

**KESİRLİ ANALİZDE LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI
BİYOFİZİKSEL UYGULAMALARI**

Fahri ÖZKARA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2013

ANKARA

Fahri ÖZKARA tarafından hazırlanan “KESİRLİ ANALİZDE LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI BİYOFİZİKSEL UYGULAMALARI” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Fatma AYZAZ

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yeter ŞAHİNER

.....

Matematik Eğitimi Anabilimi Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma AYZAZ

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Adil MISIR

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 13/02/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fahri ÖZKARA

**KESİRLİ ANALİZDE LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI
BİYOFİZİKSEL UYGULAMALARI**
(Yüksek Lisans Tezi)

Fahri ÖZKARA

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Şubat 2013

ÖZET

Bu çalışmada kesirli analiz için Laplace dönüşümleri ve bazı biyofiziksel uygulamaları incelenmiştir. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölüm matematiksel ön bilgilerden oluşmaktadır. Bu bölüm Laplace dönüşümleri, Gama fonksiyonu, Hata fonksiyonu, Dawson fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu konularını ve bu fonksiyonların grafiklerini içermektedir. Üçüncü bölüm kesirli analizin matematiksel araçları ile ilgilidir. Bu bölüm kesirli integrasyon, Riemann-Liouville kesirli integrasyonu, Weyl kesirli integrasyonu, kesirli türev, kesirli integrasyon ve türev alma için Laplace dönüşümü ilişkileri, kesirli mertebeli diferansiyel denklemler konularından oluşmaktadır. Dördüncü bölüm kesirli analizin biyofiziksel uygulamalarından oluşmaktadır. Bu bölümde, kesirli mertebeden türevler ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile tanımlanabilen bir biyofizik probleminin örneği olarak sinir uyarılmasının basit bir modeli incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar Kelimeler : Laplace Dönüşümleri, Kesirli İntegrasyon, Kesirli Türev,
Kesirli Diferansiyel Denklem

Sayfa Adedi : 95

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Fatma AYZ

**LAPLACE TRANSFORMS OF FRACTIONAL CALCULUS AND SOME OF
THE BIOPHYSICAL APPLICATIONS**

(M.Sc. Thesis)

Fahri ÖZKARA

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

February 2013

ABSTRACT

In this study, Laplace transforms for fractional calculus and some of the biophysical applications are investigated. The thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction. The second chapter consists of mathematical background. This chapter involves Laplace transforms, the Gamma function, the Error function, the Dawson function, the Mittag-Leffler function and graphics of these functions. The third section is related to the mathematical tools of fractional calculus. This chapter consists of fractional integration, Riemann-Liouville fractional integration, Weyl fractional integration, fractional derivatives, fractional integration and derivation relations for the Laplace transform, and the topics of fractional order differential equations. The fourth chapter consists of a fractional analysis, some of the biophysical applications. In this chapter, the fractional derivatives and fractional order differential equations can be identified with a biophysical model of the problem as an example of simple nerve stimulation were examined.

Science Code : 204.1.138

**Key Words : Laplace Transforms, Fractional Integration, Fractional
Derivative, Order Differential Equations**

Page Number : 95

Adviser : Assist. Prof. Dr. Fatma AYZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, danışmanım Doç. Dr. Fatma AYZ'a, beni her zaman destekleyen aileme ve tezin düzenlenmesinde yardımlarını esirgemeyen Emre DEMİRBAŐ'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
2. MATEMATİKSEL ÖNBİLGİLER	3
2.1. Laplace Dönüşümleri	3
2.2. Gama Fonksiyonu	8
2.3. Hata Fonksiyonu	13
2.4. Dawson Fonksiyonu	18
2.5 Mittag-Leffler Fonksiyonu	21
3. KESİRLİ ANALİZİN MATEMATİKSEL ARAÇLARI	36
3.1. Kesirli İntegrasyon	36
3.1.1. Riemann- liouville kesirli integrasyonu	42
3.1.2. Weyl kesirli integrasyonu	49
3.2. Kesirli Türev	52
3.3. Kesirli İntegrasyon ve Türev Alma için Laplace Dönüşümü İlişkileri	59
3.4. Kesirli Mertebeli Diferansiyel Denklemler	62
4. ZARLARIN KESİRLİ ANALİZ MODELLERİ VE ZAR ÖZELLİKLERİ	74

	Sayfa
4.1. Sınır Uyarılması.....	74
4.2. Kuvvet-Süre Modelleri.....	76
4.3. Zar Yüklemenin Kesirli Analiz Modeli.....	83
KAYNAKLAR	93
ÖZGEÇMİŞ	95

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Laplace Dönüşüm İşlemleri.....	4
Çizelge 2.2. Kesirli Analizde Kullanılan Laplace Dönüşüm Çiftleri.....	5
Çizelge 2.3. Üstel ve Mittag-Leffler Fonksiyonlarına Karşılık Gelen Gösterimleri İçeren Laplace Dönüşüm Çiftleri.....	31
Çizelge 2.4. Özel Fonksiyonları İçeren Laplace Dönüşüm Çiftleri.....	33
Çizelge 3.1. Kesirli İntegral ve Türev Örnekleri	50

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $x > 0$ için gama fonksiyonu grafiği.....	10
Şekil 2.1. Pozitif ve negatif x değerleri için gama fonksiyonu $\Gamma(x)$ grafiği.....	11
Şekil 2.3. erf (x) ve erfc(x) fonksiyonlarının grafikleri.....	17
Şekil 2. 2. daw(x) ve daw(\sqrt{x}) Dawson fonksiyonlarının grafikleri.....	19
Şekil 2.5. Seçilen Mittag-Leffler fonksiyonlarının grafikleri.....	24
Şekil 2.6. $E_{1/2}(-\sqrt{x}) = e^x \text{erfc}(\sqrt{x})$ Mittag-Leffler fonksiyonunun, üstel fonksiyon (e^{-x}) ve gerilmiş üstel fonksiyon ($e^{-\sqrt{x}}$) ile karşılaştırılması	25
Şekil 3.1. k 'nin 0 ile 1 arasındaki değerleri için, $[t^{k-1}/\Gamma(k)]$ kesirli integrasyon ağırlık fonksiyonunun grafiği.....	44
Şekil 3. 2. $1/2$, $3/2$ ve 2. mertebeden bir $u(t)$ birim basamak fonksiyonunun tamsayı ve kesirli kuvvet integrasyonu.....	46
Şekil 3.3. Yarı-mertebeden kesirli diferansiyel denklemin tamamlayıcı çözümünün (Riemann-Liouville türev tanımını kullanan) birinci mertebeden adi diferansiyel denklemininle karşılaştırılması.....	66
Şekil 3. 4. $a = b = 1$ ve $F_0 = 1$ ile başlangıç koşulları ihmal edilerek, birinci mertebeden bir sistemin ve kesirli $1/2$ mertebesinden bir sistemin basamak yanıtlarının karşılaştırılması.....	69
Şekil 3. 5. Birinci mertebeden bir sistem ve $1/2$. mertebeden bir sistemin doğal davranışlarının karşılaştırılması.....	72
Şekil 4.1. Kuvvet – süre eğrileri.....	75
Şekil 4.2. (a) Zar depolarizasyonu (b) Tipik bir sinir hücresi için kuvvet - süre eğrisi.....	76
Şekil 4.3. Weiss, Lopicque ve Nernst empirik kuvvet-süre eşitliklerinin karşılaştırılması.....	82
Şekil 4.4. $t=0$ anında I_{mo} sabit akımının uygulanmasıyla sinir simülasyonu için $R-C$ devre modeli.....	83

Şekil	Sayfa
Şekil 4.5. Zar kapasitansının kesirli mertebe yükleme modeli için şematik diyagram.....	85
Şekil 4.6. Kesirli kapasitör zar modelinin $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ ve 1.0 için bir adım giriş akımına karşılığının grafi.....	85
Şekil 4.7. Kurbağa diz kası fiberinde akımda bir adım fonksiyonu girişi için normalleşmiş geçiş voltajı karşılığı.....	86
Şekil 4.8. $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ ve 1.0 değerleri için kuvvet-süre denkleminin zamana karşı kesirli mertebe grafiği.....	88
Şekil 4.9. İlave R_0 seri direncine sahip bir sinir zarının kesirli mertebe kapasitör modeli için eşdeğer devresi.....	91

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$L\{F(t)\}$	Laplace dönüşümü
$L^{-1}\{f(s)\}$	Ters Laplace dönüşümü
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
$\text{erf}(x)$	Hata fonksiyonu
$\text{erfc}(x)$	Tamamlayıcı hata fonksiyonu
$\text{daw}(x)$	Dawson fonksiyonu
$E_{\alpha}(x)$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu
$E_{\alpha,\beta}(x)$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu
$\gamma(\alpha, x)$	Eksik Gama fonksiyonu
${}_1F_1(a; c; x)$	Birleşik hipergeometrik fonksiyon
${}_0D_t^{-\alpha}$	Riemann-Liouville kesirli integrali
${}_aD_t^{-\alpha}$	Weyl kesirli integrasyonu
${}_0^C D_t^{\alpha}$	Caputo kesirli türevi
${}_aD_t^{\alpha}$	Riemann-Liouville kesirli türevi

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve integral hesaplarının uygulama alanı gittikçe artmaktadır. Bu konudaki temel matematiksel fikirler çok önceleri Leibniz(1684), Louville(1834), Riemann (1892), ve diğer matematikçiler tarafından geliştirilmiş ve 1890 lı yıllarda da Oliver Heaviside tarafından mühendislik alanının gündemine taşınmış olsa da, konu hakkındaki ilk kitap ancak 1947 yılında Oldham ve Spanier tarafından yayınlanmıştır. Hâlihazırda devam eden çalışmalarda kesirli analiz; fizik, sürekli ortamlar mekaniği, sinyal işleme ve elektromanyetik gibi alanlardaki kullanılmaktadır fakat biyomühendislik alanında çok az sayıda örneği bulunmaktadır. Tam anlamıyla ısı aktarımı, elektrot/elektrolit davranışları ve eşik altı sinir yayılımı gibi genel olarak mühendisliklerde karşılaşılan problemleri oluşturan olayları tanımlamaktadır ve bu fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmaktadır.

Çavuş (2006) şöyle demektedir [1].

“Türev ve integral genel olarak teknolojinin temelini oluşturmaktadır ve aynı zamanda doğal ve yapay sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada çok önemli bir araçtır. Kesirli diferansiyel, matematiksel analizin bir kolu olarak, kendi adından da tahmin edileceği üzere, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş bir seklidir. Konu, diferansiyel hesap kadar eski olup Leibniz ve Newton’un diferansiyel hesaplama tekniğini bulmalarına kadar uzanır (Bayın S., 2004).

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevlerinin nasıl alındığını biliyoruz fakat $3/2$ nci türevini nasıl alabiliriz? Aynı şekilde bir fonksiyonu iki ya da üç kez integre edebiliriz ama $1/2$ defa integre edebilir miyiz? Leibniz 1695’te L’Hospital’a sorduğu “Tam sayı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genelleştirilebilir mi?” sorusu kesirli diferansiyelin doğum tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz’in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Leibniz’in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grunwald ve

Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmışlardır (Loverro A., 2004).

O günden bu yana hızla artan bir biçimde, kesirli diferansiyel denklemler birçok fiziksel süreçlere uygulanmıştır ve incelenen fiziksel süreçleri çok daha iyi betimleyen sonuçlar elde edilmiştir. Viscoelasticity, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler, birçok difüzyon süreçleri ve benzeri konular bu uygulamalar arasında yer almaktadır.

Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 20.yy. bitmeden ortaya koyulmuştur fakat mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar elde edilmesi ancak geçtiğimiz yüzyıl içerisinde gerçekleşebilmiştir. Şu var ki kesirli diferansiyel denklemlerin anlaşılmasının oldukça güç olmasının yanı sıra tamsayı kuvvetli diferansiyellere göre daha doğru ya da kesin olduğu da söylenemez.

Kesirli hesabın tanımları ve kullanımını anlamak için bazı matematik tanımların iyi bilinmesi gerekmektedir”.

2. MATEMATİKSEL ÖNBİLGİLER

Laplace dönüşüm teorisi ve özel fonksiyonlar (örneğin; gama, hata), kesirli analizin gelişiminde önemli bir role sahiptir. Bunların yanısıra, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde, Dawson fonksiyonu ve Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu yüzden, öncelikli olarak, bu temel matematiksel araçların tanımları ve özelliklerini incelemek yerinde olacaktır.

2.1. Laplace Dönüşümleri

Matematikte sınır değer problemleri dahil diferansiyel denklemleri çözmekte ve olasılık teorisinde, mühendislik alanında, zamandan bağımsız doğrusal sistemleri modellemekte kullanılan önemli bir dönüşümdür. Genel anlamda bir fonksiyonun tanım kümesini zamandan frekansa çevirir. Zaman tanım kümesinde çözmesi zor olan diferansiyel denklemler frekans tanım kümesinde daha basit cebirsel denklemlere dönüştüğünden diferansiyel denklemleri çözmekte kullanılırlar. $f(s)$; aşağıda gösterildiği gibi, $e^{-st}F(t)$ 'nin, 0 ve sonsuz aralığında integralinin alınması ile bulunur:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

Bu tanıma birçok yararlı özellik izlemektedir. Bu özellikler Çizelge 2.1.'de verilmektedir.

Ters Laplace dönüşümü $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$, karmaşık düzlemde değerlendirilmesi gereken bir ters integral ile tanımlanır:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-jb}^{a+jb} e^{st} f(s) ds$$

Dönüşüm işlemlerini basitleştirme amaçlı olarak, zaman (t) ve frekans (s) bölgeleri arasında geçiş yapmak için Laplace dönüşümü çizelgeleri kullanılmaktadır. Çizelge 2.2.'de, bazı Laplace fonksiyonların dönüşümlerine dair kısa bir liste verilmektedir. Çizelge 2.2.; Laplace dönüşümünün, Çizelge 2.1.'in son iki satırında verilen ölçekleme ve öteleme özelliklerinden yararlanılarak, kolaylıkla elde edilebilir. Daha kapsamlı çizelgelere pekçok kaynaktan ulaşmak mümkündür.

Çizelge 2.1. Laplace dönüşüm işlemleri

$F(t)$	$f(s)$
$F(t)$	$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$
$aF(t) + bG(t)$	$af(s) + bg(s)$
$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt}$	$sf(s) - F(0^+)$
$F''(t) = \frac{d^2F(t)}{dt^2}$	$s^2f(s) - sF(0^+) - F'(0^+)$
$F^{(n)}(t)$	$s^n f(s) - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - \dots - F^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t F(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} f(s)$
$\int_0^t \int_0^{\tau} F(r) dr d\tau$	$\frac{1}{s^2} f(s)$
$\int_0^t \int_0^{\tau} \int_0^r F(\lambda) d\lambda dr d\tau$	$\frac{1}{s^3} f(s)$
$\int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-2} \dots \int_0^{t_1} F(t_0) dt_0$	$\frac{1}{s^n} f(s)$

Çizelge 2.1. (Devamı) Laplace dönüşüm işlemleri

$F(t)$	$f(s)$
$\int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)d\tau$	$f_1(s)f_2(s)$
$\frac{1}{c}F(t/c), c > 0$	$f(cs)$
$e^{at}F(t)$	$f(s-a)$

Burada, n bir tamsayı; a, b ve c de birer sabittir. $F(0^+)$ sembolü, t sıfıra sağdan yaklaşırken $F(t)$ 'nin limit değerini, $F'(t)$ ise türevini göstermektedir.

Çizelge 2.2. Kesirli analizde kullanılan Laplace dönüşüm çiftleri

$f(s)$	$F(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ for $n = 1,2,3 \dots$
$\frac{1}{s^k}$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$ $k > 0$
$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s^{3/2}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$e^{-\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left[-\frac{1}{4t}\right]$
$\frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}}$	$\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$
$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{1}{4t}\right]$
$\frac{1}{s^{3/2}} e^{-\sqrt{s}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{4t}\right] - \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$

Çizelge 2.2. (Devamı) Kesirli analizde kullanılan Laplace dönüşüm çiftleri

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{\sqrt{s} + 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc}[\sqrt{t}]$
$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + 1)}$	$e^t \operatorname{erfc}[\sqrt{t}]$
$\frac{1}{s(\sqrt{s} + 1)}$	$1 - e^t \operatorname{erfc}[\sqrt{t}]$
$\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s} + 1}$	$\frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}} - e^{t+1} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$
$\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + 1)}$	$e^{t+1} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$
$f(s)$	$F(t)$
$\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s} + 1)}$	$\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right] - e^{t+1} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$
$\frac{1}{\sqrt{s+1}}$	$\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$	$\operatorname{erf}\sqrt{t}$
$\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$	$e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}$
$\frac{1}{\sqrt{s}(s+1)}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{daw}\sqrt{t}$
$\frac{\sqrt{s}}{s-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}$
$\frac{\sqrt{s}}{s+1}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{daw}\sqrt{t}$

Çizelge 2.2. (Devamı) Kesirli analizde kullanılan Laplace dönüşüm çiftleri

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{s(s-1)}$	$e^t - 1$
$\frac{1}{s^{3/2}(s-1)}$	$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{s^{3/2}(s+1)}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{daw}\sqrt{t}$

Burada $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du$, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$,
 $\operatorname{daw}(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} du$, ve $\delta(t)$ ise $t \neq t_0$ ve $\int_{-\infty}^\infty \delta(t - t_0) dt = 1$ için $\delta(t - t_0) = 0$ ile tanımlanan Dirac delta fonksiyonudur.

Örneğin, Ruel Churchill'in işlemsel matematik [2] üzerine olan kitabına ya da Roberts ve Kaufmann'ın "Laplace Dönüşümü Çizelgeleri" [3] kitabına bakılabilir. Bu Laplace dönüşümünü kesirli analize taşımadaki ana unsur; frekans yani s bölgesinde, irrasyonel fonksiyonlar yani s 'nin kesirli kuvvetlerini içeren fonksiyonlar için dönüşüm çiftlerinin bulunabilirliğidir. Örneğin, \sqrt{s} 'yi içeren bazı integral ifadeler, yayımlanan çoğu Laplace dönüşümü çizelgesinde bulunurken, pek çoğunda da bulunmamaktadır.

Bu bölümde, kesirli analizde en faydalı olabilecek dönüşüm çiftlerinden bazılarının özellikleri incelenecek ve listelenecektir. Bu ifadeler, $\frac{1}{2}$. mertebeden ve diğer kesirli diferansiyel denklemlere karşılık gelen transfer fonksiyonlarında oldukça sık görülmektedir. Çizelgelerde; gama, hata, Dawson ve Mittag-Leffler gibi özel fonksiyonlar sıklıkla yer aldığından, bu fonksiyonların tanımlarını ve özelliklerini özet halinde incelemek yerinde olacaktır.

2.2. Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonunun, ileri matematikte uygulaması olan pekçok gösterimi bulunmaktadır. Integral gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du$$

$\Gamma(x)$ 'in sıfırla sonsuz aralığındaki grafiği (Şekil 2.1), minimum değeri $x = 1.46$ 'da yaklaşık 0.885 olan yukarı konkav bir fonksiyona işaret etmektedir. x sıfıra yaklaşırken ve x sonsuza doğru artarken gama fonksiyonu sonsuza yaklaşır.

Gama fonksiyonunun integral gösteriminden;

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^x du$$

yazılabilir ve kısmi integrasyon ile;

$$\Gamma(x + 1) = [(-e^{-u} u^x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-u}) x u^{x-1} du$$

olduğu gösterilebilir.

Köşeli parantez içindeki terimin limitleri değerlendirildikten sonra ise,

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

sonucuna ulaşılır. Bu yineleme ilişkisi x 'in tam değerleri için faktöriyel işlemini tanımlamak üzere kullanılabilir, çünkü $\Gamma(1) = 1$ dir.

Böylece, bir n sayısı için,

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$$

yazabiliriz. Böylece, gama fonksiyonunun integral gösterimi; kesirli değerler için de faktöriyel hesabı yapmayı mümkün kılmaktadır.

Örneğin;

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

Burada $\Gamma(1/2)$ değerini bulmak için,

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

belirli integralini kullandık, çünkü

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Gama fonksiyonu için alternatif bir tanım kullanabiliriz:

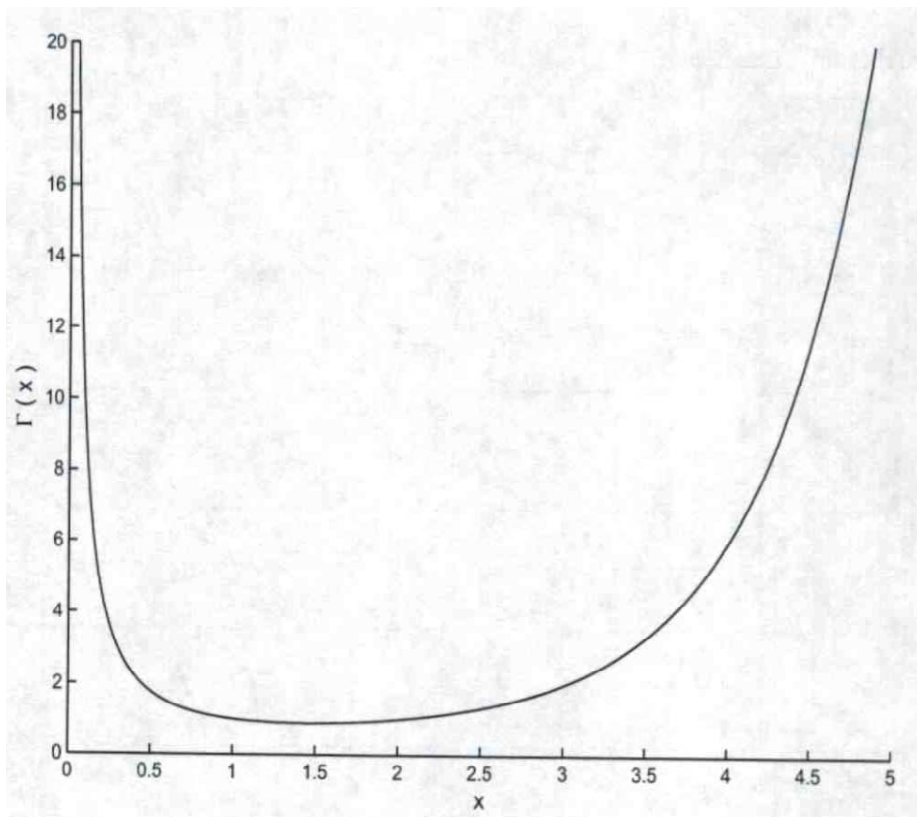
$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n)}$$

Bu tanım, $x > 0$ için integral gösterime eşdeğerdir. Bu tanım göstermektedir ki; $x = 0$ ve tüm negatif tamsayılar ($x = -1, -2, -3, \dots$) haricinde gama fonksiyonu $x < 0$ için tanımlanabilir.

