

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LENSE - THIRRING ETKİSİ

Ahmet ERSOY

FİZİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LENSE – THIRRING ETKİSİ

Ahmet ERSOY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Adnan TEĞMEN

Dönen koordinat sistemleri ve dönen cisimler bilimcileri her zaman şaşırtmıştır. Dönen koordinat sistemlerinde, hiç hesapta olmayan Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerinin ortaya çıkması, kararsız olan asal ekseninden döndürülmeye çalışan bir cismin sürpriz bir şekilde kendini ters-düz etmesi verilebilecek basit örnekleridir. Sürpriz bir sonuç da dönen kütlelerin Genel Görelilik Teorisinde ortaya çıkardığı Lense-Thirring etkisidir. Kütlelerin uzay-zamanı eğdikleri bilinmektedir. Lense-Thirring etkisi, kütlenin dönüyor olmasının uzay-zamana ekstra bir eğrilik kazandıracağını öngörür. Günümüzde, laserler, çift pulsarlar ve Lageos uyduları aracılığı ile dolaylı ve doğrudan bu etki gözlenebilir hale gelmiştir.

Mayıs 2013, 69 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lense – Thirring Etkisi, Mach ilkesi, sözde kuvvetler.

ABSTRACT

Master Thesis

LENSE – THIRRING EFFECT

Ahmet ERSOY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Adnan TEĞMEN

Rotating coordinate systems and bodies puzzles always scientists. In rotating frames, appearance of the Coriolis and centrifugal forces unexpectedly, up-side-down motion of a rigid body forced to rotate about its unstable axis are of the most known examples of this type. Another amazing result is the Lense-Thirring effect in the general relativity, originated from the rotation of a massive object. It is known that mass curves the spacetime. Nowadays, this effect can be seen directly or indirectly by means of lasers, double pulsars and the Lageos satellites.

May 2013, 69 pages

Key Words: Lense – Thirring effect, Mach's principle, pseudo forces

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeye katkıda bulunan, bilimsel yaklaşımı kendisinden öğrenmeye çalıştığım, her aşamada pratik çözümleriyle destek olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Adnan TEĞMEN'e (Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı), çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Mustafa Çetin GÜLEÇYÜZ'e (Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı), kendisinden aldığım ders ile bu alanda çalışma isteği uyandıran ve bana büyük katkı sağlayan değerli hocam Doç. Dr. Korkut Okan OZANSOY'a (Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı), değerli yorumları ve destekleri ile her zaman yanımda olan değerli dostlarım Solmaz YILMAZ, Durgun DURAN, İbrahim ÜLGEN, Duygu ŞİBİL ve Mustafa BİÇER'e , bugünlere gelmemde büyük katkısı olan maddi ve manevi her türlü desteği benden esirgemeyen anneme ve babama, bu çalışmalarım süresince yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen sevgili eşim Sebile'ye en derin duygularla teşekkür ederim.

Ahmet ERSOY
Ankara, Mayıs 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. MATEMATİKSEL HAZIRLIK.....	8
2.1 Vektör Uzayı.....	8
2.2 Uzay-Zaman	9
2.3 Vektör Analizi.....	11
2.3.1 Bir vektörün tanımı	11
2.4 Vektör Cebri	14
2.4.1 Baz vektörleri	14
2.4.2 Baz vektörlerin dönüşümü	15
2.4.3 Skaler çarpım	17
2.5 Tensör Analizi.....	18
2.5.1 Metrik tensör	18
2.5.2 Tensörlerin tanımı.....	19
2.5.3 Bir tensörün bileşenleri	20
2.5.4 (0,N)-tipi tensörler: 1-formlar	20
2.5.5 (M,N)-tipi tensörler	24
2.5.6 İndis ‘yükseltme’ ve ‘alçaltma’	25
2.6 Kovaryant ve Kontravaryant Vektörler	26
2.7 Metrik	27
2.8 Christoffel Sembolleri.....	29
2.9 Jeodezikler	35
3. MUTLAK UZAY ve MACH İLKESİ	36
4. SCHWARZSCHILD GEOMETRİSİ	41
4.1 Christoffel Sembolleri.....	42

4.2 Jeodezik Denklemleri.....	43
4.3 Dörtlü-Hız ve Momentum.....	44
4.4 Deneysel Testler	48
4.4.1 Işığın kütle çekimsel alanda sapması.....	48
4.4.2 Perihelyon kayması.....	50
4.4.3 Gravitasyonel kızıla kayma	51
5. GENEL GÖRELİLİK TEORİSİNİN BAZI TESTLERİ.....	53
5.1 Jeodezikten Sapma ve Jireskop Testi.....	53
5.2 Gravitasyon Dalgalarının Belirlenmesi	54
6. LENSE-THIRRING ETKİSİ.....	58
6.1 Lense-Thirring Etkisinin Gözlenmesi	62
7. SONUÇ.....	65
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

dS	Uzay-zaman yay elemanı
O	Gözlem çerçevesi
$\bar{O}$	Gözlem çerçevesi
$\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}$	Lorentz dönüşüm matrisi
A^{α}	Dörtlü vektör
$\vec{e}_{\alpha}$	Baz vektör
g	Metrik tensör
$\eta_{\alpha\beta}$	Metrik bileşenleri
$\eta^{\alpha\beta}$	Metriğin ters bileşenleri
$\tilde{p}$	Bir-form
$\tilde{\omega}_{\alpha}$	Dual baz
p_{α}	Bir-form bileşenleri
$\otimes$	Tensör çarpımı
$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$	Christoffel sembolleri
$V_{;\beta}^{\alpha}$	Kovaryant türev
$V_{,\beta}^{\alpha}$	Kısmi türev
$M_{\odot}$	Güneşin kütlesi
$R_{\odot}$	Güneşin yarıçapı
$G^{\mu\nu}$	Einstein tensörü
$T^{\mu\nu}$	Enerji momentum tensörü
G	Newton çekim sabiti
$\tilde{E}$	Kütleli bir parçacık için birim kütle başına enerji
E	Foton için enerji
$\tilde{L}$	Kütleli parçacıklar için açısal momentum
L	Foton için açısal momentum
R_s	Schwarzschild yarıçapı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Boş uzay içinde sabit ivme ile hareket eden bir kapalı kutu içerisindeki gözlemci.....	4
Şekil 1.2 Düzgün kütle çekim alanındaki kapalı kutu içerisindeki gözlemci.....	4
Şekil 1.3 Uzayda sabit duran bir asansör	5
Şekil 1.4 Uzayda ivmelenen bir asansör	6
Şekil 1.5 Dünya’da sabit duran bir asansör.....	6
Şekil 3.1 Dikey eksene göre ω açısal hızıyla dönen su dolu kova.....	36
Şekil 3.2 Kova durduktan sonra suyun dönmesiyle oluşan parabol.....	37
Şekil 3.3 Her iki gözlemcinin aynı açısal hızla döndükleri durum	38
Şekil 3.4 Kovanın durması sonucu gözlemciler arasındaki göreceli hareket	39
Şekil 4.1 Kütleli bir cisim etrafındaki uzay	49
Şekil 4.2 Güneş tutulması esnasında yapılan bir gözlem	49
Şekil 6.1 Dönen bir kütleli cismin içinde bir jiroskopun presesyonu	60
Şekil 6.2 Dış bölgede, Lense-Thirring etkisinin jiroskopun konumuna bağlılığı	60
Şekil 6.3 Dönen küresel bir cismin civarında uydunun yörüngesi kapalı değildir	61

1. GİRİŞ

Albert Einstein, özel görelilik kuramının temellerini 1905'te yayınladığı bir makaleyle atmıştır. Kuram iki yüzyılı aşkın bir süredir kullanılan Newton'un hareket yasalarını değiştirmekle kalmamış, bunun yanında birçok kavramsal yenilik getirmiştir. Bunlardan biri zamanın mutlak olmadığı, gözlemciden gözlemciye değiştiğidir. Buna ek olarak zaman, ayrıca olayların oldukları yerlere bağımlıdır, böylece uzay ve zamanı bir bütün olarak değerlendirme ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Çıkan bir başka önemli sonuçta yüzyılın en ünlü formülü olan $E=mc^2$, yani enerjinin aynı zamanda bir kütlesi olması gerekliliğidir.

Einstein tüm kuramı iki temel üzerine oturtmuştur. Bunlardan birincisi, herhangi bir ivmesiz gözlemciye göre ışığın hızı, ışık kaynağının gözlemciye göre hareketine bağlı olmaksızın, $c=3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ dir. Diğer temel ise “görelilik ilkesi” dediğimiz, sabit hızla hareket eden araçlar içindeki gözlemcilerin, çevrelerindeki olayları sanki araç duruyormuş gibi inceleyebilecekleri, bu durumda bile bütün doğa yasalarının aynı şekilde geçerli olduğudur. Sadece bu iki varsayım, özel görelilikte elde edilen tüm sonuçları üretebilecek güce sahip olmuştur. Fakat, dayandığı temeller nedeniyle, kuram sadece sabit hızlarla hareket eden gözlemcilerin olayları nasıl gördüğünü belirleyebilmiştir. Ama bu sınırlama kısa bir süre sonra ortadan kalkmıştır.

Einstein, 1907 yılında özel görelilik kuramı hakkında bir bilimsel dergiye yazdığı makalede, yeni bir düşüncesi olduğunu, dayandığı “görelilik ilkesinin” çok daha genel bir başka ilkenin sadece özel bir hali olduğunu bildirmiştir. “Denklik ilkesi” olarak adlandırdığımız bu yeni ilkede çok sayıda yeni sonucu üretebilecek potansiyele sahip olmuştur. 1905 yılında temelleri atılan kurama “özel görelilik”, denklik ilkesinden yola çıkarak oluşturulan ve tüm matematiksel detaylarla ancak 1915-16 yıllarında tamamlanan yeni kuramada “genel görelilik” adı verilmiştir. Genel görelilik bu defa Newton'un bir diğer yasası, evrensel kütle çekim yasasını değiştirmiştir. Hatta, sadece değiştirmekle kalmamış, tüm kütle çekim olgusunu çok daha sağlam geometrik temellere oturtmuştur.

Einstein'ın bahsettiği denklik ilkesi aslında çok da yeni değildi, düşüncenin temelleri hareket yasalarının doğduğu zamanlara, Galileo ve Newton'a kadar uzanmaktaydı. Tüm konu, cisimlerin “kütle” olarak adlandırdığımız özelliğinin iki farklı doğa yasasında işin içine girmesinden kaynaklanmaktadır.

Kütlenin belirlediği yasalardan birincisi Newton'un evrensel kütle çekim yasasıdır. Bu yasaya göre iki cisim birbirlerini kütleleriyle orantılı, aralarındaki uzaklığında karesiyle ters orantılı bir kuvvetle çekmektedir. Söz konusu cisimlerden biri Dünya gibi çok büyük bir gök cismiye, bu kuvvet ağırlık olarak adlandırılmaktadır. Yani yeryüzündeki bir cismin ağırlığı, Dünya'nın o cisme uyguladığı çekme kuvvetiyle aynı olmaktadır. Bu aynı zamanda o cismi kaldırmak için uygulamamız gereken kuvvete eşittir. Ağırlık, cismin bulunduğu yere bağlı olarak değişebilir; ama kütle, cisimlerin değişmez bir özelliğidir.

Kütle burada karşımıza cisimlerin ne kadar büyük bir kütle çekim kuvveti uygulayabileceğini belirten bir nicelik olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bu kütleye “çekim kütlesi” denmektedir. Dolayısıyla kütle çekim yasası cisimlerin ağırlığının kütleleriyle orantılı olduğunu söylemektedir.

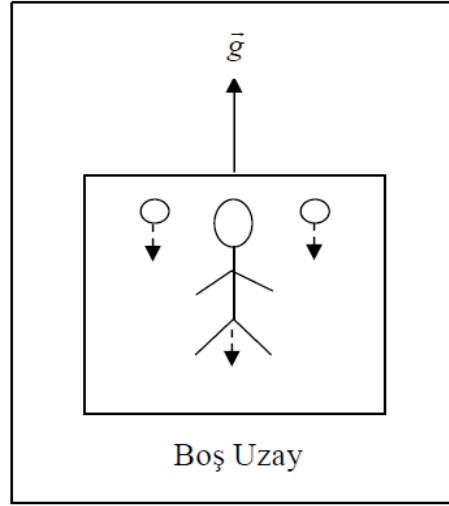
Kütlenin belirlediği diğer yasaysa Newton'un hareket yasalarından ikincisidir. Bir cisme kuvvet uygulayarak cismi hızlandırır, yavaşlatır veya hız yönünü değiştirebiliriz. Birim zamanda meydana gelen hızdaki değişime ivme denmektedir. İkinci yasa ivmenin, kuvvetin kütleyle bölünmesiyle elde edileceğini belirtmektedir. Burada da kütle, karşımıza bir cismin hızını değiştirmeye direnci (eylemsizlik) olarak çıkmaktadır. Kütle ne kadar büyükse, cismi harekete geçirmek için o kadar zorlanmaktadır. Bu nedenle, bu yasada geçen kütleyle de “eylemsizlik kütlesi” denmektedir.

Galileo ve Newton, hem çekim hem de eylemsizlik kütlelerinin aynı olduğunu fark etmişlerdir, fakat bunu doğadaki ilginç tesadüflerden biri olarak yorumlamışlardır. Çok daha derinlerde yatan bu anlamı ise, ilk olarak Einstein fark etmiştir.

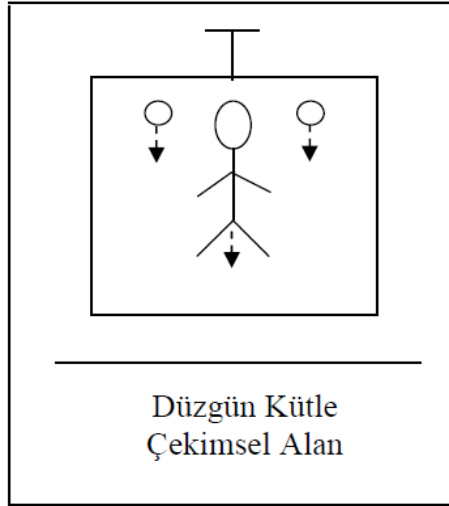
Eğer bütün cisimlerin eylemsizlik ve çekim kuvvetleri eşitse, o zaman bütün cisimler, şekilleri ve kimyasal yapıları ne olursa olsun yeryüzünde aynı şekilde düşerler. Örneğin, bir çekiç ve tüyü bırakarak düşüşlerini izlediğimizi varsayalım. Dünya, bu iki cisme kütleleriyle orantılı bir kuvvet uygular, yani tüye daha az, çekice de daha fazla kuvvet uygulanacaktır (çekiç tüyden daha ağırdır). Buna karşılık bunların ivmesi, ağırlık kuvvetlerinin kütlelerine bölünmesiyle elde edilmektedir. Dolayısıyla bunları aynı anda bırakırsak, her ikisi de aynı anda yere ulaşacaktır.

Böyle bir şeyin yeryüzünde gözlenememesinin nedeni, havanın düşen cisimlere uyguladığı sürtünme kuvvetidir. Sürtünme, tüyü çekiçten daha fazla etkilediği için, tüyün yere daha geç ulaştığı görülmektedir. Ama Galileo, yaptığı analizlerle sürtünmenin farkına varmış ve eğer bu olmasaydı bütün cisimlerin aynı ivmeyle düşeceğini söylemiştir. Yeryüzünde yüksek vakumlu ortamlarda bu olay rahatlıkla görülebilir.

Çekiç ve tüy deneyinde dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, düşüş boyunca bu iki cisim arasındaki uzaklığın sabit kalmasıdır. Olayın anlamını daha iyi kavramak için, bir asansörün ipinin koparak içindekilerle beraber düşmeye başladığını düşünelim. Asansör dahil her şey aynı ivmeyle düştüğü için, gözlemci içerideki bütün cisimlerin asansöre göre bulundukları yerde sabit durduklarını görecektir. Buna ek olarak, eğer cisimlerden birine bir ilk hız verilmişse, bu defa cisim aynı hızını koruyarak hareketine devam edecektir. Kısacası, gözlemcinin sadece asansörü referans alarak ve dışarıdaki Dünya'yı düşünmeden yaptığı gözlemler, sanki asansör dış uzaydaymış izlenimini uyandıracaktır. (Dünya gibi bütün büyük gökcisimlerinden uzaktaki yerlere dış uzay denecektir) (Şekil 1.1 – 1.2).



