EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

RİESZ UZAY DEĞERLİ ÖLÇÜLER VE İNTEGRAL

Neşet Özkan TAN

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Gülhan ASLIM
İkinci Danışmanı : Prof. Dr. Zafer ERCAN

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.04.01

Sunuş Tarihi: 22.05.2013

Bornova-İzmir

2013

Neşet Özkan TAN tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan **"Riesz Uzay Değerli Ölçüler Ve İntegral"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **22.05.2013** tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof.Dr. Zafer ERCAN**	
Raportör Üye	**: Prof.Dr. Gülhan ASLIM**	
Üye	**: Doç.Dr. Mert ÇAĞLAR**	
Üye	**: Doç.Dr. İlkay KARACA**	
Üye	**: Yar.Doç.Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU**	

ÖZET

RİESZ UZAY DEĞERLİ ÖLÇÜLER VE İNTEGRAL

TAN, Neşet Özkan

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gülhan ASLIM

İkinci Danışmanı: Prof. Dr. Zafer ERCAN

Mayıs 2013, 49 sayfa

Bu doktora tezinde E Dedekind-tam Riesz uzay olmak üzere, E-değerli fonksiyonların E-değerli ölçülerle integrallenebilirliği araştırıldı. E-değerli ölçülerin sıralı vektör uzayı, bu uzaya ait ölçülerin tanımlı oldukları kümeler cebirinin eleman sayısıyla karekterize edildi. Klasik ölçü teorisindeki s-sınırlılık kavramının Riesz-uzayı-değerli ölçüler için anlamı araştırıldı. Gerçel değerli işaret ölçüleri için tanımlanan puslu yakınsaklık kavramı sıra-sürekli kesin pozitif fonksiyoneller yardımıyla, Riesz-uzayı-değerli ölçüler için genişletildi. $f : X \to E$ fonksiyonu için sıra yakınsaklığın, tanımladığımız puslu yakınsaklığı gerektirdiği gösterildi. E-değerli basit fonksiyon tanımı ve integrali verildi. E-değerli basit fonksiyonlar ve puslu yakınsaklık yardımıyla E-değerli fonksiyonun integrallenebilirliği incelendi. Ayrıca Arşimedyen bir uzayın Maeda-Ogasawara uzayı ile Dedekind tamlanışının merkez sıra idealinin Kakutani-Krein uzaylarının Riesz izomorfik olduğu gösterilip, akabinde $C^\infty(S)$ uzayları için Banach-Stone-tipi bir sonuç elde edildi.

Anahtar sözcükler: Riesz uzayları, vektör ölçüleri, Riesz-uzayı-değerli ölçüler, ölçü, Riesz- uzayı-değerli integral, evrensel tamlanış, Kakutani-Krein uzayı, Maeda-Ogasawara uzayı, s-sınırlılık.

ABSTRACT

RIESZ SPACE VALUED MEASURES AND INTEGRATION

TAN, Neşet Özkan

Ph.D. in Mathematics Department
Supervisor: Prof. Dr. Gülhan ASLIM
Co-Supervisor: Prof. Dr. Zafer ERCAN
May 2013, 49 pages

In this thesis, integration of E-valued functions with E-valued measures, where E is a Dedekind complete Riesz space, is investigated. The ordered vector space of E-valued measures is characterized according to the cardinality of algebras in which these measures defined on. The meaning of s-boundedness in classical measure theory is investigated for Riesz-space-valued measures. The concept of hazily convergence that is valid for real-valued signed measures is extended for Riesz-space-valued measures by using strictly positive order continuous functionals. The implications of order convergence of $f : X \to E$ which implies the hazily convergence are shown. The definitions of E-valued simple functions and integration are given. The integrability of E-valued functions is given by using hazily convergence and properties of E-valued simple functions. Furthermore, it is shown that Maeda-Ogasawara space of an Archimedean Riesz space E is Riesz isomorphic to Kakutani-Krein space of the Dedekind completion of the center of E, and by using this a Banach-Stone-type result for $C^{\infty}(S)$ is obtained.