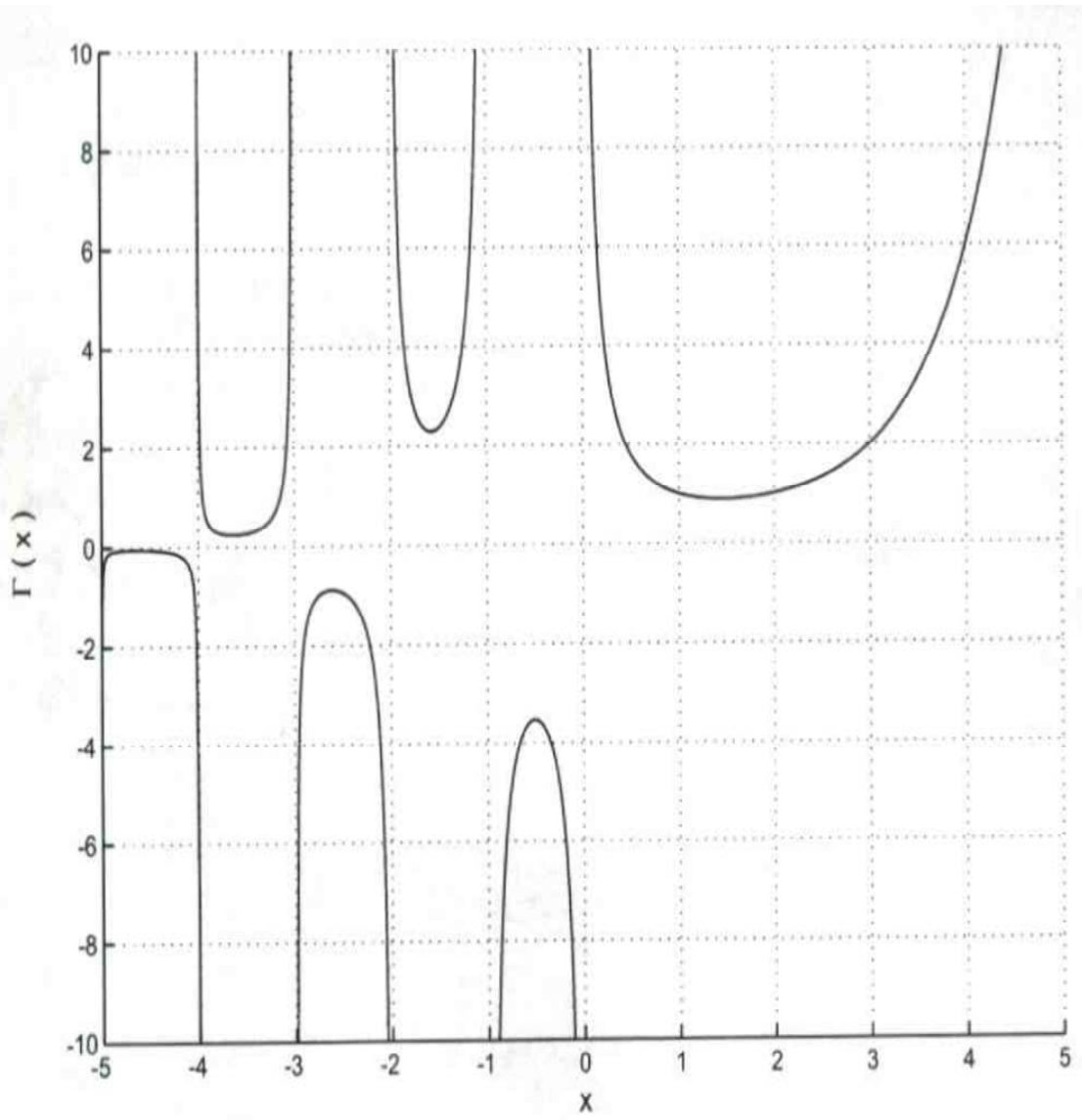
Böylelikle, hem negatif hem de pozitif x değerleri için tanımlandığında, gama fonksiyonunun grafiği (Şekil 2.2), herbiri ya yukarı ya da aşağı konkav olan ve herbiri ya bir minimum ya da bir maksimum değere sahip olan, birbirini izleyen bölümlerden oluşur. Şimdi yineleme ilişkisini kullandığımızda,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x}$$

eşitliğini yazabiliriz.



Şekil 2.1. $x > 0$ için gama fonksiyonu grafiği



Şekil 2.2. Pozitif ve negatif x değerleri için gama fonksiyonu $\Gamma(x)$ grafiği

x 'in tüm mümkün negatif değerlerinde faktöriyel ve gama fonksiyonunu bulabiliriz.

Örneğin;

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)}{(-1/2)} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(-1/2)}{(-3/2)} = -\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\left(-\frac{7}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(-3/2)}{(-5/2)} = -\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

Gama fonksiyonu, s 'nin kesirli kuvvetlerinin ters Laplace dönüşümlerinin bulunmasında merkezi bir rol oynar. Örneğin; n bir tamsayı olmak üzere, $F(t) = t^n$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün standart ifadesini düşünelim:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Bu ifadeyi, n 'nin tamsayı olmayan değerleri için aşağıdaki şekilde genişletebiliriz:

$$F(t) = t^x \text{ olsun.}$$

Laplace dönüşümü tanımını kullanarak

$$L\{t^x\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^x dt$$

ifadesini elde ederiz.

$u = st$ aldığımızda ise

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^x \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{x+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^x du$$

şeklinde yazabiliriz ya da

$$L\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}, x > -1$$

diyebiliriz. Eğer, örneğin, $x = -1/2$ alırsak

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

olur ve $s^{-1/2}$ için ters Laplace dönüşümünü

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

şeklinde buluruz.

2.3. Hata Fonksiyonu

Hata fonksiyonunun ortaya çıkışı, bir boyutlu ısı transferi probleminin çözümü hakkındaki tarihsel tartışmanın ilk zamanlarına dayanmaktadır. Gama fonksiyonu gibi, hata fonksiyonu da bir integral ile tanımlanan özel fonksiyonlar sınıfındadır. Hata fonksiyonu; olasılık teorisi, difüzyon ve ısı transferi konuları açısından önem taşımaktadır.

Hata fonksiyonu şu integral ile tanımlanır:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad -\infty < x < \infty$$

Hata fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = \infty$ 'daki değerleri, fonksiyonun tanımından, aşağıdaki gibi kolaylıkla bulunabilmektedir:

$$\operatorname{erf}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-u^2} du = 0$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{-1/2} dv = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Tamamlayıcı hata fonksiyonu ise şöyle tanımlanır:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du$$

Bu tanıımı şöyle yazmak da mümkündür:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Böylece ifade, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ ifadesine indirgenmiş olur. Bu da $\operatorname{erfc}(x)$ fonksiyonunun özelliklerinin, $\operatorname{erf}(x)$ fonksiyonun özellikleri cinsinden yazılabildiğini sağlar.

$\operatorname{erf}(x)$ ve $\operatorname{erfc}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 2.3'te verilmektedir.

Hata fonksiyonunun kuvvet serisi gösterimi, üstel fonksiyonu kendi kuvvet serisi cinsinden genişleterek ve sonrasında toplama ve integrasyonun sırası değiştirilerek elde edilebilir.

Bu, yakınsak bir kuvvet serisi için geçerlidir ve terim terim integrasyon sonunda aşağıdaki seri gösterimi elde edilir:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)}, \quad |x| < \infty$$

Tamamlayıcı hata fonksiyonunun asimptotik seri açılımı, x 'in büyük değerleri için, tekrarlı bir kısmi integrasyon ile elde edilebilir:

$$\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5. \dots (2n-1)}{(2x^2)^n} \right], \quad x \rightarrow \infty$$

Hata ve tamamlayıcı hata fonksiyonları, sıklıkla, ısı ya da difüzyon denklemlerinin Laplace dönüşümü çözümleri esnasında karşımıza çıkmaktadır. Bu durumlarda, \sqrt{s} ya da $e^{-\sqrt{s}}$ içeren dönüşümler bulunmaktadır.

Basit bir örnek olarak,

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s+a}} \right\}$$

ifadesini ele alalım. Burada a bir sabittir.

Üstel öteleme teoreminden biliyoruz ki;

$$L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$$

Önceki örnekten biliyoruz ki;

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s+a}} \right\} = \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$$

eşitliğini elde etmiştik ve integrasyonun Laplace dönüşümü,

$$L \left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} f(s)$$

şeklinde yazılabildiğinden,

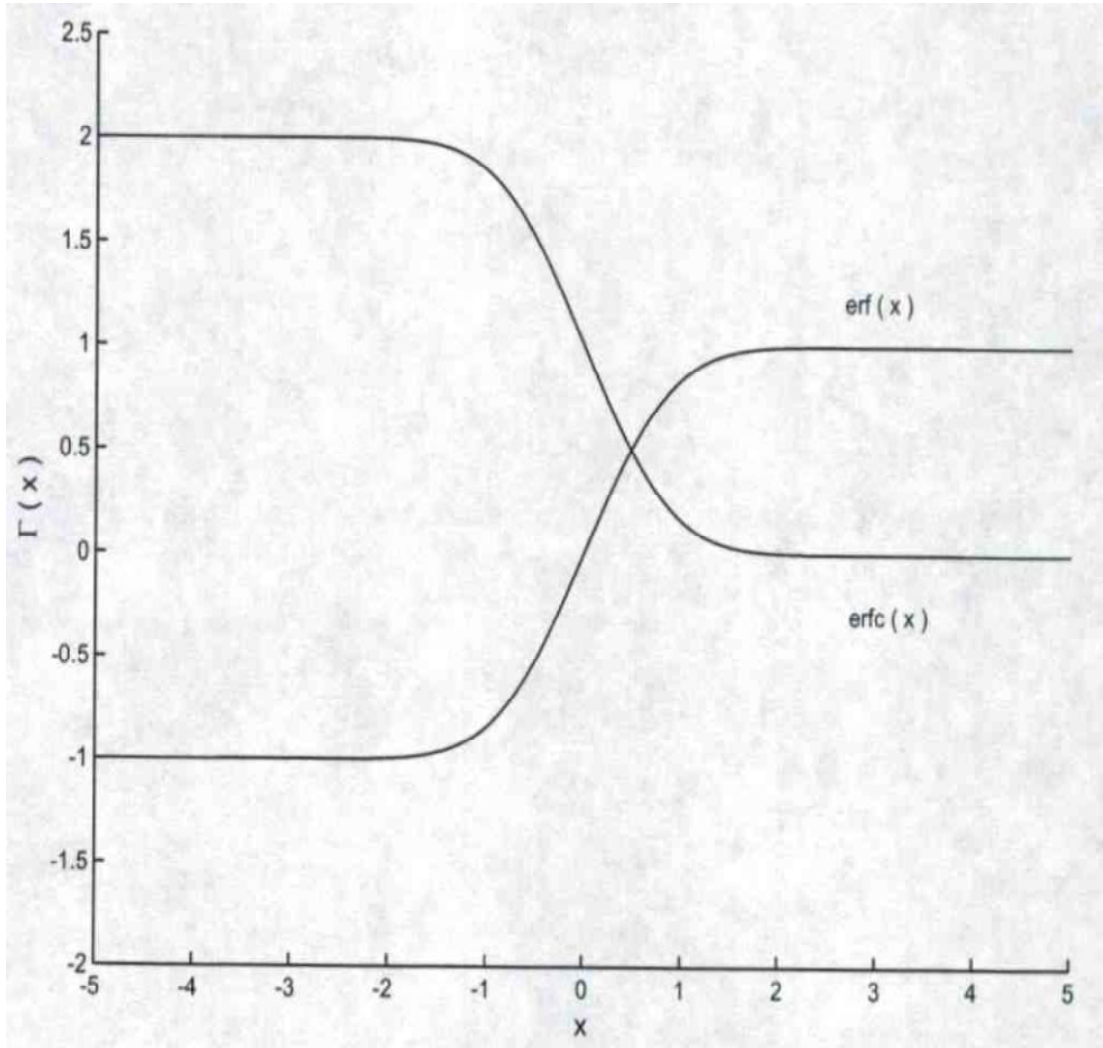
$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s+a}} \right\} = \int_0^t \frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} d\tau$$

olur. Eğer $u^2 = a\tau$ alırsak, $2u du = a d\tau$ olur ve değişken değiştirerek,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-u^2} \frac{(2u du)}{a\sqrt{\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-u^2} du$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade de son olarak, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s+a}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$$



Şekil 2.3. erf (x) ve erfc(x) fonksiyonlarının grafikleri

$\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$ olduğundan $\text{erf}(x)$ tek fonksiyondur; fakat $\text{erfc}(x)$ tek fonksiyon değildir. Çünkü; $\text{erfc}(-x) = 2 - \text{erfc}(x)$ eşitliği elde edilmektedir.

2.4. Dawson Fonksiyonu

Dawson fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$daw(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} du$$

Dawson fonksiyonu,

$$daw(-x) = -daw(x)$$

eşitliğini sağladığından tek fonksiyondur ve aşağıdaki kuvvet serisi gösterimine sahiptir:

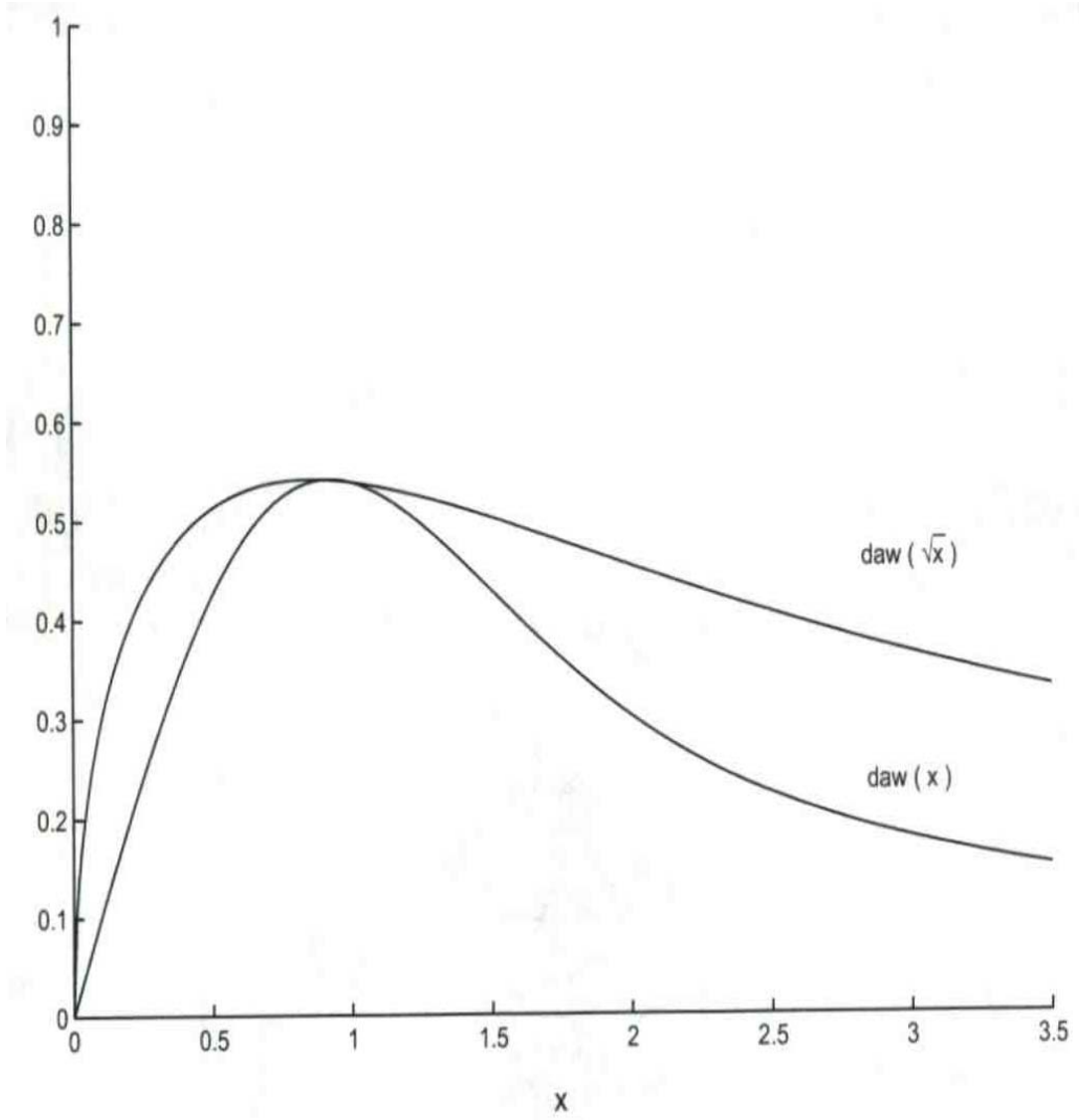
$$daw(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} - \dots$$

$$daw(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x^2)^k}{(2k+1)!}$$

Burada $(2k+1)! = (2k+1)(2k-1)(2k-3) \dots 5.3.1$ ve büyük x 'ler için, $daw(x)$ şu asimptotik seri ile gösterilebilir:

$$daw(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} + \dots$$

Dawson fonksiyonunun grafiği Şekil 2.4'te verilmektedir.



Şekil 2.4. $daw(x)$ ve $daw(\sqrt{x})$ Dawson fonksiyonlarının grafikleri

Dawson fonksiyonu, $x = 0.924$ 'te 0.541 değerinde bir maksimuma sahiptir. Dawson fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s-b}}\right\} = \int_0^t \frac{e^{b\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} d\tau$$

ifadesinden yola çıkarak elde edilir.

$u^2 = b\tau$ alındığında $2udu = d\tau$ olur. Yukarıdaki ifadede yerine konulduğunda,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s-b}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{b\pi}} \int_0^{\sqrt{bt}} e^{u^2} du$$

ifadesi elde edilir.

$L^{-1}\{f(s+b)\} = e^{-bt}F(t)$ olduğu için,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s+b)}\right\} = \frac{2}{\sqrt{b\pi}} e^{-bt} \int_0^{\sqrt{bt}} e^{u^2} du = \frac{2}{\sqrt{b\pi}} daw\sqrt{bt}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece,

$$L\{daw\sqrt{bt}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{s}(s+b)}$$

ifadesini elde ederiz. Bununla birlikte,

$$\frac{\sqrt{s}}{(s+b)} = \frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{b}{\sqrt{s}(s+b)}$$

olduğu için, aynı zamanda

$$L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{s}}{(s+b)} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{daw}\sqrt{bt}$$

ifadesini elde ederiz.

2.5 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli analizde önemli bir role sahip üstel fonksiyonun bir genellemesidir. Fonksiyon, Oliver Heaviside (1850-1925) ile aynı yıllarda yaşamış olan İskandinav matematikçi G.M. Mittag-Leffler (1846-1927) tarafından geliştirilmiştir.

Mittag-Leffler Stockholm’de doğdu ve 1872’de doktorasını aldığı Uppsala Üniversitesi’nde eğitim gördü. Günümüzdeki adı Stockholm Üniversitesi olan, Helsinki Üniversitesi’ne profesör olarak atanmadan önce Avrupa’nın pekçok yerinde çalıştı. Eliptik fonksiyonlar ve karmaşık değişkenler üzerine olan çalışmalarının yanı sıra, Mittag-Leffler, nüfuzlu bir dergi olan Acta Mathematica’nın [4] kurucusu ve baş editörü olması yanıyla tanınmıştır. Editör olarak, günümüzde “kesirsel analiz” olarak tabir edilen konuda önemli katkıları olan Cantor ve Poincaré gibi pekçok matematikçinin çalışmalarını desteklemiştir.

Üstel fonksiyonların, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin doğal çözümleri olması gibi, Mittag-Leffler fonksiyonları da kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Bununla birlikte, bir diferansiyel denklemin kesirsel mertebesi 1’e yaklaştıkça, Mittag-Leffler fonksiyonu üstel çözüme yakınsar. Mittag-Leffler fonksiyonunun bir ve iki parametrelili gösterimleri aşağıdaki gibi yazılan bir kuvvet serisi ile tanımlanabilir:

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0)$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

Burada α ve β parametreleri sadece gama fonksiyonu içinde görünmektedirler. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, 1953'te R.P. Agarwal [5] tarafından ileri sürülmüştür.

$E_{\alpha,\beta}(x)$ 'nin bir tam fonksiyon (örneğin, karmaşık düzlemin her yerinde türevlenebilir) olmasına rağmen, bu çalışmada sadece reel değerler kullanılacaktır. Dikkat edilmelidir ki; $E_{\alpha,\beta}(0) = 1$.

Mittag-Leffler fonksiyonu, parametrelerinin belli değerleri için bilinen fonksiyonlara indirgenir.

Örneğin;

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{1/2,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k/2+1)} = e^{x^2} \operatorname{erfc}(-x)$$

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$E_{2,1}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x)$$

$$E_{2,2}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(x)}{x}$$

$x > 0$ için bu fonksiyonların grafikleri Şekil 2.5'te verilmektedir.

