

**DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN
TERS NODAL PROBLEM**

Sertaç GÖKTAŞ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU
TEMMUZ-2013**

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sertaç GÖKTAŞ

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

TEMMUZ-2013

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sertaç GÖKTAŞ

(111121102)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Haziran 2013

TEMMUZ-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM


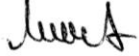

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sertaç GÖKTAŞ

(111121102)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Haziran 2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 5 Temmuz 2013

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.) 
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü.) 
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü.) 

TEMMUZ-2013

ÖNSÖZ

Bilimi ve bilim insanını destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' na yurtiçi yüksek lisans burs desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın hazırlanmasında engin ilminden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı sayın hocam Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU 'na ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam sayın Arş. Gör. Dr. Emrah YILMAZ'a ve değerli dostum matematik öğretmeni Hakan UYSAL'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Sertaç GÖKTAŞ

ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. Giriş	1
1.1. Genelleştirilmiş Trigonometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri	2
2. p –Laplacian Difüzyon Operatörü için Ters Nodal Problem	17
2.1. Nodal Parametreler için Asimptotik İfadeler	18
3. p –Laplacian Difüzyon Operatörü için Ters Nodal Problemin Lipschitz Kararlılığı.....	29
4. Sonuç	35
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM

Sertaç GÖKTAŞ

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2013, Sayfa: 38

Bu tez üç bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, tez içerisinde kullanılacak tanımlara ve teoremlere yer verilerek, genelleştirilmiş sinüs fonksiyonun genel özellikleri ile bu fonksiyonla ilgili bazı temel teorem ve lemmalar verilmiştir. Ayrıca 1-boyutlu p -Laplacian denklemi için Prüfer dönüşümü tanımlanmış ve bu dönüşümün bazı özellikleri ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, p -Laplacian difüzyon operatörü için ters nodal problem Dirichlet sınır koşulları altında çözülmüş ve bu operatör için Prüfer dönüşümü tanımlanarak özdeğerler ve nodal parametrelerin asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Buna ilaveten p -Laplacian difüzyon denklemindeki q potansiyel fonksiyonu için bir yapılandırma formülü bulunmuştur.

Üçüncü bölümde, p -Laplacian difüzyon operatörünün Lipschitz kararlılığı, metrik uzaylar arasında bir homeomorfizm kurularak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Sinüs Fonksiyonu, Prüfer Dönüşümü, Ters Nodal Problem, p -Laplacian Difüzyon Operatörü, Lipschitz Kararlılık.

SUMMARY

Master's Thesis

INVERSE NODAL PROBLEM FOR DIFFUSION OPERATOR

Sertaç GÖKTAŞ

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2013, Pages: 38

This thesis is arranged in three chapters.

In the first chapter, some concepts used in this thesis are given and general properties of generalized sine function, some theorems and lemmas that are concerning this function were given. Then, Prüfer substitution for one dimensional p –Laplacian equation is defined and some properties of this substitution are explained.

In the second chapter, inverse nodal problem for p –Laplacian diffusion operator is solved with Dirichlet boundary conditions. And a Prüfer substitution for this operator is defined. Furthermore, Asymptotic formulas for eigenvalues and nodal parameters are obtained by using this substitution. Finally, a reconstruction formula for potential function q is given.

In the third chapter, Lipschitz stability of diffusion operator is studied by using a homeomorphism between two metric spaces.

Key Words: Generalized Sine Function, Prüfer Substitution, Inverse Nodal Problem, p – Laplacian Diffusion Operator, Lipschitz Stability.

SEMBOLLER LİSTESİ

- \mathbb{N} : Doğal sayılar kümesi
- \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
- \mathbb{R}^n : n –boyutlu Öklid uzayı
- \mathbb{C} : Kompleks sayılar kümesi
- $L_2[a, b]$: $[a, b]$ aralığında tanımlı karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
- $L_1[a, b]$: $[a, b]$ aralığında tanımlı integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
- $C[a, b]$: $[a, b]$ aralığında sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonlar uzayı
- $W_1^2(\Omega)$: Sobolev uzayı
- q : Potansiyel fonksiyon
- λ_n : n . özdeğer
- x_i^n : i . nodal nokta
- l_i^n : Ardışık iki nodal nokta arasındaki uzaklık
- O : Sınırlı değerler
- o : Sonsuz küçük değerler
- $S_p(x)$: Genelleştirilmiş *sinüs* fonksiyonu
- $C_p(x)$: Genelleştirilmiş *cosinüs* fonksiyonu
- $\hat{\pi}_p$: Genelleştirilmiş Pi sayısı
- $B(m, n)$: Beta Fonksiyonu
- $\Gamma(n)$: Gamma Fonksiyonu
- Ω_{dif} : Difüzyon operatörü için tüm q potansiyel fonksiyonlarının uzayı
- Σ_{dif} : Difüzyon operatörü için tüm mümkün nodal noktaların uzayı
- \sim : Denklik bağıntısı

1. GİRİŞ

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla y|^{p-2} \nabla y) + q(x) |y|^{p-2} y = \lambda w(x) |y|^{p-2} y, \Omega \text{ üzerinde} \\ y = 0, \partial\Omega \text{ sınırında} \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklindeki p -Laplacian özdeğer problemi son zamanlarda oldukça ilgi çekici bir konu haline gelmiştir. Burada $p > 1$ ve $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ şeklindedir. Bu tip özdeğer problemleri daha önceleri Elbert ve Otani (Elbert, 1979; Otani, 1984) tarafından önerildi ve oldukça ilgi çekti. Daha sonraki yıllarda homojen özdeğer problemlerinin çeşitli sınıflarının birçok genelleştirmesi yapıldı.

p -Laplacian operatörünün birçok özelliği ortaya konulmuştur (Binding ve Rynne, 2008; Law, Lian ve Wang, 2009; Cheng ve Lian, 2011). Bunlardan bazıları $p = 2$ lineer durumuna benzerdir. Örneğin; p -Laplacian için Sturm-Liouville teorisi, p -Laplacian için bir boyutta karşılaştırma teoremi, 1-boyutlu durumda bu şekildedir. (1.1) problemi; $\Omega = (0, 1)$ olması halinde aşağıdaki probleme dönüştür.

$$\begin{cases} -\left(|y'|^{p-2} y'\right)' = (p-1)(\lambda w(x) - q(x)) |y|^{p-2} y, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

(1.2) probleminin özdeğerleri, $w(x) \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olması durumunda açık olarak

verilebilir. Bu problemin özdeğerleri, $\hat{\pi}_p = \frac{2\frac{\pi}{p}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$ olmak üzere

$$\lambda_n = (n\hat{\pi}_p)^p, n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. Bu özdeğerlerle ilişkili özfonksiyon $S_p(x)$ ile gösterilir (Wang, 2010). Özdeğerler ve nodal parametrelerin detaylı asimptotik ifadelerini verebilmek için $S_p(x)$ fonksiyonunun bazı detaylı özellikleri gereklidir. $S_p(x)$ in temel özellikleri Elbert ve Lindqvist'in çalışmalarında bulunabilir (Elbert, 1979; Lindqvist, 1993).

$S_p(x)$ fonksiyonu kullanılarak, Prüfer tipinde dönüşümler tanımlanabilir. Bu dönüşümler altında, p -Laplacian için Sturm-Liouville teorisinde özdeğerler, nodal parametreler ve q potansiyeli için yapılandırma formülü daha kolay bir şekilde elde edilebilir.

Ayrıca bu yapılandırma formülü kullanılarak p -Laplacian difüzyon operatörü için ters nodal problemin kararlılığı incelenilebilir.

1.1. Genelleştirilmiş Trigonometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri

Trigonometrik fonksiyonlar elementer fonksiyonların en önemli sınıflarından biridir. Bu fonksiyonları kullanarak geometrik problemler, kompleks analitik problemler ve Fourier serilerini içeren problemler çözülebilir. Altı geometrik fonksiyonun tamamı, *Sinüs* ve *Cosinüs* fonksiyonları ile tanımlanabilir. Aslında; tüm bu fonksiyonların özellikleri

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x, & \sin(0) &= 0, \\(\cos x)' &= -\sin x, & \cos(0) &= 1,\end{aligned}$$

diferensiyel denklem özellikleri yada

$$x = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

integral özelliği kullanılarak elde edilir (Chen, 2008). Gerçekten geleneksel Öklid uzayındaki *sinüs* ve *cosinüs* fonksiyonları aşağıdaki birinci mertebeden başlangıç koşullu diferensiyel denklem sisteminin çözümü olarak tanımlanabilir.

$$\begin{cases} y' = x, & y(0) = 0, \\ x' = -y, & x(0) = 1, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Bu denklem aşağıdaki ikinci mertebeden denklem sistemine denktir. Yukarıdaki eşitlikler t ye göre türetilirse

$$\begin{cases} y'' = x' = -y \implies y'' + y = 0, \\ x'' = -y' = -x \implies x'' + x = 0, \end{cases}$$

ve başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}y'(0) &= x(0) = 1 \implies y'(0) = 1, \\x'(0) &= -y(0) = 0 \implies x'(0) = 0,\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (1.1.1) sisteminde birinci denklem y ile, ikinci denklem x ile çarpılıp taraf taraf toplanırsa

$$yy' + xx' = yx + (-yx) = 0,$$

ve

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) = 0,$$

elde edilir. Buradan; her iki tarafın t ye göre integrali alınırsa

$$x^2 + y^2 = c, (c = 1),$$

olur. Pisagor eşitliğinden

$$\sin t = y(t), \cos t = x(t),$$

olmak üzere

$$|\sin t|^2 + |\cos t|^2 = 1,$$

elde ederiz. *Sinüs* fonksiyonu aynı zamanda

$$\sin^{-1} t = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds, 0 \leq t \leq 1, \\ -\int_0^{-t} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds, -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir (Wei, Liu ve Elgindi, 2012).

