

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARI ÜZERİNE

ZELİHA BEDİR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

2013

T. C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARI ÜZERİNE

ZELİHA BEDİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖZNUR GÖLBAŞI

SİVAS

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI

Üye : Doç. Dr. A. Sinan ÖZKAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasret YAZARLI

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

02/08/2013

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Mustafa DEĞİRMENCİ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
SUMMARY	ii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	3
1.1. Yarıgruplar	3
1.2. Birleşimlerin Tam X -yarılatısları	15
2. İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARI	29
3. İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARININ İDEMPOTENT VE SAĞ BİRİM ELEMANLARI	39
3.1. $Z_1 = \emptyset$ iken İdempotent ve Sağ Birim Elemanlar	49
3.2. $Z_1 \neq \emptyset$ iken İdempotent ve Sağ Birim Elemanlar	57
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	66
KAYNAKLAR	67

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARI ÜZERİNE

Zeliha BEDİR

Cumhuriyet Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç.Dr.Öznur GÖLBAŞI

Bu çalışmada X boş olmayan bir küme olmak üzere elemanları

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5$$

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_4 \subset Z_5$$

$$Z_3 \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_3 \neq \emptyset, Z_3 \cup Z_4 = Z_5$$

koşullarını sağlayan $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ birleşimlerin tam X -yarılatısının özellikleri belirlenmiştir. D nin bu özelliklerinden faydalanılarak D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu olan $B_X(D)$ nin sağ birim ve idempotent elemanlarının yapısı tarif edilmiştir. $B_X(D)$ nin sağ birim ve idempotent elemanları arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Ayrıca X sonlu bir küme iken $B_X(D)$ nin sağ birim ve idempotent elemanlarının sayısını veren formül elde edilmiştir.

Çalışma kapsamında D ye tam izomorf olan birleşimlerin tam X -yarılatılarının sınıfı $\sum_5(X, 5)$ olmak üzere bu sınıfın elemanları karakterize edilmiştir. Ayrıca $\sum_5(X, 5)$ sınıfının yarılatıları ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim ve idempotent elemanlarının yapısı $B_X(D)$ nin sağ birim ve idempotent elemanları yardımı ile tarif edilmiştir. Bununla birlikte X sonlu iken $\sum_5(X, 5)$ sınıfının yarılatıları ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim ve idempotent elemanlarının sayısını veren formül bulunmuştur.

Anahtar sözcükler: Yarıgrup, İkili bağıntı, Yarılatı, Sağ Birim Eleman, İdempotent Eleman

SUMMARY

MSc Thesis

ON COMPLETE SEMIGROUP OF BINARY RELATIONS

Zeliha BEDİR

Cumhuriyet University

Faculty of Science

Department of Mathematics

Supervisor: Asoc. Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

In this study, let X be a nonempty set, $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ be a finite X -semilattice of unions which satisfies the following conditions:

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5$$

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_4 \subset Z_5$$

$$Z_3 \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_3 \neq \emptyset, Z_3 \cup Z_4 = Z_5$$

Firstly, we describe the properties of D . Then, we describe the construction of right unit and idempotent elements of $B_X(D)$. Additionally, by the help of the structure of idempotent elements of $B_X(D)$ we can obtain the characteristic properties of the right unit elements of $B_X(D)$. Thus when X is a finite set, one can also obtain the number of idempotent elements by taking into consideration the number of right unit elements.

Actually, by the help of D we characterize the class of which elements are isomorphic to D . By the symbol $\sum_5(X, 5)$ we denote the class of all X -semilattice of unions whose every element is isomorphic to D . Besides, by means of right unit and idempotent elements of $B_X(D)$ for any $Q \in \sum_5(X, 5)$, we can describe the structure of right unit and idempotent elements of $B_X(D)$.

Additionally, by the help of the structure of idempotent elements of $B_X(D)$ we can obtain the characteristic properties of the right unit elements of $B_X(D)$. Thus

when X is a finite set, one can also obtain the number of idempotent elements by taking into consideration the number of right unit elements.

Key Word: Semigroup, Binary relation, Semilattice, Right unit elements, Idempotent element.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması için beni her aŐamada yönlendiren, bana her açıdan yardımcı olan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI' na sonsuz saygı ve içten teŐekkürlerimi sunarım.

ÇalıŐmalarımnda deneyim, bilgi ve desteğini esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. NeŐet AYDIN, Yrd. Doç. Dr. Emine KOÇ ve Dr. Didem YEŐİL SUNGUR 'a sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalıŐmam boyunca benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen ablam Yrd. Doç. Dr. Gülay BEDİR ve aileme yürekten teşekkür ederim.

Zeliha BEDİR

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	Birleşimlerin tam X -yarılatısı
B_X	İkili bağıntıların yarıgrubu
$N(D, D')$	D' kümesinin D içindeki alt sınırları kümesi
$\Lambda(D, D')$	D' kümesinin en büyük alt sınırı
$\Sigma(X, m)$	m elemanlı birleşimlerin tam X -yarılatılarının sınıfı
$\Sigma_n(X, m)$	$\Sigma(X, m)$ sınıfında n .sırada olan D ye izomorf olan birleşimlerin tam X -yarılatılarının sınıfı
$B_X(D)$	D ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu
$\Sigma(D)$	D nin tüm XI -yarılatılarının kümesi
$E_X^{(r)}(D')$	$B_X(D')$ nün tüm sağ birim elemanlarının kümesi
I	$B_X(D)$ nin tüm idempotent elemanlarının kümesi
$\phi(Q)$	Q, XI -alt yarılatısının bütün tam otomorfizmlerinin kümesi
$\Omega(Q)$	$\Omega(Q) = \{Q' \mid Q', D \text{ nin } XI\text{-alt yarılatısı ve } Q \text{ ile } Q' \text{ tam izomorf}\}$
$I^*(Q)$	$I^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q \vee XI} E_X^{(r)}(D')$
$C(D)$	D nin karakteristik kümeler ailesi
$\chi : D \rightarrow C(D)$	D nin karakteristik dönüşümü
Y_i^α	$Y_{T_i}^\alpha$

GİRİŞ

Yarıgrup teorisinin temel amaçlarından biri, bir yarıgrupun mümkün olan bütün çeşitlerini sınıflandırmak ve yapılarını açıklamaktır. Bunu gerçekleştirmek için yarıgruplar üzerinde çeşitli sınırlamalar yapılarak yarıgruplar çeşitlerine ayrılır. Bu sınırlamalar farklı yollarla yapılabilir. Örneğin; dönüşümlerin yarı grubu ve ikili bağıntıların yarı grubu gibi. İkili bağıntıların yarı gruplarının sınıfı ise herhangi bir yarı grubun bu sınıftan alınan bir yarı grubun alt yarı grubuna izomorf olmasından dolayı yarı grup teorisinde önemli bir rol oynar. Öte yandan bir yarı grubun sağ birimleri, idempotentleri, regüler elemanları ve bu tür elemanların sayıları hakkındaki bilgiler yarı grup teorisinde büyük önem taşımaktadır.

İkili bağıntıların yarı grubu çalışılırken birleşimlerin tam X -yarılatisi metodu önemli sonuçlar verir. Bu sonuçlar ikili bağıntıların yarı grupları ile ilgili sistematik çalışmalara ve yarı grupların önemli sınıflarına birleşimlerin tam X -yarılatisi yoluyla uygulanır.

İkili bağıntılar kavramı matematiğin temel kavramlarından biridir. İkili bağıntılar teorisinin temel kavramları ilk olarak Morgan, Pierce ve Frege nin matematiksel mantıkla ilgili çalışmalarında ele alınmıştır. 1890 lı yıllarda E. Schröder in "Cebirsel Mantık" kitabının 3. cildinde ikili bağıntılar teorisi sistematik olarak açıklanmıştır. 20. yy başlarında Whitehead ve Russel tarafından hazırlanan ve Schröder in çalışmalarına dayanan kitapta bir bölüm bu teoriyi içermektedir. Fakat ikili bağıntılar teorisindeki bu çalışmalar sadece matematiksel mantığın temeli olarak sunulmuş ve matematiğin diğer alanlarında neredeyse hiç kullanılmamıştır. Fransız matematikçi Riquet, Schröder ikili bağıntılar teorisini modernize etmiştir ve uygulamalar için daha elverişli hale getirmiştir. Bu teoriyi kullanarak sıralı kümeler teorisini sistematik olarak oluşturmuştur.

Yarı gruplar teorisinde her yarı grup ikili bağıntılar yarı grubunun bir alt yarı grubuna izomorftur. Bu nedenle yarı grup teorisinde ikili bağıntıların yarı grubu önemli rol oynamaktadır. Ayrıca yarı grupların idempotentleri, tek taraflı birimleri ve adjoint elemanları hakkındaki bilgiler yarı grupların soyut özelliklerinin incelenmesinde önem taşımaktadır. İlk kez Diasamidze (2000) ikili bağıntıların tam yarı gruplarını ve bu yarı grubun önemli bir sınıfı olan birleşimlerin tam X -yarılatilerini kullanarak

ikili bağıntıların yarıgrubunu sistematik olarak incelemiştir. Ayrıca ikili bağıntıların yarıgruplarının yapısını daha iyi anlayabilmek için ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim, idempotent ve regüler elemanlarının yapısını karakterize etmiştir. (Diasamidze 2003, Diasamidze ve ark., 2007, 2010)

Bu tezde Diasamidze nin geliştirmiş olduğu yöntem kullanılarak elemanları

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5$$

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_4 \subset Z_5$$

$$Z_3 \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_3 \neq \emptyset, Z_3 \cup Z_4 = Z_5$$

koşullarını sağlayan $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ birleşimlerin tam X - yarılatisine tam izomorf olan birleşimlerin tam X - yarılatilerinin sınıfı karakterize edilecektir. Bu sınıfın tam X - yarılatileri tarafından belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgruplarının sağ birim ve idempotent elemanların yapısı $B_X(D)$ nin sağ birim ve idempotent elemanları yardımıyla tarif edilecektir. Ayrıca X sonlu bir küme iken bu sınıfın yarılatileri ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısını veren formül bulunacaktır.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde ilk olarak yarıgruplar konusundaki temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

1.1. Yarıgruplar

Tanım 1.1.1: S boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $S \times S$ den S üzerine tanımlı olan fonksiyona S üzerinde bir *ikili işlem* denir.

Tanım 1.1.2: S boş kümeden farklı bir küme ve S üzerinde

$$\begin{aligned} \cdot : S \times S &\longrightarrow S \\ (x, y) &\longrightarrow x.y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı bir ikili işlem olsun. Bu durumda (S, \cdot) ikilisine bir *grupoid* denir.

Tanım 1.1.3: S bir grupoid olmak üzere \cdot işlemi birleşme özelliğini sağlıyor, yani $\forall x, y, z \in S$ için

$$x.(y.z) = (x.y).z$$

oluyor ise S ye yarıgrup denir.

S kümesi sonlu elemana sahip bir yarıgrup ise S ye *sonlu yarıgrup* denir.

Tanım 1.1.4: S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için

$$x.y = y.x$$

sağlanıyor ise bu durumda S ye *değişmeli yarıgrup* denir.

Örnek 1.1.5 (\mathbb{N}, \cdot) bilinen çarpma işlemi ile bir yarıgruptur.

$(\mathbb{N}, +)$ bilinen toplama işlemi ile bir yarıgruptur.

Örnek 1.1.6: $(\mathbb{N}, *)$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$n * m = \max \{n, m\}$$

işlemi ile bir yarıgruptur.

Örnek 1.1.7: $(\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{Q}, \cdot) , $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{R}, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{C}, \cdot) , $(\mathbb{C}, +)$ kümeleri birer yarıgruptur.

Örnek 1.1.8: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \geq 1, n \in \mathbb{N} \right\}$ üst üçgensel matrisler kümesi

olsun. S matrislerde bilinen çarpma işlemine göre bir yarıgruptur.

Örnek 1.1.9: $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $T_X = \{\alpha : X \longrightarrow X \mid \alpha \text{ fonksiyon}\}$ kümesini alalım.

$$\forall \alpha, \beta \in T_X \text{ için } (\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)), \quad \forall x \in X$$

şeklinde fonksiyonlarda bilinen bileşke işlemi ile (T_X, \circ) bir yarıgruptur.

Örnek 1.1.10: $S = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki aşağıdaki tabloda verilen işlem tanımlansın.

$$\begin{array}{c} \cdot \quad a \quad b \quad c \\ a \quad a \quad b \quad c \\ b \quad b \quad a \quad c \\ c \quad c \quad b \quad c \end{array}$$

S kümesi bu işlem ile bir yarıgruptur.

Örnek 1.1.11: n herhangi bir doğal sayı olmak üzere $M = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tamsayıların bir kümesi olsun. M kümesi üzerindeki işlem $m_1, m_2 \in M$ için $m_1.m_2$ çarpımının n ile bölümünden kalandır. $(M, *)$ kümesi tanımlanan bu işlem ile değişmeli bir yarıgruptur.

Burada $*$ işlemi $m_1 * m_2 = n.t - m_1.m_2$ biçimindedir. M kümesi verilen bu işlem ile bir değişmeli yarıgruptur.

Gerçekten;

-İyi tanımlıdır.

$m_1 * m_2 < n$ olduğundan $m_1 * m_2 \in M$ dir. O halde işlem iyi tanımlıdır.

-Birleşmelidir.

$$m_1 * m_2 = m_1.m_2 - n.k; k \in \mathbb{Z}$$

$m_1, m_2, m_3 \in M$ ve $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} (m_1 * m_2) * m_3 &= (m_1.m_2 - n.k) * m_3 \\ &= (m_1.m_2 - n.k).m_3 - n.t \\ &= m_1.m_2.m_3 - n.k.m_3 - n.t \\ &= m_1.m_2.m_3 - n.(k.m_3 + t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} m_1 * (m_2 * m_3) &= m_1 * (m_2.m_3 - n.t) \\ &= m_1.(m_2.m_3 - n.t) - n.k \\ &= m_1.m_2.m_3 - m_1.n.t - n.k \\ &= m_1.m_2.m_3 - n.(m_1.t + k) \end{aligned}$$

olduğundan $(m_1 * m_2) * m_3 = m_1 * (m_2 * m_3)$ dir.

-Değişmelidir.

$$m_1 * m_2 = m_1.m_2 - n.k = m_2.m_1 - n.k = m_2 * m_1$$

O halde M kümesi tanımlanan bu işlem ile değişmeli bir yarıgruptur.

Örnek 1.1.12:

$$A = \{f(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a \text{ kapalı karede tanımlı sürekli fonksiyonlar}\}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar kümesini ele alalım. Bu kümeden $K_1(x, y)$ ve $K_2(x, y)$ fonksiyonlarını düşünelim. Bu iki eleman için $*$ işlemi

$$K_1 * K_2 = \int_0^a K_1(x, t) . K_2(t, y) dt$$

olarak tanımlansın. Kapalılık özelliğinin sağlandığı açıktır. Üstelik

$$\begin{aligned} (K_1 * K_2) * K_3 &= \left(\int_0^a K_1(x, t) . K_2(t, y) dt \right) * K_3 \\ &= \int_0^a \left(\int_0^a K_1(x, t) . K_2(t, \theta) dt \right) . K_3(\theta, y) d\theta \\ &= \int_0^a K_1(x, t) . \left(\int_0^a K_2(t, \theta) K_3(\theta, y) . d\theta \right) dt \\ &= \int_0^a K_1(x, t) . (K_2 * K_3)(t, y) dt \\ &= K_1 * (K_2 * K_3) \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği de sağlanır.

O halde A kümesi tanımlanan işlem ile bir yarıgruptur.

Tanım 1.1.13: $(S, .)$ bir yarıgrup olsun. Eğer bir $x \in S$ için

$$\forall y \in S, x.y = y$$

oluyor ise $x \in S$ ye S nin *sol birimi* denir. Benzer şekilde bir $x \in S$ için

$$\forall y \in S, y.x = y$$

oluyor ise $x \in S$ ye S nin *sağ birimi* denir.

Tanım 1.1.14: $(S, .)$ bir yarıgrup olsun. Eğer bir $x \in S$ elemanı hem sol, hem de sağ birim ise bu durumda $x \in S$ ye S yarı grubunun *birimi* denir.

Tanım 1.1.15: Eğer bir yarı grubun birim elemanı var ise bu yarı gruba bir monoid denir. S monoidinin birimi 1_s veya kısaca 1 ile gösterilir.

Not: S yarı grubunun birim elemanı yoksa S ye birimin eklenmesi ile S^1 monoidi tanımlanabilir. Yani,

$$S^1 = \begin{cases} S & , S \text{ monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ monoid değilse} \end{cases}$$

olur.

Eğer G bir monoid ve $\forall x \in G$ için $x.x^{-1} = 1 = x^{-1}.x$ olacak şekilde $\exists x^{-1} \in G$ elemanı varsa (ters eleman) G ye bir grup denir.

