İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DINKELBACH YÖNTEMİ İLE RAYLEIGH ORANI ALT VE ÜST SINIRLARININ BELİRLENMESİ

Esin KAYA ÇETİN
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. İ.Müfit GİRESUNLU

Mart, 2012

İSTANBUL

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DINKELBACH YÖNTEMİ İLE RAYLEIGH ORANI ALT VE ÜST SINIRLARININ BELİRLENMESİ

Esin KAYA ÇETİN
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. İ.Müfit GİRESUNLU

Mart, 2012

İSTANBUL

Bu çalışma 30/03/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. İ.Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Kadri Ulaş AKAY
İstanbul Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ayten PEKİN
İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca, gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. İ.Müfit GİRESUNLU'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim. Çalışmam boyunca yardımı esirgemeyen sevgili hocam Sayın Prof. Dr. Erhan ÖZDEMİR'e teşekkürü borç bilirim. Hayatımın her aşamasında olduğu gibi bu tezin yazım ve basım aşamasına kadar her konuda en az benim kadar özveri ile çalışan ve beni her zaman cesaretlendirip destekleyen sevgili eşim Mustafa ÇETİN'e en içten saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca doğduğum günden bugüne kadar attığım tüm adımlarla gölgelerini yanımda hissettiğim, bütün dertlerimi sırtında taşıyan, benden önce söylenmiş tüm sözlerin sahibi olan anneme, babama ve kardeşime teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Mart, 2012 **Esin Kaya ÇETİN**

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Z	: Amaç Fonksiyonu değeri
$\mathbf{c_i}$	: Amaç Fonksiyonu katsayıları
$\mathbf{x_i}$	: Karar Değişkenleri
$\mathbf{b_j}$	: Sağ-taraf değerleri
S	: Uygun çözümler bölgesi
R^n	: n- boyutlu Vektör Uzayı
T.A.L.K.P.	: Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama
N.L.U.	: Normlanmış Lineer Uzay
L.P.	: Lineer Programlama
$R[\vec{x}]$	**:** Rayleigh Oranı

MATLAB 7.0 : Matematik işlemlerinde kullanılan bilgisayar programı

ÖZET

DINKELBACH YÖNTEMİ İLE RAYLEIGH ORANI ALT VE ÜST SINIRLARININ BELİRLENMESİ

Bu tez çalışmasında, Lineer Kesirli Programlama problemi genel olarak tanımlanarak çeşitli çözüm yöntemleri verilmiştir. Bu yöntemlerden biri olan Dinkelbach[8] tarafından ortaya konulan kesirli programlama problemi parametrik probleme dönüştürülerek Nonlineer Programlama problemi olarak çözülmüştür. Uygulama olarak Rayleigh Oranı kullanılmıştır.[2]

Bu çalışmayı, ilk ikisi hazırlık aşaması şeklinde olan dört bölüme ayırmak mümkündür. Genel kısımların ilk bölümünde vektör uzayı, lineer bağımlılık, norm, özdeğer ve özvektör ile ilgili bazı temel bilgilere değinilmiştir. Bölümün sonunda çalışmamızda oldukça önemli bir rol oynayan bir örnek yer almaktadır.

Genel kısımların ikinci bölümünde çalışmamızın esası lineer (doğrusal) programlama problemindeki temel varsayım, burada kullanılan bütün fonksiyonların lineer ifadeler olmasını gerektirmektedir. Ancak bunu pratikte gerçekleştirmek her zaman mümkün olmamaktadır. Bu yüzden nonlineer (doğrusal olmayan) programlama ile doğrudan ilgilenmek gereğini duyarız. Bu nedenle bu bölümde nonlineer programlama ve onun ile ilgili bazı yöntemler anlatılmaktadır.

Genel kısımların üçüncü bölümünde Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama problemi (T.A.L.K.P.) gösterilmiş. Lineer Programlamanın Değişken Dönüşümü Yöntemi, Güncelleştirilmiş Amaç Fonksiyonu yönteminden bahsedilmiştir. Aynı zamanda T.A.L.K.P.'in çözüm yöntemlerinden biri olan Dinkelbach Yöntemine de değinilmiştir.

Çalışmamızın son bölümünde, çalışmamızın esası olan Dinkelbach tarafından ilk defa ortaya konulan Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programla probleminin çözüm yöntemi olan Dinkelbach yönteminin Rayleigh Oranına uygulanışı gösterilmiştir.

SUMMARY

DETERMINATION OF LOWER AND UPPER BOUNDS OF RAYLEIGH RATIO WITH DINKELBACH METHOD

In this thesis study, Linear Fractional Programming has been defined in general and various solution methods have been pointed out. As one of the solution methods, fractional linear programming problem as defined by Dinkelbach[8] has been transformed to a parametric problem and solved as a non-linear programming problem. Rayleigh Ratio is used in application.[2]

This study can be divided into four chapters first two of which constitute preparation phase. First part of the general section mentions same basic information is given on vector space, linear dependency, norm, eigenvalue and eigenvector. An example that plays a crucial part in this study is given in the end of the chapter.

Second part of the general chapters includes our fundamental of our study; the base assumption of the linear programming problem requires all functions to be expressed linearly. However this is not always practical. Therefore we are forced to take interest in nonlinear programming directly. Hence this chapter defines nonlinear programming and some methods it employs.

Third part of the general chapter exhibits Single Purpose Linear Fractional Programming problem (S.A.L.F.P.) variable transformation method in Linear Programming, Updated Objective Function method has been explained. Additionally Dinkelbach Method, which is a method for solving S.A.L.F.P. has been mentioned.

Final chapter of the study explains application of Dinkelbach method, the solution method for Single Purpose Linear Fractional Programming Problem first exhibited by Dinkelbach to the Rayleigh Ratio

1. GİRİŞ

Günümüzde karşılaştığımız fiziksel sistemler içindeki ilişkiler matematiksel fonksiyonlarla ifade edilmek suretiyle fiziksel sistemin matematik modeli oluşturulur. Bir matematik modelde başlıca üç ana öğe bulunur. Bunlar; "**Karar Değişkenleri**" (dacision variables), "**Kısıtlar**" (constraints) ve "Amaç Fonksiyonu" (Objective Function) dur.

Daha önce geometri ve fizikte bazı maksimum ve minimum problemlerinin çözümünü bulmak için başlayan en iyileme teorisi karar bilimcilerin gerçek dünya problemlerinin çözümünde kullanmaya başlamaları ile hızla gelişmiştir. Karar bilimcilerin var olan kıt kaynaklar altında en iyi doyumu sağlayan çözümü bulmak için en iyileme tekniklerini kullanmalarıyla "**Matematik Programlama**" ortaya çıkmıştır.[16]

Matematik Programlama Problemlerinde amaç fonksiyonunun tek olması halinde "Tek Amaçlı Matematik Programlama Problemi" nin çözümü söz konusudur. Bu çözüm bir reel sayıdır.

Çalışmamızda tek amaçlı matematik programlamanın; Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama ve Nonlineer Programlama modeli ile ilgilidir. Amacımız; Hem Lineer hem de Nonlineer programlama probleminin çözüm yöntemlerinden biri olan "Dinkelbach Yöntemini", "Rayleigh Oranına" uygulamaktır.

Bazı kaynaklarda Kesirli Programlama Problemi hiperbolik programlama problemi olarak tanımlanmıştır. Bu özelliği nedeniyle problem aynı zamanda Nonlineer Programlama problemidir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. TEMEL MATEMATİK KAVRAMLAR

2.1.1. Lineer Uzaylar ve Özellikleri

Tanım 2.1.1.1. Boş olmayan ve elemanları $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \ldots$ vektörleri olan bir X cümlesi üzerinde aşağıdaki üç aksiyon gerçekleniyorsa bu X cümlesine bir **"lineer uzay"** veya **"vektör uzayı"** denir.

