

**KONVOLÜSYON VE UYGULAMALARI**

**Murat ŞAN**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Prof. Dr. Murat SUBAŞI  
2013**

**Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KONVOLÜSYON VE UYGULAMALARI**

**Murat ŞAN**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ERZURUM  
2013**

**Her hakkı saklıdır**



T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

KONVOLÜSYON VE UYGULAMALARI

Prof. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Murat ŞAN tarafından hazırlanan bu çalışma 07/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak ~~oybirliği/oy çokluğu (.../...)~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Murat SUBAŞI

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU  
Enstitü Müdürü

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### KONVOLÜSYON VE UYGULAMALARI

Murat ŞAN

Atatürk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tez çalışmasında ilk olarak uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan, birçok sınır değer ve başlangıç değer problemlerinde kullanılan konvolüsyon integral ve özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra Laplace, Fourier ve Mellin dönüşümlerinde konvolüsyon integralin kullanımları tanıtılmış ve bazı örnekler göz önüne alınarak çözülmüştür. Son olarak ayrık ve sürekli zamanlı, zamanla değişmeyen lineer sistem olan LTI sistemde sırasıyla konvolüsyon toplamı ve konvolüsyon integrali bazı yeni örnekler oluşturularak incelenmiştir.

**2013, 70 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Konvolüsyon, Laplace, Fourier ve Mellin Dönüşümleri, LTI Sistem

## **ABSTRACT**

M.S. Thesis

## **CONVOLUTION AND APPLICATIONS**

Murat ŞAN

Atatürk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis firstly, convolution integral and its properties which are encountered in applied mathematics, physics, and engineering and used in many initial-boundary value problems, have been considered. Later, introducing the usage of convolution integral in Laplace, Fourier, and Mellin transform and some examples have been solved. Finally, on the discrete and continuous time LTI (Linear Time-Invariant) system which is a time-invariant system, convolution sum and convolution integral have been investigated, constituting new examples.

**2013, 70 Pages**

**Keywords:** Convolution, Laplace, Fourier and Mellin transforms, LTI system

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma sırasında danıőmanlıđımı üstlenip tezimin her aőamasında değerli bilgi ve birikimlerini benden esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI hocama en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Çalıőmalarım esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde desteklerini her zaman hissettiğim değerli aileme de ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca tarafıma vermiő olduğu maddi ve manevi destekten dolayı TÜBİTAK kurumuna teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Murat ŞAN

Mayıs 2013

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER.....</b>	<b>3</b>
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM.....</b>	<b>6</b>
3.1. Konvolüsyon için Bir Motivasyon.....	6
3.2. Konvolüsyon İntegral ve Özellikleri.....	7
3.3. Laplace Dönüşümü.....	9
3.3.1. Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoremi.....	10
3.3.2. Konvolüsyon integral yardımıyla başlangıç değer problemlerinin çözümü ....	12
3.4. Fourier Dönüşümü.....	17
3.4.1. Fourier dönüşümü için konvolüsyon teoremi.....	20
3.5. Mellin Dönüşümü.....	23
3.5.1. Mellin dönüşümü için konvolüsyon teoremi.....	25
3.6. Konvolüsyonun Sinyaller ve Sistemlere Uygulanması.....	29
3.6.1. Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyaller.....	29
3.6.1.a. Bağımsız değişkenin dönüşümleri.....	31
3.6.2. Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sistemler.....	36
3.6.3. Zamanla değişmeyen lineer sistemler (LTI).....	37
3.6.3.a. Ayrık zamanlı LTI sistemler: Konvolüsyon toplamı.....	43
3.6.3.b. Sürekli zamanlı LTI sistemleri: Konvolüsyon integrali.....	56
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>68</b>
<b>5. SONUÇ.....</b>	<b>69</b>
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	71

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Tipik yıllık dikey rüzgar profili .....	30
Şekil 3.2. 5 Ocak 1929 yılından 4 Ocak 1930 yılına kadar haftalık borsa endeksi .....	30
Şekil 3.3. (a) sürekli zamanlı ve (b) ayrık zamanlı sinyallerin grafiksel gösterimi ....	31
Şekil 3.4. $n_0 > 0$ iken bir zaman kaydırmasıyla ilgili ayrık zamanlı sinyaller .....	32
Şekil 3.5. $t_0 < 0$ iken bir zaman kaydırmasıyla ilgili sürekli zamanlı sinyaller .....	32
Şekil 3.6. (a) bir ayrık zamanlı sinyali $x[n]$ ; (b) yaklaşık $n = 0$ noktasındaki yansıması $x[-n]$ .....	33
Şekil 3.7. (a) bir sürekli zaman sinyali $x(t)$ ; (b) yaklaşık $t = 0$ noktasındaki yansıması $x(-t)$ .....	34
Şekil 3.8. Zaman ölçekleme ile ilgili sürekli zamanlı sinyaller .....	35
Şekil 3.9. (a) bağımsız değişkenin dönüşümünü göstermek için Örnek 3.12 de kullanılan sürekli zamanlı sinyal $x(t)$ ; (b) zaman kaydırma sinyali $x(t+1)$ ; (c) $x(-t+1)$ sinyali bir zaman kaydırması ve zaman tersinmesi ile elde edilir; (d) zaman ölçeklenmiş sinyal $x(3/2t)$ ; (e) $x(3/2t+1)$ sinyali zaman kaydırma ve ölçekleme ile elde edilir .....	36
Şekil 3.10. (a) sürekli zamanlı sistem; (b) ayrık zamanlı sistem .....	37
Şekil 3.11. (a) Örnek 3.14 deki sisteme giriş sinyali $x_1(t)$ ; (b) $x_1(t)$ sinyaline karşılık gelen $y_1(t)$ çıkış sinyali; (c) zamanda 2 birim kaydırılmış giriş sinyali $x_2(t) = x_1(t-2)$ ; (d) $x_2(t)$ sinyaline karşılık gelen $y_2(t)$ çıkış sinyali; (e) zamanda 2 birim kaydırılmış çıkış sinyali $y_1(t-2)$ .....	40
Şekil 3.12. Ayrık zamanlı bir sinyalin kaydırma darbelerinin ağırlıklandırılmış toplamıyla ilişkisi .....	44
Şekil 3.13. $x[n]$ ve $h[n]$ sinyallerinin grafiksel yorumu .....	49
Şekil 3.14. Örnek 3.17 de gerçekleştirilen konvolüsyonun grafiksel yorumu .....	50

<b>Şekil 3.15.</b> Örnek 3.17 için elde edilen $y[n]$ ayrık zamanlı sinyalinin gösterimi .....	51
<b>Şekil 3.16.</b> $x[n]$ ve $h[n]$ sinyallerinin grafiksel yorumu.....	54
<b>Şekil 3.17.</b> Örnek 3.18’de gerçekleştirilen konvolüsyonun grafiksel yorumu .....	55
<b>Şekil 3.18.</b> Örnek 3.18 için elde edilen $y[n]$ ayrık zamanlı sinyalinin gösterimi .....	56
<b>Şekil 3.19.</b> Örnek 3.19 için, $t$ bağımsız değişkeninin farklı değerleri için $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ sinyalleri .....	60
<b>Şekil 3.20.</b> Örnek 3.19 için, $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımının sıfırdan farklı olduğu durumlar ..	61
<b>Şekil 3.21.</b> Örnek 3.19 için elde edilen $y(t)$ sürekli zamanlı sinyalinin gösterimi .....	62
<b>Şekil 3.22.</b> $x(t)$ ve $h(t)$ sinyallerinin grafiksel yorumu.....	65
<b>Şekil 3.23.</b> Örnek 3.20 için, $t$ bağımsız değişkeninin farklı değerleri için $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ sinyalleri .....	66
<b>Şekil 3.24.</b> Örnek 3.20 için elde edilen $y(t)$ sürekli zamanlı sinyalinin gösterimi .....	67

## 1. GİRİŞ

Günümüzde bilimin birçok dalında sürekli ve ayrık zamanlı konvolüsyon uygulamalarıyla karşılaşmaktadır. Bunların bazıları işaretlendirme ve görüntüleme, elektrik devreleri, telekomünikasyon, olasılık ve istatistiktir. Konvolüsyonun orjini hakkında iki önemli kaynak (Doetsch 1943) ve (Gardner and Barnes 1945) çalışmalarıdır. Konvolüsyon tipi denklemler (Krasnov *et al.* 1976) çalışmasında incelenmiştir. Ayrıca konvolüsyon operatörlerine kompleks analizde (Grenier and Stein 1977) ve quantum mekaniğinde (Folland 1989) de başvurulmuştur. Konvolüsyon integral ve özelliklerine (Yıldız ve Bayram 1997) çalışmasında değinilmiştir. Fonksiyon uzaylarında konvolüsyon operatörü ile ilgili kararlılık incelemeleri de (Subaşı 2002) çalışmasında yapılmıştır. Ayrık ve sürekli zamanlı, zamanla değişmeyen sistem olan LTI sisteminde konvolüsyon teorisi uygulamaları (Oppenheim *et al.* 2007) çalışmasında yapılmıştır.

Bu tez çalışması konvolüsyon ve uygulamalarının kullanım alanlarını inceleyip bir araya getirmek için hazırlanmıştır.

Tezin ilerleyen bölümlerinde ilk olarak, 2. bölümde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan bazı kavramların tanımları verilmiştir.

3.1. bölümde konvolüsyon için bir motivasyon tanımlanmıştır.

3.2. bölümde konvolüsyon integral ve özellikleri ele alınmıştır.

3.3. bölümde Laplace dönüşümü ifade edilmiş ve Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoremine yer verilmiştir. Ayrıca konvolüsyon integral yardımıyla başlangıç değer problemlerinin çözümleri açıklanmış ve konvolüsyon integral yardımıyla bazı integral denklemlerin çözümü ele alınmıştır.

3.4. bölümde Fourier dönüşümü tanımlanmış ve Fourier dönüşümü için konvolüsyon teoremi açıklanmıştır.

3.5. bölümde Mellin dönüşümü ifade edilmiş ve Mellin dönüşümü için konvolüsyon teoremi ele alınmıştır.

3.6. bölümde sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyaller ifade edilip, şekillerle örneklendirilmiş ve bağımsız değişkenin dönüşümleri ifade edilip, örnek ve şekiller üzerinde açıklanmıştır. Ayrıca sürekli ve ayrık zamanlı sistemler tanıtılmıştır. Daha sonra zamanla değişmeyen lineer sistemler tanıtılmış ve örnekler üzerinde incelenmiştir. Son olarak ayrık zamanlı LTI sistemlerde konvolüsyon toplamı, örnekler aracılığıyla açıklanmış ve sürekli zamanlı LTI sistemlerde konvolüsyon integrali tanımlanıp, örnekler üzerinde ele alınmıştır.

4. bölümde yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bulgular verilmiş olup, tezi sonlandıran 5. bölümde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya konulmaya çalışılmış ve tezin önemi vurgulanmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde; (Kadıoğlu ve Kamali 1999), (Özer ve Eser 2002), (Musayev vd 2007) ve (Oppenheim *et al.* 2007) çalışmalarından bildiğimiz ve ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı tanımları vereceğiz.

**Tanım 2.1.**  $a \neq 0$  olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

serisine,  $r$  ortak çarpanlı, geometrik seri denir.

**Tanım 2.2.** 
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna ayrık zamanlı birim darbe fonksiyonu denir.

**Tanım 2.3.** 
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna ayrık zamanlı birim basamak fonksiyonu denir.

**Tanım 2.4.** 
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

ayrık zamanlı birim darbe fonksiyonuna, ayrık zamanlı birim basamak fonksiyonunun ilk farkıdır denir.

**Tanım 2.5.**

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

ayrık zamanlı birim basamak fonksiyonu birim darbe fonksiyonunun hareketli toplamıdır denir.

**Tanım 2.6.**

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna sürekli zamanlı birim basamak fonksiyonu denir.

**Tanım 2.7.**

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna sürekli zamanlı birim darbe fonksiyonu denir.

**Tanım 2.8.**  $a$  reel bir sayı ve  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her bir  $b \geq a$  sayısı için  $[a, b]$  aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

limiti varsa  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integrali yakınsak, limiti yoksa ya da  $-\infty$  veya  $+\infty$  ise

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integrali iraksaktır denir.

**Tanım 2.9.** Bir fonksiyon  $\alpha \leq t \leq \beta$  aralığının sonlu sayıdaki alt aralıklarının her birinde sürekli ve bu alt aralıkların her birinde sağdan ve soldan limitleri mevcut ise bu

fonksiyona parçalı sürekli fonksiyon denir. Buradaki süreksizlik sonlu sıçramalar şeklindedir.

**Tanım 2.10.**  $M > 0$  reel sabiti göstermek üzere ve bütün  $t \geq T$  değerleri için ( $T > 0$ )

$$|e^{-at} f(t)| < M \quad \text{veya} \quad |f(t)| < Me^{at}$$

olacak şekilde bir  $a$  sayısı bulunabiliyorsa,  $f$  fonksiyonuna  $t \rightarrow \infty$  için “ $a$  üstel mertebededir” denir.

**Tanım 2.11.** Bütün  $t$  değerleri için

$$f(t+p) = f(t)$$

olacak şekilde bir pozitif  $p$  sayısının mevcut olması şartıyla, her  $t$  değeri için tanımlı  $f(t)$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon,  $p$  sayısına da bu fonksiyonun periyodu denir.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Konvolüsyon için Bir Motivasyon

*Bir göldeki kirletici bir maddenin birikimi:* Bir gölümüz olduğunu ve göle değişken  $f(t)$  oranında bir kirletici maddenin boşaltıldığını kabul edelim. Kirletici zamanla üstel hızda ayrışsın. Eğer  $t=0$  anında gölde hiç kirletici yoksa,  $t>0$  anında ne kadar kirletici olur?  $\Delta t$  küçük olmak üzere,  $t_1$  ve  $t_1 + \Delta t$  zaman aralığında göle eklenen küçük kirletici damla miktarı  $f(t_1)\Delta t$  olur.  $a > 0$  ayrışma sabiti olmak üzere,  $t > t_1$  zaman sonra damla miktarı  $e^{-a(t-t_1)} f(t_1)\Delta t$  olarak azalır.  $t_1 = 0$  başlangıç zamanından başlayarak bu miktarları toplarsak

$$\int_0^t e^{-a(t-t_1)} f(t_1) dt_1 \quad (3.1.1)$$

ifadesini elde ederiz. Bu tip bir integral konvolüsyon olarak adlandırılır. Bu problemi bir diferansiyel denklem kurarak çözebiliriz. Göldeki  $t$  anındaki kirletici madde miktarı  $y(t)$  olsun. Bu durumda, göldeki  $t + \Delta t$  anındaki kimyasal madde miktarı,  $t$  anındaki miktardan ayrışan kısmı çıkarıp o andaki yeni miktarın eklenmesi ile elde edilir: Yani,

$$y(t + \Delta t) = y(t) - ay(t)\Delta t + f(t)\Delta t$$

olur.  $\Delta t \rightarrow 0$  için limit alarak

$$y' + ay = f(t), \quad y(0) = 0$$

elde ederiz. (3.1.1) denkleminin yukarıdaki başlangıç değer probleminin çözümünü verdiği kolaylıkla görülür.

