ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BAZI MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ÖZEL EĞRİLER

Osman Zeki OKUYUCU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ÖZEL EĞRİLER

Osman Zeki OKUYUCU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. F. Nejat EKMEKCİ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, Öklid uzayında eğrilerin temel özelikleri, 3-boyutlu Öklid uzayında bazı özel eğrilerin tanımları ve temel karakterizasyonları, Lie grubu ve Lie cebiri ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında genel helislerden bahsedilmiş ve sonrasında slant helisler, Mannheim eğrileri ve Bertrand eğrileri ile ilgili elde edilen kavramlar verilmiştir.

Haziran 2013, 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lie grupları, Lie cebirleri, genel helisler, slant helisler, Mannheim eğrileri, Bertrand eğrileri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SPECIAL CURVES ON SOME MANIFOLDS

Osman Zeki OKUYUCU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. F. Nejat EKMEKCİ

This thesis consists of three chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, general properties of a curve in Euclidean space, definations and fundamental characterizations of some special curves in Euclidean 3-space, basic concepts about Lie group and Lie algebra have been given.

In the third chapter, we mention general helices in three dimensional Lie groups with a bi-invariant metric and then we introduce slant helices, Mannheim curves and Bertrand curves in Lie groups.

June 2013, 64 pages

Key Words: Lie groups, Lie algebras, general helices, slant helices, Mannheim curves, Bertrand curves.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan danışman hocam sayın Doç. Dr. F. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye, fikirleriyle ve sorularıyla yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocalarım sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi) ve Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN (Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)' a, hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen hocalarım sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) ve sayın Yrd. Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e ve çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren sevgili aileme ve eşim Ayşe OKUYUCU' ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Osman Zeki OKUYUCU
Ankara, Haziran 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

G	Üç boyutlu Lie grubu
$\mathfrak{g}$	G Lie grubunun Lie cebiri
e	G Lie grubunun birim elemanı
T_eG	G Lie grubunun birim noktasındaki tanjant uzay
κ	Eğrinin birinci eğriliği
τ	Eğrinin ikinci eğriliği
H	Eğrinin harmonik eğriliği
$\langle\, ,\rangle$	Bi-invaryant metrik

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometride, özellikle diferensiyel geometride eğriler teorisi önemli bir yere sahiptir. Eğriler, Öklid olan ve Öklid olmayan uzayların yanısıra Öklid manifoldları ve Öklid olmayan manifoldlarda da yoğun bir şekilde çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Eğrilerin incelenmesinde öne çıkan problemlerden biri; özel eğriler ve karakterizasyonlarıdır. Geodezikler, çemberler, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri, dairesel helisler, genel helisler, slant helisler v.b. özel eğriler ve bu eğrilerin karakterizasyonları uzun zamandan beri Öklid uzayının yanısıra Minkowski, Galile gibi Öklid olmayan uzaylarda da çalışılmıştır.

$3-$boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğet vektör alanı sabit doğrultulu bir doğru (genel helisin ekseni) ile sabit açı yapıyorsa bu eğriye **genel helis** denir. Genel helislerle ilgili Lancret (1802) tarafından ortaya konan ve Saint Venant (1845) tarafından ispatlanan en önemli koşul; bir eğrinin eğrilikleri $\varkappa$ ve τ olmak üzere **genel helis** olabilmesi için $\frac{\varkappa}{\tau}$ oranının sabit olmasıdır. Eğer eğrinin $\varkappa$ ve τ eğrilikleri ayrı ayrı birer sabitler ise eğriye bir **dairesel helis** denir. Eğrinin, eğriliği $\varkappa = 0$ ise eğri bir **dejenere helis** örneği olan doğrudur. Eğer torsiyonu yani $\tau = 0$ ise eğri yine bir dejenere helis örneği olan **çemberdir**. Çiftçi (2009) ise çalışmasında genel helisleri bi-invaryant metrik ile $3-$boyutlu Lie gruplarında çalıştı ve Lancret teoreminin bir genellemesini ortaya koydu.

2004 yılında ilk kez Izumiya tarafından **slant helisler** tanımlanmış ve bu helislere ait karakterizasyonlar verilmiştir. Kula ve Yaylı (2005) slant helislerin küresel resimlerini çalışmış ve bir slant helisin küresel resminin bir küresel helis olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra ise Kula ve diğerleri (2010) slant helisleri teğetler, asli normaller ve binormaller göstergeleri için diferesiyel denklemler yardımıyla karakterize ettiler. Hatta Gök ve diğerleri (2009), Gök ve diğerleri (2011) tarafından slant helislerin farklı tanımlamaları (V_n slant ve kuaterniyonik B_2 slant gibi) yapılmış, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bu tanım daha yüksek boyutlu uzaylara da genelleştirilmiştir. Son yıllarda bu tip özel eğriler, yüzeyler ve manifoldlar üzerinde de ele alınmış, hatta kontakt manifoldlar gibi özel yapıya sahip olan bazı manifoldlarda da genel helisler ve slant helisler çalışılmıştır.

İki uzay eğrisinin Frenet çatılarının, karşılık gelen noktalarındaki vektörleri dikkate alındığında, çatılardan birinin bir elemanının diğer çatının bir elemanı ile lineer bağımlı olması durumu diferensiyel geometride oldukça ilginç sonuçlar doğurur. Bu eğriler genellikle bağlantılı eğriler olarak adlandırılır. Bertrand (1850) bir eğrinin asli normal vektör alanının bir diğer eğrinin asli normal vektör alanı olması durumunu çalışmış ve bu tip eğriler için önemli bir karakterizasyon vermiştir. Bir α eğrisinin asli normal vektör alanı, β eğrisinin de asli normal vektör alanı oluyorsa, α eğrisine **Bertrand eğrisi**, β eğrisine **$\boldsymbol{\alpha}$ eğrisinin Bertrand çifti** ve $\{\alpha, \beta\}$ ikilisine de **Bertrand eğri çifti** denir. Zaman içerisinde Bertand eğrileri ile ilgili farklı uzaylarda bir çok çalışma yapılmıştır (Whittemore 1940, Ekmekci 2001, Balgetir 2004, Jin 2008, Yıldırım 2008).

Son yıllarda bağlantılı eğrilerin yeni bir tanımı Liu ve Wang (2007) tarafından verilmiştir. Liu ve Wang, **Mannheim eğrileri** olarak adlandırdıkları bu eğrileri şu şekilde tanımladılar: "Γ ve Γ_1, E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında iki eğri olsun, bu eğrilerin karşılık gelen noktalarında Γ eğrisinin asli normali ile Γ_1 eğrisinin binormali lineer bağımlı oluyorsa, Γ eğrisine bir **Mannheim eğrisi**, Γ_1 eğrisine **$\boldsymbol{\Gamma}$ eğrisinin Mannheim çifti** ve $\{\Gamma, \Gamma_1\}$ ikilisine de **Mannheim eğri çifti** denir". Bu tanımlamadan sonra Mannheim eğrileri bir çok araştırmacı tarafından farklı uzaylarda tanımlanmış ve çalışılmıştır (Orbay 2009, Özkaldı 2009, Güngör 2010, Karacan 2011, Öztekin 2011).

Bu tez çalışmasında, bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında **slant helisler** ve **slant helislerin küresel göstergeleri ile involütleri** tanımlandı ve bir eğrinin slant helis olması için gerekli karakterizasyonlar verildi. Ayrıca slant helisler ile küresel göstergeleri ve involütleri arasındaki ilişkiler araştırıldı ve bu ilişkiler yardımıyla bir takım karakterizasyonlar verildi. Daha sonra **Mannheim eğrileri** ve **Bertrand eğrileri** tanımlandı. Bir eğrinin Mannheim eğrisi ya da Bertrand eğrisi olabilmesi için sağlaması gereken koşullar verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Bu bölüm Öklid uzayında eğrilerle ilgili bazı temel kavramlara ayrılmıştır.

Tanım 2.1.1 X bir cümle ve γ, X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu olsun. γ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır;

i) $X, \emptyset \in \gamma$,

ii) $\forall\ A_1, A_2 \in \gamma$ için $A_1 \cap A_2 \in \gamma$,

iii) $A_i \in \gamma$, $i \in I$, $\underset{i \in I}{\cup} A_i \in \gamma$

(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.2 Bir X cümlesi ve üzerindeki γ topolojisinden oluşan (X, γ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.3 (X, γ) bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı iki noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.4 X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizim (topolojik dönüşüm) denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.5 M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir $n-$boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik $n-$manifold) dur denir;

($\mathbf{M}_1$) M bir Hausdorff uzayıdır,

($\mathbf{M}_2$) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur,

($\mathbf{M}_3$) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir,
(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.6 M bir topolojik manifold olsun. $P \in M$ noktasının M deki bir açık komşuluğu, E^n in bir U açık altcümlesine homeomorf olarak alınabilir. Bu homeomorfizm

$$\psi : U \longrightarrow V$$

ile gösterilsin. (U, ψ) ikilisine M nin P noktasındaki bir haritası veya koordinat komşuluğu denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.7 M bir topolojik n-manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan bir açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının

$$\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.8 Bir topolojik n-manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall\alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M

üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.9 M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.10 Bir

$$\overrightarrow{V}_P : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü için

i) $\overrightarrow{V}_P[\lambda f + \mu g] = \lambda \overrightarrow{V}_P[f] + \mu \overrightarrow{V}_P[g]$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ii) $\overrightarrow{V}_P[f, g] = \overrightarrow{V}_P[f]\, g(P) + f(P)\, \overrightarrow{V}_P[g]$

aksiyomları sağlanıyorsa, $\overrightarrow{V}_P$ fonksiyonuna M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

M manifoldunun bir $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi

$$T_M(P) = \left\{ \overrightarrow{V}_P \mid \overrightarrow{V}_P : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \overset{\text{tanjant uzay}}{\longrightarrow} \mathbb{R} \right\}$$

ile gösterilsin. Bu cümlede toplama işlemini

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & T_M(P) \times T_M(P) & \longrightarrow & T_M(P) \\ & \left(\overrightarrow{V}_P, \overrightarrow{W}_P\right) & \longrightarrow & \overrightarrow{V}_P + \overrightarrow{W}_P \end{array}$$

$$\left(\overrightarrow{V}_P + \overrightarrow{W}_P\right)[f] = \overrightarrow{V}_P[f] + \overrightarrow{W}_P[g], \; \forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

olarak tanımlanırsa $(T_M(P), +)$ ikilisi bir Abel grubu olur. Ayrıca

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times T_M(P) & \longrightarrow & T_M(P) \\ & \left(\lambda, \overrightarrow{V}_P\right) & \longrightarrow & \lambda \overrightarrow{V}_P \end{array}$$

$$\lambda \overrightarrow{V}_P[f] = \lambda \overrightarrow{V}_P[f], \; \forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

dış işlemi de bu Abel grubunu $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı yapar.

Bu uzay

$$\{T_M(P), \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$$

sisteminden ibaret olup M nin $P \in M$ noktasındaki tanjant uzayı adını alır ve kısaca $T_M(P)$ ile gösterilir (Kobayashi ve Nomizo 1963).

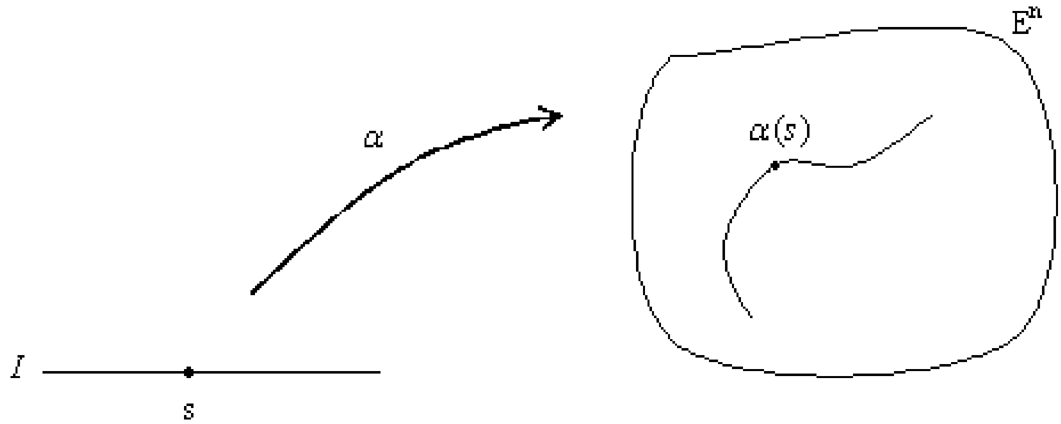
Tanım 2.1.11 $M \subset E^n$ bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bir

$$X : M \underset{\text{örten}}{\xrightarrow{1:1}} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

operatörüne M üzerinde bir vektör alanı denir (Auslander 1967).

M üzerinde tanımlanan vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.12 I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \longrightarrow E^n$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne, E^n uzayı içinde bir eğri denir (Şekil 2.1), (Sabuncuoğlu 2004).