(a) X cümlesine ait herhangi iki $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin toplamı olarak tanımlanan ve yine X 'de bulunan bir $z = x + y$ elemanı vardır. Bu tanımın sonucunda;

- **i.** $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ için $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ değişme (komütatif) özelliği gerçeklenir.
- **ii.** $\forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$ için($\vec{x} + \vec{y}$) $+ \vec{z} =$ $\vec{x} +$ ($\vec{y} + \vec{z}$) birleşme (assosyatif) özellik olduğu gerçeklenir.
- **iii.** $\forall\ \vec{x} \in X$ için $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ eşitliğini sağlayan X' e ait bir tek -$\vec{x}$ elemanı vardır.
- **iv.** $\forall\ \vec{x} \in X$ için $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ eşitliğini sağlayan bir tek $\vec{0}$ elemanı vardır.

(b) $\vec{x} \in X$ ve ~ bir skaler olmak üzere $\vec{x}$ ile ~ 'nın çarpımı olarak tanımlanan X 'e ait bir tek $\sim\vec{x}$ elemanı vardır. Bu çarpımdan aşağıdaki özellikler elde edilir.

- **i.** ~ ve skalerler olmak üzere; ~ ($\vec{x}$) =(~) $\vec{x}$ olur.
- **ii.** $1.\vec{x} = \vec{x}$ olacak şekilde bir tek 1 elemanı vardır.

(c) Aşağıda toplama ve skalerle çarpma işlemleri arasındaki dağılma kuralları aşağıdaki gibidir.

- **i.** $(\sim + \quad)\,\vec{x} = \sim\vec{x} + \quad \vec{x}$
- **ii.** $\sim\,(\vec{x} + \vec{y}) = \sim\vec{x} + \sim\vec{y}$

Verilen üç aksiyomdaki gibi tanımlanan bir X lineer uzayının elemanlarına uzayın noktaları veya vektörleri denir. X uzayı ~ skalerleri reel sayı ise **"reel lineer**

uzay" kompleks sayılar ise **"kompleks lineer uzay"**dır. Daha genel olarak lineer uzaylar bir cisim üzerinde tanımlanır.

2.1.2 Lineer Uzay Örnekleri

(a) Reel Sayılar Cümlesi; üzerinde tanımlanmış bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile bir lineer uzaydır. Kompleks Sayılar Cümlesi de bir lineer uzaydır.

(b) $x_1, x_2, ..., x_n$ reel veya kompleks sayılar olmak üzere $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sıralı n–liler'i (ordered n-tuples) göz önüne alınsın. Bu n–liler üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\sim (x_1, x_2, ..., x_n) = (\sim x_1, \sim x_2, ..., \sim x_n) \qquad (2.1.2.1)$$

(2.1.2.1) ile verilen tanımlamalarda $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şeklinde bütün sıralı n- liler'in cümlesi bir lineer uzaydır. Böyle bir uzaya **"n- boyutlu vektör uzayı"** ya da kısaca **"n-uzayı"** denir.

$x_1, x_2, ..., x_n$ sayıları reel ise vektör uzayı R^n, $x_1, x_2, ..., x_n$ sayıları kompleks ise vektör uzayı C^n ile gösterilir.

2.1.3. Lineer Bağımlılık ve Alt Uzay

Tanım 2.1.3.1. n boyutlu uzayda m tane

$$\vec{x}_1 = [x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}]$$

$$\vec{x}_2 = [x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}]$$

…………………….

$$\vec{x}_m = [x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}]$$

Vektörleri ile m tane $k_1, k_2, ..., k_m$ sayılarını düşünelim. Buna göre;

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + ... + k_m\vec{x}_m = \vec{0}$$

Yukarıdaki bağıntı $k_1, k_2, ..., k_m$ sayılarının en az biri sıfırdan farklı olduğunda sağlanıyorsa $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ vektörlerine **“lineer bağımlı”** denir. Aksi halde;

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + ... + k_m\vec{x}_m = \vec{0}$$

Bağıntısı $k_1 = k_2 = ... = k_m = 0$ sayılarının hepsi sıfır olduğunda sağlanıyorsa $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ vektörlerine **“lineer bağımsız”** denir.

Eğer bir X lineer uzayında n lineer bağımsız eleman bulunabilirse ve herhangi $n+1$ vektör lineer bağımlı ise X uzayına n – boyutlu (boyutu n) **“lineer uzay”** denir. Her n için X ’de n lineer bağımsız eleman bulunabildiği varsayılsın. O zaman X uzayına **“sonsuz – boyutlu”** denir. n – boyutlu bir X lineer uzayının, lineer bağımsız n elemanın herhangi bir cümlesine X ’in **“tabanı”** denir.

Tanım 2.1.3.2. $\vec{x}_{m+1}$ vektörü $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ vektörleri cinsinden

$\vec{x}_{m+1} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + ... + k_m\vec{x}_m$ şeklinde yazılabiliyorsa $\vec{x}_{m+1}$ vektörüne $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ vektörlerinin **“lineer kombinezonu”** denir.

Tanım 2.1.3.3. n- boyutlu uzayın bir S alt uzayını göz önüne alalım. Eğer bu S cümlesinin her nokta çiftinin bir konveks kombinezonu gene S cümlesinde ise S cümlesine **“konveks küme”** denir.

Tanım 2.1.3.4. Bir X lineer uzayına ait herhangi bir S cümlesi göz önüne alınsın. $\vec{x}, \vec{y} \in S$ ve $\sim,$ aynı cisimlerden alınan skalerler olmak üzere $\sim\vec{x} + \vec{y} \in S$ elde ediliyorsa S cümlesi X uzayının bir **“lineer alt uzayı”** denir. Bu nedenle X uzayında herhangi bir 0 elemanı verildiğinde veya $\{0\}$ cümlesi verildiğinde, bu cümlede X **’** in en küçük lineer alt uzayıdır.[18]

Lineer uzaylar teorisindeki birçok önemli konunun dayandığı bir kavram da "**konveksliktir**". [14]

Örnek 2.1.3.1. R uzayı tek boyutludur. R uzayının sıfırdan farklı her elemanı lineer bağımsızdır. $S = \{1\}$ lineer bağımsızdır. $S = \{\sim_1, \sim_2\}$ lineer bağımlıdır. $\sim_1 = 0$ ise

$$1.\sim_1 + 0.\sim_2 = 0$$

$$\left(-\frac{\sim_2}{\sim_1}\right).\sim_1 + 1.\sim_2 = 0$$

şeklinde ifade edilir.

2.1.4. Normlanmış Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.4.1. X bir cümle, p de XxX de tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$ için p fonksiyonu

i. $p(\vec{x}, \vec{y}) > \vec{0}$

ii. $p(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$

iii. $p(\vec{x}, \vec{y}) = p(\vec{y}, \vec{x})$ (simetri özelliği)

iv. $p(\vec{x}, \vec{y}) \leq p(\vec{x}, \vec{z}) + p(\vec{z}, \vec{y})$ (üçgen özelliği)

koşullarını sağlasın. O zaman p fonksiyonuna "metrik" ve X cümlesinin elemanları ile p 'den oluşan boş olmayan (x, p) uzayına da **"metrik uzay"** denir. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayılarının bütün $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sıralı n- lilerinin cümlesi $p = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ nun oluşturduğu uzay metrik uzaydır ve bu uzaya n- boyutlu R^n Euclid uzayı (veya Euclid n- uzayı) denir.

