

T.C
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NİL ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARZU KAPÇIK

EYLÜL 2013

MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü


TEZ ONAYI

ARZU KAPÇIK tarafından hazırlanan **NİL ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 02/09/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JÜRİSİ

Yrd. Doç. Dr. Canan CELEP YÜCEL (**Jüri Başkanı**)

Matematik Anabilim Dalı,
Pamukkale Üniversitesi, Denizli

İmza:


Yrd. Doç. Dr. Ummahan ACAR (**Danışman**)

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:


Yrd. Doç. Dr. Bekir TANAY(Üye)

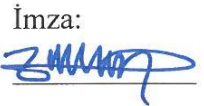
Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:


ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Zeynep FİDAN KOÇAK

Matematik Ana Bilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:


Yrd. Doç. Dr. Ummahan ACAR

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:


Savunma Tarihi: 02/09/2013

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, döküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez alışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orjinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Arzu KAPÇIK
02/09 /2013



ÖZET
NİL ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

ARZU KAPÇIK

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ummahan ACAR

Eylül 2013, 55 sayfa

Bu çalışmada 3-Armendariz halkaların bir genellemesi olan nil-3-Armendariz halka ve M monoidine göre nil-3-Armendariz halka tanımlanmış ve özellikleri sunulmuştur. Bu tezin amacı Armendariz, Weak-Armendariz ve Nil-Armendariz halkayla ilgili temel özellikleri inceleyerek tanımlanan nil-3-Armendariz halkanın özelliklerini irdelemektir. M monoidine göre nil-3-Armendariz halka ile ilgili özellikler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: 3-Armendariz Halka, Weak 3-Armendariz Halka.

ABSTRACT
ON NIL ARMENDARIZ RINGS

ARZU KAPÇIK

Master of Science(M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ummahan ACAR

September 2013, 55 pages

This study involves properties and definitions of M -nil-3-Armendariz and nil-3-Armendariz rings which are a generalization of 3-Armendariz rings. The aim of the thesis is investigating basic properties of Armendariz, Weak-Armendariz and Nil-Armendariz rings then examining properties of nil-3-Armendariz ring. Also this study presents properties of nil-3-Armendariz rings with relative to monoid.

Keywords: 3-Armendariz Ring, Weak 3-Armendariz Ring.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı en önemli teşekkürü hak eden değerli hocam, danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ummahan ACAR' a

Birlikte çalışmaktan zevk aldığım, her konuda benden desteklerini esirgemeyen ve bu çalışmaya katkılarından dolayı Tuba Kalız' a ve Nurbige Turan, ayrıca matematik bölümündeki hocalarıma ve araştırma görevlilerine,

Çalışmam sırasında her zaman yanımda olan ve beni başarıya sürükleyen dostlarıma, bütün hayatım boyunca benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen, bu günlere gelmemi sağlayan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Monoid, Grup, Halka	3
2.2. Dik Toplam	5
2.3. Monoid Halkaları	7
2.4. Polinom Halkaları	9
2.5. Matris Halkaları	9
3. KAYNAK ÖZETLERİ	11
3.1. Armendariz Halka	11
3.2. Weak Armendariz Halka	13
3.3. Nil Armendariz Halka	14
3.4. M-Nil-Armendariz Halka ve Özellikleri	21
4. MATERYAL VE METODLAR	28
4.1. Weak-3-Armendariz Halka	28
5. BULGULAR VE İRDELEME	30
5.1. Nil-3-Armendariz Halka	30
5.2. M-Nil-3-Armendariz Halka ve Özellikleri	40
6. SONUÇLAR	45
7. KAYNAKLAR	46
8. ÖZGEÇMİŞ	48

1. GİRİŞ

Herhangi polinom halkası üzerinde $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$ elemanları için her $a_i b_j = 0$ ise $f(x)g(x) = 0$ olduğu kolayca görülür. E. Armendariz (1974) "A Note On Extensions of Baer and P. P.-rings" çalışmasında R inmiş bir halka olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olmasının ancak ve ancak her i, j için $a_i b_j = 0$ olmasıyla mümkün olduğunu ispatlamıştır. Bu durum tamlık bölgesi üzerindeki polinom halkaları da açıktır. Dolayısıyla tamlık bölgesi olmayan halkalar için Armendariz' in vermiş olduğu bu özellik önem kazanır. Rege ve Chhawchharia (1997) çalışmalarında, R herhangi bir halka olmak üzere

$$f(x)g(x) = 0 \text{ iken her } i, j \text{ için } a_i b_j = 0$$

ise R halkasını Armendariz halka olarak adlandırmışlardır. Böylece Armendariz' in inmiş halka için vermiş olduğu bu özelliği keyfi bir halkaya taşımışlardır.

Yang (2008) çalışmasıyla Armendariz halkaları 3-Armendariz halkalara genellemiştir. Bu çalışmada 3-Armendariz halkalar baz alarak nil-3-Armendariz halkalar tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca M monoidine göre nil-3-Armendariz kavramı incelenmiştir. Çalışma altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümünde ihtiyaç duyulan monoid, halka, monoid halkaları, polinom halkaları, matris halkaları sırasıyla Kısım 2.1, Kısım 2.2, Kısım 2.3, Kısım 2.4' de yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Armendariz, Weak-Armendariz ve Nil-Armendariz halkalarıyla ilgili literatür taranmış ve örnekler sunulmuştur (Armendariz, 1974; Rege ve Chhawachharia, 1997; Kim ve Lee, 2000; Liu Z, 2005; Liu ve Zhao, 2006; Antonie, 2008; Yang, 2008; Abotalebi ve Hasemi, 2009; Jeon, Kim, Lee ve Yoon, 2009; Dixit ve Singh, 2010; Hizen, 2010; Hui-feng, 2012).

Günümüzde bir çok araştırmacı tarafından Armendariz, Weak-Armendariz, Nil-Armendariz halkalar yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Yang (2008)' de $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$ ve $h(x) = \sum_{k=1}^l c_k x^k \in R[X]$ olmak üzere;

$$f(x)g(x)h(x) = 0 \text{ ise her } i, j, k \text{ için } a_i b_j c_k = 0$$

özelliğini sağlayan halkaları 3-Armendariz halka olarak adlandırmıştır. Daha sonra Hui-feng (2012) çalışmasında Weak-3-Armendariz halkayı tanımlamıştır. Weak-3-Armendariz özellikleri Kısım 4.1' de verilmiştir.

Çalışmanın son bölümü özgün sonuçlardan oluşmaktadır. Bu bölüm için temel çıkış noktası Yang (2008) ve Hui-feng (2012) çalışmalarıdır. Bu çalışmalardan Kısım 4.1' de bahsedilmiştir. Kısım 5.1' de nil-3-Armendariz tanımı yapılarak özellikleri incelenmiştir. M monoidine göre nil-3-Armendariz halka ve özellikleri Kısım 5.2' de sunulmuştur. Ayrıca Kısım 3.4' de verilen M -nil-Armendariz halka özellikleri M -nil-3-Armendariz halkaya taşınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan bazı temel kavramlar verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için Hungerford (1980) ve Anderson-Fuller (1974) kaynaklarından yararlanılabilir.

2.1. Monoid, Grup, Halka

Bölüm 4.2' de nil-Armendariz halkaların M monoidine göre özellikleri araştırılmıştır. Bu nedenle öncelikle monoid tanımını vereceğiz.

M boştan farklı bir küme ve \star , M üzerinde bir iç işlem olsun.

- Eğer her $a, b, c \in M$ için $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ sağlanıyorsa \star işlemine birleşme özelliğine sahiptir denir.
- Eğer her $a \in M$ için $a \star e = e \star a = a$ olacak şekilde $e \in M$ varsa e ' ye \star işlemine göre M ' nin birimi denir.
- $a \in M$ için $a \star b = b \star a = e$ olacak şekilde $b \in M$ varsa b ' ye a ' nın \star işlemine göre tersi denir.
- Eğer her $a, b \in M$ için $a \star b = b \star a$ oluyorsa M ' ye \star işlemine göre değişmelidir denir.

Tanım 2.1.1 M boştan farklı bir küme ve \star , M kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Eğer M kümesi \star işlemine göre birimli ve birleşmeli ise M ' ye monoid denir.

Tanım 2.1.2 M boştan farklı bir küme ve \star , M kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Eğer M kümesi \star işlemine göre birleşmeli, birimli ve her elemanın elemanın tersi varsa (M, \star) grup denir. Eğer M grubu \star işlemine göre değişmeli ise M ' ye değişmeli grup denir.

Tanım 2.1.3 R bir değişmeli grup olmak üzere R üzerinde \circ bir iç işlem olsun. $a, b, c \in R$ için \circ işlemi;

- $a.(b.c) = (a.b).c$ (birleşme özelliği)
- $a.(b + c) = a.b + a.c$ (soldan dağılma özelliği)
- $(a + b).c = a.c + b.c$ (sağdan dağılma özelliği)

şartlarını sağlıyorsa $(R, +, \cdot)$ sıralı üçlüsüne halka denir. Halka çarpma işlemine göre değişmeli ise halkaya değişmeli halka denir. Halkanın toplamsal birimine halkanın sıfırı denir. Halka çarpma işlemine göre birimli ise halkaya birimli halka denir ve halkanın birimi 1_R ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 R bir halka, sıfırdan farklı a ve $b \in R$ için $a.b = 0$ ise a ' ya sol sıfır böleni b ' ye sağ sıfır böleni denir. Eğer R halkasının sıfır böleni yoksa sıfır bölensiz halka denir.

Tanım 2.1.5 R birimli değişmeli bir halka ve $0_R \neq 1_R$ olsun. Eğer R sıfır bölensiz ise R' ye bir tamlık bölgesi denir.

Tanım 2.1.6 R bir halka ve I, R' nin bir toplamsal alt grubu olsun. Eğer her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ ise I ya R' nin bir sol ideali ve her $a \in I, r \in R$ için $ar \in I$ ise I ya R' nin bir sağ ideali denir. Eğer I hem sol ideal ve hem sağ ideal ise I ya R' nin bir ideali denir.

Tanım 2.1.7 R bir halka ve $r \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $r.x = x.r$ şartını sağlayan r elemanlarının kümesine halkanın merkezi denir.

Halkaların Armendariz özelliği için baz oluşturan nilpotent eleman ve Abel halka için gerekli olan idempotent eleman tanımı verilecektir.

Tanım 2.1.8 R bir halka olmak üzere, R' nin bir a elemanı için $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa a elemanına nilpotent eleman denir. $a^n = 0$ olacak şekilde en küçük pozitif n tamsayısına a ' nin nilpotentlik derecesi denir.

Tanım 2.1.9 R bir halka ve $A \subseteq R$ olmak üzere, her $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ için $x_1 x_2 \dots x_n = 0$ oluyorsa A kümesine nilpotent alt küme denir. Eğer A kümesinin her elemanı nilpotent ise A kümesine nil küme denir. A 'nın nil kümesi $nil(A)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.10 I, R halkasının bir ideali olsun.

- I idealinin her bir elemanı nilpotent ise I ya nil ideal denir.
- $I^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbf{Z}^+$ varsa I ya nilpotent ideal denir.

Tanım 2.1.11 R halkasının $e^2 = e$ şartını sağlayan e elemanına idempotent eleman denir. Eğer idempotent eleman halkanın merkezinde ise merkezcil idempotent denir.

2.2. Dik Toplam

Bu çalışmada incelenen ve ortaya konulan halkaların dik toplamında aynı özelliği sağlayıp sağlamadığı araştırılmıştır. Dolayısıyla bu bölümde gerekli olan halkaların dik toplamı tanımı verilecektir.

I indeks kümesi olmak üzere $\{R_i \mid i \in I\}$ halka ailesi olsun. Bu halka ailesinin kartezyen çarpımı

$$\prod \{R_i \mid i \in I\} = \{f \mid f : I \longrightarrow \bigcup \{R_i \mid i \in I\}, f(i) \in R \text{ her } i \in I \text{ için}\}' \text{ dir.}$$

$f, g \in \prod \{R_i \mid i \in I\}$ olmak üzere kartezyen çarpım kümesi üzerinde her $i \in I$ için toplam ve çarpım işlemleri

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i)$$

$$(fg)(i) = f(i)g(i)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımlanan bu işlemlere göre $\prod \{R_i \mid i \in I\}$ kümesi bir halka yapısı oluşturur. Bu halkaya tam dik toplam denir ve $\prod_{i \in I} R_i$ ile gösterilir. Halkanın 0 elemanı fonksiyonu $0 : I \longrightarrow \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$ olan $0(i) = 0$ ile tanımlıdır. $f \in \prod_{i \in I} R_i$ için toplamsal tersi $-f : I \longrightarrow \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$ olan $-f(i) = -f(i) \in R_i$ fonksiyonu ile tanımlıdır.

Her $i \in I$ için $f \in \prod_{i \in I} R_i$ ve $f(i) = a_i \in R_i$ olsun. $f, \{a_i \mid i \in I\}$ görüntü kümesi ile tanımlanır. Bu gösterimi kullanarak her $i \in I$ için

$$\{a_i \mid i \in I\} + \{b_i \mid i \in I\} = \{a_i + b_i \mid i \in I\}$$

$$\{a_i \mid i \in I\}\{b_i \mid i \in I\} = \{a_i b_i \mid i \in I\}$$

işlemleri tanımlanabilir.