### 3.2. Konvolüsyon İntegral ve Özellikleri

Bu bölümde, ele aldığımız konvolüsyon integral ve özelliklerini (Yıldız ve Bayram 1997) çalışmasından faydalanarak ifade edeceğiz.

Burada çarpım şeklindeki ifadelerin ters dönüşümlerini hesaplamak için bir direkt metot geliştireceğiz. Bazen  $f(t)$  ve  $g(t)$  gibi iki fonksiyonun  $F(s)$  ve  $G(s)$  dönüşümlerinin çarpımı olarak verilen  $H(s)$  dönüşümünün Laplace dönüşümünü hesaplamak gerekir. Böyle bir durumda  $H(s)$  dönüşümünün  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının çarpımlarının Laplace dönüşümü olduğu düşünülebilir. Ancak bu doğru bir durum değildir, bir başka ifadeyle Laplace dönüşümü adi çarpma ile yer değiştiremez. Yani  $L\{f.g\}$  ile  $L\{f\}L\{g\}$  aynı değildir.

**Teorem 3.1.** Eğer  $s > a \geq 0$  için  $F(s) = L\{f(t)\}$  ve  $G(s) = L\{g(t)\}$  dönüşümlerinin her ikisi de var ise bu durumda

$$H(s) = F(s)G(s) = L\{h(t)\}, \quad s > a$$

şeklinde olur. Burada  $h(t)$  fonksiyonuna  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının konvolüsyonu denir ve

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan ifadeye konvolüsyon integral denir. Bu teoreme göre iki fonksiyonun konvolüsyonunun dönüşümü onların adi çarpımlarının dönüşümü yerine, ayrı ayrı dönüşümlerinin çarpımı ile verilir. Klasik anlamda konvolüsyon integral, "genelleştirilmiş çarpım" olarak düşünülebilir.

$(f * g)(t)$  notasyonu adi çarpımın sahip olduğu birçok özelliğe sahiptir. Mesela,

$$f * g = g * f \quad (\text{değişme özelliği})$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{dağılma özelliği})$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (\text{birleşme özelliği})$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

özelliklerine sahiptir. Konvolüsyonun bu özelliklerinin adi çarpma işleminin özellikleriyle uyuşmasına rağmen, adi çarpma işleminin bazı özellikleri konvolüsyon için geçerli değildir. Örneğin, genelde  $f * 1$  konvolüsyonu  $f$  fonksiyonuna eşit değildir. Bunu görmek için,

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot 1 d\tau = \int_0^t f(t - \tau) d\tau$$

olup, eğer  $f(t) = \cos(t)$  ise bu durumda,

$$\begin{aligned} (f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t - \tau) d\tau = -\sin(t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{t=\tau} \\ &= -\sin 0 + \sin t \\ &= \sin t \end{aligned}$$

olur. Açıkça,

$$(f * 1)(t) \neq f(t)$$

bulunur.

### 3.3. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup; fizik, mekanik, mühendislik, telekominikasyon, matematik ve diğer uygulamalı bilim dallarında kullanılan önemli bir dönüşümdür. Ünlü matematikçi P.S. Laplace (1749-1827) tarafından tanımlanmıştır. Bu dönüşüm diferansiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylık sağladığı gibi, fiziğin matematiksel çözümünde de yararlanılabilen bir yöntemdir. Bu yoldan elde edilen denklemlerin başlangıç şartlarını da ihtiva ettiği görülür (Aliyev 1995).

**Tanım 3.3.1.**  $f(t)$ ,  $t \geq 0$  için  $t$  reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun ( $t < 0$  için  $f(t) = 0$ ) kabul edilir.  $s > 0$  reel veya kompleks bir parametre olmak üzere,  $t$  reel değişkeninin bir fonksiyonu  $e^{-st}$  olduğuna göre,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.3.1)$$

integrali var olacak şekilde  $s$  parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace Dönüşümü denir. Bu dönüşüm  $L\{f(t)\}$  veya  $F(s)$  ifadeleri ile gösterilir. Bunu

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.3.2)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada sonuç  $s$  değişkenine bağlıdır ve integral yakınsak olmalıdır (Sneddon 1972).

### 3.3.1. Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoremi

Eğer  $t \geq 0$  için  $f$  ve  $g$  fonksiyonları parçalı sürekli ise,  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının konvolüsyonu  $f * g$  ile gösterilir ve

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (3.3.1.1)$$

integraliyle tanımlanır (Gonzalez and Enrique 1995).

**Teorem 3.2.** Eğer  $t \geq 0$  için  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonları,  $[0, \infty)$  aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden ise

$$L\{f * g\} = L\{f(t)\}L\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

olarak ifade edilir.

**İspat:**  $L\{f(t)\} = F(s)$  ,  $L\{g(t)\} = G(s)$  olup;

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right\} = F(s)G(s)$$

olur. Bir başka deyişle,

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

şeklinde ifade edilir. Bu dönüşümler yardımıyla:

$$\begin{aligned}
L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt \\
&= \int_{\tau=0}^\infty f(\tau)\left\{\int_{t=\tau}^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt\right\}d\tau
\end{aligned}$$

[Bu eşitliğin içindeki integralde  $t - \tau = v$  değişken dönüşümünü yapalım.]

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tau=0}^\infty f(\tau)\left\{\int_{v=0}^\infty e^{-s(\tau+v)}g(v)dv\right\}d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau \int_{v=0}^\infty e^{-sv}g(v)dv = F(s)G(s)
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.1.**  $L\left\{\int_0^t e^\tau \cos(t-\tau)d\tau\right\}$  dönüşümünü konvolüsyon teoreminden yararlanarak çözelim.

**Çözüm:**  $f(t) = e^t$  ve  $g(t) = \cos t$  alınarak konvolüsyon teoreminden;

$$\begin{aligned}
L\left\{\int_0^t e^\tau \cos(t-\tau)d\tau\right\} &= L\{e^\tau\} \cdot L\{\cos t\} \\
&= \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \\
&= \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.**  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\}$  Ters Laplace dönüşümünü konvolüsyon teoreminden yararlanarak hesaplayalım.

**Çözüm:**  $F(s) = \frac{1}{s-3} \Rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{3t}$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = e^{-t}$$

olduğunu biliyoruz. Ters Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoreminden

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\} &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{3\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{-t} \int_0^t e^{4\tau}d\tau = e^{-t} \left. \frac{1}{4}e^{4\tau} \right|_0^t \\ &= \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \end{aligned}$$

bulunur.

### 3.3.2. Konvolüsyon integral yardımıyla başlangıç değer problemlerinin çözümü

Bu bölümde bazı başlangıç-değer problemlerinin konvolüsyon integral yardımıyla nasıl çözüleceğini ele alacağız.

**Örnek 3.3.**  $y'' + \omega^2 y = g(t)$  ;  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$  başlangıç değer problemini hesaplayalım.

**Çözüm:** Verilen denkleme Laplace dönüşümü uygularsak

$$\begin{aligned}
L\{y''\} + \omega^2 L\{y\} &= L\{g(t)\} \\
s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) + \omega^2 L(y) &= G(s) \\
(s^2 + \omega^2)L(y) - 1 &= G(s) \\
L(y) &= \frac{G(s)}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

olup, yukarıdaki son eşitliğe ters Laplace dönüşümüyle birlikte konvolüsyon uygularsak

$$\begin{aligned}
y &= L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s^2 + \omega^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
y &= L^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} + \frac{1}{\omega} L^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
y &= \frac{1}{\omega} L^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} + \frac{1}{\omega} L^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
y &= \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^t \sin \omega(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau + \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.4.**  $4y'' + 4y' + 17y = g(t)$  ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  başlangıç değer problemini hesaplayalım.

**Çözüm:** Verilen denkleme Laplace dönüşümü uygularsak

$$\begin{aligned}
4L(y'') + 4L(y') + 17L(y) &= L(g(t)) \\
4\{s^2L(y) - sy(0) - y'(0)\} + 4\{sL(y) - y(0)\} + 17L(y) &= G(s) \\
(4s^2 + 4s + 17)L(y) &= G(s) \\
L(y) &= \frac{G(s)}{(2s+1)^2 + 4^2} \\
&= \frac{G(s)}{4\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 4^2}
\end{aligned}$$

olup yukarıdaki son eşitliğe ters Laplace dönüşümüyle birlikte konvolüsyon uygularsak

$$\begin{aligned}
y &= L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{4\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} \right\} \\
&= \frac{1}{8} L^{-1} \left\{ \frac{2G(s)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \right\} \\
&= \frac{1}{8} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \cdot \sin 2(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

bulunur.

### 3.3.3. Konvolüsyon yardımıyla bazı integral denklemlerin çözümü

Bulunması gereken fonksiyon eğer integral içerisinde bulunuyorsa bu denkleme integral denklem denir. İntegral denklemler Laplace dönüşümü yöntemiyle çözebiliriz. Ancak, çözeceğimiz integral denklemleri sınırlı sayıda olacaktır.  $g(t)$  ve  $h(t)$  verilmiş fonksiyonlar olmak üzere integral denklemler

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad (3.3.3.1)$$

şeklinde ifade edilir.

**Örnek 3.5.**  $y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \cdot \sin(t-\tau) d\tau$  integral denklemini çözelim.

**Çözüm:** Konvolüsyon teoremini uygularsak

$$y(t) = t + y(t) * \sin t$$

olarak yazılabilir. Eşitliğin her iki yanının Laplace dönüşümünü alırsak

$$L\{y(t)\} = L\{t\} + L\{y(t)\} \cdot L\{\sin t\}$$

olur. Buradan  $L\{y(t)\} = Y(s)$  olmak üzere,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanının ters Laplace dönüşümünü alırsak;

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad \text{ve} \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{1}{6}t^3$$

olduğundan,

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3$$

buluruz.

**Örnek 3.6.**  $\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t) dt$  integral denklemini çözelim.

**Çözüm:**  $L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1}$ ,  $L\{\cos x\} = \frac{s}{s^2+1}$  olduğunu biliyoruz.

$L\{\varphi(x)\} = \Phi(s)$  olsun. Verilen denklemin her iki yanının Laplace dönüşümünü alır ve konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+1} \Phi(s)$$

bulunur. Buradan da

$$\Phi(s) \cdot \left[ 1 - \frac{2s}{s^2+1} \right] = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \Phi(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

bulunur. Her iki yanın ters Laplace dönüşümü alınarak integral denklemin çözümü

$$\varphi(x) = xe^x$$

olarak elde edilir.

### 3.4. Fourier Dönüşümü

Bu bölümde ele aldığımız Fourier dönüşümünü (Kırdar 2007) çalışmasından faydalanarak ifade edeceğiz.

Fransız bilim adamı Joseph Fourier (1768-1830), The Analytic Theory of Heat (1822) isimli ünlü çalışmasında şu iddiayı ortaya koymuştur:  $2\pi$  periyotlu her  $f(t)$  fonksiyonu,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (3.4.1)$$

formunda bir “sonsuz” trigonometrik seri ile gösterilebilir. (3.4.1) yapısındaki sonsuz seriye, Fourier Serisi denir. Fonksiyonların Fourier Serisi ile temsili, uygulamalı matematikte, özellikle kısmi türevli denklemlerin çözümlerinde, oldukça yaygın kullanılan tekniklerden birisidir (Brown and Churchill 1993).

**Tanım 3.4.1.**  $f(t)$  bütün  $t$  değerleri için tanımlı ve  $2L$  periyotlu parçalı sürekli bir fonksiyon olsun.  $f(t)$  fonksiyonunun Fourier serisi

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \quad (3.4.2)$$

serisidir. Buradan  $a_n$  ve  $b_n$  Fourier katsayıları

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad (3.4.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \quad (3.4.4)$$

olarak tanımlanır.

Fourier integral teoremi matematikçiler ve matematikle uğraşan fizikçiler tarafından 19. ve 20. yüzyılda fark edildi. Bu modern matematik analizlerinin temel sonuçlarından biri olarak itibar kazanmıştır. Cauchy'nin ünlü bilimsel araştırması "Memoire sur l'emploi des equations symboliques" tamamen sembolik açıklamaları ile anlatılmıştır. J.Fourier (1768-1830) temel adımı atmış ve Oliver Heaviside (1850-1925) bu metodu geliştirmiştir.

$2L$  periyotlu  $f(x)$  fonksiyonunda  $L \rightarrow \infty$  halinde ( $L$  sonsuza giderse)  $f(x)$  fonksiyonunun periyodikliği kalmaz. Fourier serisi periyodik fonksiyonları içeren problemlerde önemli rol oynar. Özellikle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerindeki yeri çok önemlidir.  $L \rightarrow \infty$  olması durumunda Fourier serisi integrale dönüşür.

Fourier integral teoremine göre

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \quad (3.4.5)$$

şeklinde ifade edilir.

**Tanım 3.4.2.** (3.4.5) den dolayı

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \quad (3.4.6)$$

ile  $F(\alpha)$  fonksiyonunu tanımlayarak,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (3.4.7)$$

elde edilir.

$F(\alpha)$  ifadesine  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve  $f(x)$  fonksiyonuna da  $F(\alpha)$  fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü denir ve

$$F(\alpha) = F\{f(x)\} \text{ ve } f(x) = F^{-1}\{F(\alpha)\} \quad (3.4.8)$$

ile gösterilir. Hem  $F$  operatörü ve hem de  $F^{-1}$  operatörü lineer integral operatörlerdir (Stuart 1961).

$f(x)$  fonksiyonu çift bir fonksiyon ise,

$$F_c(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u du \quad (3.4.9)$$

olarak alınırsa,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \quad (3.4.10)$$

bulunur. Burada  $F_c(\alpha)$  ifadesine  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier cosinüs dönüşümü,  $f(x)$  fonksiyonuna da  $F_c(\alpha)$  dönüşümünün ters Fourier cosinüs dönüşümü denir.

$f(x)$  fonksiyonu tek bir fonksiyon ise,

$$F_s(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} f(u) \sin \alpha u du \quad (3.4.11)$$

olarak alınırsa,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \quad (3.4.12)$$

elde edilir. Burada  $F_s(\alpha)$  ifadesine  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü,  $f(x)$  fonksiyonuna da  $F_s(\alpha)$  dönüşümünün ters Fourier sinüs dönüşümü denir.

### 3.4.1. Fourier dönüşümü için konvolüsyon teoremi

**Tanım 3.4.1.1.**  $f(x)$  ve  $g(x)$  gibi iki fonksiyonun konvolüsyonu

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) du \quad (3.4.1.1)$$

şeklinde tanımlanır (Yarasa 1976).

### Teorem 3.3. (Konvolüsyon Teoremi)

Eğer  $F\{f(x)\} = F(\alpha)$  ve  $F\{g(x)\} = G(\alpha)$  ise o halde,

$$F\{f * g\} = F(\alpha) \cdot G(\alpha) \quad (3.4.1.2)$$

veya

$$f * g = F^{-1}\{F(\alpha).G(\alpha)\} \quad (3.4.1.3)$$

olarak ifade edilir (Yarasa 1976).

**İspat:** Fourier dönüşümü tanımından;

$$\begin{aligned} F\{f(x) * g(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u} g(u) du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-u)} f(x-u) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u} g(u) du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\eta} f(\eta) d\eta \\ &= G(\alpha).F(\alpha) \end{aligned}$$

olur.