T özel olarak "**metrik uzay**" olsun. Bir f fonksiyonu T 'den R 'in (reel eksenin) içine bir tasvir ise, o zaman f "**reel değerli**" bir fonksiyondur (reel fonksiyon). Örneğin bilinen "**n değişkenli fonksiyon**" R^n Euclid n- uzayında bir reel değerli fonksiyondur. T elemanları fonksiyonlar olan bir "fonksiyon uzayı" olsun. Bu durumda T üzerindeki bir reel değerli fonksiyona bir "**fonksiyonel**" [14] denir. Ancak buradaki fonksiyonel kavramı ilerde bahsedeceğimiz fonksiyonel kavramı ile ilişkili değildir sadece sözcük olarak benzerlik vardır.

Tanım 2.1.4.2. Herhangi bir X lineer uzayı üzerinde tanımlı negatif olmayan reel-değerli $\|.\|$ fonksiyonu $\vec{x}, \vec{y} \in X$ olmak üzere eğer,

i. $\|\vec{x}\| = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0},$

ii. $\|\sim\vec{x}\| = |\sim| \; \|\vec{x}\|$ (~ skaler)

iii. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa ona X üzerinde bir **"norm"** denir. Bir X lineer uzayı üzerinde bir norm tanımlanmışsa o uzay **"normlanmış lineer uzay"** (N.L.U) olur. Her N.L.U. , üzerindeki norm tarafından doğrulanan

$p(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ metriği ile bir metrik uzay yapısına sahiptir.

2.1.5. Özdeğer ve Özvektör Kavramı

2.1.5.1. Özdeğer Kavramı

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, elemanları reel sabitler olan bir kare matris olsun. Sıfırdan farklı reel veya kompleks $\vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörünü alalım. ª reel veya kompleks bir sabit olmak üzere;

$A\vec{X} = ª\vec{X}$ veya $(ªI - A)\vec{X} = \vec{0}$ açık olarak yazalım.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \vec{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ olmak üzere;

$$A\vec{X}-\lambda\vec{X}=\vec{0}$$

$$(A-\lambda I)\vec{X}=\vec{0}$$ elde edilir.

$$\lambda I=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \qquad A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)\vec{X}=\vec{0}$$ ifadesi

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde açıkça yazılabilir.

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{array}\right\} \qquad (2.1.5.1.1)$$

λ ya A'ın özdeğeri, $\vec{X}$ ya A'ın λ özdeğerine karşılık gelen "**özvektörü**" veya "**doğrultusu**" denir.

$\left(\vec{X}\neq\vec{0}\right)$ sisteminin hepsi sıfır olmayan bir çözümü olması için

$$|C| = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.1.5.1.2)$$

olması gerekir ve yeter. Bir λ sayısının A'ın bir özdeğeri olması için (2.1.5.1.2) denkleminin gerçeklenmesi gerek ve yeter. Bu yüzden bu denkleme A ya ait "**özdenklem**" denir. Özdenklem λ ya göre n nci dereceden cebirsel bir denklemdir:

$$p(\lambda) = |C(\lambda)| = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0 \qquad (2.1.5.1.3)$$

Eğer λ, özdenklemin m katlı bir kökü ise, λ ya m katlı bir özdeğeri denir. Cebrin temel teoremine göre yukarıda verilen A matrisinin, farklı olan özdeğerlerinden her biri katlılığı kadar sayılmak üzere tam n özdeğeri olduğu bilinmektedir.

2.1.5.2. Özvektör Kavramı

$(A - \lambda_i I)\vec{X} = \vec{0}$ sisteminin sıfır çözümünden başka en az bir $\vec{X} \neq \vec{0}$ çözüm vardır. Bu çözüm $\vec{X}_i$ ile gösterilir. $\vec{X}_i$ çözümüne A matrisinin λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

2.1.5.3. Simetrik Bir Matrisin Özdeğerlerinin Sıralanması

Simetrik bir A matrisinin reel olan özdeğerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ sırasında olsun. Bunlara karşılık gelen özvektörleri (yani $\|\vec{U}_i\| = 1$) $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ olsun.

Herhangi bir $\vec{x}$ vektörü için A matrisinin Rayleigh Oranı:[1]

$$R[\vec{x}] = \frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \text{ ‘ dir.} \qquad (2.1.5.3.1)$$

Ayrıca her $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektörü için:

1. $\lambda_1 \leq R[\vec{x}] \leq \lambda_n$

2 . Her $i = 1,\ldots,n$ için $R[\vec{U}_i] = \lambda_i$ dir.

Örnek 2.1.5.3.1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen simetrik A matrisinin reel olan özdeğerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ sırasında olsun. Bunlara karşılık normlanmış özvektörleri (yani $\|\vec{U}_i\| = 1$) $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ olsun. Herhangi bir $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektörü için A matrisinin Rayleigh Oranı:

$$R[\vec{x}] = \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$$ olduğuna göre,

Yukarıdaki A matrisi ile her $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektörü için:

1. $\lambda_1 \leq R[\vec{x}] \leq \lambda_3$

2. Her $i = 1,2,3$ için $R[\vec{U}_i] = \lambda_i$

olduğunu gösterelim,

Çözüm 2.1.5.3.1.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 60\lambda - 100 = 0$$

Özdeğerler: $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ bunlara karşılık gelen özvektörler;

$\lambda_1 = -10$ için $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 2$ için $\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\lambda_3 = 5$ için $\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bu özvektörler ikişer ikişer ortogonaldir. Yani skaler çarpımları sıfırdır.

$$\vec{r}_1^{\,T}\vec{r}_2 = 1.1 + (-2)(2) + 5.(-1) = 0$$

$$\vec{r}_1^{\,T}\vec{r}_3 = 1.2 + (-2)(1) + 5.(0) = 0$$

$$\vec{r}_2^{\,T}\vec{r}_3 = 1.2 + (-2)(1) + (-1).(0) = 0$$

Bu vektörlerin birim vektörleri sırasıyla

$$\vec{U}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \vec{U}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \vec{U}_3 = \frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu arada R^3 uzayının herhangi bir $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektörünün bu üç vektörden oluşan $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$ tabanına göre ifade edilebildiğine değinelim.

Böyle bir vektör olarak $\vec{x} = (1,0,0)$ vektörünü alalım. Bu vektör bağımsız üç vektör olan $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ ' ün lineer kombinezonu olarak söyle ifade edilebilir:

$$\vec{x} = \sim_1 \vec{U}_1 + \sim_2 \vec{U}_2 + \sim_3 \vec{U}_3$$

Buradan $\sim_i$ katsayıları kolayca bulunur. Gerçekten:

$$\sim_i = \frac{\vec{x}\vec{U}_i}{\|\vec{U}_i\|^2} \qquad \text{öte yandan } \|\vec{U}_i\|^2 = 1 \text{ dir,}$$

$$\sim_i = \vec{x}\vec{U}_i \qquad \text{olur. O halde;}$$

$$\sim_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}, \qquad \sim_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \sim_3 = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{olur.}$$

O halde;

$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{U}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{U}_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{U}_3 \qquad \text{olur.}$$

1. $a_1 \le R[\vec{x}] \le a_3$ olduğunu göstermek için $, R[\vec{x}]$ oranını rasgele seçtiğimiz sıfırdan farklı iki $\vec{x}_1 = (1,0,0)$ ve $\vec{x}_2 = (1,1,0)$ vektörleri için bulalım.

$$A\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$R[\vec{x}_1] = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}}{1} = 4$$

$$A\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R[\vec{x}_2] = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

2. $\vec{U}_1$ için $R[\vec{U}_1]$' in hesabı

$$A\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ -50 \end{bmatrix}$$

$$R[\vec{U}_1] = \frac{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ -50 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}}}{1} = \frac{1}{30}(-300) = -10$$

$R\left[\vec{U}_2\right] = 2$ ve $R\left[\vec{U}_3\right] = 5$ olur. O halde bulunan bu oranların sıralaması aşağıdaki gibi olur.

$$a_1 = -10 < a_2 = 2 < 4 < 4{,}5 < a_3 = 5$$

Bu sonuçlar ile her $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektörü için hesaplanan Rayleigh Oranları en küçük özdeğer ile en büyük özdeğer arasında sıralanır.