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu küme olsun. Bu şart altında tam dik toplam

$$\bigoplus_{i \in I} R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

ile gösterilir. Bu kümenin herhangi bir $\{a_i \mid i \in I\}$ elemanı (a_1, a_2, \dots, a_n) şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.1 $\{R_i \mid i \in I\}$ halka ailesinin dik toplamı $\bigoplus_{i \in I} R_i$ ile gösterilmek üzere

$$\bigoplus_{i \in I} R_i = \{\{a_i \mid i \in I\} \subseteq \prod_{i \in I} R_i \mid \text{sonlu } i \in I \text{ için } a_i \neq 0\}$$

ifadesi bir dik toplamdır.

$\bigoplus_{i \in I} R_i$ halkası $\prod_{i \in I} R_i$ halkasının bir alt halkasıdır.

Tanım 2.2.2 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\{A_i \mid i \in I\}$ R halkasının ideal ailesi olsun. Bu sonlu ailenin toplamı $\sum_{i \in I} A_i$ ile gösterilir.

$$\sum_{i \in I} A_i = \{a_1 + a_2 + \dots + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}' \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.3 I indeks ve $I_0 \subset I$ sonlu kümesi için $\{A_i \mid i \in I\}$, R halkasının ideallerinin ailesi olsun. Bu ailenin toplamı $\sum_{i \in I} A_i$ ile gösterilir ve

$$\sum_{i \in I} A_i = \{a \in R \mid a \in \sum_{i \in I_0} A_i\}' \text{ dir.}$$

R halkasının ideallerinin toplamı R halkasında bir idealdir.

Tanım 2.2.4 $\{A_i \mid i \in I\}$, R halkasının ideallerinden oluşan bir aile olsun. İdeallerinin toplam kümesi her $k \in I$ için

$$A_k \cap \sum_{i \in I, i \neq k} A_i = 0$$

şartını sağlıyorsa bu toplam kümesine dik toplam denir.

Teorem 2.2.5 I sonlu olmak üzere $\{A_i \mid i \in I\}$, R halkasının ideal ailesi olsun. Aşağıdakiler denktir;

(i) $\sum_{i \in I} A_i$ dik toplamdır.

(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, $a_i \in A_i$, $i \in I$ ise $a_i = 0$ dır.

(iii) Her $a \in \sum_{i \in I} A_i$ tek şekilde $a = a_1 + \cdots + a_n$ formunda ifade edilir.

2.3. Monoid Halkaları

Bölüm 3.4 ve 5.2' de M monoidine göre Armendariz olma özelliği ile ilgili $R[M]$ halkası üzerinde çalışmalar yapılacaktır. Bu nedenle bu kısımda $R[M]$ halka yapısı tanıtılacaktır.

Bir R halkası ve M monoidi için

$$R[M] = \{\tau \mid \tau : M \longrightarrow R, m \in M \text{ hemen hemen her } \tau(m) = 0\}' \text{ dir.}$$

$R[M]$ üzerinde toplama işlemi $\tau, \beta \in R[M]$ için

$$(\tau + \beta)(m) = \tau(m) + \beta(m)$$

olarak tanımlansın. $R[M]$ toplama işlemine göre değışmeli grup olur. $\alpha, \beta \in R[M]$ için çarpımsal işlem tanımlanacak olursa

$$(\alpha\beta)(z) = \sum_{xy=z} \alpha(x)\beta(y)' \text{ dir.}$$

$x, y \in M$ olmak üzere $z = xy$ olacak şekilde tüm (x, y) çiftleri üzerinden tek şekilde verilir. Bu toplam sonludur çünkü yalnızca sonlu sayıda $\alpha(x)\beta(y) \neq 0$ olacak şekilde $(x, y) \in M \times M$ ikilisi vardır. Hemen hemen her $t \in M$ için $(\alpha\beta)(t) = 0$ dır. Bu ise çarpımın $R[M]$ ' ye ait olduğunu gösterir.

$\alpha, \beta, \gamma \in R[M]$ olmak üzere;

$$((\alpha\beta)\gamma)(z) = \sum_{xy=z} (\alpha\beta)(x)\gamma(y) = \sum_{xy=z} \left(\sum_{uv=x} \alpha(u)\beta(v) \right) \gamma(y) = \sum_{uvy=z} \alpha(u)\beta(v)\gamma(y)' \text{ dir.}$$

Benzer şekilde $(\alpha(\beta\gamma))(z) = \sum_{xuv=z} \alpha(x)\beta(u)\gamma(v)$ elde edilir. Bu iki ifade de bir birine eşittir. Dolayısıyla $R[M]$ çarpma işlemine göre birleşmelidir.

$R[M]$ kümesinin çarpımsal birimi ise $x \in M$ olmak üzere;

$$\delta(x) = \begin{cases} 1_R & ; \text{ eğer } x = e \\ 0_R & ; \text{ eğer } x \neq e \end{cases}$$

şeklinde olan δ fonksiyonudur. $\alpha = \delta\alpha = \alpha\delta$ olduğu açıkça görülür.

$a \in R$ ve $x \in M$ olsun. $\alpha \in R[M]$ için $\alpha = \sum_{x \in M} \alpha(x)x$ şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha(x)$ ' in değeri $x \neq y$ için $\alpha(y) = 0$, $x = y$ için $\alpha(y) = a$ dır. Yani $\alpha(x) = ax$. Gerçekten, eğer $\{a_x\}_{x \in M}$ R ' nin elemanlarının sonlu tanesi 0 olan kümesi ise herhangi $y \in M$ için $\beta(y) = a_y$ olmak üzere

$$\beta = \sum_{x \in M} a_x x' \text{ dir.}$$

Bu ise bir α elemanının tek şekilde $\sum a_x x$ toplamsal formda ifade edildiğini gösterir. Dolayısıyla $R[M]$ üzerindeki çarpma işlemi

$$\left(\sum_{x \in M} a_x x \right) \left(\sum_{y \in M} b_y y \right) = \sum_{x, y \in M} a_x b_y xy$$

şeklinde yazılabilir ve toplama işlemi

$$\sum_{x \in M} a_x x + \sum_{x \in M} b_x x = \sum_{x \in M} (a_x + b_x) x$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $R[M]$ ' nin birimi 1_{Re} ' dir.

Şimdi ise R ve M ' nin ikisinde $R[M]$ içine gömülebileceği gösterilecektir.

$\phi_0 : M \rightarrow R[M]$, $\phi_0(x) = 1x$ şeklinde verilen bir dönüşüm olsun. ϕ_0 çarpımsal monoid homomorfizmasıdır ve içine dönüşümdür yani $M, R[M]$ ' nin içine gömülür.

$f_0 : R \rightarrow R[M]$ ' de $f_0(a) = ae$ şeklinde verilen bir dönüşüm olsun. f_0 halka homomorfizmasıdır ve üstelik içine bir dönüşümdür. Bu yüzden $R[M]$ ' nin bir alt halkası olarak görülür. Dolayısıyla $R[M]$ monoid halkası yada M ' nin A üzerine monoid cebri ya da M bir grup ise grup cebri denir.

2.4. Polinom Halkaları

Tanım 2.4.1 R bir halka, x bir bilinmeyen ve a_0, a_1, \dots, a_k lar R nin elemanları olmak üzere,

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k = \sum_{i=0}^k a_i x^i$$

şeklindeki bir ifadeye katsayıları R halkasından olan bir polinom denir. Katsayıları R de olan tüm polinomlar kümesi $R[X]$ ile gösterilir.

$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ ve $q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in R[x]$ olsunlar.

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \forall i \geq 0, a_i = b_i$$

$R[x]$ polinom kümesi üzerinde $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot x^j \in R[X]$ için,

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + (c_t) \cdot x^t$$

$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ olmak üzere

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k \cdot x^k$$

bu işlemlere göre $(R[x], +, \cdot)$ halka olur. Ayrıca $0_{R[x]} = 0$ polinomu $R[x]$ ' in etkisiz elemanıdır.

Önerme 2.4.2 R bir halka ise $R[x]$ de bir halkadır. Ayrıca;

- i) R birimli ise $R[x]$ de birimlidir.
- ii) R değişmeli ise $R[x]$ de değişmelidir.
- iii) R tamlık bölgesi ise $R[x]$ de tamlık bölgesidir.

2.5. Matris Halkaları

R bir halka, $X \times Y, \mathbf{N} \times \mathbf{N}'$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $A(i, j) = a_{ij} \in R$ ile tanımlanan $A : X \times Y \rightarrow R$ fonksiyonuna $|X| \times |Y|$ boyutunda matris denir. Kısaca

$A = [a_{ij}]_{|X| \times |Y|}$ şeklinde gösterilir. Satır ve sütun sayısı birbirine eşit olan matrislere kare matris denir. R halkası üzerinde $X \times Y$ tipindeki bütün matrislerin kümesi $M_{|X| \times |Y|}(R)$ ile gösterilir.

$A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$, $M_{|X| \times |Y|}(R)$ kümesinin elemanları olsun. $M_{|X| \times |Y|}(R)$ kümesi üzerinde $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre $(M_{|X| \times |Y|}(R), +)$ değişmeli gruptur. Bu sistemin toplamsal birim elemanı $0_{M_{|X| \times |Y|}(R)} = [0_{ij}]$ matrisidir. Bu matrise 0 matris denir. A matrisinin toplamsal tersi ise $-A = [-a_{ij}]$ 'dir.

$M_{|X| \times |Y|}(R)$ kümesi üzerinde $A \cdot B = [\sum_j a_{ij} b_{jk}]_{X \times Y}$ şeklinde tanımlanan işleme matris çarpımı denir. $M_{|X| \times |Y|}(R)$ kümesi üzerinde tanımlanan matris toplamı ve matris çarpımı işlemleriyle halka yapısı oluşturur. $(M_{|X| \times |Y|}(R), +, \cdot)$ sistemine matris halkası denir.

Şimdi Armendariz ve nil-Armendariz halkaların karakterizasyonunda kullanılacak olan alt ve üst üçgensel matris tanımları ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.5.1 Her $i \neq j$ için $A(i, j) = 0$ olan $A \in M_{n \times n}(R)$ matrisine diagonal matris denir.

Tanım 2.5.2 $i > j$ için $A(i, j) = 0$ olan $A \in M_{n \times n}(R)$ matrisine üst üçgenal matris denir. R halkası üzerindeki üst üçgensel matris kümesi $UTM(R)$ ile gösterilir (her n sayısı için $T_n(R)$ şeklinde de gösterilebilir).

Tanım 2.5.3 $i < j$ için $A(i, j) = 0$ olan $A \in M_{n \times n}(R)$ matrisine alt üçgensel matris denir. R halkası üzerindeki alt üçgensel matris kümesi $LTM(R)$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.4 Alt (üst) üçgensel matrisler toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

3. KAYNAK ÖZETLERİ

Armendariz, R inmiş halka üzerinde $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \in R[X]$ çarpımının sıfır olması için gerek ve yeter koşul her i, j için $a_i b_j = 0$ olması gerektiğini göstermiştir (Armendariz, 1974)). Bu durum tamlık bölgeleri için açık bir durumdur. Dolayısıyla tamlık bölgesi olmayan halkalar için Armendariz' in vermiş olduğu özellik önem kazanır. Rege ve Chhawchharia (1997) çalışmalarında Armendariz' in bu çalışmasını herhangi bir halka için genelleştirmiş ve aşağıdaki tanım verilmiştir.

3.1. Armendariz Halka

Tanım 3.1.1 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$, $R[X]$ polinom halkasının elemanları olmak üzere; $f(x)g(x) = 0$ olduğunda her i, j için $a_i b_j = 0$ oluyorsa R halkasına Armendariz halka denir.

Armendariz halkalar Rege, Chhawchharia ve bir çok araştırmacı tarafından çalışılmış ve günümüzde de çalışmalar yoğun olarak sürmektedir.

Rege ve Chhawchharia (1997) çalışmalarında Armendariz halkaların alt halkalarının ve kartezyen çarpımlarının da Armendariz olduğunu göstermişlerdir.

Örnek 3.1.2 Her n tamsayısı için $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ halkası bir Armendariz halkadır (Rege ve Chhawchharia, 1997). Gerçekten,

Aritmetiğin temel teoremi gereğince n asal sayıların çarpımı şeklinde yazılır. Dolayısıyla p, p_1, \dots, p_i bir birinden farklı asal sayılar olmak üzere, $n = p^m$ ve $n = p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i}$ iki şekilde incelenebilir. $n = p^m$ olsun. $\overline{f(x)} = f(x) + p^m$, $\overline{g(x)} = g(x) + p^m$ elemanları $\mathbf{Z}[X] \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})[X]$ kümesinin elemanları olmak üzere $\overline{f(x)g(x)} = 0$ olsun. Dolayısıyla $p^m | f(x)g(x)$ ' dir. Bu da bize $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarını p asal sayısı tarafından bölünemeyen $f'(x)$ ve $g'(x)$ polinomlarının çarpımı şeklinde sırasıyla $f(x) = p^r f'(x)$ ve $g(x) = p^s g'(x)$ şeklinde yazılır. $\overline{f(x)g(x)} = p^{r+s} f'(x)g'(x)$ ifadesi p^m tarafından tam bölünebildiğinden $r + s \geq m$ ' dir. Dolayısıyla her i, j için $\overline{a_i b_j} = p^r a_i p^s b_j = p^{r+s} a_i b_j = 0$

olur. Dolayısıyla $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ Armendariz halkasıdır. $n = p_1^{e_1} \cdots p_i^{e_i}$ olsun. Çin kalan teoremi gereğince $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/p_1^{e_1}\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p_2^{e_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/p_i^{e_i}$. Her $\mathbf{Z}/p_k^{e_k}$ halkası Armendariz halka olduğundan $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ halkası her n için Armendariz halkadır. Değişmeli halkalar Armendariz özelliğini taşımak zorunda değildir (Rege ve Chhawchharia, 1997).

Sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan halkaya inmiş (reduced) denir. Rege ve Chhawchharia (1997) çalışmalarında inmiş halkaların Armendariz olduğunu göstermişlerdir. Buradan Armendariz halkaların inmiş halkaların bir genellemesi olduğu görülür. Dolayısıyla nilpotent elemanlar halkaların sınıfında önemli bir yere sahiptir.

Aşağıdaki önerme de katsayıları $nil(R)$ kümesinden olan polinomlar ile $R[X]$ polinom halkasının nilpotent elemanlarından oluşan küme arasındaki ilişki verilmiştir.

Önerme 3.1.3 R Armendariz halka ise $nil(R)[X] \subseteq nil(R[X])$ (Antonie, 2008).

Kanıt: R Armendariz halka, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \in nil(R)[X]$ ve her $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $a_i^k = 0$ olacak şekilde $k > 1$ olsun. İddia edelimki $f(x)^{(n+1)k} = 0$. $f(x)^{(n+1)k} = 0$ polinomunun katsayıları a_i 'nin $(n+1)k$ uzunluklu monimal toplamları şeklinde yazılabilir. Bir monimal $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{(n+1)k}}$ şeklindedir ve bu ifade en az k tane $0 \leq j_0 \leq n$ olmak üzere a_{j_0} tekrarından oluşmaktadır. $1 \leq r_1 < \cdots < r_k \leq (n+1)k$ için $a_{i_{r_1}} = \cdots = a_{i_{r_k}} = a_{j_0}$ olsun. Bütün $i_s \neq i_{r_i}$ değerleri için $f'_{i_s}(x), f''_{i_s}(x)$ polinomları

$$f'_{i_s}(x) = 1 - a_{i_s} x,$$

$$f''_{i_s}(x) = 1 + a_{i_s} + \cdots + a_{i_s}^{k-1} x^{k-1}$$

şeklinde olsun. İki polinomu çarptığımızda $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x) = 1$ ve a_{i_s} bu iki polinomunun katsayılarının çarpımı olur. Çarpımın katsayıları $(n+1)k$ uzunluğundaki monimal olduğundan $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{r_1-1}} a_{j_0} a_{i_{r_1+1}} \cdots a_{i_{r_2-1}} a_{j_0} \cdots a_{i_{r_k-1}} a_{j_0} a_{i_{r_k+1}} \cdots a_{i_{(n+1)k}}$ şeklinde yazabiliriz. Herbir a_{i_s} için $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x)$ çarpımı tekrarlanırsa ve $a_{j_0}^k = 0$ olduğundan $f'_{i_1}(x)f''_{i_1}(x) \cdots f'_{i_{r_1-1}}(x)a_{j_0}f'_{i_{r_1+1}}(x) \cdots f'_{i_{r_k-1}}(x)a_{j_0}f'_{i_{r_k+1}}(x) \cdots f''_{i_{(n+1)k}}(x) = 0$ elde edilir. R Armendariz halka olduğundan herbir polinomun katsayılarından oluşan çarpım 0 olacaktır. Dolayısıyla $f(x) \in nil(R[X])$ olacağından $nil(R)[X] \subseteq nil(R[X])$ ' dir. \square

3.2. Weak Armendariz Halka

Weak-Armendariz halkalar, Armendariz halkalarının bir genellemesidir. Bu bölümde Liu ve Zhao (2006) çalışmasındaki weak-Armendariz halka tanımı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.2.1 R bir halka $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$, $R[X]$ ' in elemanları olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olduğunda her i, j için $a_i b_j \in nil(R)$ ise R halkasına weak-Armendariz halka denir.

$a_i b_j = 0$ ise $a_i b_j \in nil(R)$ olduğundan her Armendariz halka weak Armendariz halkadır.

Önerme 3.2.2 R halkasının weak-Armendariz halka olması için gerek ve yeter koşul her n için $T_n(R)$ weak-Armendariz' dir.

R bir halka olsun. Kim ve Lee (2000) çalışmalarında, $n \geq 2$ olmak üzere $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin Armendariz olmadığını bir örnekle göstermişlerdir. Ancak R Armendariz halka ise n için $T_n(R)$ weak-Armendariz halka olduğunu göstermişlerdir (Liu ve Zhao, 2006). R halka olmak üzere $M_n(R)$ halkası weak-Armendariz halka değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte gözlemlenir.

Örnek 3.2.3 R ve $S = M_2(F)$ birer halka olsun.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

polinomları $S[X]$ polinom halkasının elemanları için $f(x)g(x) = 0$ dır. Ancak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ nilpotent değildir. Dolayısıyla } S \text{ halkası weak-Armendariz}$$

değildir (Liu ve Zhao, 2006).

R bir halka olsun. $(R + R)$ kümesi genel toplama işlemine göre değişmeli gruptur. Bu küme üzerinde a, b, u ve $v \in R$ olmak üzere $(a, u)(b, v) = (ab, av + bu)$ tanımlanan çarpma işlemine göre halka yapısı oluşturur. Bu halka kısaca $T(R, R)$ olarak gösterilir.

Kim ve Lee (2000) çalışmalarında R Armendariz iken $T(R, R)$ halkasının Armendariz olmayacağını bir örnekle göstermiştir. Fakat weak-Armendariz halkalar için bu durum aşağıdaki önermeyle açıklığa kavuşmuştur.

Önerme 3.2.4 R weak-Armendariz olması için gerek ve yeter şart $T(R, R)$ weak-Armendariz olmasıdır.

Önerme 3.2.5 Weak Armendariz halkaların sonlu dik toplamları da weak-Armendariz' dir (Liu ve Zhao, 2006).

Önerme 3.2.6 R bir Abel halka ve $e \in R$ bir idempotent eleman olsun. Aşağıdakiler denktir;

- (1) R weak-Armendariz' dir.
- (2) eR ve $(1 - e)R$ weak-Armendariz' dir (Liu ve Zhao, 2006).

Önerme 3.2.7 I, R halkasının bir ideali ve R/I weak-Armendariz olsun. $I \subseteq nil(R)$ ise R weak-Armendariz' dir (Liu ve Zhao, 2006).

3.3. Nil Armendariz Halka

Nil Armendariz halkalar, Antoine (2008), Hizen (2010) ve daha bir çok araştırmacı tarafından çalışılmakta olan güncel bir konudur. Biz de çalışmamızda nil-Armendariz halka kavramını temel alarak nil-3-Armendariz halka tanımlayacağız. Bu nedenle nil-Armendariz halka ile ilgili literatürde bulunan bazı çalışmalarını bu kısımda sunacağız.

Nil-Armendariz halkalar Armendariz halkaların farklı bir genellemesidir.

Tanım 3.3.1 R bir halka $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$, $R[X]$ ' in elemanları olmak üzere $f(x)g(x)$, $nil(R)[X]$ kümesinin elemanı olduğunda her i, j için $a_i b_j \in nil(R)$ kümesinin elemanı oluyorsa R halkasına nil-Armendariz halka denir.

Örnek 3.3.2 $R = \left\{ (2m, l) \mid m, l \in \mathbf{Z}_4 \right\}$, R nil-Armendariz halkadır.

$f(x)$ ve $g(x)$ katsayıları sırasıyla her i, j için $a_i = (a_{i_1}, a_{i_2})$ ve $b_j = (b_{j_1}, b_{j_2})$ olan $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$ şeklindeki polinomların $f(x)g(x)$ çarpımı $nil(R)[X]$ kümesinde ise çarpımın katsayıları incelenecek olunursa;

$$a_0 b_0 = (a_{0_1} b_{0_1}, a_{0_2} b_{0_2}) \in nil(R)$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = (a_{0_1} b_{1_1}, a_{0_2} b_{1_2}) + (a_{1_1} b_{0_1}, a_{1_2} b_{0_2}) = (a_{0_1} b_{1_1} + a_{1_1} b_{0_1}, a_{0_2} b_{1_2} + a_{1_2} b_{0_2}) \in nil(R)$$

buradan ilk bileşenin nilpotent olduğu aşıkardır. İkinci bileşen analiz edilirse $k \in \mathbf{Z}$ olmak üzere;

$$a_{0_2} b_{1_2} + a_{1_2} b_{0_2} = 2k \quad (3.1)$$

(3.1) denklemini soldan a_{0_2} ile çarpılırsa $a_{0_2} a_{0_2} b_{1_2} + a_{0_2} a_{1_2} b_{0_2} = a_{0_2} 2k$ buradan $a_{0_2} a_{1_2} b_{0_2}$ elemanı nilpotent olduğu görülür. $t \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $a_{0_2} a_{0_2} b_{1_2} = 2t$ olur. Buradan $(a_{0_2}^2 b_{1_2})^2 = 0$ bulunur. Denklem sağdan b_{1_2} ile çarpıldığında $a_{0_2} b_{1_2} \in nil(\mathbf{Z}_4)$ olur. Benzer şekilde denklem (3.1) de sağdan b_{0_2} ile çarpılırsa $a_{0_2} b_{1_2} b_{0_2} + a_{1_2} b_{0_2} b_{0_2} = 2k b_{0_2}$ olur. Buradan $a_{0_2} b_{1_2} b_{0_2}$ elemanı nilpotent eleman olduğu aşıkardır. $t_1 \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $a_{0_2} b_{1_2} b_{0_2} = 2t_1$ bulunur. Buradan $(a_{1_2} b_{0_2}^2)^2 = 0$ olur. Denklem sağdan a_{1_2} ile çarpıldığında $a_{1_2} b_{0_2} \in nil(\mathbf{Z}_4)$ olur. Dolayısıyla $a_0 b_1$ ve $a_1 b_0 \in nil(R)$ şeklinde bulunur.

$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = (a_{0_1} b_{2_1} + a_{1_1} b_{1_1} + a_{2_1} b_{0_1}, a_{0_2} b_{2_2} + a_{1_2} b_{1_2} + a_{2_2} b_{0_2}) \in nil(R)$ buradan ilk bileşenin nilpotent olduğu aşıkardır. İkinci bileşen analiz edilirse $k_1 \in \mathbf{Z}$ olmak üzere;

$$a_{0_2} b_{2_2} + a_{1_2} b_{1_2} + a_{2_2} b_{0_2} = 2k_1 \quad (3.2)$$

(3.2) denklemini soldan a_{1_2} ile çarpılırsa $a_{1_2} a_{0_2} b_{2_2} + a_{1_2} a_{1_2} b_{1_2} + a_{1_2} a_{2_2} b_{0_2} = a_{1_2} 2k_1$ buradan $a_{1_2} a_{2_2} b_{0_2}$ elemanı nilpotent olduğu bellidir. $t_2 \in \mathbf{Z}$ olmak üzere;

$$a_{1_2} a_{0_2} b_{2_2} + a_{1_2} a_{1_2} b_{1_2} = 2t_2 \text{ olur.}$$

Bu denklem de sağdan b_{1_2} ile çarpılırsa $a_{1_2} a_{0_2} b_{2_2} b_{1_2} + a_{1_2} a_{1_2} b_{1_2} b_{1_2} = 2t_2 b_{1_2}$ buradan $a_{1_2} a_{0_2} b_{2_2} b_{1_2}$ elemanı nilpotent olduğu bellidir. $t_3 \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $a_{1_2} a_{1_2} b_{1_2} b_{1_2} = 2t_3$ olur. Buradan $(a_{1_2}^2 b_{1_2}^2)^2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $a_{1_2} b_{1_2} \in nil(\mathbf{Z}_4)$ olur. Dolayısıyla $t_4 \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $a_{0_2} b_{2_2} + a_{2_2} b_{0_2} = 2t_4$ olur. Bu denklem sağdan b_{0_2} ile çarpılırsa $a_{0_2} b_{2_2} b_{0_2} + a_{2_2} b_{0_2} b_{0_2} = 2t_4 b_{0_2}$ olur. Buradan $a_{0_2} b_{2_2} b_{0_2}$ elemanı nilpotent olduğu aşıkardır. $t_5 \in \mathbf{Z}$ olmak üzere; $a_{2_2} b_{0_2}^2 = 2t_5$ olur. $(a_{2_2} b_{0_2}^2)^2 = 0$ bulunur. Denklem sağdan a_{2_2} ile

çarpıldığında $a_{2_2}b_{0_2} \in \text{nil}(\mathbf{Z}_4)$ olur. Sonuç olarak (3.2) denkleminde $a_{0_2}b_{2_2} \in \text{nil}(\mathbf{Z}_4)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $a_{0_2}b_{2_2}$, $a_{1_2}b_{1_2}$ ve $a_{2_2}b_{0_2} \in \text{nil}(R)$ olur. Benzer şekilde diğer katsayılar içinde benzer işlemler yapıldığında her i, j için $a_i b_j \in \text{nil}(R)$ olur. Dolayısıyla R bir nil-Armendariz' dir.

Herhangi bir halkada $\text{nil}(R)$ kümesi ideal olmaz. Eğer $\text{nil}(R) \trianglelefteq R$ ise R nil-Armendariz' dir. Aşağıdaki önermede bu özellik genelleştirilerek verilmiştir.

Önerme 3.3.3 R halka ve $I \trianglelefteq R$ bir nil ideal olsun. R nil-Armendariz olması için gerek ve yeter koşul R/I halkasının nil-Armendariz olmasıdır (Antoine, 2008).