Aşağıda *sinüs* ve *cosinüs* fonksiyonlarının bazı temel özellikleri verilmiştir (Chen, 2008).

1) Pisagor trigonometrik eşitliği

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2) Toplam açı formülleri

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

3) Türev formülleri

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$(\sin x)'' + \sin x = 0,$$

$$(\cos x)'' + \cos x = 0.$$

4) Simetrik ve periyodiklik özelliği

a)

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos(x).$$

b)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

c)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

d)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

e)

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x, \cos(2\pi - x) = \cos x.$$

5) İntegrasyon formülleri

$$x = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, |x| = \int_{\cos x}^1 (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Tanım 1.1.1. (Öklid Sayısı)

$$\pi = 2 \sin^{-1}(1) = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - s^2)}} ds,$$

sayısına *Öklid sayısı* denir. Bu, $x^2 + y^2 = 1$ dairesinin alanıdır (Wei, Liu ve Elgindi, 2012).

David Shelupsky'nin genelleştirilmiş *sinüs* fonksiyonu ile ilgili tanımı diferensiyel denklem yaklaşımına dayanmaktadır. Son yıllarda trigonometrik fonksiyonların bazı genelleştirilmişleri verilmiştir. $p > 1$ olmak üzere genelleştirilmiş *sinüs* fonksiyonu $S_p(x)$ ile, genelleştirilmiş *cosinüs* fonksiyonu $C_p(x)$ ile gösterilir.

Bu fonksiyonlar için yukarıdaki (5) integrasyon formülleri

$$x = \int_0^{S_p(x)} (1 - |t|^p)^{-\frac{1}{p}} dt, |x| = \int_{C_p(x)}^1 (1 - t^p)^{-\frac{1}{p}} dt,$$

şekline gelir (Chen, 2008). $p = 2$ olduğu zaman bu formüller klasik *sinüs* ve *cosinüs* formüllerine dönüşür. Bununla birlikte yukarıdaki tanımlar $p > 1$ için

geçerlidir. Benzer şekilde bir çok trigonometrik özellik elde edilir. İlk olarak

$$\phi(\varepsilon) = |\varepsilon|^{p-2} \varepsilon, p \in \mathbb{R}^+,$$

kuvvet fonksiyonu olsun.

$$\sin_p(t) = y(t), \cos_p(t) = x(t),$$

alınsın. Burada $x(t)$ ve $y(t)$

$$\begin{cases} y' = \phi(x), y(0) = 0, \\ x' = -\phi(y), x(0) = 1, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

lineer olmayan başlangıç değer probleminin çözümleridir. (1.1.2) ifadesinde ilk denklem $\phi(y)$ ile, ikinci denklem $\phi(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{cases} \phi(y)y' = \phi(y)\phi(x), \\ \phi(x)x' = -\phi(x)\phi(y), \end{cases}$$

ve

$$\phi(y)y' + \phi(x)x' = 0,$$

bulunur ki burada

$$\phi(x) = |x|^{p-2} x, \quad \phi(y) = |y|^{p-2} y,$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} |y|^{p-2} yy' + |x|^{p-2} xx' &= 0 \\ |y|^{p-1} y' + |x|^{p-1} x' &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{p} y^p + \frac{1}{p} x^p \right\} &= 0 \\ |x(t)|^p + |y(t)|^p &= 1, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

denkleminde *genelleştirilmiş Pisagor eşitliği* denir ve $\sin_p(t) = y(t)$ ve $\cos_p(t) = x(t)$ olduğundan

$$|\sin_p(t)|^p + |\cos_p(t)|^p = 1,$$

şeklinde yazılır. (1.1.2) sistemi aşağıdaki ikinci mertebeden başlangıç koşullu diferensiyel denkleme denktir.

$$\begin{cases} \phi^{-1}(y') = x \implies [\phi^{-1}(y')] = x' = -\phi(y), \\ \phi^{-1}(x') = -y \implies [\phi^{-1}(x')] = -y' = -\phi(x), \end{cases}$$

ise

$$\begin{aligned} [\phi^{-1}(y')] + \phi(y) &= 0, \\ [\phi^{-1}(x')] + \phi(x) &= 0, \end{aligned}$$

olur. Başlangıç koşulları ise

$$\begin{aligned} y'(0) &= \phi(x(0)), x(0) = 1, \\ y'(0) &= \phi(1) = 1, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x'(0) &= -\phi(y(0)), y(0) = 0, \\ x'(0) &= -\phi(0) = 0, \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, y'(0) = 1, \\ x(0) &= 1, x'(0) = 0, \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $p = 2$ olması durumuna benzer şekilde *ters sinüs fonksiyonu* ise

$$\sin_p^{-1}(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[p]{(1-s^p)^{p-1}}} ds, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\int_0^{-t} \frac{1}{\sqrt[p]{(1-s^p)^{p-1}}} ds, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

şeklinde olur (Wei,Liu and Elgindi, 2012).

Tanım 1.1.2. (Genelleştirilmiş Pi): Genelleştirilmiş Pi tanımı David Shelupsky tarafından

$$\hat{\pi}_p = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p]{(1-s^p)^{p-1}}} ds \quad (1.1.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu ise $|x|^p + |y|^p = 1$ ile gösterilen şeklin alanıdır. (1.1.4) de $p = 2$ alınırsa bilinen Pi sayısı elde edilir (Wei,Liu and Elgindi, 2012).

Tanım 1.1.3. (Genelleştirilmiş Sinüs Fonksiyonu):

$$\begin{aligned} -\left(S_p^{(p-1)}\right)' &= (p-1)S_p^{(p-1)}, \\ S_p(0) &= 0, \quad S_p'(0) = 1, \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin $S_p(x)$ çözüm fonksiyonuna, *genelleştirilmiş sinüs fonksiyonu* denir (Wang, 2010).

Lemma 1.1.1. Herhangi bir $k \in \mathbb{Z}$ ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için $x \neq \left(k + \frac{1}{2}\hat{\pi}_p\right)$ olsun. O halde

i) $S_p' \neq 0$ olmak üzere

$$(S_p')' = -\left|\frac{S_p}{S_p'}\right|^{p-2} S_p,$$

ii)

$$\left(S_p S_p^{(p-1)}\right)' = \left|S_p'\right|^p - (p-1)|S_p|^p = 1 - p|S_p|^p = (1-p) + p\left|S_p'\right|^p,$$

iii)

$$\left(\left|S_p'\right|^p - |S_p|^p\right)' = -2pS_p^{(p-1)}S_p,$$

dir (Chen, 2008).

İspat:

i) $-\left(S_p^{(p-1)}\right)' = (p-1)S_p^{(p-1)}$ diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Böylece

$$\begin{aligned} -(p-1)S_p^{(p-2)}S_p'' &= (p-1)S_p^{(p-1)}, \\ -S_p^{(p-2)}S_p'' &= S_p^{(p-2)}S_p, \\ \left(S_p'\right)' &= -\left|\frac{S_p}{S_p'}\right|^{p-2} S_p, \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $\left(S_p S_p^{(p-1)}\right)'$ ifadesi çarpımın türevi olduğundan

$$\left(S_p S_p^{(p-1)}\right)' = S_p' S_p^{(p-1)} + S_p \left(S_p^{(p-1)}\right)',$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$$-\left(S_p^{(p-1)}\right)' = (p-1)S_p^{(p-1)},$$

olduğu dikkate alınrsa

$$\begin{aligned}\left(S_p S_p'^{(p-1)}\right)' &= S_p' S_p'^{(p-1)} - S_p \left((p-1) S_p'^{(p-1)}\right), \\ &= S_p'^p - (p-1) S_p^p,\end{aligned}$$

elde edilir. Burada; $|S_p|^p + |S_p'|^p = 1$ eşitliği ve

$$\left|S_p'\right|^p = 1 - |S_p|^p, |S_p|^p = 1 - \left|S_p'\right|^p,$$

olduğu gözönüne alınrsa

$$\left(S_p S_p'^{(p-1)}\right)' = 1 - p |S_p|^p = (1-p) + p \left|S_p'\right|^p,$$

bulunur.

iii)

$$\left(\left|S_p'\right|^p - |S_p|^p\right)' = p S_p'^{(p-1)} S_p'' - p S_p^{(p-1)} S_p',$$

elde edilir. i) şıkında $S_p'' = -\frac{S_p^{p-1}}{|S_p'|^{p-2}}$ olduğu dikkate alınrsa

$$\begin{aligned}\left(\left|S_p'\right|^p - |S_p|^p\right)' &= -p S_p'^{(p-1)} \frac{S_p^{p-1}}{|S_p'|^{p-2}} - p S_p^{(p-1)} S_p' \\ &= -p S_p'^{(p-1)} S_p' - p S_p^{(p-1)} S_p' \\ &= -2p S_p'^{(p-1)} S_p'\end{aligned}$$

olur.