Key Words: Riesz space, vector measure, Riesz-space-valued measure, measure, Riesz-space-valued integral, universal completion, Kakutani-Krein space, Maeda-Ogasawara space, s-boundness.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince bilgi ve görüşlerinden yararlandığım tez danışmanlarım Prof. Dr. Gülhan ASLIM ve Prof. Dr. Zafer ERCAN' a; Delft Teknik Üniversitesi' ndeki bir yıllık ziyaretimde danışmanlığımı yürüten Prof. Dr. Ben de PAGTER' e; tez izleme ve sınav jürilerinde bulunan değerli ögretim üyelerine, benimle bilgi, tecrübe ve sevgilerini paylaşan hocalarıma, arkadaşlarıma ve aileme şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v
ABSTRACT vii
TEŞEKKÜR ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xii
1 GİRİŞ 1
2 ÖN BİLGİLER 3
3 RİESZ UZAY DEĞERLİ ÖLÇÜLER 8
3.1 Bazı Temel Özellikler 8
3.2 Sıra Sınırlı Toplamsal Ölçülere İki Yaklaşım 13
3.3 Dış Ölçü 16
3.4 Sıfır Kümeler ve Sıfır Fonksiyonlar 18
3.5 Puslu Yakınsaklık 20
4 RİESZ UZAY DEĞERLİ İNTEGRAL 23
4.1 Basit Fonksiyonların İntegrali 23
4.2 İntegrallenebilirlik 32
5 STONE KARAKTERİZASYONU 39
5.1 Maeda-Ogasawara Uzayı 39
5.2 Kakutani-Krein Uzayı ve Merkez İdeal 42
KAYNAKLAR DİZİNİ 47
ÖZGEÇMİŞ 49

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$a(\mathcal{F}, E)$	Toplamsal ölçüler uzayı
$oba(\mathcal{F}, E)$	Sıra sınırlı toplamsal ölçüler uzayı
$obca(\mathcal{F}, E)$	Sıra sınırlı sayılabilir toplamsal ölçüler uzayı
$sba(\mathcal{F}, E)$	S-sıra sınırlı toplamsal ölçüler uzayı
A^c	A' nın tümleyeni
$\|f\|$	f' nin modülü
f_+	f' nin pozitif parçası
f_-	f' nin negatif parçası
$L_b(E, F)$	E' den F' ye sıra sınırlı doğrusal dönüşümlerin uzayı
$L_b^n(E, F)$	E' den F' ye sıra sınırlı sürekli doğrusal dönüşümlerin uzayı
$\tilde{E}^n$	E' nin sıra sürekli duali
$(X, \mathcal{F}, \mu)$	Ölçü uzayı
μ-h.h.h.	μ hemen hemen heryerde

Simgeler	Açıklama
$o - \lim f_n$	f_n' nin sıra limiti
μ^*	μ' nün ürettiği dış ölçü
$(p_n) \downarrow 0$	İnfimumu sıfır olan azalan (p_n) dizisi
$\tilde{e} \otimes \mu(A)$	$\mu(A)$'nın sıra sürekli kesin pozitif fonksiyonel $\tilde{e}$ ile bileşkesi
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$[-\infty, \infty]$	Gerçel sayıların iki nokta tıkızlaştırılması
$C(X)$	X' den $\mathbb{R}$' ye sürekli fonksiyonların kümesi
$\beta\mathbb{N}$	Doğal sayıların Stone-Čech tıkızlaştırması
E^δ	E' nin Dedekind tamlanışı
E^u	E' nin evrensel tamlanışı
$Orth(E)$	E' nin ortomorfizmalarının kümesi
$Z(E)$	E' nin merkez sıra ideali
$L_1[0,1]$	$[0,1]$' de tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayı

1 GİRİŞ

Riesz uzayı teorisi, fonksiyonel analizin gelişimine paralel olarak 20. yüzyılın ikinci çeyreğinde gelişme göstermeye başlamıştır. Bir vektör uzayında, sıra yapısı ve onun özellikleri ile ilgilenme fikri F. Riesz' in söz konusu tarihlerde, doğrusal fonksiyonellerin parçalanışı üzerine verdiği konuşmaya dayanmaktadır. Bu teoriye ismini verecek olan bu çalışma ve devamındaki çalışmalarda, fonksiyonel analizin de gelişmeye başlamasındaki çıkış noktası sayılabilecek integral operatörlerinin inceleme alanına dayanmaktadır. Bunun akabinde teoriyi aksiyomatik bir şekilde geliştirme çalışmaları iki ayrı koldan Rus ve Japon matematikçiler tarafından devam ettirilmiştir. Bunlar arasında H. Freudenthal ve L. V. Kantorovič, G. Birkhoff, B. Z. Vulikh ve diğer taraftan H. Nakano, T. Ogasawara, K. Yoshida, Riesz uzay yapısının cebirsel kısmı ile ilgilenmeye başlamış, daha sonra W. A. J. Luxemburg ve A. C. Zaanen gibi matematikçiler ve öğrencileriyle normlu Riesz uzaylarının analitik yapısı ve bu uzaylardaki dönüşümlerin özellikleri üzerine çalışmalarla devam etmiştir. Günümüzde özellikle finans matematiğine uygulamaları bulunan Riesz uzayı teorisi, etkili matematikçiler tarafından çalışılmaya devam edilmektedir.

19. yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başlarını milat kabul eden ölçü teorisi, E. Borel, H. Lebesgue, J. Radon, M. Fréchet gibi matematikçilerle gelişmeye başlamıştır. Bu teorinin gelişimi, akabinde, A. Kolmogorov tarafından aksiyomatik olarak verilen olasılık teorisi, ergodik teori, Lebesgue integrali teorisi gibi yeni çalışma alanlarının gelişimine yol açmıştır. Gerçel-değerli ölçüler ve fonksiyonlar ile başlayan bu çalışmaların Banach uzay versiyonları, S. Bochner, N. Dunford, B. J. Pettis, A. Grothendieck, I. M. Gelfand isimleriyle bazı diferansiyellenebilme, yakınsaklık ve gösterim problemlerine ışık tutarak günümüze kadar devam etmiştir. Riesz-uzayı-değerli ölçülerin araştırılması 20. yüzyılın ikinci yarısında J. D. M. Wright' ın Stone-cebirlerinde değer alan ölçüler ve integrallerle ilgili çalışması ile devam ettirilmiştir. K. D. Schmidt, B. Faires, T. J. Morrison, bazı parçalanış teoremlerinin Riesz-uzayı-versiyonunun elde edilmesinde katkıları olan matematikçilerdir. Bu parçalanışlar, Jordan, Lebesgue, Yoshida-Hewit gibi konuya önemli katkıları bulunan isimler tarafından geliştirildiler ve söz konusu uzayların karakteri hakkında önemli bilgiler veren yapılardır.

Yukarıdaki gelişmelerin ışığında hazırlanan bu çalışmanın ikinci bölümünde sonraki bölümler için gerekli tanımlar ve bilgiler verilmiştir.

Bölüm 3' de Riesz-uzayı-değerli ölçülerin sağladığı bazı sıra özellikleri ve cebirsel özellikler incelendi. Riesz-uzayı-değerli ölçülere, üzerinde tanımlı oldukları kümeler cebirinin eleman sayısı ve değer aldıkları Riesz uzayın bazı sıra özelliklerine sahip olması olmak üzere, iki açıdan yaklaşım yapıldı. Verilen sıra sınırlı ölçüden, kesin pozitif sıra sürekli fonksiyoneller yardımıyla bir dış ölçü elde edildi. Bu dış ölçünün yardımıyla sıfır küme ve sıfır fonksiyon kavramları tanımlanıp bazı özellikler elde edildi. Bunun akabine sıra yakınsaklığı gerektirdiğini gösterdiğimiz bir çeşit yakınsaklık tanımlandı ve özellikleri elde edildi.

Bölüm 4' de Dedekind-tam Riesz-uzayı-değerli basit fonksiyonlar ve bunların integralleri tanımlandı. Bu bölümde de sabitlenen kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonellerin yardımıyla basit fonksiyonların sağladığı özellikler incelendi. Bu özellikler ve sonuçlar sayesinde herhangi bir E Dedekind-tam Riesz-uzayı-değerli fonksiyonun integrallenebilirliği tanımlandı ve bazı sonuçlar elde edildi.

Bölüm 5' de bir Arşimedyen Riesz uzayının merkez ideali ve evrensel Dedekind tamlanışlarından söz edildi. Bu tamlanışlar yardımıyla bir Arşimedyen uzayın merkezinin Kakutani-Krein uzayları ve Maeda-Ogasawara uzayları arasındaki ilşki gösterildi.

2 ÖN BİLGİLER

Riesz uzayları ya da vektör örgüleri isimleri ile bilinen yapıların özellikleri ve bu çalışma için gerekli tanımlar ile başlayacağız. Bu bölümde Riesz uzay teorisi ile ilgili yer alacak tanımlar ve sonuçlar için (Luxemburg and Zaanen, 1971), (Zaanen, 1997), (Vulikh, 1967), (Abramovich and Aliprantis, 2002), (Aliprantis and Burkinshaw, 1985) kaynaklarından daha detaylı bilgi edinilebilir. E gerçel ya da kompleks cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu çalışmada E' yi hep gerçel vektör uzayı olarak alacağız. "$\leq$" simgesiyle E vektör uzayında bir kısmi sıralama bağıntısını simgeleyelim. Ayrıca eğer bu bağıntı, her $f, g, h \in E$ ve $\alpha \geq 0$ gerçel sayısı için,