**Örnek 3.7.**  $y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)k(x-u)du$  integral denklemini çözelim.

**Çözüm:**  $y(x)$ ,  $g(x)$  ve  $k(x)$  fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri sırasıyla  $Y(u)$ ,  $G(u)$  ve  $K(u)$  olsun. Verilen integral denklem

$$y(x) = g(x) + y(x) * k(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda denklemin Fourier dönüşümünü alırsak,

$$Y(u) = G(u) + Y(u)K(u)$$

elde edilir. Buradan,

$$Y(u) = \frac{G(u)}{1-K(u)}$$

bulunur. Ters Fourier dönüşümünü alırsak,

$$y(x) = F^{-1} \left\{ \frac{G(u)}{1-K(u)} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(u)}{1-K(u)} e^{iux} du$$

çözümü elde edilir.

**Örnek 3.8.** Fourier dönüşümü methoduyla

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + a^2u = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

adi diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım.

**Çözüm:** Verilen denklemden

$$F\{f(x)\} = F(k) \quad \text{ve} \quad F\{u(x)\} = U(k)$$

olacak şekilde Fourier dönüşümü uygularsak,

$$F\{-u''(x)\} + F\{a^2u(x)\} = F\{f(x)\}$$

$$-(ik)^2 U(k) + a^2U(k) = F(k)$$

$$U(k) = \frac{F(k)}{k^2 + a^2}$$

bulunur. Yukarıdaki denkleme ters Fourier dönüşümüyle birlikte konvolüsyon uygularsak,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x-\alpha) d\alpha$$

elde ederiz.

$$F^{-1} \left\{ \frac{2\lambda}{x^2 + \lambda^2} \right\} = e^{-\lambda|x|} \quad (\lambda > 0) \text{ özelliğinden,}$$

$$g(x) = F^{-1} \left\{ \frac{1}{k^2 + a^2} \right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|x|}$$

yazabiliriz. Böylece sonuç olarak

$$u(x) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-a|x-\alpha|} d\alpha$$

elde edilir.

### 3.5. Mellin Dönüşümü

Mellin dönüşümünü tarihsel olarak ilk kez Riemann (1876) asal sayılar üzerine yaptığı ünlü araştırmasında tanımlamıştır. Formülü Cahen (1894) tarafından ortaya konulmuştur. Neredeyse eş zamanlı olarak Mellin (1896, 1902), Mellin dönüşümünün genişletilmiş tartışmasını ve iç formülünü vermiştir (Debnath 1995).

Mellin dönüşümü ve tersi, kompleks Fourier dönüşümü ve onun tersinden faydalanılarak yazılabilir (Davies 1978). Daha önce (3.4.6) ve (3.4.7) de değindiğimiz Fourier dönüşümü ve tersini

$$G(\alpha) = F\{g(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\alpha u} du \quad (3.5.1)$$

$$g(u) = F^{-1}\{G(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)e^{i\alpha u} d\alpha \quad (3.5.2)$$

olarak ifade etmiştik. Mellin dönüşümü oluşturabilmek için (3.5.1) ve (3.5.2) sonuçlarında değişken değiştirmesi yapalım.  $c$  sabit olmak üzere;

$$\begin{aligned} i\alpha &= c - p \\ x &= e^u \\ f(x) &= g(\ln x) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

olarak alırsak,

$$G(ip - ic) = \int_0^{\infty} x^{p-c-1} g(\ln x) dx \quad (3.5.4)$$

$$g(\ln x) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-p} G(ip - ic) dp \quad (3.5.5)$$

elde ederiz. Şimdi  $f(x)$  fonksiyonunun Mellin dönüşümünü ve onun tersini tanımlamak için;

$$x^{-c} g(\ln x) = f(x) \text{ ve } G(ip - ic) = \tilde{f}(p)$$

olarak yazarsak,

$$\mu\{f(x)\} = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx \quad (3.5.6)$$

$$\mu^{-1}\{\tilde{f}(p)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} \tilde{f}(p) dp \quad (3.5.7)$$

bulunur. Burada  $f(x)$ ,  $(0, \infty)$  için tanımlı gerçel değerli bir fonksiyondur ve Mellin dönüşüm değişkeni  $p$  bir kompleks sayıdır. Bazen  $f(x)$  fonksiyonunun Mellin dönüşümü  $\tilde{f}(p) = \mu[f(x), p]$  biçiminde de gösterilebilir.

### 3.5.1. Mellin dönüşümü için konvolüsyon teoremi

**Teorem 3.4.** Eğer,  $\mu\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$  ve  $\mu\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$  ise, bu durumda

$$\mu[f(x) * g(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(z) \tilde{g}(p-z) dz = \tilde{f}(p) \cdot \tilde{g}(p) \quad (3.5.1.1)$$

**İspat:**  $f(x)$  fonksiyonunun Mellin dönüşümü olan  $\tilde{f}(p)$ ;  $\tilde{f}(p)$  ifadesinin ters Mellin dönüşümü olan  $f(x)$ , sırasıyla (3.5.1.2) ve (3.5.1.3) de

$$\mu\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x) x^{p-1} dx = \tilde{f}(p) \quad (3.5.1.2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) x^{-p} dp \quad (3.5.1.3)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu eşitliklerden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\mu[f(x) * g(x)] &= \int_0^{\infty} g(x) \cdot f(x) x^{p-1} dx \\
\int_0^{\infty} g(x) x^{p-1} f(x) dx &= \int_0^{\infty} g(x) x^{p-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(z) x^{-z} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(z) dz \int_0^{\infty} g(x) x^{p-z-1} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(z) \tilde{g}(p-z) dz
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece;

$$\mu[f(x) * g(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(z) \tilde{g}(p-z) dz = \tilde{f}(p) \cdot \tilde{g}(p)$$

olarak ifade edilir.

**Örnek 3.9.**  $f(x) * g(x) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} dt$  konvolüsyon çarpımının Mellin dönüşümü

altında neye eşit olduğunu bulalım.

**Çözüm:**  $\mu\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$  ve  $\mu\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$  olmak üzere;

Verilen konvolüsyon çarpımına Mellin dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned}
\mu\{f(x)*g(x)\} &= \mu\left\{\int_{t=0}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}dt\right\} \\
&= \int_0^{\infty} x^{p-1}\left\{\int_{t=0}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}dt\right\}dx \\
&= \int_0^{\infty} f(t)\frac{1}{t}dt\int_0^{\infty} x^{p-1}g\left(\frac{x}{t}\right)dx
\end{aligned}$$

[ burada  $\frac{x}{t} = \delta$  dersek ( $t$  sabit tutularak,  $dx = t d\delta$ ) ]

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} f(t)\frac{1}{t}dt\int_0^{\infty} (\delta t)^{p-1}g(\delta)t d\delta \\
&= \int_0^{\infty} t^{p-1}f(t)dt\int_0^{\infty} \delta^{p-1}g(\delta)d\delta \\
&= \tilde{f}(p)\tilde{g}(p)
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Örnek 3.10.**  $f(x)*g(x) = \int_{t=0}^{\infty} f(xt)g(t)dt$  konvolüsyon çarpımının Mellin dönüşümü

altında neye eşit olduğunu bulalım.

**Çözüm:**  $\mu\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$  ve  $\mu\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$  olmak üzere;

Verilen konvolüsyon çarpımına Mellin dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned}
\mu\{f(x)*g(x)\} &= \mu\left\{\int_{t=0}^{\infty} f(xt)g(t)dt\right\} \\
&= \int_0^{\infty} x^{p-1}\left\{\int_{t=0}^{\infty} f(xt)g(t)dt\right\}dx \\
&= \int_0^{\infty} x^{p-1}dx\int_0^{\infty} f(xt)g(t)dt
\end{aligned}$$

[ burada  $xt = \delta$  dersek ( $t$  sabit tutularak,  $dx = \frac{1}{t}d\delta$ ) ]

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} g(t)dt\int_0^{\infty} \delta^{p-1}t^{1-p}f(\delta)\frac{1}{t}d\delta \\
&= \int_0^{\infty} t^{1-p-1}g(t)dt\int_0^{\infty} \delta^{p-1}f(\delta)d\delta \\
&= \tilde{g}(1-p)\tilde{f}(p)
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.11.**  $\mu^{-1}\{\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)\}$  ters Mellin dönüşümünün neye eşit olduğunu bulalım.

**Çözüm:** Ters Mellin dönüşümünün tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}\{\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)\} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)\tilde{g}(p)x^{-p}dp \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)x^{-p}dp\int_0^{\infty} g(u)u^{p-1}du \\
&= \int_0^{\infty} g(u)\frac{du}{u}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)\left(\frac{x}{u}\right)^{-p}dp \\
&= \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{u}\right)g(u)\frac{1}{u}du
\end{aligned}$$

bulunur.

### **3.6. Konvolüsyonun Sinyaller ve Sistemlere Uygulanması**

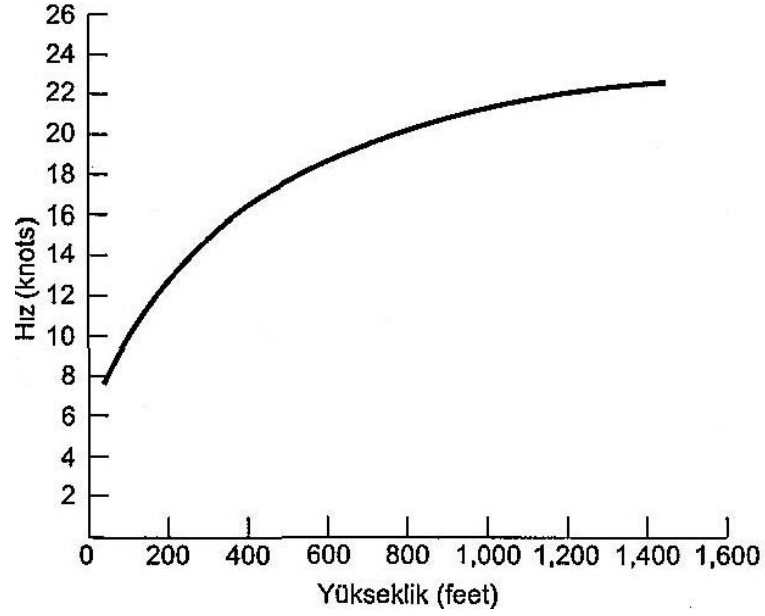
Bu ve bundan sonraki bölümlerde ele aldığımız konvolüsyonun sinyaller ve sistemlere uygulanmasını (Oppenheim *et al.* 2007) çalışmasından faydalanarak ifade edeceğiz.

#### **3.6.1. Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyaller**

Hem sürekli zamanlı hem de ayrık zamanlı sinyaller ve sistemlerle ilişkili kavram ve teknikler zengin bir geçmişe sahiptir ve kavramsal olarak yakından ilişkilidir. Ancak, tarihsel olarak geçmişteki uygulamaları yeterince farklı olduğu için çoğu kısımda ayrı ayrı çalışılmış ve geliştirilmişlerdir. Sürekli zamanlı sinyaller ve sistemler, fizik ve yakın geçmişte elektriksel devreler ve haberleşme ile ilişkili problemlerde güçlü köklere sahiptir. Ayrık zamanlı sinyaller ve sistemlerin tekniklerinin ekonomik ve demografik veri gibi uygulamalarla ilişkili sayısal analiz ve istatistikte güçlü kökleri vardır. Ancak son yıllarda sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyaller ve sistemler disiplinleri giderek kaynaşık bir hale gelmiş ve uygulamalar oldukça ilişkili bir hal almıştır. Bunun oluşmasındaki ana neden, sinyallerin oluşturulması ve sistemlerin uygulanması için teknolojideki önemli gelişmelerdir.

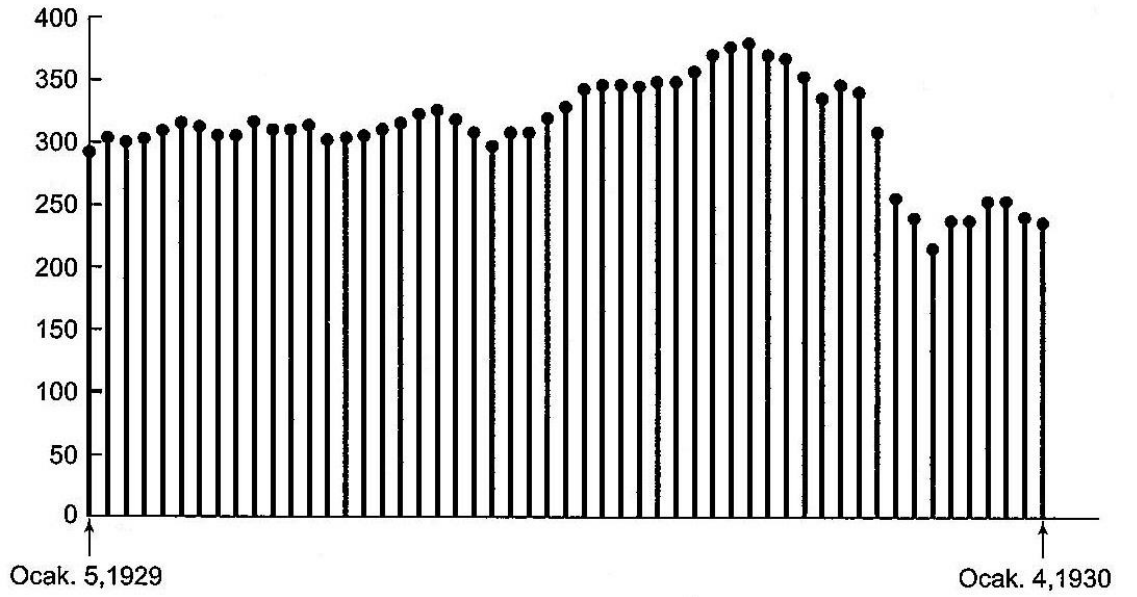
Sinyaller matematiksel olarak bir veya daha fazla değişkenin fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Örneğin, bir ses sinyali matematiksel olarak akustik basıncın zaman fonksiyonu olarak gösterilebilir ve bir resim iki uzamsal değişkenin fonksiyonu olarak parlaklık ile ifade edilebilir.

Sürekli zamanlı sinyaller durumunda bağımsız değişken süreklidir ve bu nedenle bu sinyaller bağımsız değişkenin kesintisiz değerleri için tanımlanır. Şekil 3.1 bu duruma bir örnektir.