Tanım 1.1.16: $(S, .)$ bir yarı grup ve $x \in S$ olsun. Eğer $\forall y \in S$ için

$$x.y = x$$

oluyor ise $x \in S$ ye *sol sıfır* ve

$$y.x = x$$

oluyor ise $x \in S$ ye *sağ sıfır* denir. Eğer x , S yarı grubunun hem sağ sıfırı, hem sol sıfırı ise x elemanına S nin *sıfır elemanı* denir.

Tanım 1.1.17: S yarı grubunun sıfır elemanı varsa S ye sıfırlı yarı grup denir. S yarı grubunun sıfırı 0_S veya kısaca 0 ile gösterilir.

Not: S yarı grubunun sıfır elemanı yoksa S ye bir 0 elemanı eklenebilir. Bu durumda

$$S^0 = \begin{cases} S & , S \text{ nin sıfır elemanı varsa} \\ S \cup \{0\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

kümesi olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.18: $(S, .)$ bir yarı grup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$e^2 = e$$

ise e ye *idempotent eleman* denir.

S yarı grubunun bütün idempotentlerinin kümesi $E = E_S$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.19: (S, \cdot) bir yarıgrup ve $y \in S$ olsun. Eğer

$$y \cdot z \cdot y = y$$

olacak şekilde bir $z \in S$ varsa y elemanına S kümesinin *regüler elemanı* denir.

Örnek 1.1.20: Sonlu bir $S = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde

$$\begin{array}{cccc} \cdot & a & b & c \\ a & a & b & c \\ b & b & a & c \\ c & c & b & c \end{array}$$

işlemi tanımlansın. (S, \cdot) bir yarıgruptur.

Bu küme için $a \in S$ birim eleman, $c \in S$ sağ sıfır, a ve c idempotent elemandır.

Üstelik S nin sol sıfır elemanı yoktur.

Örnek 1.1.21: S bir yarıgrup olmak üzere $2^S = \{A \mid A \subseteq S\}$ olsun. Bu küme üzerinde $\forall A, B \in 2^S$ için

$$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$$

işlemi tanımlansın. $(2^S, \cdot)$ kümesi verilen bu işlem ile bir yarıgruptur.

Bu yarıgruba S nin *global yarıgrubu* denir.

Tanım 1.1.22: S bir yarıgrup olsun. Eğer $x, y, z \in S$ için

$$\begin{aligned} z \cdot x &= z \cdot y \text{ iken } x = y \text{ ise } S \text{ yarıgrubu soldan kısıalma özelliğini sağlar,} \\ x \cdot z &= y \cdot z \text{ iken } x = y \text{ ise } S \text{ yarıgrubu sağdan kısıalma özelliğini sağlar} \end{aligned}$$

denir. S yarıgrubu hem sol, hem de sağdan kısıalma özelliğini sağlıyor ise S kısıalma özelliğini sağlıyor denir.

Not 1.1.23: Bütün gruplar kısıalma özelliğini sağlayan yarıgruptur.

Örnek 1.1.24: $\mathbb{Z}_{2 \times 2}$ matrisler yarıgrubunu düşünelim. Bu yarıgrup kısıalma özelliğine sahip değildir.

Çünkü

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ iken } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan kısalma özelliği yoktur.

Örnek 1.1.25: $\forall A \in \mathbb{Z}_{2 \times 2}$ için $\det(A) = 1$ ise bu durumda verilen yarıgrup kısalma özelliğini sağlar.

Tanım 1.1.26: (S, \cdot) bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Eğer A kümesi S üzerinde tanımlı çarpma işlemi kapalılık özelliğini sağlıyor ise yani

$$\forall x, y \in A \text{ için } x \cdot y \in A$$

sağlanıyor ise (A, \cdot) ya (S, \cdot) nin *alt yarı grubu* denir. $A \leq S$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.27: $S = (\mathbb{Q}, +)$ yarı grubu için $A = (\mathbb{N}, +)$ alt yarı gruptur.

Tanım 1.1.28: (S, \cdot) bir yarıgrup, $\emptyset \neq X \subseteq S$ alt kümesi olsun. S nin X i kapsayan tüm alt yarı gruplarının arakesiti kümesi, yani

$$[X]_S = \cap \{A \mid X \subseteq A, A \leq S\}$$

S nin alt yarı grubudur. Bu alt yarı gruba X kümesi tarafından üretilen alt yarı grup denir.

Eğer X kümesi tek eleman içeriyorsa yani $X = \{x\}$ ise $[x]_S$ gösterimi kullanılır.

Tanım 1.1.29: $X = \{x\}$, S yarı grubunun tek elemanlı alt kümesi ise bu durumda

$$[x]_S = \{x, x^2, x^3, \dots\}$$

kümesine *devirli yarı grup* denir.

Tanım 1.1.30: S ve T iki yarı grup olsun. Bu durumda $S \times T$ kümesi üzerinde tanımlı

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2); (x_i \in S, y_i \in T, i = 1, 2)$$

işlemlerle $S \times T$ bir yarı gruptur.

$S \times T$ *direkt çarpım yarı grubu* olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.31: $S = (\mathbb{N}, +)$, $T = (\mathbb{N}, \cdot)$ için

$$S \times T = \{(n, r) \mid n, r \in \mathbb{N}\}$$

için

$$(n, r) \cdot (m, s) = (n + m, r \cdot s)$$

bir direkt çarpım yarı grubudur.

Tanım 1.1.32: $S \times T$ direkt çarpım yarıgrubu olmak üzere

$$\begin{aligned} \pi_1 : S \times T &\longrightarrow S & \pi_2 : S \times T &\longrightarrow T \\ (x, y) &\longrightarrow x & (x, y) &\longrightarrow y \end{aligned}$$

dönüşümlerine $S \times T$ direkt çarpımlarının *izdüşüm dönüşümü* denir.

Tanım 1.1.33: (S, \cdot) ve $(P, *)$ iki yarıgrup olsun. $\alpha : S \longrightarrow P$ dönüşümü için eğer

$$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) * \alpha(y), \quad \forall x, y \in S$$

sağlamıyor ise α ya bir *yarıgrup homomorfizmi* denir.

Örnek 1.1.34: $S = (\mathbb{N}, +)$, $P = (\mathbb{N}, \cdot)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \alpha : S &\longrightarrow P \\ n &\longrightarrow \alpha(n) = 2^n \end{aligned}$$

dönüşümü bir homomorfizmdir.

Örnek 1.1.35: $S = (\mathbb{Z}, \cdot)$ yarıgrubu ve $P = (\mathbb{Z}, +)$ yarıgrubu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha : S &\longrightarrow P \\ n &\longrightarrow n \end{aligned}$$

dönüşümünü düşünelim. Bu bir homomorfizm değildir.

Tanım 1.1.36: $\alpha : S \longrightarrow P$ bir homomorfizma olsun. Eğer

$\alpha : S \longrightarrow P$ homomorfizması 1 – 1 ise α ya monomorfizm denir.

$\alpha : S \longrightarrow P$ homomorfizması örten ise α ya epimorfizm denir.

$\alpha : S \longrightarrow P$ homomorfizması hem örten, hem de 1 – 1 ise α ya izomorfizm ve S, P ye izomorftur denir ve $S \cong P$ ile gösterilir.

$\alpha : S \longrightarrow S$ homomorfizmasına endomorfizm denir.

$\alpha : S \longrightarrow S$ izomorfizm ise α ya otomorfizm denir.

Örnek 1.1.37: Her sonsuz devirli yarıgrup pozitif tamsayıların toplamsal yarıgrubuna izomorftur.

Çözüm: S sonsuz devirli bir yarıgrup olsun. $S = [x] = \{x, x^2, \dots\}$ şeklinde tek eleman tarafından üretilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha : S &\longrightarrow (\mathbb{Z}^+, +) \\ x^n &\longrightarrow \alpha(x^n) = n \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

- α homomorfizmadır.

$$\alpha(x^n \cdot x^m) = \alpha(x^{n+m}) = n + m = \alpha(x^n) + \alpha(x^m)$$

- α birebirdir.

$\alpha(x^n) = \alpha(x^m)$ olsun. α dönüşümünün tanımından $n = m$ dir. Buradan

$x^n = x^m$ elde edilir.

- α örtendir.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için S sonsuz devirli yarıgrup olduğundan $y = x^n \in S$; $\alpha(x^n) = n$ dir.

Böylece α bir izomorfizmadır. $S \cong \mathbb{Z}^+$ dir.

Tanım 1.1.38: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T_x = \{\alpha : X \rightarrow X \mid \alpha \text{ fonksiyon}\}$ olsun.

Bu durumda T_x kümesi fonksiyonlardaki bileşke işlemi ile bir yarıgruptur. (T_x, \circ) yarıgrubuna *tüm dönüşümler yarıgrubu* denir.

Örnek 1.1.39: $X = \{1, 2, 3\}$ olsun.

T_X kümesinin $3^3 = 27$ tane elemanı vardır.

$$\begin{aligned} \alpha & : X \rightarrow X \\ \alpha(1) & = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 3 \end{aligned}$$

dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \beta & : X \rightarrow X \\ \beta(1) & = 1, \beta(2) = 1, \beta(3) = 1 \end{aligned}$$

dönüşümü de

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki örnekte verilen α, β için $S = [\alpha, \beta]_{T_X}$ kümesi yani α ve β tarafından üretilen T_X in alt yarıgrubu olan S yi oluşturalım.

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \alpha^3, \beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta^3, \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\beta\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha^2\beta$$

$$\beta^2\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta^2 = \beta$$

$$\alpha\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \alpha\beta$$

olduğundan $S = \{\alpha, \beta, \alpha^2, \alpha\beta\}$ elde edilir.

Teorem 1.1.40: Her S sonlu yarıgrubu T_X in bir alt yarıgrubuna izomorftur.

Tanım 1.1.41: S bir yarıgrup ve T_X tüm dönüşümler yarıgrubu olmak üzere

$$\varphi : S \longrightarrow T_X$$

homomorfizmine S yarıgrubunun *temsili* denir.

Eğer $\varphi : S \longrightarrow T_X$ homomorfizması 1 - 1 ise φ ye *faithful temsil* denir.

Teorem 1.1.42: Her S yarıgrubunun bir faithful temsili vardır.

İspat: S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin birim elemanı yok ise 1 in eklenmesiyle $X = S^1$ kümesini oluşturabiliriz. Şimdi $T = T_{S^1}$ tüm dönüşümler yarıgrubunu düşünelim.

$x \in S$ için

$$\rho_x : S^1 \longrightarrow S^1$$

$$y \longrightarrow \rho_x(y) = x.y, (y \in S^1)$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$\rho_x \in T$ olduğu açıktır.

Üstelik $x, y \in S$ ve $\forall z \in S^1$ için;

$$\rho_{xy}(z) = (xy)z = \rho_x(yz) = \rho_x(\rho_y(z)) = \rho_x\rho_y(z) \implies \rho_{xy} = \rho_x\rho_y$$

sağlanır. Şimdi

$$\varphi : S \longrightarrow T$$

$$x \longrightarrow \rho_x$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$x, y \in S$ için;

$$\varphi(xy) = \rho_{xy} = \rho_x \rho_y = \varphi(x) \varphi(y)$$

φ , 1 – 1 dir.

$x, y \in S$ için

$$\varphi(x) = \varphi(y) \implies \rho_x = \rho_y \implies \rho_x(1) = \rho_y(1) \implies x = y$$

O halde S bir yarıgrup ve $X = S^1$ olmak üzere 1–1 bir $\varphi : S \longrightarrow T_x$ homomorfizması vardır. Yani S yarı grubunun bir faithful temsili vardır.

Örnek 1.1.43: Sonlu bir $S = \{e, a, b, c\}$ kümesi üzerinde

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & e & a & b & c & \\ e & e & a & b & c & \\ a & a & e & c & b & \\ b & b & b & b & b & \\ c & c & c & c & c & \end{array}$$

işlemi tanımlansın. $\varphi : S \longrightarrow T_{\{e,a,b,c\}}$ olacak şekilde faithful temsili vardır.

$$\begin{aligned} \varphi : S &\longrightarrow T_{\{e,a,b,c\}} \\ a &\longrightarrow \varphi(a) = \rho_a : S \longrightarrow S \\ y &\longrightarrow \rho_a(y) = a.y \end{aligned}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(e) = \rho_e = e.y &= \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & a & b & c \end{pmatrix} & \varphi(b) = \rho_b = b.y &= \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \\ \varphi(a) = \rho_a = a.y &= \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \end{pmatrix} & \varphi(c) = \rho_c = c.y &= \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- φ homomorfizma mı?

$$\varphi(a.b) = \varphi(c) = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & c & c & c \end{pmatrix}$$

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & c & c & c \end{pmatrix}$$

olduğundan $\varphi(a.b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ dir.

Bu şekilde tüm durumlara bakılırsa hepsinde eşitlik sağlanır.

$-\varphi$ birebir mi?

$x, y \in S$ için; $x \neq y$ iken $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ olduğundan birebirdir.

Yani φ faithful temsildir.

Tanım 1.1.44: $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $X \times X$ in tüm alt kümelerine X kümesi üzerinde *ikili bağıntı* denir. İkili bağıntılar $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gibi sembollerle gösterilir.

Not 1.1.45: $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere α , X kümesi üzerinde *ikili bağıntı* ise $(x, y) \in \alpha$ ifadesi $x\alpha y$ ile gösterilir. Ayrıca $x\alpha y$ ve $y\beta z$ ise $x\alpha y\beta z$ biçiminde gösterilir.

Not 1.1.46: α bir ikili bağıntı, $Y \subseteq X$ alt kümesi ve $y \in X$ olsun.

$$\alpha^{-1} = \{(x, y) \mid y\alpha x\}$$

$$\Delta_y = \{(y, y) \mid y \in Y\}$$

$$y\alpha = \{x \in X \mid y\alpha x\} \quad \text{ve} \quad \alpha y = \{x \in X \mid x\alpha y\}$$

$$Y\alpha = \bigcup_{y \in Y} y\alpha \quad \text{ve} \quad \alpha Y = \bigcup_{y \in Y} \alpha y$$

$$y\alpha = \alpha^{-1}y$$

tanımlanır.

Tanım 1.1.47: X kümesi üzerindeki tüm ikili bağıntıların kümesi B_X olmak üzere B_X kümesi üzerinde tanımlı \circ işlemi, $\forall \alpha, \beta \in B_X$ için, $\delta = \alpha \circ \beta$ olmak üzere her $x, y \in X$ için;

$$x\delta y \iff x\alpha z\beta y \text{ olacak şekilde } \exists z \in X \text{ vardır.}$$

$$\iff x\alpha z \quad \text{ve} \quad z\beta y \text{ olacak şekilde } \exists z \in X \text{ vardır.}$$

tanımlansın. \circ işlemi kapalılık ve birleşme özelliğini sağlar. Bu nedenle (B_X, \circ) bir yarıgruptur. Bu yarıgruba X kümesi üzerindeki tüm ikili bağıntıların yarıgrubu denir.

Tanım 1.1.48: X kümesi üzerinde tanımlı α ikili bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli ise α bağıntısına *denklik bağıntısı* denir.

Tanım 1.1.49: X kümesi üzerinde tanımlı α ikili bağıntısı yansımali, ters simetrik ve geçişmeli ise α bağıntısına *kısmi sıralama bağıntısı* denir. Bu durumda (S, α) kümesine *kısmi sıralı küme* denir.

Kısmi sıralama " \leq "sembolü ile gösterilir.

Not 1.1.50: X kümesi üzerinde tüm ikili bağıntıların yarıgrubu olan B_X , küme teorisindeki " \subseteq " bağıntısı ile kısmi sıralıdır.

Tanım 1.1.51: X kümesinin $\{X_i \mid i \in I\}$ alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer bu aile

$$1-X_i \neq \emptyset; \forall i \in I$$

$$2-X_i \cap X_j = \emptyset; \forall i, j \in I \text{ ve } i \neq j$$

$$3-X = \bigcup_{i \in I} X_i$$

koşullarını sağlarsa X kümesinin bir *parçalanışı* denir.

1.2. Birleşimlerin Tam X -Yarılatısları

Bu tezin ana konusunu birleşimlerin tam X -yarılatısları ve bu yarılatıslar ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrupları oluşturmaktadır. Bu bölümde birleşimlerin tam X -yarılatıslarının ve bu yarılatıslar ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının özelliklerinden bahsedilecektir. Bu bölümde verilen tanım ve teoremler Diasamidze (2003), Diasamidze ve ark. (2007), Diasamidze ve ark. (2010a,b) çalışmalarında detaylı olarak yer almaktadır.

Tanım 1.2.1: X boş kümeden farklı bir küme ve $\emptyset \neq D$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer D , kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı ise yani her $\emptyset \neq D' \subseteq D$ için $\cup D' \in D$ ise D ye birleşimlerin tam X -yarılatısları denir.

D nin bütün elemanlarının birleşimi

$$\check{D} = \bigcup_{D' \in D} D'$$

sembolü ile gösterilir ve \check{D} , D nin en büyük elemanıdır.

D birleşimlerin tam X -yarılatısları, kümelerdeki birleşme işlemi ile değişmeli ve idempotent elemanı olan bir yarıgruptur.