Şekil 2.1 E^n de eğri

Tanım 2.1.13 (Diferensiyellenebilir Eğri) M bir C^∞ manifold ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun.

$$\alpha : I \longrightarrow M \subseteq E^n$$

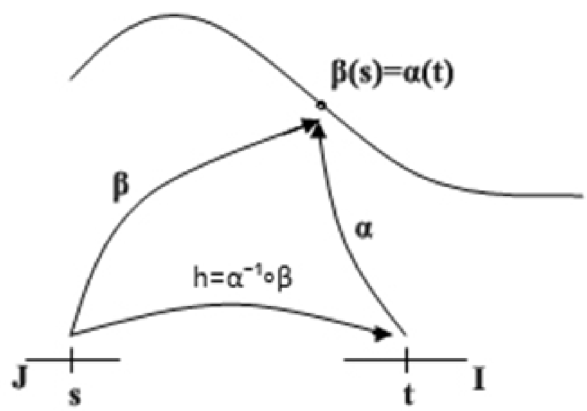
dönüşümü diferensiyellenebilir ise α ya M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri denir (Matsushima 1972).

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ eğrisi bundan sonra α ile gösterilecektir. Buradaki $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

Tanım 2.1.14 (Parametre Değişimi) E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi (daha doğrusu M nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir (Şekil 2.2), (Hacısalihoğlu 2000).



Şekil 2.2 Parametre değişimi

Tanım 2.1.15 (Hız Vektörü) E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \longrightarrow E^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),\ \alpha(t) \in M$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha^{'} &= \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t, \quad \alpha_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \end{bmatrix} \\ \alpha^{'}(t) &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \mid_t, ..., \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \mid_t\right) \end{aligned}$$

dır. $(\alpha(t), \alpha^{'}(t)) \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.16 (Birim Hızlı Eğri) M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\left\|\alpha^{'}(s)\right\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.17 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.1 E^n de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.18 (Serret-Frenet r-ayaklı Alanı) $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$, için;

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), ..., V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Herbir V_i, $1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektör alanı adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Özel Hal: $n = 3$ özel halinde, E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 2-ayaklısı ve Frenet 3-ayaklısı elde edilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$\overrightarrow{T} = \alpha' \quad , \quad \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\|\alpha''\|}\alpha''$$

ve

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$$

dir. Böylece,

$$\{\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s)\}$$

sistemi, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.2 $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t), \overrightarrow{B}(t)\}$ ise

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T} &= \frac{1}{\|\alpha^{\cdot}(t)\|}\alpha^{\cdot}(t) \quad , \quad \alpha^{\cdot}(t) = \frac{d\alpha}{dt} \\
\overrightarrow{N} &= \overrightarrow{B}(t) \times \overrightarrow{T}(t) \\
\overrightarrow{B} &= \frac{1}{\|\alpha^{\cdot}(t) \times \alpha^{\cdot\cdot}(t)\|}(\alpha^{\cdot}(t) \times \alpha^{\cdot\cdot}(t))
\end{aligned}$$

dir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.19 (Eğrilikler) $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
k_i : I &\longrightarrow \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq r \\
s &\longrightarrow k_i(s) = \left\langle V_i^{'}(s), V_{i+1}(s) \right\rangle
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.3 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, M nin $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ise

$$\begin{cases}
\mathbf{1)} V_1^{'}(s) = k_1(s)V_2(s) \\
\mathbf{2)} V_i^{'}(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), 1 < i < r \\
\mathbf{3)} V_r^{'}(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)
\end{cases} \tag{2.1}$$

dir (Hacısalihoğlu 2000).

$\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ Frenet r-ayaklısının vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} V_1^{'} \\ V_2^{'} \\ V_3^{'} \\ \vdots \\ V_{r-2}^{'} \\ V_{r-1}^{'} \\ V_r^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. (2.1) veya aynı şey demek olan (2.2) eşitliklerine Frenet formülleri denir.

$n = 3$ özel halinde (2.2) eşitliği

$$\begin{bmatrix} V_1^{'} \\ V_2^{'} \\ V_3^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T^{'} \\ N^{'} \\ B^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu halde 1-inci eğrilik olan $k_1(s) = \varkappa(s)$ değeri sadece eğrilik adıyla ve 2-inci eğrilik olan $k_2(s) = \tau(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla bilinir. T, Nve B vektörlerine de sırasıyla eğrinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.1.19 dan $k_i(s)$ eğriliklerinin hesabı yapılabilir. Ancak eğrilikleri aşağıdaki teorem yardımıyla hesaplamanın pratik bakımdan değeri vardır.

Teorem 2.1.4 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı, $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve

$$E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j<i} \left\langle \alpha^{(i)}(s), V_j(s) \right\rangle V_j(s) \quad , \ 1 \leq i \leq r$$

olmak üzere

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|} \quad , \ 1 \leq i \leq r$$

dir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.20 $M, N \subset E^n$ iki eğri olsun. M ve N sırasıyla (I, α), (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N nin Frenet r-ayaklıları, sırasıyla,

$$\{V_1(s), ..., V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), ..., V_r^*(s)\}$$

olmak üzere,

$$\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$$

ise N ye M nin involütü, M ye de N nin evolütü denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.5 $M, N \subset E^n$ eğrileri (I, α), (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer N, M nin involütü ise

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|, \ \forall s \in I, \ c = sabit$$

dir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.21 α eğrisi Frenet vektörleri T, N ve B olan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi boyunca birim teğet vektörler birim yarıçaplı küre üzerinde bir eğri çi-zerler ve bu eğriye T nin küresel resmi veya genellikle α eğrisinin teğetler göstergesi denir. Benzer şekilde α eğrisinin asli normallerinin çizdiği eğriye α eğrisinin asli normaller göstergesi, α eğrisinin binormallerinin çizdiği eğriye de α eğrisinin binormaller göstergesi denir (Struik 1988).

2.2 $\mathbf{E^3}$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler

Bu bölümde E^3, 3-boyutlu Öklid uzaylarında helis eğrileri, Mannheim eğrileri ve Bertrand eğrileri ile ilgili tanımlar ve bazı karakterizasyonlar verilecektir. Bu kısımda ve çalışmanın devamında ele alınacak tüm eğriler birim hızlı olacaktır.

2.2.1 Helis eğrileri

Tanım 2.2.1.1 E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi verilsin. α eğrisinin teğet vektör alanı ile sabit doğrultulu bir doğru sabit açı yapıyorsa α eğrisine bir genel helis denir.

α eğrisinin teğet vektör alanı T ve sabit doğrultulu bir doğru U olmak üzere

$$\langle T, U \rangle = \cos\theta, \ \ \theta = sabit$$

dir. Burada sabit doğrultulu U doğrusuna genel helisin ekseni denir (Lancret 1802).

Teorem 2.2.1.1 E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisinin eğrilikleri $\varkappa$ ve τ olmak üzere, α eğrisinin genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau}{\varkappa} = c = sabit$$

olmasıdır (Lancret 1802, Saint Venant 1845).

Özel olarak;

(i) α eğrisinin eğriliği $\varkappa$ ve torsiyonu τ, eğri boyunca sıfırdan farklı birer sabitler ise, α bir dairesel helistir.

(ii) α eğrisinin eğriliği $\varkappa = 0$ ise α eğrisi bir dejenere helis örneği olan düzgün bir doğrudur.

(iii) α eğrisinin torsiyonu $\tau = 0$ ise α eğrisi bir dejenere helis örneği olan çemberdir.

Tanım 2.2.1.2 Eğer bir α eğrisinin, asli normal vektör alanı sabit doğrultulu bir doğru ile sabit açı yapıyorsa bu eğriye slant helis denir. Yani α eğrisinin asli normal vektör alanı N ve sabit doğrultulu bir doğru U olmak üzere

$$\langle N, U \rangle = \cos\varphi,\ \ \varphi = sabit$$

dir. Burada sabit doğrultulu U doğrusuna slant helisin ekseni denir (Izumiya 2004).

Teorem 2.2.1.2 Bir α eğrsinin eğriliği $\varkappa \neq 0$ olmak üzere; α eğrisinin slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart α eğrisinin aslinormaller göstergesinin küresel resminin geodezik eğriliği olan

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)^{\prime} \right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır (Izumiya 2004).

2.2.2 Mannheim eğrileri

Tanım 2.2.2.1 α ve β gibi iki eğrinin karşılık gelen noktalarında, α eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlı ise α eğrisine Mannheim eğrisi, β eğrisine α eğrisnin Mannheim çifti ve $\{\alpha, \beta\}$ ikilisine de Mannheim eğri çifti denir (Wang ve Liu 2007).

Teorem 2.2.2.1 $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi Mannheim eğri çifti olmak üzere; α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık sabittir. Yani d uzaklık fonksiyonu ve λ sabit bir sayı olmak üzere

$$d\left(\alpha, \beta\right) = \lambda$$

dır (Orbay 2009).

Teorem 2.2.2.2 Bir α eğrisinin Mannheim eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α eğrisinin eğriliği $\varkappa$ ve torsiyonu τ nun

$$\varkappa = \lambda \left(\varkappa^2 + \tau^2 \right)$$

eşitliğini sağlamasıdır (Wang ve Liu 2007).

Teorem 2.2.2.3 α eğrisi bir Mannheim eğrisi ve s_β da β eğrisinin yay parametresi olsun. β eğrisinin α eğrisinin Mannheim çifti olabilmesi için gerek ve yeter şart β eğrisinin eğriliği $\varkappa_\beta$ ve torsiyonu τ_β nın

$$\frac{d\tau_\beta}{ds_\beta} = \frac{\varkappa_\beta}{\lambda} \left(1 + \lambda^2 \tau_\beta^2 \right)$$

eşitliğini sağlamasıdır (Liu ve Wang 2008).

2.2.3 Bertrand eğrileri

Tanım 2.2.3.1 α ve β gibi iki eğrinin karşılık gelen noktalarında, α eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin asli normal vektör alanı lineer bağımlı ise α eğrisine Bertrand eğrisi, β eğrisine α eğrisinin Bertrand çifti ve $\{\alpha, \beta\}$ ikilisine de Bertrand eğri çifti denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.3.1 $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi Bertrand eğri çifti olmak üzere α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık sabittir. Yani d uzaklık fonksiyonu ve λ sabit bir sayı olmak üzere

$$d(\alpha, \beta) = \lambda$$

dır (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.3.2 Bir α eğrisinin eğriliği $\varkappa$ ve torsiyonu τ olsun. α eğrisinin Bertrand eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\exists\lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda\varkappa + \mu\tau = 1$$

olmasıdır (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.2.3.3 $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi Bertrand eğri çifti olmak üzere α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarında teğet vektör alanları arasındaki açının ölçüsü sabittir (Tanrıöver 1989).

2.3 Lie Grubu ve Lie Cebiri

Tanım 2.3.1 (Lie Grubu) Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine bir Lie Grubu denir;

L_1 : M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır,

L_2 :

$$\begin{aligned} M \times M &\rightarrow M \\ (a, b) &\rightarrow ab^{-1} \end{aligned}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

M ye Lie Grubunun temel manifoldu ve G ye de temel grubu denir (Hacısalihoğlu 2006).

Tanım 2.3.2 (Lie Cebiri) V bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} [\ ,\ ]: & V\times V & \rightarrow & V \\ & (X,Y) & \rightarrow & [X,Y] \end{array}$$

işlemi,

1) Bilineer,

2) Antisimetrik,

3) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$

özeliklerine sahip ise $(V,[,])$ ikilisine bir Lie Cebiri denir (Hacısalihoğlu 2006).

Tanım 2.3.3 G bir Lie grubu olsun. Belli bir $g_0 \in G$ noktasında

$$l_{g_0}: G \rightarrow G$$

dönüşümü $\forall g \in G$ için

$$l_{g_0}(g) = g_0 g$$

şeklinde tanımlanır ve G üzerinde bir sol paralelizm(öteleme) adını alır.

Benzer şekilde belli bir $g_0 \in G$ noktasında

$$r_{g_0}: G \rightarrow G$$

dönüşümü $\forall g \in G$ için

$$r_{g_0}(g) = g g_0$$

şeklinde tanımlanır ve G üzerinde bir sağ paralelizm(öteleme) adını alır (Hacısalihoğlu 2006).

Tanım 2.3.4 (Sol ve Sağ İnvaryant Vektör Alanı) G bir matris Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı da X olsun. Eğer $\forall g_0, g_1 \in G$ için

$$l_{(g_0)_*} X(g_1) = X\left(g_0 g_1\right)$$

yani $\forall g \in G$ için

$$l_{(g)_*} \circ X = X \circ l_{(g)}$$

ise X vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı denir.

$$\chi_l = \left\{X : \quad X \in \chi, \quad l_{(g)_*} \circ X = X \circ l_{(g)}\right\}$$

cümlesi χ vektör alanları uzayının bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya sol invaryant vektör alanlarının uzayı denir.

Benzer şekilde G üzerinde bir vektör alanı da X olsun. Eğer $\forall g_0, g_1 \in G$ için

$$r_{(g_0)_*} X(g_1) = X\left(g_1 g_0\right)$$

yani $\forall g \in G$ için

$$r_{(g)_*} \circ X = r_{(g)} \circ X$$

ise X vektör alanına bir sağ invaryant vektör alanı denir.

$$\chi_r = \left\{X : \quad X \in \chi, \quad r_{(g)_*} \circ X = r_{(g)} \circ X\right\}$$

cümlesi χ vektör alanları uzayının bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya sağ invaryant vektör alanlarının uzayı denir (Hacısalihoğlu 2006).

Tanım 2.3.5 (Lie Cebiri) G Lie grubunun Lie cebiri, G üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının Lie cebiri olarak tanımlanır. Bunun yanında G Lie grubunun Lie cebiri olarak, G nin e birim noktasındaki T_eG tanjant uzayı Lie cebir yapısı ile birlikte alınabilir (Hacısalihoğlu 2006).