Mittag-Leffler fonksiyonunun önemli bir karakteristik özelliği, asimptotik davranışdır. Argüman x için $x \leq 0$ olması durumunda, Mittag-Leffler fonksiyonu monoton olarak azalır. Özellikle x 'in büyük değerleri için,

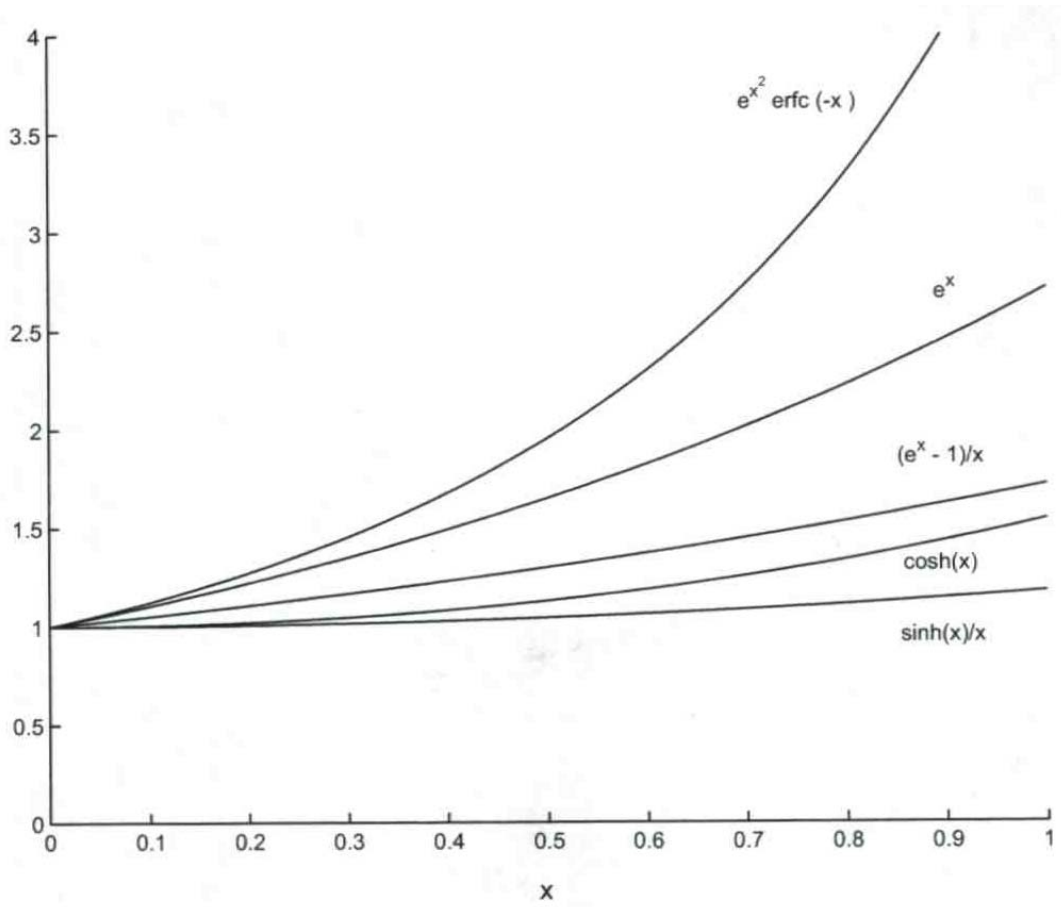
$$E_{\alpha,\alpha}(-x) \approx \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x^2} \quad \alpha \neq 1$$

$$E_{\alpha,\nu}(-x) \approx \frac{\alpha}{\Gamma(\nu-\alpha)} \frac{1}{x} \quad \nu \neq \alpha$$

$$E_{\alpha,1}(-x) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x} \quad \alpha \neq 1$$

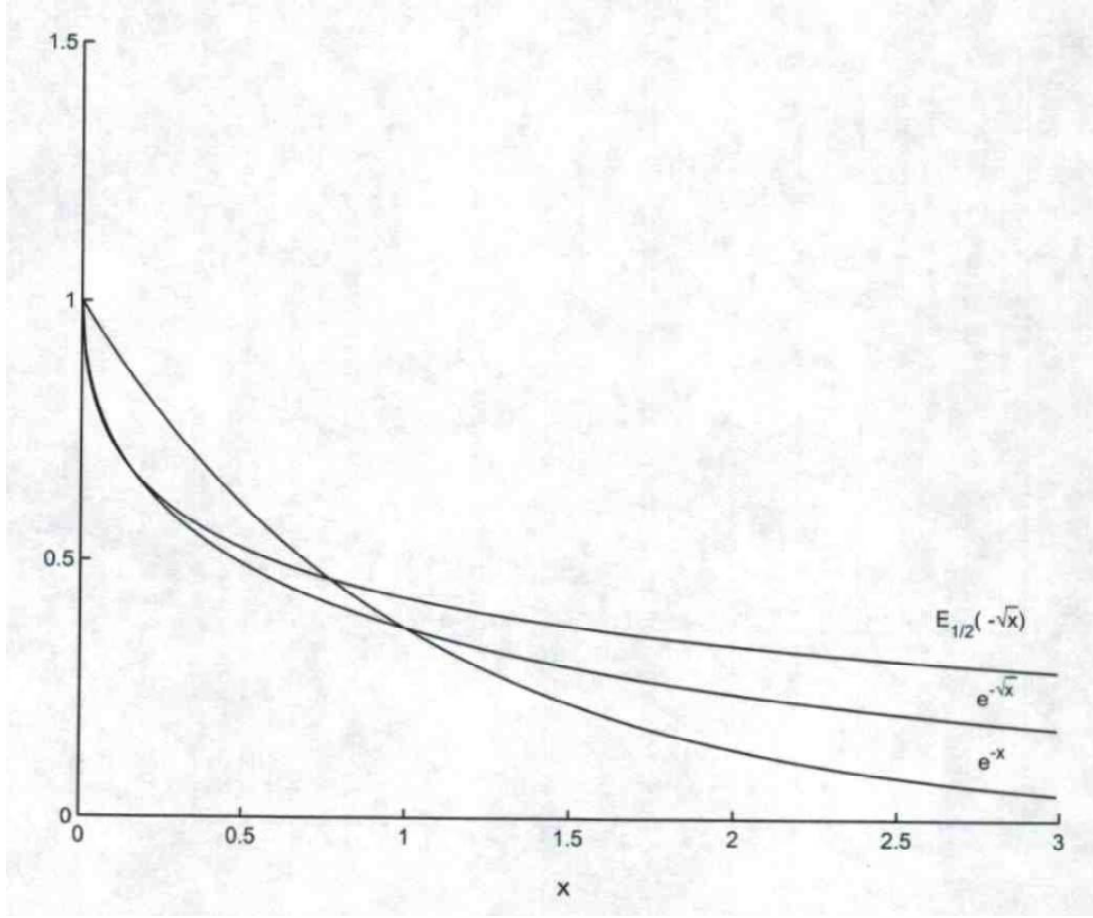
yazabiliriz. Bununla birlikte,

$$E_{\alpha,1}(-x^\alpha) = \begin{cases} 1 - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} & x \rightarrow 0^+ \\ \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & x \rightarrow \infty \end{cases}$$



Şekil 2.5. Seçilen Mittag-Leffler fonksiyonlarının grafikleri

Mittag-Leffler fonksiyonunun, üstel fonksiyona (e^{-x}) ve hatta “gerilmiş” üstel fonksiyona ($e^{-\sqrt{x}}$) göre daha yavaş azalmasından ya da , bir diğer deyişle, Mittag-Leffler fonksiyonu grafiğinin uzun eğrisi bu davranış sebebiyledir. Bu davranışın bir örneği Şekil 2.6’da gösterilmektedir.



Şekil 2.6. $E_{1/2}(-\sqrt{x}) = e^x \operatorname{erfc}(\sqrt{x})$

Aşağıda, analizimiz için gerekli olan, Mittag-Leffler fonksiyonları arasındaki birkaç faydalı ilişki, kanıtları verilmeden listelenmektedir. Bu ilişkiler çoğu durumda, direkt olarak fonksiyonun tanımından elde edilmektedir.

Mittag-Leffler fonksiyonu, matematiksel fonksiyonlarla ilgili pekçok standart elkitabında tanımlanmamaktadır. Bununla beraber, Ahmed Zayed'in "Fonksiyon ve Genelleşmiş Fonksiyon Dönüşümü Elkitabı" nda [6] ; Igor Podlubny'nin "Kesirli Diferansiyel Denklemler" kitabında [7]; Alberto Carpinteri ve Francesco Mainardi'nin editörlüğünü yaptığı "Sürekli Ortamlar Mekaniğinde Fraktallar ve Kesirli Analiz" konulu monograf [8] ve A. Erdélyi'nin editörlüğünü yaptığı "Yüksek Transandantal Fonksiyonlar" serisinde [9], Mittag-Leffler fonksiyonu ve özellikleri detaylı bir biçimde incelenmektedir. Gorenflo ve diğerlerinin makalesinde [10] ise

$E_{\alpha,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu ve türevlerinin nümerik olarak değerlendirilmelerine yönelik algoritmalar bulunmaktadır.

İki-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonlarının arasındaki iki önemli ilişki aşağıda gösterilmektedir. Birinci olarak,

$$E_{\alpha,\beta}(x) + E_{\alpha,\beta}(-x) = 2E_{\alpha,\beta}(x^2) \text{ ve}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) - E_{\alpha,\beta}(-x) = 2xE_{2\alpha,\alpha+\beta}(x^2)$$

ilişkisi vardır. Örneğin;

$$E_{1,1}(x) + E_{1,1}(-x) = 2E_{2,1}(x^2) \text{ ve}$$

$$E_{1,1}(x) - E_{1,1}(-x) = 2xE_{2,2}(x^2)$$

$$2\cosh x = e^x + e^{-x} \text{ ve } 2\sinh x = e^x - e^{-x}$$

formüllerine karşılık gelir. İkinci olarak,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

ilişkisi vardır. Örneğin, $\alpha = \beta = 1/2$ için

$$E_{1/2,1/2}(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} + xE_{1/2,1}(x)$$

$x = -\sqrt{t}$ olsun. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ile birlikte

$$E_{1/2,1/2}(-\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{t} E_{1/2,1}(-\sqrt{t})$$

olur. Bu ifadeyi de aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} E_{1/2,1/2}(-\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - E_{1/2,1}(-\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t})$$

Benzer şekilde, $\alpha = 1$ ve $\beta = 1/2$ için,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} E_{1,1/2}(-t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \sqrt{t} E_{1,3/2}(-t)$$

ifadesini elde ederiz. Bazı uygulamalarda, Mittag-Leffler fonksiyonunun tamsayı mertebeli türevi ve integrasyonu da önemli olmaktadır. Bu durumda, aşağıdaki ilişki kullanılır:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x)$$

Örneğin, $\alpha = \beta = 1$ alırsak,

$$E_{1,1}(x) = \beta E_{1,2}(x) + x \frac{d}{dx} E_{1,2}(x)$$

olur. Mittag-Leffler fonksiyonu tanımını kullanarak bu denklemin ispatını yapabiliriz:

$$e^x = \frac{1}{x} [e^x - 1] + x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} (e^x - 1) \right]$$

$$e^x = \frac{1}{x} [e^x - 1] - \frac{1}{x} [e^x - 1] + e^x$$

$$e^x = e^x$$

Bu ilişki şöyle de yazılabilir:

$$\frac{d}{dx} [E_{\alpha,\beta}(x)] = [E_{\alpha,\beta-1}(x) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}(x)]/\alpha x$$

Örneğin, $\alpha = \beta = 2$ alırsak,

$$\frac{d}{dx} [E_{2,2}(x)] = \frac{[E_{2,1}(x) - E_{2,2}(x)]}{2x} = \frac{\cosh\sqrt{x} - \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{2x}$$

olur. Bunun da ispatı $E_{2,2}(x)$ 'nin adi türevi alınarak yapılabilir. Çünkü

$$E_{2,2}(x) = \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Ayrıca,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^p [x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)] = x^{\beta-p-1}E_{\alpha,\beta-p}(x^\alpha)$$

yazabiliriz. Burada p , herhangi bir pozitif tamsayıdır. Bu denklemde, $\alpha = \beta = 2$ olarak alırsak ve yanısıra birinci türevi ($p = 1$) alırsak;

$$\frac{d}{dx} [xE_{2,2}(x^2)] = E_{2,1}(x^2)$$

olur. Hiperbolik sinüs ve kosinüsü denklemde yerine koyduğumuzda,

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{\sinh(x)}{x} \right] = \cosh(x)$$

$$\cosh(x) = \cosh(x)$$

özdeşliğini elde ederiz. Mittag-Leffler fonksiyonunun seri gösteriminin, terim terim integrasyonu;

$$\int_0^t E_{\alpha,\beta}(\lambda\tau^\alpha)\tau^{\beta-1}d\tau = t^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda\tau^\alpha), \quad \beta > 0$$

ifadesini verir. Örneğin, $\alpha = \beta = 1/2$ için,

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} E_{1/2,1/2}(\lambda\sqrt{\tau}) d\tau = \sqrt{t} E_{1/2,3/2}(\lambda\sqrt{t})$$

elde edilir.

Bir ve iki-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümünü, birbiriyle ilişkili ve çok önemli olan, üç tane, has olmayan integral tanımlar. Bu integraller aşağıda verilmektedir:

$$\int_0^{\infty} t^{-1/2} E_{1/2,1/2}(\pm a\sqrt{t}) e^{-st} dt = \frac{1}{\sqrt{s} \pm a}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha}) e^{-st} dt = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \pm a}$$

$$\int_0^{\infty} E_{\alpha}(\pm at^{\alpha}) e^{-st} dt = \frac{s^{\alpha}}{s(s^{\alpha} \pm a)}$$

Son formül, aşağıda verilen yoldan kolaylıkla elde edilebilir: Önce tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun kuvvet serisi tanımını Laplace integralinde yerine koyalım. Böylece,

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} e^{-st} dt$$

ifadesini elde ederiz. Sonra integrasyon ve seri toplamının sırasını değiştirelim. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^{\infty} t^{\alpha k} e^{-st} dt$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi de

$$L\{t^{\alpha k}\} = \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}}$$

ifadesini kullanalım. Böylece,

$$\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pm a}{s^{\alpha}}\right)^k$$

geometrik serisini elde ederiz ki; o da,

$$|a/s^{\alpha}| < 1 \text{ ya da } s > |a|^{1/\alpha} \text{ için,}$$

$$\frac{1}{s} \frac{1}{1 \pm (a/s^{\alpha})} = \frac{1}{s} \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} \pm a}$$

toplamını verir. Böylelikle,

$$L\{E_{\alpha}(\pm at^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} \pm a}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla burada, s 'nin tamsayı kuvvetlerini içeren üstel fonksiyon için Laplace dönüşüm çiftlerinin; dönüşüm parametresi s 'nin kesirli kuvvetlerini içeren Mittag-Leffler fonksiyonlarına doğal bir açılımını görmüş oluyoruz.

Bu durum, Çizelge 2.3.'te verilen, s ve \sqrt{s} 'yi içeren Laplace dönüşüm çiftleri listesinde örneklerle ortaya konulmaktadır.

Çizelge 2.3. Laplace dönüşüm çiftleri

$f(s)$	$F(t)$	$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}E_{1/2,1/2}(-a\sqrt{t})$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s+a})}$	$E_{1/2}(-a\sqrt{t})$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$	$\frac{1}{s(\sqrt{s+a})}$	$\frac{1}{a}(1 - E_{1/2}(-a\sqrt{t}))$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{1}{(\sqrt{s+a})^2}$	$(1 + 2a^2t)E_{1/2}(-a\sqrt{t}) - 2a\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{\sqrt{s}}{s+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}E_{1,1/2}(-a^2t)$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$	$\frac{1}{\sqrt{s}(s+a^2)}$	$\sqrt{t}E_{1,3/2}(-a^2t)$

Benzer şekilde, $E_\alpha(-at)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun kuvvet serisi gösteriminin terim terim türevi alınacak olursa, aşağıdaki ilişki ortaya çıkar:

$$\frac{d}{dt}[E_\alpha(-at^\alpha)] = -at^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)$$

Yukarıdaki Laplace dönüşümlerinden bu Mittag-Leffler fonksiyonları için olanlar ve adi türevin Laplace dönüşümü $L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0^+)$ (bkz. Çizelge 2.1.) kullanılarak, bu ilişkinin Laplace bölgesinde ispatı yapılabilir.

Dolayısıyla,

$$L\{E_\alpha(-at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a}$$

elde edilir.

$$L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)\} = \frac{1}{s^\alpha + a}$$

olduğu için, yerine koyma ile,

$$s \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a} \right] - E_\alpha(0^+) = -a \left[\frac{1}{s^\alpha + a} \right]$$

ifadesini elde ederiz. $E_\alpha(0^+) = 1$ olduğu için yerine koyduğumuzda da,

$$\frac{s^\alpha}{s^\alpha + a} - 1 = \frac{-a}{s^\alpha + a}$$

elde edilir.

Bu da aşağıdaki özdeşliği verir:

$$\frac{-a}{s^\alpha + a} = \frac{-a}{s^\alpha + a}$$

½. mertebeden Mittag-Leffler fonksiyonları ile ilgili olarak, çoğu Laplace dönüşümü çizelgesinde bulunabilen $\operatorname{erfc}\sqrt{t}$ gibi özel fonksiyonları içeren, iyi bilinen eşlenikler bulunmaktadır.

Fakat belirtmelidir ki; Mittag-Leffler fonksiyonlarının Laplace dönüşümü için tanımlayıcı ifadeler $\alpha=1/2$ ile sınırlı değildir. Dolayısıyla, dönüşüm çiftlerini, geleneksel tamsayı ve yarı-tamsayı değerlerin ötesinde herhangi bir kesirli değere genişletmek mümkündür.

Bu daha genel durumların bazılarını dair örnekler, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde yararlanabileceğimiz diğer özel fonksiyonların tanımları ile birlikte Çizelge 2.4.'te verilmektedir.

Bu kesirli mertebeden dönüşüm çiftleri, matematik modellerimizi adi diferansiyel denklemlerden kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere genişletirken ihtiyaç duyulacak olan dönüşüm çiftleridir. Bu temel bilgi ile birlikte, kesirli mertebeden türev ve integral almanın tanımı ve özelliklerini incelemeye başlayabiliriz.

Çizelge 2.4. Özel fonksiyonları içeren Laplace dönüşüm çiftleri

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{a^\alpha}{s(s+a)^\alpha}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, at)^*$
$\frac{1}{s^\alpha + a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s-a)^\alpha}$	${}_1F_1(\alpha; 1; at)^{**}$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1, 1+\alpha}(at)$
$\frac{s^\alpha}{(s-a)}$	$t^{-\alpha} E_{1, 1-\alpha}(at), 0 < \alpha < 1$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(at^\alpha)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{(s-a)^\alpha}$	$\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} {}_1F_1(\alpha; \beta; at)$

Başka türlü belirtilmedikçe, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak kaydıyla, α ve β keyfidir.

Buradaki incomplete gama fonksiyonu, şu şekilde tanımlanır:

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau$$

Dikkat edilmelidir ki; $\gamma(\alpha, x)$ ve onunla yakından ilişkili olan tamamlayıcı incomplete gama fonksiyonu,

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau$$

şu denklemi sağlarlar:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau = \gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x)$$

Dikkat edilmelidir ki; hata fonksiyonu, incomplete gama fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right)$$

ve

$$E_{1/2}(\sqrt{t}) = e^t \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, t^2\right) \right]$$

Birleşik hipergeometrik fonksiyon şu şekilde tanımlanır:

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(c)_n n!} \quad -\infty < x < \infty$$

Burada, $(a)_n$ ve $(c)_n$ aşağıdaki gibi tanımlanan Pochhammer sembolleridir:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$(c)_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dolayısıyla, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$e^x = {}_1F_1(1; 1; x)$$

$$E_{1,\alpha+1}(at) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_1(1; \alpha+1; at)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} {}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; x^2\right)$$

3. KESİRLİ ANALİZİN MATEMATİKSEL ARAÇLARI

Bu bölümde, iyi davranışlı fonksiyonların pek çoğu ile ilgili kesirli integral ve türev hesabında gerekli olan araçlardan bahsedilecektir. Bu araçlar, kesirli diferansiyel denklemlerin basit örneklerini çözmek için kullanılacak ve Laplace dönüşüm yöntemleri üzerinde yoğunlaşılacaktır. Çünkü bu teknikler, sıklıkla zaman bölgesindeki başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılmakta ve bir model sistemin transfer fonksiyon gösterimi vasıtası ile, geçici ve sinüzoidal kararlı hal davranışını tanımlayan bir girdi-çıkıı ifadesi sağlamaktadırlar.

Kesirli analiz ile ilgili daha fazla bilgi, Oldham ve Spanier [11], Miller ve Ross [12] ile Igor Podlubny'nin [13] kesirli diferansiyel denklemler kitaplarında bulunabilir.

3.1. Kesirli İntegrasyon

Birinci mertebeden kimyasal reaksiyonları, radyoaktif bozunmayı ve basit- yüksek ve düşük-geçiş filtrelerini modellemek için sıklıkla kullanılan bir denklem türü olan sabit katsayılı, homojen olmayan, birinci-mertebeden bir adi diferansiyel denklemin çözümünü inceleyelim. Zamanın bir fonksiyonu olan $F(t)$ girdisinin aşağıdaki denklemle $Y(t)$ çıktısına bağlı olduğunu varsayalım:

$$\frac{dY(t)}{dt} - aY(t) = F(t) \quad (1)$$

Burada a 'nın bir sabit olduğu ve $Y(t)$ 'nin, $t = 0^+$ 'da, $Y(0^+)$ ile gösterilen ve bilinen bir başlangıç değerine sahip olduğu varsayılmaktadır. Genel çözüm kolaylıkla elde edilebilir. Bunun için, öncelikle, bu denklemin her iki tarafı da integrasyon faktörü e^{-at} ile çarpılır ve aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{d}{dt} [e^{-at}Y(t)] = e^{-at}F(t)$$

Bu ifadenin integrasyonu ile,

$$Y(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} F(\tau) d\tau + Y(0^+) e^{at} \quad (2)$$

elde edilir. Bu denklem, $Y(0^+) = 0$ olarak varsayılırsa,

$$Y(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} F(\tau) d\tau \quad (3)$$

ifadesine indirgenir. Bu çözüm, Laplace dönüşümü kullanılarak da elde edilebilir. Denklem (1)'e terim terim Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$sy(s) - Y(0^+) - ay(s) = f(s)$$

elde edilir. Bu ifadeyi, $y(s)$ 'yi yalnız bırakarak yeniden düzenlediğimizde ise,

$$y(s) = \left[\frac{1}{s-a} \right] f(s) + \frac{Y(0^+)}{s-a}$$

ifadesini elde ederiz. Eğer tekrar $Y(0^+)$ 'in sıfır olduğunu varsayarsak, Denklem (3)'ün Laplace dönüşümü eşleniği, $(s-a)^{-1}$ ve $f(s)$ 'in konvolüsyon çarpımı şeklinde olur ve

$$Y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} f(s) \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

eşitliğini kullanırsak,

$$Y(t) = \int_0^t F(\tau)e^{a(t-\tau)}d\tau = e^{at} \int_0^t F(\tau)e^{-a\tau}d\tau$$

ifadesini elde ederiz. Böylece yine, $F(\tau)$ girdi fonksiyonunun $e^{-a\tau}$ üstel fonksiyonu ile çarpımının integrasyonu ile e^{at} 'nin çarpımını içeren bir çözüm elde etmiş oluyoruz.

Kesirli analizde, bu konvolüsyon gösterimi genelleştirilecektir. Şimdi, birinci mertebeden diferansiyel denklemin, yüksek mertebelere, aşağıdaki biçimde, bir genellemesini yaptığımızı düşünelim:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} - aY &= F(t) \\ \frac{d^2Y}{dt^2} - 2a\frac{dY}{dt} + a^2Y &= F(t) \\ \frac{d^3Y}{dt^3} - 3a\frac{d^2Y}{dt^2} + 3a^2\frac{dY}{dt} - a^3Y &= F(t) \\ \frac{d^4Y}{dt^4} - 4a\frac{d^3Y}{dt^3} + 6a^2\frac{d^2Y}{dt^2} - 4a^3\frac{dY}{dt} + a^4Y &= F(t) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Bu diferansiyel denklem serisi şu biçimde yazılabilir:

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (-1)^n a^n \left[\frac{d^{N-n}Y(t)}{dt^{N-n}} \right] = F(t) \quad (0 \leq n \leq N) \quad (4)$$

Burada,

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

ifadesi, her ikisi de tamsayı olan n ve N için, binomial katsayıdır. N , diferansiyel denklemin mertebesi; $n = 0,1,2 \dots N$ ise tek tek terimleri belirten bir indekstir.