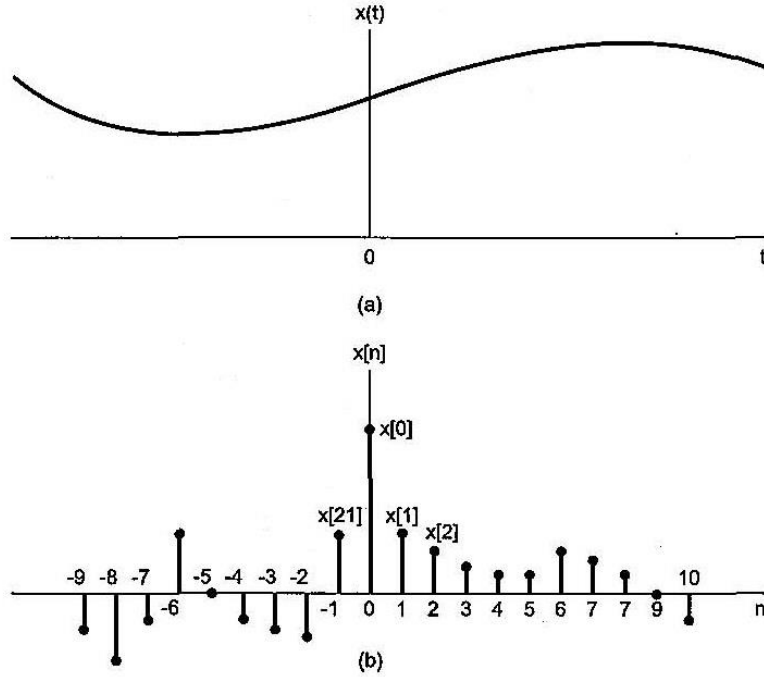
Şekil 3.1. Tipik yıllık dikey rüzgar profili

Diğer taraftan, ayrık zamanlı sinyaller sadece ayrık zamanlarda tanımlanır ve bu nedenle, bu sinyaller için bağımsız değişken sadece ayrık değerler kümesini alır. Bu duruma bir örnek Şekil 3.2’de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. 5 Ocak 1929 yılından 4 Ocak 1930 yılına kadar haftalık borsa endeksi

Ayrıca, sürekli zamanlı sinyal  $x(t)$  ve ayrık zamanlı sinyal  $x[n]$  ile gösterilir. Şekil 3.3 bu duruma bir örnektir.

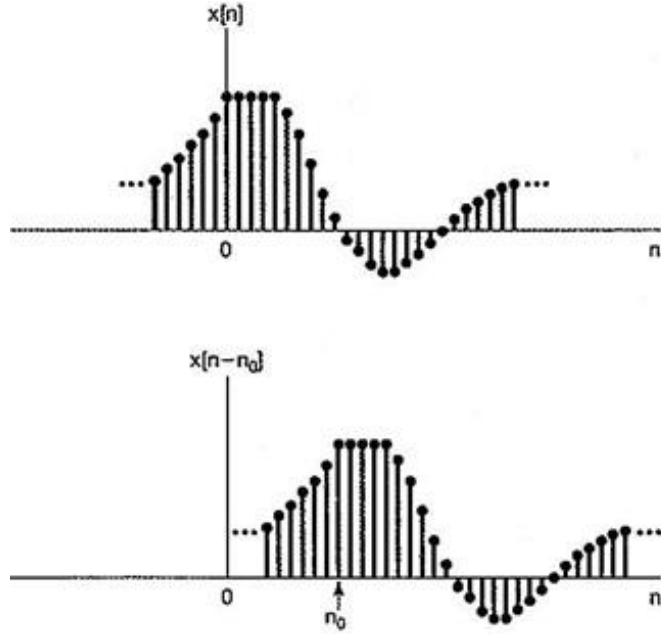


Şekil 3.3. (a) sürekli zamanlı ve (b) ayrık zamanlı sinyallerin grafiksel gösterimi

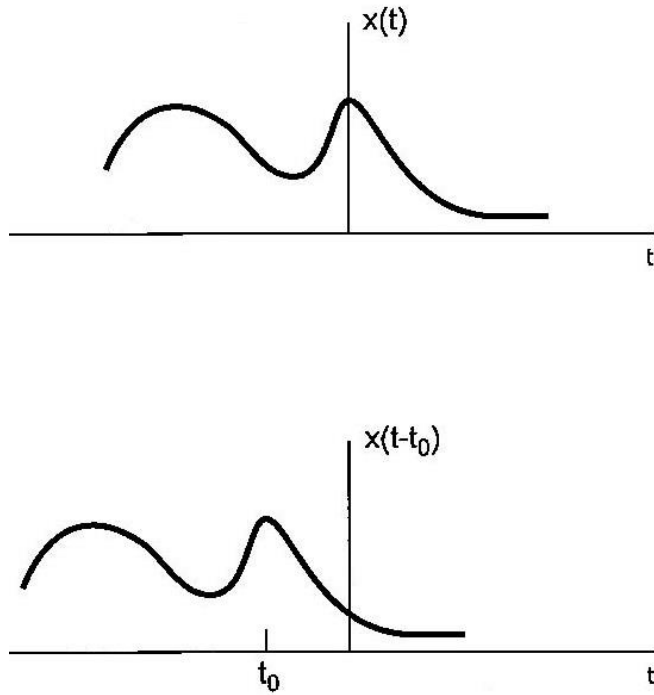
### 3.6.1.a. Bağımsız değişkenin dönüşümleri

Sinyal ve sistem analizinde temel bir kavram, bir sinyalin dönüşümüdür. Bir sinyalin bağımsız değişkeninin basit ve çok önemli bir dönüşüm örneği zaman kaydırmasıdır. Ayrık zamanlı sinyal olan  $x[n]$  sinyalinin ayrık zamanda bir zaman kaydırması  $x[n-n_0]$  sinyali olur. Eğer  $n_0 > 0$  ise  $x[n-n_0]$  sinyali  $x[n]$  sinyalinin geciktirilmiş versiyonu olup; eğer  $n_0 < 0$  ise  $x[n-n_0]$  sinyali  $x[n]$  sinyalinin ileri versiyonu olur. Benzer şekilde sürekli zamanlı sinyal olan  $x(t)$  sinyalinin sürekli zamanda bir zaman kaydırması  $x(t-t_0)$  sinyali olur. Eğer  $t_0 > 0$  ise  $x(t-t_0)$  sinyali  $x(t)$  sinyalinin geciktirilmiş versiyonu olup; eğer  $t_0 < 0$  ise  $x(t-t_0)$  sinyali  $x(t)$  sinyalinin ileri

versiyonu olur. Şekil 3.4 ayrık zamanlı bir sinyalin zaman kaydırmasına, Şekil 3.5 ise sürekli zamanlı bir sinyalin zaman kaydırmasına örnek teşkil etmektedir.

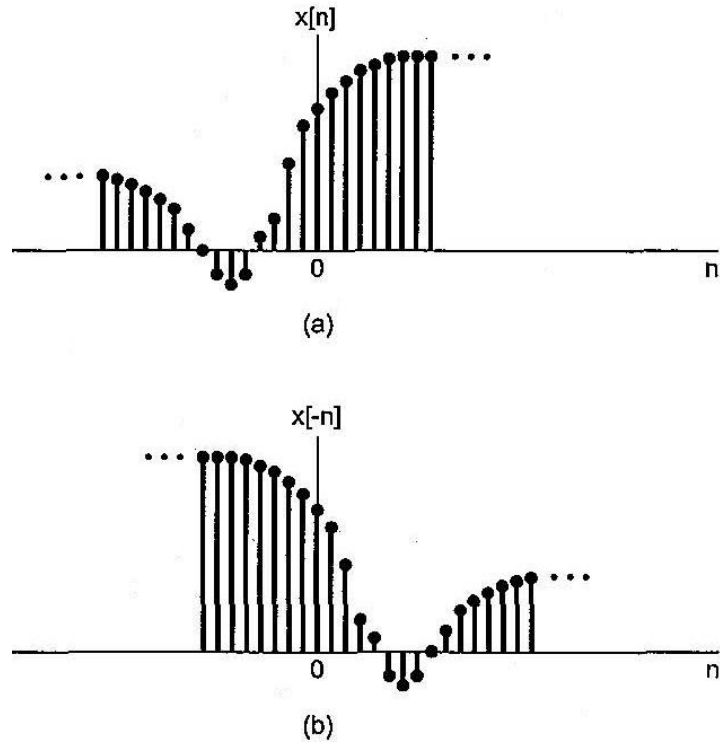


Şekil 3.4.  $n_0 > 0$  iken bir zaman kaydırmasıyla ilgili ayrık zamanlı sinyaller

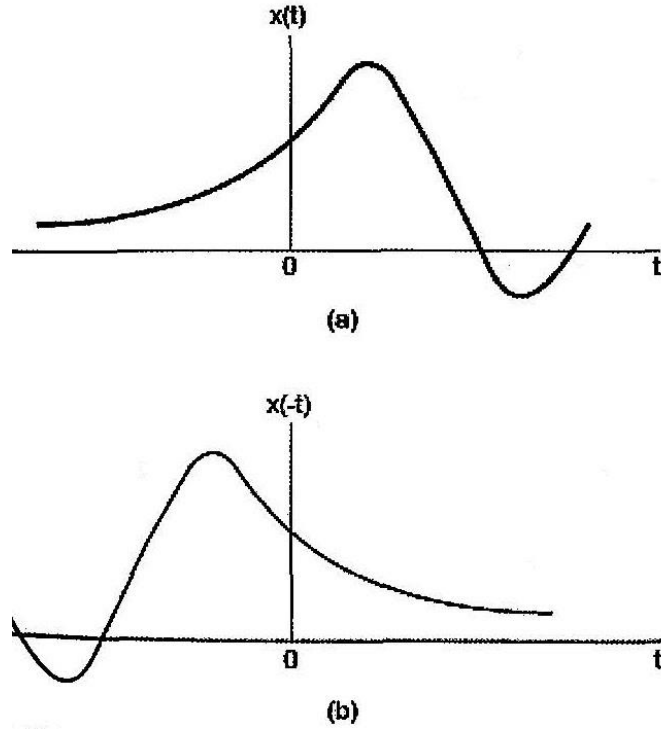


Şekil 3.5.  $t_0 < 0$  iken bir zaman kaydırmasıyla ilgili sürekli zamanlı sinyaller

Zaman ekseninin ikinci bir temel dönüşümü zaman tersinmesidir.  $x[-n]$  ayrık zamanlı sinyali,  $x[n]$  ayrık zamanlı sinyalinden yaklaşık  $n=0$  yansıması ile [yani,  $x[n]$  ayrık zamanlı sinyali ters döndürülerek] elde edilir. Benzer şekilde  $x(-t)$  sürekli zamanlı sinyali,  $x(t)$  sürekli zamanlı sinyalinden yaklaşık  $t=0$  yansıması ile [yani,  $x(t)$  sürekli zamanlı sinyali ters döndürülerek] elde edilir. Şekil 3.6 ayrık zamanlı bir sinyalin zaman tersinmesine, Şekil 3.7 ise sürekli zamanlı bir sinyalin zaman tersinmesine örnek teşkil etmektedir.

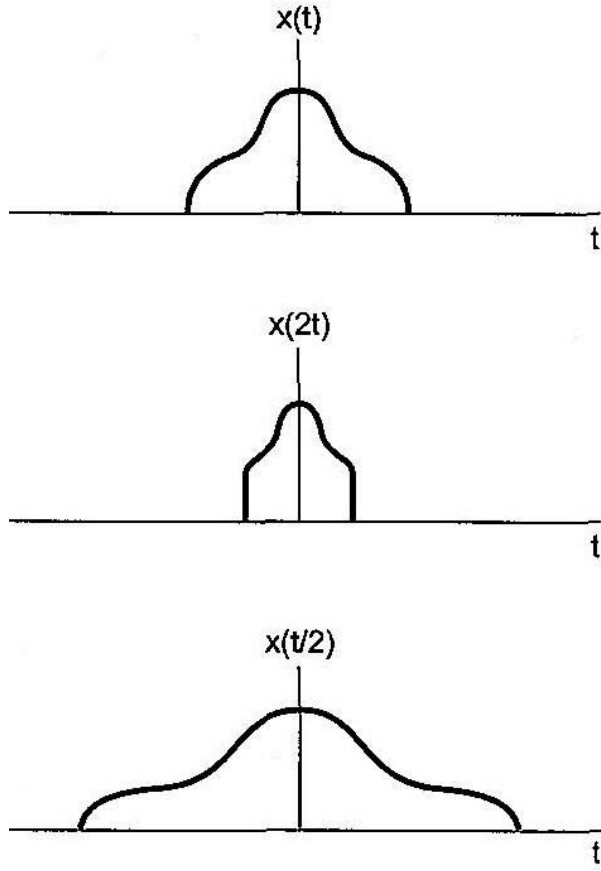


**Şekil 3.6.** (a) bir ayrık zamanlı sinyali  $x[n]$ ; (b) yaklaşık  $n=0$  noktasındaki yansıması  $x[-n]$



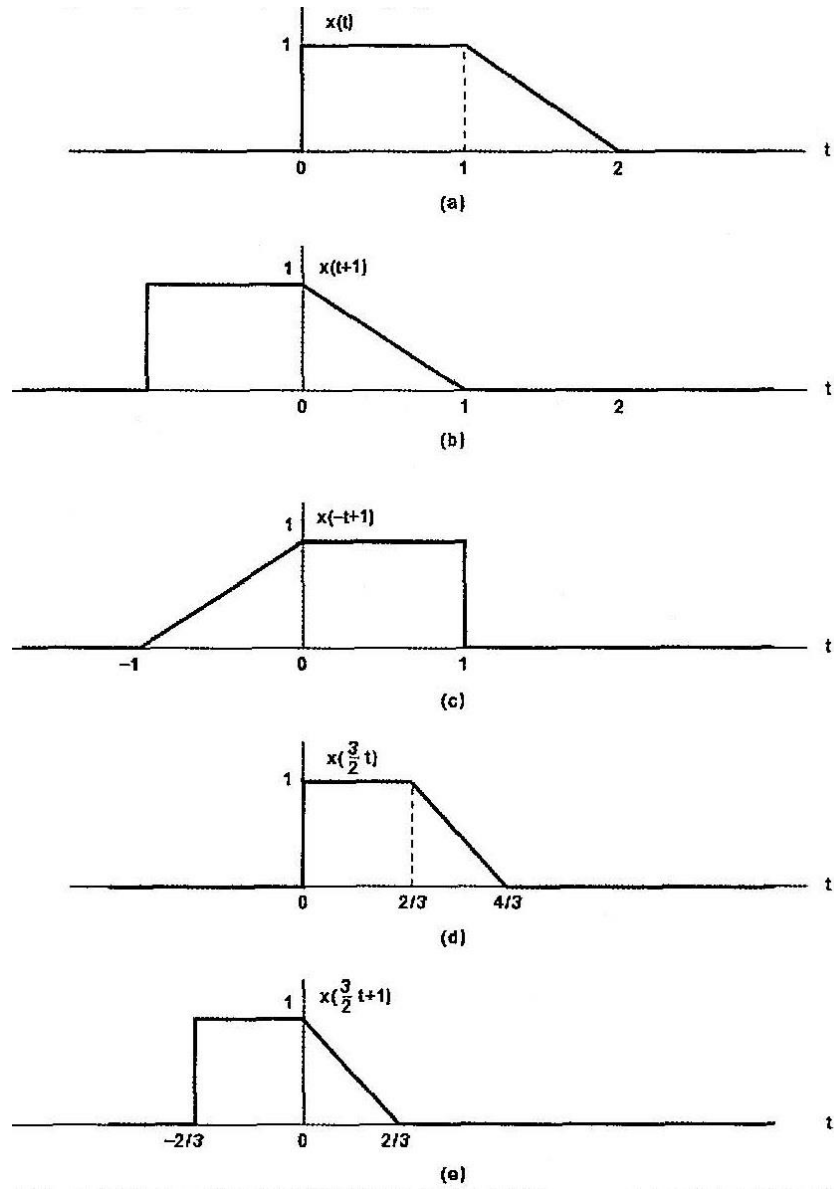
**Şekil 3.7.** (a) bir sürekli zaman sinyali  $x(t)$ ; (b) yaklaşık  $t=0$  noktasındaki yansıması  $x(-t)$

Bir başka dönüşüm, zaman ölçeklemesidir. Şekil 3.8'de bağımsız değişkende doğrusal ölçek değişimleri ile ilgili üç sinyal  $x(t)$ ,  $x(2t)$  ve  $x\left(\frac{t}{2}\right)$  gösterilmiştir. Eğer  $x(t)$  sinyalini bir bant kaydı olarak düşünersek,  $x(2t)$  sinyali aynı ses kaydının iki katı hızla ve  $x\left(\frac{t}{2}\right)$  sinyali ise yarı hızla çalınanır.