$$f \leq g \text{ olduğunda } f + h \leq g + h,$$

ve

$$f \leq g \text{ olduğunda } \alpha f \leq \alpha g$$

özelliklerine sahip ise E vektör uzayına **sıralı vektör uzayı** denir. Aslında bir koniye sahip tüm vektör uzayları, sıralı vektör uzay olarak ele alınabilir. Burada bir vektör uzayında **koni**' den kastedilenleri ve bu yönüyle sıralı vektör uzaylarını incelemek için (Aliprantis and Tourky, 2007)' e bakılabilir. Yukarıdaki iki özelliğe ek olarak, eğer her $f, g \in E$ için $\sup\{f, g\} \in E$ ise E vektör uzayına **Riesz uzayı** ya da **vektör örgüsü** denir. Son yazdığımız özelliğe **örgü özelliği** denir. Yani bir Riesz uzayı yapısı, birbiriyle uyum içinde yaşayan vektör uzayı ve sıralama yapılarının bütünüdür. $\sup\{f, g\}$ yerine $f \vee g$ ve $\inf\{f, g\}$ yerine $f \wedge g$ ve vektör uzayının sıfırını gerçel sayıların sıfırı gibi "0" yazacağız. Eğer $f \geq 0$ ise f elemanına **pozitif** ve ek olarak $f \neq 0$, ise **kesin pozitif** diyeceğiz. Bu çalışma boyunca Riesz uzay ismini kullanmayı tercih edeceğiz. Bu isim, Macar matematikçi F. Riesz' den kaynaklanmaktadır. Fonksiyonel analizin konusu olmuş birçok uzayı doğal sıra yapılarıyla Riesz uzayı olarak düşünebiliriz. Gerçel sayılar uzayı bilinen sıralama ile ve $\mathbb{R}^n$, sınırlı gerçel terimli dizilerin uzayı l_∞, p. kuvveti toplanabilir gerçel terimli diziler uzayı l_p, gerçel terimli yakınsak diziler uzayı c, sıfır gerçel sayısına yakınsayan diziler uzayı c_0, sadece sonlu adet terimi sıfırdan farklı dizilerden oluşan c_{00} uzayları koordinat sıralaması ile birer Riesz uzayı örneğidir. X

tıkız ve Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere X'den $\mathbb{R}$' ye giden sürekli fonksiyonların uzayı $C(X)$, p. kuvveti Lebesgue integrallenebilir olan gerçel değerli fonksiyonların uzayı L_p noktasal sıralamaya göre birer Riesz uzayı örneğidir. Koordinat ve noktasal sıralamadan anlamamız gereken, sırasıyla,

$$(f_n) \leq (g_n) \Leftrightarrow \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } (f_n) \leq (g_n)$$

ve

$$f \leq g \Leftrightarrow \text{ her } x \in X \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

sıralamalarıdır. E bir Riesz uzayı ve f burada bir eleman ise, $f \vee 0$, $(-f) \vee 0$ ve $f \vee (-f)$ elemanları yerine sırasıyla f_+, f_-, $|f|$ simgelerini kullanacağız ve bu elemanları sırasıyla f' nin **pozitif parçası**, **negatif parçası** ve **modülü** diye isimlendireceğiz. Herhangi bir E Riesz uzayında, $0 \leq f$ elemanlarının kümesini E_+ ile göstereceğiz. Ayrıca $f_+, f_-, |f| \in E_+$ olduğuna ve $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$ olduğuna dikkat edelim. Eğer E Riesz uzayı için, $f \in E_+$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $nf \leq g$ olması $f = 0$ olmasını gerektiriyor ise bu Riesz uzayına **Arşimedyen** Riesz uzayı diyeceğiz. Elbette Arşimedyen olmayan Riesz uzayları da vardır. Bunun için klasik örnek, gerçel düzlemi sözlük sıralamasıyla ele almaktır. Bu çalışmada Arşimedyen Riesz uzaylarıyla çalışacağız. Bu uzaylarda çalışmanın kolaylığı, gerçel sayıların sıralama ile ilgili sağladığı tüm eşitsizliklerin bu uzaylarda da geçerli olmasıdır. Bunun kanıtının son bölümümüzün konusuna dayandığını belirtelim. $f, g \in E$ için $|f| \wedge |g| = 0$ olduğunda f ve g **dik** elemanlardır diyeceğiz ve $f \perp g$ ile göstereceğiz. Burada g elemanına f' nin **dik bileşeni** diyeceğiz. Eğer f bir $A \subset E$ kümesinin tüm elemanlarına dik ise $f \perp A$ yazacağız; A' nın tüm elemanlarına dik olan kümeye **dik bileşeni** diyeceğiz ve A^d ile göstereceğiz.