Tanım 1.1.4. (Prüfer Tipi Dönüşümler) Bir boyutlu p -Laplacian denklemini

$$-\left(y'^{(p-1)}\right)' = (p-1)(\lambda w(x) - q(x))y^{(p-1)}, \quad (1.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada; $p = 2$ ve $w(x) \equiv 1$ alınrsa

$$-y'' + qy = \lambda y,$$

bulunur ki, bu bilinen klasik Sturm-Liouville denklemdir. (1.1.5) de $w(x) = 1$ alınrsa, genelleştirilmiş prüfer dönüşümü

$$\begin{aligned}y(x) &= \rho(x) S_p(\lambda^{\frac{1}{p}} \theta(x)), \\ y'(x) &= \lambda^{\frac{1}{p}} \rho(x) S_p'(\lambda^{\frac{1}{p}} \theta(x))\end{aligned}$$

$w(x) \neq 1$ almırsa

$$\begin{aligned} y(x) &= R(x)S_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)), \\ y'(x) &= R(x)S'_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)), \end{aligned}$$

şeklinde olur (Wang, 2010).

Lemma 1.1.2. Yukarıda verilen Prüfer dönüşümleri dikkate almırsa

i)

$$\theta'(x) = 1 - \frac{q(x)}{\lambda} \left| S_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\theta(x)) \right|^p,$$

(Wang, 2010).

ii)

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \left[\left| S'_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)) \right|^p + (\lambda w(x) - q(x)) \left| S_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)) \right|^p \right],$$

olur.

İspat:

i) $w(x) = 1$ almırsa

$$\frac{y'}{y} = \lambda^{\frac{1}{p}} \frac{S'_p}{S_p},$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'}{y} \right)' &= \lambda^{\frac{1}{p}} \left(\frac{S''_p \lambda^{\frac{1}{p}} \theta' S_p - S'_p \lambda^{\frac{1}{p}} \theta' S'_p}{S_p^2} \right) = \lambda^{\frac{1}{p}} \left(\frac{S''_p S_p \lambda^{\frac{1}{p}} \theta' - (S'_p)^2 \lambda^{\frac{1}{p}} \theta'}{S_p^2} \right) \\ &= \lambda^{\frac{2}{p}} \left[\theta' \left(\frac{S''_p}{S_p} - \left(\frac{S'_p}{S_p} \right)^2 \right) \right], \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{y'}{y} \right)^2 = \lambda^{\frac{2}{p}} \left(\frac{S'_p}{S_p} \right)^2,$$

ve

$$\left(\frac{y'}{y} \right)' = \frac{y'' y - (y')^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y} \right)^2,$$

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y} \right)' + \left(\frac{y'}{y} \right)^2,$$

dir. Yukarıda bulunan ifadeler son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{y''}{y} = \lambda^{\frac{2}{p}} \left\{ \theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right\}, \quad (1.1.6)$$

bulunur. Bu ifadeler daha sonra kullanılacaktır. Diğer taraftan bir boyutlu p -Laplacian denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned} - \left(y'^{(p-1)} \right)' &= (p-1)(\lambda - q(x))y^{(p-1)}, \\ (p-1)y'^{(p-2)}y'' &= -(p-1)(\lambda - q(x))y^{(p-1)}, \\ \left(\frac{y'}{y} \right)^{p-2} \frac{y''}{y} &= -(\lambda - q(x)), \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\frac{y'}{y} \right)^{p-2} = \lambda^{\frac{1}{p}(p-2)} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2}, \quad (1.1.8)$$

şekindedir. (1.1.6) ve (1.1.8), (1.1.7)'de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{1}{p}(p-2)} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} \left[\lambda^{\frac{2}{p}} \theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) + \lambda^{\frac{2}{p}} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right] &= -(\lambda - q(x)) \\ \lambda \theta' \left[\frac{S_p''}{S_p} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)) \\ \lambda \theta' \left[\frac{(S_p'') (S_p')^{p-2}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)), \end{aligned}$$

olur. $S_p''(S_p')^{p-2} = -S_p^{p-1}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda \theta' \left[-\frac{S_p^{p-1}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)) \\ -\lambda \theta' \left[1 + \frac{(S_p')^p}{(S_p)^p} \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)) \\ -\lambda \theta' \left[\frac{1}{(S_p)^p} \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)) \\ \lambda \theta' &= (\lambda - q(x)) (S_p)^p + \lambda \left(S_p' \right)^p \\ \lambda \theta' &= \lambda \left[(S_p)^p + \left(S_p' \right)^p \right] - q(x) (S_p)^p \\ \theta' &= 1 - \frac{q}{\lambda} S_p^p, \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $w(x) \neq 1$ alınırsa

$$\frac{y'}{y} = \frac{S'_p}{S_p}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'}{y}\right)' &= \frac{\lambda^{\frac{1}{p}} \varphi' S''_p S_p - \lambda^{\frac{1}{p}} \varphi' S'_p S'_p}{S_p^2} \\ &= \lambda^{\frac{1}{p}} \left[\varphi' \left(\frac{S''_p}{S_p} - \left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^2 \right) \right], \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^2,$$

ve

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

dir. Yukarıda bulunan ifadeler son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{y''}{y} = \lambda^{\frac{1}{p}} \left\{ \varphi' \left(\frac{S''_p}{S_p} - \left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^2 \right) + \left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^2 \right\}, \quad (1.1.9)$$

olur. Bu ifadeler daha sonra kullanılacaktır. Diğer taraftan $w(x) \neq 1$ olmak üzere bir boyutlu p -Laplacian denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned} -\left(y'^{(p-1)}\right)' &= (p-1)(\lambda w - q(x))y^{(p-1)} \\ (p-1)y'^{(p-2)}y'' &= -(p-1)(\lambda w - q(x))y^{(p-1)} \\ y'^{(p-2)}y'' &= -(\lambda w - q(x))y^{(p-1)} \\ \left(\frac{y'}{y}\right)^{p-2} \frac{y''}{y} &= -(\lambda w - q(x)), \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^{p-2} = \left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^{p-2}, \quad (1.1.11)$$

şekindedir. (1.1.9) ve (1.1.11), (1.1.10) da göz önüne alınırsa

$$\left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^{p-2} \left[\lambda^{\frac{1}{p}} \left\{ \varphi' \left(\frac{S''_p}{S_p} - \left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^2 \right) + \left(\frac{S'_p}{S_p}\right)^2 \right\} \right] = -(\lambda w - q(x))$$

$$\begin{aligned}\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi' \left[\frac{S_p''}{S_p} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda w - q(x)) \\ \lambda^{\frac{1}{p}}\varphi' \left[\frac{(S_p'')}{(S_p)^{p-1}} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda w - q(x)),\end{aligned}$$

olur. $S_p''(S_p')^{p-2} = -S_p^{p-1}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi' \left[\frac{-S_p^{p-1}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda w - q(x)) \\ -\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi' \left[1 + \frac{(S_p')^p}{(S_p)^p} \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda w - q(x)) \\ -\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi' \left[\frac{1}{(S_p)^p} \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda w - q(x)) \\ \lambda^{\frac{1}{p}}\varphi' &= (\lambda w - q(x))(S_p)^p + (S_p')^p,\end{aligned}$$

olup

$$\varphi' = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \left[(\lambda w(x) - q(x)) \left| S_p \left(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x) \right) \right|^p + \left| S_p' \left(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x) \right) \right|^p \right],$$

elde edilir.

Tanım 1.1.5. (Beta ve Gamma Fonksiyonları) Beta ve Gamma fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned}B(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx, \\ \Gamma(n) &= \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx,\end{aligned}$$

şeklinde olup bu iki fonksiyon arasındaki bağıntı ise

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

dir (Balcı, 2009).

Teorem 1.1.1. Herhangi $p > 1$ için

$$\int_0^1 (1-t^p)^{-\frac{1}{p}} dt = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)},$$

dir (Chen, 2008).

İspat:

$$x = t^p \text{ olmak üzere } dx = pt^{p-1}dt \implies \frac{1}{p}t^{1-p}dx = dt,$$

buradan

$$x = t^p \text{ olmak üzere } x^{\frac{1-p}{p}} = t^{(1-p)} \text{ olup } \frac{1}{p}x^{\frac{1-p}{p}}dx = dt,$$

elde edilir. Bu ifadeler, beta ve gamma fonksiyonlarının tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t^p)^{-\frac{1}{p}} dt &= \frac{1}{p} \int_0^1 x^{\frac{1-p}{p}} (1-x)^{-\frac{1}{p}} dx = \frac{1}{p} \int_0^1 x^{\frac{1}{p}-1} (1-x)^{\frac{p-1}{p}-1} dx, \\ &= \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{p-1}{p}\right) = \frac{1}{p} \frac{\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{p-1}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p})} = \frac{1}{p} \frac{\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{p-1}{p})}{\Gamma(1)}, \end{aligned}$$

$\Gamma(1) = 1$ ve $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ olduğundan $\alpha = \frac{1}{p}$ için

$$\int_0^1 (1-t^p)^{-\frac{1}{p}} dt = \frac{\frac{\pi}{p}}{\sin(\frac{\pi}{p})},$$

bulunur.