Kanıt: I nil ideal olduğu için

$$\text{nil}(R/I) = \{\bar{r} \mid \bar{r} \equiv r \pmod{I}, (\bar{r})^k = 0, \exists k \in \mathbf{N}\} = \overline{\text{nil}(R)}$$

olur. Dolayısıyla her $f(x)g(x) \in \text{nil}(R)[X]$ için $\overline{f(x)g(x)} \in \overline{\text{nil}(R)}$ olur ve a, b sırasıyla $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının katsayılar kümesinden birer elemanlar olmak üzere; ab çarpımının $\text{nil}(R)$ kümesi içine düşmesi için gerek ve yeter koşul $\overline{ab} \in \text{nil}(R/I)$. Dolayısıyla, R nil-Armendariz olması için gerek ve yeter koşul R/I halkasının nil-Armendariz olmasıdır. \square

Bu çalışma boyunca $f(x) \in R[X]$ olmak üzere $f(x)$ polinomunun katsayılar kümesi $\text{coef}(f)$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.3.4 R nil-Armendariz halka ve $n \geq 2$ olsun. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ polinomları $R[X]$ ' in $f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x) \in \text{nil}(R)[X]$ olsun. $a_k \in \text{coef}(f_k)$ olmak üzere $a_1 a_2 \cdots a_n$ çarpımı $\text{nil}(R)$ kümesinin elemanı olur (Antoine, 2008).

Nil-Armendariz halkaların Armendariz halkaların bir genellemesi olduğu Antoine' nin (2008) "Nilpotent Elements and Armendariz Rings" adlı çalışmasında verilmiştir.

Önerme 3.3.5 R bir Armendariz halka ise R nil-Armendariz halkadır.

Kanıt: $f(x)g(x) \in \text{nil}(R)[X]$ şeklinde $R[X]$ halkasının iki elemanı olsun. R Armendariz olduğu için, önerme 3.1.3 gereğince, $f(x)g(x)$ bir nilpotent elemandır. Buyüzden $k \geq 1$

olacak şekilde bir k doğal sayısı vardır ve $(f(x)g(x))^k = 0$ olur. R Armendariz olduğu için $a \in \text{coef}(f)$ ve, $b \in \text{coef}(g)$ olmak üzere $ababab \cdots ab = 0$ ve $ab \in \text{nil}(R)$ olur. Dolayısıyla R , nil-Armendariz halkadır. \square

Önerme 3.3.5 sonucunda nil Armendariz halkalar Armendariz halkaların genellemesi ve aynı zamanda weak-Armendariz halkaların özel bir durumudur.

Aşağıdaki önerme ile nil-Armendariz halkalar için bir karakterizasyon verilmiştir.

Önerme 3.3.6 R halkasının nil-Armendariz olması için gerek ve yeter koşul her n sayısı için, $T_n(R)$ halkasının nil-Armendariz olmasıdır (Antoine, 2008).

Kant: R nil-Armendariz halka olsun. $f(x) = \sum_i^n A_i x^i$ ve $g(x) = \sum_j^n B_j x^j$, $T_n(R)[X]$ halkasının elemanları olmak üzere, $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının katsayıları sırasıya

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn}^i \end{bmatrix}, \quad a_{rs} \in R \text{ için } 1 \leq s \leq n \text{ ve } r \leq s,$$

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{11}^j & \cdots & b_{1n}^j \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{nn}^j \end{bmatrix}, \quad b_{rs} \in R \text{ için } 1 \leq s \leq n \text{ ve } r \leq s$$

şekindedir. Ayrıca $T_n(R)$ halkasının nilpotent elemanlarından oluşan $\overline{\text{nil}}(T_n(R))$ kümesi

$$\text{nil}(T_n(R)) = \begin{bmatrix} \text{nil}(R) & R & R \\ 0 & \ddots & R \\ 0 & 0 & \text{nil}(R) \end{bmatrix}$$

şekindedir (Antoine, 2008). Varsayalım ki $f(x)g(x) \in \text{nil}(T_n(R))[X]$ olsun.

$$f(x)g(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i+j=l} a_{11}^i b_{11}^j x^l & \cdots & \sum_{i+j=l} a_{1n}^i b_{1n}^j x^l \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \sum_{i+j=l} a_{nn}^i b_{nn}^j x^l \end{bmatrix} \in \text{nil}(T_n(R))[X]$$

şeklinde gözlemlenir ve matris bileşenleri için $\sum_{i+j=l} a_{rr}^i b_{rr}^j x^l \in \text{nil}(R)[X]$ olur ve R nil-Armendariz halka olduğundan dolayı her i, j , için $a_{rr}^i b_{rr}^j \in \text{nil}(R)$ elde edilir.

Dolayısıyla çarpımın katsayılar matrisi incelendiğinde

$$A_i B_j C_k = \begin{bmatrix} a_{11}^i b_{11}^j c_{11}^k & \dots & a_{1n}^i b_{1n}^j c_{1n}^k \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn}^i b_{nn}^j c_{nn}^k \end{bmatrix} \in \text{nil}(T_n(R)) \text{ olur. Buradan } T_n(R) \text{ nil-Armendariz}$$

olduğu elde edilir.

$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in R[X]$ olmak üzere, varsayalım ki $f(x)g(x) \in \text{nil}(R)[X]$ olsun. $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları matris polinomları haline getirilirse;

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{bmatrix} f(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n a_i x^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} a_i x^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_i \left(\begin{bmatrix} a_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^i \right) = \sum_{i=0}^n A_i x^i \end{aligned}$$

Burada $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $A_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F(x)$ polinomunun katsayılar

matrisleridir.

$$\begin{aligned} G(x) &= \begin{bmatrix} g(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^m b_j x^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} b_j x^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_j \left(\begin{bmatrix} b_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^j \right) = \sum_{j=0}^m B_j x^j \end{aligned}$$

Burada $j = 0, 1, \dots, m$ olmak üzere $B_j = \begin{bmatrix} b_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G(x)$ polinomunun

katsayılar matrisleridir.

Matris polinomları çarpıldığında

$$F(x)G(x) = \begin{bmatrix} f(x)g(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{nil}(T_n(R))[X] \text{ olduğu açıkça görülür.}$$

$T_n(R)$ nil-Armendariz olduğu için, her i, j için

$$A_i B_j = \begin{bmatrix} a_i b_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{nil}(T_n(R)) \text{ olur. Dolayısıyla her } i, j \text{ için } a_i b_j c_k \in \text{nil}(R) \text{ olur}$$

ve buradan R nil-Armendariz olduğu ortaya çıkar. \square

Önerme 3.3.7' de bi-modül kavramından yararlanarak nil-Armendariz halkalar için yeni bir karakterizasyon verilmiştir. Bu nedenle öncelikle R -modül tanımını verelim.

$(M, +)$ değişmeli grup olmak üzere $(r, m) \mapsto r \cdot m$ ile tanımlı $R \times M \rightarrow M$ olmak üzere

- Her $r, s \in R$ ve $m \in M$ için $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$
- Her $r \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$ için $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$
- Her $r_1, r_2 \in R$ ve $m \in M$ için $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 (r_2 \cdot m)$

koşulları sağlanıyorsa M ' ye sol R -modül denir. Benzer şekilde sağ modül de tanımlanır.

R, S iki halka ve $(M, +)$ değişmeli grup olsun. M hem sol R -modül hem de sağ R -modül ve her $r \in R, s \in S$ ve $x \in M$ için

$$r(xs) = (rx)s$$

şartını sağlıyorsa M ' ye sol $R, sağ S$ bimodül denir. ${}_R M_S$ ile gösterilir.

Önerme 3.3.7 R_1 ve R_2 birer halka olsunlar. M , R_1 -sol modül ve R_2 -sağ modül olmak üzere (R_1, R_2) -bimodül olsun. $T = \begin{bmatrix} R_1 & M \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$ halkası nil-Armendariz olması için gerek ve yeter şart R_1 ve R_2 halkalarının da nil-Armendariz olmasıdır.

Kant: R_1 ve R_2 halkaları nil-Armendariz olsun. $f(x), g(x) \in T[X]$; her i, j için $b_j^1, a_i^1 \in R_1$ ve $b_j^2, a_i^2 \in R_2$, $m_i, m_j \in M$; $f_1(x), g_1(x) \in R_1[X]$, $f_2(x), g_2(x) \in R_2[X]$ ve $f_m(x), g_m(x) \in M[X]$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum_i A_i x^i = \sum_i \begin{bmatrix} a_i^1 & m_i \\ 0 & a_i^2 \end{bmatrix} x^i = \begin{bmatrix} \sum_i a_i^1 x^i & \sum_i m_i x^i \\ 0 & \sum_i a_i^2 x^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_m(x) \\ 0 & f_2(x) \end{bmatrix},$$

$$g(x) = \sum_j B_j x^j = \sum_j \begin{bmatrix} b_j^1 & m_j \\ 0 & b_j^2 \end{bmatrix} x^j = \begin{bmatrix} \sum_j b_j^1 x^j & \sum_j m_j x^j \\ 0 & \sum_j b_j^2 x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x) & g_m(x) \\ 0 & g_2(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. $f(x)g(x) \in nil(T)$ olsun. İki matris polinomu çarpıldığında

$$\begin{bmatrix} f_1(x)g_1(x) & f_m(x)g_m(x) \\ 0 & f_2(x)g_2(x) \end{bmatrix} \text{ matrisi } nil(T)[X] \text{ kümesinin elemanı olduğundan}$$

$f_1(x)g_1(x) \in nil(R_1)[X]$, $f_2(x)g_2(x) \in nil(R_2)[X]$ elde edilir. R_1 ve R_2 halkaları nil-Armendariz olduğundan her i, j için $a_i^1 b_j^1 \in nil(R_1)$ ve $a_i^2 b_j^2 \in nil(R_2)$ olur. Dolayısıyla her i, j için $A_i B_j \in nil(T)$ elde edilir. Sonuç olarak T nil-Armendariz olur.

T nil-Armendariz olsun. $f_1(x) = \sum_i a_i^1 x^i$, $g_1(x) = \sum_j b_j^1 x^j \in R_1[X]$ ve $f_2(x) = \sum_i a_i^2 x^i$, $g_2(x) = \sum_j b_j^2 x^j \in R_2[X]$ olmak üzere, $f_1(x)g_1(x) \in nil(R_1)[X]$ ve $f_2(x)g_2(x) \in nil(R_2)[X]$ olsun.

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & 0 \\ 0 & f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i a_i^1 x^i & 0 \\ 0 & \sum_i a_i^2 x^i \end{bmatrix}$$

$$= \sum_i \begin{bmatrix} a_i^1 & 0 \\ 0 & a_i^2 \end{bmatrix} x^i = \sum_i A_i x^i \in T[X]$$

şeklinde tanımlansın. Benzer olarak

$$\begin{aligned} G(x) &= \begin{bmatrix} g_1(x) & 0 \\ 0 & g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j b_j^1 x^j & 0 \\ 0 & \sum_j b_j^2 x^j \end{bmatrix} \\ &= \sum_j \begin{bmatrix} b_j^1 & 0 \\ 0 & b_j^2 \end{bmatrix} x^j = \sum_j B_j x^j \in T[X] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $F(x)G(x) \in nil(T)$ olur. T nil-Armendariz olduğundan her i, j için $A_i B_j \in nil(T)$ olur. Dolayısıyla her i, j için $a_i^1 b_j^1 \in nil(R_1)$ ve $a_i^2 b_j^2 \in nil(R_2)$ olur. R_1 ve R_2 nil-Armendariz halkalardır. \square

3.4. M-Nil-Armendariz Halka ve Özellikleri

Liu (2005) çalışmasında M monoidine göre Armendarizlik özelliğini araştırmıştır. Bu çalışmaya göre $\alpha = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n, \beta = b_1 h_1 + \dots + b_m h_m \in R[M]$ olmak üzere $\alpha\beta = 0$ olduğunda her i, j için $a_i b_j = 0$ ise R ' ye; M monoidine göre Armendariz halka denir. Kısaca M -Armendariz halka şeklinde yazılır. $M = \{e\}$ ise her halka M -nil-Armendariz halkadır. $M = \{\mathbb{N} \cup \{0\}, +\}$ olsun. R M -nil-Armendariz olması için gerek ve yeter şart R nil-Armendariz olmasıdır. Bu bölümde Lunqun ve Jinwang (2012) çalışmalarında elde ettikleri M monoid olmak üzere bir R halkasının monoide göre M -nil-Armendariz özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.4.1 R halka ve M bir monoid olsun. $\alpha = \sum_i a_i g_i, \beta = \sum_j b_j h_j \in R[M]$ olmak üzere $\alpha\beta \in nil(R)[M]$ olduğunda her i, j için $a_i b_j \in nil(R)$ oluyorsa R halkasına M monoidiyle ilişkili nil-Armendariz halka denir. Kısaca M -nil-Armendariz şeklinde gösterilir.

Önerme 3.4.2 R, M -Armendariz halka olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R[M]$ olmak üzere $\alpha_1 \alpha_2 \dots, \alpha_n = 0$ ise her $a_i; \alpha_i$ 'nin herhangi bir katsayısı olmak üzere $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ olur (Lunqun ve Jinwang, 2012).

Teorem 3.4.3 R M-Armendariz halka ise M-nil-Armendariz halkadır (Lungun ve Jinwang, 2012).