Not 1.2.2: D birleşimlerin tam X -yarılatısları ve $T \subseteq \check{D}$, $t \in \check{D}$, $\emptyset \neq D' \subseteq D$ ve $\alpha \in B_X$ olmak üzere aşağıdaki gösterimleri tanımlayalım:

- a) $V(D, \alpha) = \{Y\alpha \mid Y \in D\}$
- b) $V^{-1}(D, \alpha) = \{\alpha Y \mid Y \subseteq \check{D}\}$
- c) $D^* = D \setminus \{\emptyset\}$, $X^* = 2^X \setminus \{\emptyset\}$
- d) $V(\alpha) = V(2^X, \alpha)$
- e) $\tilde{V}(\alpha) = \{x\alpha \mid x \in X\}$
- f) $D'_T = \{Z' \in D' \mid T \subseteq Z'\}$
- g) $\check{D}_T = \{Z' \in D' \mid Z' \subseteq T\}$
- h) $D'_t = \{Z' \in D' \mid t \in Z'\}$

Not 1.2.3: Herhangi bir birleşimlerin tam X yarılatısları küme teorisindeki " \subseteq " kapsama bağıntısı ile kısmi sıralıdır.

Tanım 1.2.4: D bir yarılatısları, $Y, Z \in D$ için

$$Z \subset Y \text{ iken } Z \subset T \subset Y$$

olacak şekilde $T \in D$ yoksa Y, Z nin örtüsüdür denir.

Örtü bağıntısını kullanarak, sonlu D yarılatısının aşağıdaki gibi bir grafik temsili elde edebiliriz. D yarılatısının her bir elemanı küçük bir daire formunda gösterilir ve eğer $Y \supset Z$ ise Y, Z nin üzerine konuşlanır. Y elemanı Z elemanını örtüyor ise Y ve Z doğrusal bir çizgi ile birleştirilir.

Bu durum aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir. Bu diyagrama *Hasse Diyagramı* denir.



Figure 1:

Tanım 1.2.5: D kısmi sıralı bir küme ve Z_1, D nin alt kümesi olsun.

$\forall y \in Z_1$ için $x \leq y$ oluyorsa $x \in D$ elemanına Z_1 in *alt sınırı* denir. Benzer olarak $\forall y \in Z_1$ için $y \leq x$ oluyorsa $x \in D$ elemanına Z_1 in *üst sınırı* denir. Ayrıca bir $z \in D$ için $y < z$ olacak biçimde $y \in D$ yoksa $z \in D$ elemanına D nin *minimal elemanı* denir.

Tanım 1.2.6: D kısmi sıralı bir küme olsun.

i) D den alınan her eleman çiftinin en küçük üst sınırı varsa D ye *üst yarılatı*,
ii) D nin boş olmayan her alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa D ye *tam üst yarılatı* denir.

Not 1.2.7: D birleşimlerin tam X - yarılatısı ve $\alpha \in B_X$ olsun. O halde $V(D, \alpha)$ de birleşimlerin tam X -yarılatısıdır.

İspat: $D \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $Y \in D$ vardır. Buradan $Y\alpha \in V(D, \alpha)$ olur.

Şimdi bir $\emptyset \neq D_1 \subseteq V(D, \alpha)$ için

$$D' = \{Y \in D \mid Y\alpha \in D_1\}$$

kümesini tanımlayalım. D , birleşimlerin tam X - yarılatısı olduğundan $\cup D' = Y' \in D$ dir. O halde

$$\cup D_1 = \cup_{Y \in D'} Y\alpha = \left(\cup_{Y \in D'} Y \right) \alpha = (\cup D') \alpha = Y' \alpha \in V(D, \alpha)$$

olduğundan $V(D, \alpha)$ kümesi birleşme işlemine göre kapalıdır. O halde $V(D, \alpha)$ birleşimlerin tam X -yarılatisidir.

Benzer şekilde $V^{-1}(D, \alpha), D^*, X^*, V(\alpha) = V(2^*, \alpha)$ kümelerinin de birleşimlerin tam X -yarılatisi olduğu gösterilebilir.

Lemma 1.2.8: D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $\alpha, \beta \in B_X$ olsun. $V(X^*, \alpha)$ ve $V(X^*, \beta), D$ nin alt kümeleri yani $V(X^*, \alpha), V(X^*, \beta) \subseteq D$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- a) $V(D, \alpha) \subseteq D$
- b) $\emptyset \in V(D, \alpha) \iff \emptyset \in D$
- c) $\emptyset \in V(X^*, \alpha) \iff x\alpha = \emptyset; x \in X$
- d) $V(\alpha) = V(X^*, \alpha) \cup \{\emptyset\}$
- e) $V(D, \alpha) \setminus \{\emptyset\} \subseteq V(X^*, \alpha)$
- f) $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \beta) \implies V(D, \alpha) \subseteq V(D, \beta)$
- g) $D = V(D, \alpha)$ ve $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \beta) \implies D = V(D, \beta)$
- h) $D \subseteq V(\alpha)$ ve $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \beta) \implies D = V(D, \beta)$

Lemma 1.2.9: $\alpha \in B_X$ olsun.

$$\alpha \in B_X(D) \iff V(X^*, \alpha) \subseteq D$$

dir.

Tanım 1.2.10: D , birleşimlerin tam X -yarılatisi, $\alpha \in B_X$ ve

$$Y_T^\alpha = \{x \in X \mid x\alpha = T\}$$

olsun. Eğer

$$V[\alpha] = \begin{cases} V(X^*, \alpha), & \emptyset \notin D \\ V(X^*, \alpha), & \emptyset \in V(X^*, \alpha) \\ V(X^*, \alpha) \cup \{\emptyset\}, & \emptyset \notin V(X^*, \alpha), \emptyset \in D \end{cases}$$

ise o zaman α ikili bağıntısı

$$\alpha = \bigcup_{T \in V[\alpha]} (Y_T^\alpha \times T)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu gösterime α ikili bağıntısının *quasinormal gösterimi* denir.

Not 1.2.11: Bir α ikili bağıntısının quasinormal gösteriminde tüm Y_T^α kümeleri boş kümeden farklı olmak zorunda değildir. Ancak α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi varsa aşağıdakiler sağlanır.

- a) $\forall T, T' \in D, T \neq T'$ için $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \emptyset$
b) $X = \bigcup_{T \in V[\alpha]} Y_T^\alpha$

Tanım 1.2.12: D , birleşimlerin tam X -yarılatisi olmak üzere $\emptyset \neq D' \subseteq D$ olsun. Eğer D' kümesinin her elemanı \tilde{D} kümesinin elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa \tilde{D} kümesine D' kümesinin *üreteç kümesi* denir.

Ayrıca \tilde{D} kümesinin hiç bir özalt kümesi D' kümesini üretmiyorsa \tilde{D} kümesine D' kümesinin *indirgenemez üreteç kümesi* denir.

Tanım 1.2.13: D , birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $\emptyset \neq D' \subseteq D$ olsun. $T \in D'$ olmak üzere

$$l(D', T) = \cup(D' \setminus D'_T) = \emptyset$$

ise T ye D' kümesinin bir *limit elemanı* denir.

Tanım 1.2.14: D , birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $\emptyset \neq D' \subseteq D$ olsun. $T \in D'$ olmak üzere

$$l(D', T) = \cup(D' \setminus D'_T) \neq \emptyset$$

ise T ye D' kümesinin bir *nonlimit elemanı* denir.

Tanım 1.2.15: D , birleşimlerin tam X -yarılatisi, boş olmayan $D' \subseteq D$ ve

$$N(D, D') = \{Z \in D \mid Z \subseteq Z', \forall Z' \in D'\}$$

olsun. $N(D, D')$ kümesine D' kümesinin D içindeki alt sınırlarının kümesi denir.

Eğer $N(D, D') \neq \emptyset$ ise $\cup N(D, D') \in D$ elemanı D' kümesinin en büyük alt sınırlandır ve

$$\wedge(D, D') = \cup N(D, D')$$

ile gösterilir.

Tanım 1.2.16: D birleşimlerin tam X -yarılatisi olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa D ye *birleşimlerin tam XI-yarılatisi* denir.

- i) $\wedge(D, D_t) \in D, \forall t \in \check{D}$
ii) $Z = \bigcup_{t \in Z} \wedge(D, D_t), \forall \emptyset \neq Z \in D$

Teorem 1.2.17: $D_j = \{T_1, T_2, \dots, T_j\}$ ve $\emptyset \neq Y \subseteq X$ olacak biçimde X, Y kümelerini alalım.

$$f : X \rightarrow D_j, \exists y \in Y \text{ için } f(y) = T_j$$

olacak biçimdeki tüm fonksiyonların sayısı

$$s = j^{|X \setminus Y|} \left(j^{|Y|} - (j-1)^{|Y|} \right)$$

tanedir.

Tanım 1.2.18: X boş olmayan bir küme ve m ve n birer doğal sayı olsun. O zaman

- i) m elemanlı birleşimlerin tam X yarılatılarının sınıfı, $\sum(X, m)$ ile gösterilir.
- ii) D, m elemanlı birleşimlerin tam X yarılatısı olsun D, m elemanlı birleşimlerin tam X yarılatıları arasında n . sırada ise D ye izomorf olan bütün birleşimlerin tam X yarılatılarının sınıfı $\sum_n(X, m)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.19: X boş olmayan bir küme ve D birleşimlerin tam X yarılatısı olsun. $f : X \rightarrow D$ keyfi bir dönüşüm olsun. Bu şekilde tanımlanan her bir f dönüşümü için

$$\alpha_f : \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$$

biçiminde bir ikili bağıntı yazabiliriz. Bu şekildeki bütün α_f ikili bağıntılarının kümesi $B_X(D)$ olmak üzere $B_X(D), B_X$ in alt yarıgrubudur. $B_X(D)$ yarıgrubuna D birleşimlerin tam X -yarılatısı ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubu denir.

Teorem 1.2.20: D birleşimlerin tam X - yarılatısı olsun. $B_X(D)$ yarıgrubunun sağ birim elemanının var olması için gerek ve yeter koşul D nin birleşimlerin XI -yarılatısı olmasıdır.

Teorem 1.2.21: α ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanı olsun. O zaman $V(D, \alpha)$ birleşimlerin tam X -yarılatısı olur.

Teorem 1.2.22: $\varepsilon \in B_X(D)$ olsun. ε ikili bağıntısının $B_X(D)$ yarıgrubunun sağ birim elemanı olması için gerek ve yeter koşul ε nun idempotent ve $D = V(D, \varepsilon)$ olmasıdır.

Lemma 1.2.23: D birleşimlerin tam X - yarılatısı olsun.

$$\varepsilon = \varepsilon(D, f) = \bigcup_{t \in D} (\{x\} \times \wedge(D, D_t)) \cup \left((X \setminus \check{D}) \times \check{D} \right)$$

formundaki bir ε ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun sağ birimi ise ε en büyük sağ birimdir.

Teorem 1.2.24: D birleşimlerin tam X -yarılatısı, $\sum(D)$, D nin birleşimlerin tam XI -yarılatılarının kümesi olsun. O zaman $D' \in \sum(D)$ için $E_X^{(r)}(D')$, $B_X(D')$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi ve $I, B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi olmak üzere $E_X^{(r)}(D')$ ve I kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.

i) Eğer $\emptyset \in D$ ise $\sum_{\emptyset}(D) = \{D' \in \sum(D) \mid \emptyset \in D'\}$ olmak üzere

- 1) $D' \neq D'', D', D'' \in \sum_{\emptyset}(D)$ için $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \emptyset$
- 2) $I = \bigcup_{D' \in \sum_{\emptyset}(D)} E_X^{(r)}(D')$
- 3) X sonlu küme ise $|I| = \sum_{D' \in \sum_{\emptyset}(D)} |E_X^{(r)}(D')|$

ii) Eğer $\emptyset \notin D$ ise

- 1) $D' \neq D'', D', D'' \in \sum(D)$ için $E_X^{(r)}(D') \cap E_X^{(r)}(D'') = \emptyset$
- 2) $I = \bigcup_{D' \in \sum(D)} E_X^{(r)}(D')$
- 3) X sonlu küme ise $|I| = \sum_{D' \in \sum(D)} |E_X^{(r)}(D')|$

Tanım 1.2.25: D' ve D'' birleşimlerin tam X -yarılatısı, $\varphi : D' \rightarrow D''$ birebir dönüşüm olsun. Eğer her $\emptyset \neq D_1 \subseteq D$ için

$$\varphi(\cup D_1) = \bigcup_{T' \in D_1} \varphi(T')$$

koşulu sağlanıyorsa φ dönüşümüne *tam izomorfizma* denir.

Teorem 1.2.26: $D(\alpha), V(D, \alpha) \setminus \{\emptyset\}$ yarılatisinin üreteç kümesi ve α ikili bağıntısı $B_X(D)$ nin

$$\alpha = \bigcup_{T \in V(D, \alpha)} (Y_T^\alpha \times T)$$

quasinormal gösterimine sahip idempotent elemandır ancak ve ancak aşağıdaki durumlar doğrudur.

i) $V(D, \alpha)$ birleşimlerin tam XI -yarılatısidir.

ii) $\bigcup_{T' \in \check{D}(\alpha)_T} Y_{T'}^\alpha \supseteq T; \quad \forall T \in D(\alpha)$

iii) $\check{D}(\alpha)_T$ kümesinin her nonlimit elemanı için $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$ dir.

iv) $T, \check{D}(\alpha)_T$ kümesinin bir limit elemanı ise

$$B(T) = \left\{ Z \in \check{D}(\alpha)_T \mid Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset \right\}$$

kümesi için daima $\cup B(T) = T$ eşitliği sağlanır.

Diğer taraftan $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı teoremin i), ii), iii) ve iv) koşullarını sağlarsa $\alpha, B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanıdır.

Not 1.2.27: $D', D'' \in \sum'_{XI}(D)$ ve

$$\vartheta_{XI} \subseteq \left(\sum'_{XI}(D) \times \sum'_{XI}(D) \right)$$

olsun. Eğer D' ve D'' arasında bir φ tam izomorfizması varsa $D' \vartheta_{XI} D''$ olarak tanımlanır. Bu durumda ϑ_{XI} ikili bağıntısı $\sum'_{XI}(D)$ kümesi üzerinde denklik bağıntısı olur.

$\sum'_{XI}(D)$ kümesinin her bir ϑ_{XI} -denklik sınıfından birer temsilci seçelim ve bütün temsilcilerin kümesini $\sum_{XI}(D)$ ile gösterelim. Bu durumda $Q \in \sum_{XI}(D)$ için

$$Q \vartheta_{XI} = \left\{ D' \in \sum'_{XI}(D) \mid Q \text{ ile } D' \text{ tam izomorf} \right\}$$

olur.

Q yarılatisine tam izomorf olan D nin XI -yarılatisleri ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent elemanlarının kümesi $I^*(Q)$ olsun. O zaman

$$I^*(Q) = \bigcup_{D' \in Q \vartheta_{XI}} E_X^{(r)}(D')$$

olur.

Teorem 1.2.28: $I, B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- $I(D') \cap I(D'') = \emptyset, \forall D' \neq D'' \in \sum_{XI}(D),$
- $I = \bigcup_{D' \in \sum_{XI}(D)} I^*(D'),$
- X sonlu ise $|I| = \sum_{D' \in \sum_{XI}(D)} |I^*(D')|.$

Tanım 1.2.29: D birleşimlerin tam X - yarılatisi ve $C(D), \check{D}$ kümesinin ikişer ikişer ayrık alt kümelerinden oluşan bir kümeler ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $C(D)$ ailesine D yarılatisinin *karakteristik kümeler ailesi* denir.

- i) $\cap D \in C(D)$
- ii) $\cup C(D) = \check{D}$
- iii) $\forall \emptyset \neq Z \in D$ için $Z = \cup C_Z(D)$ olacak şekilde $C_Z(D) \subseteq C(D)$ vardır.

Tanım 1.2.30: D birleşimlerin tam X -yarılatısı ve $C(D)$, D nin karakteristik kümeler ailesi olsun. $\forall Z \in D$ ve

$$\hat{D}(Z) = D \setminus \{Z' \in D \mid Z \subseteq Z'\}$$

kümesi için

$$Z = (\cap D) \cup \bigcup_{Z' \in \hat{D}(Z)} \chi(Z')$$

koşulunu sağlayan

$$\chi : D \rightarrow C(D)$$

dönüşümüne D nin *karakteristik dönüşümü* denir.

Teorem 1.2.31: D birleşimlerin sonlu tam X -yarılatısı olsun. O zaman $C(D)$, D nin karakteristik kümeler ailesi ve $\chi : D \rightarrow C(D)$ karakteristik dönüşümü teklikle belirlidir.

Teorem 1.2.32: D birleşimlerin sonlu tam X -yarılatısı olsun. O zaman D nin karakteristik kümeler ailesi $C(D)$ ile D nin eleman sayısı aynıdır.