Bu diferansiyel denklemler grubuna Laplace dönüşümü uygularsak ve tüm başlangıç koşullarının sıfır olduğunu (kesirli analizde farklı yollardan yerine getirilebilen bir koşul) varsayarsak,

$$\begin{aligned} sy(s) - ay(s) &= f(s) \\ s^2y(s) - 2asy(s) + a^2y(s) &= f(s) \\ s^3y(s) - 3as^2y(s) + 3a^2sy(s) - a^3y(s) &= f(s) \\ s^4y(s) - 4as^3y(s) + 6a^2s^2y(s) - 4a^3sy(s) + a^4y(s) &= f(s) \end{aligned}$$

Bu denklem serisi şu şekilde yazılabilir:

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (-1)^n a^n s^{(N-n)} = f(s)$$

Eşitliğin sol tarafı binomial bir ifade tanımladığı için, şu şekilde yazılabilir:

$$(s - a)^N y(s) = f(s)$$

$y(s)$ 'yi çektüğümüzde ise

$$y(s) = \frac{1}{(s - a)^N} f(s)$$

olur. Konvolüsyon teoremini ve $(s - a)^{-N}$ 'nin ters Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^N}\right\} = \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} e^{at}$$

olur. Denklem (4)'ün genel çözümü ise aşağıdaki gibi olur:

$$Y(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{(s-a)^N}\right\} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} e^{a(t-\tau)} F(\tau) d\tau$$

Bu da, $F(\tau)$ 'nin ağırlıklı bir üstel fonksiyon ile çarpımının integrasyonunu içerecek şekilde yazılabilir:

$$Y(t) = e^{at} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} e^{-a\tau} F(\tau) d\tau \quad (5)$$

Burada, denklem (3)'teki ile aynı genel biçim hakimdir, fakat $F(\tau)$ ile çarpım durumunda olan ağırlık faktörü $e^{-a\tau}$ 'dan farklı olarak,

$$\frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} e^{-a\tau}$$

ifadesidir. Böylelikle, transfer fonksiyonu N tekrarlı köke sahip genel bir adi diferansiyel denklem ailesi için kapalı formda bir çözüm elde etmiş olduk. Şimdi, tanımlayıcı denklemimizi, köklerin ve sıfır dışı başlangıç koşullarının ilave kombinasyonlarını içerecek şekilde genişletmek yerine, a sabitini sıfır olarak alacağız. Bu durumda genel denklemimiz basit bir şekilde aşağıdaki hali alır:

$$\frac{d^N Y(t)}{dt^N} = F(t) \quad (6)$$

ve çözümü de denklem (5) 'te $a = 0$ 'ı yerine koyarak bulunur:

$$Y(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} F(\tau) d\tau \quad (7)$$

Laplace dönüşümü cinsinden, bu çözümümüzü konvolüsyon çarpımı şeklinde yazabiliriz:

$$Y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^N} f(s)\right\}$$

Bu sonuç, $F(t)$ fonksiyonunun N . integrasyonuna denk gelmektedir. Örneğin, pozitif N tamsayıları için,

$$N = 1, \quad Y(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau$$

$$N = 2, \quad Y(t) = \int_0^t \int_0^\tau F(\lambda) d\lambda d\tau$$

$$N = 3, \quad Y(t) = \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\lambda F(\omega) d\omega d\lambda d\tau$$

· · ·
· · ·
· · ·

$$N = N, \quad Y(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} F(\tau) d\tau$$

Matematik literatüründe genellikle Cauchy'ye atfedilen ve türetilen bu formül, N ardışık integrali tek bir integral ile değiştirmemize olanak tanır. Bu tek integral de

$$\frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}$$

ile $F(\tau)$ çarpımının integralidir. Bu formül basit bir örnek ile kontrol edebilir.

Örneğin, $F(t) = 1$, $N = 3$ alındığında $t^3/6$ sonucu elde edilir.

3.1.1. Riemann- Liouville kesirli integrasyonu

N 'nin tamsayı olmayan ara değerleri gözönüne alındığında, $Y(t)$ 'nin Laplace bölgesindeki konvolüsyon integrali gösterimini kullandığımızda,

$$y(s) = \frac{1}{s^N} f(s)$$

olur. Fakat Laplace dönüşümü teorisinden biliyoruz ki; N , tamsayı değerlerle sınırlı değildir. Çünkü $k > 0$ için, genelleştirilmiş, integral olmayan Laplace dönüşümü şöyledir:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^k} \right\} = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$$

Burada $\Gamma(k)$, gama fonksiyonudur. Dolayısıyla, zaman bölgesinde kesirli mertebeden integrasyon için şöyle bir formül elde ederiz:

$$Y(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{\Gamma(k)} F(\tau) d\tau \quad (8)$$

Bu formül de, başlangıç koşulları sıfır olan,

$$\frac{d^k Y(t)}{dt^k} = F(t)$$

kesirli diferansiyel denkleminin çözümüne karşılık gelmektedir. $\Gamma(N) = (N-1)!$ olduğu için, bu sonuç direkt olarak denklem (7)'den de elde edilebilir. Denklem (8)'de gösterilen konvolüsyon integrali ve onun Laplace dönüşümü gösterimi, kesirli

integrasyon tanımıdır. Tarihsel olarak, kesirli integrasyonun bu tanımı, Riemann ve Liouville'e [12] atfedilmektedir.

Dikkat edilmelidir ki; kesirli integrasyon, en basit tanımıyla, zaman fonksiyonu $F(t)$ ile $[t^{k-1}/\Gamma(k)]$ 'nin konvolüsyon integralidir ve bu integralde ağırlık fonksiyonu k ile değişmektedir.

k 'nın 0 ile 1 arasında seçilen değerleri için, $[t^{k-1}/\Gamma(k)]$ ağırlık fonksiyonunun bir grafiği, şekil 3.1'de verilmektedir.

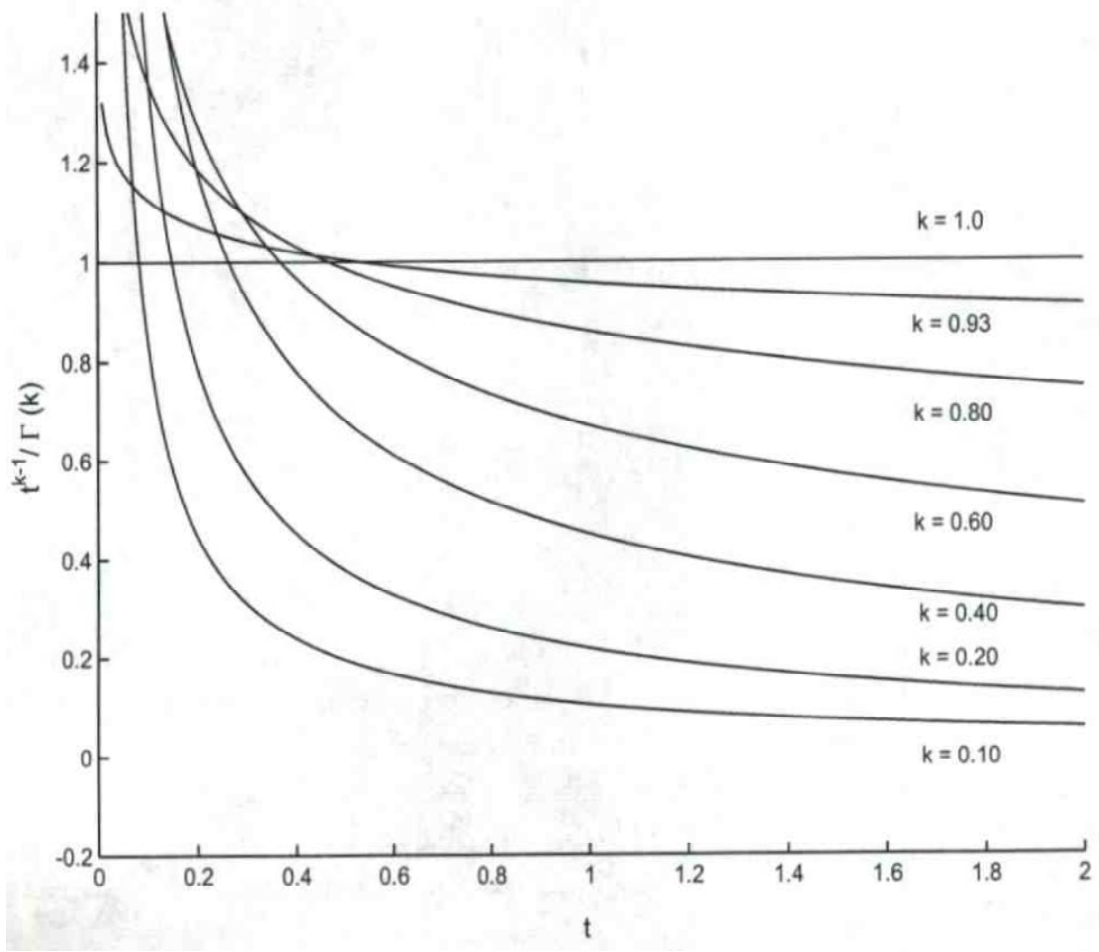
Grafiksel olarak görülebilir ve matematiksel olarak da kanıtlanabilir ki, ağırlık fonksiyonu $[t^{k-1}/\Gamma(k)]$; $k \rightarrow 0$ durumunda, Delta fonksiyonu $\delta(t)$ 'ye ve $k \rightarrow 1$ durumunda ise Heaviside birim basamak fonksiyonu $u(t)$ 'ye yakınsar. Dolayısıyla,

$$k = 0 \text{ için } Y(t) = \int_0^t \delta(t - \tau)F(\tau)d\tau = F(t)$$

ve

$$k = 1 \text{ için } Y(t) = \int_0^t u(t - \tau)F(\tau)d\tau = \int_0^t F(\tau)d\tau$$

elde edilir.



Şekil 3.1. $[t^{k-1}/\Gamma(k)]$ kesirli integrasyon ağırlık fonksiyonunun grafiği

Bunun yanısıra, eğer $F(t)$ girdi fonksiyonunun; $t > 0$ için 1 ve $t < 0$ için 0 olan $u(t)$ birim basamak fonksiyonu olduğunu varsayarsak; $k = 1/2$ için, tanım, aşağıdaki ifadeyi verir:

$$Y(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} u(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$u = t - \tau$ olsun. O halde,

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^0 \frac{(-du)}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [2\sqrt{u}]_0^t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

olur ki; bu ifadenin de direkt olarak karşılığı şöyledir:

$$Y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Benzer şekilde, $k = 3/2$ için, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

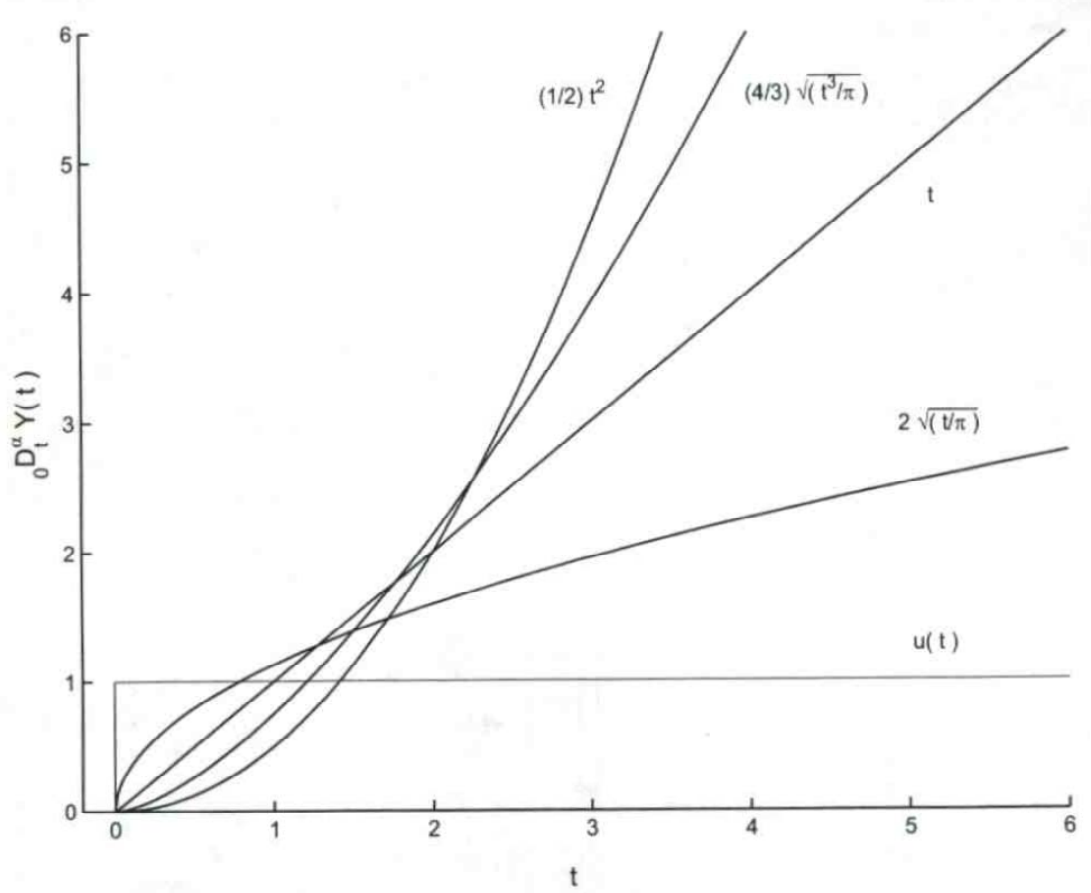
$$Y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\} = \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$$

Bu ifade, 1 sabitinin $3/2$. mertebeden integrasyonuna aittir. Dolayısıyla, Şekil 3.2 'de de gösterildiği üzere, bir basamak fonksiyonunun $3/2$. mertebeden integrasyonu, $u(t)$ birim basamak fonksiyonunun tek ve çift integrasyonu arasında bir davranış göstermektedir.

Kesirli integrasyona dair ilave örnekler, Oldham ve Spanier'in [11] kitabında bulunabilir. Kitabın 7. bölümünde, yaygın pekçok fonksiyonun yarı-integrallerinin ($1/2$. mertebeden kesirli integrasyon için Oldham ve Spanier [11] tarafından ortaya atılan bir terim) bulunduğu çizelgeler vardır.

Özet olarak; kesirli integrasyon, bir Laplace dönüşümü konvolüsyonu cinsinden tanımlanmış oldu. Şimdi kesirli integrasyonu, ${}_0D_t^{-\alpha}$ operatör sembolü ile aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$${}_0D_t^{-\alpha}F(t) = F(t) * \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0 \quad (9)$$



Şekil 3. 2. $u(t)$ 'nin tamsayı ve kesirli kuvvet integrasyonu

Burada * sembolü, konvolüsyon işlemi işaret etmektedir ve $t < 0$ için,

$$\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

sıfır olarak tanımlanır. Dolayısıyla, Riemann-Liouville integrasyonu tanımını şu şekilde yazabiliriz:

$${}_0D_t^{-\alpha} F(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{F(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (10)$$

Bu işlem için ${}_0D_t^{-\alpha}$ sembolünün kullanımı, Harold T. Davis [14] ile başlamıştır.

Bu sembol; alt indisleri integrasyon limitlerini gösteren, α mertebesinden ters bir operatör olarak, kesirli integrasyonu simgelemektedir. Laplace dönüşümü uyguladıktan sonra, bu tanım aşağıdaki biçimi alır:

$$L\{ {}_0D_t^{-\alpha}F(t) \} = \frac{1}{s^\alpha} f(s)$$

Bu ifade ise, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 2$ için, sırasıyla, aşağıdaki, bilinen tamsayı gösterimlerini verir.

$$L\{ {}_0D_t^{-1}F(t) \} = L\left\{ \int_0^t F(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} f(s)$$

$$L\{ {}_0D_t^{-2}F(t) \} = L\left\{ \int_0^t \int_0^\tau F(\lambda) d\lambda d\tau \right\} = \frac{1}{s^2} f(s)$$

Denklem (10)'da verilen integral tanımının bir zayıf tekilliği vardır, fakat $F(t)$ üzerindeki şu şartla yakınsayacaktır:

$$F(t) = O(t^{\varepsilon-1}), \quad \varepsilon > 0, t \rightarrow 0^+$$

Bu ifade gerektirmektedir ki; zaman sifira yaklaştıkça, $F(t)$ fonksiyonu t^{-1} 'den daha yavaş büyür. $k > -1$ için kuvvet fonksiyonları bu şartı sağlar, dolayısıyla, $F(t) = t^k$ için, aşağıdaki α mertebeli integral yazılabilir:

$${}_0D_t^{-\alpha}t^k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^k (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (11)$$

Beta fonksiyonu tanımını kullandığımızda,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1} du$$

ve denklem (11)'de $u = \tau/t$ 'yi yerine koyduğumuzda, $k = q - 1$ ve $p = \alpha$ için,

$${}_0D_t^{-\alpha} t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} t^{k+\alpha} \quad \alpha > 0, k > -1 \quad (12)$$

formülüne ulaşırız. Bu formül; basamak, rampa veya kuadratic bir fonksiyonun yarı-integrasyonu için Heaviside operatörü kullanılarak elde edilen sonucu doğrulamaktadır. Örneğin, denklem (12)'i kullanarak aşağıdaki ifadeleri buluruz:

$${}_0D_t^{-1/2} t^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} t^{1/2} = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$${}_0D_t^{-1/2} t^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} t^{3/2} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{t^3}{\pi}}$$

$${}_0D_t^{-1/2} t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)} t^{5/2} = \frac{16}{15} \sqrt{\frac{t^5}{\pi}}$$

Şu da açıktır ki; kuvvet serisi ile gösterilebilen her fonksiyonun; integrasyon ve seri toplamı işlemlerinin yer değiştirilmesinin mümkün olduğu kendi yakınsaklık bölgesinde, kesirsel olarak integrasyonu yapılabilir.

Çizelge 3.1.'de, kesirsel integrallerin (ve türevlerin) kısa bir listesi verilmektedir. Bu çalışmada daha önceden alıntı yapılan kitaplarda [11-13,14], Samko'ya [15] ait "kesirli integraller ve türevler" konulu monografıta ve Erdélyi'ye [16] ait "yüksek transandantal fonksiyonlar" konulu elkitabında, çoğu yaygın ve özel fonksiyonlarla ilgili kesirsel integralleri içeren çizelgeler bulunmaktadır.

3.1.2. Weyl kesirli integrasyonu

Kesirli integrasyon için Riemann-Liouville tanımı direkt olarak Laplace dönüşümü konvolüsyon işleminden gelmektedir. Bu tanım, keyfi bir başlangıç noktasından başlamak üzere, şu şekilde genelleştirilebilir:

$${}_a D_t^{-\alpha} F(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau) d\tau$$

Bu ifade α mertebesinden bir kesirli integrali tanımlamak için kullanılabilir. Bu durumda Laplace konvolüsyonu, $a = 0$ iken Riemann-Liouville kesirli integral tanımı ve $a = -\infty$ iken Weyl kesirli integrali (ilk olarak Liouville tarafından ortaya konulmuştur) ile yapılmaktadır.

İntegrasyon için başlangıç noktası seçimi, aynı zamanda, modellenecek fiziksel duruma bağlıdır (örneğin, viskoelastisite problemlerinde stress $t = 0$ 'da uygulanabileceği gibi tüm zamanlarda da mevcut olabilir). Ayrıca, başlangıç noktası seçimi, integrallerin yakınsaması açısından kabul edilebilir fonksiyonlar kümesine kısıtlamalar getirir. Son olarak, $a = -\infty$ şeklinde bir seçim yapmanın hesaplama açısından avantajları vardır.

Çizelge 3.1. Kesirli integral ve türev örnekleri ($0 < \alpha < 1$)

$F(t)$	${}_0D_t^{\pm\alpha}F(t) \quad t > 0$
$u(t)$	$\frac{t^{\pm\alpha}}{\Gamma(1 \pm \alpha)}$
t^k	$\frac{\Gamma(k+1)t^{k\pm\alpha}}{\Gamma(k+1 \pm \alpha)} \quad k > -1$
e^{at}	$t^{\pm\alpha}E_{1,1\pm\alpha}(at)$
$\ln(t)$	$\frac{t^{\pm\alpha}}{\Gamma(1 \pm \alpha)} [\ln(t) + \Psi(1) - \Psi(1 \pm \alpha)]$
$t^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(at^\mu)$	$t^{\beta\pm\alpha-1}E_{\mu,\beta\pm\alpha}(at^\mu)$
$t^{\beta-1}e^{at}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta \pm \alpha)} t^{\beta\pm\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \beta \pm \alpha; at)$

$u(t)$, birim basamak fonksiyonudur ($t > 0$ için 1, $t < 0$ için 0) ve a, k, α, β, μ reel sayı olarak varsayılmaktadır. $\Psi(t)$, digamma fonksiyonudur: $\Psi(t) = \frac{d}{dt} [\ln(\Gamma(t))]$ ve $\Psi(1) = -\gamma$. Burada, $\gamma = 0.577215 \dots$ Euler sabitidir. $E_{\alpha,\beta}(t)$, Mittag-Leffler fonksiyonudur ve ${}_1F_1(\alpha; \beta; t)$ ise birleşik hipergeometrik fonksiyondur. Aynı zamanda, kesirli integral çizelgelerinin kesirli türevler için de kullanılabilmesi için $0 < \alpha < 1$ için, ${}_0D_t^\alpha F(t) = \frac{d}{dt} [{}_0D_t^{1-\alpha} F(t)]$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$\alpha = 1/2$ için üstel fonksiyonun Weyl kesirli integralini düşünelim.

$${}_{-\infty}D_t^{-1/2}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_{-\infty}^t \frac{e^{a\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

Eğer $y = a(t - \tau)$, $a\tau = at - y$ ve $dy = -ad\tau$ şeklinde alırsak,

$${}_{-\infty}D_t^{-1/2}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_{\infty}^0 \frac{e^{at-y}}{\sqrt{y/a}} \left(-\frac{dy}{a}\right) = \frac{e^{at}}{\Gamma(1/2)\sqrt{a}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy$$

olur. Şimdi,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy$$

olduğu için,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-1/2} dy$$

dir. Böylece, şu ifadeyi yazabiliriz:

$${}_{-\infty}D_t^{-1/2}e^{at} = \frac{e^{at}}{\sqrt{a}}$$

Bunu da şu şekilde genelleştirebiliriz:

$${}_{-\infty}D_t^{-\alpha}e^{at} = \frac{e^{at}}{a^\alpha}$$

Bu da aşağıdaki tamsayı mertebeli integral operatörünün kesirsel analogudur:

$$D^{-n}e^{at} = \frac{e^{at}}{a^n}$$

Benzer şekilde, $\cos at$ 'nin Weyl kesirli integrali, $a > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için, şöyledir:

$${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} \cos at = a^{-\alpha} \cos(at - \alpha\pi/2)$$

Weyl kesirli integrasyonuna (ve türevine) dair detaylı bir tanım, Samko [15] tarafından verilmektedir ve Weyl kesirli integrallerine dair bir çizelge de Erdélyi'nin [16] monografında mevcuttur. Ross'un [17] editörlüğünü yaptığı, kesirli analiz üzerine olan monografta ve Miller ve Ross'a [12] ait kitabın VII. bölümünde, K.S. Miller tarafından, Weyl kesirli analizine giriş niteliğinde özet bilgi verilmektedir.