Kanıt: R M-Armendariz halka olsun. $\alpha = a_1g_1 + a_2g_2 + \dots + a_ng_n \in \text{nil}(R)[M]$ ve her $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $a_i^k = 0$ olacak şekilde $k > 1$ olsun. İdda edelimki $\alpha^{nk} = 0$. $\alpha^{nk} = 0$ polinomunun katsayıları a_i ' nin nk uzunluklu monimal toplamları şeklinde yazılabilir. Bir monimal $a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_{nk}}$ şeklindedir ve bu ifade en az k tane $0 \leq j_0 \leq n$ olmak üzere a_{j_0} tekrarından oluşmaktadır. Varsayalımki $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq nk$ için $a_{i_{r_1}} = \dots = a_{i_{r_k}} = a_{j_0}$ olsun. Bütün $i_s \neq i_{r_t}$ ' leri için $\alpha'_{i_s}, \alpha''_{i_s}$ polinomları $\alpha'_{i_s} = 1e - a_{i_s}g$ ve $\alpha''_{i_s} = 1e + a_{i_s}g + \dots + a_{i_s}^{k-1}g^{k-1}$ şeklinde olsun. İki polinomu çarpığımızda $\alpha'_{i_s}\alpha''_{i_s} = 1e = e$ ve a_{i_s} bu iki polinomunun katsayılarının çarpımı olur. Çarpımın katsayıları nk uzunluğundaki monimal olduğundan $a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_{r_1-1}}a_{j_0}a_{i_{r_1+1}} \dots a_{i_{r_2-1}}a_{j_0} \dots a_{i_{r_k-1}}a_{j_0}a_{i_{r_k+1}} \dots a_{i_{nk}}$ şeklinde yazılabilir. Herbir a_{i_s} için $\alpha'_{i_s}\alpha''_{i_s}$ çarpımı tekrarlanırsa ve $a_{j_0}^k = 0$ olduğundan $\alpha'_{i_1}\alpha''_{i_1} \dots \alpha''_{i_{r_1-1}}a_{j_0}\alpha'_{i_{r_1+1}} \dots \alpha''_{i_{r_k-1}}a_{j_0}\alpha'_{i_{r_k+1}} \dots \alpha''_{i_{nk}} = 0$ elde edilir. R Armendariz halka olduğundan herbir polinomun katsayılarından oluşan çarpım 0 olacaktır. Dolayısıyla $\alpha \in \text{nil}(R[M])$ olacağından $\text{nil}(R)[M] \subseteq \text{nil}(R[M])$ ' dir.

R M-Armendariz, $\alpha = a_1g_1 + \dots + a_ng_n, \beta = b_1h_1 + \dots + b_mh_m \in R[M]$ olmak üzere $\alpha\beta \in \text{nil}(R)[M]$ olsun. Dolayısıyla $\alpha\beta \in \text{nil}(R[M])$ olur. $\text{nil}(R[M])$ kümesinin elemanı olduğu için en az bir $p \in \mathbb{N}$ için $(\alpha\beta)^p = 0$ olur. Önerme 4.1.2 gereğince her i, j için $a_i b_j \in \text{nil}(R)$ olur. Dolayısıyla R M-nil-Armendariz' dir. \square

Aşağıdaki örnek Teorem 3.4.3' ün tersinin doğru olmadığına dairdir.

Örnek 3.4.4 $S_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$ halkası bir M monoidi üzerinde

M-nil-Armendariz halkadır. $e, g \in M$ için

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g,$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g \in R[M] \text{ için } \alpha\beta = 0' \text{ dir. Ancak}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

M-Armendariz değildir(Liu, 2005).

Eğer $M = \{\mathbb{N} \cup \{0\}, +\}$ ise R' nin M -nil-Armendariz olması için R nil-Armendariz olması gerek ve yeter koşuldur.

Teorem 3.4.5 R bir halka olsun. R' nin M -nil-Armendariz olması için gerek ve yeter koşul her n sayısı için, $T_n(R)$ M -nil-Armendariz olmasıdır. (Lungun ve Jinwang, 2012)

Kanıt: $T_n(R)[M] \longrightarrow T_n(R[M])$ halka izomorfizması olsun. Bu homomorfizma

$$\sum_i^n \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ 0 & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^i \end{bmatrix} g_i \longmapsto \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{11}^i g_i & \sum_i^n a_{12}^i g_i & \cdots & \sum_i^n a_{1n}^i g_i \\ 0 & \sum_i^n a_{22}^i g_i & \cdots & \sum_i^n a_{2n}^i g_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_i^n a_{nn}^i g_i \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha = A_1 g_1 + \cdots + A_n g_n$ ve $\beta = B_1 h_1 + \cdots + B_m h_m \in T_n(R)[M]$,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ 0 & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^i \end{bmatrix}, B_j = \begin{bmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j & \cdots & b_{1n}^j \\ 0 & b_{22}^j & \cdots & b_{2n}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}^j \end{bmatrix} \in T_n(R) \text{ olmak üzere}$$

$$\alpha\beta \in \text{nil}(T_n(R))[M] \text{ olsun. } \alpha\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\beta_n \end{bmatrix} \in \text{nil}(T_n(R))[M]$$

olmak üzere her bir $1 \leq s \leq n$ için $\alpha_s\beta_s \in \text{nil}(R)[M]$ olur. R M-nil-Armendariz olduğundan her i, j için a_{ss}^i, α_s ' in katsayılar kümesinden herhangi bir eleman, b_{ss}^j, β_s ' in katsayılar kümesinin herhangi bir elemanı olmak üzere $a_{ss}^i b_{ss}^j \in \text{nil}(R)$ olur. Dolayısıyla her i, j için $A_i B_j \in \text{nil}(T_n(R))$ elde edilir. Sonuç olarak R M-nil-Armendariz halka iken $T_n(R)$ M-nil-Armendariz olur.

$T_n(R)$ M-nil-Armendariz halka olsun. R halkası $T_n(R)$ halkasının bir alt halkası olan

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \mid a \in R \right\} \text{ halkasına izomorfdur. Dolayısıyla } R \text{ M-nil-Armendariz}$$

halkadır. \square

Sonuç 3.4.6 $M, |M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R M-nil-Armendariz halkadır.

$$(2) S_n(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\} \text{ halkası M-nil-Armendariz halkadır.}$$

$$(3) T(R, n) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \mid a_i \in R \right\} \text{ halkası } M\text{-nil-Armendariz halkadır.}$$

(4) $T(R, R)$ halkası M -nil-Armendariz halkadır.

(5) Her $n \geq 2$ için $R[X]/(x^n)$ halkası M -nil-Armendariz halkadır. (Lungun ve Jinwang, 2012)

M , $|M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid ve R M -nil-Armendariz halka olsun. Teorem 4.1.7' e göre 2×2 tipindeki alt ve üst üçgensel matris halkaları M -nil-Armendariz halkadır.

$$G_3(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in R \right\}$$

matris kümesi genel matris toplamı ve çarpımı işlemleri altında bir halka yapısı oluşturur. $G_3(R)$ halkası alt ve üst üçgensel matrislerle benzer formdadır. Dolayısıyla $G_3(R)$ halkası üzerinde M -nil-Armendariz yapısı özelliği taşır mı? Bu sorunun cevabı Teorem 3.4.7' da verilmektedir.

Teorem 3.4.7 M , $|M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R M -nil-Armendariz halkadır.

(2) $G_3(R)$ M -nil-Armendariz halkadır (Lungun ve Jinwang, 2012).

Kant: Öncelikle $nil(G_3(R)) = \left[\begin{array}{ccc} nil(R) & 0 & 0 \\ R & nil(R) & R \\ 0 & 0 & nil(R) \end{array} \right]$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} nil(R) & 0 & 0 \\ R & nil(R) & R \\ 0 & 0 & nil(R) \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

En az bir $k \geq 0$ için $a_{11}^k = a_{22}^k = a_{33}^k = 0$ olsun.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^{2k} = 0 \text{ olur. Dolayısıyla } \begin{bmatrix} \text{nil}(R) & 0 & 0 \\ R & \text{nil}(R) & R \\ 0 & 0 & \text{nil}(R) \end{bmatrix} \subseteq \text{nil}(G_3(R))$$

olduğu gözlemlenir. Benzer şekilde $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \in \text{nil}(G_3(R))$ olsun. Nilpotent

eleman olduğundan bir k için $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^k = 0$ olur. Dolayısıyla $a_{11}^k = a_{22}^k = a_{33}^k = 0$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\text{nil}G_3(R) = \begin{bmatrix} \text{nil}(R) & 0 & 0 \\ R & \text{nil}(R) & R \\ 0 & 0 & \text{nil}(R) \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. R M-nil-Armendariz halkası olsun. Teorem 3.4.5 gereğince $G_3(R)$ M-nil-Armendariz halka olur. Diğer taraftan $G_3(R)$ M-nil-Armendariz iken R halkasının M-nil-Armendariz olduğu açıktır. \square

Alt üçgensel matris, üst üçgensel matris ve $G_3(R)$ matris halkaları, R M-nil-Armendariz halkasıyken, M-nil-Armendariz halka olduğu gözlemlendi. Fakat bu durum $M_n(R)$ matris halkası için geçerli olmadığı bir örnekle gözlemlenebilir.

Örnek 3.4.8 M , $|M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid ve R bir halka olsun.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} g \text{ ve } \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} g, M_2(R)[M] \text{ halkasının iki}$$

elemanı olsun. $\alpha\beta = 0 \in \text{nil}(R)$ olduğu görülür. Fakat $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

nilpotent eleman değildir. Dolayısıyla $M_2(R)$ M-nil-Armendariz değildir. (Lungun ve Jinwang, 2012)

Teorem 3.4.9 M , $|M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid ve R bir halka olsun. M-nil-Armendariz halkalarının sonlu dik toplamları da M-nil-Armendariz' dir. (Lungun ve Jinwang, 2012)

4. MATERYAL VE METODLAR

Bu bölümde weak-3-Armendariz halka tanımı ve özellikleri verilecektir. Bu tanım ve özellikler beşinci bölümde de tanımlanacak olan nil-3-Armendariz halkaları için temel alınacaktır. Bu nedenle önce, Liu ve Zhao (2006) yaptığı weak-Armendariz tanımını hatırlatacağız. R bir halka, $f(x), g(x) \in R[X]$ olsun. $a_i \in \text{coef}(f)$ ve $b_j \in \text{coef}(g)$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ iken her i, j için $a_i b_j \in \text{nil}(R)$ oluyorsa halkaya weak-Armendariz halka denir. Yang (2008) "On the Extension of Armendariz Rings" çalışmasında 3-Armendariz halka tanımını vermiştir. R bir halka, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$ ve $h(x) = \sum_{k=1}^s c_k x^k \in R[X]$ olmak üzere $f(x)g(x)h(x) = 0$ olduğunda her i, j, k için $a_i b_j c_k = 0$ oluyorsa R halkasına 3-Armendariz halka denir. Hui-feng (2012) On Weak-3-Armendariz Rings çalışmasında 3-Armendariz tanımından yararlanarak weak-3-Armendariz halkayı tanımlamıştır.

4.1. Weak-3-Armendariz Halka

Bu kısımda Hui-feng' in (2012) çalışmasında verdiği tanım ve özellikler sunulacaktır.

Tanım 4.1.1 R bir halka olmak üzere $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$ ve $h(x) = \sum_{k=1}^s c_k x^k \in R[X]$ olmak üzere $f(x)g(x)h(x) = 0$ olduğunda her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(R)$ oluyorsa R halkasına weak-3-Armendariz halka denir.

Önerme 4.1.2 Weak-3-Armendariz halkanın her alt halkası weak-3-Armendariz halkadır ayrıca weak-3-Armendariz halkaların sonlu dik toplamıda weak-3-Armendariz halkadır (Hui-feng, 2012).

Teorem 4.1.3 R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) R bir weak-3-Armendariz halkadır.
- (2) Her $n \in \mathbf{N}$ için $UTM_n(R)$ weak-3-Armendariz halkadır.
- (3) Her $n \in \mathbf{N}$ için $LTM_n(R)$ weak-3-Armendariz halkadır (Hui-feng, 2012).

Sonuç 4.1.4 R weak-3-Armendariz halka olması için gerek ve yeter koşul $n \in \mathbf{Z}^+$ ve (x^n) , x^n tarafınan üretilen $R[X]$ halkasının ideali olmak üzere $R[X]/(x^n)$ halkasının weak-3-Armendariz halka olmasıdır (Hui-feng, 2012).

Önerme 4.1.5 R weak-3-Armendariz halka olması için gerek ve yeter koşul $T(R, R)$ weak-3-Armendariz halka olmasıdır. (Hui-feng, 2012)

Önerme 4.1.6 I , R halkasının bir nilpotent ideali olsun. R/I weak-3-Armendariz halkaysa R weak-3-Armendariz halkadır (Hui-feng, 2012).

Önerme 4.1.7 R Abelian (idempotent elemanlar halkasının merkezinde) halka olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) R weak-3-Armendariz halkadır.
- (2) R halkasının her e idempotent elemanı için eR ve $(1 - e)R$ weak-3-Armendariz halkalardır.
- (3) R halkasının bazı e idempotent elemanları için eR ve $(1 - e)R$ weak-3-Armendariz halkalardır (Hui-feng, 2012).

5. BULGULAR VE İRDELEME

Çalışmamızın bu bölümünde literatürde var olan Armendariz, 3-Armendariz ve nil-Armendariz halka kavramları baz alınarak nil-3-Armendariz ve M monoidine göre nil-3-Armendariz halka tanımları yapılmış ve elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

5.1. Nil-3-Armendariz Halka

Bu kısımda 3-Armendariz halkaların bir genellemesi olarak nil-3-Armendariz tanımı yapılacak ve örnek sunulacaktır.

Tanım 5.1.1 R bir halka ve $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$, $h(x) = \sum_{k=1}^s c_k x^k \in R[X]$ olmak üzere $f(x)g(x)h(x) \in nil(R)[X]$ olduğunda her i, j, k için $a_i b_j c_k \in nil(R)$ oluyorsa R halkasına nil-3-Armendariz halka denir.

Örnek 5.1.2 \mathbf{Z}_2 bir nil-3-Armendariz halkadır.