Uyarı: D_ζ , “ \leq ” kısmi sıralama bağıntısı ile tam üst yarılatıs ve bir $D \in \sum(X, m)$ birleşimlerin tam X -yarılatısına tam izomorf olsun. Ayrıca

$$\chi_\zeta : D_\zeta \rightarrow C(D_\zeta)$$

birebir ve örten dönüşüm olmak üzere

$$D' = \left\{ \bar{Z} = \chi_\zeta(\check{D}) \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_\zeta(Z)} \chi_\zeta(T) \mid Z \in D_\zeta \right\}$$

kümesi üzerinde ϑ bağıntısı,

$$\bar{Z} \vartheta \bar{Z}' \Leftrightarrow \hat{D}_\zeta(Z) \subseteq \hat{D}_\zeta(Z')$$

tanımlansın. Bu durumda D' kümesi üzerinde ϑ bağıntısı, kısmi sıralama bağıntısıdır.

Lemma 1.2.33: D_ζ , “ \leq ” kısmi sıralama bağıntısı ile tam üst yarılatis,

$$\chi_\zeta : D_\zeta \rightarrow C(D_\zeta)$$

birebir, örten dönüşüm ve

$$D' = \left\{ \bar{Z} = \chi_\zeta(\check{D}) \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_\zeta(Z)} \chi_\zeta(T) \mid Z \in D_\zeta \right\}$$

olsun. O zaman D' ve D_ζ tam izomorf olur.

O halde her $Z \in D_\zeta$ elemanı tam izomorfizma altında görüntüleri olan

$$\bar{Z} = \chi_\zeta(\check{D}) \cup \bigcup_{T \in \hat{D}_\zeta(Z)} \chi_\zeta(T)$$

ile belirlenebilir. Her bir $Z \in D_\zeta$ elemanı için yazılabilen bu eşitliklere D_ζ nun *formal eşitlikleri* denir.

Tanım 1.2.34: $Z' \in D_\zeta \setminus \{\check{D}_\zeta\}$ olsun. $Z' \in \hat{D}_\zeta(T_0)$ ve

$$\left| \hat{D}_\zeta(T_0) \setminus \hat{D}_\zeta(Z') \right| = 1$$

olacak şekilde en az bir tane $T_0 \in D_\zeta$ varsa $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanına D_ζ yarılatisinin *temel kaynak elemanı* denir.

Not 1.2.35: D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanları boş kümeden farklıdır.

İspat: $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanı olsun. O halde $\hat{D}_\zeta(T_0) \setminus \hat{D}_\zeta(Z') = \{Z'\}$ olacak şekilde en az bir tane $T_0 \in D_\zeta$ vardır. Dolayısıyla

$$\hat{D}_\zeta(T_0) = \hat{D}_\zeta(Z') \cup \{Z'\}$$

olur. $\chi_\zeta(Z') = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. χ_ζ karakteristik dönüşüm olduğundan $Z' = T_0$ olur. Dolayısıyla $Z' \in D_\zeta(Z')$ bulunur. Bu ise $\chi_\zeta(Z')$ elemanının D_ζ yarılatisinin temel kaynak eleman olması ile çelişir. O halde $\chi_\zeta(Z') \neq \emptyset$ olur. Yani D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanları boş kümeden farklıdır.

Tanım 1.2.36: $Z' \in D_\zeta$ olsun. $\chi_\zeta(Z') = \chi_\zeta(\hat{D}_\zeta)$ veya her $Z \in D_\zeta$ ve $Z' \in \hat{D}_\zeta(Z)$ için

$$\left| \hat{D}_\zeta(Z) \setminus \hat{D}_\zeta(Z') \right| \geq 2$$

ise $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanına D_ζ yarılatisinin *yardımcı kaynak elemanı* denir.

Not 1.2.37: $\chi_\zeta(\check{D}) \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin her zaman yardımcı kaynağıdır.

Teorem 1.2.38: D_ζ sonlu yarılatis ve $Z' \in D_\zeta$ elemanını örten sadece bir eleman var olsun. $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin temel kaynak elemanı olur.

Teorem 1.2.39: D_ζ sonlu yarılatis ve $Z' \in D_\zeta$ elemanını örten elemanların sayısı 2 den büyük veya eşit olsun. $\chi_\zeta(Z') \in C(D_\zeta)$ elemanı D_ζ yarılatisinin yardımcı kaynak elemanı olur.

Lemma 1.2.40: $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ ve $D_j = \{T_1, T_2, \dots, T_j\}$ iki küme olsun. Y kümesinden her $D'_j \subseteq D_j$ alt kümesine tanımlı tüm mümkün dönüşümlerin sayısı $s(k, j)$ olmak üzere; $T_j \in D_j$

$$s(k, j) = j^k - (j - 1)^k$$

şeklinde bulunur.

Teorem 1.2.41: X sonlu bir küme $D_\zeta \in \sum_n(X, m)$ yarılatisinin temel kaynak elemanlarının sayısı δ ve D_ζ nin otomorfizlerinin sayısı q olsun. Bu durumda

$$|X| = n \geq \delta \text{ ve } |\sum_n(X, m)| = s \text{ ise}$$

$$s = \frac{1}{q} \cdot \sum_{p=\delta}^m \left(\sum_{i=1}^{p+1} \left(\frac{(-1)^{p+i+1} \cdot C_{m-\delta}^{p-\delta} \cdot C_p^\delta \cdot (\delta!) \cdot ((p-\delta)!) \cdot i^n}{(i-1)! \cdot (p-i+1)!} \right) \right)$$

olur.

Teorem 1.2.42: D birleşimlerin tam X - yarılatisi olsun. Ayrıca $m \geq 1$ ve $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_m$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, T_2, \dots, T_m\}$, D birleşimlerin tam X - yarılatisi olsun. (Figure 2). O zaman Q birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi olur.

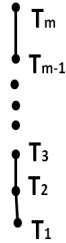


Figure 2:

Teorem 1.2.43: D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 3$ olmak üzere

$Q = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_m\}$, D birleşimlerin tam X -yarılatisinin bir alt yarılatisi olsun. Ayrıca Q yarılatisinin elemanları

$$T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}, T_1 \cup T_2 = T_3 \text{ ve } T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$$

koşullarını sağlasın (Figure 3). O zaman Q yarılatisinin birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi olması için gerek ve yeter koşul $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ olmasıdır.

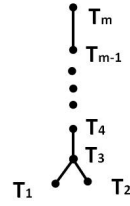


Figure 3:

Teorem 1.2.44: D birleşimlerin tam X -yarılatisi ve $m \geq 3$ olmak üzere $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$, D birleşimlerin tam X -yarılatisi olsun. Q yarılatisinin elemanları $0 \leq j \leq m - 3$ için

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m,$$

$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset \text{ ve } T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

koşullarını sağlasın (Figure 4). O zaman Q birleşimlerin tam XI -alt yarılatisi olur.

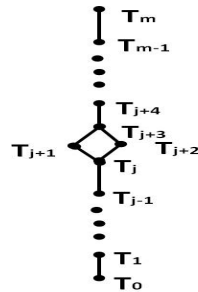


Figure 4:

Sonuç 1.2.45: $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m$ olacak şekilde $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) kümesi D birleşimlerin tam yarılatisinin bir alt yarılatisi olsun. $Q = (V, D)$ olacak biçimde $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanıdır

$\iff Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p$ ve $Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset; \forall p = 0, 1, \dots, m-1$ ve $q = 1, 2, \dots, m$ dir.

Sonuç 1.2.46: $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m$ olacak şekilde $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) kümesi D birleşimlerin tam yarılatisinin bir alt yarılatisi olsun. $Q = (V, D)$ olacak biçimde $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun sağ birimidir.

$\iff Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha \supseteq T_p$ ve $Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset; \forall p = 0, 1, \dots, m-1$ ve $q = 1, 2, \dots, m$ dir.

Sonuç 1.2.47: $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ ve $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$ olacak şekilde $Q = \{T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) kümesi D birleşimlerin tam yarılatisinin bir alt yarılatisi olsun. $Q = V(D, \alpha)$ olacak biçimde $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanıdır

$\iff Y_1^\alpha \supseteq T_1, Y_2^\alpha \supseteq T_2, Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq T_k$ ve $Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset; \forall k = 4, 5, \dots, m-1$ ve $q = 4, 5, \dots, m$ dir.

Sonuç 1.2.48: $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ ve $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$ olacak şekilde $Q = \{T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) kümesi D birleşimlerin tam yarılatisinin bir alt yarılatisi olsun. $Q = V(D, \alpha)$ olacak biçimde $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun sağ birimidir.

$\iff Y_1^\alpha \supseteq T_1, Y_2^\alpha \supseteq T_2, Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup \dots \cup Y_k^\alpha \supseteq T_k$ ve $Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset; \forall k = 4, 5, \dots, m-1$ ve $q = 4, 5, \dots, m$ dir.

Sonuç 1.2.49: $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) bir yarılatis, $0 \leq j \leq m-3$ koşulunu sağlayan j bir doğal sayı ve

$$\begin{aligned} T_0 &\subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_0 &\subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_{j+1} \setminus T_{j+2} &\neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset \text{ ve } T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3} \end{aligned}$$

olsun. $Q = V(D, \alpha)$ olacak biçimde $\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanıdır.

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha &\supseteq T_{j+1} \cap T_{j+2}, \\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha &\supseteq T_{j+2}, \\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha &\supseteq T_p, \quad Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset \end{aligned}$$

$\forall p = 0, 1, \dots, m-1$ ve $q = 1, 2, \dots, m$ ($p \neq j+2, q \neq j+3$)

Sonuç 1.2.50: $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) bir yarılatis, $0 \leq j \leq m-3$ koşulunu sağlayan j bir doğal sayı ve olsun. $Q = V(D, \alpha)$ olacak biçimde

$\alpha = \bigcup_{i=0}^m (Y_i^\alpha \times T_i)$ quasinormal gösterime sahip $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı $B_X(D)$ yarıgrubunun sağ birimidir.

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha &\supseteq T_{j+1} \cap T_{j+2}, \\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha &\supseteq T_{j+2}, \\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \dots \cup Y_p^\alpha &\supseteq T_p, \quad Y_q^\alpha \cap T_q \neq \emptyset \end{aligned}$$

$\forall p = 0, 1, \dots, m-1$ ve $q = 1, 2, \dots, m$ ($p \neq j+2, q \neq j+3$).

Sonuç 1.2.51: $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m$ olacak şekilde $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 1$) bir yarılatis olsun. Eğer $E_X^{(r)}(Q)$ kümesi $B_X(D)$ nin tüm sağ birimlerinin kümesi ise bu kümenin eleman sayısı;

$$\begin{aligned} |E_X^{(r)}(Q)| &= \left(2^{|T_1 \setminus T_0|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T_2 \setminus T_1|} - 2^{|T_2 \setminus T_1|}\right) \\ &\quad \dots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Sonuç 1.2.52: $T_1, T_2 \notin \{\emptyset\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cup T_2 = T_3$ ve $T_3 \subset T_4 \subset \dots \subset T_m$ olacak şekilde $Q = \{T_1, \dots, T_m\}$ ($m \geq 3$) bir yarılatis olsun. Eğer $E_X^{(r)}(Q)$ kümesi $B_X(D)$ nin tüm sağ birimlerinin kümesi ise bu kümenin eleman sayısı,

$$|E_X^{(r)}(Q)| = \left(4^{|T_4 \setminus T_3|} - 3^{|T_4 \setminus T_3|}\right) \dots \left(m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - (m-1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|}\right) \cdot m^{|X \setminus T_m|}$$

biçiminde bulunur.

Sonuç 1.2.53: $Q = \{T_0, T_1, \dots, T_j, \dots, T_m\}$, ($m \geq 3$) bir yarılatıs, $0 \leq j \leq m-3$ koşulunu sağlayan j bir doğal sayı ve

$$\begin{aligned} T_0 &\subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_0 &\subset T_1 \subset \dots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \dots \subset T_m, \\ T_{j+1} \setminus T_{j+2} &\neq \emptyset, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \emptyset \text{ ve } T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3} \end{aligned}$$

olsun. Eğer $E_X^{(r)}(Q)$ kümesi $B_X(D)$ nin tüm sağ birimlerinin kümesi ve $j = 0$ ($T_j = T_0$) ise bu kümenin eleman sayısı;

$$\begin{aligned} \left| E_X^{(r)}(Q) \right| &= \left(2^{|T_1 \setminus T_2|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|T_2 \setminus T_1|} - 1 \right) \cdot \left(5^{|T_4 \setminus T_3|} - 4^{|T_4 \setminus T_3|} \right) \\ &\dots \left((m+1)^{|T_m \setminus T_{m-1}|} - m^{|T_m \setminus T_{m-1}|} \right) \cdot (m+1)^{|X \setminus T_m|} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur..

2. İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARI

X boş olmayan bir küme ve $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ kümesi X in alt kümelerinden oluşan ve elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan bir aile olsun. D kümesi

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5$$

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_4 \subset Z_5$$

$$Z_3 \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_3 \neq \emptyset, Z_3 \cup Z_4 = Z_5$$

koşullarını sağlam. O halde kapsama bağıntısına göre D kümesinin Hasse Diyagramı Figure 5 deki gibidir. D nin her alt kümesinin kapsama bağıntısına göre bir en küçük

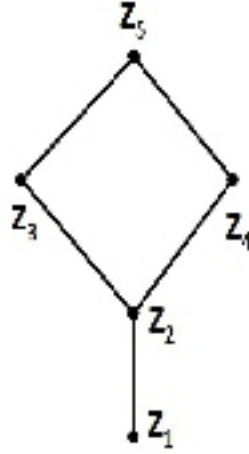


Figure 5:

üst sınırı var olduğundan D kümelerdeki kapsama bağıntısı ile bir üst yarılatistir. Ayrıca D kümesi, kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olduğundan tam X -yarılatistir ve en büyük elemanı $\check{D} = Z_5$ dir.

Teorem 1.2.31 den dolayı D nin karakteristik kümeler ailesi olan $C(D)$ ve $\chi : D \rightarrow C(D)$ karakteristik dönüşümü teklikle belirlidir. Ayrıca Teorem 1.2.32 den $C(D)$ nin eleman sayısı D nin eleman sayısına eşit olduğu biliniyor. O halde P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 kümeleri $\check{D} = Z_5$ in ikişer ikişer ayrık alt kümeleri olmak üzere $C(D)$ karakterisik kümeler ailesi

$$C(D) = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$$

ve karakteristik dönüşümü

$$\chi_{\zeta} : \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi Lemma 1.2.33 den faydalanarak D nin formal eşitliklerini bulalım. χ karakteristik dönüşüm olmak üzere;

$$\forall Z \in D \text{ için } \hat{D}(Z) = D \setminus \{T \in D \mid Z \subseteq T\}$$

$$\bar{Z} = \chi_{\zeta}(\check{D}) \cup \bigcup_{T \in \hat{D}(Z)} \chi_{\zeta}(T)$$

formal birleşimi tanımlanabilir. Bu şekildeki formal birleşimlerin kümesi D' ile gösterilirse Lemma 1.2.33 den D' ve D kümeleri tam izomorf olur. O halde D nin elemanları formal birleşimlerle ifade edilebilir.

$$\hat{D}(Z) = D \setminus \{Z' \in D \mid Z \subseteq Z'\} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \hat{D}(Z_1) &= D \setminus \{Z' \in D \mid Z_1 \subseteq Z'\} = D \setminus \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = \emptyset \\ \hat{D}(Z_2) &= D \setminus \{Z' \in D \mid Z_2 \subseteq Z'\} = D \setminus \{Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = Z_1 \\ \hat{D}(Z_3) &= D \setminus \{Z' \in D \mid Z_3 \subseteq Z'\} = D \setminus \{Z_3, Z_5\} = \{Z_1, Z_2, Z_4\} \\ \hat{D}(Z_4) &= D \setminus \{Z' \in D \mid Z_4 \subseteq Z'\} = D \setminus \{Z_4, Z_5\} = \{Z_1, Z_2, Z_3\} \\ \hat{D}(Z_5) &= D \setminus \{Z' \in D \mid Z_5 \subseteq Z'\} = D \setminus \{Z_5\} = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} \end{aligned}$$

kümeleri kullanılarak D nin formal eşitlikleri;

$$\bar{Z} = P_5 \cup \bigcup_{T \in \hat{D}(Z)} \chi_{\zeta}(T)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} Z_1 &= P_5 \\ Z_2 &= P_5 \cup \chi(Z_1) = P_5 \cup P_1 \\ Z_3 &= P_5 \cup \chi(Z_1) \cup \chi(Z_2) \cup \chi(Z_4) = P_5 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \\ Z_4 &= P_5 \cup \chi(Z_1) \cup \chi(Z_2) \cup \chi(Z_3) = P_5 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \\ Z_5 &= P_5 \cup \chi(Z_1) \cup \chi(Z_2) \cup \chi(Z_3) \cup \chi(Z_4) = P_5 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \end{aligned} \tag{1}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi X kümesi sonlu iken $\sum_5(X, 5)$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Lemma 2.1: X sonlu bir küme, $|X| = n \geq 3$ ve $D \in \sum_5(X, 5)$ için $|\sum_5(X, 5)| = s$ olsun. O halde

$$s = \frac{1}{2} \cdot (6^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^n - 3^n) \quad (2)$$

olur.