2.2. TEK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA

Bu bölümde $F(\vec{x}) = \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$ şeklindeki bir amaç fonksiyonunun $A\vec{x} \leq \vec{b}$ ve $\vec{x} \geq 0$ kısıtları altındaki maksimumu ile ilgili bazı hatırlatmalar yapacağız.

$$\vec{x} \in S = \left\{ \vec{x} \in R^n \,\middle|\, A\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, b \in R^k \right\} \text{ olmak üzere} \qquad (\ 2.2.1\ )$$

$$maks \left\{ \frac{\vec{c}\vec{x} + \sim}{dX +} = z(\vec{x}) \right\} \qquad (\ 2.2.2\ )$$

Yukarıdaki tanımda, (2.2.1) ile kısıtların oluşturduğu "uygun bölge", (2.2.2) ile de maksimum yapacak amaç fonksiyonu belirtilmiştir. Bu tür bir probleme Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama (T.A.L.K.P.) problemi denilmektedir. T.A.L.K.P. probleminde, payda S 'de daima pozitif kabul edilmektedir.[20] Burada T.A.L.K.P. probleminin çözümü için geliştirilen yöntemler üzerinde duracağız.

2.2.1. Değişken Dönüşümü Yöntemi [5]

Bu yöntemde, payda S nin her yerinde pozitif sayıldığından,

$$p = \frac{1}{\vec{d}\vec{x} +}$$

dönüşümü yapılır. Böylece amaç fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i x_i p) + \sim p$$

şeklinde gelir. Eğer her i için

$$y_i = x_i p$$

dersek (2.2.1) ve (2.2.2) ile verdiğimiz T.A.L.K.P. problemi;

$$A\vec{y} - \vec{b}p = \vec{0}$$

$$\vec{d}\vec{y} + \quad p = 1 \qquad (2.2.3)$$

$\vec{0} \leq \vec{y} \in R^n$, $0 \leq p \in R$ olmak üzere

$$maks\{\vec{c}\vec{y} + \sim p\} \qquad (2.2.4)$$

şeklini alır. Bu problemde $k+1$ kısıt ve $n+1$ değişken bulunmaktadır.

2.2.2. Güncelleştirilmiş Amaç Fonksiyonu Yöntemi [4]

Bu yöntemde (2.2.2)'de verdiğimiz kesirli amaç fonksiyonunun $x_1,...,x_n$ ye göre hesaplanan kısmı türevlerinin oluşturduğu

$$\nabla Z(\vec{x}) = \frac{(\vec{d}\vec{x} + \quad)\vec{c} - (\vec{c}\vec{x} + \sim)\vec{d}}{(\vec{d}\vec{x} + \quad)^2}$$

gradienti hesaplanır ve bir $\vec{x}^0$ uygun noktası (vektörü) seçilir. Bu noktadaki $\nabla Z(\vec{x}^o) = (x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$ yerel gradient vektörü bulunur. Bu vektörün bileşenlerini amaç fonksiyonu katsayıları olarak kabul eden Lineer Programlama (L.P.) problemi çözülerek bir başka uygun nokta elde edilir. Bu işlem optimum çözüm buluncaya dek sürdürülür. Yöntemin algoritmik özellikleri aşağıdaki gibidir.

Adım 1: $i = 0$ yap

Adım 2: $i = i+1$ yap

Adım 3: $\vec{x}^i$ noktasındaki yerel gradient bul

Adım 4: $\vec{x}^{i+1}$ uç noktasını bulmak için elde edilen L.P.' yi optimum yap.

Adım 5: Eğer $\vec{x}^{i+1} \neq \vec{x}^i$ ise 2. adıma git. Değilse 6. adıma geç.

Adım 6: $\vec{x}^i$ Lineer kesirli programlamanın optimum çözümüdür.[2]

Kesirli Programlamada $f(\vec{x}) = \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$ amaç fonksiyonu $f(\vec{x})$ veya $g(\vec{x})$ fonksiyonlarının herhangi birisinin nonlineer olması halinde kesirli programlama problemine nonlineer kesirli programalama problemi denir. Ayrıca kısıtlardan herhangi birinin yada en az birinin nonlineer olması halinde de aynı adla anılır. Aşağıda tanımını vereceğimiz Dinkelbach Yöntemi hem lineer hem de nonlineer kesirli programlama probleminin çözümünde kullanılan bir yöntemdir.

2.2.3. Dinkelbach Yöntemi:

Dinkelbach Yönteminde, $S = \left\{\vec{x} \middle| A\vec{x} \le b; \vec{x} \ge 0\right\} \subseteq R^n$ boş olmayan kompakt bir küme, $f, g : S \to R$ fonksiyonları sürekli $g(x) > 0$ olduğunda,

$$maks\left\{\sim(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \middle| \vec{x} \in S\right\} \text{ problemi}$$

$\sim \in R$ olmak üzere;

$$F(\sim) = maks\left\{f(\vec{x}) - \sim g(\vec{x}) \middle| \vec{x} \in S\right\}$$

parametrik problemine çevrilerek çözülmektedir. (Dinkelbach, 1967),

Diğer yöntemlerden farklı olarak Dinkelbach Yöntemi hem lineer hem de nonlineer kesirli programlama probleminin çözümünde kullanılan bir yöntemdir.

2.3. NONLİNEER PROGRAMLAMA

Karşılaşılan matematik modellerinin bir çoğunda gerek amaç fonksiyonu ve gerekse sınırlayıcı koşullar doğrusal değildir. Bazı durumlarda doğrusal ifadeler kullanılabilir veya bir eğriyi yaklaşık olarak karakterize eden doğrusal ifadelerden yararlanılabilir. Ancak bu yaklaşım her zaman kullanılamaz. Böyle modeller arasında matematik olarak çözümü mümkün olmayanlar da vardır.

Nonlineer Programlama problemi genel olarak:[7]

$\vec{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ ve f, g_i, h_j fonksiyonları $\min\limits_{x \in X} f(\vec{x})$ fonksiyonu için diferansiyellenebilir olmak üzere;

$$g_i(\vec{x}) \leq 0, \qquad i = 1,2,...,m < n, \qquad (2.3.1)$$

$$h_j(\vec{x}) \geq 0, \qquad j = 1,2,...,r, \qquad (2.3.2)$$

ya da

$$g_i(\vec{x}) = 0, \qquad i = 1,2,...,m < n, \qquad (2.3.3)$$

$$h_j(\vec{x}) \geq 0, \qquad j = 1,2,...,r, \qquad (2.3.4)$$

Koşullarını sağlayan $f(\vec{x})$ fonksiyonunun değerini minimum yapan $\left[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right]$ kümesidir. $m < n$ olmak zorundadır. Eğer $m \geq n$ olursa optimize etmek için sol serbestlik dereceleri olmadığından, problemin çözümü çok zor olur. $n - m$ serbestlik derecesi sayısıdır.

Kısıtları sağlayan uygun değerler kümesine “**uygun küme**” denir. $\left[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right]$ kümesine de “**uygun nokta**” denir.