Tanım 2.3.6 G bir Lie grubu ve $d : G \times G \to R$ bir metrik olsun. $\forall a \in G$ ve $\forall x, y \in G$ için,

$d(ax, ay) = d(x, y)$ ise d metriğine sol invaryant metrik,

$d(xa, ya) = d(x, y)$ ise d metriğine sağ invaryant metrik denir.

Tanım 2.3.7 d metriği hem sol invaryant hem de sağ invaryant ise d metriğine bi-invaryant metrik denir.

3. LIE GRUPLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLER

Bu bölümdeki temel çalışmalar Ripoll (1991), Crouch (1995), Santo (2003), Noakes (2003) ve Çiftçi (2009)'nin çalışmalarıdır. Öncelikle Lie gruplarında genel helislerden bahsedilecek, daha sonra Lie gruplarında Slant helisler, Mannheim eğrileri ve Bertrand eğrileri ile ilgili elde edilen kavramlar verilecektir.

G, $\langle\ ,\rangle$ bi-invaryant metrik ile birlikte bir Lie grubu, D konneksiyonu G Lie grubunun Levi-Civita konneksiyonu ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. e, G Lie grubunun birim elemanı olmak üzere $\mathfrak{g}$ ile T_eG izomorftur.

$\langle\ ,\rangle$ bi-invaryant metrik ve $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ olmak üzere

$$\langle X, [Y, Z]\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle$$

ve

$$D_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

dir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ yay parametreli bir eğri ve $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ cümlesi $\mathfrak{g}$ nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda eğri boyunca iki vektör alanı W ve Z olmak üzere $W = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$ ve $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i X_i$ şeklinde yazılabilir. Burada $w_i : I \to \mathbb{R}$ ve $z_i : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları düzgün fonksiyonlardır. W ve Z gibi iki vektör alanının Lie çarpımı

$$[W, Z] = \sum w_i z_j [X_i, X_j]$$

şeklinde ve α eğrisi boyunca herhangi bir W vektör alanının kovaryant türevi $D_{\alpha'} W$ olmak üzere

$$D_{\alpha'} W = \dot{W} + \frac{1}{2}[T, W] \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada $T = \alpha'$ ve $\dot{W} = \sum_{i=1}^{n} \dot{w}_i X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{dw_i}{dt} X_i$ dir.

Eğer W, bir sol invaryant vektör alanının α ya kısıtlanmışı ise, $\dot{W} = 0$ dır (Crouch ve Silva 1995).

Tanım 3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ yay parametreli bir eğri olsun. Eğer α eğrisi bir sol invaryant vektör alanı X ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle T(s), X\rangle = \cos\theta, \ s \in I$$

ise α eğrisi bir genel helistir. Burada $X \in \mathfrak{g}$ ve birim, T; α eğrisinin teğet vektör alanı, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ açısı ise X ile T arasındaki sabit açıdır (Çiftçi 2009).

Tanım 3.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet bileşenleri $(T, N, B, \varkappa, \tau)$ olmak üzere

$$\tau_G = \frac{1}{2}\left\langle [T, N], B\right\rangle \tag{3.2}$$

veya

$$\tau_G = \frac{1}{2\varkappa^2\tau}\langle \ddot{T}, [T, \dot{T}]\rangle + \frac{1}{4\varkappa^2\tau}\|[T, \dot{T}]\|^2$$

dir (Çiftçi 2009).

Teorem 3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet bileşenleri $(T, N, B, \varkappa, \tau)$ olmak üzere, α eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\tau = c\varkappa + \tau_G \ , \ c = \text{sabit}$$

olmasıdır (Çiftçi 2009).

Tanım 3.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin küresel resmi olan $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi

$$\gamma(s) : dL_{\alpha^{-1}(s)}\alpha^{'}(s) \ , \ s \in I$$

şeklinde tanımlıdır. Burada L sol öteleme ve s yay parametresidir (Çiftçi 2009).

Teorem 3.2 $\langle\ ,\rangle$ bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu bir Lie grubunda bir α genel helisinin küresel resmi düzlemsel bir eğridir (Çiftçi 2009).

3.1 Lie Gruplarında Slant Helisler

Bu bölümde ilk olarak Lie gruplarında slant helis tanımı verilip bir slant helisin ekseni elde edildi. Daha sonra bir eğrinin, bi-invaryant metrik ile bir $3-$boyutlu Lie grubunda slant helis olma karakterizasyonu belirlendi. Ayrıca bu karakterizasyonda, Lie grubunun özel halleri alınıp bazı sonuçlar elde edildi.

Tanım 3.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ yay parametreli bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin asli normal vektör alanı bir sol invaryant vektör alanı X ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle N(s), X\rangle = \cos\theta,\ \ s \in I,\ \ \theta = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}$$

ise α eğrisi bir slant helistir. Burada $X \in \mathfrak{g}$ ve birim, N; α eğrisinin asli normal vektör alanıdır.

Tanım 3.1.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet bileşenleri $(T, N, B, \varkappa, \tau)$ ve α eğrisinin harmonik eğriliği H olmak üzere,

$$H = \frac{\tau - \tau_G}{\varkappa}$$

dır. Burada $\tau_G = \frac{1}{2}\langle [T, N], B\rangle$ dir.

Tanım 3.1.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet bileşenleri $(T, N, B, \varkappa, \tau)$ olmak üzere, asli normaller göstergesinin küresel resmi (N) nin geodezik eğriliği

$$\sigma_N = \frac{\varkappa(1 + H^2)^{\frac{3}{2}}}{H'}$$

eşitliği ile verilen σ_N fonksiyonuyla tanımlıdır. Burada H, α eğrisinin harmonik eğriliğidir.

Lemma 3.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [T, N] &= \langle [T, N], B \rangle B = 2\tau_G B \\ [T, B] &= \langle [T, B], N \rangle N = -2\tau_G B \end{aligned}$$

dir.

İspat: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi yay parametreli bir eğri ve α eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun. Bu durumda $[T, N] \in Sp\{T, N, B\}$ olduğundan

$$[T, N] = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B \tag{3.3}$$

yazılabilir. Eğer (3.3) eşitliğinin her iki yanı ,sırasıyla, T, N ve B ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle [T, N], T \rangle &= \lambda_1 = 0, \\ \langle [T, N], N \rangle &= \lambda_2 = 0, \\ \langle [T, N], B \rangle &= \lambda_3, \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$[T, N] = \langle [T, N], B \rangle B,$$

yazılabilir. Son denklem ile (3.2) eşitliği bir arada düşünülürse

$$[T, N] = 2\tau_G B$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $[T, B] = -2\tau_G B$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi yay parametreli bir eğri ve α eğrisinin Frenet bileşenleri $(T, N, B, \varkappa, \tau)$ olmak üzere α eğrisi G Lie grubunda bir slant helis ise α

eğrisinin ekseni

$$X = \left\{ \frac{\varkappa H\left(1+H^2\right)}{H^{\prime}} T + N + \frac{\varkappa\left(1+H^2\right)}{H^{\prime}} B \right\} \cos\theta,\ \theta = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}$$

dır. Burada $H = \frac{\tau - \tau_G}{\varkappa}$, α eğrisinin harmonik eğriliğidir.

İspat α slant helisinin ekseni X ve $\lambda_1 = \langle T, X\rangle$, $\lambda_2 = \langle N, X\rangle$ ve $\lambda_3 = \langle B, X\rangle$ olmak üzere,

$$X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

şeklinde yazılabilir.

α eğrisi G Lie grubunda bir slant helis ise Tanım 3.1.1 den dolayı

$$\langle N(s), X\rangle = \cos\theta,\ s \in I, \tag{3.4}$$

dır. Burada $X \in g$ bir sol invaryant vektör alanı ve birim, θ açısı X ile α eğrisinin asli normal vektör alanı olan N arasındaki sabit açıdır. $\langle N(s), X\rangle = \cos\theta$ eşitliğinde türev alınırsa

$$\langle D_T N, X\rangle + \langle N, D_T X\rangle = 0,$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (3.1) eşitliği ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$-\kappa \langle T, X\rangle + \tau \langle B, X\rangle - \frac{1}{2} \langle [T, N], X\rangle = 0$$

ve Lemma 3.1.1 yardımıyla da

$$-\kappa \langle T, X\rangle + (\tau - \tau_G) \langle B, X\rangle = 0$$

veya

$$\langle T, X\rangle = H \langle B, X\rangle \tag{3.5}$$

elde edilir. Burada $H = \dfrac{\tau - \tau_G}{\varkappa}$, α eğrisinin harmonik eğriliğidir.

(3.5) eşitliğinde tekrar türev alınırsa,

$$\langle D_T T, X\rangle + \langle T, D_T X\rangle = H^{'} \langle B, X\rangle + H \{\langle D_T B, X\rangle + \langle B, D_T X\rangle\}$$

olur. Bu son eşitlikten, (3.1) eşitliği ve Lemma 3.1.1 yardımıyla

$$\kappa \langle N, X\rangle = H^{'} \langle B, X\rangle - H (\tau - \tau_G) \langle N, X\rangle$$

veya

$$\langle B, X\rangle = \frac{\varkappa (1 + H^2)}{H^{'}} \langle N, X\rangle . \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) eşitliğindeki $\langle B, X\rangle$ değeri (3.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\langle T, X\rangle = \frac{\varkappa H}{H^{'}} \left(1 + H^2\right) \langle N, X\rangle \tag{3.7}$$

olur. Sonuç olarak, (3.4), (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla slant helisin ekseni

$$X = \left\{ \frac{\varkappa H (1 + H^2)}{H^{'}} T + N + \frac{\varkappa (1 + H^2)}{H^{'}} B \right\} \cos\theta,$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri ve α eğrisinin Frenet elemanları $(T, N, B, \varkappa, \tau)$ olsun. α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma_N = \frac{\varkappa(1 + H^2)^{\frac{3}{2}}}{H^{'}} = \tan\theta, \ \theta = \text{sabit} \neq \frac{\pi}{2}$$

ifadesinin sabit olmasıdır. Burada H, α eğrisinin harmonik eğriliğidir.

İspat Eğer α slant helisinin ekseni X ise Teorem 3.1.1 e göre

$$X = \left\{ \frac{\varkappa H (1 + H^2)}{H^{'}} T + N + \frac{\varkappa (1 + H^2)}{H^{'}} B \right\} \cos\theta$$

dir. Ayrıca X bir birim vektör alanı olduğundan

$$\sigma_N = \frac{\varkappa(H^2+1)^{\frac{3}{2}}}{H'} = \tan\theta$$

ifadesinin sabit olduğu kolayca görülebilir.

Tersine σ_N sabit olduğunda, α eğrisinin bir slant helis olması gerekliliği açıktır. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.2 G, $\langle\ ,\rangle$ bi-invaryant metrik ile bir Lie grubu olsun. Farklı Lie grupları için aşağıdaki ifadeler verilebilir:

$i)$ Eğer G Abelyan Lie grubu ise $\tau_G = 0$ dır,

$ii)$ Eğer G, SO^3 Lie grubu ise $\tau_G = \frac{1}{2}$ dir,

$iii)$ Eğer G, SU^2 Lie grubu ise $\tau_G = 1$ dir,
(Çiftçi 2009, Santo 2003).

Sonuç 3.1.1 G Abelyan Lie grubunda, α yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma_N = \frac{(\varkappa^2+\tau^2)^{3/2}}{\varkappa^2\left(\dfrac{\tau}{\varkappa}\right)'}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat Eğer G Abelyan Lie grubu ise Teorem 3.1.2 ve Lemma 3.1.2 nin kullanılması ile istenen sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

Böylece bu sonuç Izimuya'nın tanımladığı slant helislerin bir genelleştirmesini vermektedir. Benzer ispatlarla, aşağıdaki sonuçlar da elde edilir.

Sonuç 3.1.2 SU^2 Lie grubunda, α yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma_N = \frac{\left(\varkappa^2 + (\tau - 1)^2\right)^{3/2}}{\varkappa^2 \left(\dfrac{\tau - 1}{\varkappa}\right)'}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

Sonuç 3.1.3 SO^3 Lie grubunda, α yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma_N = \frac{\left(\varkappa^2 + \left(\tau - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}}{\varkappa^2 \left(\dfrac{\tau - \frac{1}{2}}{\varkappa}\right)'}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

3.2 Lie Gruplarında Slant Helislerin Küresel Resimleri ve İnvolütleri

Bu bölümde öncelikle Ripoll (1991) ve Noakes (2003)'in çalışmaları yardımıyla slant helislerin küresel göstergeleri tanımlandı. Daha sonra slant helislerin involütlerinin tanımı verildi ve slant helislerle küresel resimleri ve involütleri arasındaki ilişkiler araştırıldı.

3.2.1 Slant helislerin teğetler göstergesi

Tanım 3.2.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri, $\{X_1, X_2, X_3\}$ cümlesi $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir ortonormal bazı ve s^* ise β eğrisinin yay parametresi olsun. Bu durumda α eğrisinin teğetler göstergesi olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi

$$\beta(s^*) = T(s) = \sum_{i=1}^{3} t_i X_i \quad , s \in I$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 3.2.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri ve β eğrisi α eğrisinin teğetler göstergesi olsun. α eğrisinin bir 3-boyutlu Lie grubunda slant helis olması için gerek ve yeter şart β eğrisinin genel helis olmasıdır.