İspat: D nin otomorfizmleri

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 \\ Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 : \begin{pmatrix} Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 \\ Z_5 & Z_3 & Z_4 & Z_2 & Z_1 \end{pmatrix}$$

formunda olup 2 tanedir. O halde D nin otomorfizmlerinin sayısı $q = 2$ dir. Temel kaynak elemanların sayısı $\delta = 3$ ve $C_j^k = \frac{j!}{k!(j-k)!}$ olduğundan Teorem 1.2.41 den dolayı

$$s = \frac{1}{q} \cdot \sum_{p=\delta}^m \left(\sum_{i=1}^{p+1} \left(\frac{(-1)^{p+i+1} \cdot C_{m-\delta}^{p-\delta} \cdot C_p^s \cdot (\delta!) \cdot (p-\delta)! \cdot i^n}{(i-1)! \cdot (p-i-1)!} \right) \right)$$

olup gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$s = \frac{1}{2} \cdot (6^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^n - 3^n)$$

olarak bulunur.

Örnek: X kümesinin eleman sayısı sırası ile; $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ olarak alındığında $\sum_5(X, 5)$ sınıfının ve $B_X(D)$ kümesinin eleman sayılarını hesaplayalım.

(2) eşitliğinde $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ sayıları yerine koyulduğunda $\sum_5(X, 5)$ sınıfının eleman sayısı sırası ile

$$\left| \sum_5(X, 5) \right| = s = 3, 54, 615, 5670, 41763, 348919, 2492535, 17127990$$

olarak bulunur.

Şimdi verilen n değerleri için $B_X(D)$ kümesinin eleman sayısını sırası ile bulalım.

$$|B_X(D)| = |D|^{|X|}$$

olduğundan

$$|B_X(D)| = 5^n$$

olur. Buradan verilen $|X| = n$ değerleri için

$$|B_X(D)| = 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625, 1953625, 9765625$$

olarak bulunur

Şimdi D tam X -yarılatısının tüm tam X -alt yarılatılarını bulalım.

Lemma 2.2:

- 1) $\{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}$
- 2) $\{Z_5, Z_4\}, \{Z_5, Z_3\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_4, Z_2\}, \{Z_4, Z_1\},$
 $\{Z_3, Z_2\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_2, Z_1\}$
- 3) $\{Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\},$
 $\{Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_3, Z_2, Z_1\}$ (3)
- 4) $\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\}$
- 5) $\{Z_5, Z_4, Z_3\}$
- 6) $\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}$
- 7) $\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\} = \check{D}$

İspat: D nin bir elemanlı alt kümeleri birleşim işlemine kapalı olduğundan (3) de verilen kümeler D nin tam X -alt yarılatıları olur.

D nin iki elemanlı alt kümelerinin sayısı $C_5^2 = 10$ dur. D nin zincir oluşturan aşağıdaki 9 alt kümesi

$$\{Z_5, Z_4\}, \{Z_5, Z_3\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_4, Z_2\},$$

$$\{Z_4, Z_1\}, \{Z_3, Z_2\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_2, Z_1\}$$

kümelerdeki birleşme işlemine kapalı olduklarından D nin tam X -alt yarılatıları olur. Fakat $\{Z_4, Z_3\}$ alt kümesi ise kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olmadığından D nin tam X -alt yarılatısı değildir.

D nin üç elemanlı alt kümelerinin sayısı $C_5^3 = 10$ dur. D nin zincir oluşturan aşağıdaki 8 alt kümesi

$$\{Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, Z_2\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\},$$

$$\{Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_4, Z_2, Z_1\}, \{Z_3, Z_2, Z_1\}, \{Z_5, Z_4, Z_3\}$$

kümelerdeki birleşme işlemine göre kapalı olmadığından D nin tam X -alt yarılatısı değildir.

Benzer olarak D nin geriye kalan diğer alt kümelerinin de D nin tam X -alt yarılatıları oldukları gösterilebilir.

Lemma 2.2. de verilen D nin tam X alt yarılatılarının diyagramı Figure 6 daki gibidir.

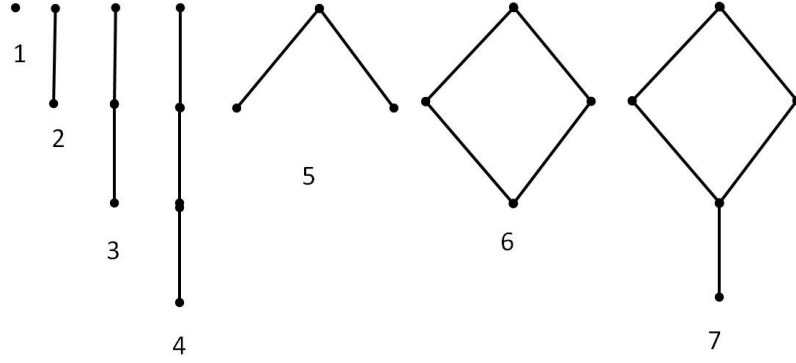


Figure 6:

Şimdi D nin tam X alt yarılatislerinden XI olanları belirleyeceğiz.

Lemma 2.3: D kümesi birleşimlerin tam XI -yarılatisidir.

İspat: Herhangi bir $t \in \check{D}$ için P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 kümeleri $\check{D} = Z_5$ in ikişer ikişer ayrık alt kümeleri ve

$$\check{D} = Z_5 = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$$

olduğundan $t, P_i (i = 1, \dots, 5)$ kümelerinden yalnızca birinin elemanı olur. O halde (1) eşitliğinden

$$D_t = \begin{cases} \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\} & , t \in P_1 \\ \{Z_5, Z_4, Z_3\} & , t \in P_2 \\ \{Z_5, Z_4\} & , t \in P_3 \\ \{Z_5, Z_3\} & , t \in P_4 \\ D & , t \in P_5 \end{cases}$$

olarak bulunur. Buradan her bir D_t kümesinin alt sınırlarının kümesi;

$$N(D, D_t) = \begin{cases} \{Z_2, Z_1\} & , t \in P_1 \\ \{Z_2, Z_1\} & , t \in P_2 \\ \{Z_4, Z_2, Z_1\} & , t \in P_3 \\ \{Z_3, Z_2, Z_1\} & , t \in P_4 \\ \{Z_1\} & , t \in P_5 \end{cases}$$

biçiminde bulunur.

Buradan tam alt sınırlar için (yani alt sınırların en büyüğü için)

$$\wedge(D, D_t) = \cup N(D, D_t)$$

olduğundan

$$\wedge(D, D_t) = \begin{cases} Z_2, & t \in P_1 \\ Z_2, & t \in P_2 \\ Z_4, & t \in P_3 \\ Z_3, & t \in P_4 \\ Z_1, & t \in P_5 \end{cases}$$

olarak bulunur.

Şimdi XI olma koşullarını inceleyelim.

i) $\forall t \in \check{D} = Z_5$ için $\wedge(D, D_t) \in D$ dir.

ii) $t \in Z_5 = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$ olup $t \in P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ için

$$\cup \wedge(D, D_t) = Z_2 \cup Z_2 \cup Z_1 \cup Z_3 \cup Z_4 = Z_5$$

$t \in Z_4 = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_5$ olup

$$\cup \wedge(D, D_t) = Z_2 \cup Z_2 \cup Z_4 \cup Z_1 = Z_4$$

$t \in Z_3 = P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5$ olup

$$\cup \wedge(D, D_t) = Z_2 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_1 = Z_3$$

$t \in Z_2 = P_1 \cup P_5$ olup

$$\cup \wedge(D, D_t) = Z_1 \cup Z_2 = Z_2$$

$t \in Z_1 = P_5$ inceleyelim.

Tanım 1.2.34 de verilen temel kaynak eleman tanımından ve Not 1.2.35, Teorem 1.2.38 den Z_1, Z_3, Z_4 ü örten sadece bir eleman olduğundan $\chi(Z_1), \chi(Z_3), \chi(Z_4)$ temel kaynak elemandır.

Tanım 1.2.36 da verilen yardımcı kaynak eleman tanımından ve Teorem 1.2.39 dan Z_2 yi örten iki eleman olduğundan $\chi(Z_2)$ yardımcı kaynak elemandır.

Not 1.2.37 den Z_5 için $\chi(Z_5)$ her zaman yardımcı kaynak elemandır.

O halde D tam X -yarılatisinin iki tane yardımcı kaynak elemanı ve üç tane temel kaynak elemanı vardır.

Yardımcı kaynak eleman boş küme olabileceğinden $\chi(Z_2) = P_2$ ve $\chi(Z_5) = P_5$ boş küme olabilir. O halde

$t \in Z_1 = P_5$ olduğunda

$Z_1 = \emptyset$ ise XI olmanın ikinci koşuluna bakmaya gerek yoktur.

$Z_1 \neq \emptyset$ ise $t \in Z_1 = P_5$ olduğundan $\wedge(D, D_t) = Z_1$ olur. Yani XI olmanın ikinci koşulu sağlanmış olur.

O halde $\emptyset \neq Z_i (\forall i = 1, 2, 3, 4, 5)$ için XI olmanın ikinci koşulu sağlanmış olur. Bu durumda Tanım 1.2.16 dan her iki koşul da sağlandığı için D birleşimlerin tam XI -yarılatisidir.

Lemma 2.4: Şekil 6 da diyagramı (1), (2), (3), (4) biçiminde olan X -alt yarılatisleri XI -yarılatisidir.

İspat: Teorem 1.2.42 den D nin X -alt yarılatislerinden diyagramı (1), (2), (3), (4) deki gibi olanlar her zaman XI -alt yarılatisidir.

Lemma 2.5: Şekil 6 da diyagramı (6) biçiminde olan D nin X -alt yarılatisleri XI -yarılatisidir.

İspat: $Q_1 = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}$ kümesinin karakteristik kümeler ailesi olan $C(Q_1)$ ve karakteristik dönüşümü olan $\chi : Q_1 \rightarrow C(Q_1)$ dönüşümünü bulalım. Öyleki Teorem 1.2.31 dan bunlar teklikle belirlidir.

$$C(Q_1) = \{P_1, P_3, P_4, P_5\}$$

ve

$$\chi_\xi : \begin{pmatrix} Z_1 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ P_1 & P_3 & P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi Lemma 1.2.33 den faydalanarak Q_1 in formal eşitlikleri

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1(Z_1) &= Q_1 \setminus \{Z' \in Q_1 \mid Z_1 \subseteq Z'\} = Q_1 \setminus \{Z_1, Z_3, Z_4, Z_5\} = \emptyset \\ \hat{Q}_1(Z_3) &= Q_1 \setminus \{Z' \in Q_1 \mid Z_3 \subseteq Z'\} = Q_1 \setminus \{Z_3, Z_5\} = \{Z_1, Z_4\} \\ \hat{Q}_1(Z_4) &= Q_1 \setminus \{Z' \in Q_1 \mid Z_4 \subseteq Z'\} = Q_1 \setminus \{Z_4, Z_5\} = \{Z_1, Z_3\} \\ \hat{Q}_1(Z_5) &= Q_1 \setminus \{Z' \in Q_1 \mid Z_5 \subseteq Z'\} = Q_1 \setminus \{Z_5\} = \{Z_1, Z_3, Z_4\} \end{aligned}$$

kümeleri kullanılarak

$$Z_1 = P_5$$

$$Z_3 = P_5 \cup \chi(Z_1) \cup \chi(Z_4) = P_5 \cup P_1 \cup P_4$$

$$Z_4 = P_5 \cup \chi(Z_1) \cup \chi(Z_3) = P_5 \cup P_1 \cup P_3$$

biçiminde bulunur.

Şimdi $Z_1 = P_5 = \emptyset$ olsun.

$t \in Z_5$ için;

$$t \in P_1 \text{ için } Q_{1t} = \{Z_3, Z_4, Z_5\} \implies N(Q, Q_{1t}) = \{Z_1\}$$

$$t \in P_3 \text{ için } Q_{1t} = \{Z_4, Z_5\} \implies N(Q, Q_{1t}) = \{Z_4, Z_1\}$$

$$t \in P_4 \text{ için } Q_{1t} = \{Z_3, Z_5\} \implies N(Q, Q_{1t}) = \{Z_3, Z_1\}$$

O halde buradan

$$\wedge(Q, Q_{1t}) = \begin{cases} Z_1 & , t \in P_1 \\ Z_4 & , t \in P_3 \\ Z_3 & , t \in P_4 \end{cases}$$

i) Her t için $\cup \wedge(Q, Q_{1t}) \in Q_1$ olduğundan XI olmanın ilk koşulu sağlanır.

ii) $t \in Z_5 = P_1 \cup P_3 \cup P_4$ olup $t \in P_1, P_3, P_4$ için

$$\cup \wedge(Q, Q_{1t}) = Z_1 \cup Z_3 \cup Z_4 = Z_5$$

$t \in Z_4 = P_1 \cup P_3$ olup

$$\cup \wedge(Q, Q_{1t}) = Z_1 \cup Z_4 = Z_4$$

$t \in Z_3 = P_1 \cup P_4$ olup

$$\cup \wedge(Q, Q_{1t}) = Z_1 \cup Z_3 = Z_3$$

olur. O halde bu durum için Q_1 alt yarılatisi XI yarılatistir.

$Z_1 = P_5 \neq \emptyset$ olsun.

$t \in Z_5$ için

$$t \in P_1 \text{ için } Q_{1t} = \{Z_3, Z_4, Z_5\} \implies N(Q, Q_{1t}) = \{Z_1\}$$

$$t \in P_3 \text{ için } Q_{1t} = \{Z_4, Z_5\} \implies N(Q, Q_{1t}) = \{Z_4, Z_1\}$$

$$t \in P_4 \text{ için } Q_{1t} = \{Z_3, Z_5\} \implies N(Q, Q_{1t}) = \{Z_3, Z_1\}$$

$$t \in P_5 \text{ için } Q_{1t} = \{Z_1, Z_3, Z_4, Z_5\} \implies N(Q, Q_{1t}) = \{Z_1\}$$

O halde buradan

$$\wedge(Q, Q_{1t}) = \begin{cases} Z_1 & , t \in P_1 \\ Z_4 & , t \in P_3 \\ Z_3 & , t \in P_4 \\ Z_1 & , t \in P_5 \end{cases}$$

i) Her t için $\cup \wedge (Q, Q_{1t}) \in Q_1$ olduğundan XI olmamın ilk koşulu sağlanır.

ii) $t \in Z_5 = P_1 \cup P_3 \cup P_4$ olup $t \in P_1, P_3, P_4$ için

$$\cup \wedge (Q, Q_{1t}) = Z_1 \cup Z_3 \cup Z_4 = Z_5$$

$t \in Z_4 = P_1 \cup P_3$ olup

$$\cup \wedge (Q, Q_{1t}) = Z_1 \cup Z_4 = Z_4$$

$t \in Z_3 = P_1 \cup P_4$ olup

$$\cup \wedge (Q, Q_{1t}) = Z_1 \cup Z_3 = Z_3$$

$t \in Z_1 = P_5$ olup

$$\cup \wedge (Q, Q_{1t}) = Z_1$$

dir. Böylece bu durum için de Q_1 alt yarılatisi XI -yarılatisidir.

Sonuç olarak Tanım 1.2.16 dan Q_1 alt yarılatisi XI -alt yarılatisidir.

Benzer şekilde $Q_2 = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\}$ alt yarılatisini incelersek $Z_2 \neq \emptyset$ olacağından ispat kolaylıkla yapılabilir.

Lemma 2.6: Şekil 6 da diyagramı (5) biçiminde olan D nin X -alt yarılatisleri XI -yarılatis değildir.

İspat: $Q_3 = \{Z_5, Z_4, Z_3\}$ kümesinin karakteristik kümeler ailesi olan $C(Q_3)$ ve karakteristik dönüşümü olan $\chi : Q_3 \rightarrow C(Q_3)$ dönüşümünü bulalım. Öyleki Teorem 1.2.31 den bunlar teklikle belirlidir.

$$C(Q_3) = \{P_3, P_4, P_5\}$$

ve

$$\chi_\zeta : \begin{pmatrix} Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ P_3 & P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi Lemma 1.2.33 den faydalanarak Q_3 in formal eşitlikleri olan

$$\hat{Q}_3(Z_3) = Q_3 \setminus \{Z' \in Q_3 \mid Z_3 \subseteq Z'\} = Q_3 \setminus \{Z_3, Z_5\} = \{Z_4\}$$

$$\hat{Q}_3(Z_4) = Q_3 \setminus \{Z' \in Q_3 \mid Z_4 \subseteq Z'\} = Q_1 \setminus \{Z_4, Z_5\} = \{Z_3\}$$

$$\hat{Q}_3(Z_5) = Q_3 \setminus \{Z' \in Q_3 \mid Z_5 \subseteq Z'\} = Q_1 \setminus \{Z_5\} = \{Z_3, Z_4\}$$

kümelerini kullanarak

$$Z_3 = P_5 \cup \chi(Z_4) = P_5 \cup P_4$$

$$Z_3 = P_5 \cup \chi(Z_3) = P_5 \cup P_3$$

$$Z_5 = P_5 \cup \chi(Z_3) \cup \chi(Z_4) = P_5 \cup P_3 \cup P_4$$

bulunur. $t \in P_5$ için alt sınıır olmadığı için Tanım 1.2.16 da XI olmanın i) koşulu her t elemanı için sağlanmaz. Dolayısı ile Q_3 alt yarılatisi XI -alt yarılatis değildir.