Nonlineer Programlamada optimizasyon problemlerinin çözümünde $g(\vec{x}) = 0$ olması durumunda kullanılan Lagrange Yöntemi ve $g(\vec{x}) \geq 0$ olması durumunda kullanılan Kuhn-Tucker Yöntemi denilen direkt olmayan yöntemler kullanılır. Ayrıca serbestlik derecesi tek olan fonksiyonların optimizasyonu için de direkt yöntemler kullanılır. Bu yöntemler tekrarlı sayısal çalışmalarda da kullanılır. Burada algoritmalar ile sayısal sonuçlar elde edilir. Ayrıca çok boyutlu problemleri çözmek için de direkt yöntemler yararlanılır. Direkt yöntemlerden gradient yöntemi hem kısıtlı hem de kısıtsız problemlerin optimizasyonu için kullanılır.

Tanım 2.3.1. n- değişkenli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonu,

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2$$

……………………

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m$$

koşulları altında maksimize eden noktaları "**Lagrange Yöntemi**" ile bulabiliriz. Bu yöntemin ilk aşamasında bir Lagrange Fonksiyonun oluşturulması gerekir. Bu fonksiyon:

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_m\right) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \sim \left[g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_i\right] \qquad (\ 2.3.1.1\ )$$

şeklindedir. Buradaki $\sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_m$ değerleri Lagrange Çarpanları olarak adlandırılır. Lagrange Fonksiyonlarının en önemli özelliği i ' nin bütün değerleri için

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_i = 0 \qquad (\ 2.3.1.2\ )$$

koşulunu gerçekleyen $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ değerleri mümkün çözümlerdir.
Bu değerler için (2.3.1.1) eşitliği nedeni ile;

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_m\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \qquad (\ 2.3.1.3\ )$$

olacaktır.

Böylece $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \sim^*_1, \sim_2^*, \ldots, \sim_m^*\right)$ çözümü $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_m\right)$ fonksiyonu için bir maksimum veya minimum gösterirken aynı anda, $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ çözümü de asıl fonksiyonun ekstremumu olacaktır. O halde burada, $(n+m)$ kısmi türev sıfıra eşitlenerek;

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_j} - \sum_{i=1}^{m} \sim_i \frac{\partial g_i}{\partial \vec{x}_j} = 0 && (j = 1,2,\ldots,n) \\
&\frac{\partial L}{\partial a_i} = -g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + b_i = 0 && (i = 1,2,\ldots,m)
\end{aligned}\right\} \qquad (\ 2.3.1.4\ )$$

(2.3.1.4) sistemi elde edilecektir. Bu sistemin çözümü ile aranılan ekstrem noktalar bulunacaktır.

Tanım 2.3.2. $f(\vec{x}), g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})$ ifadeleri gerekli koşulları gerçekleyen ve türevleri bulunan fonksiyonlar olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $\sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_m$ değerlerinin bulunması durumunda;

$$\vec{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*\right)$$

cümlesi, doğrusal olmayan programlama problemi için optimum çözüm olabilir. Gerçeklenmesi istenen koşullar şöyledir:

1. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}_j} - \sum_{i=1}^{m} \sim_i \dfrac{\partial g_i}{\partial \vec{x}_j} \leq 0$ $\quad (i = 1,2,\ldots,n)$

2. $\vec{x}_j^* \left(\dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}_j} - \sum_{i=1}^{m} \sim_i \dfrac{\partial g_i}{\partial \vec{x}_j} \right) = 0$ $\quad (i = 1,2,\ldots,n)$

3. $g_i(\vec{x}^*) - b_i \leq 0$ $\quad (i = 1,2,\ldots,n)$

4. $\sim_i \left[g_i(\vec{x}^*) - b_i\right] = 0$ $\quad (i = 1,2,\ldots,n)$

5. $\vec{x}_j^* \geq 0$ $\quad (j = 1,2,\ldots,m)$

6. $\sim_i \geq 0$ $\quad (i = 1,2,\ldots,m)$

(minimizasyon durumunda $\sim_i \leq 0$ olacaktır.)

Bu koşullar genel olarak, “**Kuhn-Tucker**” koşulları olarak adlandırılırlar. Buradaki $\sim_i$ değerleri, aslında, doğrusal programlamadaki dual değişkenlerine benzerler ve bunların ekonomik yorumları da vardır. Bu koşullardan (3) ve (5), sadece çözümün olabilirliği ile ilgilidir. Diğer koşullar ise optimum çözüme aday olabilecek mümkün çözümlerin çoğunu eleme görevi yaparlar. Ancak hemen belirtelim ki, bu koşulların gerçeklenmesi çözümün optimalliğini garanti etmeye yetmez. Yani bu koşullar gereklidir fakat yeterli değildir.

Aşağıda litaratürde hiperbolik programlama olarak tanımlanan kesirli programlama aynı zamanda Nonlineer Programlama problemidir.

Tanım 2.3.3. n değişkenli diferansiyellenebilir $f(\vec{x})$ fonksiyonunun gradienti,

$$\nabla f(\vec{x}) = \left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}_2}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}_n} \right]^T$$

n boyutlu vektördür. Bu vektör gradient algoritmalarına temel teşkil eden "**gradient yöntemini**" tanımlar.

Çok değişkenli fonksiyonlarda, bağımlı değişkene her bir bağımsız değişkeninin etkisi söz konusudur. Buna göre çok değişkenli fonksiyonlardaki türev kavramı; her bir bağımsız değişkendeki değişimin (artış veya azalışı) bağımlı değişken üzerindeki etkisi ve hem de bağımsız değişkenlerden birkaçı veya tümündeki değişimlerin (artış veya azalışı) yine bağımlı değişken üzerindeki toplam etkisi olarak düşünülecektir. Buna göre, çok değişkenli bir fonksiyon türevi her bir bağımsız değişken için ayrı ayrı ele alınmalıdır. İşte, çok değişkenli fonksiyonlardaki bağımsız değişkenlerden her birine göre uygulanan bu türeve "kısmı türev" denir.

2.3.1. Nonlineer Kesirli Programlama ve Nonlineer Parametrik Programlama Arasındaki İlişki[8]

S, R^n nin konveks ve bağlantı bir alt kümesi $N(\vec{x})$ ve $D(\vec{x}), S$ üzerinde sürekli, reel değerli fonksiyonlar, $N(\vec{x}) > 0$ ve doğrusal, $D(\vec{x})$ kuadratik ve konveks olsun.

i. $maks\{N(\vec{x}) / D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\}$

ii. $maks\{N(\vec{x}) - \sim D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\}$

$N(\vec{x})$ ve $D(\vec{x})$ sürekli, S kompakt ve $D(\vec{x}) = 0$ dışında tanımlı olduğundan i ve ii çözüme sahiptir.

Önerme 2.3.1.1. $F(\sim) = maks\{N(\vec{x}) - \sim D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\}$ R üzerinde konvekstir.

İspat. x_t , $\sim' \neq \sim''$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere

$F(t\sim' + (1-\sim)\sim'')$ ' yi maksimum yapar.

$$
\begin{aligned}
&F(t\sim' + (1-\sim)\sim'') = N(\vec{x}_t) - (t\sim' + (1-t)\sim'')D(\vec{x}_t) = \\
&t\left[N(\vec{x}_t) - \sim' D(\vec{x}_t)\right] + (1-t)\left[N(\vec{x}_t) - \sim'' D(\vec{x}_t)\right] \leq \\
&t maks\left[N(\vec{x}) - \sim' D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right] + (1-t) maks\left[N(\vec{x}) - \sim'' D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right] \\
&= tF(\sim') + (1-t)F(\sim'')
\end{aligned}
$$

Önerme 2.3.1.2. $\sim \in R$ için $F(\sim)$ süreklidir.