İspat α eğrisi 3-boyutlu Lie grubunda bir slant helis ve β eğrisi α eğrisinin teğetler göstergesi olsun. Tanım 3.2.1.1 den dolayı

$$\beta\left(s^*\right) = T(s) \tag{3.8}$$

dir. (3.8) eşitliğinde (3.1) eşitliği kullanılarak türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_T}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} &= \dot{T} = D_T T - \frac{1}{2}\left[T, T\right] \\ \frac{d\alpha_T}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} &= \varkappa N \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte $\varkappa > 0$ olduğu varsayılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \varkappa$$

bulunur ve böylece

$$T_\beta\left(s^*\right) = N(s) \tag{3.9}$$

olur. (3.9) ifadesinde tekrar türev alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varkappa_\beta N_\beta\left(s^*\right)\frac{ds^*}{ds} &= \dot{N} = D_T N - \frac{1}{2}\left[T, N\right] \\ \varkappa_\beta N_\beta\left(s^*\right)\varkappa &= -\kappa T + \tau B - \frac{1}{2}\left\langle\left[T, N\right], B\right\rangle B \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu son eşitlikte Lemma 3.1.1 in kullanılmasıyla

$$\varkappa_\beta N_\beta\left(s^*\right) = -T + HB$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\varkappa_\beta = \sqrt{1 + H^2} \tag{3.10}$$

olarak bulunur. Son iki ifadeden β eğrisinin asli normal vektör alanı N_β,

$$N_\beta(s^*) = -\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}B \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir. (3.9) ve (3.11) kullanılarak β eğrisinin binormal vektör alanı B_β,

$$\begin{aligned} B_\beta(s^*) &= T_\beta(s^*) \times N_\beta(s^*) \\ B_\beta(s^*) &= \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B \end{aligned} \tag{3.12}$$

olur. Bu son ifadede türev alınır ve Lemma 3.1.1 uygulanırsa

$$\left(\tau_\beta - \tau_{G_\beta}\right) N_\beta(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\frac{H'}{(1+H^2)^{3/2}}T + \frac{HH'}{(1+H^2)^{3/2}}B$$

ya da $\frac{ds^*}{ds} = \varkappa$ olduğundan

$$\left(\tau_\beta - \tau_{G_\beta}\right) N_\beta(s^*) = -\frac{H'}{\varkappa(1+H^2)^{3/2}}T + \frac{HH'}{\varkappa(1+H^2)^{3/2}}B$$

elde edilir. Burada τ_β fonksiyonu β eğrisinin torsiyonu, $\tau_{G_\beta} = \frac{1}{2}\langle [T_\beta, N_\beta], B_\beta\rangle$ dır. Eğer son eşitlikte her iki tarafın normu alınırsa

$$\tau_\beta = \frac{H'}{\varkappa(1+H^2)} + \tau_{G_\beta}$$

olarak bulunur. (3.10) eşitliği ve yukarıdaki son eşitlikten

$$\frac{\tau_\beta - \tau_{G_\beta}}{\varkappa_\beta} = \frac{H'}{\varkappa(1+H^2)^{3/2}}$$

olduğu görülür. Burada α eğrisi slant helis olarak kabul edildiğinden bu oran sabittir. Dolayısıyla Teorem 3.1 gereğince α eğrisinin teğetler göstergesi olan β eğrisi bir genel helistir.

Tersine, β eğrisinin genel helis olduğu kabul edilirse, α eğrisinin bir slant helis olması gerektiği kolayca görülebilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi Frenet bileşenleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere yay parametreli bir eğri ve β eğrisi de α eğrisinin teğetler göstergesi olsun. Bu durumda α ve β eğrileri için $\tau_G = \tau_{G_\beta}$ dır.

İspat Teorem 3.2.1.1 in ispatında, β eğrisinin Frenet vektör alanları için bulduğumuz (3.9) , (3.11) ve (3.12) eşitlikleri, $\tau_{G_\beta} = \frac{1}{2} \langle [T_\beta, N_\beta], B_\beta \rangle$ ifadesinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\tau_{G_\beta} &= \frac{1}{2}\left\langle \left[N, -\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}B\right], \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}[T,N] + \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}[N,B], \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \frac{H}{1+H^2}\langle [T,N], T\rangle + \frac{1}{1+H^2}\langle [T,N], B\rangle + \frac{H^2}{1+H^2}\langle [N,B], T\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{H}{1+H^2}\langle [N,B], B\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{2}\langle [T,N], B\rangle,
\end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 3.2 ve son eşitlik yardımıyla

$$\tau_{G_\beta} = \tau_G$$

olarak bulunur.

3.2.2 Slant helislerin normaller göstergesi

Tanım 3.2.2.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri, $\{X_1, X_2, X_3\}$ cümlesi $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir ortonormal bazı ve s^* ise γ eğrisinin yay parametresi olsun. Bu durumda α eğrisinin normaller göstergesi olan $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi

$$\gamma(s^*) = N(s) = \sum_{i=1}^{3} n_i X_i \quad , \; s \in I$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 3.2.2.1 $\langle\ ,\rangle$, bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu bir Lie grubu olsun. Eğer α eğrisi bir slant helis ise α eğrisinin normaller göstergesi olan γ eğrisi düzlemsel bir eğridir.

İspat 3-boyutlu Lie grubunda α eğrisi bir slant helis ve γ eğrisi, α slant helisinin normaller göstergesi olsun. Tanım 3.2.2.1 den dolayı

$$\gamma(s^*) = N(s) \tag{3.13}$$

dir. (3.13) de (3.1) ifadesi kullanılarak türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} &= \dot{N} = D_T N - \frac{1}{2}[T,N] \\
&= -\varkappa T + \tau B - \frac{1}{2}\langle [T,N], B\rangle B \\
&= -\varkappa T + (\tau - \tau_G) B \\
&= -\varkappa T + \varkappa H B
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\varkappa > 0$ olduğu kabul edilirse

$$\frac{ds^*}{ds} = \varkappa\sqrt{1+H^2} \tag{3.14}$$

olur ve böylece

$$\frac{d\gamma}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}(-T + HB)$$

olarak bulunur. Son ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\gamma}{ds^{*2}}\frac{ds^*}{ds} &= -\frac{HH'}{(1+H^2)^{3/2}}(-T+HB) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\left(-\dot{T} + H'B + H\dot{B}\right) \\
&= -\frac{HH'}{(1+H^2)^{3/2}}(-T+HB) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\left\{-\varkappa N + H'B + H\left(-\tau N - \frac{1}{2}[T,B]\right)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde son ifadede, (3.14) ve Lemma 3.1.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^2\gamma}{ds^{*2}} &= -\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\frac{H^{'}}{\varkappa\left(1+H^2\right)^{3/2}}\left(-T+HB\right)+\frac{1}{\varkappa\left(1+H^2\right)}\left\{\left(-\varkappa-H\left(\tau-\tau_G\right)\right)N+H^{'}B\right\} \\ &= -\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\frac{H^{'}}{\varkappa\left(1+H^2\right)^{3/2}}\left(-T+HB\right)+\frac{1}{\varkappa\left(1+H^2\right)}\left\{-\varkappa\left(1+H^2\right)N+H^{'}B\right\}.\end{aligned}$$

yazılabilir. α eğrisi bir slant helis olduğundan, $\sigma_N(s)$ bir sabit fonksiyon olmak üzere son eşitlikten

$$\frac{d^2\gamma}{ds^{*2}} = \frac{1}{\sigma_N(s)}\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T - N + \frac{1}{\sigma_N(s)}\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B \tag{3.15}$$

olduğu dörülür. Buradan, γ eğrisinin eğriliği olan $\varkappa_\gamma$ değeri

$$\varkappa_\gamma = \left\|\frac{d^2\gamma}{ds^{*2}}\right\| = \frac{1}{|\sigma_N|}\sqrt{1+\sigma_N^2}$$

dir ve sabit bir fonksiyondur. (3.15) eşitliğinde tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^3\gamma}{ds^{*3}}\varkappa\sqrt{1+H^2} &= -\frac{1}{\sigma_N}\left\{\frac{H^{'}}{\left(1+H^2\right)^{3/2}}\left(-T+HB\right)+\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\left(-\dot{T}+H^{'}B+H\dot{B}\right)\right\}-\dot{N} \\ &\quad+\frac{1}{\sigma_N}\left(\frac{HH^{'}}{\sqrt{1+H^2}}B+\sqrt{1+H^2}\dot{B}\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma_N}\left\{\frac{H^{'}}{\left(1+H^2\right)^{3/2}}\left(-T+HB\right)+\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\left(-\varkappa\left(1+H^2\right)N+H^{'}B\right)\right\} \\ &\quad-D_TN+\frac{1}{2}\left[T,N\right]+\frac{1}{\sigma_N}\left(\frac{HH^{'}}{\sqrt{1+H^2}}B+\sqrt{1+H^2}\left(D_TB-\frac{1}{2}\left[T,B\right]\right)\right)\end{aligned}$$

olur. Lemma 3.1.1 ve Tanım 3.1.3 den

$$\frac{d^3\alpha_N}{ds^{*3}} = \varkappa\frac{\sigma_N^2+1}{\sigma_N^2}T - \varkappa H\frac{\sigma_N^2+1}{\sigma_N^2}B$$

elde edilir. Böylece γ eğrisinin torsiyonu olan τ_γ değeri

$$\tau_N^* = \frac{\det\left(\alpha_N^{'},\alpha_N^{''},\alpha_N^{''''}\right)}{\left\|\alpha_N^{'}\times\alpha_N^{''}\right\|^2} = 0$$

olarak hesaplanmış olur. Dolayısıyla γ eğrisi düzlemsel bir eğridir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.3 Slant helislerin binormaller göstergesi

Tanım 3.2.3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri, $\{X_1, X_2, X_3\}$ cümlesi $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir ortonormal bazı ve s^* da δ eğrisinin yay parametresi olsun. Bu durumda α eğrisinin binormaller göstergesi olan $\delta : I \subset \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi

$$\delta(s^*) = B(s) = \sum_{i=1}^{3} b_i X_i \quad , s \in I$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 3.2.3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir eğri ve δ eğrisi α eğrisinin binormaller göstergesi olsun. α eğrisinin bir 3-boyutlu Lie grubunda slant helis olması için gerek ve yeter şart δ eğrisinin bir genel helis olmasıdır.

İspat α eğrisi 3-boyutlu Lie grubunda bir slant helis ve δ eğrisi α eğrisinin binormaller göstergesi olsun. Tanım 3.2.3.1 den dolayı

$$\alpha_B(s^*) = B(s) \tag{3.16}$$

dir. (3.16) eşitliğinde (3.1) eşitliği kullanılarak türev alınırsa

$$\frac{d\delta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \dot{B} = D_T B - \frac{1}{2}[T, B]$$
$$\frac{d\delta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = -\varkappa H N$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikten, $\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , \text{eğer } \varkappa H \rangle 0 \\ -1 & , \text{eğer } \varkappa H \langle 0 \end{array} \right\}$ olduğunu varsayarsak

$$\frac{ds^*}{ds} = \varepsilon \varkappa H$$

bulunur ve böylece

$$T_\delta\left(s^*\right)=-\varepsilon N(s) \tag{3.17}$$

olur. (3.17) ifadesinde türev alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\varkappa_\delta N_\delta\left(s^*\right)\frac{ds^*}{ds} &= -\varepsilon\dot{N}=-\varepsilon D_T N+\varepsilon\frac{1}{2}\left[T,N\right] \\
\varkappa_\delta N_\delta\left(s^*\right)\frac{ds^*}{ds} &= \varepsilon\varkappa T-\varepsilon\tau B+\varepsilon\frac{1}{2}\left\langle\left[T,N\right],B\right\rangle B \\
\varkappa_\delta N_\delta\left(s^*\right)\varepsilon\varkappa H &= \varepsilon\varkappa T-\varepsilon(\tau-\tau_G)B \\
\varkappa_\delta N_\delta\left(s^*\right) &= \frac{1}{H}T-B
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olduğu görülür. Burada δ eğrisinin eğriliği $\varkappa_\delta$ olmak üzere

$$\varkappa_\delta=\frac{1}{|H|}\sqrt{1+H^2} \tag{3.19}$$

dir. $\varkappa\rangle 0$ kabul edilirse (3.18) ve (3.19) eşitliklerinden

$$N_\delta\left(s^*\right)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+H^2}}T-\frac{\varepsilon H}{\sqrt{1+H^2}}B \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.17) ve (3.20) eşitlikleri kullanılarak δ eğrisinin binormal vektör alanı B_δ,

$$\begin{aligned}
B_\delta\left(s^*\right) &= T_\delta\left(s^*\right)\times N_\delta\left(s^*\right) \\
&= \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T+\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olur. (3.21) da türev alnır ve Lemma 3.1.1 kullanılırsa

$$\left(\tau_\delta-\tau_{G_\delta}\right)N_\delta\left(s^*\right)\frac{ds^*}{ds}=\frac{H'}{\left(1+H^2\right)^{3/2}}T+\frac{HH'}{\left(1+H^2\right)^{3/2}}B,$$

$\frac{ds^*}{ds}=\varepsilon\varkappa H$ olduğu kullanılarak

$$\left(\tau_\delta-\tau_{G_\delta}\right)N_\delta\left(s^*\right)=\frac{H'}{\varepsilon\varkappa H\left(1+H^2\right)^{3/2}}T+\frac{HH'}{\varepsilon\varkappa H\left(1+H^2\right)^{3/2}}B$$

bulunur. Burada $\tau_{G_\delta} = \frac{1}{2}\left\langle [T_\delta, N_\delta], B_\delta \right\rangle$ dır. Son eşitlikte norm alındığında

$$\tau_\delta = \frac{H^{'}}{\varkappa H\left(1+H^2\right)} + \tau_{G_\delta} \tag{3.22}$$

olduğu görülür. Burada τ_δ fonksiyonu δ eğrisinin torsiyonudur. Böylece (3.19) ve (3.22) den

$$\frac{\tau_\delta - \tau_{G_\delta}}{\varkappa_\delta} = \frac{H^{'}}{\varkappa\left(1+H^2\right)^{3/2}}$$

elde edilir. α eğrisi bir slant helis olduğundan $\frac{\tau_\delta - \tau_{G_\delta}}{\varkappa_\delta}$ değeri sabittir. Dolayısıyla δ eğrisi bir genel helistir.