Tanım 1.1.6. Herhangi $p > 1$ için $S_p(x)$ fonksiyonu;

a) Herhangi $x \in \left[-\frac{\hat{\pi}_p}{2}, \frac{\hat{\pi}_p}{2}\right]$ için $x = \int_0^{S_p(x)} (1-|t|^p)^{-\frac{1}{p}} dt$,

b) Bütün $x \in \mathbb{R}$, bazı $t \in \left[-\frac{\hat{\pi}_p}{2}, \frac{\hat{\pi}_p}{2}\right]$ ve herhangi $k \in \mathbb{Z}$ için $x = t + k\hat{\pi}_p$ olup

$$S_p(t + k\hat{\pi}_p) = (-1)^k S_p(t),$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 2008).

Teorem 1.1.2. Her $x \in \mathbb{R}$ ve herhangi $m \in \mathbb{Z}$ için

$$S_p(x + m\hat{\pi}_p) = (-1)^m S_p(x),$$

dir (Chen, 2008).

İspat: Herhangi $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $t \in \left[-\frac{\hat{\pi}_p}{2}, \frac{\hat{\pi}_p}{2}\right]$ için $x = t + k\hat{\pi}_p$ olsun. Öyle ki

$$\begin{aligned} S_p(x + m\hat{\pi}_p) &= S_p(t + k\hat{\pi}_p + m\hat{\pi}_p), \\ &= S_p(t + (k+m)\hat{\pi}_p), \end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 1.1.6'in b' şikkından; $t \in \left[-\frac{\hat{\pi}_p}{2}, \frac{\hat{\pi}_p}{2}\right]$ ve $k + m \in \mathbb{Z}$ olduğundan $S_p(t + (k + m)\hat{\pi}_p) = (-1)^{k+m} S_p(t)$ elde edilir ki

$$S_p(x + m\hat{\pi}_p) = (-1)^{k+m} S_p(t),$$

olup, $t \in \left[-\frac{\hat{\pi}_p}{2}, \frac{\hat{\pi}_p}{2}\right]$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $S_p(t + k\hat{\pi}_p) = (-1)^k S_p(t) \implies S_p(t) = (-1)^{-k} S_p(t + k\hat{\pi}_p)$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} S_p(x + m\hat{\pi}_p) &= (-1)^{k+m} (-1)^{-k} S_p(t + k\hat{\pi}_p) \\ &= (-1)^m S_p(t + k\hat{\pi}_p) \\ &= (-1)^m S_p(x), \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\hat{\pi}_p = \frac{2\pi}{p \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} = 2 \int_0^1 (1 - t^p)^{-\frac{1}{p}} dt,$$

şekindedir.

Lemma 1.1.3.

i)

$$(f^{(p)})' = p |f|^{p-1} f',$$

ii)

$$(|f|^p)' = p f^{(p-1)} f',$$

şekindedir (Chen, 2008).

İspat: $x^{(p)}$ ve $|x|^p$ nin türevleri hesaplanırsa

i) $x \geq 0$ olsun.

$$x^{(p)} = x^p \text{ ve } (x^{(p)})' = p x^{p-1} = p |x|^{p-1},$$

dir. $x < 0$ olsun.

$$x^{(p)} = -(-x)^p \text{ ve } (x^{(p)})' = p(-x)^{p-1} = p |x|^{p-1},$$

dir. O halde, zincir kuralı yardımıyla

$$(f^{(p)}(x))' = \frac{df^{(p)}}{dx} = \frac{df^{(p)}}{df} \frac{df}{dx} = p |f(x)|^{p-1} f'(x),$$

elde edilir.

ii) $x \geq 0$ olsun,

$$|x|^p = x^p \text{ ve } (|x|^p)' = px^{p-1} = px^{(p-1)},$$

dir. $x < 0$ olsun,

$$|x|^p = (-x)^p \text{ ve } (|x|^p)' = ((-x)^p)' = -p(-x)^{p-1} = px^{(p-1)},$$

dir. O halde, zincir kuralı yardımıyla

$$(|f(x)|^p)' = \frac{d|f|^p}{dx} = \frac{d|f|^p}{df} \frac{df}{dx} = pf^{(p-1)}(x)f'(x),$$

elde edilir.

Teorem 1.1.3. Her $x \in \mathbb{R}$ için

a)

$$S_p(-x) = -S_p(x),$$

b)

$$S_p(k\hat{\pi}_p - x) = (-1)^{k+1}S_p(x),$$

şeklindedir (Chen, 2008).

İspat: a)

i) $\left[-\frac{\hat{\pi}_p}{2}, \frac{\hat{\pi}_p}{2}\right]$ aralığında $t = -r$ olsun. Buradan $dt = -dr$ dir.

$$x = \int_0^{S_p(x)} (1 - |t|^p)^{-\frac{1}{p}} dt = - \int_0^{-S_p(x)} (1 - |r|^p)^{-\frac{1}{p}} dr,$$

ise

$$-x = \int_0^{-S_p(x)} (1 - |r|^p)^{-\frac{1}{p}} dr,$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$-x = \int_0^{S_p(-x)} (1 - |t|^p)^{-\frac{1}{p}} dt,$$

olduğundan

$$S_p(-x) = -S_p(x),$$

elde edilir.

ii) $t \in \left[-\frac{\hat{\pi}_p}{2}, \frac{\hat{\pi}_p}{2}\right]$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $x = t + k\hat{\pi}_p \in \mathbb{R}$ ise

$$S_p(-x) = S_p(-t - k\hat{\pi}_p) = (-1)^k S_p(-t) = -(-1)^k S_p(t) = -S_p(t + k\hat{\pi}_p) = -S_p(x),$$

dir.

b)

$$S_p(k\hat{\pi}_p - x) = S_p(-x + k\hat{\pi}_p) = (-1)^k S_p(-x) = (-1)^k (-1) S_p(x) = (-1)^{k+1} S_p(x),$$

elde edilir.

2. p -Laplacian Difüzyon Operatörü için Ters Nodal Problem

$p \in [1, \infty)$ bir sabit, λ bir özdeğer ve $q \in L^2(0, 1)$ olmak üzere

$$-\left(u^{(p-1)}\right)' = (p-1)(\lambda - q(x))u^{(p-1)}, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (2.2)$$

özdeğer problemini ele alalım.

(2.1) p -Laplacian denklemi aynı zamanda bir boyutlu p -Laplacian özdeğer denklemi olarak bilinir. $p = 2$ alınırsa (2.1) denklemi

$$-u'' + q(x)u = \lambda u,$$

olarak bilinen Sturm-Liouville denklemine dönüşür. (2.1) denkleminde $q = 0$ olduğu zaman

$$-\left(u^{(p-1)}\right)' = (p-1)\lambda u^{(p-1)},$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

problemi elde edilir. Bu problemin özdeğerleri

$$\lambda_n = (n\hat{\pi}_p)^p, n = 1, 2, 3, \dots$$

dir. Burada

$$\hat{\pi}_p = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} = \frac{2\pi}{p \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

dir. Bununla ilişkili özdeğer fonksiyonu ise $S_p(x)$ ile gösterilir (Law, Lian ve Wang, 2009). Sturm-Liouville teorisine göre; λ_n e bağlı $u_n(x)$ özdeğer fonksiyonlarının $x_n = \left\{x_j^{(n)}\right\}_{j=1}^n$ sıfırları, nodal dizi (nokta) olarak adlandırılır ve $l_j^n = x_{j+1}^n - x_j^n$ ise $u_n(x)$ in nodal uzunluğu olarak tanımlanır (McLaughlin, 1988; Hald ve McLaughlin, 1989). $p > 1$, λ bir özdeğer, $q \in L^2(0, 1)$, $r \in W_2^1(0, 1)$ olmak üzere

$$-\left(u^{(p-1)}\right)' = (p-1)(\lambda^2 - q(x) - 2\lambda r(x))u^{(p-1)}, \quad (2.3)$$

p -Laplacian difüzyon denklemini ele alalım. (2.3) denklemiyle birlikte sırasıyla Dirichlet ve Neumann sınır koşulları sırasıyla

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (2.4)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad (2.5)$$

dir. $p = 2$ için (2.3) denklemi

$$-u'' + [q(x) + 2\lambda r(x)] u = \lambda^2 u \quad (2.6)$$

şekline döndürür. Bu denklem difüzyon denklemi olarak bilinir. (2.6) özdeğer denklemi hem klasik, hemde kuantum mekaniği için önemlidir. Difüzyon denklemi, kuantum alan teorisindeki matematiksel modellerin en önemlilerinden birisi olarak kabul edilmektedir. Denklem genel olarak dispersive dalga olayını tasvir etmek için kullanılır ve relativistik fizik, plazma fiziği ve lineer olmayan optikte ortaya çıkar. Bu denklemi lineer veya lineer olmayan şekillerde karşımıza çıkabilir (Gasymov ve Guseinov, 1981; Hryniv ve Pronska, 2012; Jaulent ve Jean, 1972; Koyunbakan ve Yilmaz, 2008; Koyunbakan, 2011; Yilmaz, 2012).

p -Laplacian Sturm-Liouville problemi olarak (2.3)-(2.4) de $q(x) = r(x) = 0$ alınırsa; (2.3)-(2.4) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n = (n\hat{\pi}_p)^p,$$

olarak verilir ve bununla ilişkili olarak özdeğer fonksiyonu $S_p(x, \lambda)$ olarak gösterilir. Bu ifade kısaca $S_p(x)$ ile gösterilir (Koyunbakan, 2013).