Önerme 2.3.1.3. $\sim', \sim'' \in R$ için $\forall \sim' < \sim''$ ise , $F(\sim'') < F(\sim')$ oluyorsa $F(\sim) = maks\left[N(\vec{x}) - \sim D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right]$ kesin monoton azalandır.

İspat. $F(\sim'')$ in $\vec{x}''$ de maksimumu alınmış olsun.

$$
\begin{aligned}
&F(\sim'') = maks\left[N(\vec{x}) - \sim'' D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right] = N(\vec{x}'') - q'' D(\vec{x}'') < \\
&N(\vec{x}'') - \sim' D(\vec{x}'') \leq maks\left[N(\vec{x}) - \sim D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right] = F(\sim')
\end{aligned}
$$

Önerme 2.3.1.4. $F(\sim) = 0$ eşitliğinin $\sim^* \in R$ gibi bir tek çözümü vardır.

İspat. Önerme 2 ve Önerme 3' ten $\lim_{\sim \to -\infty} F(\sim) = +\infty$ ve $\lim_{\sim \to +\infty} F(\sim) = -\infty$ dur.

Önerme 2.3.1.5. $\vec{x}^+ \in S$ ve $\sim^+ = N(\vec{x}^+)/D(\vec{x}^+)$ verilirse $F(\sim^+) \geq 0$ olur.

İspat: $F(\sim^+) = maks\left[N(\vec{x}) - \sim^+ D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right] \geq N(\vec{x}^+) - \sim^+ D(\vec{x}^+) \geq 0$ dir. Böylece $F(\sim^+) \geq 0$ olur.

Teorem 2.3.1.1. $\sim^* = N(\vec{x}^*)/D(\vec{x}^*) = maks\left[N(\vec{x})/D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right]$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$F(\sim^*) = maks\left[N(\vec{x}) - \sim^* D(\vec{x}) | \vec{x} \in S\right] = 0$ olmasıdır.

İspat.

(i) x^* (I) probleminin çözümü olsun. Bu halde $\forall\vec{x} \in S$ için;

$\sim^* = N(\vec{x}^+)/D(\vec{x}^+) \geq N(\vec{x})/D(\vec{x})$

Böylece;

(a) $\forall\vec{x} \in S$ için $N(\vec{x}) - \sim^* D(\vec{x}) < 0$

(b) $N(\vec{x}^*) - \sim^* D(\vec{x}^*) = 0$

$\forall\vec{x} \in S$ için (a) eşitsizliği üzerinden maksimum alınırsa;

$F(\sim^*) = maks\left[N(\vec{x}) - \sim^* D(\vec{x}) \middle| \vec{x} \in S\right] = 0$

(b) eşitliği ise $F(\sim^*)$ ’ in $\vec{x}^*$ ’ da maksimumu alınmış şeklidir. Böylece ispatın birinci kısmı bitmiştir.

(ii) Bir $\sim^*$ değeri için $\vec{x}^*$ noktası, $N(\vec{x}^*) - \sim^* D(\vec{x}^*) = 0$ eşitliğini sağlasın. (II) probleminin tanımında $\forall x \in S$ için;

$N(\vec{x}) - \sim^* D(\vec{x}) \leq N(\vec{x}^*) - \sim^* D(\vec{x}^*) = 0$ olur.

Böylece;

(a) $\forall\vec{x} \in S$ için $N(\vec{x}) - \sim^* D(\vec{x}) \leq 0$

(b) $N(\vec{x}^*) - \sim^* D(\vec{x}^*) = 0$

(a) dan $\forall\vec{x} \in S$ için $\sim^* \geq N(\vec{x})/D(\vec{x})$ ’ dir. Yani;

(I) probleminin maksimumu $\sim^*$ ’ dir. (b) eşitsizliğinden de $\sim^* = N(\vec{x}^*)/D(\vec{x}^*)$ elde edilir. Bunun anlamı, (I) probleminin çözümü $\vec{x}^*$ ’ dır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Genel kısımların ilk bölümünde matematik kavramları, bazı özellikleri ve bunların önemlerinden bahsedilmiştir.

Genel kısımların ikinci bölümünde çalışmamızın esası lineer (doğrusal) programlama problemindeki temel varsayım, burada kullanılan bütün fonksiyonların doğrusal ifadeler olmasını gerektirmektedir. Ancak bunu pratikte gerçekleştirmek her zaman mümkün olmamaktadır. Bu yüzden nonlineer (doğrusal olmayan) programlama ile doğrudan ilgilenmek gereğini duyarız. Bu nedenle bu bölümde nonlineer programlama ve onun ile ilgili bazı yöntemler anlatılmıştır.

Genel kısımların üçüncü bölümünde Kesirli Programlamaya yer verilmiş olup, bu programlama probleminin lineer çözümü için kullanılan Değişken Dönüşümü Yöntemi ve Güncelleştirilmiş Amaç Fonksiyonu Yöntemleri verilmiştir. Ayrıca bunlara alternatif diğer bir yaklaşım olan Kesirli Programlama Probleminin hem lineer hem de nonlineer çözümünde kullanılan "Dinkenbach Yöntemi" den bahsedilmiştir.

Bulgularda Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama (T.A.L.K.P.) probleminin çözüm yöntemi olan Dinkelbach Yöntemi ile Rayleigh Oranının alt ve üst sınırlarını elde etmek koşulu ile bu yöntemin Rayleigh Oranına uygulanışı verilmiştir.

Sonuçta, Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama (T.A.L.K.P.) probleminin çözüm yöntemi olan Dinkelbach Yönteminin Tek Amaçlı Nonlineer Kesirli Programlama problemlerinin de çözüm yöntemi olduğu vurgulanmıştır. Bu yöntemin Rayleigh Oranına uygulanışı yani Dinkelbach Yöntemi ile çözülebilen bir problemin Rayleigh Oranı ile de çözülebileceği gösterilmiştir. Böylece Tek Amaçlı Kesirli Programlama probleminin çözümü için standart tekniklere alternatif oluşturulabilecek yeni yöntemlerin kullanılabilirliği gösterilmiştir.

4. BULGULAR

4.1. DINKELBACH YÖNTEMİNİN RAYLEIGH ORANINA UYGULANIŞININ SONUÇLARI

Çalışmamızın esası Dinkelbach'ın ilk defa ortaya koyduğu kesirli programlama probleminin parametrik probleme dönüştürülerek çözümü nonlineer programlama problemine uygulayarak çözmek ve bu yöntem ile çözülen problemin Rayleigh Oranı ile de çözülebileceğini göstermektir.

Böylece genel kısımların ilk bölümünde Rayleigh Oranı ile çözümü yapılan Örnek 2.1.5.3.1.'i bu bölümde önce Dilkelbach Yöntemi ile çözelim.

Örnek 4.1.1.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Simetrik 3x3'lük bir A matrisinin reel olan özdeğerleri $a_1 \le a_2 \le a_3$ sırasında olsun. Bunlara karşılık normlanmış vektörleri özvektörleri (yani $\left\|\vec{U}_i\right\| = 1$) $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ olsun. Herhangi bir $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektörü için A matrisinin Rayleigh Oranı:

$$a = R[\vec{x}] = \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}} = \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \qquad \text{olduğuna göre,}$$

Yukarıdaki A matrisi ile her $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektörü için:

i. $a_1 \le R[\vec{x}] \le a_n$

ii. Her $i = 1,2,3$ için $R[U_i] = a_i$ olur.