Tersine δ eğrisi bir genel helis olsun. Bu durumda α eğrisinin bir slant helis olduğu kolayca görülebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi Frenet bileşenleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere yay parametreli bir eğri ve δ eğrisi α eğrisinin binormaller göstergesi olsun. Bu durumda α ve δ eğrileri için $\tau_G = \tau_{G_\delta}$ dır.

İspat Teorem 3.2.3.1' in ispatında, δ eğrisinin Frenet vektör alanları için bulunan (3.17), (3.20) ve (3.21) eşitlikleri $\tau_{G_\delta} = \frac{1}{2}\left\langle [T_\delta, N_\delta], B_\delta \right\rangle$ ifadesinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\tau_{G_\delta} &= \frac{1}{2}\left\langle \left[-\varepsilon N, \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+H^2}}T - \tfrac{\varepsilon H}{\sqrt{1+H^2}}B\right], \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}[T,N] + \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}[N,B], \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \frac{H}{1+H^2}\left\langle [T,N], T\right\rangle + \frac{1}{1+H^2}\left\langle [T,N], B\right\rangle + \frac{H^2}{1+H^2}\left\langle [N,B], T\right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{H}{1+H^2}\left\langle [N,B], B\right\rangle \right\} \\
\tau_{G_\delta} &= \frac{1}{2}\left\langle [T,N], B\right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Tanım 3.2 ve yukarıdaki eşitlikten

$$\tau_{G_\delta} = \tau_G$$

olduğu görülür.

3.2.4 Slant helislerin involütleri

Tanım 3.2.4.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin teğet doğruları, bir diğer $x : I^* \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisine dik ise yani $T(s)$ ve $T_x(s^*)$, sırasıyla, α ve x eğrilerinin teğet vektör alanları olmak üzere

$$\langle T(s), T_x(s^*) \rangle = 0$$

oluyorsa x eğrsine α eğrisinin involütü denir. (α, x) ikilisi sırasıyla (I, α) and (I^*, x) kordinat komşulukları ile verilmek üzere involüt-evolüt çifti olarak isimlendirilir. (α, x) involüt-evolüt eğri çifti olmak üzere α ve x eğrileri arasındaki uzaklık

$$d\left(\alpha\left(s\right), x\left(s\right)\right) = \left|c - s\right|, \; c = \text{sabit}, \; \forall s \in I,$$

şeklinde tanımlıdır (Struik 1988).

α eğrisinin yay parametresi, x eğrisi için genellikle yay parametresi olmaz. x eğrisinin yay parametresi $\psi : I \longrightarrow I^*$ a diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlik ile tanımlanabilir

$$s^* = \psi\left(s\right) = \int_0^s \left\| \frac{dx\left(s\right)}{ds} \right\| ds.$$

$\psi : I \longrightarrow I^*$ fonksiyonu

$$\psi'\left(s\right) = \left(c - s\right) \varkappa, \; \forall s \in I \tag{3.23}$$

eşitliğini sağlar.

Teorem 3.2.4.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi yay parametreli bir eğri ve x eğrisi de α eğrisinin involütü olsun. 3-boyutlu bir Lie grubunda α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart x eğrsinin bir genel helis olmasıdır.

İspat x eğrsi α eğrisinin involütü olsun. Bu durumda

$$x(s) = \alpha(s) + (c - s)\,T\,(s)\,,\ \ c = \text{sabit}$$

dir. Her iki tarafın s parametresine göre türevini alınırsa, s ve s^* parametreleri sırasıyla α ve x eğrilerinin yay parametreleri olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} &= (c-s)\,\dot{T}(s), \\ T_x\left(s^*\right)\frac{ds^*}{ds} &= (c-s)\,\varkappa N, \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$\frac{ds^*}{ds} = \psi'\left(s\right) = (c-s)\,\varkappa$$

bulunur. Yukarıdaki son iki eşitlik bir arada düşünülürse

$$T_x\left(s^*\right) = N \tag{3.24}$$

olduğu görülür. Bu ifadede tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned} \varkappa_x N_x\left(s^*\right)\frac{ds^*}{ds} &= \dot{N} = D_T N - \frac{1}{2}\left[T, N\right] \\ \varkappa_x N_x\left(s^*\right)\varkappa &= -\kappa T + \tau B - \frac{1}{2}\left\langle \left[T, N\right], B\right\rangle B \end{aligned}$$

veya Lemma 3.1.1 yardımıyla

$$\varkappa_x N_x\left(s^*\right) = -T + HB$$

olur. Burada $\varkappa_x$ fonksiyonu x eğrisinin eğriliği olmak üzere

$$\varkappa_x = \sqrt{1 + H^2}$$

dir. Dolayısıyla

$$N_x(s^*) = -\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}B \tag{3.25}$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.24) ve (3.25) den

$$\begin{aligned} B_x(s^*) &= T_x(s^*) \times N_x(s^*) \\ &= \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B \end{aligned} \tag{3.26}$$

olup bu ifadede türev alınır ve Lemma 3.1.1 kullanılırsa, $\tau_{G_x} = \frac{1}{2}\langle [T_x, N_x], B_x\rangle$ ve τ_x fonksiyonu x eğrisinin torsiyonu olmak üzere

$$(\tau_x - \tau_{G_x}) N_x(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\frac{H'}{(1+H^2)^{3/2}}T + \frac{HH'}{(1+H^2)^{3/2}}B$$

elde edilir. O halde (3.23) yardımıyla son eşitlik

$$(\tau_x - \tau_{G_x}) N_\beta(s^*) = -\frac{H'}{\varkappa(1+H^2)^{3/2}}T + \frac{HH'}{\varkappa(1+H^2)^{3/2}}B$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifade de her iki tarafın normu alınırsa

$$\tau_x = \frac{H'}{\varkappa(1+H^2)} + \tau_{G_x}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\varkappa_x = \sqrt{1+H^2}$ olduğu düşünülürse yukarıdaki son eşitlikten

$$\frac{\tau_x - \tau_{G_x}}{\varkappa_x} = \frac{H'}{\varkappa(1+H^2)^{3/2}}$$

elde edilir. α eğrisi bir slant helis olduğundan $\frac{\tau_x - \tau_{G_x}}{\varkappa_x}$ =sabit dir. Dolayısıyla α slant helisinin involütü olan x eğrisi bir genel helistir.

Tersine α eğrisinin involütü olan x eğrisi bir genel helis olsun. Bu durumda α eğrisinin bir slant helis olduğu kolayca görülebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.4.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli düzgün bir eğri ve $\beta : I \subset \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi de α eğrisinin teğetler göstergesi olsun. Bu durumda α eğrisi bir slant helis ise, β eğrisi de α eğrisinin bir involütüdür.

İspat Teorem 3.2.1.1 ve Teorem 3.2.4.1 den istenilen elde edilir.

Sonuç 3.2.4.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli diferensiyellenebilir bir eğri ve $\delta : I \subset \mathbb{R} \to S^2 \subset \mathfrak{g}$ eğrisi de α eğrisinin binormaller göstergesi olsun. Bu durumda α eğrisi bir slant helis ise δ eğrisi de α eğrisinin bir involütüdür.

İspat Teorem 3.2.3.1 ve Teorem 3.2.4.1 den dolayı sonucun doğruluğu açıktır.

Sonuç 3.2.4.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi Frenet bileşenleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere yay parametreli bir eğri ve x eğrisi α eğrisinin involütü olsun. Bu durumda α ve δ eğrileri için $\tau_G = \tau_{G_\delta}$ dır.

İspat Teorem 3.2.4.1' in ispatında, x eğrisinin Frenet vektör alanları için bulunan (3.24), (3.25) ve (3.26) eşitlikleri $\tau_{G_x} = \frac{1}{2}\langle [T_x, N_x], B_x\rangle$ ifadesinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\tau_{G_x} &= \frac{1}{2}\left\langle \left[N, -\tfrac{1}{\sqrt{1+H^2}}T + \tfrac{H}{\sqrt{1+H^2}}B\right], \tfrac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \tfrac{1}{\sqrt{1+H^2}}B\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \tfrac{1}{\sqrt{1+H^2}}[T, N] + \tfrac{H}{\sqrt{1+H^2}}[N, B], \tfrac{H}{\sqrt{1+H^2}}T + \tfrac{1}{\sqrt{1+H^2}}B\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{H}{1+H^2}\langle [T, N], T\rangle + \frac{1}{1+H^2}\langle [T, N], B\rangle + \frac{H^2}{1+H^2}\langle [N, B], T\rangle\right. \\
&\quad \left. + \frac{H}{1+H^2}\langle [N, B], B\rangle\right\} \\
&= \frac{1}{2}\langle [T, N], B\rangle
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla Tanım 3.2 ve son eşitlikten

$$\tau_{G_x} = \tau_G$$

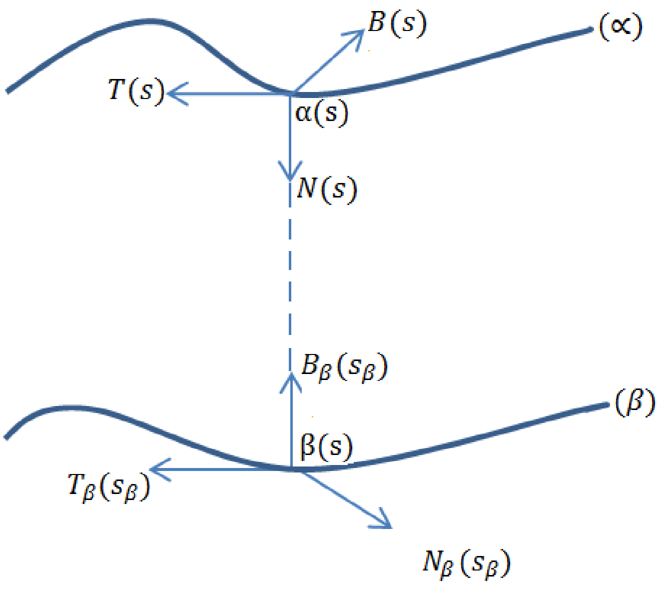
bulunur.

3.3 Lie Gruplarında Mannheim Eğrileri

Bu bölümde, bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında eğriler ve bu eğrilerin yine aynı Lie grubundaki Mannheim çiftleri ele alındı ve bu tip eğrilere ait bazı karakterizasyonlar verildi.

Tanım 3.3.1 G bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu bir Lie grubu olsun. G de α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarında α eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlı ise α eğrisine Mannheim eğrisi, β eğrisine α eğrisinin Mannheim çifti ve $\{\alpha, \beta\}$ ikilisine de Mannheim eğri çifti denir.

G, 3-boyutlu Lie grubunda $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi s yay parametreli bir eğri ve şekil-3.1 yardımıyla $\beta : \overline{I} \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi de yine aynı Lie grubunda $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s) N(s)$ şeklinde yazılabilen bir eğri olsun. Burada λ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ve N vektör alanı α eğrisinin asli normal vektör alanıdır.



Şekil-3.1: Mannheim eğri çifti $\{\alpha, \beta\}$

Teorem 3.3.1 3-boyutlu G Lie grubunda $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ ve $\beta : \overline{I} \subset \mathbb{R} \to G$ eğrileri, sırasıyla, yay parametleri s ve $\overline{s}$ olmak üzere bir Mannheim eğri çifti olsun. α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık daima sabittir. Yani,

$$\forall s \in I \text{ için } d\left(\alpha\left(s\right), \beta\left(s\right)\right) = \text{sabit}$$

dir.

İspat Tanım 3.3.1 den

$$\beta\left(s\right) = \alpha\left(s\right) + \lambda\left(s\right) N\left(s\right) \tag{3.27}$$

dir. (3.27) eşitliğinde s parametresine göre türev alınır ve (3.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\beta\left(\overline{s}\right)}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds} &= \frac{d\alpha\left(s\right)}{ds} + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda(s)\dot{N}(s) \\ &= T\left(s\right) + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda(s)\left[D_T N - \frac{1}{2}\left[T, N\right]\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 ve Frenet denklemleri yardımıyla bu eşitlik,

$$\frac{d\beta\left(\overline{s}\right)}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds} = \left(1 - \lambda\left(s\right)\varkappa\left(s\right)\right) T(s) + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda\left(s\right)\left(\left(\tau - \tau_G\right)\left(s\right)\right) B\left(s\right)$$

veya

$$T_\beta\left(\overline{s}\right) = \frac{ds}{d\overline{s}}\left[\left(1 - \lambda(s)\varkappa\left(s\right)\right) T\left(s\right) + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda(s)\left(\tau - \tau_G\right)(s) B\left(s\right)\right] \tag{3.28}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi Mannheim eğri çifti olduğundan α eğrisinin asli normal vektör alanı N ile β eğrisinin binormal vektör alanı B_β lineer bağımlıdır. Dolayısıyla (3.28) den

$$\left\langle T_\beta\left(\overline{s}\right), B_\beta\left(\overline{s}\right)\right\rangle = \frac{ds}{d\overline{s}}\left[\begin{array}{c} \left(1 - \lambda\left(s\right)\varkappa\left(s\right)\right)\left\langle T(s), B_\beta\left(\overline{s}\right)\right\rangle + \lambda'\left(s\right)\left\langle N(s), B_\beta\left(\overline{s}\right)\right\rangle \\ +\lambda(s)\left(\tau - \tau_G\right)(s)\left\langle B(s), B_\beta(\left(\overline{s}\right))\right\rangle \end{array}\right]$$

veya

$$\lambda'\left(s\right) = 0$$

olduğu görülür. Bu eşitlikten $\lambda(s)$ fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi s yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin Frenet bileşenleri $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere; α eğrisinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için

$$\lambda\varkappa\left(1 + H^2\right) = 1,$$

olmasıdır. Burada λ bir sabit fonksiyon ve H ise α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonudur.