**Şekil 3.8.** Zaman ölçekleme ile ilgili sürekli zamanlı sinyaller

**Örnek 3.12.** Şekil 3.9(a) da  $x(t)$  sinyali gösterilmiştir.  $x(t)$  sinyalinden yararlanarak  $x(t+1)$ ,  $x(-t+1)$ ,  $x\left(\frac{3}{2}t\right)$ ,  $x\left(\frac{3}{2}t+1\right)$  sinyallerini gösterelim.



**Şekil 3.9.** (a) bağımsız değişkenin dönüşümünü göstermek için Örnek 3.12 de kullanılan sürekli zamanlı sinyal  $x(t)$ ; (b) zaman kaydırma sinyali  $x(t+1)$ ; (c)  $x(-t+1)$  sinyali bir zaman kaydırması ve zaman tersinmesi ile elde edilir; (d) zaman ölçeklenmiş sinyal  $x(3/2t)$ ; (e)  $x(3/2t+1)$  sinyali zaman kaydırma ve ölçekleme ile elde edilir

### 3.6.2. Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sistemler

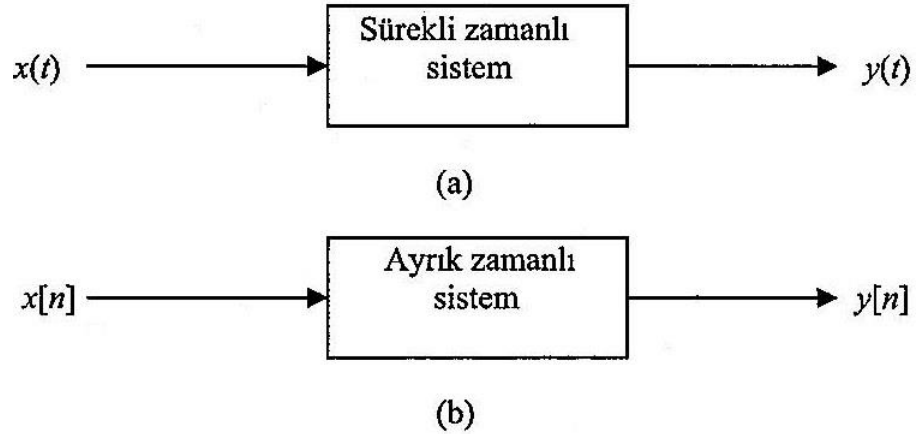
Sürekli zamanlı bir sistem, sürekli zamanlı giriş sinyallerinin uygulandığı ve sürekli zamanlı çıkış sinyalleri ile sonuçlanan bir sistemdir. Örneğin,

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

sürekli zamanlı bir sistemdir. Benzer şekilde, ayrık zamanlı bir sistem; ayrık zamanlı giriş sinyallerinin uygulandığı ve ayrık zamanlı çıkış sinyalleri ile sonuçlanan bir sistemdir. Örneğin,

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

ayrık zamanlı bir sistemdir. Şekil 3.10 bu durumlara örnek teşkil etmektedir.



Şekil 3.10. (a) sürekli zamanlı sistem; (b) ayrık zamanlı sistem

### 3.6.3. Zamanla değişmeyen lineer sistemler (LTI)

İki ana özellik olan doğrusallık(lineerlik) ve zamanda değişmezlik sinyal ve sistem analizinde önemli rol oynar. Öncelikle, çoğu fiziksel süreç bu özelliklere sahiptir ve bu nedenle zamanla değişmeyen doğrusal sistemler (LTI) olarak modellenebilirler.

Zamanda değişmezlik özelliğini sinyaller ve sistemler diliyle şöyle tanımlayabiliriz: Eğer giriş sinyalindeki bir zaman kaydırması çıkış sinyalinde de aynı zaman kaydırması ile sonuçlanırsa sistem zamanda değişmezdir. Yani; eğer  $x[n]$  sisteme giriş sinyali iken

$y[n]$  ayrık zamanlı zamanda değişmeyen sistemden çıkış sinyali ise ,  $x[n-n_0]$  giriş sinyali sisteme uygulandığında  $y[n-n_0]$  sistemden çıkış sinyali olur. Sürekli zamanlı zamanda da bu durum benzerdir. Yani; eğer  $x(t)$  sisteme giriş sinyali iken  $y(t)$  sürekli zamanlı zamanda değişmeyen sistemden çıkış sinyali ise ,  $x(t-t_0)$  giriş sinyali sisteme uygulandığında  $y(t-t_0)$  sistemden çıkış sinyali olur.

**Örnek 3.13.** Aşağıdaki denklem ile tanımlı sürekli zamanlı sistemi ele alalım:

$$y(t) = \sin[x(t)] \quad (3.6.3.1)$$

Bu sistemin zamanda değişmez olup olmadığını kontrol edelim.

**Çözüm:** Bu sistemin zamanda değişmez olup olmadığını belirlemek için her giriş sinyali ve her  $t_0$  zaman kaydırması için çıkış sinyalinin durumunu belirlememiz gerekir.

Bu nedenle ,  $x_1(t)$  sisteme rastgele bir giriş sinyali olsun ve

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)] \quad (3.6.3.2)$$

(3.6.3.2) denklemini  $x_1(t)$  giriş sinyaline karşılık gelen çıkış sinyali olsun. Daha sonra  $x_1(t)$  giriş sinyalini zamanda kaydırarak elde edilen  $x_2(t)$  giriş sinyalini ele alalım.

Yani,  $x_2(t)$  giriş sinyali

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \quad (3.6.3.3)$$

şeklinde yazılır. Bu giriş sinyaline karşılık gelen çıkış sinyali;

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t-t_0)] \quad (3.6.3.4)$$

şeklinde olur. Aynı şekilde (3.6.3.2) denkleminde ,

$$y_1(t-t_0) = \sin[x_1(t-t_0)] \quad (3.6.3.5)$$

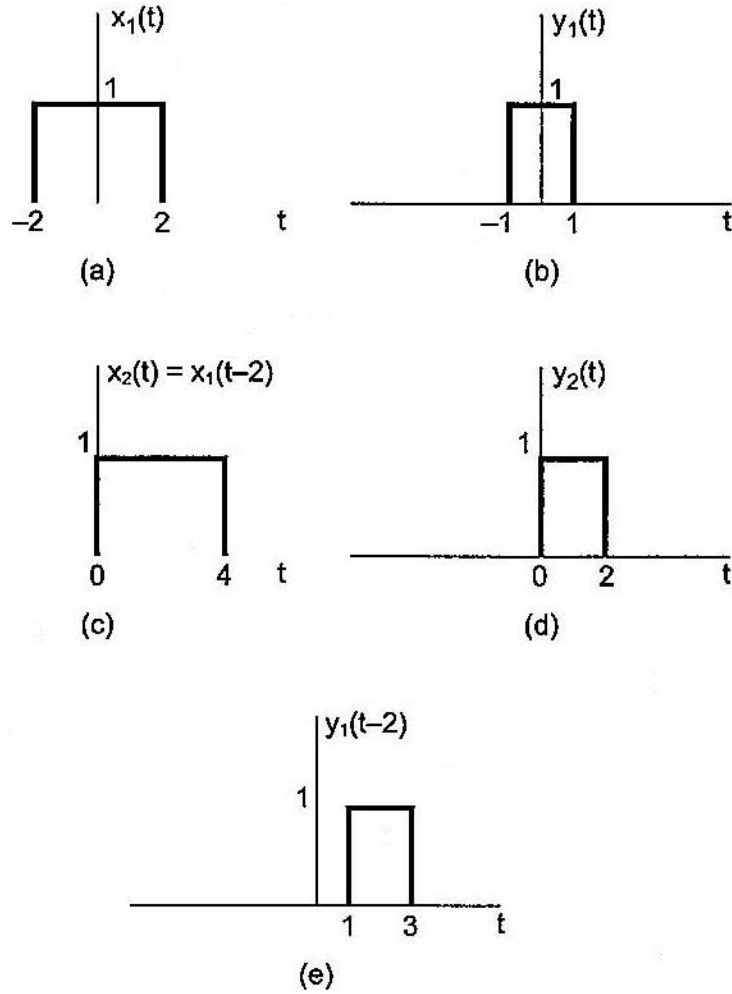
yazılır. (3.6.3.4) ve (3.6.3.5) denklemlerini karşılaştırarak,

$$y_2(t) = y_1(t-t_0) \quad (3.6.3.6)$$

olduğunu görürüz ve bu nedenle sistem zamanda değişmezdir.

**Örnek 3.14.**  $y(t) = x(2t)$  sistemini ele alalım. Bu sistemin zamanda değişmez olup olmadığını kontrol edelim.

**Çözüm:** Bu sistem zamanda ölçeklemeyi gösterir. Yani;  $y(t)$  sinyali  $x(t)$  sinyalinin zamanda sıkıştırılmış bir versiyonudur (2 faktörü ile). Bu durumda sezgisel olarak, giriş sinyalindeki herhangi bir zaman kaydırması da 2 faktörü ile sıkıştırılacaktır ve bu bize sistemin zamanda değişmez olmadığını gösterecektir. Karşı bir örnekle anlatmak gerekirse, Şekil 3.11(a) da gösterilen  $x_1(t)$  giriş sinyalini ve Şekil 3.11(b) de gösterilen  $y_1(t)$  çıkış sinyalini ele alalım. Bu durumda eğer giriş sinyalini 2 birim kaydırırsak [yani, Şekil 3.11(c) de gösterildiği gibi  $x_2(t) = x_1(t-2)$  durumunu ele alalım] sonuç olarak Şekil 3.11(d) de gösterilen  $y_2(t) = x_2(2t)$  çıkış sinyalini elde ederiz. Şekil 3.11(d) ile (e) karşılaştırıldığında ,  $y_2(t) \neq y_1(t-2)$  olduğunu görürüz. Bu nedenle sistem zamanda değişmez değildir.



**Şekil 3.11.** (a) Örnek 3.14 deki sisteme giriş sinyali  $x_1(t)$ ; (b)  $x_1(t)$  sinyaline karşılık gelen  $y_1(t)$  çıkış sinyali; (c) zamanda 2 birim kaydırılmış giriş sinyali  $x_2(t) = x_1(t-2)$ ; (d)  $x_2(t)$  sinyaline karşılık gelen  $y_2(t)$  çıkış sinyali; (e) zamanda 2 birim kaydırılmış çıkış sinyali  $y_1(t-2)$

Doğrusallık (lineerlik) özelliğini sinyaller ve sistemler diliyle şöyle tanımlayabiliriz: Sürekli zamanlı bir sistemde  $x_1(t)$  giriş sinyaline karşılık  $y_1(t)$  çıkış sinyali,  $x_2(t)$  giriş sinyaline karşılık  $y_2(t)$  çıkış sinyali karşılık gelsin. Bu burumda aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise sistem doğrusaldır (lineerdir);

1.  $x_1(t) + x_2(t)$  giriş sinyaline tepki  $y_1(t) + y_2(t)$

2.  $a$  karmaşık bir sabit olmak üzere  $ax_1(t)$  giriş sinyaline tepki  $ay_1(t)$ .

Bu iki özelliğin ilki toplanırlık özelliği olarak bilinir ve ikincisi ölçekleme ve homojenlik özelliği olarak bilinir. Bu tanımı sürekli zamanlı sinyalleri kullanarak yazmamıza rağmen, aynı tanım ayrık zamanlı sinyaller için de geçerlidir.

Doğrusal bir sistemi tanımlayan bu iki özellik tek bir ifadede birleştirilebilir:

Sürekli zamanlıda:  $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$ ,

Ayrık zamanlıda:  $ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$

şeklinde olur. Burada,  $a$  ve  $b$  herhangi iki karmaşık sabittir.

**Örnek 3.15.**  $x(t)$  giriş sinyali,  $y(t)$  çıkış sinyali olup,

$$y(t) = tx(t)$$

ile ilişkili bir  $S$  sistemini ele alalım. Bu sistemin doğrusal olup olmadığını inceleyelim.

**Çözüm:**  $S$  sisteminin doğrusal olup olmadığını belirlemek için, iki rasgele giriş sinyali olan  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  sinyallerini ele alalım. Burada  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  giriş sinyallerine karşılık gelen  $y_1(t)$  ve  $y_2(t)$  çıkış sinyalleri

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

şeklinde yazılır.  $x_3(t)$ ,  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  giriş sinyallerinin doğrusal bir kombinasyonu olsun. Yani  $a$  ve  $b$  rastgele nicelikler olmak üzere,

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

olur. Eğer  $x_3(t)$ ,  $S$  sistemine giriş sinyali ise, bu duruma karşılık gelen çıkış sinyali aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Sonuç olarak, burada  $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$  olma durumu sağlandığından  $S$  sisteminin doğrusal olduğu sonucuna varırız.

**Örnek 3.16.**  $y[n] = 2x[n] + 3$  sisteminin doğrusal olup olmadığını inceleyelim.

**Çözüm:** Birçok şekilde doğrulanabileceği gibi, bu sistem doğrusal değildir. Örneğin bu sistem toplarıklık özelliğine uymaz. Eğer  $x_1[n] = 2$  ve  $x_2[n] = 3$  ise bu durumda :

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9$$

olur. Ancak,

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \text{ sinyaline tepki}$$

$$y_3[n] = 2[x_1[n] + x_2[n]] + 3 = 13$$

olur ve bu değer,

$$y_1[n] + y_2[n] = 16$$

değerine eşit değildir. O halde bu sistem doğrusal değildir.