Eğer $A \subset E$ altuzayı örgü özelliğine sahip ise A altuzayına E' nin **Riesz altuzayı** denir. Örneğin c ve c_0 uzayları l_∞' un Riesz altuzaylarıdır. $A \subset E$ Riesz altuzayında her $0 < f \in E$ için $0 < g \leq f$ olacak şekilde $g \in A$ bulunabiliyor ise A Riesz altuzayına E' de **sıra yoğundur** denir. $A \subset E$ altuzayında her $g \in E$ için $g \leq f$ olacak şekilde $g \in A$ bulunabiliyor ise A Riesz altuzayı E' yi **sınırlar** denir. A Riesz altuzayı için $|g| \leq |f|$ ve $f \in A$ olması $g \in A$ olmasını gerektiriyor ise A Riesz altuzayına **sıra ideal** denir. Örneğin c_0 uzayı l_∞' un bir sıra ideali ancak c uzayı sıra ideali değildir. Aslında $e \in E_+$

olmak üzere **e' nin ürettiği sıra ideal**' den söz edilebilir. **Temel ideal** olarak da bilinen bu sıra ideal,

$$E_e = \{f \in E : |f| \leq ne, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-ne, ne]$$

ile tanımlıdır. Burada bir Riesz uzayında kapalı aralıktan anlamamız gereken, gerçel sayılarda olduğu gibi arada kalan ve uç elemanlara eşit olabilecek elemanlardır ve küçük bir değişikle bu tür aralıklara **sıra aralık** diyeceğiz. Eğer bir $A \subset E$ kümesi bir sıra aralık tarafından içeriliyor ise A kümesine **sıra sınırlı küme** diyeceğiz. Eğer $E_e = E$ ise e elemanına **sıra birim** denir. X tıkız ve Hausdorff olmak üzere $\mathbf{1}_X$ sabit fonksiyonu ile $C(X)$ sıra birime sahip Arşimedyen Riesz uzayıdır. Eğer $A \subset E$ sıra idealinin, E' de supremumu mevcut her altkümesinin supremumu A'nın bir elemanı ise A sıra idealine **bant** diyeceğiz. Örneğin sadece sonlu terimi sıfır olan gerçel dizilerin uzayı, l_∞ Riesz uzayında bir bandtır. Ancak c_0, bu uzayda bir bant değildir. Sıra idealde olduğu gibi bir $e \in E_+$ için B_e ile göstereceğimiz **e' nin ürettiği bant** ya da **temel bant**'tan söz edebiliriz. Eğer $B_e = E$ ise e elemanına **zayıf sıra birim** diyeceğiz. Eğer $B \subset E$ bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B bandına **izdüşüm bandı** denir. Her bandın izdüşüm bandı olduğunu bildiğimiz Riesz uzaylarına "**izdüşüm özelliği**ne sahiptir" diyeceğiz. Eğer E Riesz uzayında her temel bant izdüşüm bandı ise bu uzay "**temel izdüşüm özelliği**ne sahiptir" denir. Eğer E Riesz uzayında üstten sınırlı her altkümenin supremumu bu uzayda mevcut ise E Riesz uzayına **Dedekind tam** diyeceğiz. Gerçel sayıların Dedekind tam olduğuna ancak $C([0,1])$'in Dedekind tam olmadığına dikkat edelim. Esas içerme teoremi olarak bilinen teoreme göre aşağıdaki gerektirmeler sağlanır.

$$\begin{aligned} \textbf{Dedekind Tam} &\Rightarrow \textbf{İzdüşüm Özeliği} \\ &\Rightarrow \textbf{Temel İzdüşüm Özelliği} \\ &\Rightarrow \textbf{Arşimedyen} \end{aligned}$$

E Riesz uzayının elemanlarından oluşan bir (f_n) dizisi verilsin. Eğer her bir n doğal sayısı için, $|f_n - f| \leq p_n$ olacak şekilde E' nin elemanlarından oluşan ve $\inf\{p_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ özelliğine sahip azalan bir (p_n) dizisi var ise (f_n) dizisi $f \in E$ elemanına **sıra yakınsar** denir ve $o - \lim f_n = f$ ile gösterilir.