Dinkelbach Yönteminde, $S = \left\{\vec{x} \middle| A\vec{x} \le b; \vec{x} \ge 0\right\} \subseteq R^n$ boş olmayan kompakt bir küme, $f, g : S \to R$ fonksiyonları sürekli $g(x) > 0$ olduğunda,

$$maks\left\{\sim(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \middle| \vec{x} \in S\right\} \text{ problemi}$$

$\sim \in R$ olmak üzere;

$$F(\sim) = maks\{f(\vec{x}) - \sim g(\vec{x}) | \vec{x} \in S\}$$

parametrik problemine çevrilerek çözülmektedir.

Dinkelbach Yöntemi ile bu problemi çözerken bunun bir nonlineer programlama problemi olduğunu göz önüne alalım ve bu problemi bu şekilde düzenleyelim, Dinkelbach Yöntemini uygulayalım.

Dinkelbach Yöntemindeki amaç fonksiyonumuz $F(\vec{x}) = \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$ şeklinde verilmiştir. Bu oranı Rayleigh Oranı $\sim = R[\vec{x}] = \dfrac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \dfrac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$ ile ifade edelim. Yani Rayleigh Oranını Dinkelbach Yöntemine göre düzenlersek;

$$\left.\begin{array}{l} F(\vec{x}) = \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \dfrac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \sim = R[\vec{x}] \\ \|\vec{x}\|^2 > 0 \text{ olduğundan amaç fonksiyonun paydası olan} \\ g(\vec{x}) > 0 \text{ koşulu sağlanır.} \\ \vec{x} \in S = \{\vec{x} \ | \vec{x} \in R^n, \vec{x} \neq \vec{0}\} \\ \text{kısıtların oluşturduğu } S \text{ uygun bölgesi de sağlanır.} \end{array}\right\} \qquad (\ 4.1.1\ )$$

Problemimiz R^3'te tanımlandığı için Örnek 2.1.5.3.1.'i (4.1.1) genel tanımına göre düzenleyelim.

$$\sim = R[\vec{x}] = \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \frac{[x_1 x_2 x_3].\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}{[x_1 x_2 x_3].\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$\sim \; = R[\vec{x}] = \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \frac{4x_1^{\;2} + x_2^{\;2} - 8x_3^{\;2} + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3}{x_1^{\;2} + x_2^{\;2} + x_3^{\;2}}$$

şeklinde düzenlenen problemin paydası $x_1^{\;2} + x_2^{\;2} + x_3^{\;2} > 0$ olduğundan Dinkelbach Yönteminde ki $g(\vec{x}) > 0$ kısıtını sağlar.

$$F(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{4x_1^{\;2} + x_2^{\;2} - 8x_3^{\;2} + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3}{x_1^{\;2} + x_2^{\;2} + x_3^{\;2}}$$

Dinkelbach Yöntemi ile çözümünü yaparsak; Rayleigh Oranının alt ve üst sınırlarını elde etmek için ;

$\vec{x}_0 = [1 \quad 0 \quad 0]$ $\qquad$ $\vec{x} \neq \vec{0}$ herhangi bir başlangıç vektörü alalım.

$$\sim_0 = R[\vec{x}] = \frac{\vec{x}_0^{\;T} A\vec{x}_0}{\vec{x}_0^{\;T} \vec{x}_0} = 4$$

$\dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \geq \sim$ $\qquad$ problemini minimuma göre düzenlersek

$\min\left[f(\vec{x}) - \sim g(\vec{x})\right]$ bu fonksiyon ile girilen matrisin özdeğerlerinin minimumu hesaplanır. Bu fonksiyon A matrisi ve $\vec{x}_0$ başlangıç vektörü için bulunan Rayleigh Oranı olan $\sim_0$ değerini hesaplar. $\sim_0$ değerine karşılık gelen $\min\left[f(\vec{x}) - \sim g(\vec{x})\right]$ amaç fonksiyonu optimize edilir. Bulunan $\vec{x}_1^{\,*}$ vektörüne karşılık $\sim_1 = \dfrac{f(\vec{x}_1^{\,*})}{g(\vec{x}_1^{\,*})}$ oranı bulunur ve $f(\vec{x}^{\,*}) - \sim g(\vec{x}^{\,*}) = 0$ oluncaya kadar devam edilip minimum orana ulaşılır. Örnek 2.1.5.3.1. de A matrisinde özdeğerlerinin minimumu -10 olarak bulunmuştur. Dinkelbach Yönteminde Program 4.1.1’de bu adımlar tekrarlanarak -10’a en yakın olan değerlere ulaşılır.

Aynı problemi maksimuma göre düzenlersek $\max\left[f(\vec{x}) - \sim g(\vec{x})\right]$ fonksiyonu ile A matrisinin özdeğerlerinin maksimumu hesaplanır. Burada da Örnek 2.1.5.3.1. de A matrisinin özdeğerlerinin maksimumu 5 olarak bulunmuştur. Dinkelbach Yönteminde Program 4.1.1’ de bu adımlar tekrarlanarak 5’e en yakın olan değerlere ulaşılır.

Yukarda verilen Örnek 4.1.1. aşağıda MATLAB 7.0 programında Dinkelbach Yöntemini, Rayleigh Oranına uygulayalım

Algoritma 4.1.1.

Adım 1: Matris oluşturulur. (A Matrisi)

Adım 2: Başlangıç sütun vektörü verilir ($\vec{x}_0$)

Adım 3: Girilen matrisin minimum özdeğerini hesaplar.

Adım 4: A ve $\vec{x}_0$ girdilerinden sonra $R[\vec{x}]$ (Rayleigh Oranı) ve Amaç Fonksiyonu hesaplanır. (Minimum için)

Adım 5: Minimum değer için hassasiyet belirlenir.

Adım 6: Döngü oluşturulur, döngüde elde edilen yeni $R[\vec{x}]$ değerleri ile minimum $R[\vec{x}]$'ye ulaşılmaya çalışılır. ($R[\vec{x}]$ değeri minimum olan -10 değerine yaklaşır. Hassasiyeti arttırdıkça bu değer -10 değerine daha da yaklaşacaktır.)

Program 4.1.1.

```
A=[4 2 -2;2 1 4;-2 4 -8];                                  ( Adım 1 )
x0=[1;0;0]                                                 ( Adım 2 )
ozdmin=min(eig(A));                                        ( Adım 3 )
clear Rx
Rx(1)=(x0'*A*x0)/(x0'*x0)                                  ( Adım 4 )
[x,fval]=fminunc(@(x)(x'*A*x-Rx(1)*x'*x),x0)
h=0.0000000000000000000000001;                             ( Adım 5 )
for i=2:10
   Rx(i)=(x'*A*x)/(x'*x)
[x,fval]=fminunc(@(x)(x'*A*x-Rx(i)*x'*x),x0)               ( Adım 6 )
if Rx(i)- ozdmin < h
         break
end
end
```

Tablo 4.1.1.

MATLAB 7.0'daki girdiler ve minimum sonuçları aşağıdaki tablodaki gibi gösterilir.

A	4	2	-2					
	2	1	4					
	-2	4	-8					
Rx	4	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00	
fval	-3.3E-16							
h	1E-26							
i	10							
ozdmin	-10							
x	0.033333							
	-0.06667							
	0.166667							
x0	1							
	0							
	0							

Algoritma 4.1.2.

Adım 1: Matris oluşturulur. (A Matrisi)

Adım 2: Başlangıç sütun vektörü verilir ($\vec{x}_0$)

Adım 3: Girilen matrisin maksimum özdeğerini hesaplar.

Adım 4: A ve $\vec{x}_0$ girdilerinden sonra $R\left[\vec{x}\right]$ (Rayleigh Oranı) ve Amaç Fonksiyonu hesaplanır. (Maksimum için)

Adım 5: Maksimum değer için hassasiyet belirlenir.