3. İKİLİ BAĞINTILARIN TAM YARIGRUPLARININ İDEMPOTENT VE SAĞ BİRİM ELEMANLARI

Birleşimlerin tam X -yarılatısı D ye izomorf olan X -yarılatıların sınıfı $\sum_5(X, 5)$ olduğundan bu sınıftan alınan herhangi bir tam X -yarılatısı ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgrubunun idempotent elemanlarının yapısını $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının yardımı ile karakterize edebiliriz. Dolayısıyla $\sum_5(X, 5)$ sınıfının tam X -yarılatıları ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrublarının idempotent ve sağ birim elemanlarının özelliklerini belirlemek yerine $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent ve sağ birim elemanlarının özelliklerini belirlemek yeterlidir.

Teorem 1.2.20 den D nin her bir D' , XI -alt yarılatısı ile tanımlanan $B_X(D')$ yarıgrubunun bir ε sağ birim elemanı vardır. Üstelik Teorem 1.2.22 den ε idempotent eleman olup $V(D', \varepsilon) = D'$ koşulunu sağlar. Dolayısıyla Not 1.2.27 den $B_X(D')$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının kümesi olan $E_X^{(r)}(D')$ ve $B_X(D')$ yarıgrubunun $V(D', \varepsilon) = D'$ koşulunu sağlayan ε idempotent elemanlarının kümesi $I^*(Q_i)$ olmak üzere;

$$I^*(Q_i) = \bigcup_{D' \in Q_i v_{XI}} E_X^{(r)}(D')$$

olur. O halde X sonlu iken

$$|I^*(Q_i)| = \sum_{D' \in Q_i v_{XI}} |E_X^{(r)}(D')|$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı için $V(D, \alpha) = D$ koşulu sağlansın ve α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$$\alpha = \bigcup_{T \in V(D, \alpha)} (Y_T^\alpha \times T)$$

biçiminde olsun. $D(\alpha)$ kümesi, $V(D, \alpha) \setminus \{\emptyset\}$ nin üreteç kümesi olmak üzere

$$\alpha \text{ idempotenttir} \iff \begin{cases} Y_1^\alpha \supseteq Z_1 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4 \\ Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset \\ Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

İspat: $V(D, \alpha) \setminus \{\emptyset\}$ nin $D(\alpha) = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ üreteç kümesini alalım.

(\Rightarrow): α idempotent eleman olsun. Teorem 1.2.26 (i) den $V(D, \alpha)$ birleşimlerin tam XI -yarılatısidir.

$$\ddot{D}(\alpha)_Z = \{T \in D(\alpha) \mid T \subseteq Z\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \ddot{D}(\alpha)_{Z_1} &= \{Z_1\} \\ \ddot{D}(\alpha)_{Z_2} &= \{Z_1, Z_2\} \\ \ddot{D}(\alpha)_{Z_3} &= \{Z_1, Z_2, Z_3\} \\ \ddot{D}(\alpha)_{Z_4} &= \{Z_1, Z_2, Z_4\} \end{aligned}$$

olur. Buradan Teorem 1.2.26 (ii) den

$$\begin{aligned} Z_1 &\in D(\alpha) \text{ için } Y_1^\alpha \supseteq Z_1 \\ Z_2 &\in D(\alpha) \text{ için } Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2 \\ Z_3 &\in D(\alpha) \text{ için } Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3 \\ Z_4 &\in D(\alpha) \text{ için } Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4 \end{aligned} \quad (*)$$

biçiminde bulunur.

Şimdi $\ddot{D}(\alpha)_Z$ kümesinin nonlimit elemanlarını bulalım. Tanım 1.2.14 den

$$l(D', Z) = \cup(D' \setminus D'_Z) \text{ olmak üzere } Z \setminus l(D' \setminus D'_Z) \neq \emptyset$$

ise Z nonlimit elemandır. Buna göre

$$D'_Z = \{T \in D' \mid Z \subseteq T\}$$

kümesinin tanımını kullanarak

- $Z_1 \neq \emptyset$ olarak kabul ettiğimiz için Z_1 ne limit eleman, ne de nonlimit elemandır.

- Z_2 nonlimit elemandır. Gerçekten

$$l\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_2}, Z_2\right) = \cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_2} \setminus \left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_2}\right)_{Z_2}\right) = \cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_2} \setminus \{Z_2\}\right) = \{Z_1\}$$

olduğundan $Z_2 \setminus Z_1 \neq \emptyset$ dir. O halde Z_2 nonlimit elemandır.

- Z_3 nonlimit elemandır. Gerçekten

$$\begin{aligned} l\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_3}, Z_3\right) &= \cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_3} \setminus \left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_3}\right)_{Z_3}\right) = \cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_3} \setminus \{Z_3\}\right) \\ &= \cup\{Z_1, Z_2\} = Z_1 \cup Z_2 = Z_2 \end{aligned}$$

olduğundan $Z_3 \setminus Z_2 \neq \emptyset$ dir. O halde Z_3 nonlimit elemandır.

- Z_4 nonlimit elemandır. Gerçekten

$$\begin{aligned} l\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_4}, Z_4\right) &= \cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_4} \setminus \left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_4}\right)_{Z_4}\right) = \cup\left(\ddot{D}(\alpha)_{Z_4} \setminus \{Z_4\}\right) \\ &= \cup\{Z_1, Z_2\} = Z_1 \cup Z_2 = Z_2 \end{aligned}$$

olduğundan $Z_4 \setminus Z_2 \neq \emptyset$ dir. O halde Z_4 nonlimit elemandır.

Şimdi Teorem 1.2.26 de (iii) şıkında olduğu gibi her bir nonlimit eleman için

$$Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$$

olması durumuna bakalım.

$$Z_2 \text{ için } Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset \quad (**)$$

$$Z_3 \text{ için } Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$$

$$Z_4 \text{ için } Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$$

koşulları bulunur. O halde (*) ve (**) koşulları birlikte düşünülürse teoremin ispatı tamamlanır.

(\Leftarrow): $D(\alpha)$ kümesi, $V(D, \alpha) \setminus \{\emptyset\}$ nin üreteç kümesi ve $V(D, \alpha) = D$ olsun. D, XI -yarılatis olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI -yarılatisdir. Böylece Teorem 1.2.26 nın (i) koşulu sağlanır.

$$\forall Z_i \in D_\alpha \text{ için } \cup_{Z' \in \ddot{D}(\alpha)_{Z_i}} Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_i$$

dir. Dolayısıyla Teorem 1.2.26 ün (ii) koşulu sağlanır.

$\ddot{D}(\alpha)_Z$ kümesinin her bir nonlimit elemanı için $Y_Z^\alpha \cap Z \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla Teorem 1.2.26 ün (iii) koşulu sağlanır.

O halde Teorem 1.2.26 den α ikili bağıntısı idempotenttir.

Sonuç 3.2: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı için $V(D, \alpha) = D$ koşulu sağlansın ve α ikili bağıntısının quasinormal gösterimi

$$\alpha = \bigcup_{T \in V(D, \alpha)} (Y_T^\alpha \times T)$$

biçiminde olsun.

α sağ birimdir \iff (4) koşulları sağlanır.

İspat: Teorem 3.1 den α idempotent ve $V(D, \alpha) = D$ olduğundan Teorem 1.2.22 den $\alpha \in B_X(D)$ sağ birimdir.

Teorem 3.3: X sonlu bir küme ve $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan bir aile olsun.

$$\begin{aligned} Z_1 &\subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5 \\ Z_1 &\subset Z_2 \subset Z_4 \subset Z_5 \\ Z_3 \setminus Z_4 &\neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_3 \neq \emptyset, Z_3 \cup Z_4 = Z_5 \end{aligned}$$

$\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı için $V(D, \alpha) = D$ koşulu sağlansın. O halde $B_X(D)$ nin idempotent elemanlarının sayısı

$$|I^*(D)| = 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|}$$

dir.

İspat: $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısı için $V(D, \alpha) = D$ koşulu sağlansın. Teorem 3.1 den biliyoruz ki α idempotent ise (4) koşulları sağlanır.

(1) de D nin formal birleşimlerinden

$$\begin{aligned} Z_1 &= P_5 \\ Z_2 &= P_5 \cup P_1 \\ Z_3 &= P_5 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \\ Z_4 &= P_5 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \\ Z_5 &= P_5 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 P_5 &= Z_1 \\
 P_1 &= Z_2 \setminus Z_1 \\
 P_2 &= (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2 \\
 P_3 &= Z_4 \setminus Z_3 \\
 P_4 &= Z_3 \setminus Z_4
 \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz.

$i = 1, 2, \dots, 5$ için P_i ler ayrık ve $\cup P_i = Z_5$ dir. Dolayısıyla

$$K = \{Z_2 \setminus Z_1, (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2, Z_4 \setminus Z_3, Z_3 \setminus Z_4, Z_1, X \setminus Z_5\}$$

kümesi X kümesinin parçalanışdır.

$\alpha \in B_X(D)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 f &: X \rightarrow D \\
 x &\rightarrow f(x) = x\alpha
 \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlanır. Bu f fonksiyonunu

$$Z_2 \setminus Z_1, (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2, Z_4 \setminus Z_3, Z_3 \setminus Z_4, Z_1 \text{ ve } X \setminus Z_5$$

kümelerine kısıtlayalım. Bu kısıtlanmış fonksiyonlarına sırayla

$$f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}$$

diyelim. Şimdi bu dönüşümlerin özelliklerini bulalım:

- $f_{1\alpha}$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım. Bunun için

$t \in Z_2 \setminus Z_1$ olsun. $Z_2 \setminus Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olup buradan ise $t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ bulunur.

$$\begin{aligned}
 t &\in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \Rightarrow t \in Y_1^\alpha \text{ veya } t \in Y_2^\alpha \Rightarrow t\alpha = Z_1 \text{ veya } t\alpha = Z_2 \\
 &\Rightarrow t\alpha \in \{Z_1, Z_2\} \Rightarrow f(t) \in \{Z_1, Z_2\}
 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f_{1\alpha}$ fonksiyonu

$$f_{1\alpha} : Z_2 \setminus Z_1 \rightarrow \{Z_1, Z_2\}$$

biçiminde tanımlanabilir.

$-f_{2\alpha}$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım. Bunun için $t \in (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2$ olsun. $(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2 \subseteq Z_3 \cap Z_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ olup buradan ise $t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha$ bulunur.

$$\begin{aligned} t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha &\Rightarrow t \in Y_1^\alpha \text{ veya } t \in Y_2^\alpha \Rightarrow t\alpha = Z_1 \text{ veya } t\alpha = Z_2 \\ &\Rightarrow t\alpha \in \{Z_1, Z_2\} \Rightarrow f(t) \in \{Z_1, Z_2\} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f_{2\alpha}$ fonksiyonu

$$f_{2\alpha} : Z_2 \setminus Z_1 \rightarrow \{Z_1, Z_2\}$$

biçiminde tanımlanabilir.

$f_{1\alpha} \cdot f_{2\alpha} = f'_{1\alpha}$ olsun. Bu durumda;

$$f'_{1\alpha} : (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1 \rightarrow \{Z_1, Z_2\}$$

olduğundan ayrı ayrı incelemek yerine $f'_{1\alpha}$ fonksiyonunu inceleyelim.

$f'_{1\alpha} : (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1 \rightarrow \{Z_1, Z_2\}$ dir. Ayrıca $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$ olduğu için $\exists t \in Y_2^\alpha \cap Z_2$ vardır. Buradan $t \in Y_2^\alpha$ ve $t \in Z_2$ dir. $Z_2 \subseteq Z_3 \cap Z_4$ olduğundan $t \in Z_3 \cap Z_4$ olur.

$t \in Z_1$ olsun. $Z_1 \subseteq Y_1^\alpha$ olduğundan $t \in Y_1^\alpha$ olur. Yani $t\alpha = Z_1$ dir. Bu ise $Z_1 = Z_2$ olmasını gerektirir ki bu çelişkidir. O halde $t \notin Z_1$ dir.

Dolayısıyla $t \in Z_2 \setminus Z_1$ dir. Buradan;

$$Y_2^\alpha \cap Z_2 \subseteq Z_2 \setminus Z_1 \subseteq (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1$$

olur. Özel olarak bazı $t \in Z_2$ elemanları için $f'_{1\alpha}(t) = Z'_2$ dir. Teorem 1.2.17 den $X = (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1$, $Y = Z_2 \setminus Z_1$ ve $D_j = \{Z_1, Z_2\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} s = |f'_{1\alpha}| &= 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1| \cdot |(Z_2 \setminus Z_1)|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1^{|Z_2 \setminus Z_1|}) \cdot (3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|}) \cdot (3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|}) \\ &= 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani

$$|f'_{1\alpha}| = 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1)$$

elde edilir.

- $f_{3\alpha}$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım. Bunun için;

$t \in Z_4 \setminus Z_3$ olsun. $Z_4 \setminus Z_3 \subseteq Z_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olup buradan ise $t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ bulunur.

$$\begin{aligned} t &\in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \Rightarrow t \in Y_1^\alpha \text{ veya } t \in Y_2^\alpha \text{ veya } t \in Y_4^\alpha \\ &\Rightarrow t\alpha = Z_1 \text{ veya } t\alpha = Z_2 \text{ veya } t\alpha = Z_4 \\ &\Rightarrow t\alpha \in \{Z_1, Z_2, Z_4\} \Rightarrow f(t) \in \{Z_1, Z_2, Z_4\} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f_{3\alpha}$ fonksiyonu

$$f_{1\alpha} : Z_4 \setminus Z_3 \rightarrow \{Z_1, Z_2, Z_4\}$$

biçiminde tanımlanabilir. Ayrıca $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$ olduğu için $\exists t \in Y_4^\alpha \cap Z_4$ vardır. Buradan $t \in Y_4^\alpha$ ve $t \in Z_4$ dir.

$$Y_4^\alpha \cap Z_4 \subseteq Z_4 \setminus Z_3 \text{ mu?}$$

$t \in Z_3$ olsun. Bu durumda $Z_3 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ olduğundan $t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ dir. $t\alpha \in \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ olur. Fakat $Z_4 \notin \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ olduğundan çelişkidir. O halde $t \notin Z_3$ dir.

$t \in Z_4$ ve $t \notin Z_3$ olduğundan $t \in Z_4 \setminus Z_3$ dir.

Dolayısıyla $\exists t \in Z_4 \setminus Z_3$ için $f_{3\alpha}(t) = t\alpha = Z_4$ dir. Lemma 1.2.40 dan en az bir elemanı Z_4 e giden fonksiyon sayısı;

$$|f_{3\alpha}| = 3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|}$$

elde edilir.

- $f_{4\alpha}$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım. Bunun için;

$t \in Z_3 \setminus Z_4$ olsun. $Z_3 \setminus Z_4 \subseteq Z_3 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ olup buradan ise $t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha$ bulunur.

$$\begin{aligned} t &\in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \Rightarrow t \in Y_1^\alpha \text{ veya } t \in Y_2^\alpha \text{ veya } t \in Y_3^\alpha \\ &\Rightarrow t\alpha = Z_1 \text{ veya } t\alpha = Z_2 \text{ veya } t\alpha = Z_3 \\ &\Rightarrow t\alpha \in \{Z_1, Z_2, Z_3\} \Rightarrow f(t) \in \{Z_1, Z_2, Z_3\} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f_{3\alpha}$ fonksiyonu

$$f_{4\alpha} : Z_3 \setminus Z_4 \rightarrow \{Z_1, Z_2, Z_3\}$$

biçiminde tanımlanabilir. Ayrıca $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$ olduğu için $\exists t \in Y_3^\alpha \cap Z_3$ vardır. Buradan $t \in Y_3^\alpha$ ve $t \in Z_3$ dir.

$$Y_3^\alpha \cap Z_3 \subseteq Z_3 \setminus Z_4 \text{ mu?}$$

$t \in Z_4$ olsun. Bu durumda $Z_4 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ olduğundan $t \in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha$ dir. $t\alpha \in \{Z_1, Z_2, Z_4\}$ olur. Fakat $Z_3 \notin \{Z_1, Z_2, Z_4\}$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $t \notin Z_4$ dir.

$t \in Z_3$ ve $t \notin Z_4$ olduğundan $t \in Z_3 \setminus Z_4$ dır.

Dolayısıyla $\exists t \in Z_3 \setminus Z_4$ için $f_{4\alpha}(t) = t\alpha = Z_3$ dir. Lemma 1.2.40 dan en az bir elemanı Z_3 e giden fonksiyon sayısı;

$$|f_{4\alpha}| = 3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|}$$

elde edilir.