Eğer verilen bir $u \in E_+$ ve her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $|f_n - f| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ elemanı var ise f_n dizisi $f \in E$ elemanına **göreli düzgün yakınsar** denir ve $ru-\lim f_n = f$ ile gösterilir. Buradaki $u \in E_+$ elemanına f_n dizisinin **düzenleyicisi** denir. Her iki yakınsaklık tanımı için de **sıra Cauchy** ve **göreli düzgün Cauchy** tanımları da benzer olarak yapılır. Eğer f_n dizisi sıra yakınsıyor ise bu anlamdaki sıra limiti tektir. Eğer f_n ve g_n dizileri için $o-\lim f_n = f$ ve $o-\lim g_n = g$ ise, $o-\lim(f_n \vee g_n) = f \vee g$, $o-\lim(f_n \wedge g_n) = f \wedge g$ ve α, β gerçel sayıları için, $o - \lim(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha f + \beta g$, özellikleri geçerlidir. Ayrıca eğer E Arşimedyen Riesz uzayı ise göreli düzgün limit de tektir ve sıra yakınsaklığı gerektirir. Eğer E Riesz uzayında her göreli düzgün Cauchy dizisinin, göreli düzgün limiti var ise E Riesz uzayına **düzgün tam** Riesz uzayı diyeceğiz.

E ve F iki Riesz uzayı olsun. Eğer $f, g \in E$ için $f \vee g$ olduğunda $T(f) \vee T(g)$ sağlanıyor ise $T : E \to F$ doğrusal dönüşümüne **Riesz homomorfizması** denir. Eğer T bire-bir ve örten bir Riesz homorfizması ise T' ye **Riesz izomorfizması** denir. Bu durumda E ve F uzaylarına **Riesz izomorfik uzaylar** denir. E' deki pozitif elemaları F' deki pozitif elemanlara taşıyan doğrusal dönüşümlere **pozitif dönüşüm** denir. Kantorovič Teoremi olarak bilinen teoreme göre eğer F Dedekind tam Riesz uzayı ve G, E Riesz uzayını sınırlıyor ise $T : G \to F$ pozitif dönüşümünün tüm E uzayına pozitif olarak genişlemesi vardır. Bu teoremin ispatında Hahn-Banach teoreminin Riesz versiyonunun önemli rol oynadığını belirtelim. Eğer bir dönüşüm homomorfizma ise bunun bir pozitif dönüşüm olacağına dikkat edelim. E'nin sıra sınırlı kümelerini F'nin sıra sınırlı kümelerine taşıyan doğrusal dönüşümlere **sıra sınırlı dönüşüm** diyeceğiz. F Dedekind tam olduğunda E' den F' ye sıra sınırlı dönüşümlerin uzayı $L_b(E, F)$ Riesz uzay olacaktır. E' deki sıra yakınsak dizilerin görüntülerini F'de de sıra yakınsak yapan $T \in L_b(E, F)$ dönüşümüne **sıra sürekli dönüşüm** denir. E' den F' ye sıra sınırlı sürekli doğrusal dönüşümlerin uzayı $L_b^n(E, \mathbb{R})$ olarak gösterilir. $F = \mathbb{R}$ durumunda dönüşüm yerine **fonksiyonel** diyeceğiz ve sıra sınırlı fonksiyonelerin uzayı için $L_b(E, \mathbb{R}) = \tilde{E}$ ve sıra sınırlı sürekli fonksiyonellerin uzayı $L_b^n(E, \mathbb{R}) = \tilde{E}^n$ olarak yazacağız.

X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$, X' in altkümelerinin bir ailesi olsun. Bu aile $X \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$ ve $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cup B \in \mathcal{F}$ özelliklerine sahip ise $\mathcal{F}$' ye **kümeler cebiri** denir. Eğer son özellik sayılabilir sayıdaki $\mathcal{F}$' nin alt kümesi için sağlanıyor ise $\mathcal{F}$' ye **kümeler σ-cebiri** denir. Gerçel sayıların alt kümelerinden oluşmuş Lebesgue ölçülebilir kümeler sınıfı böyle bir kümedir. Özellikle $[0, 1]$ aralığında tanımlı Lebesgue inegrallenebilir fonksiyonların uzayını $L_1[0, 1]$ ile göstereceğiz. Klasik ölçü teorisi ve Lebesgue integral teorisi için (Halmos, 1974), (Aliprantis and Burkinshaw, 1998),(Fremlin, 2002), (Bhaskara Rao and Bhaskara Rao, 1983) ve vektör değerli ölçüler ve integral teorisi için de (Diestel and Jr. Uhl, 1977) kaynaklarından detaylı bilgi edinilebilir.

3 RİESZ UZAY DEĞERLİ ÖLÇÜLER

3.1 Bazı Temel Özellikler

Bu bölümde Riesz uzay değerli ölçülerin bazı temel özellikleriyle ilgileneceğiz. Bu tür ölçüleri özelliklerini anlama açısından sınıflandırma ve örneklendirme yoluna gideceğiz. Bu bölümde aksi söylenene kadar E bir Riesz uzayı, $\mathcal{F}$, X' in altkümelerinin bir kümeler cebiri olsun.