Şekil 1.1 Boş uzay içinde sabit ivme ile hareket eden bir kapalı kutu içerisindeki gözlemci (Kangal 2008)



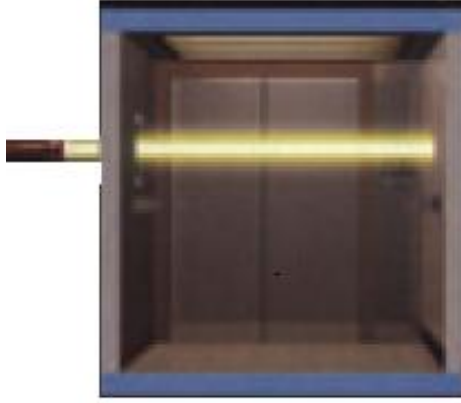
Şekil 1.2 Düzgün kütle çekim alanındaki kapalı kutu içerisindeki gözlemci (Kangal 2008)

Yukarıdaki şekillerde yer alan gözlemci, Dünya’da mı yoksa dış uzayda yol alan sabit ivmeli bir rokette mi olduğunu anlayamayacaktır.

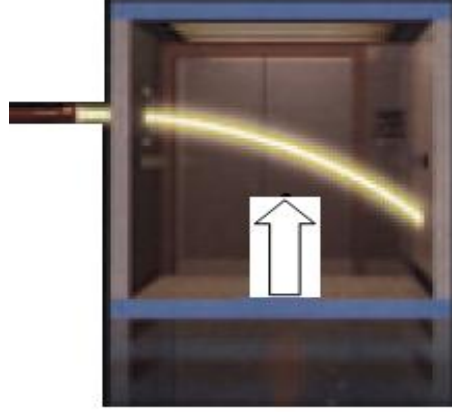
Eğer bütün cisimlerin eylemsizlik ve çekim kütleleri eşit ise, o zaman asansördeki gözlemci sadece cisimlerin hareketine bakarak düşen bir asansörde mi, yoksa dış uzayda mı olduğunu anlayacaktır.

Yeryüzünde serbest bırakılan her cisim düşmektedir. Peki ya ışıpta benzer bir olay gözlenir mi? Işığın hızı sabit olduğu için, hızında bir değişme beklenmemektedir. Ancak, yolundan sapmasını, bir doğru boyunca ilerleme yerine bir eğri çizmesini bekleyebiliriz. Örnek olarak, yatay doğrultuda bir ışık ışınının üretildiği varsayılabilir. Bundan sonra ne olacağını belirlemek için hemen ivmeli rokette ne olacağına bakılabilir.

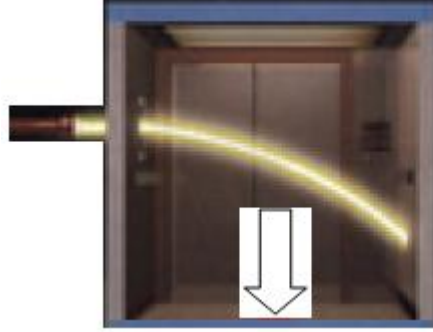
Roketin ilk anda duruyor olduğu ve bu anda odanın duvarlarının birinden yatay yönde bir ışık ışınının girdiği düşünülebilir. Işık karşı duvara ulaştığında, ivmeli roket yukarıya doğru bir miktar yol almış olacaktır. Bu nedenle ışık daha alt düzeyde bir noktaya çarpacaktır. O halde bu soruya cevap evet, ışık, kütle çekim etkisi altında yolundan sapacaktır.



Şekil 1.3 Uzayda sabit duran bir asansör (Turgut 2005)



Şekil 1.4 Uzayda ivmelenen bir asansör (Turgut 2005)



Şekil 1.5 Dünya’da sabit duran bir asansör (Turgut 2005)

Yukarıdaki şekillerden, şekil 1.3’de uzayda sabit duran bir asansöre giren ışığın doğru bir yol izleyeceği gösterilmiştir. Eğer asansör Dünya’da düşseydi gözlemlenecek olan şekil yine şekil 1.3 olacaktır. Şekil 1.4’de uzayda ivmelenen bir asansördeki gözlemcinin içeriye giren ışığın karşı duvara aşağıdaki bir seviyede çarptığını göreceği gösterilmiştir. Şekil 1.5’de ise Dünya’da sabit duran bir asansörde içeri giren ışığın, ivmeli asansördekine benzer davranacağı gösterilmiştir. Einstein buradan yerçekiminin ışığı yolundan saptıracağı sonucunu çıkarmıştır.

Işık o kadar hızlı yol alır ki, Dünya’nın çekim etkisi altında yolundan sapması fark edilmeyecek kadar küçük olur. Sapma ancak Güneş gibi büyük kütleli gök cisimleri için ölçülebilir değerlere ulaşır. Güneş için bile, sapma açısı bir derecenin 2000’de biri kadardır, fakat yine de ölçülebilir.

Bir grup bilim adamı, Einstein'ın bu öngörüsünü sınamak ve diğer yıldızlardan gelen ışığın Güneş'in yakınından geçerken ne kadar saptığını ölçmek için 1919 yılındaki güneş tutulmasını bir fırsat olarak kullanmışlardır. Yapılan ölçümler, kabaca da olsa, Einstein'ın öngörüsünü desteklemiştir. Bugün yapılan modern ölçümlerde sapmayı belirlemek için Güneş tutulmasını beklemeye gerek yoktur. Yüksek çözünürlüklü radyo antenleri, kuasarlardan gelen radyo dalgalarının görelilik kuramına uygun şekilde Güneş'in yakınından geçerken saptığını tespit edebilmektedir (Turgut 2005).

2. MATEMATİKSEL HAZIRLIK

2.1 Vektör uzayı

$\mathbb{R}^n$ 'in herhangi bir ögesi gerçel sayıların $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde sıralı n-lilerden oluşmaktadır. Bunlara vektörler olarak bakılabilir.

Tanım: ($\mathbb{R}^n$ de toplama ve çıkarma)

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ noktaları ve $\alpha \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun. x ile y'nin toplamı;

- i) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ şeklinde ve bir skaler ile bir vektörün çarpımı da,
- ii) $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ şeklinde tanımlanır. Bu işleme göre $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır. Bu sonuç ispatsız olarak aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem: ($\mathbb{R}^n$ vektör uzayı)

$\mathbb{R}^n$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemi yukarıdaki tanım ile tanımlansın, her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdakiler doğrudur:

- i) ($\mathbb{R}^n, +$) bir değişmeli gruptur. Yani;

(a) $(x + y) \in \mathbb{R}^n$

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(c) $x + y = y + x$

(d) $x + 0 = 0 + x$; burada $0 = (0, 0, \dots, 0)$ dır.

- ii) Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skaleri için;

(a) $\alpha x \in \mathbb{R}^n$

(b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$$(c) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(d) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(e) 1x = x$$

şartları sağlanmalıdır.

2.2 Uzay – Zaman

Herhangi bir olay düşünelim. Bu olayın oluş zamanı, Newton Mekaniğini destekleyen, özdeş ve ayarlanmış saatler kullanan tüm gözlemciler için aynıdır. Bu zamana t diyelim. Gözlemciler arasında fark eden, yalnızca olayın olduğu konumun farklı gözlemcilere göre olan koordinatlarıdır. Gözlemciler, buldukları koordinat değerlerini birbirine;

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad (2.1)$$

Galileo dönüşümlerini kullanarak çevirebileceklerini biliyorlar. Bunu söylerken tüm gözlemcilerin kullandıkları koordinat sistemlerinin aynı eksen doğrultularının birbirine paralel olduğu düşünülebilir. Söz konusu tüm gözlemciler için oluş zamanının aynı kalması nedeniyle, her t anında tüm gözlemciler için olası tüm (x, y, z) takımlarının kümesi olayı karakterize etmeye yeterlidir. Olası tüm (x, y, z) takımlarının kümesi ise 3-boyutlu fiziksel uzayı oluşturmaktadır. Yani Newton Mekaniğini destekleyen gözlemcilerin tümünün her andaki anlık 3-boyutlu uzayları fiziksel uzay ile çakışmaktadır. Bu nedenle, Newton Mekaniği söz konusu olunca, mekanik yasalarına öncülük eden (bu yasaların içinde yazıldığı) matematiksel uzay olarak 3-boyutlu konum uzayının, yani fiziksel uzayın kullanılması yeterli olacaktır.

Şimdi duruma, Özel Görelilik Teorisini destekleyen gözlemciler açısından bakalım. Söz konusu olayın her gözlemciye göre, hem oluş zamanı hem de olayın olduğu konumun koordinatları farklıdır. Bu nedenle, her gözlemci bir olayı $(ct; x, y, z)$ takımı ile belirlemek zorundadır. Aynı olay için tüm gözlemcilerin tanımladıkları $(ct; x, y, z)$ takımları birbirinden farklıdır. Üstelik bu takımlar birbirine Lorentz dönüşümleri ile bağlıdır. Yani bir gözlemciye göre olan konum koordinatlarının içinde bir başka gözlemcinin zaman koordinatı olduğu gibi, ilk gözlemciye göre olan zaman

koordinatının içinde de öteki gözlemciye göre olan konum koordinatları yer almaktadır. Buradan şu sonuç çıkarılabilir: 3-boyutlu konum uzayı, Özel Görelilik Teorisini destekleyen gözlemcilerin yasalarına öncülük eden matematiksel uzay olma özelliğini taşıyamamaktadır. Bu gözlemcilerin yasalarına öncülük eden matematiksel uzay, olası tüm $(ct; x, y, z)$ takımını belirlediğine göre, söz konusu uzay, olası tüm olayların topluluğu üzerine kurulmalıdır. Sonuçta, Özel Görelilik Teorisinin yasalarının matematiksel ifadelerinin içinde yazılacağı matematiksel uzay 4-boyutlu olmak durumundadır.

Özel Görelilik Teorisinin matematiksel uzayı olarak, olası tüm olayların topluluğu üzerine oturan uzayın kullanılması gerektiği fikri, ilk defa 1908 yılında Minkowski tarafından ortaya atılmıştır.

Farklı iki (S) ve (S') gözlemcisine göre herhangi iki olayı karakterize eden takımlar sırasıyla; $(ct_1; x_1, y_1, z_1)$, $(ct_2; x_2, y_2, z_2)$ ve $(ct'_1; x'_1, y'_1, z'_1)$, $(ct'_2; x'_2, y'_2, z'_2)$ olarak alınsın. İki takımın toplamını takımların karşılıklı elemanlarının oluşturduğu takım; bir takımın bir sayı ile çarpımını da takımın elemanlarının sayı ile çarpımı alınarak oluşturulan takım şeklinde tanımladığımızda, söz konusu kümenin reel bir lineer uzay olduğu kolaylıkla söylenebilir. Bir (S) gözlemcisi bu lineer uzay içinde $(ct_1; x_1, y_1, z_1)$ ve $(ct_2; x_2, y_2, z_2)$ elemanları arasında;

$$(ct_1; x_1, y_1, z_1) \cdot (ct_2; x_2, y_2, z_2) \equiv c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \quad (2.2)$$

şeklinde bir ikili işlem tanımlanabilir. Bu ikili işlem bir iç çarpım tanımlamaktadır. Ayrıca bu iç çarpım;

$$(ct_1; x_1, y_1, z_1) \cdot (ct_2; x_2, y_2, z_2) = (ct'_1; x'_1, y'_1, z'_1) \cdot (ct'_2; x'_2, y'_2, z'_2) \quad (2.3)$$

özelliğine sahiptir. Yani; tüm gözlemciler kendi takımları arasında aynı tanımlı yapabilirler ve üstelik elde edilen sayısal sonuçlarda aynı olur. Bir gözlemci, iç çarpımı kullanarak kendisine göre olan; $(ct_1; x_1, y_1, z_1)$ ve $(ct_2; x_2, y_2, z_2)$ olayları arasındaki uzaklığı tanımlayabilir. Bu,

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (2.4)$$

büyükliğünün kare köküdür. Bu ifade,

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

şeklinde yazılabilir. Yani; hesaplanan bu büyüklük gözlemciden bağımsızdır, yani değeri tüm gözlemciler için aynıdır. Bu büyüklük, bu anlamda, salt bir büyüklük veya invariant (değişmez) bir büyüklüktür. Bu büyüklüğün karekökü iki olay arasındaki salt uzay-zaman uzaklığı olarak isimlendirilir, yani iki olay arasındaki salt uzay zaman aralığı;

$$\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (2.5)$$

şeklinde ve değeri gözlemciden bağımsızdır.

Olayların birbirine sonsuz yakın olması durumunda salt uzay-zaman uzaklığının karesi;

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.6)$$

şeklini alır. Bundan böyle bu büyüklük kısaca ds^2 ile gösterilecektir ve ds büyüklüğüne uzay-zaman yay elemanı denilecektir:

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.7)$$

Özel Görelilik yasalarına öncülük eden matematiksel yapı L^4 Lorentz manifoldudur. Bu manifold uzay-zaman olarak bilinir (Rızaoğlu 2011).

2.3 Vektör Analizi

2.3.1 Bir vektörün tanımı

Öklid geometrisinden bilinen vektör kavramlarından yararlanarak, bir vektör, bir koordinat dönüşümü altında bileşenleri koordinatlar gibi dönüşen nicelikler biçiminde tanımlanabilir.

Tipik bir vektör, bileşenleri koordinatlar farklarına eşit olan, bir olaydan bir başka olayı işaret eden bir yerdeğiştirme vektörüdür:

$$\Delta\vec{x} \xrightarrow{O} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (2.8)$$

Burada, x 'in üzerindeki 'ok işareti' x 'in bir vektör olduğunu göstermektedir. $\Delta\vec{x}$ 'den sonraki 'ok işareti' vektörün bileşenlerini ve bu okun altındaki O, bu bileşenlerin 'O' çerçevesindeki bileşenler olduğu anlamına gelmektedir. Bileşenler daima (t, x, y, z) veya (x^0, x^1, x^2, x^3) biçiminde önce zaman bileşeni sonra uzay bileşenleri biçiminde sıralanırlar.

Yerdeğiştirme vektörünün birçok durumda daha kullanışlı bir gösterimi şöyledir;

$$\Delta\vec{x} \xrightarrow{O} \{\Delta x^\alpha\} \quad (2.9)$$

Burada $\{\Delta x^\alpha\}$ ile $\{\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3\}$ koordinatlarının kümesi anlaşılmaktadır. Benzer olarak, $\bar{O}$ çerçevesi için şu gösterim yazılabilir;

$$\Delta\vec{x} \xrightarrow{\bar{O}} \{\Delta x^{\bar{\alpha}}\} \quad (2.10)$$

Burada, yeni koordinatları göstermek için, koordinat indisi üzerine bir çizgi koyulmuştur. Buna göre, $\Delta\vec{x}$ vektörü aynıdır ancak bu vektörün üslü ve üssüz çerçevelerdeki koordinat bileşenleri birbirinden farklıdır, yani koordinat çerçevesini değiştirince sadece bileşenler değişir.

Her bir $\bar{\alpha}$ değeri için Lorentz dönüşümüne göre koordinat dönüşümleri aşağıdaki biçimde ifade edilebilir,

$$\Delta x^{\bar{\alpha}} = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}} \Delta x^{\beta} ; \quad \bar{\alpha} = \{0, 1, 2, 3\} \quad (2.11)$$

Burada $\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}$ Lorentz dönüşüm matrisini göstermektedir. Lorentz dönüşüm matrisi;

$$\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Bundan sonraki işlemlerde kolaylık sağlamak üzere Einstein toplama kuralı tanıtılabilir: bir ifade de bir indis bir üst etiket olarak kullanılıyorken aynı ifade de aynı indis bir alt etiket olarak da kullanılıyorsa, indisin alabileceği tüm değerler üzerinden toplam vardır.

Örnek: $A_{\alpha}B^{\alpha}$ ve $T^{\alpha}E_{\gamma\alpha}$ ifadeleri şu ifadelerin Einstein toplam kuralı ile kısa yazılışıdır:

$$\sum_{\alpha=0}^3 A_{\alpha}B^{\alpha} ; \sum_{\alpha=0}^3 T^{\alpha}E_{\gamma\alpha}$$

(2.11) denklemi ile verilen Lorentz dönüşümü ifadesi Einstein toplam-kuralı kullanılarak aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$\Delta x^{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}} \Delta x^{\beta} \quad (2.13)$$

Bu eşitlik aşağıdaki ifadeye özdeş olarak eşittir,

$$\Delta x^{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\gamma}^{\bar{\alpha}} \Delta x^{\gamma} \quad (2.14)$$

Bu indisli gösterimlerde, tanım olarak üzerinden toplam alınan tekrarlı indislere sağır (dummy) indis, üzerinden toplam alınmayan indislere ise serbest (free) indis adı verilir. Örneğin; (2.13) denkleminde $\bar{\alpha}$ serbest indistir ve β ise sağır indistir.

Burada dikkat edilmesi gereken, bir α sağır indisi β , γ gibi Yunan harfleri ile yeniden etiketlenebilir ancak i, j gibi bir Latin harfi ile yeniden etiketlenemez:

$\alpha, \beta = \{0, 1, 2, 3\}$ ve $i, j = \{1, 2, 3\}$ şeklindedir.