### 3.6.3.a. Ayrık zamanlı LTI sistemler: Konvolüsyon toplamı

Ayrık zamanlı birim darbenin herhangi bir ayrık zamanlı sinyalin oluşturulmasında nasıl kullanılacağını gözümüzde canlandırırken anahtar fikir, ayrık zamanlı sinyali darbelerin tek başına bir sonucu olarak düşünmektir. Bu sezgisel portrenin nasıl matematiksel bir ifadeye dönüşebileceğini görmek için, Şekil 3.12(a) da gösterilen  $x[n]$  sinyalini ele alalım. Bu şeklin kalan kısımlarında, her darbede ölçeklemenin bir darbenin olduğu anda belirli  $x[n]$  değerine eşit olduğu beş zamanda kaydırılmış, ölçeklenmiş birim darbe sinyalleri gösterilmiştir. Örneğin;

$$x[-2]\delta[n+2] = \begin{cases} x[-2], & n = -2 \\ 0, & n \neq -2 \end{cases}$$

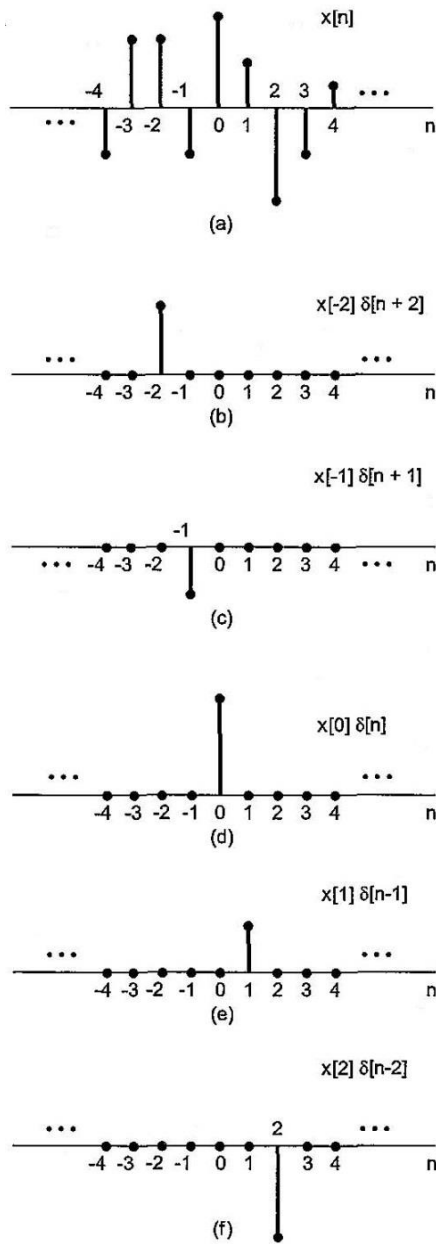
$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$x[2]\delta[n-2] = \begin{cases} x[2], & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Bu nedenle beş dizinin toplamı  $-2 \leq n \leq 2$  için  $x[n]$  olur. Şekil 3.12 bu durumları göstermektedir.



**Şekil 3.12.** Ayrık zamanlı bir sinyalin kaydırma darbelerinin ağırlıklandırılmış toplamıyla ilişkisi

Daha genel olarak, ekstra kaydırma ölçeklenmiş darbeler dahil edilerek şunu yazabiliriz:

$$x[n] = \dots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots$$

Bu toplam daha kısa bir şekilde;

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (3.6.3.a.1)$$

olarak ifade edilir. Bu denklem; rasgele bir sinyalin, lineer kombinasyonda ağırlıkların  $x[k]$  olduğu  $\delta[n-k]$  kaydırılmış birim darbelerin lineer bir kombinasyonu olarak ifadesine karşılık gelir. Örnek olarak,  $x[n] = u[n]$  birim basamağı ele alalım. Bu durumda,  $k < 0$  için  $u[k] = 0$  olduğundan ve  $k \geq 0$  için  $u[k] = 1$  olduğundan, (3.6.3.a.1) denklemi şu hale gelir:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

Doğrusal bir sistemin rasgele bir  $x[n]$  giriş sinyaline tepkisini ele alalım. (3.6.3.a.1) denklemi yoluyla  $x[n]$  giriş sinyalini kaydırma birim darbelerinin doğrusal bir kombinasyonu olarak ifade edebiliriz. Kaydırılmış birim darbesi  $\delta[n-k]$  olan doğrusal sistemin tepkisi  $h_k[n]$  olur. Bu durumda  $x[n]$  giriş sinyaline doğrusal sistemin tepkisi olan  $y[n]$  çıkış sinyali basit olarak, bu temel tepkilerin ağırlıklandırılmış doğrusal kombinasyonudur. Yani; (3.6.3.a.1) formunda gösterilen doğrusal sistemde,  $x[n]$  giriş sinyali ile  $y[n]$  çıkış sinyali şöyle ifade edilebilir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] \quad (3.6.3.a.2)$$

Genellikle,  $h_k[n]$  tepkilerinin  $k$  indisinin farklı değerleri için birbirleriyle ilişkili olmaları gerekmez. Ancak; eğer doğrusal sistem aynı zamanda zamanda değişmez ise, bu durumda zamanda kaydırılmış birim darbelere bu tepkilerin hepsi birbirinin zamanda kaydırılmış versiyonu olduğundan,  $h_k[n]$  tepkisi  $h_0[n]$  tepkisinin zamanda kaydırılmış bir versiyonudur. Yani;

$$h_k[n] = h_0[n-k]$$

olur. Notasyon uygunluğu için  $h_0[n]$  tepkisindeki alt simgeyi kaldırıp birim darbe tepkisini tanımlayacak olursak;

$$h[n] = h_0[n]$$

olur. Yani;  $\delta[n]$  giriş sinyali olduğunda,  $h[n]$  LTI sistemin çıkış sinyalidir. Bu durumda LTI sistemler için (3.6.3.a.2) denklemi şöyle olur:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (3.6.3.a.3)$$

Bu sonuç konvolüsyon toplamı olarak adlandırılır ve (3.6.3.a.3) denkleminin sağ tarafındaki işlem  $x[n]$  ve  $h[n]$  sinyallerinin konvolüsyonu olarak bilinir. Buradaki konvolüsyon işlemi sembolik olarak ,

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.17.**  $x[n]$  ve  $h[n]$  sinyalleri;

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.  $\alpha > 1$  pozitif değerleri için bu sinyaller Şekil 3.13'de gösterilmiştir. Bu iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplayalım.

**Çözüm:** Bu iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplamak için,  $n$  bağımsız değişkeni için beş ayrı aralık almak uygun olur. Bu aralıklar Şekil 3.14'de gösterilmiştir.

**1. aralık:**  $n < 0$  için, sıfırdan farklı  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  noktaları arasında çakışma yoktur ve sonuç olarak,

$$y[n] = 0$$

bulunur.

**2. aralık:**  $0 \leq n \leq 4$  için,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

bulunur.

**3. aralık:**  $4 < n \leq 6$  için,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

bulunur.

**4. aralık:**  $6 < n \leq 10$  için,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

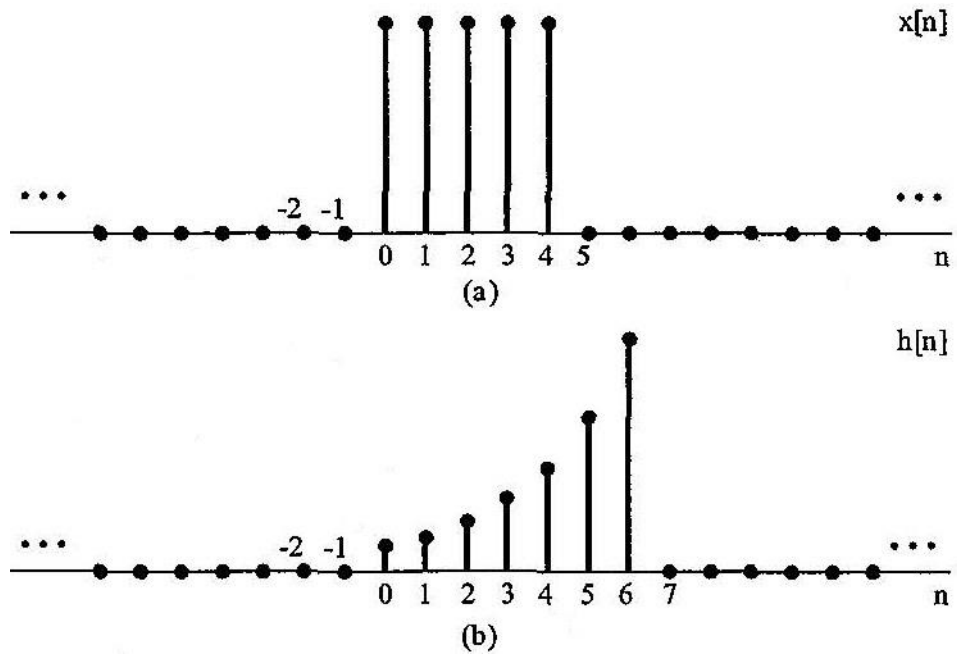
$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1-\alpha}$$

bulunur.

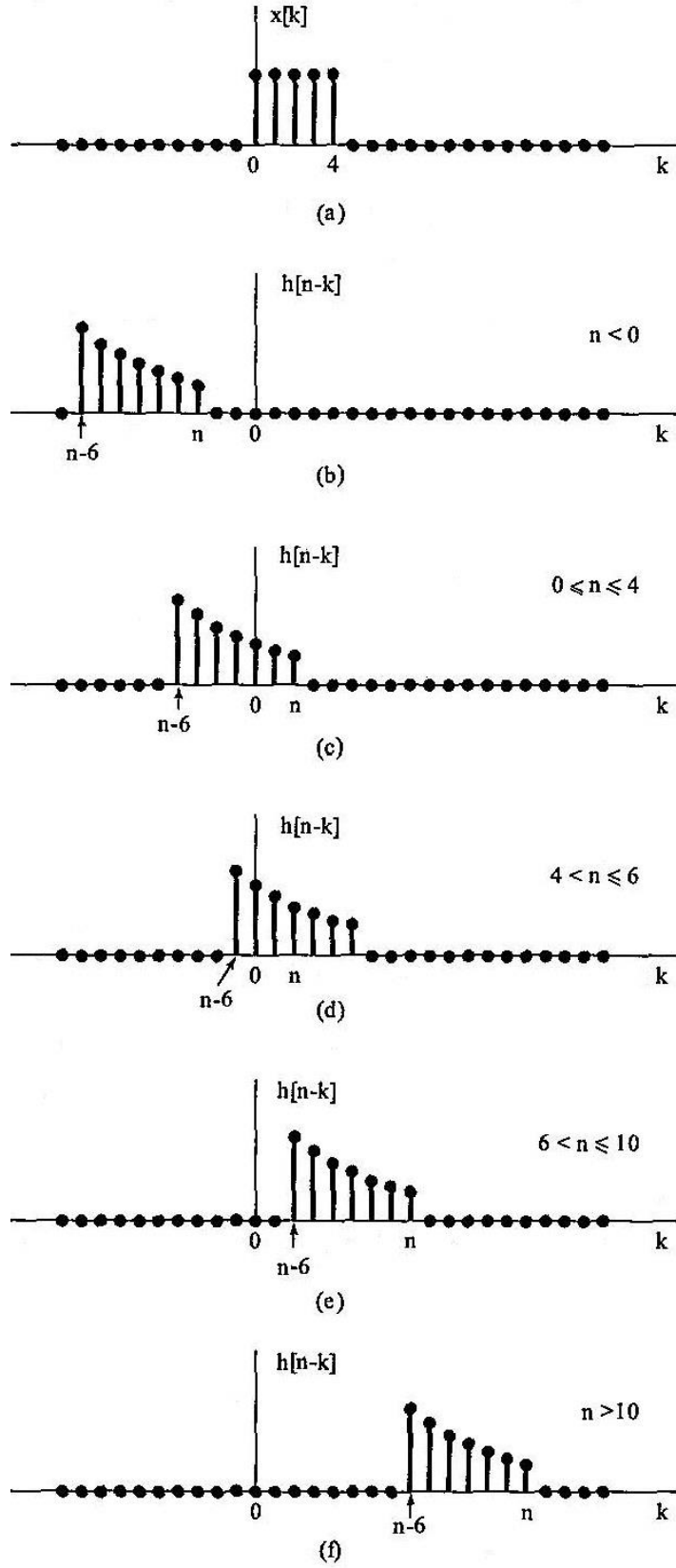
**5. aralık:**  $n > 10$  için, sıfırdan farklı  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  noktaları arasında çakışma yoktur. Bundan dolayı,

$$y[n] = 0$$

bulunur.



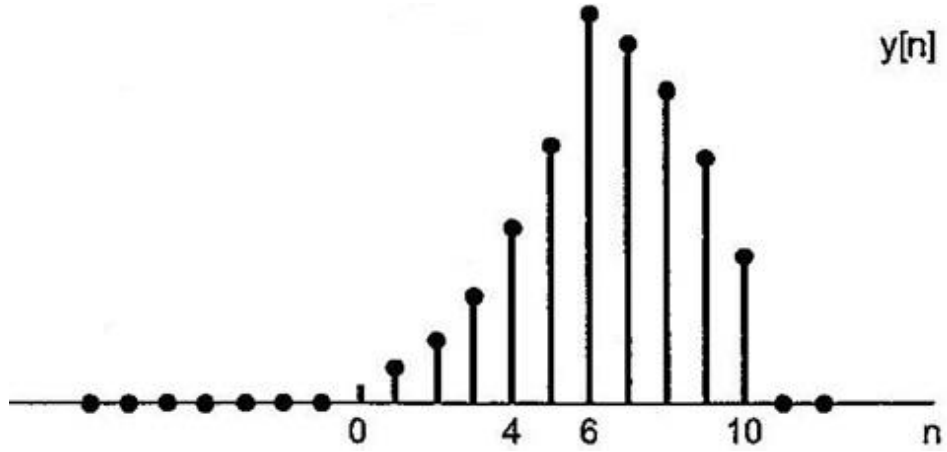
**Şekil 3.13.**  $x[n]$  ve  $h[n]$  sinyallerinin grafiksel yorumu



Şekil 3.14. Örnek 3.17’de gerçekleştirilen konvolüsyonun grafiksel yorumu

Sonuç olarak bu durumu özetlersek; Şekil 3.15’de gösterilen, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$



Şekil 3.15. Örnek 3.17 için elde edilen  $y[n]$  ayrık zamanlı sinyalinin gösterimi

Örnek 3.18.  $x[n]$  ve  $h[n]$  sinyalleri;

$$x[n] = \begin{cases} -1, & -3 \leq n \leq 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$h[n] = \begin{cases} n-1, & -5 \leq n \leq 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu sinyaller Şekil 3.16'da gösterilmiştir. Bu iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplayalım.

**Çözüm:** Bu iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplamak için,  $n$  bağımsız değişkeni için beş ayrı aralık almak uygun olur. Bu aralıklar Şekil 3.17'de gösterilmiştir.

**1. aralık:**  $0 < n$  için, sıfırdan farklı  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  noktaları arasında çakışma yoktur ve sonuç olarak,

$$y[n] = 0$$

bulunur.

**2. aralık:**  $-3 \leq n \leq 0$  için,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} k-n+1, & n \leq k \leq 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=n}^0 k-n+1 \\ &= \frac{-n+1}{2} \cdot n - n(-n+1) + (-n+1) \\ &= \frac{(2-n) \cdot (1-n)}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

**3. aralık:**  $-5 \leq n < -3$  için,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} k-n+1, & -3 \leq k \leq 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-3}^0 k-n+1 \\ &= \frac{4}{2} \cdot (-3) - 4n + 4 \\ &= -6 - 4n + 4 \end{aligned}$$

bulunur.