3.2. Kesirli Türev

α mertebeli kesirli türevin, kesirli integrasyonun ters işlemini tanımlaması beklenir. Benzer şekilde α , tamsayı değerler aldığı da adi türevin bütün özelliklerini taşıması gerekir. Ayrıca, tanımın da gerektirdiği üzere, Laplace dönüşümü bölgesinde, uygun başlangıç koşullarıyla birlikte s^α biçiminde bir çarpımsal operatör içermelidir.

Elbette, kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin formülasyonunda ve çözümünde, Laplace dönüşümü operatör gösterimi anahtar rol oynayacaktır. Kesirli türevi tanımlamamız için, α mertebeli bir kesirli integralle tanımlanan $Y(t)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$Y(t) = {}_0D_t^{-\alpha}F(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{F(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad 0 < \alpha < 1 \quad (13)$$

Burada, $F(t)$ bilinen ya da verilen bir fonksiyondur ve $Y(t)$ ise bulunacak olan fonksiyondur. Bu, integral denklemlerde görülen klasik bir matematik problemidir (Abel 1.tip integral denklemi) ve lineer sistemler teorisinde de karşımıza çıkmaktadır.

Bir kesirli diferansiyel operatör ${}_0D_t^\alpha$ soldan uygulandığında biçimsel olarak,

$${}_0D_t^\alpha Y(t) = {}_0D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha} F(t)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi, şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$F(t) = {}_0D_t^\alpha Y(t)$$

Bu işlem, Laplace dönüşümü bölgesinde de tanımlanabilir: Önce denklem (12) 'nin Laplace dönüşümü alırız ve

$$y(s) = L\{ {}_0D_t^{-\alpha} F(t) \} = \frac{1}{s^\alpha} f(s)$$

ifadesini elde ederiz. Daha sonra, bu ifadeyi $f(s)$ için çözdüğümüzde,

$$f(s) = s^\alpha y(s) \tag{14}$$

elde ederiz.

Şimdi, Gorenflo ve Mainardi'nin [18] izledikleri yoldan gidersek ve $0 < \alpha < 1$ olduğunu varsayarsak, ${}_0D_t^\alpha$ ifadesini ortaya çıkarmak için ters Laplace dönüşümü uygulamadan önce, Denklem (14)'ün sağ tarafını iki şekilde yazabiliriz:

$$f(s) = s \left[\frac{y(s)}{s^{1-\alpha}} \right]$$

ya da

$$f(s) = \frac{1}{s^{1-\alpha}} [sy(s) - Y(0^+)] + \frac{Y(0^+)}{s^{1-\alpha}}$$

Birinci durumda; $L\{G'(t)\} = sg(s) - G(0^+)$ ifadesini kullanırsak -burada $G(0^+)$, $Y(t)$ 'nin kesirli integralinin başlangıç değerini temsil etmektedir ve

$$G(0^+) = \left[{}_0D_t^{-(1-\alpha)}Y(t) \right]_{t=0^+} = 0$$

varsayımında bulunursak bu varsayım, $Y(t)$ türevlenebilir ve sınırlı ise geçerlidir. Ters Laplace dönüşümü sonucunda,

$$F(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{Y(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right]$$

ifadesini elde ederiz. İkinci durumda ise, ters Laplace dönüşümü uygulandığında, $Y(t)$ 'nin adi türevinin kesirli integrali $(1-\alpha)$ mertebeli ve $Y(t)$ 'nin başlangıç değerini, özellikle, içeren bir terim elde edilir.

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{Y'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau + \frac{Y(0^+)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Bu yüzden, kesirli integrasyon için olan tanımımızı uyguladıktan sonra, kesirli türev için iki ifade elde ederiz. Birincisi,

$$F(t) = {}_0D_t^\alpha Y(t) = \frac{d}{dt} \left[{}_0D_t^{-(1-\alpha)}Y(t) \right]$$

İkincisi ise,

$$F(t) = {}_0D_t^\alpha Y(t) = {}_0D_t^{-(1-\alpha)}[Y'(t)] + \frac{Y(0^+)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Bu kısmen şaşırtıcı sonuç, farklı başlangıç koşulları varsaydığımız için, aslında anlamsız değildir.

Ayrıca, son olarak elde edilen bu iki ifadede operatör notasyonunun kullanımı ile ilgili olarak, ilk ifade, tamsayı türev operatörü $D \equiv d/dt$ cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$${}_0D_t^\alpha Y(t) = D \left[{}_0D_t^{-(1-\alpha)} Y(t) \right]$$

İkinci ifade de

$${}_0D_t^\alpha Y(t) = {}_0D_t^{-(1-\alpha)}[DY(t)] + \frac{Y(0^+)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerde, direkt olarak gözlemlemekteyiz ki; aynı tamsayı mertebeli operatörlerde olduğu gibi (örneğin, $D^{-1}D[x] = x + C$ ve $DD^{-1}[x] = x$, burada C bir sabittir), D ve ${}_0D_t^{-(1-\alpha)}$ birbirleriyle yer değiştiremezler. Fakat burada fark bir sabit değil, bir fonksiyondur.

İyi olan durum şudur: Kesirli türev için tamamen yeni bir ifade geliştirmek zorunda değiliz. En basit tanımıyla, kesirli integrasyon için olan tanımımızı adi türevinki ile birleştiriyoruz.

Kötü olan durum da, başlangıç koşullarını varsayarken ya da tanımlarken ve kesirli işlemlerin sıralarını değiştirirken çok dikkatli olmak zorundayız.

Aynı zamanda, kullandığımız integrallerin yakınsaklığını kontrol etmek de çok büyük önem taşıyor. Bu konular, Gorenflo ve Mainardi tarafından, bu tanımlar için detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Yukarıda, kesirli türev için ortaya konulan ve bundan sonra ${}_0D_t^\alpha$ ile göstereceğimiz ilk ifade, Riemann-Liouville kesirli analiz yaklaşımından gelmektedir. İkinci ifade ise Caputo'ya aittir ve ${}_0^C D_t^\alpha$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$${}_0^C D_t^\alpha Y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{Y'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

Burada $Y'(\tau)$, zamana göre birinci mertebeden türevi göstermektedir.

Kesirli analizin fiziksel problemlere uygulanmasındaki anahtar konulardan biri, kesirli türev için uygun gösterimin seçilmesidir. Bu farkın en dramatik yönü, kesirli türev için olan bu formüller, birim basamak fonksiyonuna uygulandığında ortaya çıkar.

Riemann-Liouville durumunda,

$$L\{{}_0D_t^{1/2}u(t)\} = s \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ ya da } {}_0D_t^{1/2}u(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

Caputo durumunda ise,

$$L\{{}_0^C D_t^{1/2}u(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[s \left(\frac{1}{s} \right) - u(0^+) \right] = 0 \text{ ya da } {}_0^C D_t^{1/2}u(t) = 0$$

olur. Dolayısıyla, birim basamak fonksiyonunun adı birinci türevi, genelleştirilmiş bir fonksiyon ya da sadece $t = 0$ 'da sıfır-dışı olan $\delta(t)$ fonksiyonunu veren fonksiyonlar serisinin limiti olarak tanımlanabilirken; kesirli türev, $t = 0$ 'da tanımlı

olmayan kuvvet fonksiyonunu vermektedir. Kesirli türev için Caputo tanımının güzel bir özelliği, böylesi ıraksak davranışları ortadan kaldırmasıdır.

Bununla birlikte, kesirli türevin Laplace dönüşümü özelliklerini daha detaylı incelemeye başlamadan önce, belirtmek isteriz ki, $\alpha > 1$ için, türev alma mertebesi, kesirli integrasyonu uygun bir aralıkta sınırlandırarak, kolaylıkla genişletilebilir. Dolayısıyla m , α 'dan büyük ilk pozitif tamsayı olmak kaydıyla, $m - 1 < \alpha < m$ için, şu ifadeleri yazabiliriz:

$${}_0D_t^\alpha Y(t) \equiv \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{Y(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right]$$

ve

$${}_0^cD_t^\alpha Y(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{Y^{(m)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}} d\tau$$

Dikkat edilmelidir ki; $t \rightarrow 0^+$ durumunda $Y(t)$ ve ilk m türevi sıfır iken, bu iki tanım çakışacaktır. Dolayısıyla, bir kuvvet fonksiyonu t^k için, kolaylıkla gösterilebilir ki;

$${}_0D_t^\alpha t^k = {}_0^cD_t^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k + 1)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k + 1 - \alpha)} \quad t > 0, k > -1, \alpha > 0$$

Diğer iyi-davranışlı fonksiyonlar için, Caputo formülasyonu uygulandığında başlangıçtaki ıraksak davranımın ortadan kaldırılmasından dolayı, iki tanım birbirinden farklı olacaktır. Örneğin, $Y(t) = Ae^{at}u(t)$ üstel fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ mertebeden kesirli türevini düşünelim. Burada, A bir sabit, a pozitif bir sabit ve $u(t)$ birim basamak fonksiyonudur. İlk durumda, Riemann-Liouville tanımını kullanarak,

$$L\{ {}_0D_t^{1/2} Ae^{at} \} = \sqrt{s} \left[\frac{A}{s - a} \right]$$

yazabiliriz. Laplace dönüşümleri çizelgesini (bkz. Çizelge 2.2.) kullanarak,

$${}_0D_t^{1/2} Ae^{at} = A \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \sqrt{a} e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \right] = A \left[\frac{1}{\sqrt{t}} E_{1,1/2}(at) \right]$$

ifadesini, hata fonksiyonu ya da Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazabiliriz.

İkinci durumda, Caputo tanımını kullanarak,

$$L\{{}_0^C D_t^{1/2} Ae^{at}\} = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\frac{sA}{s-A} - A \right] = \frac{aA}{\sqrt{s}(s-a)}$$

yazabiliriz. Benzer prosedürlerden sonra,

$${}_0^C D_t^{1/2} Ae^{at} = A\sqrt{a} e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) = aA\sqrt{t} E_{1,3/2}(at)$$

ifadesini elde ederiz. Mittag-Leffler fonksiyonları için taban öteleme ilişkisini kullanarak,

$$E_{1,1/2}(at) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} + (at)E_{1,3/2}(at)$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\frac{A}{\sqrt{t}} E_{1,1/2}(at) = \frac{A}{\sqrt{\pi t}} + aA\sqrt{t} E_{1,3/2}(at)$$

olur. Bu da göstermektedir ki; Ae^{at} 'nin iki kesirli türevi, birbirinden $1/\sqrt{\pi t}$ faktörü kadar farklıdır. Bu fark da kesirli türevin alternatif tanımlarından doğmaktadır.

Çizelge 3.1.'de bazı seçilmiş fonksiyonlar için kesirli Riemann-Liouville türevlerine dair örnekler verilmektedir. Daha fazlası, bu çalışmada daha öncesinde alıntı yapılan kaynaklarda [11-13,15,16] bulunmaktadır ve özel fonksiyonlar için olanları ise Lavoie'ye ait çalışmalarda [19] listelenmiştir.

Caputo kesirli türevlerinin kısa bir listesi, yakın bir tarihte Freed ve diğerleri tarafından yayımlanan bir NASA raporunda bulunmaktadır.

3.3. Kesirli İntegrasyon ve Türev Alma için Laplace Dönüşümü İlişkileri

Nedensellik fonksiyonları (örneğin, $t < 0$ için $F(t) = 0$) için bir Laplace konvolüsyonu şeklinde seçtiğimiz kesirli integrasyon tanımı; kesirli integrasyon ve Laplace bölgesinde $s^{-\alpha}$ ile çarpım arasında bir uyum sağlamaktadır. α 'nın tamsayı olmayan değerler almasına izin verilmesi, kesirli integrasyona, $t > 0$ için tanımlı olan $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ ağırlık fonksiyonu cinsinden bir biçimcilik sağlar. Bu gösterim kısaca şu ifade ile karakterize edilir:

$${}_0D_t^{-\alpha}Y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}y(s)\right\} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Y(\tau)d\tau$$

ya da bir konvolüsyon cinsinden yazacak olursak,

$${}_0D_t^{-\alpha}Y(t) = \left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} * Y(t)$$

Aynı zamanda, kesirli türevin her iki tanımı da konvolüsyon şeklinde yazılabilir:

$${}_0D_t^\alpha Y(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{t^{(m-\alpha)-1}}{\Gamma(m-\alpha)} * Y(t) \right]$$

ya da

$${}_0D_t^\alpha = \frac{t^{(m-\alpha)-1}}{\Gamma(m-\alpha)} * \frac{d^m Y(t)}{dt^m}$$

Belli bir formülasyonun seçimi, deneysel sistemin doğasına bağlıdır. Çoğu dinamik biyomühendislik modelleri adi ve kısmi diferansiyel denklemler içerdiğinden, kesirli analizin uygulamadaki anahtar basamaklardan biri de adi ve kısmi diferansiyel denklemleri, kesir mertebeli diferansiyel denklemlere genişletmeye olanak tanıyan, fiziksel olarak anlamlı ve matematiksel olarak geçerli genellemelerin geliştirilmesidir. Bu bölümdeki önemli bir unsur; kesirli türev ve başlangıç koşullarının, diferansiyel denklemin çözümünde direkt olarak kullanılabilmelerine olanak sağlayacak bir biçimcilik içerisinde gösterimlerinin yapılmasıdır.

Tamsayı mertebeli adi türevler için geleneksel Laplace dönüşüm teorisinde, her sonlu aralıkta $Y^{(n)}(t)$ sürekli türevlerine sahip, ve hepsinin de üstel mertebesi (yani, M ve a pozitif sabit olmak kaydıyla, $t \rightarrow \infty$ durumunda Me^{at} 'den hızlı büyümezler) olan sürekli fonksiyonlar için aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} L\{Y'(t)\} &= sy(s) - Y(0^+) \\ L\{Y''(t)\} &= s^2y(s) - sY(0^+) - Y'(0^+) \\ L\{Y'''(t)\} &= s^3y(s) - s^2Y(0^+) - sY'(0^+) - Y''(0^+) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$L\{Y^{(n)}(t)\} = s^n y(s) - s^{n-1}Y(0^+) - s^{n-2}Y'(0^+) - s^{n-3}Y''(0^+) \dots Y^{(n-1)}(0^+)$$

Bu da şu şekilde ifade edilebilir:

$$L\{Y^{(n)}(t)\} = s^n y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\frac{d^{n-k-1}Y(t)}{dt^{n-k-1}} \right]_{t=0^+}$$

Dolayısıyla, Laplace dönüşümü; adi diferansiyel denklemleri, $Y(t)$ 'nin $t = 0^+$ 'da hesaplanan $(n - 1)$. türevi yoluyla prosese dahil edilen başlangıç koşullarını içeren cebirsel denklemlere dönüştürmek için bir yöntem sağlamaktadır. Kesirli türevin Riemann-Liouville tanımı için, Laplace dönüşümünün direkt olarak uygulanması, benzer bir terimler serisi oluşturur. Bu da genel olarak, şu şekilde yazılabilir:

$$L\{Y^{(\alpha)}(t)\} = s^\alpha y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_0D_t^{\alpha-k-1}Y(t)]_{t=0^+} \quad m-1 < \alpha < m$$

ya da belli durumlar için,

$$L\{Y^{(\alpha)}(t)\} = s^\alpha y(s) - [{}_0D_t^{\alpha-1}Y(t)]_{t=0^+} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$L\{Y^{(\alpha)}(t)\} = s^\alpha y(s) - s [{}_0D_t^{\alpha-2}Y(t)]_{t=0^+} - [{}_0D_t^{\alpha-1}Y(t)]_{t=0^+} \quad 1 < \alpha < 2$$

$$L\{Y^{(\alpha)}(t)\} = s^\alpha y(s) - s^2 [{}_0D_t^{\alpha-3}Y(t)]_{t=0^+} - s [{}_0D_t^{\alpha-2}Y(t)]_{t=0^+} - [{}_0D_t^{\alpha-1}Y(t)]_{t=0^+} \quad 2 < \alpha < 3$$

Aynen adi türevde olduğu gibi, Riemann-Liouville α mertebeli kesirli türevinin Laplace dönüşümü, s^α ile dönüşüm fonksiyonun çarpımından başlangıç koşullarını içeren bir terimler serisinin çıkartılmasını içermektedir. Bununla birlikte, dikkat edilmelidir ki, bu durumda belirlenen başlangıç koşulları; $Y(t)$ 'nin, herbiri $t = 0^+$ zamanında hesaplanan kesirli integrallerini içerir. Bu başlangıç koşulları, hesaplanması gereken sabitler olarak varsayılabileceği gibi sıfır olarak da verilebilir. Bununla birlikte, bu gösterim, $Y(t)$ 'nin $t = 0$ zamanında bir $Y(t)$ başlangıç pozisyonu, $Y'(t)$ hızı ya da $Y''(t)$ ivmesi cinsinden bilinebileceği fiziksel problemlerin çözümünde bilhassa yararlı değildir. Örneğin, bu tür durumlarda, kesirli türevin Caputo gösterimi için Laplace dönüşümü daha yararlıdır. Çünkü geleneksel tamsayı mertebeli türevleri içeren bir seri şeklinde yazılabilen, aşağıdaki gibi bir başlangıç koşulları kümesi verir:

$$L\{{}_0^C D_t^\alpha Y(t)\} = s^\alpha y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} \left[\frac{d^k Y(t)}{dt^k} \right]_{t=0^+}$$

Böylece aşağıdaki gibi belli durumlar için,

$$L\{{}_0^C D_t^\alpha Y(t)\} = s^\alpha y(s) - s^{\alpha-1} Y(0^+) \quad 0 < \alpha < 1$$

$$L\{{}_0^C D_t^\alpha Y(t)\} = s^\alpha y(s) - s^{\alpha-1} Y(0^+) - s^{\alpha-2} Y'(0^+) \quad 1 < \alpha < 2$$

$$L\{ {}_0^C D_t^\alpha Y(t) \} = s^\alpha y(s) - s^{\alpha-1}Y(0^+) - s^{\alpha-2}Y'(0^+) - s^{\alpha-3}Y''(0^+) \quad 2 < \alpha < 3$$

ifadeleri yazılabilir. Dolayısıyla, Caputo türevinde, $t = 0^+$ 'da hesaplanan fiziksel olarak anlamlı başlangıç koşullarının direkt olarak yerine konmasına izin veren bir gösterim vardır. Nasıl ki sistemler analizinde geleneksel bir problemi çözmek üzere Laplace ya da Fourier dönüşümü seçimi, üzerinde çalışılan problemin doğasına ve varsayılan davranışına bağlı ise, kesirli analizde de türev biçimciliği seçimi, fiziksel probleme, başlangıç koşullarına, ve zorlayıcı fonksiyonlara bağlıdır.

Son olarak, Podlubny'nin [8] yolunu izleyerek, belirtmek isteriz ki, $m - 1 \leq \alpha < m$ olmak kaydıyla, m . türevi $[0, t]$ aralığında integrallenebilir olan $(m - 1)$ kere sürekli, türevlenebilir $Y(t)$ fonksiyonları (örneğin t^k şeklindeki kuvvet fonksiyonları) için,

$$[{}_0 D_t^\alpha Y(t)]_{t=0^+} = 0 \quad \text{ve } j = 0, 1, 2, \dots, m - 1 \text{ için } Y^j(0^+) = 0$$

şeklindeki başlangıç koşulları eşdeğerdir. Bu durumlarda, iki türev formülasyonundan herhangi bir kullanılabilir.

3.4. Kesir Mertebeli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde, kesir-mertebeli bir diferansiyel denklemi çözmek için Laplace dönüşümü yöntemlerini kullanacağız. $\frac{1}{2}$. mertebeden bir kesirli diferansiyel denklemin sonuçlarını, ilgili birinci mertebeden denklemin bilinen Laplace çözümü ile karşılaştıracacağız.

$Y(t)$ yanıt fonksiyonu ve sıfır olarak verilen bir referans zamanında uygulanan keyfi bir girdi fonksiyonu $F(t)$ için birinci-mertebeden bir adi diferansiyel denklem düşünelim. Bu problem şöyle yazılabilir:

$$\frac{dY(t)}{dt} + aY(t) = bF(t) \quad (15)$$

Burada, a ve b pozitif reel sabitler olarak varsayılmaktadırlar. $F(t)$ fonksiyonunun $t = 0^+$ zamanında başladığı varsayılmaktadır. Bu diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$sy(s) - Y(0^+) + ay(s) = bf(s)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $Y(0^+)$, yanıt fonksiyonunun $t = 0^+$ 'daki değeridir. İfadeyi $y(s)$ için çözdüğümüzde, denklem (15)'in Laplace bölgesindeki çözümünü aşağıdaki biçimde buluruz:

$$y(s) = \frac{Y(0^+)}{s+a} + \left[\frac{b}{s+a} \right] f(s) \quad (16)$$

Dikkat edilmelidir ki; $F(t) = 0$ ise $Y(t) = Y(0^+) e^{-at}$ olur ki bu da denklem (15)'in homojen formunun tamamlayıcı çözümüdür.