- $f_{5\alpha}$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım. Bunun için;

$t \in Z_1$ olsun. $Z_1 \subseteq Y_1^\alpha$ olup buradan ise $t \in Y_1^\alpha$ bulunur.

$$t \in Y_1^\alpha \Rightarrow t\alpha = Z_1 \Rightarrow t\alpha \in \{Z_1\} \Rightarrow f(t) \in \{Z_1\}$$

olduğundan dolayı $f_{5\alpha}$ fonksiyonu

$$f_{5\alpha} : Z_1 \rightarrow Z_1$$

biçiminde tanımlanabilir. O halde

$$|f_{5\alpha}| = 1^{|Z_1|} = 1$$

elde edilir.

- $f_{6\alpha}$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım. Bunun için;

$t \in X \setminus Z_5$ olsun. $Z_5 \subseteq Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha$ olup buradan ise

$$\begin{aligned} t &\in Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_5^\alpha \\ &\Rightarrow t \in Y_1^\alpha \text{ veya } t \in Y_2^\alpha \text{ veya } t \in Y_3^\alpha \text{ veya } t \in Y_4^\alpha \text{ veya } t \in Y_5^\alpha \\ &\Rightarrow t\alpha = Z_1 \text{ veya } t\alpha = Z_2 \text{ veya } t\alpha = Z_3 \text{ veya } t\alpha = Z_4 \text{ veya } t\alpha = Z_5 \\ &\Rightarrow t\alpha \in \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} \\ &\Rightarrow f(t) \in \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = D \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $f_{6\alpha}$ fonksiyonu

$$f_{6\alpha} : X \setminus Z_5 \rightarrow D$$

biçiminde tanımlanabilir. O halde

$$|f_{6\alpha}| = 5^{|X \setminus Z_5|}$$

elde edilir.

$f : X \rightarrow D$ tanımlı fonksiyon sayısı $f'_{1\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}, f_{5\alpha}, f_{6\alpha}$ nın eleman sayılarının çarpımıdır. Yani;

$$|f| = 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot (2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1) \cdot (3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|}) \cdot (3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|}) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|}$$

formülü elde edilir.

Şimdi bir g fonksiyonuna karşılık gelen α_g idempotent elemanını bulmaya çalışalım.

$$g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \rightarrow \alpha_g$$

$$g_1 : (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1 \rightarrow \{Z_1, Z_2\}, \exists x_1 \in Z_2 \text{ için } g_1(x_1) = Z_2$$

$$g_2 : Z_4 \setminus Z_3 \rightarrow \{Z_1, Z_2, Z_4\}, \exists x_2 \in Z_4 \setminus Z_3 \text{ için } g_2(x_2) = Z_4$$

$$g_3 : Z_3 \setminus Z_4 \rightarrow \{Z_1, Z_2, Z_3\}, \exists x_3 \in Z_3 \setminus Z_4 \text{ için } g_3(x_3) = Z_3$$

$$g_4 : Z_1 \rightarrow Z_1$$

$$g_5 : X \setminus Z_5 \rightarrow D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$$

ve

$$g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$$

olsun. $g : X \rightarrow D$ dönüşümü için

$$\beta = \alpha_g = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times g(x))$$

olsun. İlk önce

$$Y_1^\beta \supseteq Z_1$$

$$Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \supseteq Z_2$$

$$Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_3^\beta \supseteq Z_3$$

$$Y_1^\beta \cup Y_2^\beta \cup Y_4^\beta \supseteq Z_4$$

$$Y_2^\beta \cap Z_2 \neq \emptyset$$

$$Y_3^\beta \cap Z_3 \neq \emptyset$$

$$Y_4^\beta \cap Z_4 \neq \emptyset$$

koşullarının sağlandığını gösterelim. Bu durumda β idempotent eleman olur.

- $Z_2 \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta$ mi?

$t \in Z_2 = Z_1 \cup (Z_2 \setminus Z_1)$ olsun. $Z_2 \setminus Z_1 \subseteq (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1$ olduğu için

$t \in Z_1$ veya $t \in Z_2 \setminus Z_1 \subseteq (Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_1$ olur.

$g(t) = g_4(t) = Z_1, g(t) = g_4(t) = \{Z_1, Z_2\} \implies g(t) = \{Z_1, Z_2\}$

$\implies t\beta \in \{Z_1, Z_2\} \implies t \in Y_1^\beta \cup Y_2^\beta$

O halde

$$Z_2 \subseteq Y_1^\beta \cup Y_2^\beta$$

kapsamı sağlanır.

- $Y_2^\beta \cap Z_2 \neq \emptyset$ mi?

$\exists z \in Z_2$ için $g(z) = g_1(z) = Z_2 \implies z\beta = Z_2 \implies z \in Y_2^\beta$ dir.

O halde $z \in Z_2$ ve $z \in Y_2^\beta \implies z \in Y_2^\beta \cap Z_2 \implies Y_2^\beta \cap Z_2 \neq \emptyset$ olduğu elde edilir.

Bu şekilde bütün koşullar sağlandığından β idempotenttir. Yani

$$g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) : X \rightarrow D$$

dönüşümü için $\beta = \alpha_g$ idempotent elemandır.

$f \neq g$ iken $\alpha_f \neq \alpha_g$ olduğundan bu şekildeki fonksiyonların sayısı α_g lerin yani idempotent elemnların sayısına eşittir.

3.1. $Z_1 = \emptyset$ iken İdempotent ve Sağ Birim Elemanlar

Bu bölümde D birleşimlerin tam X -yarılatısı ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin $Z_1 = \emptyset$ koşulu altında idempotent ve sağ birim elemanlarının özellikleri ve X sonlu iken idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Teorem 3.1.1: $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\} \in \sum_5(X, 5)$ olsun. $Z_1 = \emptyset$ olmak üzere $\alpha \in B_X(D)$ bağıntısının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olması ve yanlarında verilen koşulları sağlamasıdır.

- 1) $\alpha = \emptyset$
- 2) $\alpha = (Y_1^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_T^\alpha \times T)$;
 $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$
- 3) $\alpha = (Y_1^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$;
 $Y_1^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T, Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset, Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$
- 4) $\alpha = (Y_1^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)$;
 $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2, Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T,$
 $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset, Y_{Z_5}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$ (5)
- 5) $\alpha = (Y_1^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)$;
 $Y_1^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_2, Y_1^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,$
 $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_{Z_5}^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$
- 6) $\alpha = (Y_1^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)$;
 $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2, Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3,$
 $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset, Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset, Y_{Z_4}^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$

İspat:(\implies): $\alpha \in B_X(D)$ olduğu için Lemma 1.2.9 den $V(X^*, \alpha) \subseteq D$ dir. Lemma 1.2.8 den $V(D, \alpha) \subseteq D$ ve

$$\emptyset \in D \iff \emptyset \in V(D, \alpha)$$

dir.

Ayrıca α idempotent eleman iken Teorem 1.2.21 den $V(D, \alpha)$ XI -yarılatısı olduğundan $V(D, \alpha)$, D nin boş kümeyi bulunduran XI -alt yarılatılarını tarar.

$Z_1 = \emptyset$ için XI-alt yarılatılarını

$$A_1 = \{\emptyset\}$$

$$A_2 = \{\emptyset, T\} \quad ; T \in \{Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$$

$$A_3 = \{\emptyset, T, T'\} \quad ; T \in \{Z_2, Z_3, Z_4\}, T' \in \{Z_3, Z_4, Z_5\}$$

$$A_4 = \{\emptyset, Z_2, T, Z_5\} \quad ; T \in \{Z_3, Z_4\}$$

$$A_5 = \{\emptyset, Z_3, Z_4, Z_5\}$$

$$A_6 = \{\emptyset, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = \check{D}$$

biçiminde gösterelim.

Şimdi

$$V(D, \alpha) = A_1, V(D, \alpha) = A_2, V(D, \alpha) = A_3, V(D, \alpha) = A_4, V(D, \alpha) = A_5 \text{ ve}$$

$$V(D, \alpha) = A_6 = D$$

olduğunda α idempotent elemanlarının özelliklerini bulacağız.

$$-V(D, \alpha) = A_1 = \{\emptyset\} \text{ iken}$$

$$\alpha = \bigcup_{Z \in \{\emptyset\}} (Y_Z^\alpha \times Z) = Y_\emptyset^\alpha \times \emptyset = \emptyset \implies \alpha = \emptyset$$

dir.

$$-V(D, \alpha) = A_2 = \{\emptyset, T\} \text{ iken}$$

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_2} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_\emptyset^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_T^\alpha \times T)$$

dir.

$$-V(D, \alpha) = A_3 = \{\emptyset, T, T'\} \text{ iken}$$

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_3} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_\emptyset^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$$

dir.

$$-V(D, \alpha) = A_4 = \{\emptyset, T, T', Z_5\} \text{ iken}$$

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_4} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_\emptyset^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{Z_5}^\alpha \times Z_5)$$

dir.

$$-V(D, \alpha) = A_5 = \{\emptyset, Z_3, Z_4, Z_5\} \text{ iken}$$

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_5} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_\emptyset^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_{Z_3}^\alpha \times Z_3) \cup (Y_{Z_4}^\alpha \times Z_4) \cup (Y_{Z_5}^\alpha \times Z_5)$$

dir.

$$-V(D, \alpha) = A_6 = \{\emptyset, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \bigcup_{Z \in A_4} (Y_Z^\alpha \times Z) \\ &= (Y_1^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \end{aligned}$$

dir.

(\Leftarrow): $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (1) deki gibi olsun. Bu durumda $\alpha = \emptyset = (Y_1^\alpha \times \emptyset)$ olup $V(D, \alpha) = \{\emptyset\}$ olur. $A_1 = \{\emptyset\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_1$ olur. Tek nokta kümeleri her zaman XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir.

$\alpha \in B_X(D)$ olduğundan

$$f: X \rightarrow D$$

tanımlı fonksiyon vardır ve bu fonksiyon $\forall x \in X$ için $f(x) = \emptyset$ biçimindedir.

O halde bu şekilde yazacağımız tek fonksiyon olacağından $\alpha = \alpha_f$ bir tanedir.

Dolayısıyla

$B_X(A_1) = \{\alpha_f\}$ olup bir tane elemanı vardır. $B_X(A_1)$ yarıgrup olduğundan $\alpha_f \circ \alpha_f = \alpha_f$ olmak zorundadır. O halde $\alpha = \alpha_f$ idempotenttir.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (2) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{\emptyset, T\}$ olur. $A_2 = \{\emptyset, T\}$ dersek $V(D, \alpha) = A_2$ olur. A_2, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.45 den $\forall p = 1, 2$ için

$$Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$$

dir. Her zaman için $Y_1^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$ özelliği sağlar.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (3) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{\emptyset, T, T'\}$ olur. $A_3 = \{\emptyset, T, T'\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_3$ olur. A_3, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.45 den $\forall p = 1, 2, 3$ için

$$Y_1^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$$

$$Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$$

$$Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$$

dır. Her zaman için $Y_1^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T$ özelliği sağlanır.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (4) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{\emptyset, Z_2, T, Z_5\}$ olur. $A_4 = \{\emptyset, Z_2, T, Z_5\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_4$ olur. A_4, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.45 den $\forall p = 1, 2, 3, 4$ için

$$\begin{aligned} Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha &\supseteq Z_2 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_T^\alpha &\supseteq T \\ Y_2^\alpha \cap Z_2 &\neq \emptyset \\ Y_T^\alpha \cap T &\neq \emptyset \\ Y_5^\alpha \cap Z_5 &\neq \emptyset \end{aligned}$$

dır. Her zaman için $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$ özelliği sağlanır.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (5) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{\emptyset, Z_4, Z_3, Z_5\}$ olur. $A_5 = \{\emptyset, Z_4, Z_3, Z_5\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_5$ olur. A_5, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.49 dan $\forall p = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$\begin{aligned} Y_1^\alpha \cup Y_4^\alpha &\supseteq Z_2 \\ Y_1^\alpha \cup Y_3^\alpha &\supseteq Z_3 \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset \\ Y_3^\alpha \cap Z_3 &\neq \emptyset \end{aligned}$$

dır.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (6) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{\emptyset, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ olur. $A_6 = \{\emptyset, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = D$ dersek

$V(D, \alpha) = D$ olur. D, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Teorem 3.1 den

$\forall p = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$\begin{aligned} Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha &\supseteq Z_2 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha &\supseteq Z_4 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha &\supseteq Z_4 \\ Y_2^\alpha \cap Z_2 &\neq \emptyset \\ Y_3^\alpha \cap Z_3 &\neq \emptyset \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.1.2: X sonlu ise

$$|I^*(A_1)| = 1$$

dir.

İspat: $A_1 = \{T\}, T \in D$ olsun.

$$A_1 \nu_{XI} = \{\{\emptyset\}\}$$

olduğundan Teorem 3.1.1 den $\alpha = \emptyset$ olur. Bu durumda $|I^*(A_1)| = 1$ dir.

Teorem 3.1.3: X sonlu ise

$$\begin{aligned} |I^*(A_2)| &= \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

dir.

İspat: $A_2 = \{\emptyset, T\}, T \in D$ olsun.

$$A_2 \nu_{XI} = \{\{\emptyset, Z_2\}, \{\emptyset, Z_3\}, \{\emptyset, Z_4\}, \{\emptyset, Z_5\}\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.51 den $B_X(A_2)$ yarıgrupunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(A_2)\right| = \left(2^{|T|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus T|}$$

olduğundan buradan

$$\begin{aligned} |I^*(A_2)| &= \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.4: X sonlu ise

$$\begin{aligned} |I^*(A_3)| &= \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) 2^{|X \setminus Z_3|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_2|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

dir.

İspat: $A_3 = \{\emptyset, T, T'\}$, $T, T' \in D$ olsun.

$$A_3 v_{XI} = \{\{\emptyset, Z_2, Z_3\}, \{\emptyset, Z_2, Z_4\}, \{\emptyset, Z_2, Z_5\}, \{\emptyset, Z_3, Z_5\}, \{\emptyset, Z_4, Z_5\}\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.51 den $B_X(A_3)$ yarigrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(A_3)\right| = \left(2^{|T|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T' \setminus T|} - 2^{|T' \setminus T|}\right) \cdot 3^{|X \setminus T' \setminus T|}$$

olduğundan buradan

$$\begin{aligned} |I^*(A_3)| &= \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) 2^{|X \setminus Z_3|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_2|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.5: X sonlu ise

$$\begin{aligned} |I^*(A_4)| &= \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

dir.

İspat: $A_4 = \{\emptyset, Z_2, T, Z_5\}$ olsun.

$$A_4 v_{XI} = \{\{\emptyset, Z_2, Z_3, Z_5\}, \{\emptyset, Z_2, Z_4, Z_5\}\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.51 den $B_X(A_5)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left| E_X^{(r)}(A_4) \right| = \left(2^{|Z_2|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|T \setminus Z_2|} - 2^{|T \setminus Z_2|} \right) \left(4^{|Z_5 \setminus T|} - 3^{|Z_5 \setminus T|} \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|}$$

olduğundan buradan

$$\begin{aligned} |I^*(A_4)| &= \left(2^{|Z_2|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|} \right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_3|} \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_2|} - 1 \right) \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|} \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.6: X sonlu ise

$$|I^*(A_5)| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|}$$

dir.

İspat: $A_5 = \{\emptyset, Z_3, Z_4, Z_5\}$ olsun.

$$A_5 v_{XI} = \{A_5\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.53 den $B_X(A_5)$ yarıgrubunun idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısı

$$|I^*(A_5)| = \left| E_X^{(r)}(A_5) \right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.7: X sonlu ise

$$|I^*(A_6)| = 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot \left(2^{|Z_2|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|} \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|} \right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|}$$

dir.

İspat: $A_6 = \{\emptyset, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ olsun. Teorem 3.3 de bulunan formülden $B_X(A_5)$ yarıgrubunun idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısı

$$\begin{aligned} |I^*(A_6)| &= \left| E_X^{(r)}(A_6) \right| \\ &= 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot \left(2^{|Z_2|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|} \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|} \right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.8: X sonlu bir küme ve $Z_1 = \emptyset$ olsun. O zaman $B_X(D)$ yarı-grubunun idempotent elemanlarının sayısı

$$|I_D| = \sum_{i=1}^6 |I^*(A_i)|$$

yani

$$\begin{aligned} |I_D| = & 1 + \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} \\ & + \left(2^{|Z_1|} - 1\right) 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_5|} - 1\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ & + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) 2^{|X \setminus Z_3|} \\ & + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} \\ & + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \left(3^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_2|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ & + \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ & + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\ & + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\ & + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\ & + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\ & + 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

formülü ile bulunur.

İspat: Teorem 1.1.24 (i) den

$$|I_D| = \sum_{i=1}^6 |I^*(A_i)|$$

olduğundan bulunan formüller yerine yazılıp toplanırsa idempotent elemanların sayısı bu formda bulunur.