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi s yay parametreli bir Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

yazılabilir. Bu ifadede s parametresine göre türev alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\frac{d\beta(s)}{ds} = (1 - \lambda\varkappa(s))\, T(s) + \lambda(\tau - \tau_G)(s) B(s)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$T_\beta = \frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{d\overline{s}} = \left[(1 - \lambda\varkappa(s))\, T(s) + \lambda(\tau - \tau_G)(s) B(s)\right]\frac{ds}{d\overline{s}}$$

olup bu ifadede $\overline{s}$ ye göre türev alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{d\overline{s}} &= \left[-\lambda\frac{d\varkappa}{ds}T(s) + \left(\varkappa - \lambda\varkappa^2 - \lambda(\tau - \tau_G)^2\right)N(s) + \lambda(\tau - \tau_G)' B(s)\right]\left(\frac{ds}{d\overline{s}}\right)^2 \\ &\quad + \left[(1 - \lambda\varkappa(s))\, T(s) + \lambda(\tau - \tau_G)(s) B(s)\right]\frac{d^2 s}{d\overline{s}^2} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\left(\varkappa - \lambda\varkappa^2 - \lambda(\tau - \tau_G)^2\right) = 0,$$

$$\lambda\varkappa\left(1+H^2\right)=1$$

bulunur.

Tersine, eğer $\lambda\varkappa(1+H^2)=1$ ise α eğrisinin bir Mannheim eğrisi olduğu kolayca görülebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.1 Eğer G Lie grubu bir Abelyan Lie grubu ise $\tau_G=0$ dır. Bu durumda G Abelyan Lie grubunda yay parametreli bir $\alpha : I\subset\mathbb{R}\rightarrow G$ eğrisinin Mannheim eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\lambda\left(\varkappa^2+\tau^2\right)=\varkappa$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat Eğer "G Lie grubu, Abelyan Lie grubu ise $\tau_G=0$" olduğu ve Teorem 3.3.2 birlikte düşünülürse istenilen elde edilir.

Sonuç 3.3.1, bu çalışmada yapılanların, Liu and Wang tarafından $3-$boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Mannheim eğrilerinin bir genelleştirilmesi olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.3 $\alpha : I\subset\mathbb{R}\rightarrow G$ eğrisi s yay parametresi ile verilsin. β eğrisinin α eğrisinin Mannheim çifti olması için gerek ve yeter şart β eğrisinin eğriliği $\varkappa_\beta$ ve harmonik eğriliği H_β olmak üzere

$$\frac{d\varkappa_\beta H_\beta}{d\overline{s}}=\frac{\varkappa_\beta}{\mu}(1+\mu^2\varkappa_\beta^2H_\beta^2)$$

dir. Burada μ bir sabit fonksiyondur.

İspat $\alpha : I\subset\mathbb{R}\rightarrow G$ eğrisi s yay parametreli bir Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda Mannheim eğrisinin tanımından

$$\alpha(\overline{s}) = \beta(\overline{s}) + \mu(\overline{s}) B_\beta(\overline{s})$$

yazılabilir. Bu ifadede $\overline{s}$ ye göre türev alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$T\frac{ds}{d\overline{s}} = T_\beta + \mu^{'}(\overline{s}) B_\beta(\overline{s}) - \mu(\overline{s}) \left(\tau_\beta - \tau_{G_\beta}\right)(\overline{s}) N_\beta(\overline{s})$$

veya

$$T\frac{ds}{d\overline{s}} = T_\beta + \frac{d\mu(\overline{s})}{d\overline{s}} B_\beta(\overline{s}) - \mu(\overline{s}) \varkappa_\beta H_\beta N_\beta(\overline{s})$$

elde edilir. Burada H_β fonksiyonu β eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonudur. $\{N(s), B_\beta(\overline{s})\}$ lineer bağımlı bir cümle olduğundan, bu sayede

$$\frac{d\mu(\overline{s})}{d\overline{s}} = 0,$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu ise $\mu(\overline{s})$ fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğu anlamına gelir. Böylece

$$T\frac{ds}{d\overline{s}} = T_\beta - \mu(\overline{s}) \varkappa_\beta H_\beta N_\beta(\overline{s}) \tag{3.29}$$

bulunur. Diğer taraftan α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarında, α eğrisinin teğet vektör alanı T ile β eğrisinin teğet vektör alanı T_β arasındaki açı θ olmak üzere

$$T = T_\beta \cos\theta + N_\beta \sin\theta \tag{3.30}$$

dır. Bu ifadede $\overline{s}$ parametresine göre türev alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\varkappa N\frac{ds}{d\overline{s}} = -\left(\varkappa_\beta + \frac{d\theta}{d\overline{s}}\right)\sin\theta T_\beta + \left(\varkappa_\beta + \frac{d\theta}{d\overline{s}}\right)\cos\theta N_\beta + \varkappa_\beta H_\beta \sin\theta B_\beta,$$

elde edilir. Bu eşitlikle beraber $\{N(s), B_\beta(\overline{s})\}$ cümlesinin lineer bağımlı bir cümle olduğu birlikte düşünülürse

$$\begin{cases} \left(\varkappa_\beta + \frac{d\theta}{d\overline{s}}\right)\sin\theta = 0 \\ \left(\varkappa_\beta + \frac{d\theta}{d\overline{s}}\right)\cos\theta = 0 \end{cases}$$

olur. Buradan

$$\frac{d\theta}{d\overline{s}} = -\varkappa_\beta \tag{3.31}$$

olması gerektiği kolayca görülebilir. T_β ile N_β nın ortogonal olduğu dikkate alınırsa, (3.29) ve (3.30) eşitliklerinden

$$\frac{ds}{d\overline{s}} = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{\mu\varkappa_\beta H_\beta}{\sin\theta}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mu\varkappa_\beta H_\beta = -\tan\theta$$

olur. Bu ifadede türev alınır ve (3.31) eşitliği kullanılırsa

$$\mu\frac{d\varkappa_\beta H_\beta}{d\overline{s}} = \varkappa_\beta\left(1 + \mu^2\varkappa_\beta^2 H_\beta^2\right)$$

yani

$$\frac{d\varkappa_\beta H_\beta}{d\overline{s}} = \frac{\varkappa_\beta}{\mu}\left(1 + \mu^2\varkappa_\beta^2 H_\beta^2\right)$$

bulunur.

Tersine, β eğrisinin eğriliği $\varkappa_\beta$ ve harmonik eğriliği H_β, sabit $\mu(\overline{s})$ fonksiyonu için

$$\frac{d\varkappa_\beta H_\beta}{d\overline{s}} = \frac{\varkappa_\beta}{\mu}\left(1 + \mu^2\varkappa_\beta^2 H_\beta^2\right)$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda

$$\alpha(\overline{s}) = \beta(\overline{s}) + \mu B_\beta(\overline{s}) \tag{3.32}$$

şeklinde tanımlanan bir α eğrisinin, $3-$boyutlu G Lie grubunda bir Mannheim eğrisi ve β eğrisinin de α eğrisinin Mannheim çifti olduğu gösterilecektir. (3.32) eşitliğinde

$\overline{s}$ parametresine göre iki kez türev alınırsa sırasıyla

$$T\frac{ds}{d\overline{s}} = T_\beta - \mu\varkappa_\beta H_\beta N_\beta, \tag{3.33}$$

$$\varkappa N\left(\frac{ds}{d\overline{s}}\right)^2 + T\frac{d^2s}{d\overline{s}^2} = \mu\varkappa_\beta^2 H_\beta T_\beta + \left(\varkappa_\beta - \mu\frac{d\varkappa_\beta H_\beta}{d\overline{s}}\right)N_\beta - \mu\varkappa_\beta^2 H_\beta^2 B_\beta, \tag{3.34}$$

eşitlikleri elde edilir. $\varkappa_\beta - \mu\frac{d\varkappa_\beta H_\beta}{d\overline{s}} + \mu^2\varkappa_\beta^3 H_\beta^2 = 0$ olduğu kullanılarak, (3.33) ve (3.34) eşitliklerinin vektörel çarpımından

$$\varkappa B\left(\frac{ds}{d\overline{s}}\right)^3 = \mu^2\varkappa_\beta^3 H_\beta^3 T_\beta + \mu\varkappa_\beta^2 H_\beta^2 N_\beta \tag{3.35}$$

bulunur. Ayrıca (3.33) ve (3.35) eşitliklerinin vektörel çarpımından da

$$\varkappa N\left(\frac{ds}{d\overline{s}}\right)^4 = -\mu\varkappa_\beta^2 H_\beta^2\left(1 + \mu^2\varkappa_\beta^2 H_\beta^2\right)B_\beta$$

olacağından bu durum, α eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin binormal vektör alanının lineer bağımlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak G Lie grubunda α eğrisinin bir Mannheim eğrisi, β eğrisinin de α eğrisinin Mannheim çifti olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan s yay parametreli bir Mannheim eğrisi ve $\beta : \overline{I} \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi de Frenet vektörleri $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ ve yay parametresi $\overline{s}$ olmak üzere α eğrisinin Mannheim çifti olsun. Bu durumda α ve β eğrileri için $\tau_G = \tau_{G_\beta}$ dır. Burada $\tau_G = \frac{1}{2}\langle[T, N], B\rangle$ ve $\tau_{G_\beta} = \frac{1}{2}\langle[T_\beta, N_\beta], B_\beta\rangle$ dir.

İspat $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi Mannheim eğri çifti olsun. (3.28) eşitliğinden

$$T_\beta(\overline{s}) = \left[(1 - \lambda\varkappa(s))\,T(s) + \lambda(\tau - \tau_G)(s)B(s)\right]\frac{ds}{d\overline{s}}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafının normu alınır ve $\lambda\varkappa\left(1+H^2\right)=1$ olduğu kullanılırsa

$$\frac{d\overline{s}}{ds}=\lambda\varkappa H\sqrt{1+H^2}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik birlikte düşünüldüğünde

$$T_\beta\left(\overline{s}\right)=\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T(s)+\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B(s) \tag{3.36}$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan $\{\alpha,\beta\}$ ikilisi bir Mannheim eğri çifti olduğundan

$$B_\beta(\overline{s})=N(s)$$

dir. O halde $T_\beta\left(\overline{s}\right)$ ve $B_\beta(\overline{s})$ nin vektörel çarpımından

$$N_\beta(\overline{s})=\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}T(s)-\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}B(s)$$

bulunur. Tanım 3.2 den dolayı β eğrisi için $\left\langle\left[T_\beta,N_\beta\right],B_\beta\right\rangle=2\tau_{G_\beta}$ olup, $T_\beta\left(\overline{s}\right),N_\beta(\overline{s})$ ve $B_\beta(\overline{s})$ için yukarıda bulunan eşitliklerden

$$\left\langle\left[\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}T+\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}B,\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}T(s)-\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}B(s)\right],N\right\rangle=2\tau_{G_\beta}$$

yani

$$\frac{H^2}{\sqrt{1+H^2}}\left\langle\left[T,N\right],B\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\left\langle\left[T,N\right],B\right\rangle=2\tau_{G_\beta}$$

elde edilir. Bu eşitlik ile Lemma 3.1.1 birlikte düşünülürse

$$\tau_G=\tau_{G_\beta}$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.4 $\alpha:I\subset\mathbb{R}\rightarrow G$ eğrisi eğrilik fonksiyonları $\varkappa$, τ ve harmonik eğrilik fonksiyonu H olan s yay parametreli bir Mannheim eğrisi ve $\beta:\overline{I}\subset\mathbb{R}\rightarrow G$ eğrisi de eğrilik fonksiyonları $\varkappa_\beta$, τ_β ve yay parametresi $\overline{s}$ olmak üzere α eğrisinin Mannheim çifti olsun. Bu durumda eğrilik fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned}
\varkappa_\beta\left(\overline{s}\right) &= \frac{H^{'}(s)}{\lambda\varkappa(s)H(s)\left(1+H^2(s)\right)^{3/2}}, \\
\tau_\beta\left(\overline{s}\right) &= \frac{1}{\lambda H(s)} + \tau_{G_\beta}
\end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

İspat Eğer (3.36) eşitliğinde türev alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\varkappa_\beta N_\beta \lambda\varkappa H\sqrt{1+H^2} = \frac{H^{'}}{\left(1+H^2(s)\right)^{3/2}}\left(T-HB\right)$$

elde edilir. Her iki tarafın normu alınırsa

$$\varkappa_\beta = \frac{H^{'}}{\lambda\varkappa H\left(1+H^2(s)\right)^{3/2}}$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan $\{\alpha,\beta\}$ ikilisi bir Mannheim eğri çifti olduğundan $B_\beta = N$ dir. Eğer bu eşitlikte s parametresine göre türev alınıp Frenet formülleri kullanılır ve $\frac{d\overline{s}}{ds} = \lambda\varkappa H\sqrt{1+H^2}$ olduğu düşünülürse

$$-\left(\tau_\beta - \tau_{G_\beta}\right) N_\beta \lambda H\sqrt{1+H^2} = -T + HB.$$

elde edilir. Bu ifadede her iki tarafın normu alınırsa

$$\tau_\beta = \frac{1}{\lambda H} + \tau_{G_\beta}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi yay parametreli bir Mannheim eğrisi ve $\beta : \overline{I} \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi de α eğrisinin Mannheim çifti olsun. α eğrisinin bir slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart β eğrisinin bir genel helis olmasıdır.

