bozkurt, D., 2011. Hessenberg matrices and the Pell and Perrin numbers. J. Number Theory, 131, 1390-1396.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı: Adem ŞAHİN

Doğum Tarihi ve Yer: 15.06.1986 Yıldızeli

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Telefon: (506) 727 18 40

E-posta: adem.sahin@gop.edu.tr / hessenberg.sahin@gmail.com

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lise	Tokat A.Ö.L.	2003
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi	2008
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2010
Doktora	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2013

İş Deneyimi:

Yıl	Yer	Görev
2008 - 2013	Tokat GOÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	Arş. Gör.

YAYINLAR

a. SCI, SSCI, AHCI gibi indekslerce taranan dergilerde yayımlanan araştırma makaleleri

1. Determinants and Permanents of Hessenberg Matrices and Generalized Lucas Polinomları, Kenan Kaygısız, Adem Şahin, Bull. Iranian Math. Soc., accepted, 2012.
2. Determinantal and Permanent Representations of Fibonacci Type Numbers and Polinomları, Kenan Kaygısız, Adem Şahin, Rocky Mountain Journal of Math., accepted, 2013.

3. A new method to compute the terms of generalized order-k Fibonacci numbers Kenan Kaygısız, Adem Şahin, Journal of Number Theory, 133, 3119-3126, 2013.

b. SCI, SSCI, AHCI dışında uluslararası indeksler tarafından taranan dergilerde yayımlanan

1. Generalized Bivariate Lucas p-Polinomları and Hessenberg Matrices, Kenan Kaygısız, Adem Şahin, Journal of Integer Sequences, Vol. 15 Article 12.3.4, 2012.
2. Determinant and permanent of Hessenberg matrix and Fibonacci type numbers, Kenan Kaygısız, Adem Şahin, Gen. Math. Notes, Vol.9, No.2, 2012.
3. New Generalizations of Lucas Numbers, Kenan Kaygısız, Adem Şahin, Gen. Math. Notes, Vol.10, No.1, 2012.
4. Generalized Van der Laan and Perrin Polinomları, and Generalizations of Van der Laan and Perrin Numbers, Kenan Kaygısız, Adem Şahin, Selcuk Journal of Applied Math., Vol.14, No.1, 89-103, 2013.

c. Uluslararası sempozyum/kongrelerde yayımlanan özet metin

1. On the Generalized Fibonacci polynomials, Adem Şahin, Kenan Kaygısız, 15. Antalya Algebra Days, İzmir-Şirince, 2013.
2. Generalized Fibonacci polynomials and inverse of triangular matrices, Kenan Kaygısız, Adem Şahin, ICMAA-2013, Konya, 2013.
3. Computing k sequences of the generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers, Adem Şahin, Kenan Kaygısız, ICMAA-2013, Konya, 2013.

d. Ulusal sempozyum/kongrelerde yayımlanan özet metin

1. Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci p - polinomları üzerine, Adem Şahin, Kenan Kaygısız, 8. Ankara Matematik Günleri, 2013
2. Fibonacci Sayı Dizileri Kullanılarak Tanımlanmış Bazı Yeni Dizi Uzayları, Serkan Demiriz, Adem Şahin, 8. Ankara Matematik Günleri, 2013
3. Lucas sayı dizisinin genelleştirilmesi üzerine, Adem Şahin, Kenan Kaygısız, 25. Ulusal Matematik Sempozyumu, Niğde, 2012.
4. Genelleştirilmiş k -Basamak Sayıların k Dizisi, Adem Şahin, Kenan Kaygısız, 24. Ulusal Matematik Sempozyumu, Bursa, 2011.

5. Genelleştirilmiş k -Basamak Fibonacci Sayılarının k Dizisi Üzerine, Adem Şahin, Kenan Kaygisiz, 23. Ulusal Matematik Sempozyumu, Kayseri, 2010.

e. Burslar

2211 YURT İÇİ DOKTORA BURS PROGRAMI, TÜBİTAK-Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı, 2011

e. Projeler

2009/46 Gaziosmanpaşa Üniversitesi BAP Projesi: "Bazı Genelleştirilmiş k -Basamak Sayı Dizilerinin İncelenmesi"