Adım 6: Döngü oluşturulur, döngüde elde edilen yeni $R\left[\vec{x}\right]$ değerleri ile maksimum $R\left[\vec{x}\right]$'ye ulaşılmaya çalışılır. ($R\left[\vec{x}\right]$ değeri maksimum olan 5 değerine yaklaşır. Hassasiyeti arttırdıkça bu değer 5 değerine daha da yaklaşacaktır.)

Program 4.1.2.

```
A=[4 2 -2;2 1 4;-2 4 -8];                                  ( Adım 1 )
x0=[1;0;0]                                                 ( Adım 2 )
ozdmax=max(eig(A));                                        ( Adım 3 )
clear Rx
Rx(1)=(x0’*A*x0)/(x0’*x0)                                  ( Adım 4 )
[x,fval]=fminunc(@(x)(-(x’*A*x-Rx(1)*x’*x)),x0)
h=0.00000000000000000000000001;                            ( Adım 4 )
for i=2:10
   Rx(i)=(x’*A*x)/(x’*x)
[x,fval]=fminunc(@(x)(-(x’*A*x-Rx(i)*x’*x)),x0)
if Rx(i)- ozdmax > h                                       ( Adım 6 )
         break
end
end
```

Tablo 4.1.2.

MATLAB 7.0’daki girdiler ve maksimum sonuçları aşağıdaki tablodaki gibi gösterilir.

A	4	2	-2					
	2	1	4					
	-2	4	-8					
Rx	4	4.02	4.31	4.75	4.99	4.99	5.00	5.00
fval	-2.7E-15							
h	1E-26							
i	10							
ozdmax	5							
x	0.8							
	0.4							
	2.33E-10							
x0	1							
	0							
	0							

Dinkelbach’ın ilk defa ortaya koyduğu kesirli programlama probleminin parametrik probleme dönüştürülerek çözümü nonlineer programlama problemine uygulanarak çözülmüştür. Bu örnek problem hem Rayleigh Oranı ile hem de Dinckelbach Yöntemi ile çözülmüştür.

Sonuçta, Tek Amaçlı Kesirli Programlamada kullanılan yöntemlere alternatif ve daha geniş kapsamlı olan Dinkelbach Yönteminden esinlenilmiş ve bu yöntemin Rayleigh Oranına uygulanışı verilmiştir. Böylece bir problemin her iki yöntem ile de çözülebileceği gösterilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmamızda matematik programlama probleminde amaç fonksiyonunun tek olması halinde Tek Amaçlı Matematik Programlama probleminin tanımı, özellikleri ve bu konuların bazı önemli teoremleri bulunmaktadır. Tek Amaçlı Lineer Matematik Programlamanın, Lineer Programlama ve Nonlineer Programlama modeli gösterilmiştir.

Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama problemi Değişken Dönüşümü Yöntemi, Güncelleştirilmiş Amaç Fonksiyonu Yöntemi ile çözülür. Bu yöntemlere alternatif diğer bir yaklaşımda Dinkelbach'ın ilk defa ortaya koyduğu; bir Kesirli Programlama probleminin parametrik probleme dönüştürülerek çözümüdür bu yöntem, bu konu üzerinde çalışan diğer yazarlar tarafından incelenerek geliştirilmiştir. (Ibaraki (1983), Mazzoleni (1973), Schaible (1976))

Dinkelbach Yönteminde, $S = \{\vec{x} \mid Ax \leq b; \vec{x} \geq 0\} \subseteq R^n$ boş olmayan kompakt bir küme, $f, g : S \to R$ fonksiyonları sürekli $g(x) > 0$ olduğunda,

$$maks\left\{ \sim(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \middle| \vec{x} \in S \right\} \text{ problemi}$$

$\sim \in R$ olmak üzere;

$$F(\sim) = maks\{ f(\vec{x}) - \sim g(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S \}$$

parametrik problemine çevrilerek çözülmektedir. (Dinkelbach, 1967)

Sonuç olarak, çalışmamızda bu yöntem ile Rayleigh Oranının alt ve üst sınırına ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] ALTAN, M.E., 2000, *"Lineer Cebir"*, Mimar Sinan Üniversitesi Yayınları

[2] B.NOBLE, New York 1969, *"Applied Linear Algebra"*, Prentice-Hall

[3] BAZARAA, M.S., SHERALI, H.S., SHETTY, C.M., 1993, *"Nonlinear Programming"*, JohnWiley & Sons, Inc., New York, S:524-531

[4] BITRAN, G.R., MAGNANTI, T.L., *"Linear Programming With a Franctional Objective Function"*, Operations Research, No:4, S:22-28

[5] CHARNES, A., COOPER, W.W., 1962 *"Programming With Linear Franctional Functionals"*, Naval Reserch Logistics, Quarterly No:34, S:181-186

[6] DANTZING, G.B., 1963 *"Linear Programming and Extensions"*, Priceton University Press, New Jersey

[7] DAVID, A.Wismer, CHATTERGY R., 1978 *"Introduction to Nonlinear Optimizasyon"*, Nonlinear Programming, S:14-20

[8] DINKELBACH, W., 1967 *"On Nonlineer Fractional Programming"*, Management Science, Vol.13, No. 7, S:492-498

[9] GARVIN, W.W., 1960 *"Introduction to Linear Programming"*, McGraw-Hill, New York

[10] GASS, Saul I., 1985 *"Linear Programming"*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York 1958

[11] GASS, Saul I., 1969 *"Linear Programming"*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York

[12] GIRESUNLU, İ.M, 1987 *"Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlamayı Hedef Programlamaya Dönüştüren Üst Sınırlar Önerisi"*, Doktora Tezi, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

[13] HADLEY, G., 1962 *"Linear Programming"*, Addison-Wesley, Reading Mass

[14] KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V., 1975 *"Introductory Real Analysis"*, Dover Publications, Inc., New York

[15] KUHN, H.W., TUNKER, A.W., 1950 *"Nonlinear Programming Proceding Second Burkeyel Symposium on Matematical Statistic on Probability"*, Univ. of California Press. Berkeley California, S:481-492

[16] ÖZDEMİR, E., 1983 *"Nonlineer Programlama Çözüm Yöntemleri ve Portföy Seçimi Problemine Uygulanması"*, Doktora Tezi (Basılmamış), İ.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü

[17] R. DORFMAN, P.A., SAMUELSON and R.M., 1958 *"Linear Programming and Economi Analysis"*, McGraw-Hill, New York

[18] ROYDEN, H.L., 1968 *"Reel Analysis"*, McMillan Rublishing Co, Inc., New York

[19] SEZGİNMAN, İbrahim, 2001 *"Lineer Programlama Teori ve Problemleri"*, Yıldız Teknik Üniversitesi Basın-Yayın Matbaası

[20] STEUER, R.E., 1986 *"Multiple Criteria Optimization: Theory Compitation and Aplication"*, JohnWiley & Sons, Inc.

[21] WEGNER, H.M., 1959 *"Linear Programming Techniques for Regression Analysis"*, Journals of American Statical Association

[22] ZIONTS, S., 1968 *"Programming With Linear Franctional Functionals"*, Noval Reserch Logistics Quarterly, Vol:15, No:3, S:449-451

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Bulgaristan (Razgrad)'da doğdu. Orta Öğrenimini Büyükçekmece Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde tamamladı. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl Lisede Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2006 yılında dershane öğretmeni olarak da görev yaptı, aynı zamanda İstanbul Üniversitesi Tezsiz Yüksek Lisans Orta Öğretim Alanlar Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'na kabul edildi. 2008 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans'a başladı. Hala bu bölümde öğrenimine devam etmektedir.