Tanım 3.1.1 *$\mu : \mathcal{F} \to E$ fonksiyonuna, $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere $A, B \in \mathcal{F}$ için $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ şartını sağlıyor ise,* ***toplamsal ölçü*** *denir. $\mathcal{F}$' den E' ye tüm toplamsal ölçülerin kümesini* $\boldsymbol{a}(\mathcal{F}, E)$ *ile göstereceğiz.*

Gözlem 3.1.1 $\boldsymbol{a}(\mathcal{F}, E)$*'nin elemanlarını noktasal sıralamaya göre sıralayabiliriz. "$\mu_1, \mu_2 \in a(\mathcal{F}, E)$ için $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow$ Her $A \in \mathcal{F}$ için $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$" bağıntısı $a(\mathcal{F}, E)$' de bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Dolayısıyla burada* ***pozitif*** *bir ölçüden bahsettiğimiz zaman anlamamız gereken bu anlamdaki pozitifliktir. Şimdi bu sıralamanın yardımıyla ileride sıkça bahsedeceğimiz ölçü çeşitlerinin tanımlarını verelim.*

Tanım 3.1.2 *(i) $\mu \in a(\mathcal{F}, E)$ için* $\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{F}\}$ *değeri E' de mevcut ise μ' ye* ***sıra sınırlı ölçü*** *diyeceğiz. $\mathcal{F}$' den E' ye tüm toplamsal ve sıra sınırlı ölçülerin sınıfını* $\boldsymbol{oba}(\mathcal{F}, E)$ *ile göstereceğiz.*
(ii) $\mathcal{F}$ deki kümelerin ikişer ikişer ayrık dizisi olan (A_n) dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ olsun. $\mu \in a(\mathcal{F}, E)$ ölçüsü $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ özelliğine sahipse, μ' ye ***sayılabilir toplamsal ölçü*** *diyeceğiz. $\mathcal{F}$' den E' ye tüm sayılabilir toplamsal ve sıra sınırlı ölçülerin sınıfını* $\boldsymbol{obca}(\mathcal{F}, E)$ *ile göstereceğiz.*

Yukarıda (ii)' deki $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ gösterimini, $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$ dizisinin sıra limiti anlamında kullandığımıza dikkat edelim. Böyle ölçülerin temel özellikleriyle ilgili bir önerme vererek devam edelim. Bu önerme kanıtlandıktan sonra bu tür ölçülere ait örnekler vereceğiz.

Önerme 3.1.1 *$\mu \in a(\mathcal{F}, E)$ olmak üzere, aşağıdakiler geçerlidir.*
(i) $F_1, F_2, ..., F_n$ ikişer ikişer ayrık n' lisi $\mathcal{F}$' den alınsın. Bu durumda,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

sağlanır.

(ii) $A, F \in \mathcal{F}$, $A \subset F$ *olsun. Bu durumda* $\mu(F - A) = \mu(F) - \mu(A)$ *sağlanır.*

(iii) μ *pozitif ve* $F_0, F_1, F_2, ..., F_n$ *n' lisi* $\mathcal{F}$ *' den* $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *olacak şekilde alınsın. Bu durumda,*

$$\mu(F_0) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$$

ve ayrıca,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i).$$

sağlanır.

(iv) E_n, $\mathcal{F}$ *' deki ikişer ikişer ayrık kümelerin bir dizisi,* $A \in \mathcal{F}$ *,* $\bigcup_{n \geq 1} E_n \subset A$ *ve* μ *pozitif olsun. Bu durumda,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(A),$$

sağlanır.

İspat: (i) Tümevarım ile hemen elde edilir.

(ii) $F = A \cup (F - A)$ olduğundan $\mu(F) = \mu(A) + \mu(F - A)$ dır. Böylece $\mu(F - A) = \mu(F) - \mu(A)$ elde edilir.

(iii) Eğer $A \subset B$ ve μ pozitif ise $\mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ ve bu durumda $\mu(A) \leq \mu(B)$ olacağına dikkat edelim. Şimdi $E_1 = F_1$, $E_2 = F_2 - F_1$, ..., $E_n = F_n - (\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i)$ olsun. Bu durumda $E_1, E_2, ..., E_n$ ikişer ikişer ayrık ve her $i = 1, 2, .., n$ için $E_i \subset F_i$ özelliğine sahip kümeleri için $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ sağlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu(F_0) &\leq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i). \end{aligned}$$

(iv) μ pozitif olduğundan her $n \geq 1$ için $\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq \mu(A)$ dir. Sonuç olarak,

$$o - \lim \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) \leq \mu(A)$$

elde edilir.