3.2. $Z_1 \neq \emptyset$ iken İdempotent ve Sağ Birim Elemanlar

Bu bölümde D birleşimlerin tam X -yarılatısı ile belirlenen ikili bağıntıların tam yarıgrubu $B_X(D)$ nin $Z_1 \neq \emptyset$ koşulu altında idempotent ve sağ birim elemanlarının özellikleri ve X sonlu iken idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısı belirlenecektir.

Teorem 3.2.1: $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\} \in \Sigma_5(X, 5)$ olsun. $Z_1 \neq \emptyset$ olmak üzere $\alpha \in B_X(D)$ bağıntısının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen biçimlerde quasinormal gösterimlerden birine sahip olması ve yanlarında verilen koşulları sağlamasıdır.

- 1) $\alpha = X \times T, T \in D$
- 2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$; $T, T' \in D, T \subset T'$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\emptyset\}$; $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$
- 3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$; $T, T', T'' \in D, T \subset T' \subset T''$,
 $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\emptyset\}$; $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cup T' \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$
- 4) $\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)$;
 $Y_5^\alpha, Y_T^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\emptyset\}$, $T \in \{Z_3, Z_4\}$,
 $Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$,
 $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$
- 5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times Z_1) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)$;
 $Y_T^\alpha, Y_3^\alpha, Y_4^\alpha \notin \{\emptyset\}$, $T \in \{Z_1, Z_2\}$,
 $Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$
- 6) $\alpha = (Y_1^\alpha \times \emptyset) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)$;
 $Y_2^\alpha, Y_3^\alpha, Y_4^\alpha \notin \{\emptyset\}$, $Y_1^\alpha \supseteq Z_1$,
 $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$,
 $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$

(6)

İspat: (\implies): $\alpha \in B_X(D)$ olduğu için Lemma 1.2.9 dan $V(X^*, \alpha) \subseteq D$ dir.

Lemma 1.2.8 den $V(D, \alpha) \subseteq D$ ve

$$\emptyset \in D \iff \emptyset \in V(D, \alpha)$$

dir.

Ayrıca α idempotent eleman iken Teorem 1.2.21 den $V(D, \alpha)$ XI -yarılatis olduğundan $V(D, \alpha)$, D nin boş kümeyi bulunduran XI -alt yarılatislerini tarar.

$Z_1 \neq \emptyset$ için XI -alt yarılatislerini

$$\begin{aligned} A_1 &= \{T\} && ; T \in \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} \\ A_2 &= \{T, T'\} && ; T \in \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}, T' \in \{Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} \\ A_3 &= \{T, T', T''\} && ; T \in \{Z_1, Z_2\}, T' \in \{Z_2, Z_3, Z_4\}, T'' \in \{Z_3, Z_4, Z_5\} \\ A_4 &= \{Z_1, Z_2, T, Z_5\} && ; T \in \{Z_3, Z_4\} \\ A_5 &= \{T, Z_3, Z_4, Z_5\} && ; T \in \{Z_1, Z_2\} \\ A_6 &= \{\emptyset, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = \check{D} \end{aligned}$$

biçiminde gösterelim.

Şimdi $V(D, \alpha) = A_1$, $V(D, \alpha) = A_2$, $V(D, \alpha) = A_3$, $V(D, \alpha) = A_4$, $V(D, \alpha) = A_5$ ve $V(D, \alpha) = A_6 = D$ olduğunda α idempotent elemanların özelliklerini bulacağız.

$-V(D, \alpha) = A_1 = \{T\}$, $T \in D$ olsun. Sonuç 1.2.42 ve Sonuç 1.2.46 dan

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_1} (Y_Z^\alpha \times Z) = X \times T; T \in D$$

quasinormal gösterimi bulunur.

$-V(D, \alpha) = A_2 = \{T, T'\}$, $T, T' \in D$ olsun. O halde

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_2} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$$

quasinormal gösterimi bulunur.

$-V(D, \alpha) = A_3 = \{T, T', T''\}$, $T, T', T'' \in D$ olsun. O halde

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_3} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$$

quasinormal gösterimi bulunur.

$-V(D, \alpha) = A_4 = \{Z_1, Z_2, T, Z_5\}$, $T \in D$ olsun. O halde

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_4} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)$$

quasinormal gösterimi bulunur.

$-V(D, \alpha) = A_5 = \{T, Z_2, Z_3, Z_4\}$, $T \in D$

$$\alpha = \bigcup_{Z \in A_5} (Y_Z^\alpha \times Z) = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$$

quasinormal gösterimi bulunur.

$-V(D, \alpha) = A_6 = D$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}\alpha &= \bigcup_{Z \in A_6} (Y_Z^\alpha \times Z) \\ &= (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5)\end{aligned}$$

quasinormal gösterimi bulunur.

(\Leftarrow): $\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (1) deki gibi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\alpha = X \times T$ olup $V(D, \alpha) = \{T\}$ olur. $A_1 = \{T\}, T \in D$ dersek

$V(D, \alpha) = A_1$ olur. Tek nokta kümeleri her zaman XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir.

$\alpha \in B_X(D)$ olduğundan

$$f: X \rightarrow D$$

fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon $\forall x \in X$ için $f(x) = T$ biçimindedir. O halde bu şekilde yazacağımız 5 fonksiyon olacağından α bağıntısının sayısı 5 dir. Dolayısıyla $B_X(A_1)$ yarigrubunun 5 tane elemanı vardır $B_X(A_1)$ yarigrup olduğundan

$$\alpha_f \circ \alpha_f = \alpha_f$$

olmak zorundadır. O halde $\alpha = \alpha_f$ idempotenttir.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (2) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{T, T'\}$ olur. $A_2 = \{T, T'\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_2$ olur. A_2, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.45 den $\forall p = 1, 2$ için

$$Y_T^\alpha \cap T' \neq \emptyset$$

dir. Her zaman için $Y_T^\alpha \supseteq T$ özelliği sağlanır.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (3) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{T, T', T''\}$ olur. $A_3 = \{T, T', T''\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_3$ olur. A_3, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.45 den

$\forall p = 1, 2, 3$ için

$$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$$

$$Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \emptyset$$

$$Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \emptyset$$

dır. Her zaman için $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T$ özelliği sağlanır.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (4) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{Z_1, Z_2, T, Z_5\}$ olur. $A_4 = \{Z_1, Z_2, T, Z_5\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_4$ olur. A_4, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.45 den $\forall p = 1, 2, 3, 4$ için

$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$$

$$Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$$

$$Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \emptyset$$

$$Y_T^\alpha \cap T \neq \emptyset$$

$$Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \emptyset$$

dır. Her zaman için $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$ özelliği sağlanır.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısını quasinormal gösterimi (5) deki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{T, Z_3, Z_4, Z_5\}$ olur. $A_5 = \{T, Z_3, Z_4, Z_5\}$ dersek

$V(D, \alpha) = A_5$ olur. A_5, XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Sonuç 1.2.49 dan $\forall p = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$Y_T^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$$

$$Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$$

$$Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \emptyset$$

$$Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \emptyset$$

dır.

$-\alpha \in B_X(D)$ ikili bağıntısının quasinormal gösterimi (6) daki gibi olsun. Bu durumda $V(D, \alpha) = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ olur. $A_6 = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = D$ dersek

$V(D, \alpha) = D$ olur. D , XI olduğundan $V(D, \alpha)$ da XI dir. Teorem 3.1 den $\forall p = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$\begin{aligned} Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha &\supseteq Z_2 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha &\supseteq Z_4 \\ Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_4^\alpha &\supseteq Z_4 \\ Y_2^\alpha \cap Z_2 &\neq \emptyset \\ Y_3^\alpha \cap Z_3 &\neq \emptyset \\ Y_4^\alpha \cap Z_4 &\neq \emptyset \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.2.2: X sonlu ise

$$|I^*(A_1)| = 5$$

dir.

İspat: $A_1 = \{T\}, T \in D$ olsun.

$$A_1 v_{XI} = \{\{Z_1\}, \{Z_2\}, \{Z_3\}, \{Z_4\}, \{Z_5\}\}$$

olduğundan Teorem 3.1.1 den $\alpha = X \times T$ olur. Bu durumda $|I^*(A_1)| = 5$ dir.

Teorem 3.2.3: X sonlu ise

$$\begin{aligned} |I^*(A_2)| &= \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} \\ &+ \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} \\ &+ \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} \\ &+ \left(2^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

dir.

İspat: $A_2 = \{T, T'\}, T, T' \in D$ olsun.

$$A_2 v_{XI} = \left\{ \begin{array}{l} \{Z_1, Z_2\}, \{Z_1, Z_3\}, \{Z_1, Z_4\}, \{Z_1, Z_5\}, \{Z_2, Z_4\}, \\ \{Z_2, Z_3\}, \{Z_2, Z_5\}, \{Z_3, Z_5\}, \{Z_4, Z_5\} \end{array} \right\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.51 den $B_X(A_2)$ yarığırubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$|E_X^{(r)}(A_2) = \left(2^{|T' \setminus T|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus T'|}$$

olduğundan buradan

$$\begin{aligned}
|I^*(A_2)| &= \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} \\
&+ \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} \\
&+ \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_5|}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.4: X sonlu ise

$$\begin{aligned}
|I^*(A_3)| &= \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_3|} \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_4|} \\
&+ \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_5|}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

İspat: $A_3 = \{T, T', T''\}, T, T', T'' \in D$ olsun.

$$A_3 \cup_{XI} = \left\{ \begin{array}{l} \{Z_1, Z_2, Z_3\}, \{Z_1, Z_2, Z_4\}, \{Z_1, Z_2, Z_5\}, \{Z_1, Z_3, Z_5\}, \\ \{Z_1, Z_4, Z_5\}, \{Z_2, Z_3, Z_5\}, \{Z_2, Z_4, Z_5\} \end{array} \right\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.51 den $B_X(A_3)$ yarigrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left| E_X^{(r)}(A_3) \right| = \left(2^{|T' \setminus T|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T' \setminus T|}\right) \cdot 3^{|X \setminus T'|}$$

olduğundan buradan

$$\begin{aligned}
|I^*(A_3)| &= \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) 3^{|X \setminus Z_3|} \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_2|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) 3^{|X \setminus Z_4|} \\
&+ \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.5: X sonlu ise

$$\begin{aligned}
|I^*(A_4)| &= \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 4^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 4^{|X \setminus Z_5|}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: $A_4 = \{Z_1, Z_2, T, Z_5\}$ olsun.

$$A_4 v_{XI} = \{\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_5\}, \{Z_1, Z_2, Z_4, Z_5\}\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.51 den $B_X(A_4)$ yarıgrubunun sağ birim elemanlarının sayısı

$$\left|E_X^{(r)}(A_4) = \left(2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T \setminus Z_2|} - 2^{|T \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus T|} - 3^{|Z_5 \setminus T|}\right) 4^{|X \setminus Z_5|}\right|$$

olduğundan buradan

$$\begin{aligned}
|I^*(A_4)| &= \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 4^{|X \setminus Z_5|} \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 4^{|X \setminus Z_5|}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.6: X sonlu ise

$$|I^*(A_5)| = 2 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) 4^{|X \setminus Z_5|}$$

dir.

İspat: $A_5 = \{T, Z_3, Z_4, Z_5\}$ olsun.

$$A_5 v_{XI} = \{\{Z_1, Z_3, Z_4, Z_5\}, \{Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}\}$$

olduğundan Sonuç 1.2.53 den $B_X(A_5)$ yarıgrubunun idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısı

$$\begin{aligned} |I^*(A_5)| &= \left| E_X^{(r)}(A_5) \right| = \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\ &\quad + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\ &= 2 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.7: X sonlu ise

$$|I^*(A_6)| = 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|} \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|} \right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|}$$

dir.

İspat: $A_6 = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ olsun.

$$A_6 v_{XI} = \{\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}\}$$

olduğundan Teorem 3.3 de bulunan formülden $B_X(A_6)$ yarıgrubunun idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısı

$$\begin{aligned} |I^*(A_6)| &= \left| E_X^{(r)}(A_6) \right| \\ &= 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot \left(2^{|Z_2|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|} \right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|} \right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.8: X sonlu bir küme ve $Z_1 \neq \emptyset$ olsun. O zaman $B_X(D)$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı

$$|I_D| = \sum_{i=1}^6 |I^*(A_i)|$$

yani

$$\begin{aligned}
|I_D| = & 5 + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} \\
& + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_1|} - 1\right) 2^{|X \setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} \\
& + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 1\right) 2^{|X \setminus Z_5|} \\
& + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 1\right) 2^{|X \setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 1\right) \\
& + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) 3^{|X \setminus Z_3|} \\
& + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_5|} \\
& + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) 3^{|X \setminus Z_4|} \\
& + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
& + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
& + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
& + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) 3^{|X \setminus Z_5|} \\
& + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_3|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\
& + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_2|}\right) \left(4^{|Z_5 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_5 \setminus Z_4|}\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\
& + 2 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus Z_5|} \\
& + 2^{|(Z_3 \cap Z_4) \setminus Z_2|} \cdot \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Z_5|}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: Teorem 1.1.24 (i) den

$$|I_D| = \sum_{i=1}^6 |I^*(A_i)|$$

olduğundan bulunan formüller yerine yazılıp toplanırsa idempotent elemanların sayısı bu formda bulunur.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez üç ana bölüm altında toplanmış olup, bu bölümlerle aşağıda özet olarak belirtilen sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci bölümde yarıgrup teori hakkında genel tanım, teorem ve örnekler verilerek, tez boyunca kullanılan birleşimlerin tam X -yarılatısları ve ikili bağıntıların tam yarıgrupları ile ilgili tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere elemanları

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5$$

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_4 \subset Z_5$$

$$Z_3 \setminus Z_4 \neq \emptyset, Z_4 \setminus Z_3 \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$ birleşimlerin tam X -yarılatısının özellikleri incelenmiştir. Dolayısıyla D ye tam izomorf olan birleşimlerin tam X -yarılatılarının sınıfı $\sum_5(X, 5)$ olmak üzere bu sınıfın elemanları karakterize edilmiştir. D nin tam X -alt yarılatıları bulunmuştur. Bu tam yarılatıların hangi koşullar altında XI -yarılatı oldukları belirlenmiştir. Bu koşullar altında $B_X(D)$ yarıgrupunun sağ birim ve idempotent elemanların yapısının incelenmesi gerektiği elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, D birleşimlerin tam X -yarılatısına tam izomorf olan birleşimlerin tam X -yarılatılarının sınıfı $\sum_5(X, 5)$ olduğundan bu sınıftan alınan herhangi bir X -yarılatı ile tanımlanan ikili bağıntılar tam yarıgrupunun sağ birim ve idempotent elemanlarının yapısı $B_X(D)$ yarıgrupunun sağ birim ve idempotent elemanları yardımı ile karakterize edilmiştir. $B_X(D)$ yarıgrupunun sağ birim ve idempotent elemanlarının yapısı ve ayrıca X sonlu bir küme iken $B_X(D)$ yarıgrupunun sağ birim ve idempotent elemanlarının sayısını veren formüller bulunmuştur. Dolayısıyla X sonlu bir küme iken $\sum_5(X, 5)$ sınıfının yarılatıları ile tanımlanan ikili bağıntıların tam yarıgruplarının idempotent ve sağ birim elemanlarının sayısının da bu formül yardımı ile hesaplanabileceği elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Diasamidze Y. I., 2000, Complete semigroups of binary relations, Ajara Publ. House. Batumi (in Russian), 176 p.

Diasamidze Y. I., 2003, Complete semigroups of binary relations, Journal of Mathematical Sciences, 117(4): 4271-4319.

Diasamidze Y. I., Makharadze S., Partenadze G. ve Givradze O., 2007, On finite X-semilattices of unions, Journal of Mathematical Sciences, 141(2): 1134-1181.

Diasamidze Y. I., Makharadze S., 2010a, Complete semigroups of binary relations, Sputnik+, Moscow (in Russian), 657 p.

Diasamidze Y. I., Makharadze S., 2010b, Complete semigroups of binary relations defined by X-yarılattices of unions, Journal of Mathematical Sciences, 166(5): 615-633.

Diasamidze Y. I., Makharadze S., 2013, Complete semigroups of binary relations, Kriter Yayınevi.

Harju, T., 1996, Lectures Notes on semigroups, Department of Mathematics, University of Turku.

Ljapin, E. S., 1963, Semigroups, American Mathematical Society.

Riguet J., 1948, Relations, binaires, fermeyures, correspon dances, De Galois, Buletin de Socit Mathematique de France, 79: 114-155.

Riguet J., 1950, Quelques propriety's des relations difonctionnelles, Comptes renlus hebmodaires des seances de Academie des Sciences, vol. 230.

Schröder E., 1966, Alcebra der Logik (1890-1910), Vols. I-III (reprint), Chelsea.

Whitehead A. N. and Russel B., 1925, Principia Mathematica, Vol. 1 (2nd ed.), Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Zeliha BEDİR 1988 yılında Malatya'nın Darende ilçesinde doğdu. İlk ve lise eğitimini Darende' de tamamladı. 2005 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü' nü kazandı ve 2010 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı' nda tezsiz yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılında buradan mezun oldu ve aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.