Şimdi, F_0 , $t = 0$ zamanında uygulanan bir yükseklik basamağı olmak kaydıyla, $F(t) = F_0 u(t)$ için,

$$y(s) = \frac{Y(0^+)}{s+a} + \frac{bF_0}{s(s+a)} = \frac{Y(0^+)}{s+a} + \frac{bF_0}{a} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right]$$

olur. Bu ifadenin, Laplace dönüşüm çizelgeleri kullanılarak tersi alındığında, basamak girdisi için çözümü aşağıdaki şekilde verir:

$$Y(t) = Y(0^+)e^{-at} + \frac{bF_0}{a}(1 - e^{-at})$$

$t = 0$ 'da başlayan bir girdi olarak genel bir $F(t)$ varsayarsak ve denklem (16)'nın sağ tarafındaki ikinci terimin e^{-at} ve $F(t)$ 'nin konvolüsyonu olduğunu dikkate alırsak, genel çözümü şu şekilde yazabiliriz:

$$Y(t) = Y(0^+)e^{-at} + b \int_0^t e^{-a(t-\tau)} F(\tau) d\tau \quad (17)$$

Şimdi, denklem (15)'deki ilk türevi, Riemann-Liouville yaklaşımındaki bir $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli türev ile değiştirirsek, denklemi şu şekilde yazabiliriz:

$$\frac{d^{1/2}Y(t)}{dt^{1/2}} + aY(t) = bF(t) \text{ ya da } {}_0D_t^{1/2}Y(t) + aY(t) = bF(t) \quad (18)$$

Laplace dönüşümünü uyguladığımızda ise,

$$\sqrt{s}y(s) - [{}_0D_t^{-1/2}Y(t)]_{t=0^+} + ay(s) = bf(s)$$

ifadesini elde ederiz.

Burada, köşeli parantez içindeki terim, $Y(t)$ 'nin yarı-integralinin başlangıç değeridir ve açılımı aşağıdaki şekildedir:

$$[{}_0D_t^{-1/2}Y(t)]_{t=0^+} = \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} Y(\tau) d\tau \right]_{t=0^+}$$

Şimdilik bu integralin var olduğunu ve değerinin bir c sabiti olduğunu varsayacağız. Sonra, $y(s)$ için çözersek, denklem (18)'in Laplace bölgesindeki çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$y(s) = \frac{c}{\sqrt{s} + a} + \left[\frac{b}{\sqrt{s} + a} \right] f(s) \quad (19)$$

Dolayısıyla, yukarıdaki denklem, denklem (16)'nın kesirsel eşleniğidir ve burada c , $Y(0^+)$ başlangıç koşulunun rolünü üstlenmekte ve s ise \sqrt{s} değiştirilmektedir.

Eğer öncelikle, zorlayıcı kuvvetin olmadığı $F(t) = 0$ durumunu düşünürsek, $y(s) = c/(\sqrt{s} + a)$, bu kesirli diferansiyel denklemin tamamlayıcı çözümünü sağlar.

Çizelge 2.3.'teki Laplace dönüşüm çiftlerini kullanarak, çözümü üstel bir fonksiyon olarak değil de bir Mittag-Leffler fonksiyonu olarak buluruz. Dolayısıyla, $F(t) = 0$ için,

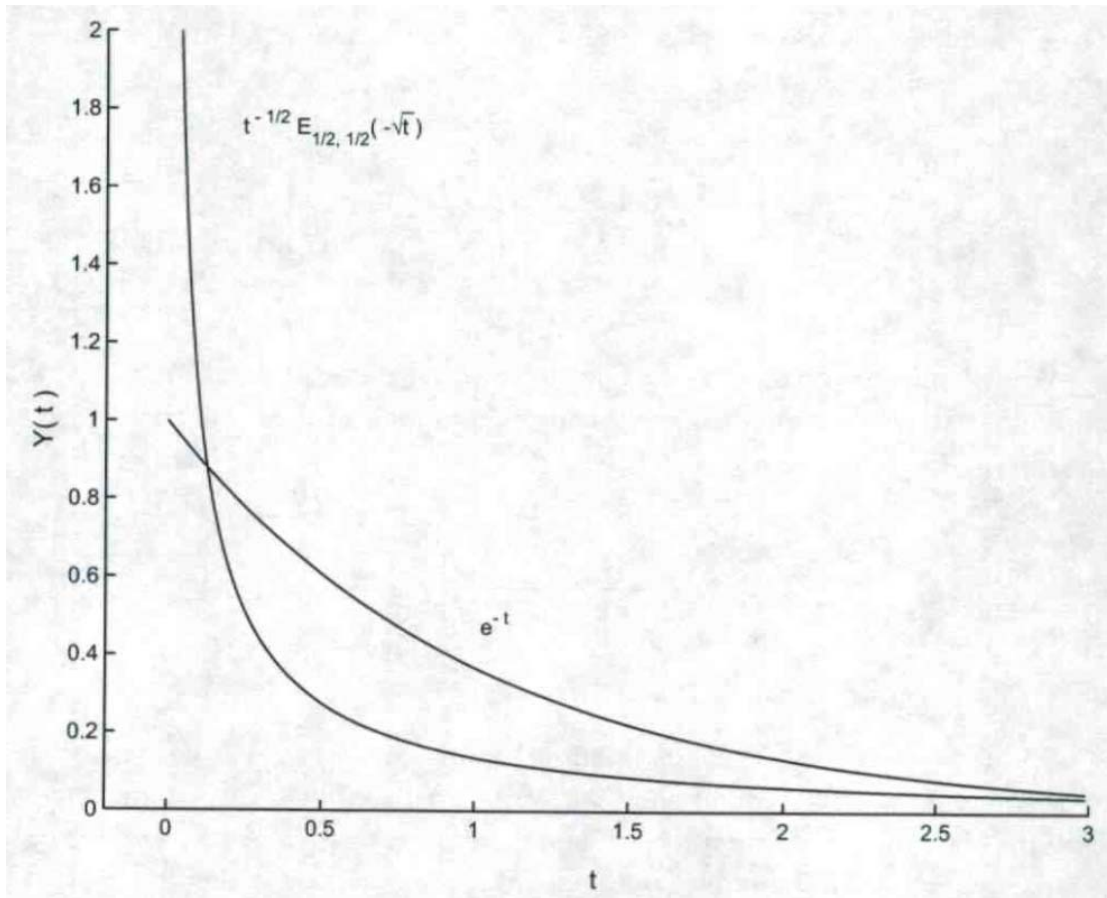
$$Y(t) = \frac{c}{\sqrt{t}} E_{1/2, 1/2}(-a\sqrt{t}) \quad (20)$$

buluruz ya da bu ifadenin eşleniği olan,

$$Y(t) = c \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \sqrt{a} E_{1/2, 1}(-a\sqrt{t}) \right]$$

ifadesini buluruz ki bunu şu şekilde de yazmak mümkündür:

$$Y(t) = c \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \sqrt{a} e^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t}) \right]$$



Şekil 3.3 $A = c = a = 1$ için çözümlerin karşılaştırılması

Bu fonksiyonun, Şekil 3.3'te verilen grafiği göstermektedir ki, fonksiyon, küçük t 'ler için hızlı büyüme göstermektedir ve $a\sqrt{t}$ argümanı arttıkça, hızlı bir biçimde sıfıra doğru azalmaktadır. Şekil 3.3'te karşılaştırma amaçlı olarak, basit bir üstel azalma grafiği de verilmektedir.

Mittag-Leffler fonksiyonu için kuvvet serisi gösteriminin terim terim kesirli türevlenmesi kullanılarak, gösterilebilir ki,

$${}_0D_t^\alpha [t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)] = at^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$$

Dolayısıyla, denklem (20)'de verilen fonksiyonun kesirli türevi göstermektedir ki; aslında, bu fonksiyon, $F(t) = 0$ için denklem (18)'in çözümüdür.

Bu yüzden, $t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)$ Mittag-Leffler fonksiyonu, ${}_0D_t^\alpha Y(t) + aY(t) = 0$ denkleminin çözümüdür ve $dY(t)/dt + aY(t) = 0$ adi diferansiyel denkleminde üstel e^{-at} fonksiyonunun oynadığı role eşdeğer bir rol oynar. (Örneğin, her ikisi de $-a$ Aygen değerine sahip Aygen fonksiyonlarıdır.) Aynı zamanda, dikkat edilmelidir ki,

$$\alpha = 1 \text{ için, } t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha) = e^{-at}$$

Keyfi girdi fonksiyonu $F(t)$ için denklem (18)'in genel çözümünü şu şekilde yazabiliriz:

$$Y(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}E_{1/2,1/2}(-a\sqrt{t}) + b \int_0^t \frac{E_{1/2,1/2}(-a\sqrt{t-\tau})}{\sqrt{t-\tau}} F(\tau) d\tau \quad (21)$$

Bu da birinci mertebeden olan denklem (15)'in, aşağıda verilen genel çözümünün kesir-mertebeli eşleniğidir.

$$Y(t) = Y(0^+)e^{-at} + b \int_0^t e^{-a(t-\tau)} F(\tau) d\tau$$

Ayrıca, dikkat edilmelidir ki, $F(t) = F_0 u(t)$ şeklindeki bir basamak fonksiyonu girdisi için, denklem (19)'den yola çıkarak, aşağıdaki ifadeye ulaşırız:

$$y(s) = \frac{c}{\sqrt{s} + a} + \frac{bF_0}{s(\sqrt{s} + a)} = \frac{c}{\sqrt{s} + a} + \frac{bF_0}{a} \left[\frac{1}{s} - \frac{\sqrt{s}}{s(\sqrt{s} + a)} \right]$$

Bu ifadenin tersi alındığında ise,

$$Y(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}E_{1/2,1/2}(-a\sqrt{t}) + bF_0\sqrt{t}E_{1/2,3/2}(-a\sqrt{t})$$

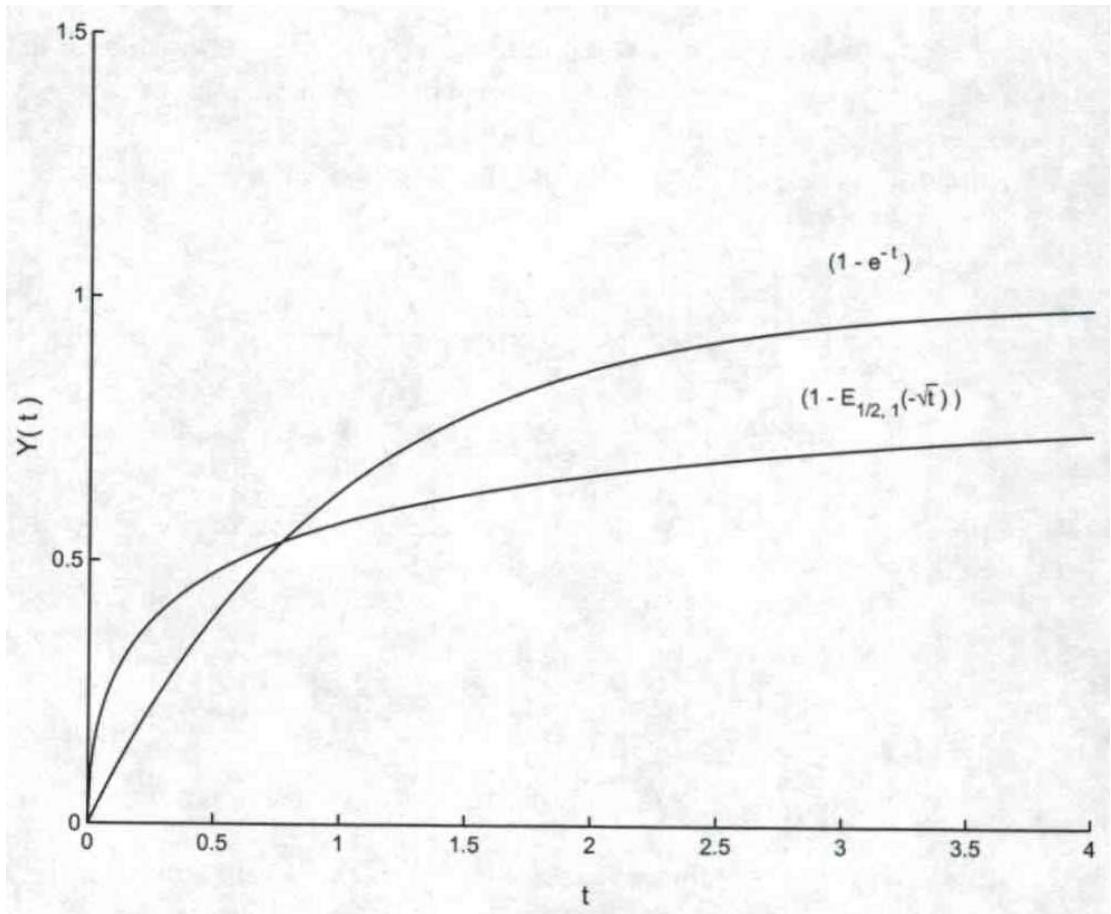
ya da

$$Y(t) = \frac{c}{\sqrt{t}} E_{1/2,1/2}(-a\sqrt{t}) + \frac{bF_0}{a} [1 - E_{1/2}(-a\sqrt{t})]$$

ifadesini elde ederiz. Aynı sonuç, denklem (21)'deki basamak fonksiyonu girdisinin, aşağıdaki ifade kullanılarak, $t^{-1/2} E_{1/2,1/2}(a\sqrt{t})$ fonksiyonu için, direkt integrasyonu ile de elde edilir.

$$\int_0^t E_{\alpha,\beta}(\lambda\tau^\alpha) \tau^{\beta-1} d\tau = t^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda t^\alpha)$$

$\alpha = 1$ ve $\alpha = 1/2$ durumları için basamak yanıtlarının, $c = 0$ için grafikleri şekil 3.4'te verilmektedir.



Şekil 3.4. $a = b = 1$ ve $F_0 = 1$ için çözümlerin karşılaştırılması

Dikkat edilmelidir ki; başlangıç koşulunun değerindeki belirsizlik, Caputo kesirli türevini kullanırsak ortadan kaldırılabilir. Dolayısıyla, $0 < \alpha < 1$ için, tanımdan yola çıkarak aşağıdaki ifadeye ulaşırız:

$${}^C_0D_t^{1/2}Y(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{Y'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * Y'(t)$$

Bu ifadenin Laplace dönüşümünü aldığımızda ise,

$$L\{{}^C_0D_t^{1/2}Y(t)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} [sy(s) - Y(0^+)] = \sqrt{s}y(s) - \frac{1}{\sqrt{s}}Y(0^+)$$

elde edilir. Bu da şu şekilde yazılabilir:

$$L\{ {}^C_0D_t^{1/2}Y(t) \} = L\{ {}_0D_t^{1/2}Y(t) \} - \left[\frac{Y(0^+)}{\sqrt{\pi t}} \right]$$

Burada, $Y(0^+)$ başlangıç koşulu, direkt olarak görünmektedir.

Şimdi eğer,

$${}^C_0D_t^{1/2}Y(t) + aY(t) = bF(t)$$

denklemini, kesirli türevin Caputo tanımını kullanarak yeniden düşünecek olursak, Laplace dönüşümü uyguladıktan sonra aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\sqrt{s}y(s) - \frac{1}{\sqrt{s}} {}_0D_t^{-1/2}[Y(0^+)] + ay(s) = bf(s)$$

$y(s)$ için çözdüğümüzde ise,

$$y(s) = \frac{{}_0D_t^{-1/2}[Y(0^+)]}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + a)} + \frac{bf(s)}{\sqrt{s} + a}$$

olur. Eğer girdi fonksiyonu $F(t)$, sıfır olarak verilirse, ve Laplace dönüşüm çiftleri çizelgesine başvurduğumuzda, aşağıdaki çözümü elde ederiz:

$$Y(t) = AE_{1/2,1}[-a\sqrt{t}] = Ae^{a^2t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$$

Burada,

$$A = {}_0D_t^{-1/2}[Y(0^+)]$$

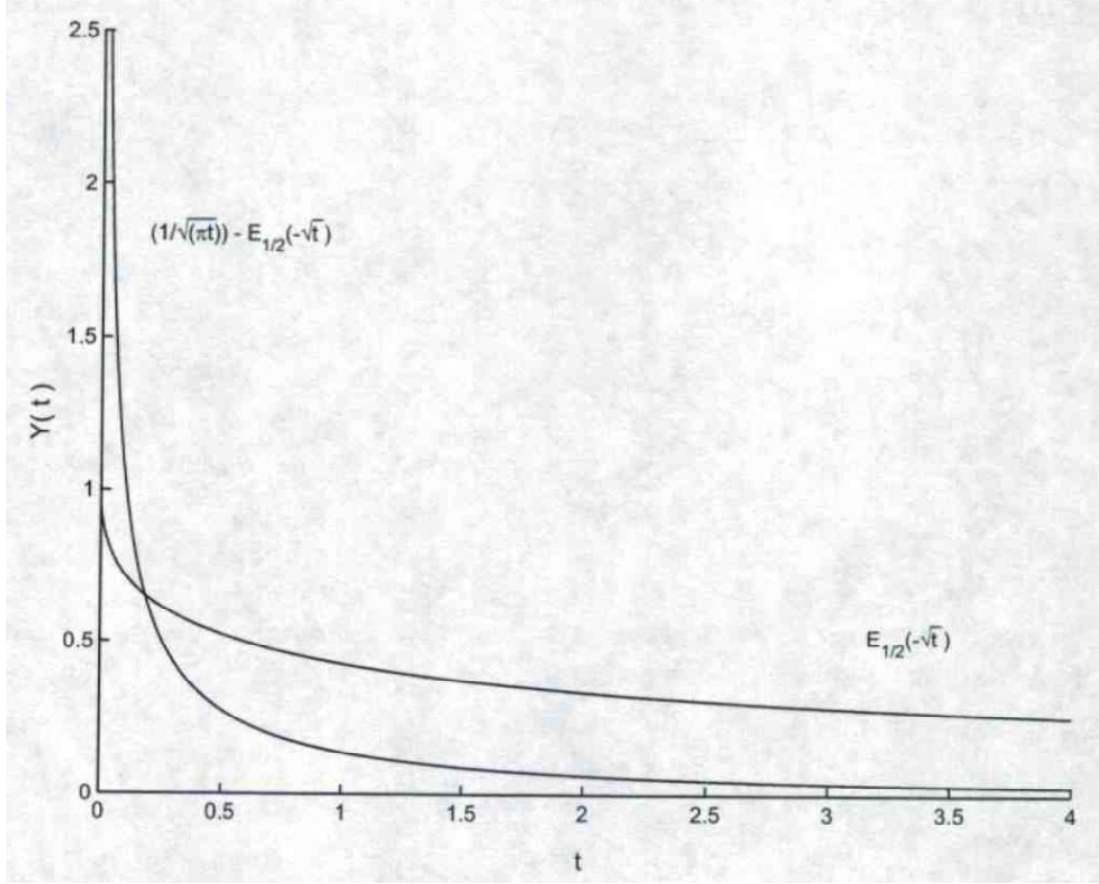
tamamlayıcı hata fonksiyonu, t 'nin büyük değerleri için, aşağıdaki asimptotik seri şeklinde açılabilirdiğinden,

$$e^{t^2} \operatorname{erfc}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^3} + \frac{1.3}{2^2 t^5} - \frac{1.3.5}{2^3 t^7} + \dots \right]$$

hemen görmekteyiz ki, t 'nin büyük değerleri için, bu çözüm, $A/a\sqrt{\pi t}$ olarak sıfıra yaklaşmaktadır. Bunun yanısıra, aynı denklemin, kesirli türevin Riemann-Liouville tanımı kullanılarak bulunan sonucu, t 'nin büyük değerleri için, aşağıdaki gibi davranır:

$$c \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - a e^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t}) \sim \frac{c}{2a^2 \sqrt{\pi t^{3/2}}} \right]$$

Bu fonksiyonların davranışlarını gösteren bir grafik, şekil 3.5'te verilmektedir.



Şekil 3.5. $A = c = a = 1$ için çözümlerin karşılaştırılması

Dolayısıyla, görmekteyiz ki; t 'nin büyük değerleri için, her iki fonksiyon da sıfıra yaklaşır, fakat farklı hızlarda yaklaşırlar. Bunun yanısıra, görmekteyiz ki; çözümlerden biri, t sıfıra yaklaştıkça ıraksamaktadır. Bu davranış, iki farklı başlangıç koşulunu yansıtmaktadır:

$$[{}_0D_t^{-1/2}Y(0^+)] \text{ ve } [{}_0D_t^{-1/2}Y(t)]_{t=0^+}$$

İlk başlangıç koşulu, $Y(0^+)$ başlangıç değerinin $\frac{1}{2}$ mertebesinde kesirli integrasyonudur. İkinci başlangıç koşulu ise, $Y(t)$ 'nin, t sıfıra sağdan yaklaşırken hesaplanan, $\frac{1}{2}$ mertebesinde kesirli integrasyonudur.

Mekanik sistemlerin çoğunda, Caputo formülasyonu tercih edilmektedir. Fakat başlangıçta büyük geçici akımların geçebildiği, elektriksel ve elektrokimyasal uygulamalarda, deneysel durumu Riemann-Liouville formülasyonu daha iyi temsil etmektedir.

4. ZARLARIN KESİRLİ ANALİZ MODELLERİ VE ZAR ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, kesirli mertbe türevler ve kesirli mertbe diferansiyel denklemler ile tanımlanabilen bir biyofizik probleminin örneği olarak sinir uyarılmasının [20] basit bir modeli incelenecektir. Öncelikle problemin, analizin standart yaklaşımı kullanılarak çözümü verilecektir. Sonrasında, kesirli analiz tarafından sağlanan genelleştirilmiş çözümlerin gözlenmiş zamana bağlı olaylara nasıl daha iyi uyduğu gösterilecektir.

4.1. Sinir Uyarılması

Sinir ve kasların elektrik ve manyetik alan simülasyonu, önemli bir tanı aracı olduğu kadar, rehabilitasyon mühendisliğinde bir tedavi seçeneğidir. Voltaj veya akım darbeleri ile sinir simülasyonunun elektrofizyolojisini anlamamanın anahtarı, darbe büyüklüğü ve süre arasındaki karşılıklı ilişkidir. “Şiddet-süre” eğrisi, nörofizyolojide iyice anlaşılmış deneysel bir gözlemdir.

Örneğin şekil 4.1’de gösterilen veriler, Lapicque tarafından kurbağa üzerinde yapılan bir siyatik sinir simülasyonu çalışmasından çizilmiştir. Bu eğri, verilen bir sinir için, daha kısa simülasyon darbelerinin, sinir hücre zarının hareket potansiyeli oluşturma amaçlı olarak eşik değerine (V_T) getirmek için uzun darbelerden daha yüksek yoğunlukta olması gerektiği gerçeğini ortaya koymaktadır.