Buna göre aşağıdaki ifadeler birbirinden farklıdır,

$$\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}} \Delta x^{\beta} \neq \Lambda_i^{\bar{\alpha}} \Delta x^i \quad (2.15)$$

Aşağıdaki ifade yukarıda dikkat çekilen noktayı açıklamaktadır;

$$\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}} \Delta x^{\beta} = \Lambda_0^{\bar{\alpha}} \Delta x^0 + \Lambda_i^{\bar{\alpha}} \Delta x^i \quad (2.16)$$

Yerdeğiştirme vektörünün dışında genel bir dörtlü-vektör çerçeveye bağlı olarak yazılabilir. Örneğin; O çerçevesindeki bir $\vec{A}$ ifadesi şöyle ifade edilebilir;

$$\vec{A} \xrightarrow{O} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^{\alpha}\} \quad (2.17)$$

Bu ifadenin bir dörtlü vektör olması için bileşenlerinin Lorentz dönüşümüne göre koordinatlarla aynı biçimde dönüşmesi ve aşağıdaki koşulu sağlaması gerekir,

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}} A^{\beta} \quad (2.18)$$

Bir dörtlü-vektörün sağlaması gereken vektörlerin toplanması ve skalerle çarpma için kurallar, Öklid uzayındaki vektörlerin sağlaması gereken koşullarla aynıdır,

$$\vec{A} + \vec{B} \xrightarrow{O} (A^0 + B^0, A^1 + B^1, A^2 + B^2, A^3 + B^3) \quad (2.19)$$

$$\mu \vec{A} \xrightarrow{O} (\mu A^0, \mu A^1, \mu A^2, \mu A^3) \quad (2.20)$$

2.4 Vektör Cebri

2.4.1 Baz vektörleri

Herhangi bir O çerçevesinde vektörlerle ilgili hesap yapmak için o çerçeveye ilişkin dört özel vektör olarak baz vektörlerini tanımlamak gerekir:

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &\xrightarrow{O} (1, 0, 0, 0) \\ \vec{e}_1 &\xrightarrow{O} (0, 1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 &\xrightarrow{O} (0, 0, 1, 0) \\ \vec{e}_3 &\xrightarrow{O} (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bu ifadeler O çerçevesinin baz vektörlerini tanımlamaktadır. Benzer olarak, $\bar{O}$ çerçevesinin baz vektörleri de şöyle tanımlanır,

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 &\xrightarrow{\bar{O}} (1, 0, 0, 0) \\ \vec{e}_1 &\xrightarrow{\bar{O}} (0, 1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 &\xrightarrow{\bar{O}} (0, 0, 1, 0) \\ \vec{e}_3 &\xrightarrow{\bar{O}} (0, 0, 0, 1)\end{aligned}\tag{2.22}$$

Burada dikkat etmemiz gereken, genellikle $\vec{e}_0 \neq \vec{e}_0$ şeklinde olduğudur, çünkü bu baz vektörleri farklı çerçevelerde baz vektörleridir. (2.21) denklemindeki tanıma eşdeğer olarak baz vektörleri aşağıdaki biçimde de tanımlanabilirler,

$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{2.23}$$

Buna göre, herhangi bir $\vec{A}$ aşağıdaki biçimde baz vektörleri cinsinden ifade edilebilir,

$$\vec{A} \xrightarrow{O} (A^0, A^1, A^2, A^3) \tag{2.24}$$

$$\vec{A} = A^0 \vec{e}_0 + A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3 \tag{2.25}$$

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha \tag{2.26}$$

2.4.2 Baz vektörlerin dönüşümü

(2.26) denklemine benzer bir biçimde yol izlenerek herhangi bir $\vec{A}$ dörtlü-vektörü, O çerçevesinden farklı herhangi bir $\bar{O}$ çerçevesinin baz vektörleri cinsinden de ifade edilebilir:

$$\vec{A} = A^{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}} \tag{2.27}$$

Bu ifadedeki dört vektör $A^{\bar{0}} \vec{e}_{\bar{0}}$, $A^{\bar{1}} \vec{e}_{\bar{1}}$, $A^{\bar{2}} \vec{e}_{\bar{2}}$, $A^{\bar{3}} \vec{e}_{\bar{3}}$ (2.26) deki dört vektörden farklıdır. Çünkü bu vektörler artık $\bar{O}$ çerçevesinin baz vektörleri ile paralel değildirler.

$A^\alpha \vec{e}_\alpha$ ve $A^{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}}$ vektörleri birbirine sadece sağır indisler yeniden etiketlenerek dönüşemezler, çünkü etiketler farklı çerçevelerin etiketleridir. Buna karşılık, vektörün tanımını gereği aşağıdaki ifade sağlanmalıdır:

$$A^\alpha \vec{e}_\alpha = A^{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}} \quad (2.28)$$

(2.28) denklemi baz vektörlerinin dönüşüm kuralını belirlediğinden oldukça önemlidir. Buna göre, (2.18) ve (2.28) denklemlerinden şu ifade bulunur:

$$\Lambda_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} A^\beta \vec{e}_{\bar{\alpha}} = A^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (2.29)$$

Bu ifadenin sol tarafındaki toplamaların sırası değiştirilebilir ve $\Lambda_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}$ ile A^β da sadece sayılar olduklarından sıraları değiştirilebilir,

$$A^\beta \Lambda_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}} = A^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (2.30)$$

Bu ifade, $\vec{A}$ keyfi bir vektör olduğundan tüm A^α bileşenleri kümesi için sağlanmalıdır. Buna göre,

$$A^\alpha (\Lambda_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \vec{e}_{\bar{\beta}} - \vec{e}_\alpha) = 0 \quad (2.31)$$

eşitliğinden,

$$\Lambda_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \vec{e}_{\bar{\beta}} - \vec{e}_\alpha = 0 \quad (2.32)$$

eşitliği sağlanır ve baz vektörlerinin dönüşüm kuralı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \vec{e}_{\bar{\beta}} \quad (2.33)$$

Bir sonuç olarak, vektörün bileşenlerinin dönüşümü (2.18) denklemi ile baz vektörlerinin dönüşümü (2.33) denklemi birbirinden farklıdır.

2.4.3 Skaler çarpım

Bir vektörün büyüklüğü

Uzay-zaman aralığının tanımı ile benzerlik kurularak herhangi bir vektörün büyüklüğü aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\vec{A}^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \quad (2.34)$$

Bir vektörün bileşenleri koordinatlar gibi dönüştüğünden tanımdan aşağıdaki özellik garanti edilmiş olur,

$$-(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 = -(A^{\bar{0}})^2 + (A^{\bar{1}})^2 + (A^{\bar{2}})^2 + (A^{\bar{3}})^2 \quad (2.35)$$

Bir vektörün büyüklüğü çerçeveden bağımsız bir sayıdır, yani Lorentz dönüşümü altında bir skalerdir.

Vektörün büyüklüğü, Öklid geometrisinden farklı olarak, pozitif olmak zorunda değildir. Buna göre olayların sınıflandırılmasına benzer olarak vektörlerin bir sınıflandırılması yapılabilir.

- . $\vec{A}^2 > 0$ ise $\vec{A}$ uzay türü bir vektör,
- . $\vec{A}^2 < 0$ ise $\vec{A}$ zaman türü bir vektör,
- . $\vec{A}^2 = 0$ ise $\vec{A}$ ışık türü bir vektördür.

Burada dikkat edilmesi gereken, $\vec{A}^2 = 0$ ise $\vec{A}$ vektörünün sıfır vektörü olması zorunlu değildir. Sadece $\vec{A}^2$ 'nin pozitif-tanımlı olduğu uzaylarda her bir bileşen tüm α 'lar için $A^\alpha = 0$ olmalıdır.

İki vektörün skaler çarpımı

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörün skaler çarpımı bir O çerçevesinde aşağıdaki biçimde tanımlanır,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 \quad (2.36)$$

Bu sayı tüm çerçevelerde aynıdır.

Bir vektörün boyu, vektörün kendisi ile skaler çarpımına eşittir, $\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2$ ve bu değer bir invaryanttır. Bununla beraber skaler çarpımda bir çerçeve invaryanttır.

Bir vektörün başka bir vektörle skaler çarpımı sıfırsa bu vektörlere birbirine ortogonal vektörler denir: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ise $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ ortogonaldır.

2.5 Tensör Analizi

Bu kısımda, özel görelilik teorisinin matematik yapısında önemli bir role sahip olan tensör analizi incelenecektir.

2.5.1 Metrik tensör

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörün bir O çerçevesinin $\{\vec{e}_\alpha\}$ bazındaki gösterimi;

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (2.37)$$

$$\vec{B} = B^\beta \vec{e}_\beta \quad (2.38)$$

Bu iki vektörün skaler çarpımı aşağıdaki gibidir,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A^\alpha \vec{e}_\alpha) \cdot (B^\beta \vec{e}_\beta) \quad (2.39)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) \quad (2.40)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta} \quad (2.41)$$

Burada, $\eta_{\alpha\beta}$ sayılarına metrik tensörün bileşenleri adı verilir.

2.5.2 Tensörlerin tanımı

$\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ tipi bir tensör, N tane vektörü bir reel sayıya karşılık getiren, her bir argümanı için lineer olan (çoklu-linear) bir fonksiyondur:

$$T^{(0,N)} : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_N \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.42)$$

Bir örnek olarak, (2.41) denklemi ile ifade edilen skaler (nokta) çarpım, $(.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tipi bir tensöre örnektir. Herhangi $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektör için skaler çarpımda birinci argümana göre (soldan) lineerlik:

$$(\alpha \vec{A}).\vec{B} = \alpha(\vec{A}.\vec{B}) ; \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.43)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \quad (2.44)$$

İkinci argümana göre (sağdan) lineerlik de aşağıdaki biçimde sağlanır:

$$\vec{A}(\beta \vec{B}) = \beta(\vec{A}.\vec{B}) ; \beta \in \mathbb{R} \quad (2.45)$$

$$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \quad (2.46)$$

Nokta çarpımının bu ifadesi özel bir tensör tanımlamaktadır. Nokta (skaler) çarpıma karşılık gelen $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tensörüne metrik tensör adı verilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$g(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A}.\vec{B} \quad (2.47)$$

Buna göre, g iki argümanına göre de lineer olan (bilineer) bir fonksiyondur. Sağdaki argümana göre lineerlik $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ vektörleri ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları için sağlanır,

$$g(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}, \vec{C}) = \alpha g(\vec{A}, \vec{C}) + \beta g(\vec{B}, \vec{C}) \quad (2.48)$$

Benzer olarak soldan argüman içinde lineerlik sağlanır,

$$g(\vec{A}, \alpha\vec{B} + \beta\vec{C}) = \alpha g(\vec{A}, \vec{B}) + \beta g(\vec{A}, \vec{C}) \quad (2.49)$$

2.5.3 Bir tensörün bileşenleri

Bir tensörün bileşenleri çerçeveye bağlı olarak ifade edilebilir. $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ tipi bir tensörün bir

O çerçevesindeki bileşenleri, argümanları O çerçevesinin baz vektörleri $\{\vec{e}_\alpha\}$ olduğunda, bu baz vektörleri tensörün değerleridir. Buna göre, bir tensörün bileşenleri çerçeve-bağımlı sayılardır. Örneğin, metrik tensörün bileşenleri aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.50)$$

Buna göre, $\eta_{\alpha\beta}$ matris elemanları, bu baz üzerinde g Minkowski metriğinin bileşenlerini ifade etmektedir.

2.5.4 (0,N)-tipi tensörler : 1-formlar

$\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ tipi bir tensöre bir kovektör, kontravektör, dual vektör veya bir-form adı verilir.

1-formların genel özellikleri

Keyfi bir 1-form $\tilde{p}$ olsun; " $\sim$ " işareti 1-formları ifade etmektedir. $\tilde{p}$ bir vektör üzerine etki ettiğinde bir reel sayı verir, yani $\tilde{p}$ 'nın argümanı bir vektördür. $\tilde{q}$ başka bir 1-form olsun. O zaman şu ifade tanımlanabilir:

$$(a) \tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}$$

$$\tilde{r} = \alpha \tilde{p}$$

1-formların $\vec{A}$ üzerindeki değeri şöyledir,

$$(b) \tilde{s}(\vec{A}) = \tilde{p}(\vec{A}) + \tilde{q}(\vec{A})$$

$$\tilde{r}(\vec{A}) = \alpha \tilde{p}(\vec{A})$$

Bu kurallarla birlikte, tüm 1-formların kümesi bir vektör uzayı için aksiyomları sağlarlar. 1-formların oluşturduğu vektör uzayına dual vektör uzayı adı verilir.

Vektörler için önemli bir nokta, vektörlerin herhangi bir çerçevede bileşenlerinin ifade edilmesi ve bileşenlerin farklı çerçevelerdeki ifadeleri için dönüşümleridir. Dual vektör uzayının elemanları olan $\tilde{p}$ lerinde bileşenlerini ifade etmek gerekir. $\tilde{p}$ 'nin bir çerçevedeki bileşenleri p_α olsun (vektörün bileşenlerinden farklı olarak 1-formun bileşenleri alt indis olarak gösterilir.):

$$p_\alpha \equiv \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \quad (2.51)$$

Anlaşma olarak bir tek alt indisli bileşen bir 1-formun bileşeni olarak kabul edilir; üst indis ise bir vektör bileşenidir. Bileşenler cinsinden aşağıdaki ifadeler yazılabilir,

$$\tilde{p}(\vec{A}) = \tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) \quad (2.52)$$

$$\tilde{p}(\vec{A}) = A^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \quad (2.53)$$

$$\tilde{p}(\vec{A}) = A^\alpha p_\alpha \quad (2.54)$$

Böylece, $\tilde{p}(\vec{A}) = A^0 p_0 + A^1 p_1 + A^2 p_2 + A^3 p_3$ bulunur.

Başka bir $\bar{O}$ çerçevesinin baz vektörleri $\{\vec{e}_{\bar{\beta}}\}$ olmak üzere $\tilde{p}$ 'nin bu bazdaki bileşenleri şöyledir:

$$\begin{aligned} p_{\bar{\beta}} &\equiv \tilde{p}(\vec{e}_{\bar{\beta}}) = \tilde{p}(\Lambda_{\bar{\beta}}^\alpha \vec{e}_\alpha) \\ &= \Lambda_{\bar{\beta}}^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = \Lambda_{\bar{\beta}}^\alpha p_\alpha \end{aligned} \quad (2.55)$$

Son ifade $\vec{e}_{\bar{\beta}} = \Lambda_{\bar{\beta}}^\alpha \vec{e}_\alpha$ ile karşılaştırıldığında, 1-formun bileşenlerinin Lorentz dönüşümü altında baz vektörleri ile tamamen aynı biçimde (kovaryant) dönüştüğü görülmektedir.

Buna karşın, 1-formun bileşenleri vektörlerin bileşenleri ile ‘zıt’ biçimde dönüşmektedir. (Zıt dönüşüm ile dönüşüm matrisinin tersi anlaşılmaktadır.)

1-form ve vektör bileşenlerinin Lorentz dönüşümü altında birbirinin tersi biçimde dönüşüm özellikleri dikkate alındığında, $\tilde{p}(\vec{A})$ değerinin çerçeveden bağımsız bir invaryant olduğu söylenebilir.

İspat: $\tilde{p}(\vec{A})$ değerinin çerçeveden bağımsız bir invaryant olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
 A^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} &= (\Lambda_{\mu}^{\bar{\alpha}} A^{\mu})(\Lambda_{\bar{\alpha}}^{\nu} p_{\nu}) \\
 &= \Lambda_{\mu}^{\bar{\alpha}} \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\nu} A^{\mu} p_{\nu} \\
 &= \delta_{\mu}^{\nu} A^{\mu} p_{\nu} \\
 &= A^{\mu} p_{\mu}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

1-formların bileşenlerinin vektörlerin bileşenlerine göre bu ters dönüşüm özelliği, ‘dual vektör uzayı’ ifadesindeki ‘dual’ kelimesini doğrulamaktadır.

Baz 1-formlar : dual baz

Tüm 1-formların kümesi bir vektör uzayı oluşturduğundan dört tane birbirinden lineer bağımsız 1-formların herhangi bir kümesi bu dual vektör uzayı için bir baz oluşturur.

1-formlar için baz kümesi $\{\bar{\omega}^{\alpha}, \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ ile gösterilsin, bu baza $\{\bar{e}_{\alpha}\}$ vektör bazına dual baz adı verilir. Buna göre, bir $\tilde{p}$ 1-formu, bu $\bar{\omega}^{\alpha}$ dual bazı cinsinden şu şekilde ifade edilebilir,

$$\tilde{p} = p_{\alpha} \bar{\omega}^{\alpha} \tag{2.57}$$

$\bar{\omega}^{\alpha}$ ifadesindeki üst indis toplam kuralını sağlayacak biçimdedir:

$$\tilde{p} = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha = p_0 \tilde{\omega}^0 + p_1 \tilde{\omega}^1 + p_2 \tilde{\omega}^2 + p_3 \tilde{\omega}^3$$

Buna göre, tıpkı $\vec{e}_\alpha$ baz vektörleri dört farklı vektör olduğu gibi $\tilde{\omega}^\alpha$ baz 1-formları da dört farklı 1-formdur. Herhangi bir $\vec{A}$ için 1-formun baz 1-formlar cinsinden ifadesine göre şu ifade bulunur,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\vec{A}) &= p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{A}) \\ &= p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(A^\beta \vec{e}_\beta) \\ &= p_\alpha A^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$\tilde{p}(\vec{A}) = p_\alpha A^\alpha$ olduğundan, aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır.