2.1 Nodal Parametreler için Asimptotik İfadeler

Bu bölümde (2.3) p -Laplacian operatörünün özdeğerlerinin özellikleri, Dirichlet sınır koşulları altında incelenecektir. Neumann problemi için benzer sonuçlar elde edilir. İlk olarak, Prüfer dönüşümü tanımlanmalıdır. Nodal parametreleri elde etmek için, Prüfer dönüşümü kullanılarak θ' bulunacaktır.

Prüfer dönüşümü

$$\begin{aligned} u(x) &= c(x)S_p(\lambda^{\frac{2}{p}}\theta(x)), \\ u'(x) &= \lambda^{\frac{2}{p}}c(x)S'_p(\lambda^{\frac{2}{p}}\theta(x)), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

veya

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\lambda^{\frac{2}{p}}S'_p(\lambda^{\frac{2}{p}}\theta(x))}{S_p(\lambda^{\frac{2}{p}}\theta(x))}, \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanır (Koyunbakan, 2013). (2.1.2) eşitliğinin x e göre türevi alınırsa

$$\left(\frac{u'}{u}\right)' = \lambda^{\frac{2}{p}} \left(\frac{S''_p \lambda^{\frac{2}{p}} \theta' S_p - S'_p \lambda^{\frac{2}{p}} \theta' S'_p}{S_p^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{\frac{2}{p}} \left(\frac{S_p'' S_p \lambda^{\frac{2}{p}} \theta' - (S_p')^2 \lambda^{\frac{2}{p}} \theta'}{S_p^2} \right) \\
&= \lambda^{\frac{4}{p}} \left[\theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{u'}{u} \right)^2 = u^{\frac{4}{p}} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2,$$

ve

$$\left(\frac{u'}{u} \right)' = \frac{u'' u - (u')^2}{u^2} = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u} \right)^2,$$

$$\frac{u''}{u} = \left(\frac{u'}{u} \right)' + \left(\frac{u'}{u} \right)^2,$$

dir. Yukarıda bulunan ifadeler son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{u''}{u} = \lambda^{\frac{4}{p}} \left\{ \theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right\}, \quad (2.1.3)$$

elde edilir. Bu ifadeler daha sonra kullanılacaktır. (2.3) denklemini ele alırsa

$$\begin{aligned}
-\left(u'^{(p-1)} \right)' &= (p-1)(\lambda^2 - q - 2\lambda r) u^{(p-1)} \\
(p-1) u'^{(p-2)} u'' &= -(p-1)(\lambda^2 - q - 2\lambda r) u^{(p-1)} \\
u'^{(p-2)} u'' &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r) u^{(p-1)} \\
\left(\frac{u'}{u} \right)^{p-2} \frac{u''}{u} &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r),
\end{aligned} \quad (2.1.4)$$

olur. Aynı zamanda

$$\left(\frac{u'}{u} \right)^{p-2} = u^{\frac{2}{p}(p-2)} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2}, \quad (2.1.5)$$

şeklindedir. (2.1.3) ve (2.1.5), (2.1.4) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\lambda^{\frac{2}{p}(p-2)} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} \left[\lambda^{\frac{4}{p}} \theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) + \lambda^{\frac{4}{p}} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right] &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r) \\
\lambda^2 \theta' \left[\frac{S_p''}{S_p} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda^2 \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r) \\
\lambda^2 \theta' \left[\frac{(S_p'') (S_p')^{p-2}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda^2 \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r),
\end{aligned}$$

bulunur. $S_p''(S_p')^{p-2} = -S_p^{p-1}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \theta' \left[\frac{-S_p^{p-1}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda^2 \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r) \\
-\lambda^2 \theta' \left[1 + \frac{(S_p')^p}{(S_p)^p} \right] + \lambda^2 \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r) \\
-\lambda^2 \theta' \left[\frac{1}{(S_p)^p} \right] + \lambda^2 \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda^2 - q - 2\lambda r) \\
\lambda^2 \theta' &= (\lambda^2 - q - 2\lambda r) (S_p)^p + \lambda^2 \left(S_p' \right)^p \\
\lambda^2 \theta' &= \lambda^2 \left[(S_p)^p + \left(S_p' \right)^p \right] - q (S_p)^p - 2\lambda r (S_p)^p \\
\theta' &= 1 - \frac{q}{\lambda^2} S_p^p - \frac{2}{\lambda} r S_p^p, \tag{2.1.6}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.1. (2.3)-(2.4) Dirichlet probleminin λ_n özdeğeri

$$\lambda_n^{\frac{2}{p}} = n\hat{\pi}_p + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^{p-1}} \int_0^1 q(t)dt + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p-2}{2}}} \int_0^1 r(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{p}}}\right) \tag{2.1.7}$$

dir (Koyunbakan, 2013).

İspat: (2.3)-(2.4) problemi için $\lambda = \lambda_n$, $\theta(0) = 0$ ve $\theta(1) = \frac{n\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}}$ olsun. İlk önce (2.1.6) eşitliğinin her iki tarafının $[0, 1]$ aralığında integralini alalım.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \theta' dt &= \int_0^1 \left(1 - \frac{q}{\lambda_n^2} S_p^p - \frac{2}{\lambda_n} r S_p^p \right) dt \\
\theta(1) - \theta(0) &= \int_0^1 dt - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_0^1 r S_p^p dt \\
\frac{n\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= 1 - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_0^1 r S_p^p dt,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin sağına $\frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q$ ve $\frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r$ terimleri eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{n\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= 1 - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_0^1 r S_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt \\
&\quad + \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q [1 - p S_p^p] dt + \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r [1 - p S_p^p] dt,$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{d}{dt} \left[S_p(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t)) S_p'(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t))^{p-1} \right] = \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta' S_p' S_p'^{(p-1)} + \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta' \left(S_p'^{(p-1)} \right)' S_p,$$

olup $\left(S_p'^{(p-1)} \right)' = -(p-1) S_p'^{(p-1)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[S_p(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t)) S_p'(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t))^{p-1} \right] &= \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta' \left(S_p' \right)^p - (p-1) \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta' S_p^p \\ &= \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta' \left(\left(S_p' \right)^p - (p-1) S_p^p \right) \\ &= \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta' \left(\left(S_p' \right)^p + S_p^p - p S_p^p \right) \\ &= \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta' \left(1 - p |S_p|^p \right), \end{aligned}$$

bulunur, bu ifade yukarıdaki son eşitlikte dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{n \hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= 1 - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 \frac{q}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} \left[S_p S_p'^{(p-1)} \right] dt \\ &\quad + \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 \frac{r}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} \left[S_p S_p'^{(p-1)} \right] dt, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

bulunur. (2.1.18) eşitliğinin sağındaki üçüncü ve dördüncü integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 \frac{q}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} \left[S_p S_p'^{(p-1)} \right] dt = \frac{q}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} S_p S_p'^{(p-1)} \Big|_0^1 - \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} \int_0^1 G \left(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t) \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\theta'} \right) dt$$

elde edilir. Burada; $G \left(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(x) \right) = S_p(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(x)) S_p'(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(x))^{p-1}$ ve $x = 0, 1$ olduğu zaman

$$G \left(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(x) \right) = 0,$$

şeklinde dir. Buradan

$$\int_0^1 \frac{q}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} \left[S_p S_p'^{(p-1)} \right] dt = -\lambda_n^{-\frac{2}{p}} \int_0^1 G \left(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t) \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\theta'(t)} \right) dt = O \left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} \right).$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \frac{r}{\lambda_n^{\frac{p}{2}} \theta'} \frac{d}{dt} \left[S_p S_p^{(p-1)} \right] dt = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}}\right)$$

dir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 \frac{q}{\lambda_n^{\frac{p}{2}} \theta'} \frac{d}{dt} \left[S_p S_p^{(p-1)} \right] dt + \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 \frac{r}{\lambda_n^{\frac{p}{2}} \theta'} \frac{d}{dt} \left[S_p S_p^{(p-1)} \right] dt &= \frac{1}{\lambda_n^2 p} O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}}\right) \\ + \frac{2}{\lambda_n p} O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}}\right) &= O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+2}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+1}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{n \hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}} &= 1 - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+1}}\right) \\ \lambda_n^{\frac{p}{2}} &= \frac{n \hat{\pi}_p}{1 - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+1}}\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{1}{1 \mp O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda_n^{\frac{p}{2}} &= \frac{n \hat{\pi}_p}{1 - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+1}}\right)} \\ &= n \hat{\pi}_p \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+1}}\right)} \right] \\ &= n \hat{\pi}_p \left[1 + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_0^1 q dt + \frac{2}{\lambda_n p} \int_0^1 r dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{2}+1}}\right) \right], \end{aligned}$$

olur. Burada $\lambda_n^{\frac{p}{2}} \cong n \hat{\pi}_p \implies \lambda_n \cong (n \hat{\pi}_p)^{\frac{2}{p}}$ alınarak

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{\frac{2}{p}} &= n\hat{\pi}_p + \frac{n\hat{\pi}_p}{(n\hat{\pi}_p)^p} \int_0^1 q dt + \frac{2n\hat{\pi}_p}{(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} \int_0^1 r dt + O\left(\frac{n\hat{\pi}_p}{\left((n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}+1}}\right) \\
&= n\hat{\pi}_p + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^{p-1}} \int_0^1 q dt + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p-2}{2}}} \int_0^1 r dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right),
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.2. (1.3)-(1.4) problemi için nodal noktalar

$$x_j^n = \frac{j}{n} + \frac{j}{pn^{p+1}\hat{\pi}_p^p} \int_0^1 q + \frac{2j}{pn^{\frac{p}{2}+1}(\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} \int_0^1 r + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+2}}\right) + \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_j^n} r S_p^p + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_j^n} q S_p^p,$$

şekindedir (Koyunbakan, 2013).