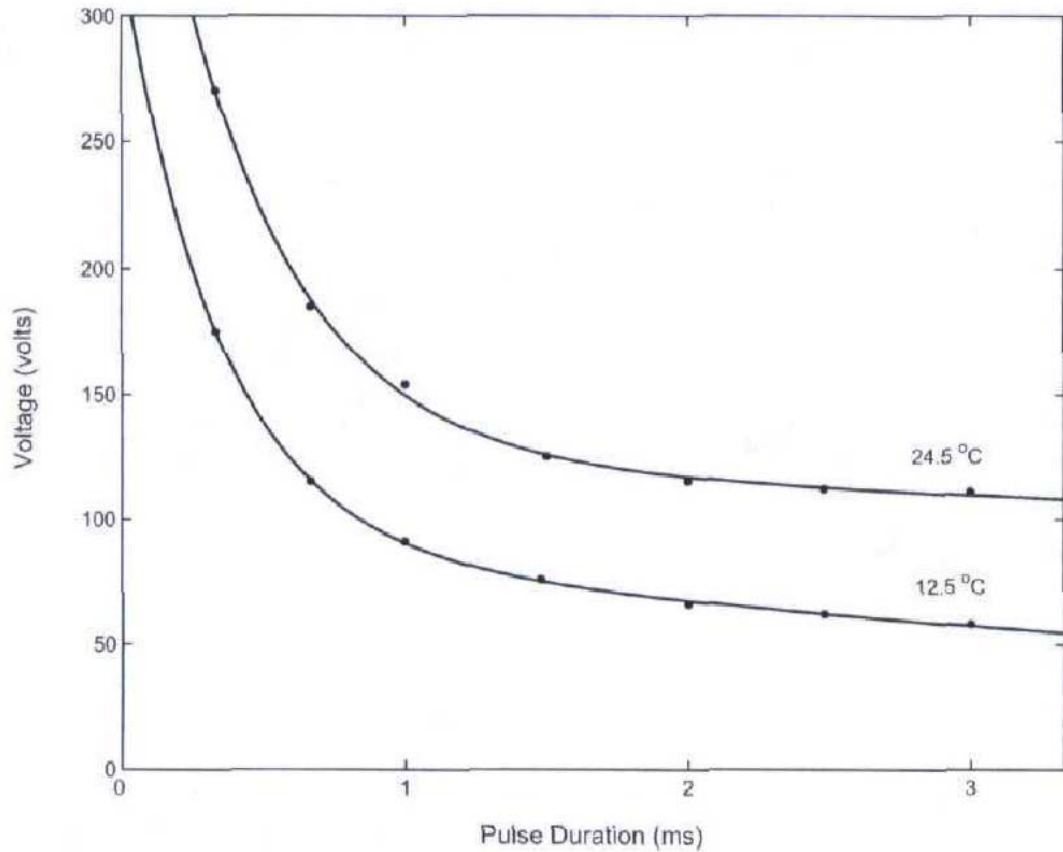
Kuvvet-süre eğrisinin tam şekli, şüphesiz, simülasyon tipi ve deneysel model ile değişir. Bu analiz için biz, şekil 4.2’deki idealleştirilmiş eğri dikkate alınacaktır. Bu eğri, simülasyon olayı olarak, I_{mo} büyüklüğünde ve t süresinde tek bir izole monofazik depolarizasyon akım darbesi varsayar.

1900 lü yıllardan başlayarak, bazı araştırmacılar, gözlenen kuvvet-süre eğrilerini tanımlamak için empirik modeller geliştirmişlerdir. Bu araştırmacılar tarafından sunulan üç tipik model, aşağıda listelenmiştir:

$$I_T = I_0(1 + \tau/t) \quad (\text{Weiss, 1901})$$

$$I_T = \frac{I_0}{1 - e^{-t/\tau}} \quad (\text{Lapicque, 1907})$$

$$I_T = I_0\sqrt{\tau/t} \quad (\text{Nernst, 1908})$$



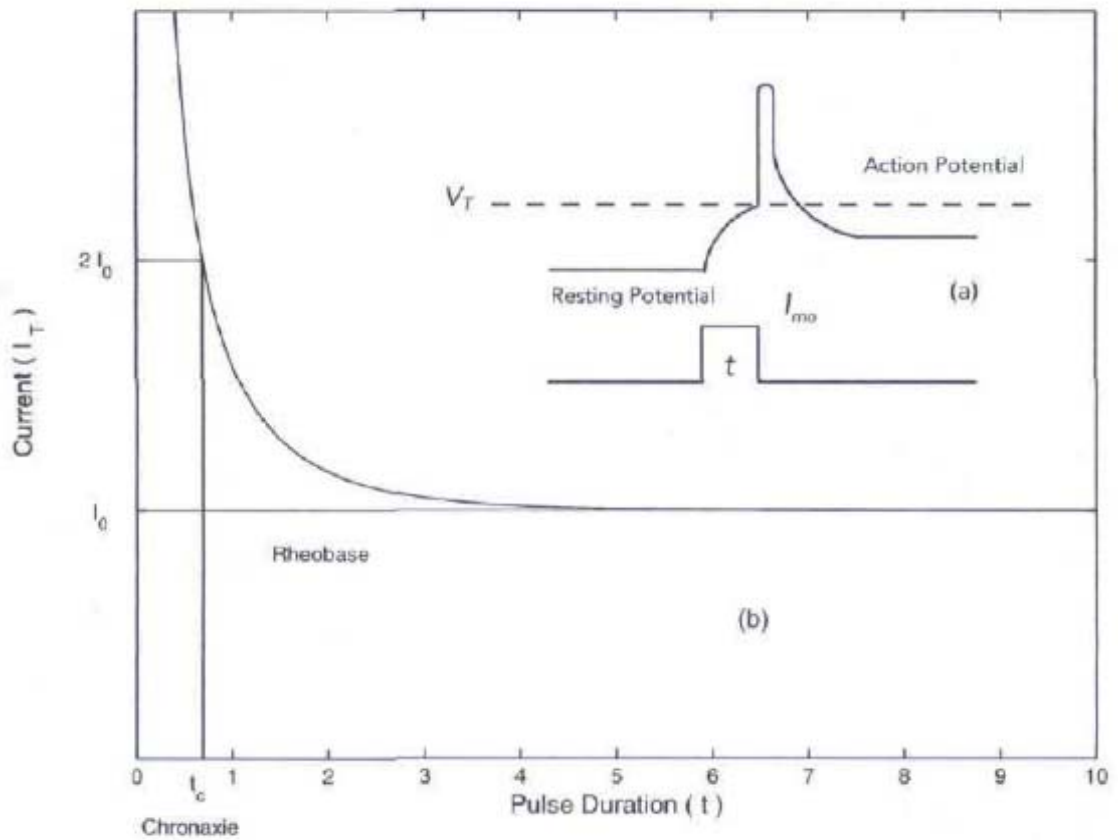
Şekil 4.1. Kuvvet-süre eğrileri

Kuvvet-süre eğrileri, Lapicque tarafından yapılmış bir çalışmayla çizilmiştir. Veriler, kurbağada (*rana esculenta*) bulunan siyatik siniri ve gastroknemius kas preparasyonlarından iki farklı şekilde toplanmıştır. Burada sinirin düşük sıcaklıklarda daha kolay uyarıldığı not edilmelidir.

Bu eşitliklerde, I_T , bir hareket potansiyelinin simülasyonu için gerekli eşik değeri akımıdır, I_0 ve τ , deneysel veriyi oluşturacak olan sinirin parametreleri ve karakteristiğidir. Bu eşitliklerin hepsi, sinir simülasyonu için tüm davranışı tanımlar. Ancak fonksiyonel form, her durum için farklı asimptotik davranış gösterir.

4.2. Kuvvet-Süre Modelleri

Sinir simülasyonu için basit bir elektrik devresi modeli, hücre zarının uyarı darbesinin başlangıcında çalıştırılan paralel bir direnç ve kapasitörün ideal bir akım kaynağına bağlanması ile temsil edilebileceğini varsaymaktadır.



Şekil 4.2. (a) Zar depolarizasyonu (b) Tipik bir sinir hücresi için kuvvet- süre eğrisi

Bu devre, Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Bu modelde, zar alanının (A) bir parçasının özel bir zar direncine (r_m) ve kapasitansına (c_m) sahip olduğu kabul edilmektedir. Buradan ilgili eşdeğer devre R_m ve C_m değerlerine aşağıdaki ifadeler aracılığıyla ulaşılır:

$$R_m = \frac{r_m}{A}$$

ve

$$C_m = c_m A$$

Dinlenme durumunda olan sinir hücre zarları için r_m ve c_m tipik değerleri, sırasıyla 1000 ohm-cm² ve 1 µfarad/cm² şeklindedir.

Toplam akım (I_m)'nin R_m ve C_m 'den akması gerektiğinden, şu şekilde yazabiliriz:

$$I_m = I_R + I_C$$

Ohm kanununu kullanarak, $V = IR$, ve ideal kapasitör davranışı olacağını kabul ederek, $I = C dV/dt$, şunu elde ederiz:

$$I_{m0} u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ I_{m0} & , t > 0 \end{cases} \quad \text{olduğunda,}$$

$$C_m \frac{dV_m(t)}{dt} + \frac{V_m(t)}{R_m} = I_{m0} u(t)$$

Bu birinci mertebeye diferansiyel denklemin çözümü,

$$V_m(t) = I_{m0} R_m [1 - e^{-t/\tau}] \text{ dir.}$$

Burada,

$$\tau = R_m C_m \text{ dir.}$$

Zar - zaman sabitini (ohm-farad=saniye) tanımlar ve bu tipik olarak milisaniyeler seviyesindedir. Eşik değeri akımı I_T , t kadar süren bir darbe için zar potansiyelini $V_m(t)$ hareket potansiyeli eşik değerine getirmek için gereken I_{m0} değeridir. Eşik değeri akım ve voltajı, I_T ve V_T , bu modele şu denklemlerle bağlanırlar:

$$V_T = I_T R_m [1 - e^{-t/\tau}]$$

$$I_T = \frac{V_T/R_m}{[1 - e^{-t/\tau}]} = \frac{I_0}{[1 - e^{-t/\tau}]}$$

Bunu I_T için çözdüğümüzde; burada I_0 ve τ , sinir hücrelerinin karakteristikleridir. Bu ifadede I_0 , şekil 4.2'de gösterilen reobaza karşılık gelir. Aynı zamanda, $I_T = 2I_0$, bu yüzden de $t_c = (\ln 2) R_m C_m$ olduğunda, bu model için kronaksi oluşur. Buradan hareketle, $V_{mo} = I_T R_m$ 'nin uygulanan voltaj darbesinin büyüklüğü olduğu durumda, Şekil 4.1'de gösterilen veriyi tanımlamak için ilk defa 1907 yılında Lapicque tarafından türetilmiş üssel kuvvet-süre ilişkisini elde ederiz ve şu eşdeğer ilişkiye ulaşırız:

$$V_{mo} = \frac{V_T}{[1 - e^{-t/\tau}]}$$

Burada V_{mo} uzun süreli voltaj darbeleri için V_T (reobaz)'a yaklaşır. Kısa akım darbeleri için, ($t \ll \tau$), üssel fonksiyonu kendi Maclaurin serisinin

$$(e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \text{ açılımı}, -\infty < x < \infty)$$

ilk iki terimiyle gösterebiliriz. Buradan çıkacak sonuç:

$$I_T \cong \frac{I_0}{1 - [1 - t/\tau]} = \frac{I_0}{t} = I_0 \tau t^{-1}$$

olur ve şu denklem elde edilir:

$$I_T t = Q_T = I_0 \tau$$

Bu ifade, akımın bir "eşik değeri" miktarı ($Q_T = I_0 \tau$) zarı geçtiğinde hareket potansiyeli simülasyonunun oluştuğunu gösterecek şekilde çıkartılmıştır.

Ek olarak, kısa süreli darbe sınırında Lapicque üstel ifadesi, $\tau / t \gg 1$ olduğunda, Weiss kanununa benzerdir.

Tam Weiss ifadesi, uygulanan akımın I_{m0} , ayrı R_m ve C_m elemanları üzerinden aşağıdaki denkleme göre aktığı kabul edilerek elde edilebilir.

$$I_{m0} = \frac{V_m(t)}{R_m} + \frac{C_m V_m(t)}{t}$$

Burada,

$$C_m V_m(t) = \int_0^t I_{m0} d\tau$$

denkleme göre kapasitör yükleri R_m 'den bağımsız olarak sabit bir akım için zamanın doğrusal bir fonksiyonu olacak şekilde $V_m(t)$ 'yi verir. I_{m0} için çözülmesi halinde, şu şekilde yazabiliriz:

$$I_{m0} = \frac{V_m(t)}{R_m} \left[1 + \frac{\tau}{t} \right]$$

Ayrıca yukarıda kullanılan eşik değeri voltajı ve akımın aynı tanımları için ($V_m(t) = V_T$ ve $I_0 = V_T / R_m$ için $I_{m0} = I_T$) Weiss ifadesini elde ederiz:

$$I_T = I_0 \left[1 + \frac{\tau}{t} \right]$$

Bu, basitçe I_0 / t hiperbolik işleminin I_0 kadar ötelenmiş halidir. Böylece sıfır akımdan ziyade uzun süreli darbeler asimptotik olarak I_0 'a ulaşır.

Nernst modeli ilk olarak zar/elektrolit geçişindeki difüzyon denkleminin çözülmesiyle elde edilmiştir. Bu çözümde tüm akım, tek bir iyon türü tarafından taşınmaktadır.

Fakat burada,

$$I = C dV/dt$$

ifadesi aşağıdaki formun kesirli mertebeli türev ifadesine genelleştirilecek alternatif bir yaklaşım elde edilecektir.

$$I_C = C_m^\alpha \frac{d^\alpha V_m(t)}{dt^\alpha}$$

burada C_m^α , [amp*(sec) $^\alpha$]/volt; birimli, kesirli, mertebeli kapasitanstır. Şayet zar modelimizde R_m 'nin çok büyük olduğunu kabul edersek, I_R ihmal edilebilir. Buradan, $I_C = I_{m0}u(t)$ için direnç ihmal edilip $\alpha = 1/2$ alındığında, denklem aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{d^{1/2}V_m(t)}{dt^{1/2}} = \frac{I_{m0} u(t)}{C_m^{1/2}}$$

bu denklemin her iki tarafında $1/2$ mertebesinde kesirli integral alındığında, denklem şu hale gelir:

$$V_m(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[\frac{d^{-1/2}V_m(t)}{dt^{-1/2}} \right]_{t=0^+} = \frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} \left[\frac{I_{m0}u(t)}{C_m^{1/2}} \right]$$

Bu denklemin sol tarafının ilk durumu, kesirli integralin alt limitinin değerlendirilmesiyle ortaya çıkar. (Burada kolaylık olması için negatif mertebeli kesirli türev olarak gösterilmiştir.)

Tamsayı durumuna benzer şekilde, $F'(\tau) = dF/d\tau$ için analizin temel teoreminden şu denklem elde edilir:

$$\int_0^t F'(\tau) d\tau = F(t) - F(0^+)$$

Kesirli merteye integrali halinde işlemlerin tersi, analog kesirli merteye ilk durumunu oluşturmaktadır. Bu terimlerin genel formu, Miller ve Ross, Podlubny ve Zayed tarafından hazırlanmış metinlerde detaylarıyla incelenmiştir.

Bu durum için ilk halin sıfır olduğunu varsayarsak (örneğin, kapasitör üzerinde bir ilk voltaj bulunmadığını), $t > 0$ için birim adım fonksiyonu $u(t)$ 'nin kesirli merteye fonksiyonu için aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$V_m(t) = \frac{I_{m0}}{C_m^{1/2}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} = \frac{I_{m0} R_m}{\sqrt{t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

Burada bu kesirli merteye kapasitör modelini $R_m = C_m^{1/2} = \sqrt{\tau}$ şeklinde tanımlıyoruz. Şimdi, eşik değerinde, $V_m(t) = V_T$ ve $I_{m0} = I_T$, t süreli bir darbeye aşağıdaki denkleme ulaşırız:

$$I_0 = \frac{V_T}{R_m} = \frac{I_T}{\sqrt{t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

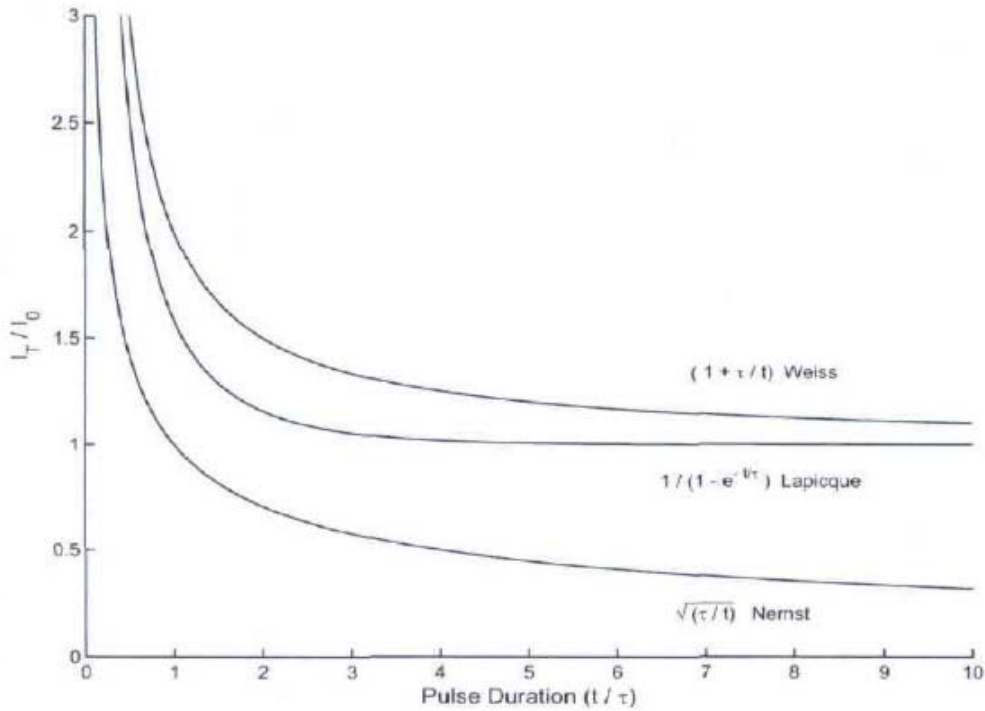
Bunu I_T için çözdüğümüzde,

$$I_T = \frac{\sqrt{\pi}}{2} I_0 \sqrt{\frac{\tau}{t}}$$

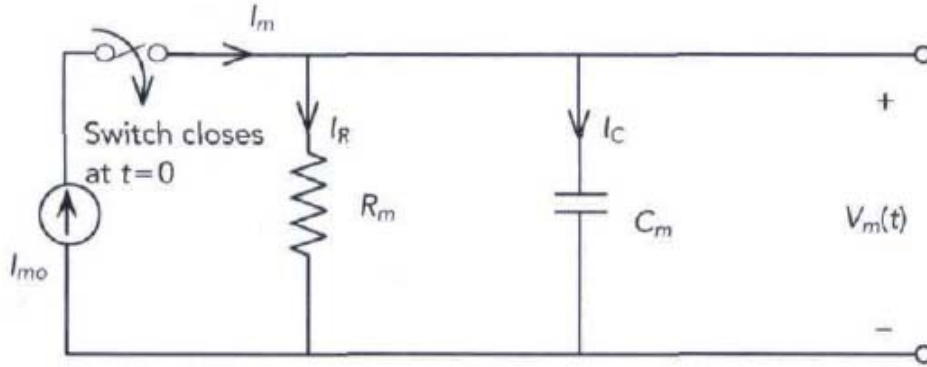
elde ederiz. Bu da neredeyse Nernst denklemine benzerdir. ($\sqrt{\pi} / 2 = 0.886$). Burada geliştirilen kuvvet-süre modellerinin her biri, Şekil 4.3'te çizilmiştir. Tümü, eşik değeri akım darbe yüksekliği ($I_{m0} = IT$) ile darbe süresi (t/τ) arasındaki ters ilişkiyi tanımlarlar.

Lapicque ve Weiss modelleri, uzun süreli darbeler için I_0 reobazına ulaşırken, kısa süreli darbeler için hiperbolik ($I_0 \tau / t$)'dir. (Örneğin sıfıra t^{-1} olarak ulaşır).

Gerçekte kesirli bir türev model olan Nernst modeli, uzun süreli darbeler için sıfır akıma düşer, ve $t \rightarrow 0$ olduğunda, $at^{-1/2}$ davranışı geliştirir. Genelde, kesirli türev model, $t \rightarrow 0$ iken bir güç kanunu asimptotik davranışı gösterir, burada türevin kesirli mertebesi, güç kanunu üssüne karşılık gelir. Kısa süreli darbeler için bu güç kanunu davranışı, genellikle kuvvet-süre deneylerinde gözlenir; ancak, bizim basit kesirli kapasitör zar modelimiz I_R 'yi ihmal eder ve uzun süre darbeler için sabit bir reobaza ulaşmaz. Sonraki adımda, bu sınırların üstesinden gelen bir modelden bahsedilecektir.



Şekil 4.3. Empirik kuvvet-süre eşitliklerinin karşılaştırılması



Şekil 4.4. $t=0$ anında sınır simülasyonu için R - C devre modeli

4.3. Zar Yükleminin Kesirli Analiz Modeli

Bir direncin kesirli zar kapasitansı ile paralel bağlandığı bir zar empedansı modeli düşünelim. Bu devre için şematik diyagram, Şekil 4.5'te gösterilmiştir.