İspat Eğer α Mannheim eğrisi bir slant helis ise Teorem 3.2.1 den α eğrisi için σ_N fonksiyonu sabit bir fonksiyondur. Teorem 3.3.4 den β eğrisi için

$$\begin{aligned}\frac{\tau_\beta - \tau_{G_\beta}}{\varkappa_\beta} &= \frac{\frac{1}{\lambda H}}{\frac{H^{\shortmid}}{\lambda \varkappa H(1+H^2)^{3/2}}} \\ &= \frac{\varkappa\left(1+H^2\right)^{3/2}}{H^{\shortmid}} \\ &= \sigma_N = \text{sabit}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla Teorem 3.1 yardımıyla α eğrisinin Mannheim çifti olan β eğrisinin bir genel helis olduğu görülür.

Tersine, α eğrisinin Mannheim çifti olan β eğrisi bir genel helis olsun. Bu durumda

$$\frac{\tau_\beta - \tau_{G_\beta}}{\varkappa_\beta} = \text{sabit}$$

dir. O halde σ_N bir sabit fonksiyondur. Dolayısıyla α Mannheim eğrisi bir slant helistir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.6 Bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu Lie grubunda, $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi bir Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda α eğrisinin bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart β eğrisinin bir geodezik olmasıdr.

İspat Eğer α Mannheim eğrisi bir genel helis ise α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu olan $H(s)$ fonksiyonu bir sabit fonksiyondur. Bu durumda Teorem 3.3.4 den

$$\varkappa_\beta = 0$$

dır.

Tersine, β eğrisi bir geodezik eğri olsun. Teorem 3.3.4 den dolayı

$$H^{'}(s) = 0$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu durumda

$$H(s) = \text{sabit}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi $\{T, N, B, \varkappa, \tau\}$ Frenet bileşenleri ile s yay parametreli bir Mannheim eğrisi olsun. Eğer α eğrisi slant helis ise α eğrisinin harmonik eğriliği olan $H(s)$ fonksiyonu için

$$H(s) = \frac{1}{2}\left(ae^{bs} - \frac{1}{a}e^{-bs}\right) \tag{3.37}$$

dir. Burada a ve b sayıları sıfırdan farklı sabitlerdir. Eğer $a = b = 1$ olarak düşünülürse α eğrisinin harmonik eğriliği olan $H(s)$ fonksiyonu bir hiperbolik fonksiyondur. Yani, $H(s) = \sinh s$ dir.

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi $\{T, N, B, \varkappa, \tau\}$ Frenet bileşenleri ile s yay parametreli bir Mannheim eğrisi olsun. Eğer α eğrisi bir slant helis ise bu durumda, X sol invaryant vektör alanı olmak üzere,

$$\langle N, X\rangle = \cos\theta,\ \theta \neq \frac{\pi}{2} \tag{3.38}$$

dir. (3.38) denkleminde iki kez türev alınırsa

$$-\varkappa\langle T, X\rangle + (\tau - \tau_G)\langle B, X\rangle = 0 \tag{3.39}$$

ve

$$-\varkappa^{'}\langle T, X\rangle + (\tau - \tau_G)^{'}\langle B, X\rangle = \left\{\varkappa^2 + (\tau - \tau_G)^2\right\}\langle N, X\rangle$$

elde edilir. α eğrisinin bir slant helis olduğu ve Teorem 3.3.2 kullanılırsa son eşitlik

$$-\varkappa^{'} \langle T, X \rangle + (\tau - \tau_G)^{'} \langle B, X \rangle = \frac{\varkappa}{\lambda} \cos\theta \tag{3.40}$$

şeklinde yazılabilir. (3.39) ve (3.40) ifadelerinden

$$\langle T, X \rangle = \frac{H}{\lambda H^{'}} \cos\theta \tag{3.41}$$

ve

$$\langle B, X \rangle = \frac{1}{\lambda H^{'}} \cos\theta \tag{3.42}$$

elde edilir.

Burada λ sıfırdan farklı bir sabittir. (3.41) ve (3.42) ifadelerinin türevi alınırsa, sırasıyla

$$\varkappa = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{HH^{''}}{(H^{'})^2}\right),$$

$$\tau - \tau_G = \frac{H^{''}}{\lambda (H^{'})^2},$$

elde edilir. Buradan

$$H = \frac{\tau - \tau_G}{\varkappa} = \frac{H^{''}}{(H^{'})^2 - HH^{''}}$$

ya da

$$\left(1 + H^2\right) H^{''} - H \left(H^{'}\right)^2 = 0$$

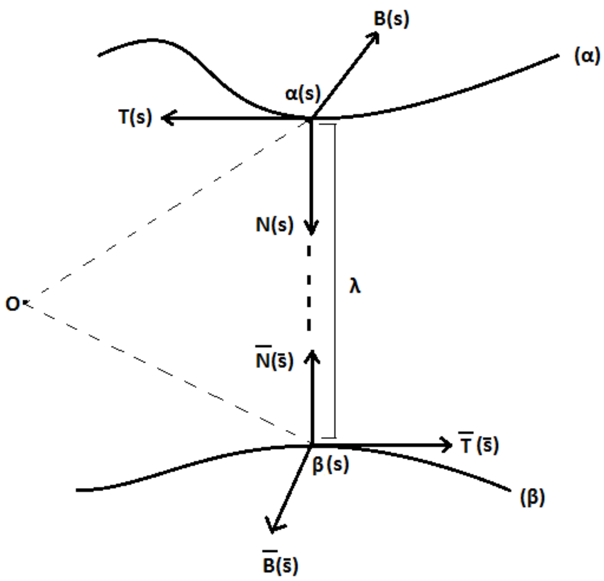
diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise (3.37) eşitliğini verir. Bu da ispatı tamamlar.

3.4 Lie Gruplarında Bertrand Eğrileri

Bu bölümde, bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu Lie gruplarında eğriler ve bu eğrilerin yine aynı Lie grubuna düşen Bertrand çiftleri ele alındı ve bu tip eğriler için bazı karakterizasyonlar verildi.

Tanım 3.4.1 G bi-invaryant metrik ile 3-boyutlu bir Lie grubu olsun. G de α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktalarında, α eğrisinin asli normal vektör alanı ile β eğrisinin asli normal vektör alanı lineer bağımlı ise α eğrisine Bertrand eğrisi, β eğrisine α eğrisinin Bertrand çifti ve $\{\alpha, \beta\}$ ikilisine de Bertrand eğri çifti denir.

3-boyutlu Lie grubu G de $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi s yay parametreli bir eğri ve şekil-3.2 yardımıyla $\beta : \overline{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrisi de yine aynı Lie grubunda $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s) N(s)$ şeklinde yazılabilen bir eğri olsun. Burada λ fonksiyonu bir sabit fonksiyon ve N vektör alanı α eğrisinin asli normal vektör alanıdır.



Şekil-3.2: Bertrand eğri çifti $\{\alpha, \beta\}$

α eğrisinin s yay parametresi her zaman β eğrisinin yay parametresi olmayabilir. β eğrisinin yay parametresi $\overline{s}$ olmak üzere

$$\overline{s} = \psi(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\beta(s)}{ds} \right\| ds$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\psi : I \longrightarrow \overline{I}$ fonksiyonu diferensiyellenebilir bir fonksiyondur ve $\forall s \in I$ için

$$\psi'(s) = \varkappa H \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \tag{3.43}$$

dir. Burada λ, μ reel sabitler ve H de α eğrisinin harmonik eğriliğidir.

Teorem 3.4.1 G, 3-boyutlu Lie grubunda $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ ve $\beta : \overline{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ eğrileri yay parametleri sırasıyla s ve $\overline{s}$ olan Bertrand eğri çifti olsun. α ve β eğrilerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık daima sabittir.

$$\forall s \in I \text{ için } d\left(\alpha\left(s\right), \beta\left(s\right)\right) = \text{sabit}$$

dir.

İspat Tanım 3.4.1 den,

$$\beta\left(s\right) = \alpha\left(s\right) + \lambda\left(s\right) N\left(s\right) \tag{3.44}$$

dir. (3.44) ifadesinde s parametresine göre türev alınır ve (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\beta\left(\overline{s}\right)}{d\overline{s}}\psi'\left(s\right) &= \frac{d\alpha\left(s\right)}{ds} + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda(s)\dot{N}(s) \\ &= T\left(s\right) + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda(s)\left[D_T N - \frac{1}{2}\left[T, N\right]\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 ve Frenet denklemleri yardımıyla bu eşitlik,

$$\frac{d\beta\left(\overline{s}\right)}{d\overline{s}}\psi'\left(s\right) = \left(1 - \lambda\left(s\right)\varkappa\left(s\right)\right) T(s) + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda\left(s\right)\left(\left(\tau - \tau_G\right)\left(s\right)\right) B\left(s\right)$$

veya

$$T_\beta\left(\overline{s}\right) = \frac{1}{\psi'\left(s\right)}\left[\left(1 - \lambda(s)\varkappa\left(s\right)\right) T\left(s\right) + \lambda'\left(s\right) N\left(s\right) + \lambda(s)\left(\tau - \tau_G\right)(s) B\left(s\right)\right]. \tag{3.45}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi Bertrand eğri çifti olduğundan α eğrisinin asli normal vektör alanı N ile β eğrisinin asli normal vektör alanı N_β lineer bağımlıdır. O halde (3.45) eşitliğinden

$$\left\langle T_\beta\left(\overline{s}\right), N_\beta\left(\overline{s}\right)\right\rangle = \frac{1}{\psi'\left(s\right)}\left[\begin{array}{c} \left(1 - \lambda\left(s\right)\varkappa\left(s\right)\right)\left\langle T(s), N_\beta\left(\overline{s}\right)\right\rangle + \lambda'\left(s\right)\left\langle N(s), N_\beta\left(\overline{s}\right)\right\rangle \\ +\lambda(s)\left(\tau - \tau_G\right)(s)\left\langle B(s), N_\beta\left(\overline{s}\right)\right\rangle \end{array}\right]$$

veya

$$\lambda'(s) = 0$$

elde edilir. Bu ifade $\lambda(s)$ fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi s yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin Frenet bileşenleri $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere; eğer α eğrisi bir Bertrand eğrisi ise

$$\lambda\varkappa(s) + \mu\varkappa(s) H(s) = 1$$

dir, burada λ, μ sabit fonksiyonlar ve H de α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonudur.

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi s yay parametreli bir Bertrand eğrisi olsun. O halde

$$\beta(\overline{s}) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

yazılabilir. Bu ifadede s parametresine göre türev alınıp Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d\beta(\overline{s})}{d\overline{s}}\psi'(s) &= \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda\dot{N} \\ &= (1 - \lambda(s)\varkappa(s))T(s) + \lambda(s)\tau(s)B(s) - \frac{1}{2}[T, N]\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 yardımıyla son eşitlikten

$$T_\beta(\overline{s}) = \frac{(1 - \lambda\varkappa(s))}{\psi'(s)}T(s) + \frac{\lambda((\tau - \tau_G)(s))}{\psi'(s)}B(s) \tag{3.46}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\{N_\beta(\overline{s}), N(s)\}$ cümlesi lineer bağımlı olduğundan

$$T_\beta(\overline{s}) = \cos\theta(s)T(s) + \sin\theta(s)B(s) \tag{3.47}$$

yazılabilir. (3.47) ifadesinde türev alınır ve $\{N_\beta((\overline{s})), N(s)\}$ cümlesinin lineer bağımlı olduğunu düşünülürse θ nın sabit bir fonksiyon olduğu kolayca görülebilir. Eğer (3.46) ve (3.47) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\lambda\varkappa(s)}{\lambda\left(\left(\tau-\tau_G\right)(s)\right)}$$

veya $c=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ olmak üzere

$$\lambda\varkappa(s)+c\lambda\left(\left(\tau-\tau_G\right)(s)\right)=1$$

elde edilir. Bu ifadede $c\lambda$ sabiti μ ile gösterilirse

$$\lambda\varkappa(s)+\mu\varkappa(s)\,H(s)=1$$

bulunur. Burada H fonksiyonu α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonur. Buda ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4.1 $\{\alpha,\beta\}$ ikilisi Bertrand eğri çifti olmak üzere, α ve β eğrilerinin teğet vektör alanları arasındaki açı sabittir.

Not 3.4.1 Yukarıda ifade edilen teoremin tersinin herzaman doğru olduğu söylenemez. Tersinin de doğru olabilmesi için özel olarak β eğrisi $\beta(\overline{s})=\alpha(s)+\lambda N(s)$ şeklinde seçilmelidir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.3 $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ eğrisi s yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin eğriliği $\varkappa$ ve harmonik eğriliği H için $\lambda\varkappa(s)+\mu\varkappa(s)\,H(s)=1$ şartı sağlansın. Eğer β eğrisi $\beta(s)=\alpha(s)+\lambda N(s)$ şeklinde seçilirse $\{\alpha,\beta\}$ ikilisi Bertrand eğri çiftidir.