İspat: (2.3)-(2.4) problemi için $\lambda = \lambda_n$, $\theta(0) = 0$ ve $\theta(x_j^n) = \frac{j\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}}$ olsun. (2.1.6) eşitliğinin her iki tarafının 0 dan x_j^n e integrali alınırsa,.

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_j^n} \theta' dt &= \int_0^{x_j^n} \left(1 - \frac{q}{\lambda_n^2} S_p^p - \frac{2}{\lambda_n} r S_p^p\right) dt \\
\theta(x_j^n) - \theta(0) &= \int_0^{x_j^n} dt - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_j^n} q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_j^n} r S_p^p dt \\
\frac{j\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= x_j^n - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_j^n} q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_j^n} r S_p^p dt, \tag{2.1.9}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.3)-(2.4) Dirichlet sınır değer probleminin λ_n özdeğeri

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{\frac{2}{p}} &= n\hat{\pi}_p + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^{p-1}} \int_0^1 q(t) dt + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p-2}{2}}} \int_0^1 r(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) \\
\frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}}}{n\hat{\pi}_p} &= 1 + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^p} \int_0^1 q(t) dt + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} \int_0^1 r(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right) \tag{2.1.10}
\end{aligned}$$

şekindedir. Yukarıdaki $\lambda_n^{\frac{2}{p}}$ ifadesi

$$\lambda_n^{\frac{2}{p}} = n\hat{\pi}_p + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}-1}}\right),$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\lambda_n^{\frac{2}{p}} &= n\hat{\pi}_p \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}-2}}\right) \right) \\ \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= \frac{1}{n\hat{\pi}_p} \left[\frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}-2}}\right)} \right],\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

olur ki, $\frac{1}{1 \mp O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ özelliği gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} = \frac{1}{n\hat{\pi}_p} \left[1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}-2}}\right) \right],\tag{2.1.12}$$

bulunur. Ayrıca (2.1.11) den

$$\frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}}}{n\hat{\pi}_p} = 1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}-2}}\right),$$

olup, bu (2.1.12) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} = \frac{1}{n\hat{\pi}_p} \left[\frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}}}{n\hat{\pi}_p} \right],\tag{2.1.13}$$

elde edilir. (2.1.10), (2.1.13) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= \frac{1}{n\hat{\pi}_p} \left[1 + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^p} \int_0^1 q(t)dt + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} \int_0^1 r(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right) \right] \\ \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= \frac{1}{n\hat{\pi}_p} + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^{p+1}} \int_0^1 q(t)dt + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}+1}} \int_0^1 r(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+2}}\right),\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

olur. (2.1.9) ifadesi düzenlenirse

$$x_j^n = \frac{j\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} + \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_j^n} r S_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_j^n} q S_p^p dt,$$

elde edilir. (2.1.14) ifadesi son eşitlikte dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}x_j^n &= j\hat{\pi}_p \left[\frac{1}{n\hat{\pi}_p} + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^{p+1}} \int_0^1 q(t)dt + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}+1}} \int_0^1 r(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+2}}\right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_j^n} r S_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_j^n} q S_p^p dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{j}{n} + \frac{j}{pn^{p+1}\hat{\pi}_p^p} \int_0^1 q(t)dt + \frac{2j}{pn^{\frac{p}{2}+1}\hat{\pi}_p^{\frac{p}{2}}} \int_0^1 r(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+2}}\right) \\
&\quad + \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_j^n} rS_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_j^n} qS_p^p dt
\end{aligned}$$

bulunur. Burada son eşitlik düzenlenirse

$$x_j^n = \frac{j}{n} + \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_j^n} rS_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_j^n} qS_p^p dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+2}}\right)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.3. $n \rightarrow \infty$ iken

$$l_j^n = \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}} + \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{p}{4}+1}}\right), \quad (2.1.15)$$

dir (Koyunbakan, 2013).

İspat: İlk önce (2.1.6) eşitliğinin her iki tarafını x_j^n den x_{j+1}^n e integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \theta' dt &= \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{q}{\lambda_n^2} S_p^p - \frac{2}{\lambda_n} r S_p^p\right) dt \\
\theta(x_{j+1}^n) - \theta(x_j^n) &= \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} 1 dt - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r S_p^p dt \\
\frac{(j+1)\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}} - \frac{j\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}} &= x_{j+1}^n - x_j^n - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r S_p^p dt \\
\frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}} &= l_j^n - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r S_p^p dt,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin sağına $\frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q$ ve $\frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r$ terimleri eklenip çıkarılırsa

$$\frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{p}{2}}} = l_j^n - \frac{1}{\lambda_n} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q S_p^p dt - \frac{2}{\lambda_n} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r S_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt - \frac{1}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt \\
= & l_j^n - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} qp S_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt \\
& - \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} rp S_p^p dt + \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt \\
= & l_j^n - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q [1 - p |S_p|^p] dt + \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r [1 - p |S_p|^p] dt,
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$1 - p |S_p|^p = \frac{[S_p S_p^{(p-1)}]'}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} = & l_j^n - \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt + \frac{1}{\lambda_n^2 p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{q}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} [S_p S_p^{(p-1)}] dt \\
& + \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{r}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} [S_p S_p^{(p-1)}] dt, \tag{2.1.16}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $G(\tau) = S_p(\tau) S_p^{(p-1)}(\tau)$ ve $\tau = \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{q}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} [S_p S_p^{(p-1)}] dt & = \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{q(t)}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} G'(\tau) dt, \\
\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{r}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \frac{d}{dt} [S_p S_p^{(p-1)}] dt & = \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{r(t)}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} G'(\tau) dt,
\end{aligned}$$

alınp, eşitliklerin sağındaki integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{q(t)}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} G'(\tau) dt & = \frac{q(t)}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} G(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta) \Big|_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} - \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} G(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t)) \left(\frac{q}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \right)' dt \\
& = -\lambda_n^{-\frac{2}{p}} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} G(\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t)) \left(\frac{q}{\theta'(t)} \right)' dt,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tau = \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta(t)$ olmak üzere $d\tau = \lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'(t) dt \implies dt = \frac{d\tau}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'(t)}$ olup

bu yukarıda dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{q(t)}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} G'(\tau) dt &= -\lambda_n^{-\frac{2}{p}} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} G(\tau) \left(\frac{q}{\theta'} \right)' \frac{d\tau}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} \\ &= O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}}} \right), \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{r(t)}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} \theta'} G'(\tau) dt = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}}} \right),$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (2.1.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= l_j^n - \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt + \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}}} \right) + \frac{2}{\lambda_n p} O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}}} \right) \\ &= l_j^n - \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt - \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}} \right), \end{aligned}$$

olup, burada l_j^n ifadesi yalnız bırakılırsa

$$l_j^n = \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} + \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt + \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}} \right),$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.4. $q \in L^2(0, 1)$ ve $r \in W_2^1(0, 1)$ olsun. $j = j_n(x) = \max \{j : x_j^n \leq x\}$ olmak üzere

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p \lambda_n^2 \left(\frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n}{\hat{\pi}_p} - \frac{2r(x)}{p \lambda_n} - 1 \right)$$

şeklindedir (Koyunbakan, 2013).

İspat:

$$l_j^n = \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} + \frac{2}{\lambda_n p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} r dt + \frac{1}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}} \right),$$

ifadesine ortalama değęer teoremi uygulanırsa, $z \in [x_j^n, x_{j+1}^n]$ olmak üzere

$$l_j^n = \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} + \frac{2}{\lambda_n p} r(z) l_j^n + \frac{1}{\lambda_n^2 p} q(z) l_j^n + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}}\right),$$

elde edilip q yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned} q(z) \frac{l_j^n}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} &= l_j^n - \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} - \frac{2}{\lambda_n p} r(z) l_j^n + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}}\right) \\ q(z) &= p\lambda_n^2 \left[1 - \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n} - \frac{2r}{\lambda_n p} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}}\right) \right] \\ &= p\lambda_n^2 \left[1 - \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n} - \frac{2r}{\lambda_n p} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}}\right) \right] \\ &= p\lambda_n^2 \left[1 - \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n} - \frac{2r}{\lambda_n p} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}}\right) \\ &= p\lambda_n^2 \left(\frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n} \right) \left[\frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n}{\hat{\pi}_p} - 1 - \frac{2r}{\lambda_n p} \frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n}{\hat{\pi}_p} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{4}{p}+1}}\right), \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

olur. Ayrıca $l_j^n \cong \frac{\hat{\pi}_p}{\lambda_n^{\frac{2}{p}}} \implies \frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n}{\hat{\pi}_p} \cong 1$ dir. $n \longrightarrow \infty$ iken (2.1.17) ifadesinin limiti alınır

$$q(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} p\lambda_n^2 \left(\frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n}{\hat{\pi}_p} - \frac{2r(x)}{p\lambda_n} - 1 \right)$$

bulunur. Böylece q için bir yapılandırma formülü elde edilir.