Gerçekten; $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ ve $h(x) = \sum_{k=0}^s c_k x^k \in \mathbf{Z}_2[X]$ olmak üzere; $f(x)g(x)h(x) = \sum_{l=0}^p d_l x^l \in nil(\mathbf{Z}_2)[X]$ olsun. $nil(\mathbf{Z}_2)$ kümesini liste yöntemiyle ifade edecek olursak $\{0\}$ 'dır. Dolayısıyla $u \in nil(\mathbf{Z}_2)$ için $u = 0$ diyebiliriz.

$$d_0 = a_0 b_0 c_0 = 0$$

$$d_1 = a_1 b_0 c_0 + a_0 b_1 c_0 + a_0 b_0 c_1 = 0$$

şeklindedir. d_1 katsayısını a_0 ile çarpalım. \mathbf{Z}_2 değişmeli halka olmak üzere;

$$d_1 a_0 = a_1 b_0 c_0 a_0 + a_0 b_1 c_0 a_0 + a_0 b_0 c_1 a_0 = 0 a_0 = 0$$

$$a_1 b_0 c_0 a_0 = 0 \text{ olduğundan}$$

$$(a_0)^2 b_1 c_0 + (a_0)^2 b_0 c_1 = 0 \quad (5.3)$$

olur. 5.3 denklemini c_0 ile çarparsak

$$(a_0)^2 b_1 c_0 c_0 + (a_0)^2 b_0 c_1 c_0 = 0 \quad (5.4)$$

olur. $(a_0)^2 b_0 c_1 c_0 = 0$ olduğundan 5.4 denkleminde $(a_0)^2 b_1 (c_0)^2 = 0$ bulunur. Bu denkleme de b_1 ile çarparsak

$$(a_0)^2(b_1)^2(c_0)^2 = (a_0b_1c_0)^2 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $a_0b_1c_0 \in \text{nil}(\mathbf{Z}_2)$ bulunur. Yani $a_0b_1c_0 = 0$ dır.

$d_1 = a_1b_0c_0 + a_0b_0c_1 = 0$ olur. Benzer şekilde bu denklemi a_0 ile çarparsak $a_1b_0c_0a_0 = 0$ olduğundan

$$(a_0)^2b_0c_1 = 0 \quad (5.5)$$

bulunur. 5.5 denklemini b_0 ve c_1 ile çarparsak $a_0b_0c_1 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $a_1b_0c_0 = 0$ olur. Buradan $i + j + k = l = 1$ için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(\mathbf{Z}_2)$ elde edilir.

$$d_2 = a_2b_0c_0 + a_1b_1c_0 + a_1b_0c_1 + a_0b_1c_1 + a_0b_2c_0 + a_0b_0c_2 = 0$$

d_2 katsayısını a_0 ile çarparsak;

$$d_2a_0 = a_2b_0c_0a_0 + a_1b_1c_0a_0 + a_1b_0c_1a_0 + a_0b_1c_1a_0 + a_0b_2c_0a_0 + a_0b_0c_2a_0 = 0a_0 = 0$$

olur. Daha önceki denklemlerin çözümlerinden $a_0b_0c_0 \in \text{nil}(\mathbf{Z}_2) = \{0\}$ olduğundan $a_2b_0c_0a_0 = 0$ bulunur. Ayrıca $a_0b_1c_0 = 0$ ve $a_0b_0c_1 = 0$ olduğundan sırasıyla $a_0a_1b_1c_0 = 0$ ve $a_0a_1b_0c_1 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$(a_0)^2b_1c_1 + (a_0)^2b_2c_0 + (a_0)^2b_0c_2 = 0 \quad (5.6)$$

olur. 5.6 denklemini b_0 ile çarpalım.

$$(a_0)^2b_1c_1b_0 + (a_0)^2b_2c_0b_0 + (a_0)^2b_0c_2b_0 = 0$$

elde edilir. $a_0b_0c_1 = 0$ ve $a_0b_0c_0 = 0$ olduğundan sırasıyla $(a_0)^2b_1c_1b_0 = 0$ ve $(a_0)^2b_2c_0b_0 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $(a_0)^2(b_0)^2c_2 = 0$ olur. $(a_0)^2(b_0)^2(c_2)^2 = 0$ olur. Böylece $a_0b_0c_2 \in \text{nil}(\mathbf{Z}_2)$ olur. Bulunan bu değeri 5.6 denkleminde yerine koyarsak;

$$(a_0)^2b_1c_1 + (a_0)^2b_2c_0 = 0 \quad (5.7)$$

olur. 5.7 denklemini c_0 ile çarparsak;

$$(a_0)^2b_1c_1c_0 + (a_0)^2b_2(c_0)^2 = 0$$

olur. $a_0b_1c_0 = 0$ olduğundan $(a_0)^2b_1c_1c_0 = 0$ bulunur. $(a_0)^2b_2(c_0)^2 = 0$ elde edilir. $(a_0)^2(b_2)^2(c_0)^2 = 0$ olur. Dolayısıyla $a_0b_2c_0 = 0$ olur. 5.6 denkleminde bulunan değerler yerine konduğunda $(a_0)^2b_1c_1 = 0$ olur. Böylece $a_0b_1c_1 \in \text{nil}(\mathbf{Z}_2) = \{0\}$ elde edilir.

$$d_2 = a_2b_0c_0 + a_1b_1c_0 + a_1b_0c_1 + a_0b_1c_1 + a_0b_2c_0 + a_0b_0c_2 = 0$$

Dolayısıyla $d_2 = a_2b_0c_0 + a_1b_1c_0 + a_1b_0c_1 = 0$ olduğu görülür.

$$a_2b_0c_0 + a_1b_1c_0 + a_1b_0c_1 = 0 \quad (5.8)$$

denklemini b_0 ile çarpalım. $a_2(b_0)^2c_0 + a_1b_1c_0b_0 + a_1(b_0)^2c_1 = 0$ olur. $a_1b_0c_0 = 0$ olduğundan $a_1b_1c_0b_0 = 0$ olur. Böylece

$$a_2(b_0)^2c_0 + a_1(b_0)^2c_1 = 0 \quad (5.9)$$

elde edilir. 5.9 denklemini c_0 ile çarparsak; $a_1b_0c_0 = 0$ olduğundan $a_1(b_0)^2c_1 = 0$ bulunur. $a_2b_0c_0 = 0$ olur. Bulunan bu değer 5.8 denkleminde yerine konulduğunda $a_1b_1c_0 + a_1b_0c_1 = 0$ elde edilir. Bu denklemi de c_0 ile çarparsak; $a_1b_1c_0 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $a_1b_0c_1 = 0$ elde edilir. Böylece $i + j + k = l = 2$ için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(\mathbf{Z}_2)$ bulunur. Diğer katsayılarla benzer şekilde uygun çarpımlar yapıldığında her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(\mathbf{Z}_2)$ bulunur. Dolayısıyla Z_2 nil-3-Armendariz halkadır.

Örnek 5.1.3 $R = \left\{ (m, 2r) \mid m, r \in \mathbf{Z}_4 \right\}$, R nil-3-Armendariz halkadır. Gerçekten;

$f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ katsayıları sırasıyla her i, j, k için $a_i = (a_{i_1}, a_{i_2})$, $b_j = (b_{j_1}, b_{j_2})$ ve $c_k = (c_{k_1}, c_{k_2})$ olan $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$ ve $h(x) = \sum_{k=1}^l c_k x^k$ şeklindeki polinomların $f(x)g(x)h(x)$ çarpımını $\text{nil}(R)[X]$ kümesinde ise çarpımın katsayıları incelenecek olunursa;

$$a_0 b_0 c_0 = (a_{0_1} b_{0_1} c_{0_1}, a_{0_2} b_{0_2} c_{0_2}) \in \text{nil}(R)$$

$$a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_0$$

$$= (a_{0_1} b_{0_1} c_{1_0}, a_{0_2} b_{0_2} c_{1_0}) + (a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1}, a_{0_2} b_{1_2} c_{0_2}) + (a_{1_1} b_{0_1} c_{0_1}, a_{1_2} b_{0_2} c_{0_2})$$

$= (a_{0_1} b_{0_1} c_{1_1} + a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1} + a_{1_1} b_{0_1} c_{0_1}, a_{0_2} b_{0_2} c_{1_2} + a_{0_2} b_{1_2} c_{0_2} + a_{1_2} b_{0_2} c_{0_2}) \in \text{nil}(R)$ buradan ikinci bileşenin nilpotent olduğu aşıkardır. İlk bileşen analiz edilirse $k \in \mathbf{Z}$ olmak üzere;

$$a_{0_1} b_{0_1} c_{1_1} + a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1} + a_{1_1} b_{0_1} c_{0_1} = 2k \quad (5.10)$$

(5.10) denklemi soldan a_{0_1} ile çarpılırsa \mathbf{Z}_4 değişmeli halka olduğundan

$$a_{0_1} a_{0_1} b_{0_1} c_{1_1} + a_{0_1} a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1} + a_{0_1} a_{1_1} b_{0_1} c_{0_1} = a_{0_1} 2k$$
 buradan $a_{0_1} b_{0_1} c_{1_1}$ nilpotent eleman ve

$t \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $a_{0_1} a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1} + a_{1_1} b_{0_1} c_{0_1} = 2t$ olur. (5.10) denklemi soldan b_{0_1} ile

çarpılırsa $b_{0_1} a_{0_1} b_{0_1} c_{1_1} + b_{0_1} a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1} + b_{0_1} a_{1_1} b_{0_1} c_{0_1} = b_{0_1} 2k$ buradan $a_{1_1} b_{0_1} c_{0_1}$ nilpotent

eleman ve $t_1 \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $b_{0_1} a_{0_1} b_{0_1} c_{1_1} + b_{0_1} a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1} = 2t_1$ olur. Böylece $a_{0_1} b_{1_1} c_{0_1}$

nilpotent olduğu aşıkardır. Benzer şekilde diğer katsayılar içinde benzer işlemler yapıldığında her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(R)$ olur. Dolayısıyla R bir nil-3-Armendariz' dir.

Nil-3-Armendariz tanımından kolayca görülebileceği gibi 3-Armendariz halkalar nil-3-Armendarizdir. Tersi ise doğru değildir. Aşağıdaki örnekte tersinin doğru olmadığı kolayca görülür.

$$\text{Örnek 5.1.4 } S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{Z}_4; i, j = 1, \dots, 4 \ a_{ii} = 2k; k \in \mathbf{Z} \right\}$$

halkası bir nil-3-Armendariz halkadır ama bir 3-Armendariz halka değildir çünkü;

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = A_1 + A_2x$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = B_1 + B_2x$$

$$h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = C_2x \text{ olmak üzere;}$$

$f(x)g(x)h(x) = 0$ olmaktadır. Fakat $A_1B_2C_2 \neq 0$ ' dir. Dolayısıyla S halkası 3-Armendariz halka değildir.

Önerme 5.1.5 Nil-3-Armendariz halkanın her alt halkası nil-3-Armendariz halkadır ayrıca nil-3-Armendariz halkaların sonlu dik toplamıda nil-3-Armendariz halkadır.

Kant: R nil-3-Armendariz halka ve S , R ' nin bir alt halkası olsun. Varsayalım ki her $f(x), g(x), h(x) \in S[X]$ için $f(x)g(x)h(x) \in \text{nil}(S)[X]$ olsun. $\text{nil}S \subseteq \text{nil}R$ ve R nil-

3-Armendariz olduğu için, $f(x)g(x)h(x) \in \text{nil}(R)[X]$ olur. Dolayısıyla her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(R)$ olur. Böylece $(a_i b_j c_k)^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbf{N}$ vardır ve her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(S)$ olur. S nil 3-Armendariz halkadır.

Nil-3-Armendariz halkaların kümesi $\{R_s | s \in I\}$ ve nil-3-Armendariz halkaların sonlu çarpımlarının kümesi $S = \prod_{s \in I} R_s$ olsun. Katsayıları sırasıyla $a_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, $b_j = (b_{j_1}, \dots, b_{j_n})$, $c_k = (c_{k_1}, \dots, c_{k_n})$ olan $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j$ ve $h(x) = \sum_{k=1}^t c_k x^k$ polinomları $S[X]$ polinom halkasının elemanları olmak üzere, $f(x)g(x)h(x) \in \text{nil}(S)[X]$ olsun. $f_s(x)g_s(x)h_s(x) \in \text{nil}R_s[X]$ olmak üzere $f(x)g(x)h(x) = (f_1(x)g_1(x)h_1(x), \dots, f_t(x)g_t(x)h_t(x)) \in \text{nil}(S)[X]$ olduğunda, R_s nil-3-Armendariz, her i, j, k için $a_{i_s} b_{j_s} c_{k_s} \in \text{nil}(R_s)$ olur. En az bir $n_s \in \mathbf{N}$ için $(a_{i_s} b_{j_s} c_{k_s})^{n_s} = 0$ olur. Dolayısıyla tüm $(a_{i_s} b_{j_s} c_{k_s})$ çarpımları için $\max(n_1, \dots, n_n) = m$ olmak üzere $(a_i b_j c_k)^m = ((a_{i_1} b_{j_1} c_{k_1})^m, \dots, (a_{i_n} b_{j_n} c_{k_n})^m) = 0$ olur. Böylece her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(S)$ olduğundan S nil-3-Armendariz halkadır. \square

Aşağıdaki teorem ile nil-3-Armendariz halkalar, matris halkaları ile karakterize edilecektir. Üst üçgensel matris halkalarının nil kümesi Antoine 2008 çalışmasında analiz ettiği şekildedir. Alt üçgensel matris halkasının nil kümesi ise $\text{nil}(T_n(R))$ ' nin transpozitesi şeklindedir. $\text{nil}(LTM_n(R)) = [\text{nil}(T_n(R))]^T$ dir.