**4. aralık:**  $-8 \leq n < -5$  için,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} k-n+1, & -3 \leq k \leq n+5 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

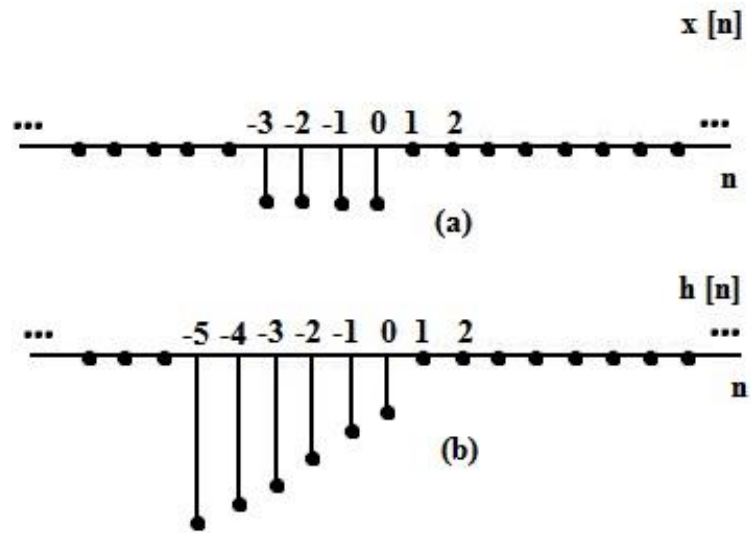
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-3}^{n+5} k-n+1 \\ &= \frac{n+9}{2} \cdot (n+2) - n(n+9) + (n+9) \\ &= \frac{(n+9) \cdot (-n+4)}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

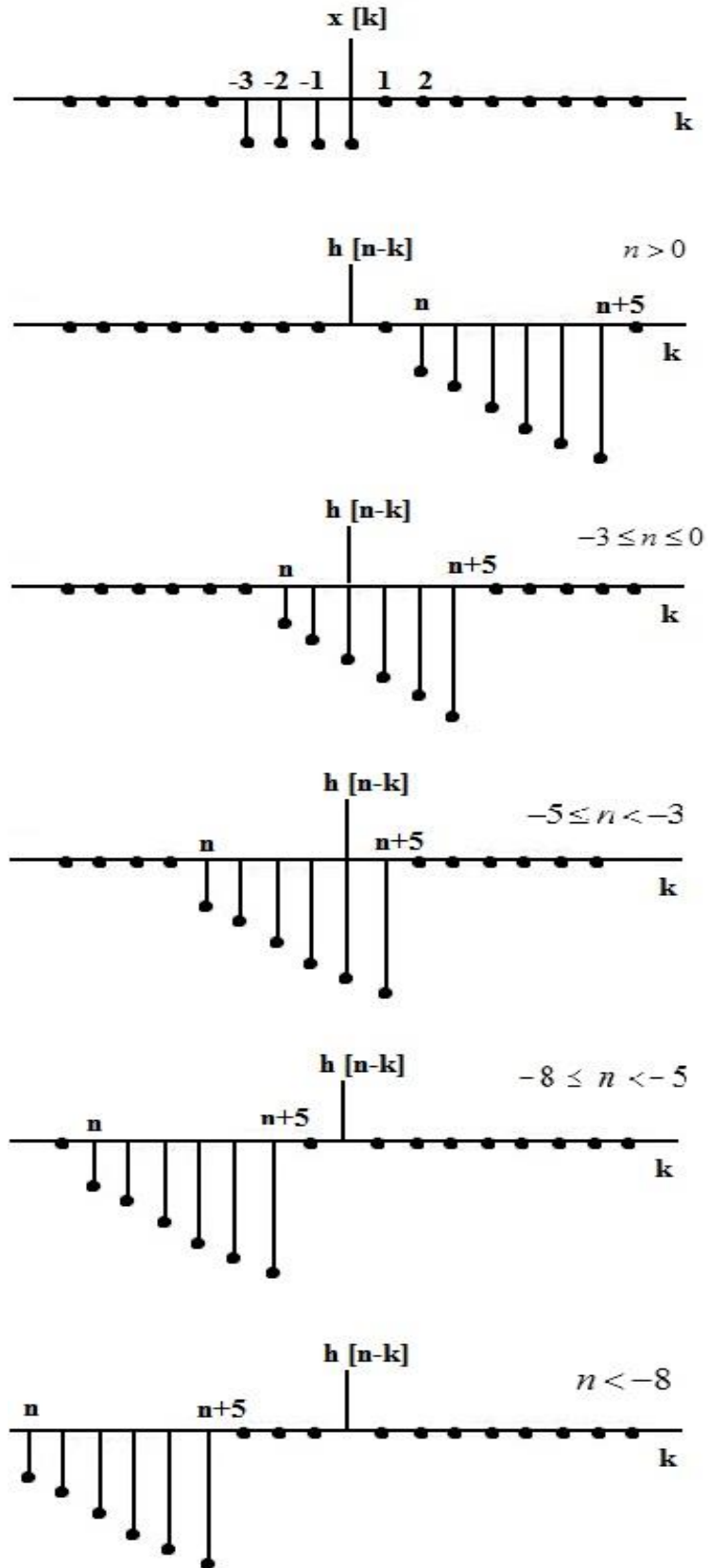
**5. aralık:**  $n < -8$  için, sıfırdan farklı  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  noktaları arasında çakışma yoktur. Bundan dolayı,

$$y[n] = 0$$

bulunur.



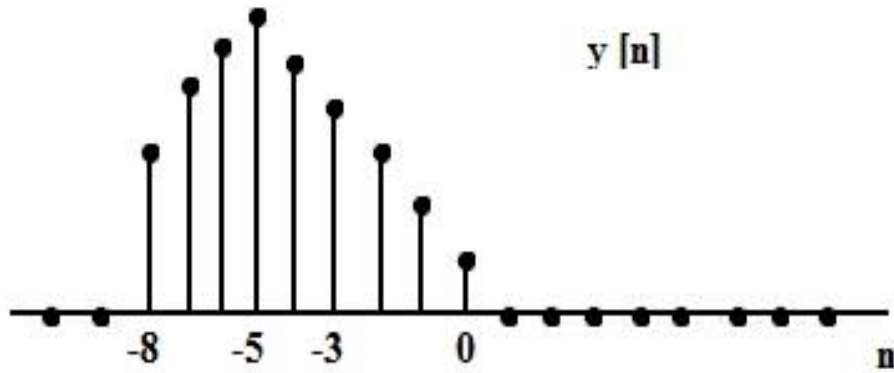
Şekil 3.16.  $x[n]$  ve  $h[n]$  sinyallerinin grafiksel yorumu



Şekil 3.17. Örnek 3.18’de gerçekleştirilen konvolüsyonun grafiksel yorumu

Sonuç olarak bu durumu özetlersek; Şekil 3.18’de gösterilen, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & 0 < n \\ \frac{(2-n)(1-n)}{2}, & -3 \leq n \leq 0 \\ -6-4n+4, & -5 \leq n < -3 \\ \frac{(n+9) \cdot (-n+4)}{2}, & -8 \leq n < -5 \\ 0, & n < -8 \end{cases}$$



Şekil 3.18. Örnek 3.18 için elde edilen  $y[n]$  ayrık zamanlı sinyalinin gösterimi

### 3.6.3.b. Sürekli zamanlı LTI sistemleri: Konvolüsyon integrali

Konvolüsyon integral,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.6.3.b.1)$$

şeklinde tanımlanır. Konvolüsyon integrali olarak adlandırılan (3.6.3.b.1) denklemi, (3.6.3.a.3) konvolüsyon toplamı denkleminin sürekli zamanlı eşidir ve sürekli zamanlı bir LTI sistemin bir birim darbeye tepkisi olarak ifade edilir. (3.6.3.b.1) denkleminin

sağ tarafındaki ifade  $x(t)$  ve  $h(t)$  sinyallerinin konvolüsyonu olarak bilinir. Bu durum sembolik olarak,

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.19:**  $x(t)$  ve  $h(t)$  sürekli zamanlı sinyaller olmak üzere:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu iki sinyalin konvolüsyonunu bulalım.

**Çözüm:** Bu iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplamak için,  $t$  bağımsız değişkeni için beş ayrı aralığı ele almak uygun olur.

**1. aralık:**  $t < 0$  için,  $x(\tau)$  ve  $h(t - \tau)$  sinyallerinin sıfırdan farklı oldukları tüm yerlerde  $x(\tau)h(t - \tau) = 0$  olduğundan,

$$y(t) = 0$$

bulunur.

**2. aralık:**  $0 < t < T$  için,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} (t-\tau), & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} t^2$$

bulunur.

**3. aralık:**  $T < t < 2T$  için,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} (t-\tau), & 0 < \tau < T \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$y(t) = \int_0^T (t-\tau) d\tau = tT - \frac{1}{2} T^2$$

bulunur.

**4. aralık:**  $2T < t < 3T$  için,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} (t-\tau), & t-2T < \tau < T \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

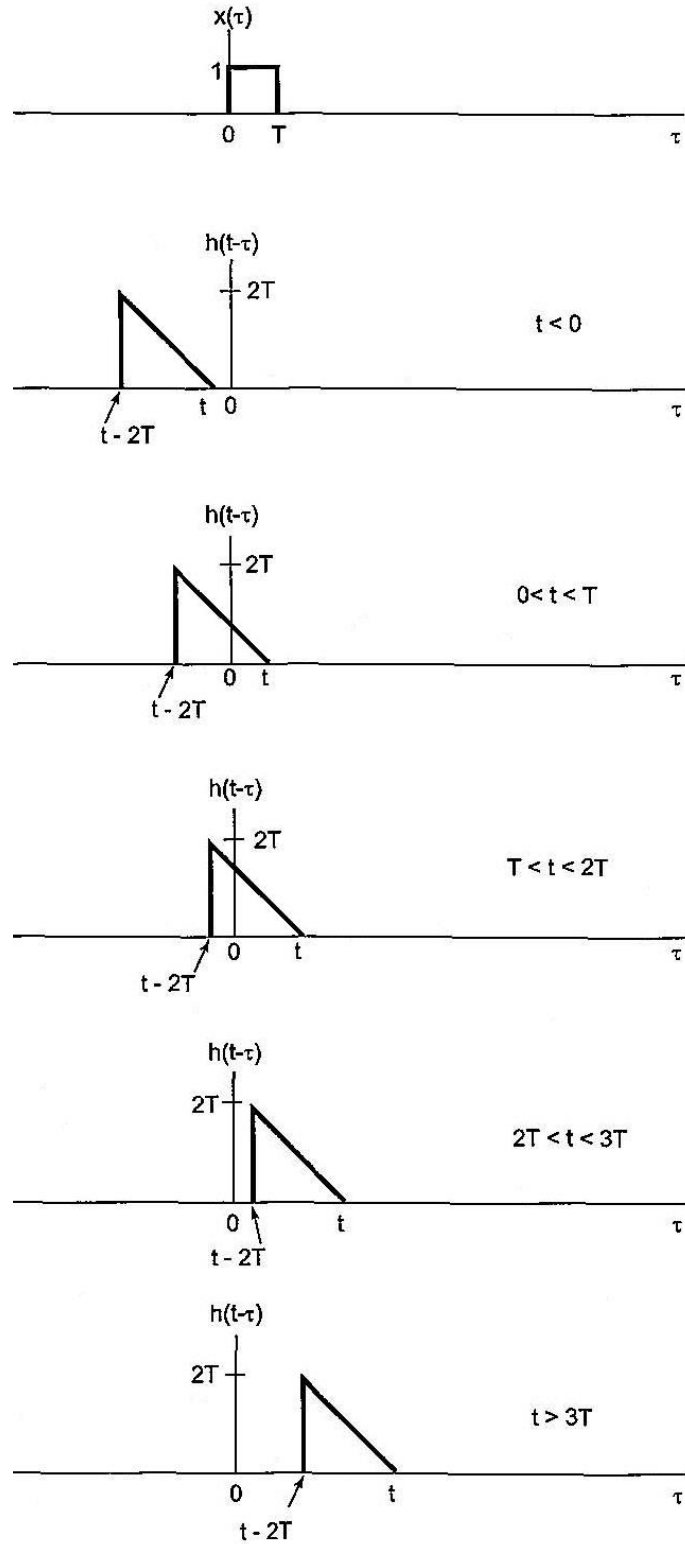
$$y(t) = \int_{t-2T}^T (t-\tau) d\tau = -\frac{1}{2}t^2 + tT + \frac{3}{2}T^2$$

bulunur.

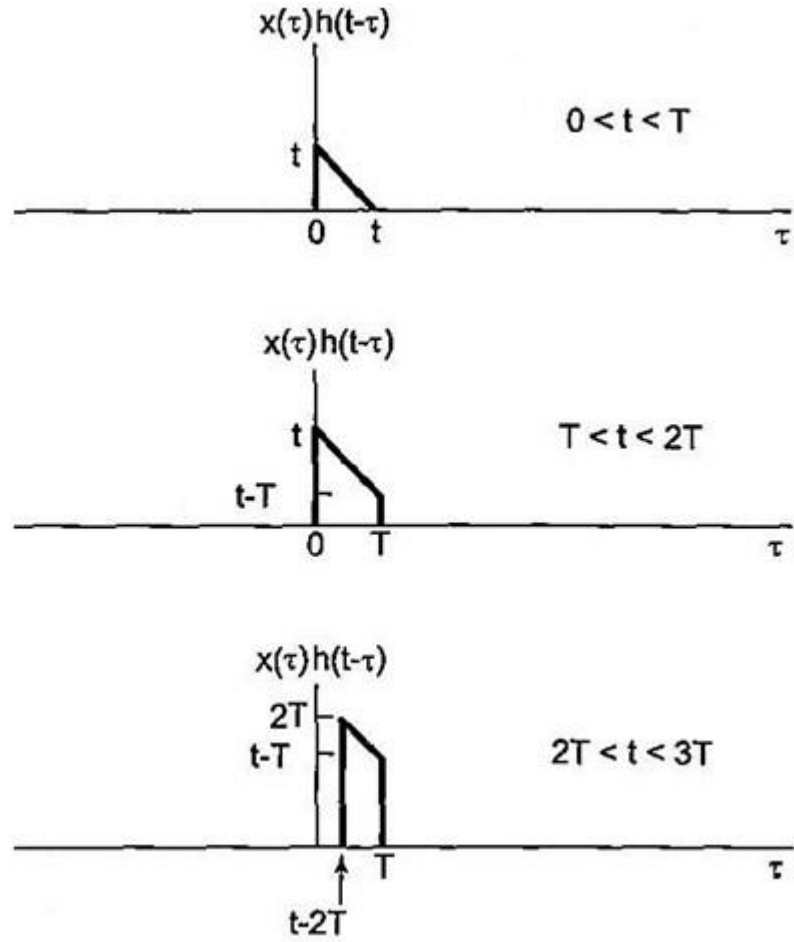
**5. aralık:**  $t > 3T$  için,  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  sinyallerinin sıfırdan farklı oldukları tüm yerlerde  $x(\tau)h(t-\tau) = 0$  olduğundan,

$$y(t) = 0$$

bunudur.