İspat $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ eğrisi s yay parametreli bir eğri olsun. α eğrisinin eğrili $\varkappa$ ve harmonik eğriliği H için $\lambda\varkappa(s)+\mu\varkappa(s)\,H(s)=1$ şartı sağlansın. Eğer β eğrisi $\beta(s)=\alpha(s)+\lambda N(s)$ eşitliği ile verilirse, bu eşitlikten s parametresine göre türev alınır ve (3.43) ile $\lambda\varkappa(s)+\mu\varkappa(s)H(s)=1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$T_\beta(\overline{s})=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}T(s)+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}B(s). \tag{3.48}$$

elde edilir. Bu ifadede s parametresine göre türev alınıp ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\varkappa_\beta(\overline{s})N_\beta(\overline{s})\psi'(s)=\frac{\varkappa(s)}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}(\mu-\lambda H(s))N(s) \tag{3.49}$$

bulunur. Bu son ifade β eğrisinin asli normal vektör alanı ile α eğrisinin asli normal vektör alanının lineer bağımlı olduğu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.4.1 $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ eğrisi Frenet vektör alanı $\{T,N,B\}$ olan yay parametreli bir Bertrand eğrisi ve β eğriside Frenet vektör alanı $\{T_\beta,N_\beta,B_\beta\}$ olmak üzere α eğrisinin Bertrand çifti olsun. Bu durumda α eğrsi için $\tau_G=\frac{1}{2}\langle[T,N],B\rangle$ ve β eğrisi için $\tau_{G\beta}=\frac{1}{2}\langle[T_\beta,N_\beta],B_\beta\rangle$ olmak üzere $\tau_G=\tau_{G_\beta}$ dır.

İspat $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ eğrisi Frenet vektör alanı $\{T,N,B\}$ olan yay parametreli bir Bertrand eğrisi ve β eğriside Frenet vektör alanı $\{T_\beta,N_\beta,B_\beta\}$ olmak üzere α eğrisinin Bertrand çifti olsun. (3.48) eşitliği ve $N_\beta=\mp N$ olduğunu düşünülürse

$$B_\beta(\overline{s})=-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}T(s)+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}B(s) \tag{3.50}$$

elde edilir. Eğer T_β, N_β ve B_β ifadelerinin eşitleri $\tau_{G\beta}=\frac{1}{2}\langle[T_\beta,N_\beta],B_\beta\rangle$ ifadesinde yerlerine yazılırsa $\tau_G=\tau_{G_\beta}$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.4.4 $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ eğrisi eğrlik fonksiyonları $\varkappa$ ve τ olmak üzere yay parametreli bir Bertrand eğrisi ve β eğrisi de eğrilik fonksiyonları $\varkappa_\beta$ ve τ_β olmak üzere α eğrisinin Bertrand çifti olsun. Bu durumda α ve β eğrilerinin eğrilik fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\varkappa_\beta\left(\overline{s}\right)=\frac{\mu\varkappa\left(s\right)-\lambda\varkappa\left(s\right)H\left(s\right)}{\left(\lambda^2+\mu^2\right)H\left(s\right)}, \tag{3.51}$$

$$\tau_\beta\left(\overline{s}\right)=\frac{\lambda\varkappa\left(s\right)+\mu\varkappa\left(s\right)H\left(s\right)}{\left(\lambda^2+\mu^2\right)H\left(s\right)}+\tau_G. \tag{3.52}$$

İspat Eğer (3.49) eşitliğinde norm alınır ve (3.43) eşitliği kullanılırsa (3.51) eşitliği elde edilir.

(3.50) eşitliğinde türev alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{B}_\beta\left(\overline{s}\right)\psi'\left(s\right) &= -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\dot{T}(s)+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\dot{B}\left(s\right),\\ &= -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\varkappa(s)N(s)+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\left(-\tau(s)N(s)-\frac{1}{2}\left[T(s),B(s)\right]\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade ve (3.43) eşitliği ile Lemma 3.1.1 birlikte düşünülürse

$$\left(\tau_\beta-\tau_{G\beta}\right)N_\beta\left(\overline{s}\right)=\frac{1}{\varkappa H\left(\lambda^2+\mu^2\right)}\left(\lambda\varkappa+\mu\varkappa H\right)N(s)$$

bulunur. Bu ifadede norm alınır ve Lemma 3.4.1 kullanılırsa (3.52) eşitliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.5 $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ eğrisi Frenet bileşenleri $\{T,N,B,\varkappa,\tau\}$ ve $\beta:\overline{I}\subset\mathbb{R}\to G$ eğrisi de Frenet bileşenleri $\{T_\beta,N_\beta,B_\beta,\varkappa_\beta,\tau_\beta\}$ olan yay parametreli iki eğri olmak üzere; $\{\alpha,\beta\}$ ikilisi Bertrand eğri çifti ise $\varkappa\varkappa_\beta HH_\beta$ bir sabittir.

İspat Kabul edelimki $\{\alpha,\beta\}$ ikilisi bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda

$$\alpha\left(s\right)=\beta\left(s\right)-\lambda\left(s\right)N_\beta\left(\overline{s}\right) \tag{3.53}$$

eşitliğini yazabiliriz. Teorem 3.4.2 deki benzer ispat yöntemini uygular ve (3.53) eşitliğini düşünürsek, $\varkappa\varkappa_\beta HH_\beta$ fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğunu kolayca görebiliriz.

Teorem 3.4.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi Frenet bileşenleri $\{T, N, B, \varkappa, \tau\}$ olmak üzere yay parametreli bir Bertrand eğrisi ve $\beta : \overline{I} \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi de Frenet bileşenleri $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta, \varkappa_\beta, \tau_\beta\}$ olmak üzere α eğrisinin Bertrand çifti olsun. α eğrisinin slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart β eğrisinin de slant helis olmasıdır.

İspat σ_N ve $\sigma_{N\beta}$ fonksiyonları sırasıyla α ve β eğrilerinin asli normaller göstergesinin geodezik eğrilikleri olmak üzere Teorem 3.4.4 kullanılarak

$$\sigma_{N\beta} = -\frac{\varkappa(1+H^2)^{\frac{3}{2}}}{H^{'}} = -\sigma_N$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi eğrlik fonksiyonları $\varkappa$ ve τ olmak üzere yay parametreli bir Bertrand eğrisi ve β eğrisi de eğrilik fonksiyonları $\varkappa_\beta$ ve τ_β olmak üzere α eğrisinin Bertrand çifti olsun. α eğrisinin genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart β eğrisinin de bir genel helis olmasıdır.

İspat α eğrisi bir genel helis olsun. Bu durumda Teorem 3.1 den H fonksiyonu bir sabit fonksiyondur. Teorem 3.4.4 kullanılarak

$$\frac{\tau_\beta - \tau_{G\beta}}{\varkappa_\beta} = \frac{\lambda + \mu H}{\mu - \lambda H} \tag{3.54}$$

elde edilir. H sabit bir fonksiyon olduğundan (3.54) eşitliğinde ki $\frac{\tau_\beta - \tau_{G\beta}}{\varkappa_\beta}$ değeri sabittir. Bu durumda β eğrisi bir genel helistir.

Tersine β eğrisi bir genel helis olsun, bu durumda $\frac{\tau_\beta - \tau_{G\beta}}{\varkappa_\beta}$ değeri sabittir. (3.54) eşitliğinden $\frac{\lambda+\mu H}{\mu-\lambda H} = c =$ sabit bulunur. Bu ifadeden $H = \frac{c\mu-\lambda}{\mu+\lambda c}$ =sabit elde edilir. Dolayısıyla α eğrisi bir genel helis olur. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Auslander, L. 1967. Differential Geometry, A Harper International Edition. Harper Row. New York, London. LCCCN : 67-10789.

Balgetir, H., Bektaş, M. and Inoguchi, J. 2004. Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, Note Mat., Vol. 23, No. 1; pp. 7-13.

Bertrand, J. M. 1850. Mémoire sur la théorie des courbes á double courbure, Comptes Rendus, Vol. 36.

Crouch, P. and Silva, F. L. 1995. The dynamic interpolation problem: on Riem annian manifolds Lie groups and symmetric spaces, J. Dyn. Control Syst., 1 (2), pp. 177-202.

Çiftçi, Ü. 2009. A generalization of Lancert's theorem, J. Geom. Phys., 59, pp. 1597-1603.

Ekmekci, N. and İlarslan, K. 2001. On Bertrand curves and their characterization, Differ. Geom. Dyn. Syst., 3, No. 2, pp. 17-24.

Gök, İ., Camcı, Ç. and Hacsalihoğlu, H., H. 2009. V_n-slant helices in Euclidean n-space E^n, Math. Commun., Vol. 14, No. 2, pp. 317-329.

Gök, İ., Okuyucu, O. Z., Kahraman F. and Hacısalihoğlu, H. H. 2011. On the Quaternionic B_2-Slant Helices in the Euclidean Space E^4, Adv. Appl. Clifford Al., 21, pp. 707–719.

Güngör, M., A. and Tosun, M. 2010. A Study on Dual Mannheim Partner Curves, Int. Math. Forum, 5, No. 47, pp. 2319 - 2330.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri Cilt I. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Beşevler, Ankara.

Hacısalihoğlu H. H. 2006. Yüksek Diferensiyel Geometri'ye Giriş, Fırat Üniver sitesi Fen Fak.Yayınları.

Izumiya, S. and Tkeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces, Turk. J. Math, 28, pp. 153-163.

Jin, D. H. 2008. Null Bertrand curves in a Lorentz manifold, J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math., 15, No. 3, pp. 209–215.

Karacan, M., K. 2011. Weakened Mannheim curves, Int. J. Phys. Sci., Vol. 6 (20), pp. 4700-4705.

Kula, L. and Yaylı, Y. 2005. On slant helix and its spherical indicatrix, Appl. Math. Comput., 169 (1), pp. 600-607.

Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı., Y. and İlarslan K. 2010. Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, Turk. J. Math., 34 (2), pp. 261–273.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. 1963. "Foundations of Diferential Geometry" Vol. I, Vol. II. Copyright © by John Wiley&sons incs. LCCCN : 63-192009.

Lancret, M. A. 1806. Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure, Mémoires présentés à l'Institut1, pp. 416-454.

Liu, H. and Wang, F. 2008. Mannheim partner curves in 3-space, J. Geom., 88, pp. 120–126.

Matsushima, Y. 1972. "Differentiable Manifold" Marcel Dekker, Inc. New York. (Translated by E.T. Kobayashi). pp: 25-80.

Noakes, L. 2003. Null cubics and Lie quadratics, J. Math. Phys., 44 (3), pp. 1436-1448.

Orbay, K. and Kasap, E. 2009. On Mannheim partner curves in E^3, Int. J. Phys. Sci., Vol. 4 (5), pp. 261–264.

Özkaldi, S., İlarslan, K. and Yayli, Y. 2009. On Mannheim Partner Curve in Dual Space, An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 17 (2), pp. 131–142.

Öztekin, H., B. and Ergüt, M. 2011. Null mannheim curves in the minkowski 3-space E_1^3, Turk. J. Math., 35, pp. 107–114.

Ripoll, J. B. 1991. On Hypersurfaces of Lie groups, Illinois J. Math., 35 (1), pp. 47-55.

Sabuncuoğlu A. 2004. Diferensiyel Geometri, 73s., Nobel Yayın No:258, Yenişehir, Ankara.

Santo-E., N. do, Fornari, S., Frensel, K. and Ripoll, J. 2003. Constant mean curv ature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric, Manuscripta Math., 111 (4), pp. 459 470.

Struik, D. J. 1988. Lectures on Classical Differential Geometry, Dover, New-York.

Wang, F. and Liu, H. 2007. Mannheim partner curves in 3-Euclidean space, Math ematics in Practice and Theory, 37(1), pp. 141-143.

Whittemore, J. K. 1940. Bertrand curves and helices, Duke Math., J. 6, pp. 235–245.

Yılmaz, Y. M. and Bektaş, M. 2008. General properties of Bertrand curves in Riemann–Otsuki space, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applica tions, Vo. 69, Issue 10, pp. 3225-3231.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Osman Zeki OKUYUCU
Doğum Yeri	:	Ankara
Doğum Tarihi	:	31.08.1984
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Alparslan Lisesi (2002).
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007).
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2008-Şubat 2010).
Doktora	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2010-Haziran 2013).

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi, 2010-...

Yayınları

İ. Gök, O. Z. Okuyucu, F. Kahraman and H. H. Hacısalihoğlu 2011. On the Quaternionic B_2-Slant Helices in the Euclidean Space E^4, Adv. Appl. Cliff ord Al., 21, pp. 707–719 (SCI-Expanded).

Ö. G. Yıldız and O. Z. Okuyucu 2013. Inextensible Flows of Curves in Lie Groups, Caspian Journal of Mathematical Sciences, preprint.

O. Z. Okuyucu, İ. Gök, Y. Yaylı and N. Ekmekci, Slant Helices in three Dimensional Lie Groups, submitted to publish.

İ. Gök, O. Z. Okuyucu, N. Ekmekci and Y. Yaylı, On Mannheim Partner Curves in three Dimensional Lie Groups, submitted to publish.

O. Z. Okuyucu, İ. Gök, Y. Yaylı and N. Ekmekci, Bertrand Curves in three Dimensional Lie Groups, submitted to publish.