Teorem 5.1.6 R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) R bir nil 3-Armendariz halkadır.
- (2) Her $n \in \mathbf{N}$ için $UTM_n(R)$ nil-3-Armendariz halkadır.
- (3) Her $n \in \mathbf{N}$ için $LTM_n(R)$ nil-3-Armendariz halkadır.

Kanıt: (1) \Rightarrow (2)

Her $n \in \mathbf{N}$ ve $a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} \in R$ için $1 \leq s \leq n$ ve $r \leq s$ olmak üzere katsayıları sırasıyla;

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & \dots & a_{1n}^i \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn}^i \end{bmatrix}, B_j = \begin{bmatrix} b_{11}^j & \dots & b_{1n}^j \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{nn}^j \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} c_{11}^k & \dots & c_{1n}^k \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{nn}^k \end{bmatrix}$$

şeklinde olan $f(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m B_j x^j$, $h(x) = \sum_{k=0}^m C_k x^k$ matris polinomları $UTM_n(R)[X]$ polinom halkasının elemanları olur. $f(x)g(x)h(x) \in nil(UTM_n(R)[X])$ olduğunda

$$f(x)g(x)h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i+j+k=l} a_{11}^i b_{11}^j c_{11}^k x^l & \dots & \sum_{i+j+k=l} a_{1n}^i b_{1n}^j c_{1n}^k x^l \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \sum_{i+j+k=l} a_{nn}^i b_{nn}^j c_{nn}^k x^l \end{bmatrix} \in nil(UTM_n(R)[X])$$

olur. Buradan $\sum_{i+j+k=l} a_{rr}^i b_{rr}^j c_{rr}^k x^l \in nil(R)[X]$ olduğu elde edilir. R nil-3-Armendariz halka olduğundan her i, j, k için $a_{rr}^i b_{rr}^j c_{rr}^k \in nil(R)$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$A_i B_j C_k = \begin{bmatrix} a_{11}^i b_{11}^j c_{11}^k & \dots & a_{1n}^i b_{1n}^j c_{1n}^k \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn}^i b_{nn}^j c_{nn}^k \end{bmatrix} \in nil(UTM_n(R)) \text{ olur.}$$

Sonuç olarak $UTM_n(R)$ bir nil-3- Armendariz halka olur.

(2) \Rightarrow (1)

$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$, ve $h(x) = \sum_{k=0}^t c_k x^k \in R[X]$ olmak üzere $f(x)g(x)h(x) \in nil(R)[X]$ olsun. $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ polinomları matris polinomu halkasına taşınırsa katsayıları sırasıyla;

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_j = \begin{bmatrix} b_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } C_k = \begin{bmatrix} c_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olan;}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{bmatrix} f(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n a_i x^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} a_i x^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_i \left(\begin{bmatrix} a_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^i \right) = \sum_{i=0}^n A_i x^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \begin{bmatrix} g(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^m b_j x^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} b_j x^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_j \left(\begin{bmatrix} b_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^j \right) = \sum_{j=0}^n B_j x^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(x) &= \begin{bmatrix} h(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^t c_k x^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^t \begin{bmatrix} c_k x^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_k \left(\begin{bmatrix} c_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^k \right) = \sum_{k=0}^t C_k x^k
\end{aligned}$$

matris polinomları elde edilir. Açıkça görülüyorki,

$$F(x)G(x)H(x) = \begin{bmatrix} f(x)g(x)h(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{nil}(UTM_n(R))[X]' \text{ dir.}$$

$UTM_n(R)$ nil-3-Armendariz halkası olduğundan her i, j, k için

$$A_i B_j C_k = \begin{bmatrix} a_i b_j c_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{nil}(UTM_n(R)) \text{ olur. Dolayısıyla her } i, j, k \text{ için}$$

$a_i b_j c_k \in \text{nil}(R)$ olur. Böylece R nil-3-Armendariz halkasıdır.

(1) \Rightarrow (3)

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} \in R$ için $1 \leq s \leq n$ ve $r \leq s$ olmak üzere katsayıları sırasıyla;

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1}^i & \dots & a_{nn}^i \end{bmatrix}, B_j = \begin{bmatrix} b_{11}^j & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ b_{n1}^j & \dots & b_{nn}^j \end{bmatrix} \text{ ve } C_k = \begin{bmatrix} c_{11}^k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ c_{n1}^k & \dots & c_{nn}^k \end{bmatrix}$$

matrisleri şeklinde olan $f(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m B_j x^j$ ve $h(x) = \sum_{k=0}^m C_k x^k$ matris polinomları $LTM_n(R)[X]$ polinomu halkasının elemanları olsun. $f(x)g(x)h(x) \in nil(LTM_n(R))[X]$ olduğunda

$$f(x)g(x)h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i+j+k=l} a_{11}^i b_{11}^j c_{11}^k x^l & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \sum_{i+j+k=l} a_{n1}^i b_{n1}^j c_{n1}^k x^l & \dots & \sum_{i+j+k=l} a_{nn}^i b_{nn}^j c_{nn}^k x^l \end{bmatrix} \in nil(LTM_n(R))[X]$$

olur. Bu çarpımda her $i + j + k = l$ için $\sum_{i+j+k=l} a_{rr}^i b_{rr}^j c_{rr}^k x^l \in nil(R)[X]$ olduğu elde edilir. Ayrıca R nil-3-Armendariz halkası olduğundan her i, j, k için $a_{rr}^i b_{rr}^j c_{rr}^k \in nil(R)$

olduğu görülür. Bu nedenle her i, j, k için $A_i B_j C_k = \begin{bmatrix} a_{11}^i b_{11}^j c_{11}^k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1}^i b_{n1}^j c_{n1}^k & \dots & a_{nn}^i b_{nn}^j c_{nn}^k \end{bmatrix}$

matrisi $nil(LTM_n(R))$ kümesinin elemanı olur. Dolayısıyla $LTM_n(R)$ nil-3-Armendariz halkadır.

(3) \Rightarrow (1) (2) \Rightarrow (1)' deki gibi benzer şekilde yapılır. \square

Hui-feng (2012) çalışmasında $S = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \mid a_i \in R; i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$

olmak üzere $R[X]/(x^n) \cong S$ izomorfizması verilmiştir. Aşağıdaki önermede bu izomorfizma yardımıyla bir R halkasının nil-3-Armendariz karakterizasyonu verilecektir.

Önerme 5.1.7 R nil-3-Armendariz halka olması için gerek ve yeter koşul $n \in \mathbf{Z}^+$ ve (x^n) , x^n tarafınan üretilen $R[X]$ halkasının ideali olmak üzere $R[X]/(x^n)$ halkasının nil-3-Armendariz halka olmasıdır.

$$\mathbf{Kanit:} \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \mid a_i \in R; i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}, UTM_n(R) \text{ halkasının}$$

alt halkası olmak üzere $R[X]/(x^n) \cong S'$ dir. Teorem 5.1.6 gereğince, $UTM_n(R)$ nil-3-Armendariz olduğundan S nil-3-Armendariz halkadır. S halkası $R[X]/(x^n)$ halkasına izomorf olduğu için $R[X]/(x^n)$ nil-3-Armendariz halkadır. \square

Halkanın nil-3-Armendarizlik özelliği I bir nilpotent ideal olmak üzere R/I nil-3-Armendariz halka yardımıyla kontrol edilebilir. Aşağıdaki önermede bu özellik araştırılmıştır.

Önerme 5.1.8 I, R halkasının bir nilpotent ideali olsun. R/I nil-3-Armendariz halkaysa R nil-3-Armendariz halkadır.

Kanit: $\bar{a}_i = a_i + I, \bar{b}_j = b_j + I, \bar{c}_k = c_k + I \in R/I$ ve $\bar{f}(x) = \sum \bar{a}_i x^i, \bar{g}(x) = \sum \bar{b}_j x^j, \bar{h}(x) = \sum \bar{c}_k x^k \in nil(R/I)[X]$ olmak üzere;
 $f(x) = \sum a_i x^i, g(x) = \sum b_j x^j$ ve $h(x) = \sum c_k x^k \in R[x]$ olsun. $f(x)g(x)h(x) \in nil(R)[X]$ olduğunda $\bar{f}(x)\bar{g}(x)\bar{h}(x) \in I[X]$ bulunur. Dolayısıyla $f(x)g(x)h(x) \in I[X]$ olur. Böylece her i, j, k için $a_i b_j c_k \in I \subset nil(R)$ ' dir. Her i, j, k için $a_i b_j c_k \in nil(R)$ olur. Sonuç olarak R nil-3-Armendariz halka olduğu görülür. \square

Nil Armendariz halkalarda $T(R, R)$ ile verilen karakterizasyon nil-3-Armendariz halkalar için korunup korunmadığı aşağıdaki önermede incelenmiştir.

Önerme 5.1.9 R nil-3-Armendariz halka olması için gerek ve yeter koşul $T(R, R)$ nil-3-Armendariz halka olmasıdır.

Kanit: Teorem 5.1.6 gereği ispatı açıktır. \square

Nil-3-Armendariz halkaların alt halkaları da aynı özelliği taşıdığı önerme 5.1.5 gösterilmiştir. R Abel halka olmak üzere $e[nilR(X)] = nil(eR)[X]$ eşitliği mevcuttur. Aşağıdaki önerme ile özel olarak Abel halkaların bazı idempotent elemanları tarafından

üretilen alt halkaları nil-3-Armendarizlik özelliği taşıyorsa halkanın kendisi de bu özelliğini taşıdığı gösterilmiştir.

Önerme 5.1.10 R Abel halka (idempotent elemanlar halkanın merkezinde) olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) R nil-3-Armendariz halkadır.
- (2) R halkasının her e idempotent elemanı için eR ve $(1 - e)R$ nil-3-Armendariz halkalardır.
- (3) R halkasının bazı e idempotent elemanları için eR ve $(1 - e)R$ nil-3-Armendariz halkalardır.

Kanıt: (1) \Rightarrow (2)

$r_1, r_2 \in R$ ve $(1 - e)r_1, (1 - e)r_2 \in (1 - e)R$ ve olmak üzere;

$$(1 - e)r_1 - (1 - e)r_2 = r_1 - er_1 - r_2 + er_2 = (r_1 - r_2) - e(r_1 - r_2) = (1 - e)(r_1 - r_2) \in (1 - e)R$$

$$(1 - e)r_1(1 - e)r_2 = (1 - e)r_1r_2 \in (1 - e)R \text{ olduğundan } (1 - e)R, R' \text{ nin alt halkasıdır.}$$

Önerme 5.1.5 gereğince, $(1 - e)R$ bir nil-3-Armendariz halka olur.

Benzer şekilde, eR R halkasının alt halkasıdır. Önerme 5.1.5 gereğince, eR nil-3-Armendariz halka olur.

(2) \Rightarrow (3) Açıktır.

(3) \Rightarrow (1)

$f(x) = \sum_i a_i x^i$, $g(x) = \sum_j b_j x^j$ ve $h(x) = \sum_k c_k x^k \in R[X]$ için $f(x)g(x)h(x) \in nil(R)[X]$ olsun. $f_1(x)$, $g_1(x)$ ve $h_1(x)$ polinomları sırasıyla

$f_1(x) = ef(x)$, $g_1(x) = eg(x)$ ve $h_1(x) = eh(x)$ şeklinde tanımlanacak olursa

$$f_1(x)g_1(x)h_1(x) = ef(x)eg(x)eh(x) = ef(x)g(x)h(x) \in nil(eR)[X] \text{ bulunur. } eR \text{ nil-3-}$$

Armendariz halka olduğundan her i, j, k için $ea_i b_j c_k \in nil(eR)$ olur. Benzer olarak $f_2(x)$, $g_2(x)$ ve $h_2(x)$ polinomları da sırasıyla;

$f_2(x) = (1 - e)f(x)$, $g_2(x) = (1 - e)g(x)$, $h_2(x) = (1 - e)h(x)$ şeklinde tanımlanabilir.

$$f_2(x)g_2(x)h_2(x) = (1 - e)f(x)(1 - e)g(x)(1 - e)h(x) = (1 - e)f(x)g(x)h(x) \text{ çarpımı}$$

$nil[(1 - e)R][X]$ kümesine düşerse her i, j, k için $(1 - e)a_i b_j c_k \in nil[(1 - e)R]$ elemanı,

$$(1 - e)a_i b_j c_k = a_i b_j c_k - ea_i b_j c_k \text{ bulunur. } (1 - e)a_i b_j c_k + ea_i b_j c_k = a_i b_j c_k \text{ elde edilir.}$$

Bir $m \in \mathbf{Z}$ için $((1 - e)a_i b_j c_k)^m = 0$ olur. Çünkü $(1 - e)a_i b_j c_k, \text{nil}[(1 - e)R]$ kümesinin elemanıdır. Ayrıca $ea_i b_j c_k \in \text{nil}(eR)$ olduğundan

$$(1 - e)(a_i b_j c_k)^m = (a_i b_j c_k)^m - e(a_i b_j c_k)^m = 0$$

eşitliğinden $(a_i b_j c_k)^m = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(R)$ olur. Bu da R halkasının nil-3-Armendariz halka olduğunu gösterir. \square

5.2. M-Nil-3-Armendariz Halka ve Özellikleri

Bu bölümde M monoidine göre nil-3-Armendariz olma özelliği verilecektir ve nil-3-Armendariz halkaların bu özelliği araştırılacaktır.