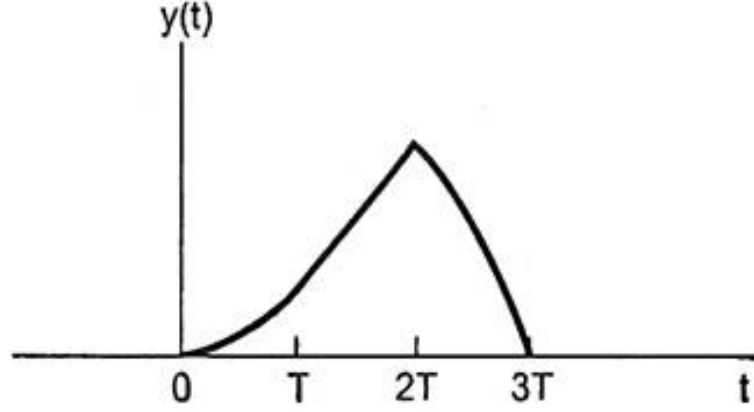
**Şekil 3.19.** Örnek 3.19 için,  $t$  bağımsız değişkeninin farklı değerleri için  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  sinyalleri



**Şekil 3.20.** Örnek 3.19 için,  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımının sıfırdan farklı olduğu durumlar

Sonuç olarak bu durumu özetlersek; Şekil 3.21’de gösterilen, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases}$$



**Şekil 3.21.** Örnek 3.19 için elde edilen  $y(t)$  sürekli zamanlı sinyalinin gösterimi

**Örnek 3.20:**  $x(t)$  ve  $h(t)$  sürekli zamanlı sinyaller olmak üzere:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & -T < t < 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu sinyaller Şekil 3.22' de gösterilmiştir. Bu iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplayalım.

**Çözüm:** Bu iki sinyalin konvolüsyonunu hesaplamak için,  $t$  bağımsız değişkeni için beş ayrı aralık almak uygun olur. Bu aralıklar Şekil 3.23'de gösterilmiştir.

**1. aralık:**  $0 < t$  için,  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  sinyallerinin sıfırdan farklı oldukları tüm yerlerde  $x(\tau)h(t-\tau) = 0$  olduğundan,

$$y(t) = 0$$

bulunur.

**2. aralık:**  $-\frac{T}{2} < t < 0$  için,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} \frac{\tau-t}{2}, & t < \tau < 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$y(t) = \int_t^0 \frac{\tau-t}{2} d\tau = \frac{\tau^2}{4} - \frac{t}{2}\tau \Big|_t^0 \\ = \frac{t^2}{4}$$

bulunur.

**3. aralık:**  $-T < t < -\frac{T}{2}$  için,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} \frac{\tau-t}{2}, & -\frac{T}{2} < \tau < 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$y(t) = \int_{-T/2}^0 \frac{\tau-t}{2} d\tau = \frac{\tau^2}{4} - \frac{t}{2}\tau \Big|_{-T/2}^0$$

$$= -\frac{tT}{4} - \frac{T^2}{16}$$

bulunur.

**4. aralık:**  $-\frac{3T}{2} < t < -T$  için,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} \frac{\tau-t}{2}, & -\frac{T}{2} < \tau < t+T \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup,

$$y(t) = \int_{-T/2}^{t+T} \frac{\tau-t}{2} d\tau = \frac{\tau^2}{4} - \frac{t}{2}\tau \Big|_{-T/2}^{t+T}$$

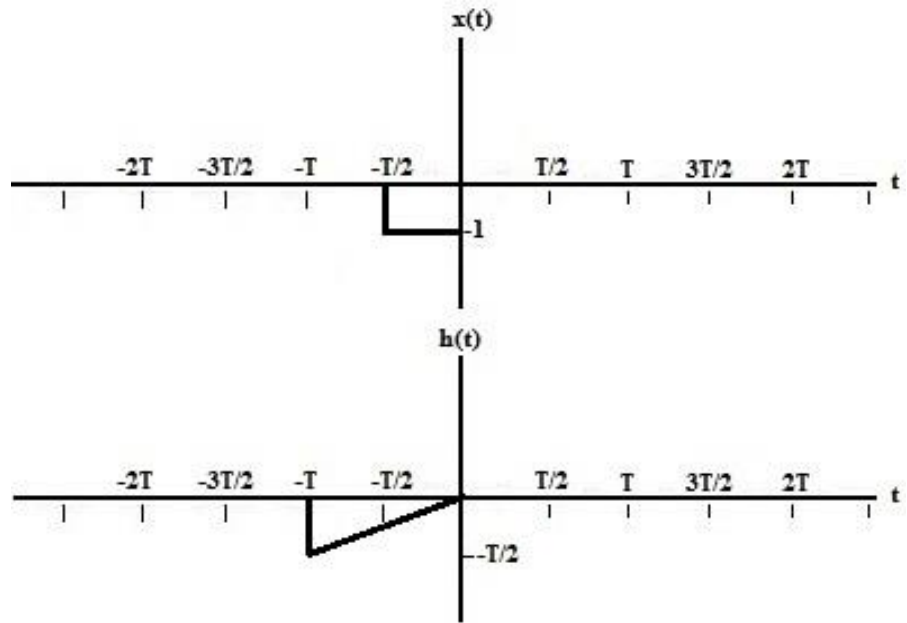
$$= -\frac{t^2}{4} - \frac{tT}{4} + \frac{3T^2}{16}$$

bulunur.

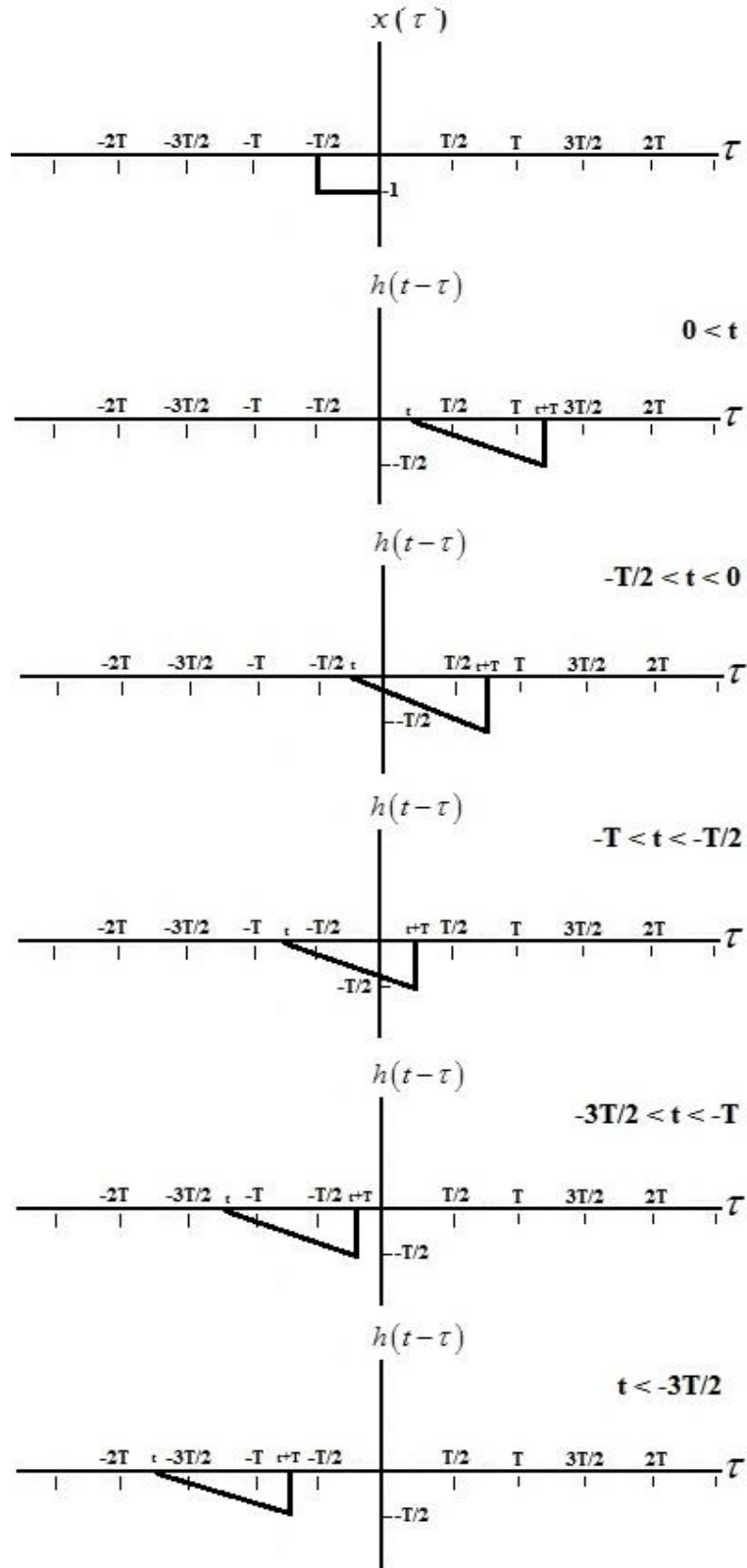
**5. aralık:**  $t < -\frac{3T}{2}$  için,  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  sinyallerinin sıfırdan farklı oldukları tüm yerlerde  $x(\tau)h(t-\tau) = 0$  olduğundan,

$$y(t) = 0$$

bunulur.



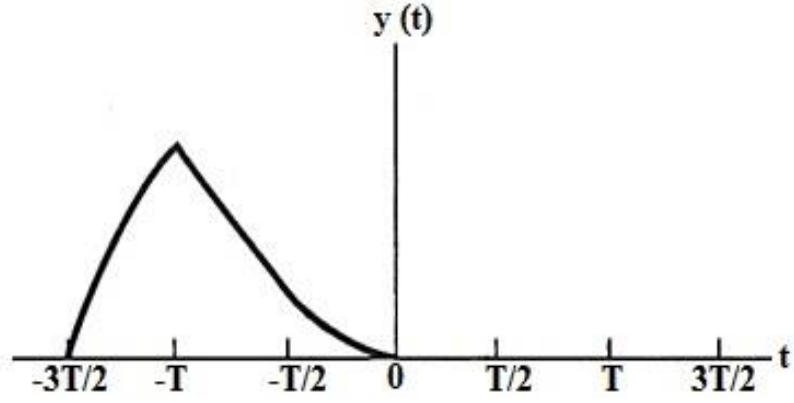
Şekil 3.22.  $x(t)$  ve  $h(t)$  sinyallerinin grafiksel yorumu



**Şekil 3.23.** Örnek 3.20 için,  $t$  bağımsız değişkeninin farklı değerleri için  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  sinyalleri

Sonuç olarak bu durumu özetlersek; Şekil 3.24'de gösterilen, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \\ \frac{t^2}{4}, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -\frac{tT}{4} - \frac{T^2}{16}, & -T < t < -\frac{T}{2} \\ -\frac{t^2}{4} - \frac{tT}{4} + \frac{3T^2}{16}, & -\frac{3T}{2} < t < -T \\ 0, & t < -\frac{3T}{2} \end{cases}$$



Şekil 3.24. Örnek 3.20 için elde edilen  $y(t)$  sürekli zamanlı sinyalinin gösterimi

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Konvolüsyona ait bütün uygulama alanları bir araya getirilmeye çalışılmıştır. Önce konvolüsyonun tanımı ve özellikleri incelenip Laplace, Fourier ve Mellin dönüşümleri gibi bazı integral dönüşümlerindeki kullanımı ele alınmıştır. Sonra başlangıç değeri problemlerine geçilerek burada da konvolüsyon kullanımıyla çözüm elde edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra bazı integral denklemler için çözümün yine konvolüsyon yardımıyla nasıl elde edilebileceği açıklanmıştır. Bu teorik araştırmalardan sonra popüler uygulama sahalarından biri olan sinyaller ve sistemler alanında herhangi bir giriş sinyalinin konvolüsyon yardımıyla nasıl yeni bir çıkış sinyalini oluşturacağı konusu incelenmiştir. Mevcut çalışmalara yeni örnekler eklenmiştir. Böylece konvolüsyonun hem teorik bilimlerde hem de uygulamalı bilimlerdeki özellikleri bir arada çalışılmıştır.

## 5. SONUÇ

Tezde geniş uygulama alanlarına sahip olan konvolüsyon teorisine ait bütün özellikler ele alınmıştır. Matematik, Fizik ve Mühendislik alanlarında kullanılan konvolüsyona ait özellikler ve çalışmalar derlenerek bir araya getirilmiş ve yeni örnekler oluşturularak konunun daha iyi anlaşılması sağlanmaya çalışılmıştır. Konvolüsyon konusunda çalışacak diğer bilim insanlarının teorik ve uygulama açısından kolayca faydalanabilecekleri bir çalışma ortaya çıkarılmıştır.

**KAYNAKLAR**

- Aliyev, G.G., 1995. Kısmı Türevli Diferansiyel Denklemler, Milli Eğitim Dizisi, İstanbul.
- Brown, J.W., Churchill R.V., 1993, Fourier Series and Boundary Value Problems, Fifth Edition, Mc Graw-Hill Inc.
- Davies, B., 1978. Integral Transforms and Their Applications, Springer-Verlag Newyork Inc., Fifth Edition, Newyork.
- Debnath, L., 1995. Integral Transforms and Their Applications, CRC Pres Inc.
- Doetsch, G., 1943. Theorieund Anwendung der Laplace-Transformation, New York: Dover Publications, Inc.
- Folland, G.B., 1989. Harmonic Analysis in Phase Space, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- Gardner, M.F. and Barnes, J.L., 1945. Transients in linear systems studied by the Laplace transformation, Volume 1: Lumped-costant systems, New York: John Wiley and Sons. Inc., London.
- Gonzalez V.-Enrique A., 1995. Fourier Analysis and Boundary Value Problems, Academic Pres Inc.
- Greiner, P.S. and Stein, E. M.. 1977. Estimates for the Neumann Problem, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- Kadioğlu, E. ve Kamali, M., 1999. Genel Matematik, Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum.
- Kırdar, D., 2007. Bazı İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Krasnov, M., Kiselev, A., Makeronko, G., 1976. İntegral Denklemler, Çeviri: Cevdet Cerit, İstanbul.
- Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II, Seçkin Yayınevi, Ankara.
- Oppenheim, A.V., Willsky, A.S., Navab, S.H., 2011. Sinyaller ve Sistemler, Çeviren: Mustafa Kök, Akademi Yayın Hiz., Ankara.
- Özer, M.N. ve Eser D., 2002. Diferansiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları), Osmangazi Üniversitesi, Birlik Ofset, Eskişehir.
- Sneddon, I.N., 1972. The Use of Integral Transforms, Simson Profesör of Mathematics, University of Glasgow.
- Stuart, R.D., 1961. An Introduction to Fourier Analysis, Northeastern University, Boston, Mass., U.S.A.
- Subaşı, M., 2002. A Stability Estimate for Convolution Equation, Applied Mathematics and Computation, 131/1, 195-200.
- Yarasa, R., 1976. Fourier Analizi, İ.D.M.M.A. Yayınları, Sayı: 131, Çağlayan Basımevi, İstanbul.
- Yıldız, B. ve Bayram, M., 1997. Adi Diferansiyel Denklemler, Erzurum.
- Yılmaz, A., 2008. İntegral Dönüşümleri ve İstatistiksel Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

## **ÖZGEÇMİŞ**

1987 yılında Artvin'in Borçka ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Borçka'da tamamladı. Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans programına başladı.