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha \quad (2.59)$$

Bu eşitlik baz 1-formun α -bileşenini tanımlamaktadır. Buna göre, bir O çerçevesinde 1-form bazının bileşenleri şu şekilde ifade edilir,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^0 &\xrightarrow{O} (1, 0, 0, 0) \\ \tilde{\omega}^1 &\xrightarrow{O} (0, 1, 0, 0) \\ \tilde{\omega}^2 &\xrightarrow{O} (0, 0, 1, 0) \\ \tilde{\omega}^3 &\xrightarrow{O} (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Burada vektörlerle 1-formlar arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilebilir: 1-formlar 1×4 lü satır matrisleri ile ifade edilirse vektörler 4×1 li sütun matrislerle ifade edilirler ve bu şekilde 1-formların vektörlere etkisi daima reel sayılar verir.

$\tilde{\omega}^\alpha$ 1-form bazının baz dönüşümü

Her bir farklı çerçeve $\tilde{\omega}^\alpha$ baz kümesine sahiptir. İki farklı çerçevenin baz 1-formları arasındaki ilişki, vektör bazına benzer olarak, Lorentz dönüşümü yardımı ile elde edilir,

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} \tilde{\omega}^{\beta} \quad (2.61)$$

Bu dönüşüm kuralı, vektör bileşenlerinin dönüşüm kuralı ile aynı 1-form bileşenlerinin dönüşüm kuralı ile zıttır.

(0,2)-tipi tensörler

(0,2)-tipi tensörler argümanında iki vektör olan tensörlerdir. Daha önce gösterilen metrik tensörü bu türden bir tensördür. Bir (0,2)-tipi tensörün en basit biçimi iki tane 1-formun dış (tensör) çarpımı ile elde edilir. Buna göre, $\tilde{p}$ ve $\tilde{q}$ herhangi iki 1-form ise o zaman $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ bir (0,2)-tensördür ve bu tensörün $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektör üzerindeki değeri;

$$\tilde{p} \otimes \tilde{q}(\vec{A}, \vec{B}) = \tilde{p}(\vec{A}) \cdot \tilde{q}(\vec{B}) \quad (2.62)$$

Bu ifadeye göre (0,2)-tipi tensörün vektörler üzerindeki değeri bu tensörü oluşturan 1-formların vektörlere etkisi ile ifade edilen sayıların çarpımıdır.

$\otimes$ sembolüne bir dış çarpım veya tensör çarpımı adı verilir. Bu gösterim bir (0,2)-tipi tensörün 1-formların çarpımından nasıl üretildiğini ifade eden biçimsel bir gösterimdir.

$\otimes$ dış çarpımı değişmeli (komütatif) bir çarpım değildir. Yani; $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ ile $\tilde{q} \otimes \tilde{p}$ tensörleri farklı tensörlerdir.

2.5.5 (M,N)-tipi tensörler

Verilen bir $\vec{V}$ dörtlü-vektörü için bir $\tilde{p}$ 1-formu aşağıdaki şekilde bir reel sayıya gönderilebilir,

$$\vec{V}(\tilde{p}) = \tilde{p}(\vec{V}) = p_{\alpha} V^{\alpha} = \langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle \quad (2.63)$$

Böylece vektörler 1-formları reel sayılara gönderen lineer fonksiyonlar olarak kendi başlarına tensör adlandırılmasını alırlar.

$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ tipi tensörler

Vektörlerin 1-formlara etkisi genelleştirilerek; bir $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ tipi tensör M tane 1-formu reel sayılara gönderen bir lineer fonksiyondur. Buna göre bir vektör, bir (1,0)-tensördür.

Örnek: Bir $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ -tensör $\vec{V} \otimes \vec{W}$ biçimindedir, $\tilde{p}$ ve $\tilde{q}$ şeklinde iki herhangi 1-forma etki ettiğinde aşağıdaki sayıyı verir,

$$\vec{V} \otimes \vec{W}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \vec{V}(\tilde{p})\vec{W}(\tilde{q}) \equiv \tilde{p}(\vec{V})\tilde{q}(\vec{W}) = (V^\alpha p_\alpha)(W^\beta q_\beta) \quad (2.64)$$

Buna göre, $\vec{V} \otimes \vec{W}$ tensörünün bileşenleri $V^\alpha W^\beta$ şeklindedir.

$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ tipi tensörler

Tensörlerle ilgili son genelleştirmeler yapılarak; bir $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ tipi tensör M tane 1-formu ve N tane vektörü reel sayılara gönderen bir lineer fonksiyondur.

2.5.6 İndis ‘yükseltme’ ve ‘alçaltma’

Bir (0,2)-tensör olan metrik bir $\vec{V}$ vektörünün bir $\tilde{V}$ 1-formuna karşılık getirdiği gibi bir (M,N)-tensörde bir vektörü (M-1, N+1)-tensöre karşılık getirir. Benzer olarak bu gönderimin tersi de bir (N, M)-tensörü bir (N+1, M-1) tensöre karşılık getirir.

Örnek: $T^{\alpha\beta}_\gamma$ bir (2,1)-tensör olsun. O zaman bu tensörden;

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \eta_{\beta\mu} T^{\alpha\mu}_\gamma \quad (2.65)$$

şeklinde bir (1,2)-tensörü elde edilirse ve benzer olarak,

$$T_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma} \equiv \eta_{\alpha\mu} T^{\mu\beta}{}_{\gamma} \quad (2.66)$$

başka bir (1,2)-tensörü elde edilir. Buna karşın,

$$T^{\alpha\beta\gamma} \equiv \eta^{\gamma\mu} T^{\alpha\beta}{}_{\mu} \quad (2.67)$$

bir (3,0)-tensörün bileşenlerini ifade eder.

Bu işlemlere bir tensörün indislerini yükseltme ve alçaltma işlemleri denir (Schutz 2011, Ozansoy 2012).

2.6 Kovaryant ve Kontravaryant Vektörler

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinat sisteminde $A^1, A^2, \dots, A^n$ gibi n-eleman ve diğer koordinat sistemini de $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ve $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^n$ şeklinde gösterelim.

$$\bar{A}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} A^j \quad ; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.68)$$

veya kısaca,

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} A^j \quad (2.69)$$

dönüşüm denklemleri şeklinde ise buna bir kontravaryant vektör yada rankı (mertebesi) bir olan kontravaryant tensörün bileşenleri denir.

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinat sisteminde $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi n-eleman ve $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ koordinat sisteminde $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ olsun.

$$\bar{A}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} A_j \quad ; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.70)$$

veya kısaca,

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} A_j \quad (2.71)$$

şeklinde ise buna bir kovaryant vektör yada rankı bir olan kovaryant tensörün bileşenleri denir (Sağel 2003).

Herhangi bir tensör alt, üst veya karma indisler yardımıyla gösterilir ve bir tensörde tekrarlanan indisler dışındaki indislerin toplam sayısı o tensörün mertebesini (rankını) verir. Örneğin; T_{ij} , T^{ijk} ve T^{ik}_{jklm} tensörleri sırasıyla ikinci mertebeden kovaryant, üçüncü mertebeden kontravaryant ve dördüncü mertebeden karma tensörler (birinci mertebeden kontravaryant, üçüncü mertebeden kovaryant) olarak adlandırılır ve aynı gösterimler tensörlerin bileşenleri içinde kullanılır (Önem 2011).

2.7 Metrik

Genel görelilik çerçevesini oluşturan dört-boyutlu Riemannsal geometriyi incelemek ve belirgin özelliklerini tespit etmek üzere iki yöntem vardır. Bunlardan biri bu uzayı bir metrik ile donatmak, ötekisi ise vektörlerin paralel ötelenmesi kavramından hareket ederek, uzayın, noktaları arasındaki ilişkisel (afin) özellikleri ortaya koymaktır. Her iki yöntemde çoğu halde aynı formel sonuçları verirler (Özemre 1982).

Uzayın geometrisini belirleyen matematiksel yapıya metrik adı verilir. Bu matematiksel yapı, birbirine çok yakın iki noktanın arasındaki mesafenin karesini bu noktaların koordinat değerlerinin farkları cinsinden veren bir ifadedir. Zaman boyutu söz konusu olduğunda, bazı farklılıklar ortaya çıkar. Uzay-zaman metriği birbirine çok yakın iki nokta için mesafenin karesini değil, uzay-zaman aralığının karesini verir (Semiz 2011).

$\{\eta_{\alpha\beta}\}$ sayıları metriğin bileşenleridir ve $\{\eta^{\alpha\beta}\}$ sayıları ise metriğin tersinin bileşenleridir. $\eta_{\alpha\beta}$ 'nın indislerinden bir tanesi, metriğin tersi kullanılarak şu şekilde yükseltilir,

$$\eta^{\alpha}_{\beta} \equiv \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} \quad (2.72)$$

Bu eşitliğin sağ tarafında birbirinin tersi olan iki matrisin bileşenlerinin çarpımı vardır, buna göre sağ taraf birim matrisin bileşenlerine eşittir. Bir indis yukarıda ve bir indis aşağıda olduğundan bu bir Kronecker deltadır:

$$\eta^\alpha_\beta \equiv \delta^\alpha_\beta \quad (2.73)$$

Buna göre $\eta^{\alpha\beta}$ bir (2,0)-tensörün bileşenleri olarak dikkate alınır, öyle ki bu tensör g metrik tensörü tarafından g^{-1} 'e gönderilir. Buna metrik tensörün 'kontravaryant' bileşenleri, metrik tensörün 'kovaryant' bileşenlerinin tersi olan matrisin elemanlarına eşittir. Uzay-zamanda bu özelliği sağlayan tek tensör metrik tensördür.

Örnek: 3 boyutlu Kartezyen koordinatlarda; $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ şeklinde yazılır. Bunu bir diğer haliyle; $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ şeklinde de yazabiliriz. Burada $i, j = \{1, 2, 3\}$ ve $dx = dx^1$, $dy = dx^2$, $dz = dx^3$ olarak yazılabilir. Küresel koordinatlarda;

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

şeklinde verilir.

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

Burada yukarıdaki ifadeleri kullanarak, uzunluk elemanı;

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

olarak yazılır. Buradan metrik bileşenleri;

$$g_{rr} = 1$$

$$g_{\theta\theta} = r^2$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 ; \alpha \neq \beta \text{ için}$$

şeklinde yazılabilir ve matris formu;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Bir metriğin pozitif ve negatif işaretli değerlerin sayısına metriğin imzası denir. Eğer metrik bir tane eksi işareti içeriyorsa buna Minkowski metriği, çeşitli sayıda eksi ve artı işaretleri varsa metriğe belirsiz, tüm işaretler pozitifse Riemann (Öklid) metriği denir.

2.8 Christoffel Sembolleri

Manifold da farklı iki noktadaki vektörleri yada formları kıyaslama imkanı sunan parametrelere Christoffel sembolleri denir. Öklid uzayında bir vektör paralel kaydırılabilir fakat eğri uzayda bunu yapmak için bir bağlantı katsayısı kullanılır ve bu bağlantı katsayıları Christoffel sembolleridir. Bir genel vektörü aşağıdaki biçimde tanımlayabiliriz:

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (2.74)$$

Bu vektörün x^β bileşenine göre kısmi türevini alalım:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (2.75)$$

Burada esas olan; $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ ifadesinin neye eşit olduğudur. Bu ifadenin eşiti,

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu \quad (2.76)$$

olarak tanımlanır. Burada $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ ifadesine Christoffel sembolleri denir. Buradaki indislerden α türevi alınan baz vektörü, β hangi koordinata göre türev alındığını, μ sonuçta bulunan vektörün bileşenini niteleyen indislerdir.

Örnek: Kutupsal koordinatlarda Christoffel sembollerini türetelim:

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) = 0 \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_r &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \\ &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_\theta &= \frac{\partial}{\partial r} (-r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y) \\ &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -r \cos \theta \vec{e}_x - r \sin \theta \vec{e}_y = -r \vec{e}_r \quad (2.80)$$

(2.77) denkleminin sonucu olarak: $\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^\theta = 0$

(2.78) denkleminin sonucu olarak: $\Gamma_{r\theta}^r = 0, \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$

(2.79) denkleminin sonucu olarak: $\Gamma_{\theta r}^r = 0, \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$

(2.80) denkleminin sonucu olarak: $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0$

Kutupsal koordinatlar için Christoffel sembolleri elde edilmiş olur.

Kovaryant türev

Kovaryant türev bir manifold üzerinde bir koneksiyonla bir diferansiyel operatör yardımıyla çalışmanın ve tanımlamanın bir yöntemidir. Kovaryant türev vektör analizinde yöne göre türevin bir genellemesidir. Geometride koneksiyon kavramı ise bir doğru yada doğru kümesi boyunca veriyi paralel ve uygun bir şekilde taşıma fikrini tanımlar. Modern geometride taşınacak verinin türüne göre belirlenen çeşitli koneksiyon türleri vardır. Bir vektörün kovaryant türevi;

$$V^\alpha_{;\beta} \equiv V^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} V^\mu \quad (2.81)$$

olarak tanımlanır. Bu ifade de $V^\alpha_{,\beta}$ kısmi türevi göstermektedir. Bir 1-formun kovaryant türevi;

$$p_{\alpha;\beta} \equiv p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} p_\mu \quad (2.82)$$

olarak tanımlanır.

Kartezyen koordinatlarda Christoffel sembolleri sıfır olduğundan dolayı, Kartezyen koordinatlarda 1-formların ve vektörlerin kovaryant türevleri kısmi türevlerine eşit olacaktır.

Metriğin kovaryant türevi tüm koordinat sistemlerinde sıfırdır.

İspat: Metriğin kovaryant türevinin tüm koordinat sistemlerinde sıfıra eşit olacağını ispatlayalım:

$\alpha', \beta', \gamma', \dots$ üslü indisleri keyfi bir koordinat sistemini göstermek üzere, bir formlarla vektörler arasında aşağıdaki ifadeyi dikkate alalım.

$$V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'} \quad (2.83)$$

(2.83) ifadesinin her iki tarafının β' ne göre kovaryant türevi alınır;

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu';\beta'} V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}_{;\beta'} \quad (2.84)$$

1-formun keyfi bir koordinat sisteminde kovaryant türevi ile vektörün keyfi bir koordinat sisteminde kovaryant türevi arasındaki ilişki;

$$V_{\alpha';\beta} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}_{;\beta} \quad (2.85)$$

olarak verilir. (2.84) denkleminin sol tarafı, (2.85) denklemine göre düzenlenirse,

$$g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}_{;\beta'} = g_{\alpha'\mu';\beta'} V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}_{;\beta'} \quad (2.86)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.86) eşitliğide, keyfi bir $V^{\mu'}$ vektörü için ancak,

$$g_{\alpha'\mu';\beta'} = 0 \quad (2.87)$$

koşulu ile sağlanır. Buradan da metriğin kovaryant türevinin tüm koordinat sistemlerinde sıfır olduğu görülür.

Christoffel sembollerinin g metrik bileşenlerinin kısmi türevleri cinsinden ifadesi

Bu kısımda Christoffel sembollerinin türetimi için daha pratik bir yol olan, Christoffel sembollerinin metrik bileşenlerin kısmi türevleri cinsinden ifadesi anlatılacaktır.

Metrik bileşeninin kovaryant türevi; metrik bileşenleri, metrik bileşenlerinin kısmi türevi ve Christoffel sembolleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu} \quad (2.88)$$

(2.87) ve (2.88) denklemlerini kullanarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu} = 0 \quad (2.89)$$

(2.89) denklemini kullanılarak her bir indis için metrik bileşenlerinin kısmi türevleri yazılabilir.

$$g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu} \quad (2.90)$$

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} g_{\alpha\nu} \quad (2.91)$$

$$g_{\beta\mu,\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} g_{\beta\nu} \quad (2.92)$$

Yukarıdaki denklem takımlarından (2.92) denkleminin her iki tarafını -1 ile çarparak, üç denklem takımını Christoffel sembollerinin tüm koordinat sistemlerinde geçerli olan simetri özelliği $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$ eşitliği göz önüne alınarak taraf tarafa toplanırsa;

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} g_{\alpha\nu} \quad (2.93)$$

denkleminde ulaşılır. (2.93) denkleminin her iki tarafı 2 ye bölünüp, $g^{\alpha\gamma}$ metrik bileşeni ile $g_{\alpha\nu} g^{\alpha\gamma} = \delta_{\nu}^{\gamma}$ özelliği göz önüne alınarak çarpılırsa,

$$\Gamma_{\mu\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) \quad (2.94)$$

sonucuna ulaşılır. Burada (2.94) ifadesi Christoffel sembollerinin metrik bileşenlerinin kısmi türevleri ile elde edilmesi için gerekli olan eşitliği vermektedir.