3. p -Laplacian Difüzyon Operatörü için Ters Nodal Problemin Lipschitz Kararlılığı

Bu bölümde, p -Laplacian difüzyon operatörü için ters nodal problemin Lipschitz kararlılığı incelenecektir. Lipschitz kararlılık, iki metrik uzay arasındaki süreklilikle ilgilidir. Bu sürekliliği göstermek için, bu iki metrik uzay arasında tanımlı bir homeomorfizm kullanılacaktır. Kararlılık problemleri bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Marchenko ve Maslov, 1970; McLaughlin, 1988; Law ve Tsay, 2001).

Ω_{dif} ve difüzyon operatörü için geçerli tüm nodal dizilerin uzayı olan Σ_{dif} uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\Omega_{dif} &= \{q : q \in C[0, 1]\} \\ \Sigma_{dif} &= \left\{ X = \{x_k^{(n)}\} : X, q \in \Omega_{dif} \text{ potansiyeline bağlı nodal küme} \right\}\end{aligned}$$

Burada Ω_{dif} ve Σ_{dif} uzaylarının homeomorfik uzaylar olduğu gösterilecektir. Böylece \bar{q} ile bağlantılı \bar{X} ve q ile bağlantılı X , Σ_{dif} uzayında birbirlerine yakın olursa, Ω_{dif} uzayında q ve \bar{q} potansiyel fonksiyonlarında birbirlerine oldukça yakın olur. Bu durumda, p -Laplacian difüzyon operatörü için ters nodal problem Lipschitz kararlıdır, denir. Burada Ω_{dif} uzayı için $L^m(0, 1)$, ($m \geq 1$) kullanılacaktır. $m \geq 1$ için;

$$S_n^m(X, \bar{X}) = \hat{\pi}_p^p n_p^{p+1-\frac{1}{m}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |l_k^{(n)} - \bar{l}_k^{(n)}|^m \right]^{\frac{1}{m}} + \frac{2}{p} (n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \left[\int_0^1 |\bar{r} - r|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3.1)$$

olarak tanımlansın. Burada $l_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$ ve $\bar{l}_k^{(n)} = \bar{x}_{k+1}^{(n)} - \bar{x}_k^{(n)}$ şeklindedir. Σ_{dif} uzayında bir metrik ve bir pseudometrik sırasıyla

$$\begin{aligned}d_0^m(X, \bar{X}) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n^m(X, \bar{X}), \\ d_{\Sigma_{dif}}^m(X, \bar{X}) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^m(X, \bar{X})}{1 + S_n^m(X, \bar{X})},\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Eğer " $X \sim_m \bar{X}$ olması için gerek ve yeter şart, $d_{\Sigma_{dif}}^m(X, \bar{X}) = 0$ olmasıdır.", şeklinde tanımlanırsa \sim_m, Σ_{dif} üzerinde bir denklik bağıntısı olur ve $d_{\Sigma_{dif}}^m$ dönüşümü, $\Sigma_{dif}^* = \Sigma_{dif} / \sim_m$ kümesi üzerinde bir metriktir.

Lemma 3.1. $d_{\sum_{dif}}^m(\cdot, \cdot)$ fonksiyonu \sum_{dif} uzayında bir pseudometriktir (Law, Lian ve Wang, 2009).

İspat: Lemmanın ispatı Lian'nın (Law, Lian ve Wang, 2009) makalesindeki method kullanılarak kolaylıkla yapılabilir.

Lemma 3.2. Farzedelim ki $X, \bar{X} \in \sum$ olsun. Yeteri kadar büyük n ler için;

a) $x_k^{(n)}$ ile $\bar{x}_k^{(n)}$ arasındaki $I_{n,k}$ aralığı $O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right)$ uzunluğuna sahiptir.

b) Her $x \in (0, 1)$ için $|J_n(x) - \bar{J}_n(x)| \leq 1$ şelindedir.

Burada $J = J_n(x) = maks \left\{ k : x_k^{(n)} \leq x \right\}$ dir.

İspat: Teorem 2.1.2 den

$$x_k^{(n)} = \frac{k}{n} + \frac{2}{\lambda_n} \int_0^{x_k^{(n)}} r(x) S_p^p dt + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{x_k^{(n)}} q(x) S_p^p dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right)$$

şekindedir. $\lambda_n^{\frac{2}{p}} \cong n\hat{\pi}_p \implies \lambda_n \cong (n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_k^{(n)} &= \frac{k}{n} + \frac{2}{(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} \int_0^{x_k^{(n)}} r(x) S_p^p dt + \frac{1}{(n\hat{\pi}_p)^p} \int_0^{x_k^{(n)}} q(x) S_p^p dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right) \\ &= \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) \end{aligned}$$

olup

$$x_k^{(n)} - \frac{k}{n} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} I_k^{(n)} &= \left| x_k^{(n)} - \bar{x}_k^{(n)} \right| = \left| x_k^{(n)} - \frac{k}{n} + \frac{k}{n} - \bar{x}_k^{(n)} \right| \leq \left| x_k^{(n)} - \frac{k}{n} \right| + \left| \frac{k}{n} - \bar{x}_k^{(n)} \right| \\ &\leq O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right), \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

(b) İspat, (Law ve Tsay, 2001) kullanılarak benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.1. Herhangi bir $m \geq 1$ için $d_{\sum_{dif}}^m, \sum_{dif} / \sim_m$ de bir metrik olsun. $(\sum_{dif} / \sim_m, d_{\sum_{dif}}^m)$ ve $(\Omega, \|\cdot\|_m)$ uzayları birbirlerine homeomorfiktirler. Burada $\sim_m, d_{\sum_{dif}}^m$ için bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Teoremin ispatlanabilmesi için

$$\|q - \bar{q}\|_m = pd_0^m(X, \bar{X})$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 2.1.4 den dolayı

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p \lambda_n^2 \left(\frac{\lambda_n^{\frac{2}{p}} l_j^n}{\hat{\pi}_p} - \frac{2r(x)}{p \lambda_n} - 1 \right),$$

şeklindedir. Burada; $\lambda_n^{\frac{2}{p}} = n \hat{\pi}_p$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} q(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} p (n \hat{\pi}_p)^p \left(\frac{n \hat{\pi}_p l_j^n}{\hat{\pi}_p} - \frac{2r(x)}{p (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p (n \hat{\pi}_p)^p \left(n l_{j_n(x)}^n - \frac{2r(x)}{p (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} - 1 \right), \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\bar{q}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p (n \hat{\pi}_p)^p \left(n \bar{l}_{j_n(x)}^n - \frac{2\bar{r}(x)}{p (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} - 1 \right),$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} q - \bar{q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} p (n \hat{\pi}_p)^p \left(n \left(l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j_n(x)}^n \right) - \frac{2}{p (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} (r(x) - \bar{r}(x)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p n^{p+1} \hat{\pi}_p^p \left(l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j_n(x)}^n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} (\bar{r}(x) - r(x)) \end{aligned}$$

olur. L^m uzayındaki norm tanımı kullanılırsa

$$q - \bar{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ p n^{p+1} \hat{\pi}_p^p \left(l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j_n(x)}^n \right) + 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} (\bar{r}(x) - r(x)) \right\}$$

olmak üzere Fatou Lemması kullanılırsa her $x \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} \|q - \bar{q}\|_m &= \left[\int_0^1 |q - \bar{q}|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\ &= \left[\int_0^1 \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ p n^{p+1} \hat{\pi}_p^p \left(l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j_n(x)}^n \right) + 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} (\bar{r}(x) - r(x)) \right\} \right|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \left[\int_0^1 \left| \lim_{n \rightarrow \infty} p n^{p+1} \hat{\pi}_p^p \left(l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j_n(x)}^n \right) \right|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\ &\quad + \left[\int_0^1 \left| \lim_{n \rightarrow \infty} 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} (\bar{r}(x) - r(x)) \right|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(pn^{p+1}\hat{\pi}_p^p)^m \right]^{\frac{1}{m}} \left[\int_0^1 |l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(2(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}} \left[\int_0^1 |\bar{r}(x) - r(x)|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= pn^{p+1}\hat{\pi}_p^p \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 |l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} + 2(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 |\bar{r}(x) - r(x)|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= pn^{p+1}\hat{\pi}_p^p \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n \right\|_m + 2(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{r}(x) - r(x)\|_m \\
&\leq p\hat{\pi}_p^p \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^{p+1} \left\| l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n \right\|_m + n^{p+1} \left\| \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n - \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n \right\|_m \right] \\
&\quad + 2(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{r}(x) - r(x)\|_m, \tag{3.2}
\end{aligned}$$

olur. Burada; Teorem 2.1.3 ele alınırsa

$$\begin{aligned}
l_k^n &= \frac{1}{n} + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} \int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} r(t) dt + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^p} \int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} q(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{4+p}{p}}}\right) \\
\bar{l}_k^n &= \frac{1}{n} + \frac{2}{p(n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}}} \int_{\bar{x}_k^{(n)}}^{\bar{x}_{k+1}^{(n)}} \bar{r}(t) dt + \frac{1}{p(n\hat{\pi}_p)^p} \int_{\bar{x}_k^{(n)}}^{\bar{x}_{k+1}^{(n)}} \bar{q}(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{4+p}{p}}}\right)
\end{aligned}$$