Bunun diferansiyel denklemi, Şekil 4.4'te kullanılan devrenin analiz edilmesi için kullanılanla aynı şekilde çıkartılır. Bağımsız akım terimleri eklendiğinde, kesirli mertbe diferansiyel denklem aşağıdaki hale gelir:

$$C_m^\alpha \frac{d^\alpha V_m(t)}{dt^\alpha} + \frac{1}{R_m} V_m(t) = I_{m0} u(t)$$

Kesirli türevler için Caputo temsilini seçtiğimiz Laplace dönüşümünü bu eşitliğe uyguladığımızda şunu elde ederiz:

$$C_m^\alpha [s^\alpha v_m(s) - s^{\alpha-1} V_m(0^+)] + \frac{1}{R_m} v_m(s) = \frac{I_{m0}}{s}$$

Şayet $V_m(0^+)$ 'nin ilk değerini sıfıra eşitlersek ve $\tau^\alpha = R_m C_m^\alpha$ olduğundan, buradan şu eşitliği elde ederiz:

$$v_m(s) \left[s^\alpha + \frac{1}{\tau^\alpha} \right] = \frac{I_{m0}}{C_m^\alpha s}$$

$$v_m(s) = \frac{I_{m0}R_m}{\tau^\alpha s \left[s^\alpha + \frac{1}{\tau^\alpha} \right]}$$

Bunu da aşağıdaki şekilde yeniden yazarsak, ters Laplace dönüşümleri çizelgesini kullanarak iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{\alpha,\beta}(at)$ şeklinde, aşağıdaki gibi yazılabilen bir çözüme ulaşırız:

$$V_m(t) = I_{m0}R_m \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left[- \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \quad (22)$$

Alternatif olarak, Laplace alanı çözümünü kısmen kesirler kullanarak genişlettiğimizde aşağıdaki sonucu buluruz:

$$v_m(s) = I_{m0}R_m \left[\frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1/\tau^\alpha} \right]$$

Buna da ters Laplace dönüşümü uygulayarak tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $E_\alpha(at^\alpha)$ şeklinde, aşağıdaki gibi yazılabilen bir çözüme ulaşırız:

$$V_m(t) = I_{m0}R_m [1 - E_\alpha(-[t/\tau]^\alpha)] \quad (23)$$

Denklem (22) ve (23)' teki iki çözümün denkliği, Mittag-Leffler fonksiyonları için kaydırma (shift) denklemi kullanılarak kontrol edilebilir:

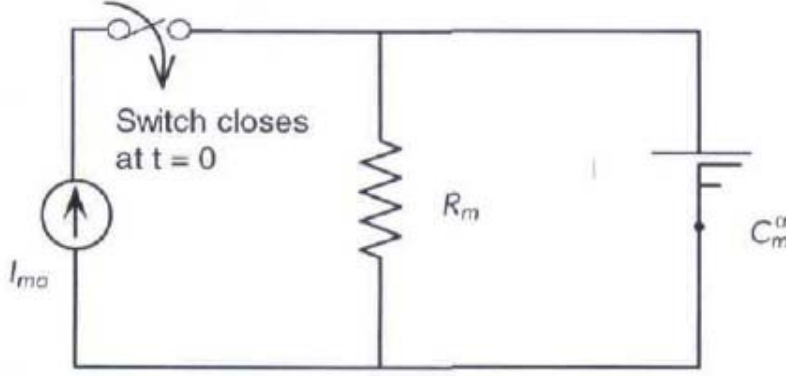
$$E_{\alpha,1}(at^\alpha) = 1 + at^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(at^\alpha)$$

burada $\alpha = -1/\tau^\alpha$ şeklindedir. Şekil 4.6'da, $V_m(t)$ 'nin $\alpha = 0,25, 0,50, 0,75$ ve $1,0$ için zamana karşı grafiği gösterilmiştir.

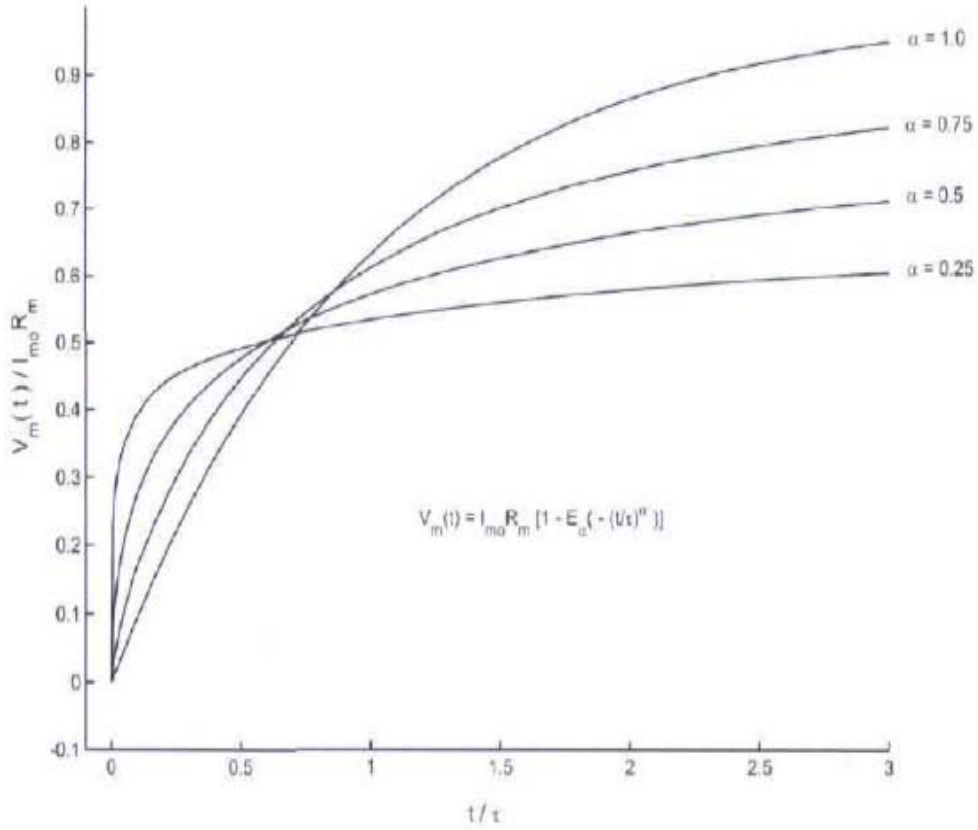
$\alpha = 1$ için bu sonuç,

$$V_m(t) = I_{m0}R_m (1 - e^{-t/\tau})$$

üstel denkleme haline gelir. Mittag-Leffler fonksiyonu aracılığıyla kesirli kapasitör modeli, üstel çözümden daha hızlı bir ilk yükselme gösterir ve devamında sonuçtaki kararlı hal voltajına daha yavaş ulaşır.

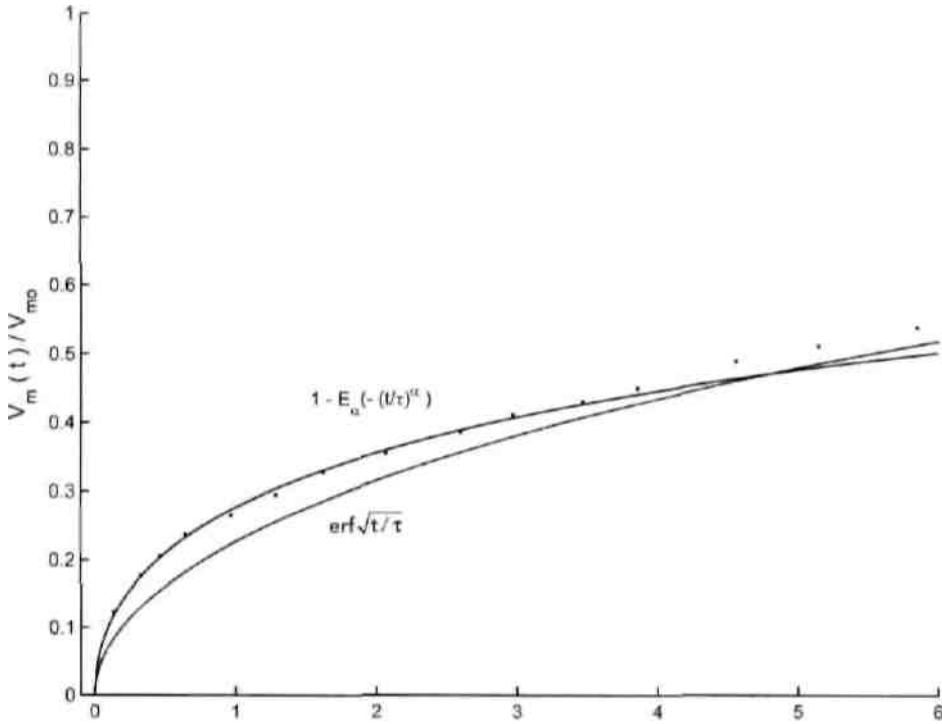


Şekil 4.5. Zar kapasitansının kesirli merteye yükleme modeli için şematik diyagram



Şekil 4.6. $\alpha=0,25, 0,50, 0,75$ ve $1,0$ için giriş akımının karşılığının grafiği

Bu sonucun uygulanması ile ilgili bir örnek olarak model, Falk ve Fatt tarafından adım-fonksiyonlu akım ile simüle edilen bir kurbağa diz kasından alınmış geçiş voltajı karşılık verisine karşılık gelmek üzere kullanılabilir. Bu veriler, Şekil 4.7'de çizilmiştir. Bu örnekte Mittag-Leffler karşılığı, Hodgkin ve Rushton'un [21] basit silindirik fiber modeli ile karşılaştırılmıştır:



Şekil 4.7. Normalleşmiş geçiş voltajı

$$V_m(t) = V_{m0} \operatorname{erf} \left(\sqrt{t/\tau} \right)$$

Burada $\tau = 24.2$ ms'dir. Zar zaman sabiti olarak $\tau = 10$ ms ve $\alpha=0.5$ kabul edildiğinde, kesirli kapasitör zar modeli, özellikle erken zaman noktalarında veriye daha fazla uyum gösterir. Bu problemin daha eksiksiz bir analizi, Fatt ve Falk tarafından bulunmuş olup, iki zaman sabitli model ve tam kablo sinir iletimi için kısmi diferansiyel denklem modeli çözümü geliştirilmesini gerektirmektedir.

Daha önceki şekilde simüle akım ve voltaj eşik değerleri için aynı tanımları kullanarak ($V_m(t)=V_T$ ve $I_{m0}=I_T$), R_m 'yi de işe katacak şekilde kesirli mertebe zar modelini şu şekilde elde ederiz:

$$\frac{V_m(t)}{R_m} = I_0 = I_T [I - E_\alpha(-[t/\tau]^\alpha)]$$

ve kesirli mertbe kuvvet-süre denklemleri aşağıdaki hale gelir:

$$I_T = \frac{I_0}{[1 - E_\alpha(-[t/\tau]^\alpha)]}$$

Bu model, uzun süreli darbeler için I_T 'nin I_0 'a yaklaştığını öngörür ki Weiss ve Lapicque modellerinde de bu aynıdır. Mittag-Leffler fonksiyonu, t 'nin büyük değerleri için sıfıra doğru azalır. Ek olarak, Mittag-Leffler fonksiyonu için güç serisi temsili kullanılarak;

$$E_\alpha(at^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

elde edilebilir.

Denklemin paydasını I_0 için genişletebiliriz:

$$I_T = \frac{I_0}{1 - \left[1 - \frac{(t/\tau)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{(t/\tau)^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{(t/\tau)^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \dots \right]}$$

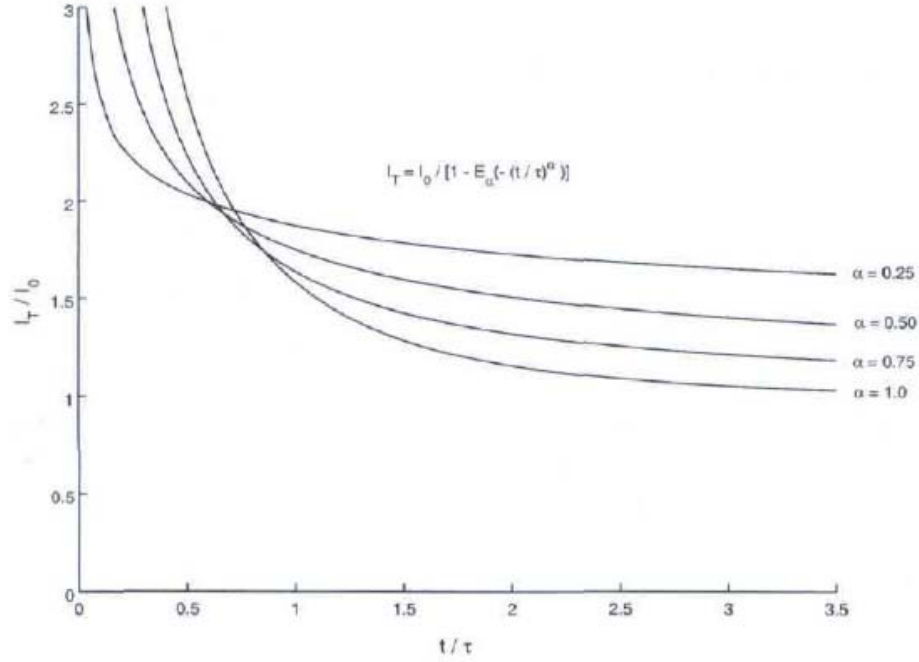
$t \ll \tau$ için ve daha yüksek mertebeli terimler ihmal edilerek, aşağıdaki hale getirebiliriz:

$$I_T \cong I_0 \Gamma(1 + \alpha) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha}$$

Burada $\alpha=1/2$ koyulduğunda, daha önce elde edilmiş olan Nernst ifadesine ulaşırız.

$$I_T = I_0 \Gamma(3/2) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} I_0 \sqrt{\frac{\tau}{t}}$$

α 'nın farklı değerleri için kuvvet-süre denkleminin zamana karşı kesirli mertebeli grafiği, Şekil 4.8'de gösterilmiştir.



Şekil 4.8. $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ ve 1.0 için kesirli mertebeli grafiği

Bu model, hem I_T , I_0 'a giderken uzun süreli reobaz davranışını, hem de kısa süreli güç kanunu $t^{-\alpha}$ davranışını t sıfıra doğru azalırken tanımlar. Bu yüzden, sonlu R_m ile zar kapasitansı için α mertebesinde bir kesirli türevin kabulünün üçüncü parametreye (I_0 ve τ 'ya ek olarak) yeni bir model sağladığını görürüz. Bu da deneysel verinin karakterize edilmesi veya modellenmesi için kullanılabilir. Son olarak, Mittag-Leffler fonksiyonunun asimptotik davranışını, verinin kısa ve uzun süre davranışlarına uyar. Buradan, $\alpha=1$ iken üstel fonksiyona yaklaştığı gibi bir genellemeye götürür.

Bu kesirli eleman devre modeli için verilen transfer fonksiyonu ile, diğer akım uyarılma dalga şekilleri için voltaj davranışlarını çözebiliriz.

Örneğin, $I_m = I_r t u(t)$ gibi bir akım olduğunu varsayarsak, şunu elde ederiz:

$$v_m(s) = \frac{I_T R_m}{\tau^\alpha s^2 [s^\alpha + \frac{1}{\tau^\alpha}]}$$

Bu sayede, Laplace dönüşümü tersi şu şekilde yazılabilir:

$$V_m(t) = I_T t R_m \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha E_{\alpha, \alpha+2} \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right]$$

Zar için temel devre modeli, aynı zamanda Şekil 4.9'da gösterildiği şekilde seri bir direnç içerecek şekilde genişletilebilir. $V_{mou}(t)$ giriş voltajının $t=0$ 'da devreye uygulandığını varsayarsak, bu devre modeli için sonuç zar voltajı şu hale gelir:

$$\lambda^\alpha = \frac{R_m + R_0}{R_m R_0 C_m^o}$$

için

$$V_m(t) = \frac{R_m V_{m0}}{R_m + R_0} [1 - E_\alpha [-(\lambda t)^\alpha]]$$

Bu problem, bir kesirli kapasitör varsayıldığında, Harold T. Davis tarafından 1936'da kesirli analiz metodları kullanılarak çözülmüştür. Bu 'The Theory of Linear Operators' (Doğrusal Operatörler Teorisi) yazısında, Profesör Davis, örneğin kendisine 1933 yılında Kantitatif Biyoloji üzerine Cold Spring Harbor Sempozyumu'nda Dr. Kenneth S. Cole tarafından bir görüşme sonrası verildiğini belirtmektedir.

Şayet hareket potansiyeli simülasyonu için bir eşik değeri voltajı V_T kabul edersek, uygulanan voltaj V_{m0} için şunu yazabiliriz:

$$V_m(t) = V_T = \frac{R_m V_{m0}}{R_m + R_0} [1 - E_\alpha [-(\lambda t)^\alpha]]$$

Buradan, $V_m(t)$ 'yi V_T 'ye yükseltmek için yeterli en düşük değer veya V_{m0} , $t \rightarrow \infty$ değerinde meydana gelir. Bu voltaj, $V_{m0} = V_0$, reobaz veya $V_m(t)$ 'yi V_T 'ye getirecek

olan devreye uygulanan minimum voltaja karşılık gelir: $V_{mo} > V_0$ şeklinde belirli süreli bir voltaj darbesi için zar simülasyonu eşik değeri V_0 , aşağıdaki durumda ortaya çıkar:

$$\frac{R_m V_0}{R_m + R_0} = \frac{R_m V_{m0}}{R_m + R_0} [1 - E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha)]$$

Burada bu model için kuvvet-süre denklemi, aşağıdaki şekildedir:

$$V_0 = V_{m0} = [1 - E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha)]$$

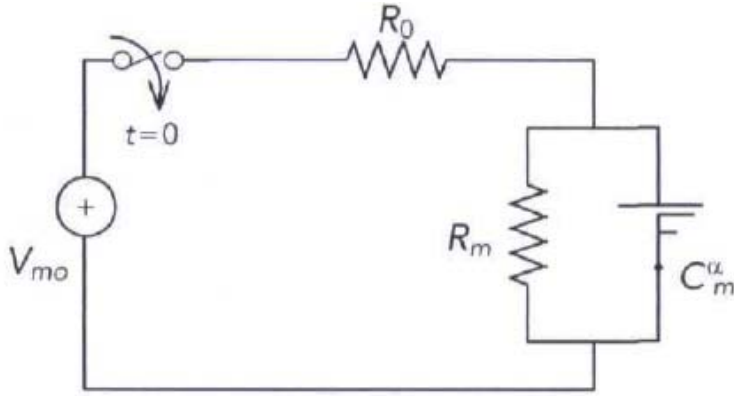
Bu denklemde, V_{m0} , $V_m(t)$ 'yi V_T 'ye getirmek için ihtiyaç duyulan t süresince uygulanan voltaj darbesi büyüklüğüdür, ve V_0 da reobazdır. V_{m0} / V_0 'ın zamana karşı çizilmiş grafiği, Şekil 4.8'de gösterilen ile eşdeğerdedir. $V_{m0} = 2V_0$ olduğunda, kronaksi oluşacaktır. Buradan, genel olarak şunu yazabiliriz:

$$E_\alpha[-(\lambda t_c)^\alpha] = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 1/2$ durumunda, şunu elde ederiz (Şekil 4.6)

$\lambda t_c = 0.53$ veya devre model parametreleri ile

$$t_c = \frac{0,53}{\lambda} = 0,53 \left[\frac{R_m R_0 C_m^{1/2}}{R_m + R_0} \right]^2$$



Şekil 4.9. İlave R_0 için eşdeğer devre

Kuvvet-süre eğrilerini gösteren erken dönem kayıtları, genellikle verinin kısa darbe süreleri için basit güç kanununa (t^{-1}) de, Nernst modellerine ($t^{-1/2}$) de uymadığından bahsetmektedir. Bu yüzden, genel güç kanunu ilişkisi olan $k t^{-\alpha}$, sıklıkla kullanılmıştır.

Rushton ve Lapique'nin kuvvet-süre verisi, 1933 yılında $\alpha=0,5$ ile $1,0$ arası için orta seviye değerler bulan Cole tarafından özetlenmiştir. Örnek olarak, Rushton, sıcak haldeki kurbağa siyatik siniri için $0,76$ ve soğuk haldeki için de $0,86$ değerinde bir α değeri raporlamıştır.

Lapique'in sinir için verileri, $0,22$ 'lik bir standart sapmayla $\alpha=0,656$ gibi bir ortalama göstermiştir. Lullies kurbağa siyatik sinir verisi üzerine Cole'nin analizleri, $\alpha = 0,71$ gibi bir sonuç vermiştir. Daha yeni incelemeler bu değerleri doğrulamaktadır. Sinir uyarılması için genelleştirilmiş bir kapasitörünün geliştirilmesi, kuvvet-süre verisine gelişmiş mertebede uyacak temelde düzenlenebilir.

Bu zar modeli alt eşik değeri ve tamamen pasif olup (Hodgkin-Huxley zar davranışı göstermez), zar özelliklerinin voltaj ve akımın lineer olmayan fonksiyonlarından oluştuğu hareket potansiyellerinin tanımına uygulanmaz.

Diğer taraftan, genelleştirilmiş kesirli kapasitör zar modeli, zarların, hücrelerin ve dokuların sinüzoidal voltaj veya akımla uyarılma durumundaki dielektrik davranışlarının tanımlanmasında önemli rol oynamaktadır, ve doğrusu, Cole'ün ve Cole ve Curds'ün ilk raporlarında bile bir çok biyolojik malzemenin (sinir, kas, deri, vb.) 0,61 ile 0,86 arasında değerler aldığını ileri süren alternatif akım verisi bulunmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Çavuş, M. S. “Kesirli (fractional) diferansiyel denklemler teorisi ve dielektrik durulmanın kesirli master denklemleri yöntemiyle analizi”, Doktora Tezi, *Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Adana, 29-30 (2006).
2. Churchill RV. Operational Mathematics. 2nd ed. New York: **McGraw-Hill**; (1958).
3. Roberts GE, Kaufman H. Table of Laplace Transforms. Philadelphia: **Saunders**; (1966).
4. Weil A. Mittag-Leffler as I remember him. *Acta Mathematica*; 148:9-13 (1982).
5. Agarwal RP. A proposd'une note de M.Pierre Humbert C.R. *Seances Acad Sci* 1953; 236:2031-32 (1953).
6. Abramowitz M, Stegun IA, editors. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. New York: **Dover**; (1970).
7. Zayed Al. Handbook of Function and Generalized Function Transformations. Boca Raton: **CRC Press**; (1996).
8. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: **Academic Press**; (1999).
9. Carpinteri A, Mainardi F, editors. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. CISM Courses and Lectures no. 378. International Center for Mechanical Sciences. New York: **Springer-Verlag Wien**; (1997).
10. Erdélyi A, editor. Higher Transcendental Functions. 3 vol. New York: **McGraw-Hill**; (1955).
11. Oldham KB, Spanier J. The Fractional Calculus. New York: **Academic Press**; (1974).
12. Miller KS, Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractal Differential Equations. New York: **John Wiley**; (1993).
13. Podlubny I. Fractal Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. San Diego: **Academic Press**; (1999).
14. Davis HT. The theory of Linear Operators from the Standpoint of Differential Equations of Infinite Order. Bloomington: **Principia Press**; (1936).

15. Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Amsterdam: **Gordon and Breach Science**; (1993).
16. Erdélyi A, editor. Tables of Integral Transforms. New York: **McGraw-Hill**; (1955).
17. Miller KS. The Weyl fractional calculus. In: Ross B. editor. Fractional Calculus and its Applications (Lecture Notes in Mathematics No. 457). New York: **Springer-Verlag**; (1975).
18. Gorenflo R, Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: Carpinteri A, Mainardi F, editors. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. New York: **Springer-Verlag Wien**; (1997).
19. Lavoie JL, Osler TJ, Tremblay R. Fractional derivatives and special functions. **SIAM Review**; 18:240-68 (1976).
20. Johnson D, Wu SM-S. Foundations of Cellular Neurophysiology. Cambridge, MA: **MIT Press**, (1999).
21. Hodgkin AL, Rushton WAH. The electrical constants of a crustacean nerve fibre. **Proc Roy Soc B**; 133:444-79 (1946).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

SOYADI, adı : ÖZKARA, Fahri
Uyruđu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 01.02.1974
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (312) 356 38 70
e-mail : fozkara@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1996
Lise	Keçiören Lisesi	1991

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2000 -	MEB	Öđretmen

Yabancı Dil

İngilizce