Örnekler

1) Kutupsal koordinatlarda Christoffel sembollerini (2.94) ifadesi ile elde edebiliriz:

Kutupsal koordinatlarda birim vektörler,

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (2.95)$$

$$\vec{e}_{\theta} = -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y \quad (2.96)$$

şeklindedir. $g_{\alpha\beta} = g(\vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_{\beta}) = \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta}$ ifadesi yardımı ile metriğin bileşenleri bulunabilir.

Bu bileşenler;

$$g_{rr} = 1 \quad ; \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad ; \quad g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0$$

bulunur. Uzunluk elemanı da $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ olarak yazılacaktır. (2.94) denklemi kullanılarak;

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\alpha} (g_{\alpha r,\theta} + g_{\alpha\theta,r} - g_{r\theta,\alpha})$$

ifadesi yazılır. Bulduğumuz metrik bileşenleri yerine yazılır ve kısmi türevleri alınır,

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) (2r) = \frac{1}{r} = \Gamma_{\theta r}^{\theta}$$

Elde edilen bu sonuç, metrik bileşenleri kullanılmadan hesaplanan Christoffel sembolleri hesabı ile tutarlı bir sonuçtur. Benzer şekilde diğer bileşenlerde; $\Gamma_{rr}^{\theta} = 0$, $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$, $\Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = 0$, $\Gamma_{rr}^r = 0$, $\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0$ olarak elde edilecektir.

2) Silindirik koordinatlarda Christoffel sembollerini (2.94) denklemi yardımı ile elde edelim. Silindirik koordinatlar; $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$ ve konum vektörü $\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{x} + \rho \sin \phi \hat{y} + z \hat{z}$ şeklindedir. Bunlar yardımı ile birim vektörler hesaplanabilir;

$$\vec{e}_{\rho} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$$

$$\vec{e}_{\phi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \hat{x} + \rho \cos \phi \hat{y}$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{z}$$

$g_{\alpha\beta} = g(\vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_{\beta}) = \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta}$ ifadesi yardımı ile metrik bileşenleri bulunacaktır.

$$g_{\rho\rho} = \vec{e}_{\rho} \cdot \vec{e}_{\rho} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

Benzer yolla diğer bileşenler hesaplandığında;

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\phi} & g_{\rho z} \\ g_{\phi\rho} & g_{\phi\phi} & g_{\phi z} \\ g_{z\rho} & g_{z\phi} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.94) ifadesi kullanılarak;

$$\Gamma_{\rho\rho}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\alpha\rho,\rho} + g_{\alpha\rho,\rho} - g_{\rho\rho,\alpha})$$

Yukarıdaki ifade de dikkat etmemiz gereken, α indisidir. Bu indis, katkı gelen terim ρ, ϕ, z den hangisi ise o etiketi alacaktır. Bu da ancak problemi çözerken metrik bileşenleri okunarak belirlenecektir. Parantez içerisindeki son terim olan $g_{\rho\rho}$ bileşeninin kısmi türev ifadesi göz önüne alındığında, bu bileşen değeri 1 e eşittir ve neye göre türevi alınırsa alınsın sonuç hep sıfır çıkacaktır. Diğer terimlere bakıldığında da katkı gelen tek bileşen $\alpha = \rho$ olduğu durum için geçerlidir ve bu bileşen için değerler yazılıp hesaplandığında $\Gamma_{\rho\rho}^{\rho} = 0$ olduğu görülür. Bu yol izlenerek diğer Christoffel sembolleri hesaplanırsa katkı gelen terimler; $\Gamma_{\rho\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} = \frac{1}{\rho}$, $\Gamma_{\phi\phi}^{\rho} = -\rho$ şeklindedir ve diğer tüm terimlerden gelen katkılar sıfır verecektir.

2.9 Jeodezikler

Bir eğri uzayda, bir eğriye teğet vektörün paralel-kaydırılması ile “mümkün olduğunca düz” çizgiler çizilebilir. Bu çizgilere jeodezikler denir. Düz uzayda serbest parçacığın yörüngesi bir doğru olacaktır, bunun eğri uzayda karşılığı jeodeziklerdir ve serbest düşen parçacığın yörüngesini verirler. Jeodezik denklemi;

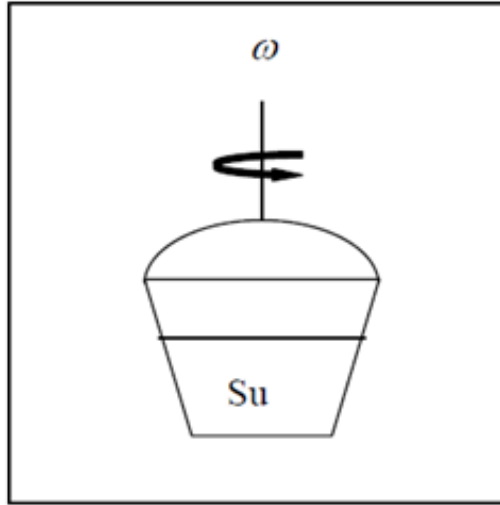
$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = 0 \quad (2.97)$$

olarak verilir. Bir jeodezik eğrisi, uzunluğu ekstramum olan bir eğridir (Schutz 2011, Ozansoy 2012).

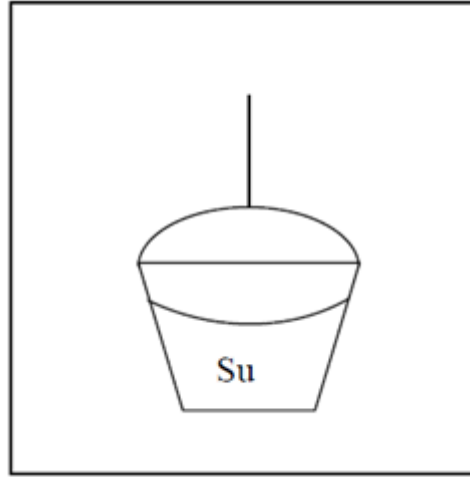
3. MUTLAK UZAY ve MACH İLKESİ

Kütle çekim olgusunu anlama çabası Isaac Newton'la başlayarak, Bishop Berkeley, Ernest Mach ve Albert Einstein'a kadar uzanır. Bu süreçte kütle çekim olgusu sorgulanmıştır ve bu olguyu açıklayan ilkeler, yasalar ortaya konmuştur. Bu ilkeler ve yasalar ortaya konulurken bunları destekleyen düşünce deneyleri ve gerçek deneyler tasarlanmıştır.

Fiziksel büyüklükler gözlem çerçevelerine bağlı olarak değişmektedir. Newton, bu sorunu ortadan kaldırmak için, evrende var olan tüm hareketlerden bağımsız, mutlak bir uzay olduğunu kabul ederek tüm hareketleri açıklamaya çalışmıştır. Newton bu görüşünü desteklemek amacıyla bir kova su deneyini düşünsel olarak tasarlamıştır. Bu düşünce deneyinde bir kova su, kovanın dönme eksenine doğrultusunda ω açısal hızı ile döndürüldüğünde şekil 3.1 deki durum ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.1 Dikey eksene göre ω açısal hızıyla dönen su dolu kova (Kangal 2008)



Şekil 3.2 Kova durduktan sonra suyun dönmesiyle oluşan parabol (Kangal 2008)

Bu deneyde, tavana takılı bir ipin ucunda asılı boş bir kova göz önüne alalım. Bu kova kendi simetri eksenini etrafında döndürülür, asılı bulunduğu ip burulur ve kova sabit tutulup suyla doldurulduktan sonra da serbest bırakılır. Bunu izleyen olayların açıklanması eylemsizliğin kökeninin ortaya konmasında ışık tutucu olmuştur.

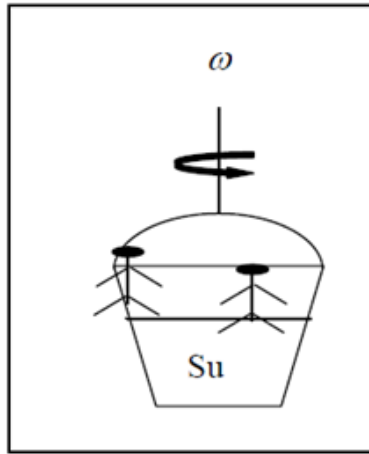
Kova serbest bırakılmadan önce kovadaki suyun yüzeyi düzlemseldir. Kova serbest bırakıldığında, burulmuş olan ip, burulmanın ters yönünde ve gitgide artan bir dönme hızıyla kovayı döndürür. İp burulmuş halinden kurtuldukça hız artarak bir maksimuma erişir ve sonra da, bir süre, gitgide sönen bir takım burulmalı salınımlardan sonra kova tekrar durgun haline geri döner. Bütün bu hareket süresince kovadaki suda kovanın hareketiyle sürüklenerek, yüzeyi bir paraboloid dönüşür ve maksimum bir derinliğe ulaştıktan sonra, suyun durgun hale erişmesiyle düzlemsel olacaktır.

Bu deneyde kova ve içindeki su aynı hızlarla döndüğünden herhangi bir görelî hız farkı oluşmamaktadır. Bundan dolayı kova üzerinde yer alan bir gözlemci, su yüzeyinde yer alan bir gözlemciyi hareketsiz olarak gözlemleyecektir. İkinci durumda, dönen kova durduğunda içerisindeki su dönme hareketine devam eder ve şekil 3.2'deki durum ortaya çıkar. Bu anlamda görelî hız farkı merkezkaç kuvvetine neden olacaktır. Newton bu sonuçlara göre evrendeki hareketleri tanımlayacak mutlak bir uzayın var olması gerektiğini söylemiştir ve bu uzayın tanımlamış olduğu gözlem çerçevesine de eylemsiz gözlem çerçevesi denmiştir.

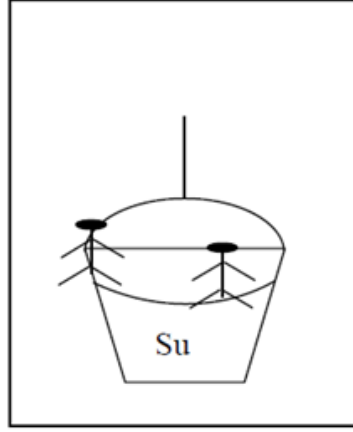
Newton'un bu yorumu ilk defa Berkeley tarafından eleştirilmiştir. Berkeley mutlak uzaya göre bir hareketin fiziksel bakımdan anlamsız olduğunu savunmuş ve sözü edilen su dolu kova deneyinde esas göz önünde bulundurulması gereken durumun kovanın evrene ve özellikle sabit yıldızlar takımına göre dönmesi olduğu fikrinde diretmiştir. Berkeley, su ile dolu kova deneyini yeniden tasarlayarak hem kovanın hem de suyun yüzeyinde bir gözlemcinin bulunması durumunu yeniden göz önüne almıştır. Bu düşünce deneyi şekil 3.3 ve 3.4'de verilmektedir.

Şekil 3.3'teki durumda; kova üzerindeki gözlemci su üzerinde yer alan gözlemciyi durgun görecektir. Bu durumda her iki gözlemci de kovanın dönmediğini söyleyecektir. Bu sebepten dolayı, Berkeley böyle bir hareketin boş uzayda tanımlanmasının mümkün olmayacağını söylemiştir.

Şekil 3.4'teki durumda ise; kovanın üzerinde duran gözlemcinin kendisine göre döndüğünü söyleyecektir. Buna karşı olarak, su yüzeyinde yer alan gözlemcide kova üzerinde duran gözlemcinin kendisine göre dönme hareketi yaptığını söyleyecektir. Bu durumda her iki gözlemcide kendilerini mutlak uzay olarak göreceklardır.



Şekil 3.3 Her iki gözlemcinin aynı açısal hızla döndükleri durum (Kangal 2008)



Şekil 3.4 Kovanın durması sonucu hızla gözlemciler arasındaki görelî hareket (Kangal 2008)

Bu sonuca göre kovanın boş uzayda döndüğünü ne kova üzerinde duran gözlemci ne de su üzerinde duran gözlemci söyleyecektir. Berkeley ve Mach bu sorunun çözümü için bu iki gözlemciden bağımsız başka bir nesnenin var olması gerekliliğini savunmuşlardır. Hem Berkeley hem de Mach yerel gözlem çerçevesi ile uzak yıldızlardaki gözlem çerçeveleri arasında bir ilişkinin kurulması gerektiğini kabul etmişlerdir. Berkeley ve Mach' a göre Foucault sarkacı deneyinde elde edilen sonucun kaynağı tamamen yıldızlardır. Çünkü bu deneyde sarkaç yerküre üzerinde ve sarkacın salındığı düzlem yerküreye göre dönmektedir. Sarkacın salınım düzleminde yer alan bir gözlemci uzak sabit yıldızdaki gözlemciye hareketli olarak görünecektir. Oluşan bu görelî hareket, bir merkezkaç kuvvet doğuracaktır ve bunun sonucunda sarkaçta tek bir doğrultuda değil de kapalı bir yörüngede salınım hareketi yapacaktır. Mach, Foucault deneyinde var olan bu merkezkaç kuvvetinin kaynağı olarak mutlak uzayı değil, cismin çok uzaktaki yıldızlara göre dönme hareketinden kaynaklı olduğunu belirtmiştir. Bu sonuca göre Mach, kütle çekim alanının, mutlak uzaydan bağımsız olup, gözlemcinin hareket durumuna bağlı olarak betimlenen bir nicelik olduğunu belirtmiştir.

Özetle, bir cismin eylemsizliğinin evrendeki bütün cisimlerin fonksiyonu olarak belirlenmekte olduğunu ifade eden ilkeye Mach ilkesi denir. Bu ilkeye göre, su dolu kova örneğindeki su yüzeyinin dönel bir paraboloid şeklini kazanması, kovanın mutlak uzaya göre dönmesi sonucu olarak değil de su ile, geri kalan bütün evren arasındaki bir çeşit gravitasyon etkileşmesinin sonucudur. Bu olay, suyun çok uzağındaki tüm kütlelerin bu etkileşmeye katkılarının suyun civarındakilerin katkısından çok daha

yoğun bir biçimde ortaya çıktığı bir etkileşme olarak düşünülür. Böylelikle Mach eylemsizlik sistemlerinin ayrıcalıklı durumlarını, etkilerini yok edemediğimiz uzak gök cisimlerinin işe karışmalarına bağlamaktadır. Eğer uzak gök cisimleri mevcut olmayıp da Dünya uzayda tek başına olsaydı bütün referans sistemleri eşdeğer olacak ve hepsi de eylemsizlik sistemleri oluşturacaklardı. Bu ideal durumda Foucault sarkacının salınım düzleminin rotasyonu da olmayacaktı.

Buna dayanarak Mach ilkesi çerçevesi içinde görünümsel eylemsizlik kuvvetleriyle gerçek gravitasyon kuvvetleri arasında bir eşdeğerliğin varlığı mümkün görünmektedir (Özemre 1982, Kangal 2008).

4. SCHWARZSCHILD GEOMETRİSİ

Schwarzschild geometrisi; statik, küresel simetrik bir yıldızın vakum (boş uzay) uzay-zamanının geometrisidir. M kütleli bir yıldızın dışındaki boş uzay-zamanda bir uzunluk elemanı:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.1)$$

olarak verilir. Bu ifadeye Schwarzschild metriği denir. Bu metrik, bir yıldızın ve bir karadeliğin gravitasyonel (kütle çekimsel) alanını belirler. Bu eşitlikte $d\Omega^2$ ifadesi;

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.2)$$

ifadesine karşılık gelir. Schwarzschild geometrisi için metrik bileşenleri;

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ g_{rr} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

metriğin ters bileşenleri;

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ g^{rr} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ g^{\theta\theta} &= r^{-2} \\ g^{\phi\phi} &= r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Metrik ve tersinin matris formları;

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

$$[g^{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

4.1 Christoffel Sembolleri

Bu kısımda Schwarzschild geometrisi için Christoffel sembolleri hesaplanacaktır. Metrik bileşenleri bilindiğine göre Christoffel sembollerinin metrik bileşenlerinin kısmi türevi cinsinden elde edilmesi denklem (2.94) yardımı ile yapılacaktır.

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} g^{tw} (g_{rv,t} + g_{tw,r} - g_{rt,v}) \quad (4.7)$$

Burada ν indisi katkı gelen bileşene göre belirlenecektir. Bu bileşen g^{tt} 'dir ve $\nu = t$ olarak etiketlenecektir.

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (g_{tt,r}) = \frac{M}{r(r-2M)} = \Gamma_{tr}^t \quad (4.8)$$

olarak elde edilir.