Tanım 5.2.1 M monoid ve R bir halka olsun. $\alpha = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n, \beta = b_1 g_1 + \dots + b_m g_m$ ve $\gamma = c_1 h_1 + \dots + c_s h_s \in R[M]$ olmak üzere; $\alpha\beta\gamma$ çarpımı $\text{nil}(R)[M]$ kümesinde bir eleman olduğunda her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}(R)$ kümesinin elemanı olursa R halkasına M monoidiyle ilişkili nil-3-Armendariz halka denir. Kısaca M nil-3-Armendariz olarak yazacağız.

Teorem 5.2.2 $|M| \geq 2$ olmak üzere M monoid olsun. M nil-3-Armendariz halkaların alt halkalarında M nil-3-Armendariz halkadır. İki M -nil-3-Armendariz halkanın direkt toplamı M -nil-3-Armendariz halkasıdır.

Kanıt: R, M nil-3-Armendariz halka ve S, R' nin alt halkası olmak üzere; $\alpha = \sum a_i f_i, \beta = \sum b_j g_j$ ve $\gamma = \sum c_k h_k \in \text{nil}S[M]$ olsun. $\alpha\beta\gamma \in \text{nil}S[M] \subset \text{nil}R[M]$ ' dir. R, M nil-3-Armendariz halka olduğundan her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}R$ olur. Dolayısıyla her i, j, k için $a_i b_j c_k \in \text{nil}S$ olur. Böylece S, M nil-3-Armendariz halkadır.

R_1, R_2 . R_1, R_2 M -nil-3-Armendariz halkaları ve $S = \bigoplus_{i=1}^2 R_i$ olsun. α, β ve $\gamma, S[M]$ halkasının elemanları, α_1, β_1 ve $\gamma_1 \in R_1; \alpha_2, \beta_2$ ve $\gamma_2 \in R_2$ olmak üzere,

$$\alpha = (a_1, b_1)f_1 + \dots + (a_m, b_m)f_m = (a_1 f_1 + \dots + a_m f_m, b_1 f_1 + \dots + b_m f_m) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\beta = (a'_1, b'_1)g_1 + \dots + (a'_n, b'_n)g_n = (a'_1 g_1 + \dots + a'_n g_n, b'_1 g_1 + \dots + b'_n g_n) = (\beta_1, \beta_2) \text{ ve}$$

$$\gamma = (a''_1, b''_1)h_1 + \dots + (a''_s, b''_s)h_s = (a''_1 h_1 + \dots + a''_s h_s, b''_1 h_1 + \dots + b''_s h_s) = (\gamma_1, \gamma_2) \text{ şeklinde}$$

tanımlansın. $\alpha\beta\gamma = (\alpha_1\beta_1\gamma_1, \alpha_2\beta_2\gamma_2) \in \text{nil}(S)[M]$ olsun, ozaman $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \in \text{nil}(R_1)[M]$

ve $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $nil(R_2)[M]$ kümesinin elemanıdır. R_1 ve R_2 halkaları M -nil-3-Armendariz halka olduklarından, her i, j, k için $a_i a'_j a''_k \in nil(R_1)$ ve $b_i b'_j b''_k \in nil(R_2)$ kümesinin elemanı olur. A_i, B_j ve C_k sırasıyla $(a_i, b_i), (a'_j, b'_j), (a''_k, b''_k)$ eşit olsun. A_i, B_j ve C_k sırasıyla α, β ve γ 'nın katsayılar kümesinden herhangi elemanları için $A_i B_j C_k \in nil(S)$ olur. Böylece S M -nil-3-Armendariz halkadır. \square

Teorem 5.2.3 $|M| \geq 2$ olmak üzere M monoid olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) R M -nil-3-Armendariz halkadır.
- (2) Her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n(R)$ M -nil-3-Armendariz halkadır.

Kanıt:

α, β ve γ $T_n(R)[M]$ kümesinin elemanları olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_i A_i f_i = \sum_i \begin{bmatrix} a_{11}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{mn}^i \end{bmatrix} f_i = \sum_i \begin{bmatrix} a_{11}^i f_i & \cdots & a_{1n}^i f_i \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{mn}^i f_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i a_{11}^i f_i & \cdots & \sum_i a_{1n}^i f_i \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sum_i a_{mn}^i f_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_j B_j g_j = \sum_j \begin{bmatrix} b_{11}^j & \cdots & b_{1n}^j \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{mn}^j \end{bmatrix} g_j = \sum_j \begin{bmatrix} b_{11}^j g_j & \cdots & b_{1n}^j g_j \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{mn}^j g_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_j b_{11}^j g_j & \cdots & \sum_j b_{1n}^j g_j \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sum_j b_{mn}^j g_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_k C_k h_k = \sum_k \begin{bmatrix} c_{11}^k & \cdots & c_{1n}^k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & c_{nn}^k \end{bmatrix} h_k = \sum_k \begin{bmatrix} c_{11}^k h_k & \cdots & c_{1n}^k h_k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & c_{nn}^k h_k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_k c_{11}^k h_k & \cdots & \sum_k c_{1n}^k h_k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sum_k c_{nn}^k h_k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha\beta\gamma \in \text{nil}(T_n(R))[M]$ olsun ve ifadeler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \sum_i a_{11}^i f_k & \cdots & \sum_i a_{1n}^i f_i \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sum_i a_{nn}^i f_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_j b_{11}^j g_j & \cdots & \sum_j b_{1n}^j g_j \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sum_j b_{nn}^j g_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_k c_{11}^k h_k & \cdots & \sum_k c_{1n}^k h_k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sum_k c_{nn}^k h_k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}\gamma_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{nn}\beta_{nn}\gamma_{nn} \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Böylece $1 \leq s \leq n$ olmak üzere $\alpha_{ss}\beta_{ss}\gamma_{ss}$ bileşeni $\text{nil}R[M]$ kümesinin elemanı olur. R M -nil-3-Armendariz halka olduğundan her i, j, k için $a_{ss}^i b_{ss}^j c_{ss}^k \in \text{nil}(R)$ elde edilir. Dolayısıyla her i, j, k için

$$A_i B_j C_k = \begin{bmatrix} a_{11}^i b_{11}^j c_{11}^k & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn}^i b_{nn}^j c_{nn}^k \end{bmatrix}$$

matrisi $\text{nil}(T_n(R))$ matris kümesinin elemanı olur. Sonuç olarak $T_n(R)$ halkası bir M -nil-3-Armendariz halkadır.

(2) \Rightarrow (1)

$R \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{bmatrix} \mid a \in R \right\}$ halkası $T_n(R)$ halkasının alt halkası olsun. M -nil-3-

Armendariz halkasının her alt halkası da M -nil-3-Armendariz halkadır. Dolayısıyla R halkası M -nil-3-Armendariz halkadır.

□

Sonuç 5.2.4 $M, |M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R M -nil-3-Armendariz halkadır.

(2) $S_n(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$ halkası M -nil-3-Armendariz halkadır.

(3) $T(R, n) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \mid a_i \in R \right\}$ halkası M -nil-3-Armendariz halkadır.

(4) $T(R, R)$ halkası M -nil-3-Armendariz halkadır.

(5) Her $n \geq 2$ için $R[X]/(x^n)$ halkası M -nil-3-Armendariz halkadır.

$M, |M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid ve R M -nil-3-Armendariz halka olsun. Teorem 5.1.6' e göre 2×2 tipindeki alt ve üst üçgensel matris halkaları M -nil-3-Armendariz

halkadır. $G_3(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in R \right\}$ halkasının M -3-Armendariz olduğu aşağıdaki teoremden gösterilecektir.

Teorem 5.2.5 $M, |M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R M -nil-3-Armendariz halkadır.

(2) $G_3(R)$ M-nil-3-Armendariz halkadır.

Kant: $nil(G_3(R)) = \begin{bmatrix} nil(R) & 0 & 0 \\ R & nil(R) & R \\ 0 & 0 & nil(R) \end{bmatrix}$ olduğunu gösterelim.

$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} nil(R) & 0 & 0 \\ R & nil(R) & R \\ 0 & 0 & nil(R) \end{bmatrix}$ olsun.

$a_{11}^{k_1} = a_{22}^{k_2} = a_{33}^{k_3} = 0$ olacak şekilde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $\max\{k_1, k_2, k_3\} = k$ için $a_{11}^k = a_{22}^k = a_{33}^k = 0$ olsun.

$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^{2k} = 0$ olur. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} nil(R) & 0 & 0 \\ R & nil(R) & R \\ 0 & 0 & nil(R) \end{bmatrix} \subseteq nil(G_3(R))$ olur.

Benzer şekilde $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \in nil(G_3(R))$ olsun.

Nilpotent eleman olduğundan bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^k = 0$ olur.

Dolayısıyla $a_{11}^k = a_{22}^k = a_{33}^k = 0$ elde edilir. Sonuç olarak

$nil(G_3(R)) = \begin{bmatrix} nil(R) & 0 & 0 \\ R & nil(R) & R \\ 0 & 0 & nil(R) \end{bmatrix}$

olduğu görülür. R , M -nil-3-Armendariz halkası olsun. Teorem 5.1.6 gereğince $G_3(R)$ M -nil-3-Armendariz halka olur. Diğer taraftan $G_3(R)$ M -nil-3-Armendariz iken R halkasının M -nil-3-Armendariz olduğu açıktır. \square

R bir M -nil-3-Armendariz halka iken $UTM_n(R)$, $LTM_n(R)$ ve $G_3(R)$ halkalarının da M -nil-3-Armendariz halka olduğu gözlemlendi. Fakat bu durum $M_n(R)$ matris halkası için geçerli olmadığı bir örnekle görülebilir.

Örnek 5.2.6 M , $|M| \geq 2$ olmak üzere, bir monoid ve R bir halka olsun.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} g, \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} g \text{ ve } \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e, M_2(R)[M]$$

halkasının elemanları olsun. $\alpha\beta\gamma = 0 \in \text{nil}(R)$ olduğu görülür. Fakat,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ nilpotent eleman değildir. Dolayısıyla } M_2(R)$$

M -nil-3-Armendariz değildir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada nil-3-Armendariz halkalar tanımlanmış ve özellikleri araştırılmıştır. Böylece nil-3-Armendariz halkalar 3-Armendariz halkaların bir genellemesi olduğu görülmüştür ve nil-3-Armendariz olup 3-Armendariz olmayan bir halka örneği sunulmuştur.

Ayrıca M monoidiyle ilişkili nil-3-Armendariz halka tanımı ve özellikleri verilmiştir. R bir M -nil-3-Armendariz halka iken $UTM_n(R)$, $LTM_n(R)$ ve $G_3(R)$ halkalarının da M -nil-3-Armendariz halka olduğu gözlemlenmiştir. Fakat bu durum $M_n(R)$ matris halkası için geçerli olmadığı bir örnekle gösterilmiştir..

KAYNAKLAR

- Abotalebi, N. H. ve Hasemi, E., (2009) *Tarbiat Moallem University, 20. Seminar on Algebra, 2-3 Ordibehesht*, 1388, 88-91.
- Anderson, F. W. ve Fuller, K. R., (1974) *Rings and Categories of Modules*, Springer.
- Antonie, R., (2008) Nilpotent and Armendariz Rings, *Journal of Algebra*, 319, 3128-3140.
- Armendariz, E. P., (1974) A Note On Exentions of Baer and P.P. Rings, *J. Austral Math Soc.*, 18, 470-473.
- Dixit, V. N. ve Singh, A. B., (2010) Linear Armendariz Ring Relative to Monoid, *International Journal of Algebra*, Vol. 4, no, 23, 1145-1151.
- Hizen, S., (2010) A Note On Nil Power Serieswise Armendariz Rings, *Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo*, 87-99.
- Hungerford, T.W., (1980) *Graduate Texts in Mathematics*, Springer.
- Hui-feng, W. U., (2012) On Weak 3-Armnedariz Rings, *Journal of hangzhou Normal University*, vol. 11, no. 3.
- Jeon, Y. C., Kim, K. H., Lee, Y. ve Yoon, J. S, (2009) *Bull. Korean Math. Soc.*, No. 1, 135-146.
- Kim, N. K., Lee, Y., (2000) Armendariz Rings and Reduced Rings, *J. Algebra*, 223: 477-488.
- Lang, S., (1993) *Algebra*, Springer.
- Liu, Z., (2005) Armendariz Rings Relative To A Monoid, *Communication in Algebra*, 33:649-661.

- Liu, Z. ve Zhao, R., (2006) On Weak Armendariz Rings, *Communication in Algebra*, 34: 2607-2616.
- Lungun, O. ve Jinwang, L., (2012) Nil-Armendariz Rings Relative To Monoid, *Arab J. Math*, DOI 10.1007/s40065-012-0040-3.
- Malik, D.S., Mordeson, J. M. ve Sen, M.K., (1996) Fundamentals of Abstract Algebra, *The McGraw-Hill College*, United States of America, 628s.
- Rege, M. B. ve Chhawachharia, S., (1997) Armendariz Rings, *Proc. Acad A.Math Sci*, 73(1), 14-17.
- Yang, S., (2008) On the Extension of Armendariz Rings, *Lanzho:Lanzhou University*.

ÖZGEÇMİŞ

Arzu KAPÇIK, 1987 yılında İzmir' de doğdu. İlk ve orta öğretimini İlk Kurşun İlköğretim Okulu' nda ve liseyi Şehit Erkan Özcan Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi' inde tamamladı.

2006 yılında Muğla Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı ve 2010 yılında mezun oldu. 2010 yılında mezun olduğu üniversitenin Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.

Üniverste eğitimi boyunca tiyatro, dağcılık topluluklarına aktif olarak katıldı.