olup

$$|l_k^n - \bar{l}_k^n| = O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
n^{p+1} \left\| \bar{l}_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n \right\|_m &= n^{p+1} \left[\int_0^1 |\bar{l}_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{\bar{j}_n(x)}^n|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= n^{p+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} I_k^n |\bar{l}_{k+1}^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= n^{p+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) \left[O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) \right]^m \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= n^{p+1} \left[O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) \right]^{\frac{1}{m}} O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) n^{\frac{1}{m}} \\
&= O\left(n^{p+1 - \frac{p}{2m} - \frac{p}{2} + \frac{1}{m}}\right) \\
&= O\left(n^{\frac{p}{2} + 1 + \frac{2-p}{2m}}\right) = o(1) \tag{3.3}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
n^{p+1} \|l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j(x)}^n\|_m &= n^{p+1} \left[\int_0^1 |l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j(x)}^n|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= n^{p+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} l_k^n |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= n^{p+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right) \right] |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} \\
&= n^{p+1-\frac{1}{m}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

olur. Eğer (3.3) ve (3.4), (3.2) de gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|q - \bar{q}\|_m &\leq p \hat{\pi}_p^p \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p+1-\frac{1}{m}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} + 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{r} - r\|_m \\
&= p \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\pi}_p^p n^{p+1-\frac{1}{m}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} + \frac{2}{p} (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{r} - r\|_m \right\}
\end{aligned}$$

olur. Eğer her iki tarafın limiti alınırsa

$$\|q - \bar{q}\|_m \leq pd_0^r(X, \bar{X})$$

elde edilir. Benzer şekilde yeteri kadar küçük n ler için

$$\begin{aligned}
\|q - \bar{q}\|_m + o(1) &= pn^{p+1} \hat{\pi}_p^p \left\| l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j_n(x)}^n \right\|_m + 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \|\bar{r} - r\|_m \\
&\geq pn^{p+1} \hat{\pi}_p^p \left\| l_{j_n(x)}^n - \bar{l}_{j_n(x)}^n \right\|_m + 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \|\bar{r} - r\|_m \\
&\quad - O\left(n^{\frac{p}{2}+1+\frac{2-p}{m}}\right) \\
&= pn^{p+1} \hat{\pi}_p^p \left[\sum_{k=0}^{n-1} l_k^n |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} + 2 (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \|\bar{r} - r\|_m \\
&\quad - O\left(n^{\frac{p}{2}+1+\frac{2-p}{m}}\right) \\
&= p \left\{ n^{p+1-\frac{1}{m}} \hat{\pi}_p^p \left[\sum_{k=0}^{n-1} |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} + \frac{2}{p} (n \hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \|\bar{r} - r\|_m \right\} \\
&\quad - O\left(n^{\frac{p}{2}+1+\frac{2-p}{m}}\right)
\end{aligned}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$pd_0^m(X, \bar{X}) \leq \|q - \bar{q}\|_m$$

olur. Böylece teorem ispatlanmıştır. Burada

$$S_n^m(X, \overline{X}) = n^{p+1-\frac{1}{m}\hat{\pi}_p^p} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |l_k^n - \bar{l}_k^n|^m \right]^{\frac{1}{m}} + \frac{2}{p} (n\hat{\pi}_p)^{\frac{p}{2}} \|\bar{r} - r\|_m$$

şeklindedir.

4. Sonuç

2001 yılında Law ve Tsay, mutlak bir metrik altında, tüm (q, α, β) operatörlerinin uzayının bir denklik bağıntısı ile verilen tüm asimptotik olarak denk nodal dizilerin bölüm uzayına homeomorf olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca nodal dönüşümün, ilgili metrikler potansiyel fonksiyonun türevleri ile büyütüldüğü zaman bile halen daha bir homeomorfizm olduğu ispatlanmıştır. Bu sayede Law ve Tsay, Sturm-Liouville operatörü için ters nodal problemin kararlılığı ve dolayısıyla iyi tanımlı olduğunu göstermişlerdir. Burada Law ve Tsay'ın çalışması esas alınmıştır.

İkinci bölümde p -Laplacian difüzyon operatörü için ters nodal problem incelenmiştir. Bilindiği gibi ters problem özdeğerlerin ve özfonksiyonların verilip denklemin potansiyelini bulma problemidir. Bir çok matematikçi potansiyel fonksiyonu farklı metodlar kullanarak bulmuştur. Burada ise prüfer dönüşümleri yardımıyla özdeğerler ve nodal parametrelerin asimptotik ifadeleri bulunup, bunlar yardımıyla q potansiyeli için bir yapılandırma formülü elde edilmiştir.

Kararlılık problemleri birçok matematikçi tarafından Sturm- Liouville, difüzyon, Dirac... gibi farklı operatörler için incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise p -Laplacian difüzyon operatörü için ters nodal problemin Lipschitz kararlılığı incelenmiştir. Kararlılık ispatlarında kullanılan çeşitli metodlar vardır. Lipschitz kararlılık ise bunlardan biridir.

Bir problemin kararlı olması bize o problemin iyi tanımlı olduğunu gösterir. Ayrıca problemin kararlılığı, problemin çözümünü pratik bir şekilde hesaplamamıza olanak sağlar.

KAYNAKLAR

- Balci, M.**, 2009. Matematik Analiz II, *Balci Yayınları*.
- Binding, P. A. and Rynne, B. P.**, 2008. Variational and non-variational eigenvalues of the p –Laplacian, *Journal of Differential Equations*, **244**, 24-39.
- Chen, H. Y.**, 2008. On generalized trigonometric functions, *National Sun Yat-Sen University*, PhD Thesis.
- Elbert, A.**, 1979. A half-linear second order differential equation, *Collogia Mathematica Societatis Jonos Bolyai*, **30**, 153-180.
- Gasymov, M. G. and Guseinov, G. Sh.**, 1981. Determination of a diffusion operator from the spectral data, *Doklady Akademii Nauk Azerbaijan SSSR*, **37(2)**, 19-23.
- Hald, O. H. and McLaughlin, J. R.**, 1989. Solutions of the inverse nodal problems, *Inverse Problems*, **5**, 307-347.
- Hryniv, R. and Pronska, N.**, 2012. Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations, *Inverse Problems*, **28(8)**, 085008.
- Jaulent, M. and Jean, C.**, 1972. The inverse wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, *Communications in Mathematical Physics*, **28(3)**, 177-220.
- Koyunbakan, H.**, 2013. Inverse nodal problem for p -Laplacian energy-dependent Sturm- Liouville equation,(*Submitted to Journal of Mathematical Analysis and Applications*).
- Koyunbakan, H. and Yilmaz, E.**, 2008. Reconstruction of the potential function and its derivatives for the diffusion operator, *Verlag der Zeitschrift für Naturforsch*, **63a** 127-130.
- Koyunbakan, H.**, 2011. Inverse problem for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **378(2)**, 549-554.

- Law, C. K. and Tsay, J.**, 2001. On the well-posedness of the inverse nodal problem, *Inverse Problems*, **17**, 1493-1512.
- Law, C. K., Lian, W. C., and Wang, W. C.**, 2009. Inverse nodal problem and Ambarzumyan problem for the p –Laplacian, *Proceeding of the Royal Society of Edinburg: Section A Mathematics*, **139(6)**, 1261-1273.
- Lindqvist, P.**, 1993. Note on a nonlinear eigenvalue problem, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **23**, 281-288.
- Marchenko, V. A. and Maslov, K. V.**, 1970. Stability of the problem of recovering the Sturm-Liouville operator from the spectral function, *Mathematics of the USSR Sbornik*, **81(123)**, 475-502.
- McLaughlin, J. R.**, 1988. Stability theorems for two inverse spectral problems, *Inverse Problems*, **4**, 529-540.
- McLaughlin, J. R.**, 1988. Inverse spectral theory using nodal points as data-a uniqueness result, *Journal of Differential Equations*, **73**, 342-362.
- Otani, M.**, 1984. A remark on certain nonlinear elliptic equations, *Proceeding Faculty of Science Tokai University*, **19**, 23-28.
- Wang, W. C.**, 2010. Direct and inverse problems for one dimensional p –Laplacian operators, *National Sun Yat-Sen University*, PhD Thesis.
- Wang, W. C., Cheng, Y. H., and Lian, W. C.**, 2011. Inverse nodal problems for the p –Laplacian with eigenparameter dependent boundary conditions, *Mathematical and Computer Modelling*, **54(27)**, 2718-2724.
- Wei, D., Liu, Y., and Elgindi M. B.**, 2012. Some generalized trigonometric sine functions and their applications, *Applied Mathematical Sciences*, **6**, 6053-6068.
- Yilmaz, E.**, 2012. Inverse nodal problem for differential operators, *Firat University*, PhD Thesis.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Şanlıurfa'da doğdum. İlköğrenimimi Kocaeli'de, orta ve lise öğrenimimi Mersin'de tamamladım. 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. 2011 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen aynı anabilim dalında tezli yüksek lisans yapmaktayım.