Benzer hesap yöntemiyle diğer katkı sağlayan terimler;

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{M(r-2M)}{r^3}, \Gamma_{rr}^r = -\frac{M}{r(r-2M)}, \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \Gamma_{\theta\theta}^r = -(r-2M), \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -(r-2M)\sin^2\theta, \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta, \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Diğer tüm Christoffel sembolleri sıfıra eşit olacaktır.

4.2 Jeodezik Denklemleri

Jeodezik denkleminin ifadesi denklem (2.97) ile tanımlanmaktadır. Schwarzschild geometrisi küresel simetrik, statik bir yıldızın dışındaki vakum uzay-zamanının geometrisi olduğundan, böyle bir yıldızın etrafında hareket eden parçacıklar veya fotonların yörüngeleri bu geometri yardımı ile hesaplanan jeodezik denklemleriyle tespit edilir.

Schwarzschild geometrisinde jeodezik denklemleri;

i) $\alpha = t$ için;

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^t \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (4.9)$$

μ ve ν için katkı gelen terimler göz önüne alınarak;

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma_{rt}^t \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0 \quad (4.10)$$

olarak yazılır.

ii) $\alpha = r$ için;

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \Gamma_{rr}^r \frac{dr}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \Gamma_{\theta\theta}^r \frac{dr}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \Gamma_{\phi\phi}^r \frac{dr}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \Gamma_{tt}^r \frac{dt}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0 \quad (4.11)$$

iii) $\alpha = \theta$ için;

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\theta r}^\theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \quad (4.12)$$

iv) $\alpha = \phi$ için;

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \Gamma_{\phi r}^{\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (4.13)$$

olarak bulunacaktır.

4.3 Dörtlü Hız ve Momentum

Dörtlü-hız vektörü, Galileo – Newton mekaniğindeki üçlü geometride tanımlanan üçlü-hız kavramına benzer biçimde tanımlanabilir. Buna göre bir parçacığın dörtlü-hızı, $\vec{U}$, parçacığın dünya çizgisine teğet olan ve parçacığın durgun çerçevesinde boyu bir zaman birimi olan bir vektör olarak tanımlanır.

Dünya çizgisi; uzay-zamandaki bir $x(t)$ doğrusuna parçacığın dünya çizgisi adı verilir.

Tekdüze (uniform) bir hareket yapan bir parçacığın durgun olduğu eylemsiz çerçevede, dörtlü-hız zaman eksenine paraleldir ve boyu bir zaman birimidir, yani, bu çerçevede $\vec{U} \equiv \vec{e}_0$ olur.

Dörtlü-hız ile ilgili önemli bir özellik ise kendisi ile skaler çarpımının -1 olduğudur.

Yani;

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -1 \quad (4.14)$$

olacaktır.

Bir parçacığın dörtlü momentumu;

$$\vec{P} = m\vec{U} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, m parçacığın durgun olduğu çerçevede ölçülen ‘durgun’ kütlesidir. Bir O çerçevesinde dörtlü-momentum genel anlaşma olarak;

$$\vec{p} \longrightarrow (E, p^1, p^2, p^3) \quad (4.16)$$

biçiminde ifade edilir.

Burada p^0 'a parçacığın O çerçevesindeki E enerjisi adı verilir. Diğer p^i bileşenleri, dörtlü-momentumun uzay bileşenleridir.

Küresel simetriden dolayı, bir parçacığın hareketi bir düzleme kısıtlanır; bu düzlem işlem kolaylığı açısından $\theta = \frac{\pi}{2}$ ile verilen ekvator düzlemi olarak seçilebilir. $\theta = \frac{\pi}{2}$

sabit olduğundan, $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$ (λ ; yörünge parametresi) olur ve $p^\theta = 0$ olacaktır.

Kütleli bir parçacık için birim kütle başına enerji $\tilde{E}$ ve foton için enerji E olarak alınır;

$$\text{Parçacık için; } \tilde{E} = -\frac{p_0}{m}$$

$$\text{Foton için; } E = -p_0$$

olacaktır. Kütleli parçacıklar için açısal momentum $\tilde{L}$, foton için açısal momentum L olarak alınır;

$$\text{Parçacık için; } \tilde{L} = \frac{p_\phi}{m}$$

$$\text{Foton için; } L = p_\phi$$

olacaktır. Bu durumda momentumun bileşenleri;

Parçacık için;

$$p^0 = g^{00} p_0 = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \tilde{E}$$

$$p^r = m \frac{dr}{d\tau}$$

$$p^\theta = 0$$

$$p^\phi = g^{\phi\phi} p_\phi = m \frac{1}{r^2} \tilde{L}$$

Foton için;

$$p^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E$$

$$p^r = \frac{dr}{d\lambda}$$

$$p^\theta = 0$$

$$p^\phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}$$

olacaktır.

Parçacık için $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$ eşitliği kullanılarak;

$$-m^2 \tilde{E}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + m^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{m^2 \tilde{L}^2}{r^2} = -m^2 \quad (4.17)$$

ifadesi bulunur. Foton için $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$ eşitliği kullanılarak;

$$-E^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0 \quad (4.18)$$

ifadesi bulunur. Böylece, (4.17) ve (4.18) denklemleri kullanılarak parçacık ve foton için temel yörünge denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

Parçacık için;

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (4.19)$$

Foton için;

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right) \quad (4.20)$$

(4.19) ve (4.20) denklemlerinin sağ taraflarındaki ikinci terimler etkin potansiyelleri verir. Yani;

Parçacık için;

$$\tilde{V}^2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (4.21)$$

Foton için;

$$V^2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right) \quad (4.22)$$

ifadelerine ulaşılır. Şimdi yörünge denklemlerinin analizi yapılabilir. Etkin potansiyellerin ekstremum olduğu r değerleri; $\frac{d\tilde{V}^2}{dr} = 0 = \frac{dV^2}{dr}$ olarak ifade edilir.

Buradan;

Parçacık için;

$$\frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \right] = 0 \quad (4.23)$$

Foton için;

$$\frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \right] = 0 \quad (4.24)$$

ifadelerine ulaşılır. (4.23) ve (4.24) denklemlerinden ise yörünge yarıçapları için bir değer elde edilebilir.

Parçacık için;

$$r = \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{L}^2}} \right) \quad (4.25)$$

Foton için;

$$r = 3M \quad (4.26)$$

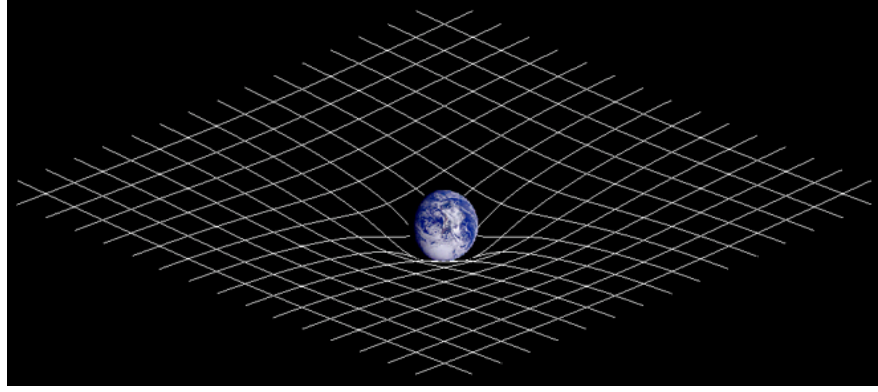
olarak bulunacaktır. (4.25) denkleminde $\tilde{L}^2 = 12M^2$ olur ve $r_{\min} = 6M$, foton için $r = 3M$ olarak elde edilecektir. Bu değerler foton ve parçacık için yörünge yarıçap değerleridir (Schutz 2011).

4.4 Deneysel Testler

Önceki kısımlarda da belirtildiği gibi, Schwarzschild geometrisi küresel simetrik, statik bir yıldızın dışındaki vakum uzay-zamanının geometrisidir ve böyle bir yıldızın etrafında hareket eden parçacıklar veya fotonların yörüngeleri Schwarzschild geometrisi yardımıyla türetilen jeodezik denklemleri ile tespit edilir. Einstein bunun için üç test önermiştir. Bu testler; perihelyon kayması, ışığın kütle çekimsel alanda sapması ve kütle çekimsel kıvrılma kayma olaylarıdır. Bu kesimde bu üç testten bahsedilecektir.

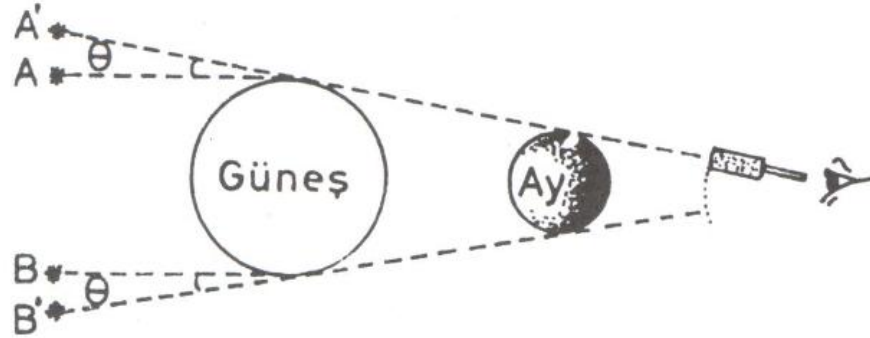
4.4.1 Işığın kütle çekimsel alanda sapması

Kütleli bir cismin etrafındaki uzay parçasının, homojen ve izotropik olmaktan uzaklaşarak şekil 4.1'deki gibi bozunmaya uğradığı öngörülmektedir. Bozunmanın şiddeti, cismin kütlesi ile orantılı olarak artmaktadır. Bu durumda, örneğin kütlesi yeterince büyük bir cisim, yakınından geçen ışık ışınlarının bükülmesine, dolayısıyla ışığın eğrisel bir yol izlemesine neden olacaktır.



Şekil 4.1 Kütleli bir cisim etrafındaki uzay

Sözü edilen görüş, örneğin güneş tutulması olayı gibi çeşitli astronomik gözlemlerle doğrulanmıştır. Güneş tutulması sırasında, güneşi teğet olarak geçip yeryüzüne ulaşan bir yıldızın, güneşin uzayda yer değiştirmesine bağlı olarak gösterdiği hareket, yeryüzündeki gözlemci tarafından bir fotoğraf plağı üzerine kaydedilebilir. Böyle bir gözlemde, yıldızın uzaydaki yeri önceden A ve B olarak belirlenmiş ise, yıldızın gözlenen hareketi AB değil $A'B'$ olmaktadır. Bunun nedeni, gerçek yerleri A ve B olan yıldızdan çıkan ışınların, Dünyadaki gözlemciye göre A' ve B' noktalarından geliyormuş gibi görünmeleridir (Gündüz 2008).



Şekil 4.2 Güneş tutulması esnasında yapılan bir gözlem (Gündüz 2008)

Şekil 4.2 Güneş tutulması esnasında yapılan bir gözlemi göstermektedir. Güneşin hemen arkasındaki bir yıldızın yerdeki gözlemci tarafından saptanan hareketinin, gerçek hareketinden bir miktar farklı olduğu sonucu çıkarılabilir.

Schwarzschild metriği ile belirlenen bir uzay-zamanda bir fotonun yörüngesi incelenerek net sapma miktarı:

$$\Delta\phi = \frac{4M}{b} \quad (4.27)$$

olarak bulunur. (b ; etki parametresi)

Örneğin; güneşin kütle çekim alanından geçen fotonun sapması hesaplanabilir. Güneşin etki parametresi; $b = R_{\odot} \cong 7 \times 10^5$ km ve $M_{\odot} = 1,47$ km dir. (Burada geometrik birim sistemi kullanılmıştır. $G=1$ ve $c=1$ dir.)

$$(\Delta\phi)_{\odot, \max. \text{sapma}} = 8,45 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1'',74$$

Jupiter için; $M = 1,12 \times 10^{-3}$ km, $R \cong 7 \times 10^4$ km dir.

$$(\Delta\phi)_{\max. \text{sapma}} = 6,42 \times 10^{-8} \text{ rad} = 0'',013$$

4.4.2 Perihelyon Kayması

Genel görelilik teorisini doğrulayan diğer bir kanıt da, Merkür' ün Güneş etrafındaki kendine özgü dönme hareketidir. Güneşe en yakın gezegen olan Merkür, yörünge hareketi esnasında oldukça basık bir elips yörünge izlemektedir. Yapılan gözlemler, gezegenin yörünge hareketi esnasında Güneşe en yakın olduğu noktanın (periheli noktası) sabit olmayıp sürekli değiştiğini göstermiştir. Bilinen Newton ve Kepler yasalarına uymayan bu davranış, ancak genel göreliliğin gravitasyon alan kavramı ile açıklanabilir: Güneşin gravitasyon alanı içinde, ona en yakın olması nedeniyle diğer gezegenler çok daha büyük bir açısal hızla hareket etmekte olan Merkür gezegeni, güçlü bir gravitasyon alanı içinde ve çeşitli görelilik etkiler altındadır (Gündüz 2008).

Bir parçacık (gezegen) bir yıldızın (Güneşin) etrafında bir çembersel yörüngede hareketli olsun. Schwarzschild geometrisinde bir parçacığın yörünge analizi sonucu;

$$r = \frac{\tilde{L}^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{L}^2}} \right) \quad (4.28)$$

bulunmuştur. Bu denklemden de;

$$\tilde{L}^2 = \frac{rM}{1 - \frac{3M}{r}} \quad (4.29)$$

ifadesi elde edilir.

Relativistik olmayan bir yıldız (örneğin Güneş) etrafındaki yörüngelerde periheliyon presesyonu; (4.29) denklemindeki $\frac{M}{r} \ll 1$ olduğu göz önüne alınırsa; $\tilde{L}^2 \approx Mr$ olacaktır. Perihelyon presesyonu ifadesi;

$$\Delta\phi = \frac{6\pi M^2}{\tilde{L}^2} \quad (4.30)$$

olarak verilir. $\tilde{L}$ yerine yazılırsa;

$$\Delta\phi \approx 6\pi \frac{M}{r} \quad (4.31)$$

bulunur.

Örnek: Merkür için, $r = 5,55 \times 10^7$ km, $M = 1,47$ km alınır;

$$(\Delta\phi) = 4,99 \times 10^{-7} \text{ rad/yörünge}$$

1 yörünge için 0,24 yıl geçtiğinden;

$$(\Delta\phi) = 0",43 / \text{yıl} = 43" / \text{yüzyıl}$$

kadarlık bir perihelyon kayması bulunacaktır (Schutz 2011).

4.4.3 Gravitasyonel kızıla kayma

Güçlü bir gravitasyon alanının, yakınından geçen ışığın frekansı üzerinde de etkili olduğu deneylerle saptanmıştır. Örneğin uzayın herhangi bir noktasından gelen bir görünür ışık veya gamma fotonunun f_0 olan frekansı, foton bir gravitasyon alanından

geçerken f gibi bir değere düşer. Einstein, böyle bir olayda gözlenen frekans kaymasının,

$$f = f_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \quad (4.32)$$

veya,

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_0 - f}{f_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} = \frac{2\varphi}{c^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \right)} \quad (4.33)$$

ve $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$, $1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 2$ olduğu düşünülerek elde edilen;

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\varphi}{c^2} \quad (4.34)$$

bağıntısı ile hesaplanabileceğini öngörmektedir. (Burada φ gravitasyon potansiyelidir.)

İleri sürülen bu görüş, Pound ve Rebka (1960) tarafından Mössbauer olayı denilen bir olaydan yararlanarak denel olarak doğrulanmış bulunmaktadır. Adı geçen araştırmacılar, kütlesi 57 olan demir izotopunun (Fe^{57}) çekirdeğinden yayınlanan gamma ışını fotonlarının yeryüzünde ve yerden 22,5 m. yüksekteki frekanslarını ölçmüş, yerin gravitasyon alanında gözledikleri frekans kaymasının (4.34) denklemi ile öngörülen teorik değere eşit ve $\frac{\Delta f}{f_0} = 2,56.10^{-15}$ olduğunu göstermişlerdir

(Gündüz 2008).

5. GENEL GÖRELİLİK TEORİSİNİN BAZI TESTLERİ

5.1 Jeodezikten Sapma ve Jiroskop Testi

Genel görelilik teorisi çerçevesi içinde önemli bir araştırma alanı bir gravitasyon alanındaki bir jiroskopun dönme ekseninin doğrultusunun maruz kalacağı değişimdir. Diğer bir araştırma alanı olarak ise gravitasyon dalgalarının somut bir şekilde belirlenmesidir.

Bu kısımda incelenmek istenen, gravitasyon alanının bir jiroskopun dönme eksenindeki etkisidir. Bu etki 1919'da J. A. Schouten tarafından öngörülmüş ve ilk defa Dünya'nın kendisi için 1921'de A. D. Fokker tarafından hesaplanmıştır. Fokker, bir jiroskop gibi kabul edilebilecek olan Dünyanın dönme ekseninin Güneşin gravitasyon alanında yıllık $0",019$ lik fazladan bir presesyona maruz kaldığını belirtmiştir.

Dünyanın kendi eksenini etrafındaki hareketiyle sürüklenen bir jiroskopun davranışının teorisi ise ilk defa 1960'da L. İ. Schiff tarafından yapılmıştır. Klasik Newton mekaniğine göre böyle bir jiroskopun kendi dönme ekseninin yönünün, sürtünme ve yapısal simetrisizlikler hesaba katılmazsa, sabit yıldızların belirledikleri eylemsizlik sisteminde değişmez kalması gerekmektedir. Ama Genel ve Özel Görelilik Teorilerine göre jiroskopun dönme eksenini üç etkiden ötürü bir presesyon oluşturacaktır. Bu etkiler kısaca şu şekilde özetlenebilir:

a) Jiroskopun Dünyanın kendi eksenini etrafındaki rotasyonu ile sürüklenmesi esnasında eksenin yönünün, bir vektörün bir gravitasyon alanındaki paralel öteleme kuralına uygun olarak bir davranışı bulunacaktır. Böyle bir gravitasyon alanında Dünya kendi eksenini etrafında tam bir devir yaptığı zaman jiroskopun dönme ekseninin yönü bir devir önceki yönüyle çakışık olmayacaktır. Bu etkiye jeodezikten sapma etkisi yada jeodeziksel presesyon olayı denir.

b) Dönme hareketi yapan bir kütlede her eylemsizlik sistemi, kütlede maruz kaldığı açısal hızın küçük bir kesri kadar bir hızla sürüklenir. Buna Lense-Thirring etkisi yada presesyonu denir.

c) Gravitasyon alanı göz ardı edilse bile bu seferde Özel Görelilik Teorisi'nin sonuçlarına göre Dünya üzerindeki bir jiroskopun dönme eksenini Thomas presesyonuna maruz kalacaktır.

Dünya üzerine ekvatorunda bulunan ve dönme ekseninde Dünyanın kine dik olan bir jiroskop için üç olayın her birinin yıllık etkilerinin yaklaşık olarak 0",4 lik bir değere eşit olduğu hesaplanmıştır. Dünya etrafında yapay bir uyduya yüklenmiş bir jiroskop göz önüne alındığında ilk iki olayın etkileri çok daha küçük olmakta, böyle bir jiroskopun dönme eksenini de Thomas presesyonuna maruz kalmaktadır.

Jeodeziksel presesyon olayını incelemek için Dünyanın etrafında dairesel yörünge üzerinde dolanan bir jiroskop göz önüne alınır. Bu takdirde M ile Dünyanın kütlesini göstererek ve Dünyanın civarındaki gravitasyon alanının da Schwarzschild metriği ile temsil edildiğini göz önünde tutarak jeodezik presesyon ifadesi türetilir. Bu ifade;

$$\Delta\phi_{jeodezik} \cong \frac{3\pi GM}{c^2 R} \quad (5.1)$$

olarak ifade edilir. Bu olağanüstü küçük bir değerdir. Bunun gerek Dünyada gerekse bir yapay uydu tarafından taşınan bir jiroskop hali için ölçülebilmesi yoğun bir çaba gerektirir (Özemre 1982).

5.2 Gravitasyon Dalgalarının Belirlenmesi

Gezegenlerin Güneşin etrafında dönmesinin sebebi, Güneşin sahip olduğu gravitasyon (kütle çekim) dalgaları sayesinde. Kendi eksenini etrafında dönen cisimlerin çevrelerinde oluşturdukları dalgaya gravitasyon dalgası denir. Bu kısımda genel görelilik çerçevesi içinde önemli bir araştırma alanı olan gravitasyon dalgalarının somut bir şekilde belirlenmesi üzerinde durulacaktır.

Teorik olarak öngörülen gravitasyon dalgalarının varlığının gözlenmesi yoğun çaba sarf edilen bir konudur. Elektromagnetik dalgaların belirlenmesi nasıl bir anten aracılığı ile oluyorsa gravitasyon dalgalarının belirlenmesi de özel bir anten aracılığıyla olması gerektiği, işin başlangıcında, bu konuda en yoğun ve sürekli çalışmaları yapan J.

Weber' in ilk düşündüğü ve gerçekleştirmeye çalıştığı şey olmuştur. Weber'in geliştirdiği gravitasyon dalgaları detektörü anten olarak yaklaşık 60 cm çapında, 150 cm uzunluğunda ve 1,5 ton kütleli alüminyumdan bir silindirden oluşmaktadır. Bu silindir kablolarla asılı olarak bulunmaktadır. Silindirin üstüne, ortasına doğru yapıştırılmış piezoelektrik¹ kristallerin bağlı bulundukları elektronik devreler kendilerine gelen sinyalleri yükselterek detekte ederler. Bu mekanik-elektronik deteksiyon düzeni silindirin temel titreşim modu olan ve genliği de silindirin ortasında maksimuma erişen $\nu_0 = 1660$ Hz'lik frekansa karşı çok duyarlı olacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Silindire etkiyen mümkün kuvvetler: Dünyanın dönmesi dolayısıyla sistemin maruz kaldığı Coriolis ve merkezkaç kuvvetleri, sistemin taşıyıcılarının silindirin ortasına uyguladıkları statik reaksiyon kuvvetleri, silindirin üzerindeki piezoelektrik kristal düzeninin uyguladıkları kuvvetler ve silindir içindeki atomların termik hareketlerinin doğurduğu rastgele gerilim kuvvetlerinden ibarettir. Ayrıca bu gravitasyon antenini yerel alanların etkisinden de korumak gereklidir. Nitekim anten, gereği kadar büyük şiddetteki elektromagnetik, sismik ve kozmik ışın kökenli uyarılara da tepki gösterebilmektedir. Bu takdirde de birbirlerinden çok uzak mesafede ve aynı yapısal karakteristikleri taşıyan iki anten aracılığıyla kaydedilecek olan pulslar arasındaki rastlantıları göz önünde tutarak cıvardaki yerel alanların korelasyonlarını olağanüstü küçük bir mertebeye indirmek mümkün olmaktadır. Weber, deneyleri için biri Chicago yakınındaki Argonne Ulusal Laboratuarında, diğeri ise 1000 km kadar uzakta Maryland Üniversitesine yerleştirilmiş iki eş detektör kullanılmıştır. Bir rastlantı, her iki detektörün çıkışında da aynı zamanda sayılabilecek kadar dar bir zaman aralığı için, örneğin 70 milisaniyelik bir aralıkta, kendini gösteren ani bir güç artışı olarak tanımlanmaktadır. Böyle bir rastlantı ya her iki detektörün de ortak bir kaynak tarafından aynı anda uyarılmasından ileri gelmektedir, yada iki detektöründe ortak bir kaynak tarafından aynı anda uyarılmasından ileri gelebilir, yada farklı kökenli (genellikle yerel alanların etkilerine bağlı) düpedüz dıştan gelen bir rastlantı olabilir. Weber 1969 dan itibaren her iki detektöründe de yüksek genlikli pulslar arasında o kadar çok rastlantısal olay gözlemlemiştir ki bunların dıştan gelen rastlantılar olmaları ihtimali oldukça düşüktür. Bunların gravitasyon dalgalarından başka etkenlerin eseri

¹ Kristal yapıdaki cisimlerin kendilerine dışarıdan uygulanan basınç miktarı ile orantılı olarak elektrik üretme özelliğine denir.

olabilecekleri ihtimalini sınamak üzere dahil edildikleri sayısız testlerin sonucu, bu rastlantıların kökeninde o zamana kadar bilinen etkenlerin hiç birinin bulunmadığına hükmedilmesine yol açtığından Weber, böylelikle gravitasyon dalgalarının etkilerinin ilk defa gözlenmiş olduğuna hükmetmiştir. Ancak, bu etkiye sebep olduğu düşünülen gravitasyon dalgalarını üreten kökenin eksiksiz tanımlanması ayrı bir sorun içermektedir. Gravitasyon dalgaları detektörü teorisi, böyle bir detektörün farklı doğrultulardan gelen ve farklı polarizasyonu taşıyan gravitasyon dalgaları için farklı duyarlılığı bulunacağını ve bu duyarlılığın antene dik olarak gelen dalgalar için maksimuma erişeceğini öngörmektedir. Eğer θ dalganın geliş doğrultusu ile antenin normali arasındaki açıyı gösterirse duyarlılığın θ ya bağlılığının $\cos^2 \theta$ ile orantılı olacağı gösterilmiştir. Buna göre antenin duyarlılığı her ne kadar gelen dalganın doğrultusuna çok keskin bir bağlılık içermese de, yeteri kadar uzun bir süre sürekli gözlem yapmak şartıyla bu özellikten yararlanarak gravitasyon dalgalarının kaynağının yeri hakkında bir bilgi elde etmek mümkün olabilecektir.

Bu pulsar eğer gerçektende gravitasyon dalgalarının sebep olduğu pulsar ise bu takdirde $\Delta f = 0,1$ Hz lik bir frekans bandı içinde, gelen gravitasyon radyasyonunun ortalama akısının $0,1 \text{ erg} / \text{cm}^2 \cdot \text{sn}$ mertebesinde olması gerekeceği de tesbit edilmiştir. Öte yandan galaksimizin merkezinin Dünyadan yaklaşık olarak $2,5 \cdot 10^{22}$ cm uzakta olduğu göz önünde tutulacak olursa söz konusu frekans aralığında gözlenen bu $0,1 \text{ erg} / \text{cm}^2 \cdot \text{sn}$ lik radyasyon akısı, galaksimizin yaklaşık olarak,

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\Delta f=0,1} = 8 \cdot 10^{44} \text{ erg} / \text{sn} = 0,013 \frac{M_{\odot} c^2}{\text{yıl}} \quad (5.2)$$

kadar bir enerji kaybına uğradığını göstermektedir. Bu ise yaklaşık olarak;

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{top}} \cong \frac{1000 M_{\odot} c^2}{\text{yıl}} \quad (5.3)$$

kadar bir toplam enerji kaybına uğrar. Buradan ve galaksimizin kütesinin $10^{11} M_{\odot}$ mertebesinde olduğu göz önünde tutularak bütün galaksinin 10^8 yılda tükenmesi gerektiği sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu durumda ve eğer gözlenenler yalnızca

gravitasyon dalgalarının etkisi ise, Weber ya galaksinin gravitasyon radyasyonunun en büyük kısmının yayıldığı frekansın üzerine tesadüfen düşmüş veya akıl almaz derecede güçlü bir yeni enerji kaynağı keşfetmiş bulunmaktadır.

Böyle bir enerji kaynağının tümüyle termonükleer kökenli olmayacağı açıktır, nitekim termonükleer enerji durgun kütlenin ancak % 0,1 lik bir etkiyle enerjiye dönüşmesini içermektedir. Öte yandan Rees, Ruffini ve Wheeler gravitasyon dalgalarının oluşmasına köken olabilecek: birbiri etrafında dönen çift yıldız sistemleri, kendi eksen etrafında dönen nötron yıldızları, pulsarlar (atar yıldızlar), bir karadeliğin etrafında dolanan bir gök cismi, Schwarzschild tipi bir karadeliğe radyal doğrultuda düşen bir gök cismi gibi kozmik bazı olayları göz önüne alarak bunlardan dolayı oluşan gravitasyon radyasyonunun 1000 pc ve 10000 pc uzaklıktaki akısını çeşitli parametre değerleri için hesaplamışlardır. Bu hesaplar Weber'in belirlemiş olduğu sinyallerin, bazı hallerde, yukarıda sıralanmış olan kozmik olaylardan bazılarında yayınlanabilecek gravitasyon radyasyonu ile tutarlı olduklarını göstermiştir.

Bu kısımda belirtilenlerin dışında gravitasyon dalgaları hakkında pek çok araştırma yapılmıştır ve yapılmaya devam etmektedir. Fakat burada sadece ilk ve öncü bir çalışma olan Weber'in çalışmalarından bahsedilmiştir (Özemre 1982).

6. LENSE – THIRRING ETKİSİ

Eylemsizliğin ilk modern analizi Isaac Newton tarafından 1687 yılında yapılmıştır. Newton bu analizlerinde 3. kısımda anlatılan dönen kova düşünce deneyini yapmıştır. Bu deneydeki gözlemler neticesinde Newton mutlak bir uzayın var olması gerektiği fikrini savunmuştur.

1883 yılında Ernst Mach, Newton'un bu yorumunu eleştirmiştir. Mach'ın öncesinde de Berkeley mutlak uzay kavramını eleştiren diğer bir isim olmuştur ve Berkeley'in tekrarladığı düşünsel deneyin sonuçları ile Mach ilkesi olarak bilinen ilkeyi ortaya atmıştır. Mach ilkesi; bir cismin eylemsizliğinin evrendeki bütün cisimlerin fonksiyonu olarak belirlenmekte olduğunu ifade etmiştir. Mach 3.kısımda anlatılan düşünce deneyleri sonucunda; su yüzeyinin paraboloid şeklini almasını, kovanın mutlak uzaya göre dönmesi sonucu olarak değil de su ile, geri kalan bütün evren arasındaki kütle çekim etkileşmesinin sonucu olduğunu belirtmiştir.

1915 yılında ise Albert Einstein genel görelilik teorisini ortaya atmıştır. Albert Einstein'ın bu teorisi, Newton'un evrensel kütle çekim yasasını değiştirerek, tüm kütle çekim teorisini daha sağlam geometrik temellere oturtmuştur. Albert Einstein'ın yeni teorisi kısaca aşağıdaki maddeler dayanmaktadır:

. Kütle çekim teorisi uzay-zamanın geometrisi ile tanımlanır. Matematiksel olarak, uzay-zaman metriğinin tanımlanması;

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.1)$$

şeklindedir.

. Madde uzay-zamanda eğriliğe sebep olmaktadır. Matematiksel olarak, bu Einstein'ın alan denklemleri ile ifade edilir;

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (6.2)$$

Burada; $G^{\mu\nu}$ Einstein tensörü, G Newton çekim sabiti, $T^{\mu\nu}$ enerji momentum tensörü olarak adlandırılır. Enerji momentum tensörü enerji yoğunluğu içermektedir.

Bir teorinin, kütle çekim teorisi olarak ele alınması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir:

- i) Tüm deneysel testleri (Güneş sistemi, kırmızıya kayma, ...) geçmesi gerekir.
- ii) Zayıf alanlar ve yavaş hareketler için Newton kütle çekim yasasına indirgenmesi gerekir.
- iii) Yerel olarak özel görelilik teorisini sağlamalıdır.
- iv) Enerji-momentum korunumu ile uyumlu olmalıdır.

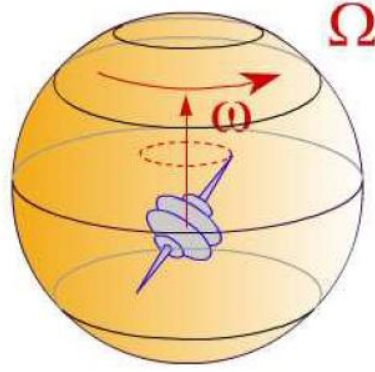
Einstein alan denklemleri dışında bu koşulları sağlayan $f(R)$ -teorileri, Brans-Dicke teorileri, ekstra boyutlu teoriler,... gibi başka denklemlerde mevcuttur.

. Düz uzayda serbest parçacığın yörüngesi bir doğru olacaktır, bunun eğri uzayda karşılığı jeodeziklerdir ve serbest düşen parçacığın yörüngesini verirler. Jeodezik denklemi;

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (6.3)$$

olarak verilir (Embacher, 2005).

Einstein'ın genel görelilik teorisinin yayınından kısa bir süre sonra 1918 yılında Hans Thirring ve Joseph Lense, Lense-Thirring etkisini ortaya atmışlardır. Dönme hareketi yapan bir kütlenin yakınında her eylemsizlik sistemi, kütlenin maruz kaldığı açısal hızın küçük bir kesri kadar bir hızla sürüklenir. Buna Lense –Thirring etkisi denir. Yaklaşık 6 yıl önce yapılan bir araştırmada Lense-Thirring etkisinin güneş sisteminin içerisindeki cisimlerde olmadığı öne sürülmüştür. İtalya'da yapılan bir çalışmada ise Lense-Thirring etkisinin her cisimde az da olsa etkili olduğu bildirilmiştir. Genel görelilik teorisi de bu görüşü desteklemektedir.

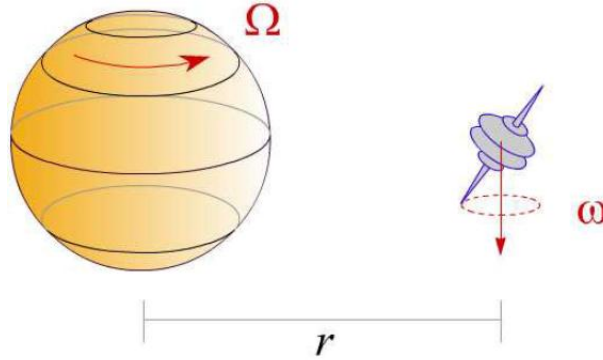


Şekil 6.1 Dönen bir kütlenin içinde bir jiroskopun presesyonu (Embacher 2005)

M, R ve Ω sırasıyla dönen cismin kütlesi, yarıçapı ve açısal hızı olarak tanımlanırsa, iç uzayın açısal hızı, Lense-Thirring frekansı ω olarak alınır,

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{4}{3} \frac{GM}{c^2 R} \equiv \frac{2}{3} \frac{R_s}{R} \quad (6.4)$$

ifadesi yazılır. Burada c; ışık hızı ve R_s ; dönen kütlenin Schwarzschild yarıçapı olarak tanımlanır. Dünya'nın Schwarzschild yarıçapının 0,886 cm olduğu düşünülürse, aradaki oran 9×10^{-10} olarak bulunur.



Şekil 6.2 Dış bölgede, Lense-Thirring etkisinin jiroskopunun konumuna bağlılığı (Embacher 2005)

Jiroskopun konumuna bağlılığını veren ifade için, ekvatorial düzlemde bu etkinin büyüklüğünü veren aşağıdaki ifadeye ele alınır;

$$\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{2}{3} \frac{GM}{c^2 R} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \quad (6.5)$$

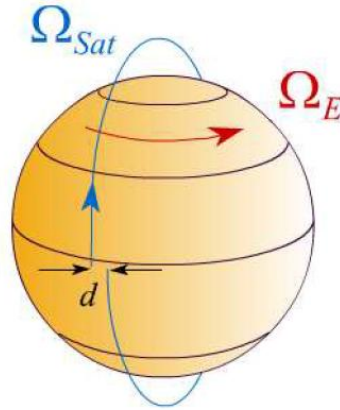
Burada r dönen kütlenin merkezi ile jiroskop arasındaki mesafeyi belirtmektedir. Burada $\frac{1}{r^3}$ ifadesi Mach etkisinin büyüklüğünün davranışını belirtir. Mesafe arttıkça etkinin büyüklüğü azalacaktır.

Jeodezik denklemi çözümü yapılarak, geliş güzel bir uydu için Lense – Thirring etkisinin öngörülleri çözülebilir. r yarıçaplı küresel bir yörüngenin özel bir durumda, yer değiştirmesi,

$$d = \frac{4\pi}{5} \frac{\Omega_E}{\Omega_{sat}} \frac{R_s R^2}{r^2} \quad (6.6)$$

olarak verilir. Burada R ve R_s ; sırasıyla yarıçap ve kütlenin Schwarzschild yarıçapıdır. Ω_E kütlenin açısal hızı ve Ω_{sat} uydu yörüngesinin açısal hızıdır.

Dünya için verilen datalar ve kapalı bir yörünge de ($r \approx R$), $d = 0,13$ cm olarak bulunur. Bunun sonucu olarak, yörünge düzleminde 0,26 ark saniye/yıl kadarlık bir sürüklenme gözlenir.



Şekil 6.3 Döner küresel bir cismin civarında uydunun yörüngesi kapalı değildir (Embacher 2005)

Lense-Thirring etkisinin Dünya'yı ne derecede etkilediği ise bir diğer merak konusudur. Dünya'nın kendi eksenini etrafında dönmesi çevresindeki uyduları zaman açısından bile etkilemektedir. Ancak uyduları etkileme yönünde Lense-Thirring etkisi oldukça zayıf

kalmaktadır. Çünkü Dünya'nın kütlelerinin yer küre üzerinde eşitsiz dağılımı uyduların yörüngelerindeki zamansal açıdan değişimini zayıf kılmaktadır.

Lense-Thirring etkisinin en kuvvetli olduğu yer ise bizden oldukça uzak olan kozmik karadeliklerdir. Kendi çevresinde dönen karadelikler uzay ve zamanı oldukça etkili bir şekilde bükmemektedir. Bir karadeliğin kendi çevresinde dönme hızı, ışık hızından çok daha fazladır. Bu yüzden karadelikler zamanı çok etkili bir şekilde bükme özelliğine sahiptir (Embacher 2005).

6.1 Lense-Thirring Etkisinin Gözlenmesi

Döner bir kütle, uzay-zamanın dokusunu peşinden sürükleyeceği söylenmektedir. Ancak bu etkiyi göstermek, kütle, ışığı bükmesini göstermekten çok daha zordur. Bunun için, eksen, etrafında döner bir cismin yakınındaki jiroskopların yönelimini nasıl değiştirdiğini gözlemlemek gerekir.

Lecce Üniversitesi'nden Ignazio Ciufolini ve Nasa'nın Goddard Uzay Uçuş Merkezinden Erricos Pavlis, Lense-Thirring etkisi ya da "çerçeve sürüklenmesi" diye adlandırılan olguyu kanıtlamak için bir yöntem kullanılmıştır. Araştırmacılar 1976 ve 1992 yıllarında lazerli uzaklık ölçerlerin geliştirilmesi için yansıtıcı hedef olarak uzaya gönderilen Lageos ve Lageos II adlı pasif uydulardan yararlanmışlardır. Bunlar, yarım metre çapında, içleri jiroskoplarla donatılmış, üzerleri yansıtıcı aynalarla kaplı kürelerdir. Lazerler bunların üzerine lazer ışıkları gönderirler ve ışığın hızı sabit olduğundan, ışığın gönderiliş ve çeşitli yer istasyonlarına yansımalarının dönüş süreleri hesaplanarak, uzaklıkları birkaç cm yanlışlıkla belirlenebilmektedir. Ciufolini ve Pavlis ilk kez 1998 yılında iki uydunun verilerinden yararlanarak Lense-Thirring etkisinin, bunların yörünge düzlemlerinde küçük değişimlere yol açması gerektiğini öne sürmüşlerdir. Ancak ilk ölçümler çok kaba sonuçlar vermektedir. Bunun nedeni, Dünya'nın kütlelerinin yer küre üzerindeki eşitsiz dağılımının, uydu yörünge düzlemlerinde bu etkiye kıyasla 1000 kez daha büyük değişimler yapmasıdır (Anonim 2004a).

Uzmanlara göre uzay-zamanın sürüklenme etkisi, bir uydunun yörüngesinde yılda 2 metrelik bir yalpalanmaya yol açarken, kütle dağılımının eşitsizliği nedeniyle meydana gelen yalpalanma, yılda birkaç bin km'yi bulmaktadır. 1998 yılında Dünya üzerindeki kütle dağılımı fazlaca bilinmediğinden, Ciufolini ve ekip arkadaşları bazı tartışmalı tahminlerde bulunmuştur ve sonuçlar, % 20 gibi kabulü zor bir hata payıyla açıklanmıştır.

Bu etkiyi sınamak için tasarlanan bir diğer gözlem aracı ise, Gravity Probe B uzay aracıdır. 20 Nisan 2004'te uzaya gönderilmiştir. Uzay aracı, yeryüzünden yaklaşık 650 km yukarıda, neredeyse tam bir daire biçimindeki kutup yörüngesinde dönmektedir. Bugüne kadar geliştirilen en duyarlı ölçüm aletlerinden birini taşıyan uzay aracı, evrenin yapısıyla ilgili en önemli sorulardan bazılarına yanıt aramaktadır. Araçta bulunan “ultra duyarlı” dört jiroskop, çok büyük kütleli ve dönen cisimlerin (bir gezegen, bir yıldız yada bir karadeli), dönerken uzay ve zamanı da beraberinde sürükleyip sürüklediğini sınayacaktır.

Bu etkiyi açıklayabilmek için bilim adamları uzayı kauçuktan bir örtüye benzetirler. Dünya'ysa bu örtünün üzerinde çöküntü yaratan bir bilye olarak düşünülebilir. Bu çöküntü, yanından geçen cisimlerin yolunun bükülmesine neden olur. Eğer kuram doğruysa, bir gezegenin yada yıldızın dönüşünün de bu örtüyü bükerek zamanı saptırması gerekir. Gravity Probe B'nin dört jiroskopun eksenindeki küçük sapmalar, Dünya'nın uzaydaki varlığının neden olduğu sürüklenme etkisini ölçmektedir.

Jiroskoplardan her biri, yaklaşık bir pinpon topu büyüklüğünde; özel bir kabın içinde boşlukta asılı durmakta ve dakikada on bin kez dönmektedir. Eğer kuram doğruysa ve çerçeve sürüklenme etkisi gerçekse, Dünya'nın yörüngesinde döndükçe, jiroskopların titreşmesi gerekmektedir. Dönüş eksenleri azar azar kayacak ve bir yılın sonunda, başladıkları yerden 42 miliarksaniye uzağı gösterecektir. Gravity Probe B, bu açığı 0,5 miliarksaniyelik bir kesinlikle ölçebilmektedir. (Miliarksaniye, çok çok küçük bir açıdır. Bir arksaniye, bir derecenin 1/3600 'üne eşittir. Bir miliarksaniye ise, bunun binde biri kadardır.) (Anonim 2004b).

2011 yılında yayınlanan makalede, yazarlar dört jiroskopun verilerini analiz etmişlerdir. Bu analiz sonucunda jeodezik sürüklenme $-6601,8 \pm 18,3$ miliarksaniye/yıl (mas/yr) ve çerçeve sürüklenme oranı $-37,2 \pm 7,2$ mas/yr' dır. Bu veriler genel göreliliğin tahminleri ile kıyaslanırsa sırasıyla $-6601,1$ mas/yr ve $-39,2$ mas/yr değerleri verilebilir. Teorik değerler ile alınan ölçümlerin uyumlu çıktığı söylenebilir (Everitt 2011).

7. SONUÇ

Bu tez kapsamında genel görelilik teorisinin ortaya attığı ve doğruladığı bazı olaylar üzerinde durulmuştur. Bunların başlıcaları gravitasyonel kızıla kayma, ışığın kütle çekimsel alanda sapması, perihelyon kayması, Lense-Thirring etkisidir.

Tezin başlangıç kısmında özel görelilik ve genel görelilik teorilerinin ortaya çıkışı üzerine bir yorum yapılmıştır. Sonraki kısımda özel görelilik ve genel görelilik teorileri için gerekli olan matematiksel alt yapılardan bahsedilmiştir.

Daha sonra Newton'un ortaya attığı mutlak uzay kavramı üzerinde durulmuş ve bu kavramın ortaya çıkışında Newton'un yapmış olduğu düşünce deneyi detaylı olarak anlatılmıştır. Buna ilk itiraz Berkeley tarafından yapılmıştır ve bu düşünce deneyi Berkeley tarafından tekrarlandığında bu deneyin sonuçları tekrar yorumlanmıştır. Mach ve Berkeley'in ortak görüşü; düşünce deneyindeki su yüzeyinde oluşan parabolün mutlak uzayla değil evrendeki bütün cisimlerin arasındaki gravitasyon etkileşmesinin sonucu olduğudur.

Bir diğer tartışma konumuz Schwarzschild geometrisi üzerine olmuştur. Bu geometrinin statik, küresel simetrik bir yıldızın dışındaki uzayın geometrisini tarif ettiği vurgulanmıştır. Dolayısıyla bir yıldızın dışındaki parçacığı veya fotonu incelemek için bu geometriye başvuracak olmamız, bu geometrinin önemini daha iyi vurgulamaktadır.

Genel görelilik teorisinin diğer testleri ise; jeodezikten sapma ve gravitasyon dalgalarının belirlenimi olarak vurgulanmıştır. Bu kısımda üç çeşit presesyondan bahsedilmiş ve bunların her birinin katkıları üzerine yorumlar yapılmıştır.

Son olarak ise Lense-Thirring etkisi üzerinde durulmuştur. Bu olay bazı kaynaklarda karşımıza Einstein-Lense-Thirring etkisi olarak da çıkabilmektedir. Bu etki dönen koordinat sistemlerinin ve dönen cisimlerin şaşırtıcı bir sonucudur. Bu etkiye göre, dönen cisimler uzay-zamanı sürükler, diğer bir deyişle ekstra bir eğrilik oluşturacaktır. Bu tıpkı uyuyan bir insanın, yatakta dönerken çarşafı üzerine sarması gibi düşünülebilir. Bu kısımda Lense-Thirring etkisinin tanımı verildikten sonra, deneysel gözlemler

zerinde durulmuştur. Daha nceki yıllarda Lageos uyduları her ne kadar bu etkinin varlığını kanıtlasa da, elde edilen veriler tatmin edici değildir. Fakat 2004 yılında yollanan bir diğer uydu Gravity Probe B'nin sonuçları, genel görelilik teorisinin tahminleri ile daha tutarlı sonuçlar vermektedir.

KAYNAKLAR

- Anonim. 2004a. Dünya Uzayı Üzerine Sarıyor. Bilim ve Teknik Dergisi, Kasım 2004, pp.16. Türkiye.
- Anonim. 2004b. Gravity Probe B Uzaya Gönderildi. Bilim ve Teknik Dergisi, Mayıs 2004, pp. 10. Türkiye
- Carroll, S.M. 2004. An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry. Addison Wesley, 513 p., USA.
- Ciufolini, I. 2004. Frame Dragging and Lense-Thirring Effect. General Relativity and Gravitation Springer, Vol. 36 (10), pp. 2257-2270.
- Ciufolini, I. 2007. Dragging of Inertial Frames. Nature Publishing Group, Vol. 449 (6), pp. 41-47.
- Embacher, F. 2005. The Thirring-Lense Effect. International Journal of Modern Physics D, Vol. 14 (12), pp. 1977-1988.
- Everitt, C.W.F., DeBra, D.B., Parkinson, B.W., Turneare, J.P., Conklin, J.W., Heifetz, M.I., Keiser, M., Silbergleit, A.S., Holmes, T., Kolodziejczak, J., Al-Meshari, M., Mester, J.C., Muhlfelder, B., Solomonik, V.G., Stahl, K., Worden, P.W., Jr., Bencze, W., Buchman, S., Clarke, B., Al-Jadaan, A., Al-Jibreen, H., Li, J., Lipa, J.A., Lockhart, J.M., Al-Suwaidan, B., Taber, M. and Wang, S. 2011. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity. Physical Review Letters, PRL 106, pp.221101-1 – 221101-5.
- Gündüz, E. 2008. Modern Fiziğe Giriş. Ege Üniversitesi Basımevi, 595 p., İzmir.
- Hartle, J.B. 2003. An Introduction to Einstein's General Relativity. Addison Wesley, 582 p., USA.
- Kangal, E.E. 2008. Genel Görelilik Kuramında (1+1) Boyutlu Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi. Yüksek Lisans Tezi, 72 p., Türkiye.
- Karakaş, Ş. 2006. Gravitasyonel Alan Denklemleri ve Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, 48 p., Türkiye.

- Kibble, T.W. and Berkshire F.H., (Çev.: Çolakoğlu K. 1999.) Klasik Mekanik. Palme Yayıncılık, 361 p., Ankara.
- McMahon, D. 2006. Relativity Demystified. McGraw Hill, 344p., USA.
- Ozansoy, K.O. 2012. Gravitasyon ve Kozmoloji Ders Notları. Ankara Üniversitesi, 55p., Ankara.
- Önem, Ş.C. 2011. Mühendislik ve Fizikte Matematik Metodlar. Birsen Yayınevi, 435 p., İstanbul.
- Özemre, A.Y. 1982. Gravitasyonun Rölativist Teorileri. İstanbul Üniversitesi Yayınları, 202p., İstanbul.
- Rızaoğlu, E. ve Sünel, N. 2011. Klasik Mekanik. Okutman Yayıncılık, 703 p., Ankara.
- Ryder, L. 2009. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press, 441 p., New York.
- Sabuncuoğlu, A. 2010. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, 515 p., Ankara.
- Sağel, M.K. 2003. Vektörel Analiz ve Tensör Analizine Giriş Cilt III. AÜFF Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 129 p., Ankara.
- Schutz, B. 2011. A First Course in General Relativity. Cambridge University Press, 393 p., United Kingdom.
- Semiz, İ. 2011. 50 Soruda Görelilik Kuramları. Bilim ve Gelecek Kitaplığı, 267 p., Türkiye.
- Turgut, S. 2005. Genel Görelilik. Bilim ve Teknik Dergisi, Mart 2005, pp. 38-45. Türkiye.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet ERSOY

Doğum Yeri : ESKİŞEHİR

Doğum Tarihi : 06.10.1987

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : H. Ahmet Kanatlı Lisesi –ESKİŞEHİR (Haziran 2004)

Lisans : Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü
(Temmuz 2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik A.B.D.
(Eylül 2010-Mayıs 2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Kamil Özdağ Fen Fakültesi Fizik
Bölümü (Şubat 2010 – Eylül 2010)

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (Eylül 2010-)

Yayınları (SCI ve diğer)

M. K. BAHAR, **A. ERSOY**. 2010. Elektrik Alan Altındaki Kare Kuantum Kuyusunun Elektronik Özelliklerinin Pertürbatif ve Analitik Yöntemle İncelenmesi, SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Cilt:14, Sayı:1, p. 55-61.