Örnek 3.1.1 *$\mathcal{F}$ kümeler cebirini, $[0,1]$' in Lebesgue ölçülebilir altkümelerinin cebiri olarak alalım. E keyfi bir Riesz uzayı ve $T : L_1[0,1] \to E$ doğrusal dönüşüm olsun. $\mu : \mathcal{F} \to E$ fonksiyonu, $\mu(A) = T(\chi_A)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon Riesz uzay değerli ölçüdür. Ancak $E = \mathbb{R}$ durumunda bile sıra sayılabilir toplamsal değildir.*

Aşağıdaki örnek sıra sayılabilir toplamsal ancak sıra sınırlı olmayan ölçüye örnektir.

Örnek 3.1.2 *$\mathcal{F}$, $[0,1]$ deki Lebesgue ölçülebilir kümelerin cebiri ve Riesz uzayı olarak sıfıra yakınsayan gerçel terimli dizilerin uzayı, c_0' ı koordinat sıralamasıyla ele alalım. λ klasik Lebesgue ölçüsü olmak üzere, $\mu : \mathcal{F} \to c_0$ ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlansın,*

$$\mu(A) = (\int_A \sin 2\pi k t d\lambda)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Bu ölçünün sayılabilir toplamsallığını, c_0 Riesz uzayında sıra yakınsaklık ile koordinat yakınsaklığının aynı olduğuna ve Lebesgue integralinin doğrusallığına dikkat ederek gösterebiliriz. Sıra sınırlı olmadığını görmek için, $\sup\{|\int_A \sin 2\pi k t dt| : A \in \mathcal{F}\} = 1$ olduğuna dikkat edelim.

Örnek 3.1.3 *$\mathcal{F}$, $[0,1]$' deki Lebesgue ölçülebilir kümelerin cebiri ve c_0, koordinat sıralamasıyla sıfıra yakınsayan gerçel terimli dizilerin, Riesz uzayı olsun. $\mu : \mathcal{F} \to c_0$ ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlansın;*

$$\mu(A) = \{\frac{\lambda(A)}{k}\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

λ klasik Lebesgue ölçüsü olmak üzere, μ sıra sınırlı, sıra sayılabilir toplamsal ve pozitif bir ölçüdür.

Gözlem 3.1.2 *Son iki örnekte, c_0 Riesz uzayında sıra yakınsaklık ile koordinat yakınsaklığının çakıştığına dikkat edelim. Aslında bu uzayda klasik düzgün yakınsaklıkla göreceli düzgün yakınsaklık çakıştığından μ, aynı zamanda göreceli düzgün yakınsaklık anlamında da sıra sayılabilir toplamsaldır.*

Genel olarak $a(\mathcal{F}, E)$ ailesi noktasal işlemler ile bir sıra vektör uzayıdır. E Dedekind tam olsa bile $a(\mathcal{F}, E)$ Riesz uzayı olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1.4 *$X = \{1, 2, ...\}$ ve $\mathcal{F} = \{A \subset X : A$ veya A^c sonlu$\}$ olsun. Riesz uzayı olarak Dedekind tam Riesz uzayı olan gerçel sayıları alalım. $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlansın;*

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & A \text{ sonlu ise} \\ -|A^c|, & A^c \text{ sonlu ise} \end{cases}$$

Burada $|A|$, A nın eleman sayısını göstersin. Yukaridaki gibi tanımlı μ için $-\mu$' nün de ölçü olacağına ancak $\mu \vee (-\mu)$' nin ölçü olmayacağına dikkat edelim.

E Dedekind tam olsa bile $a(\mathcal{F}, E)$ Riesz uzayı olmaması, bu uzaya ait ölçüler için bazı önemli özellikleri kullanamamamız sonucunu doğurur. Bu özelliklerden ilk akla geleni bir ölçünün iki pozitif ölçünün farkı şeklinde yazılabiliyor olmasıdır. Bir başka deyişle *Jordan Parçalanma* özelliğidir. Bu özellik E Dedekind tam olmak üzere $oba(\mathcal{F}, E)$ sınıfının Riesz uzayı olmasının doğal sonucudur. Bu iyi bilinen sonuç ile devam edelim. Aşağıdaki teoremin ispatı (Schmidt, 1986) de bulunabilir.

Teorem 3.1.1 *$\mathcal{F}$, X'in altkümelerinin bir kümeler cebiri ve E Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*
(1) $(oba(\mathcal{F}, E), \leq)$ sıralı vektör uzayıdır, burada $\leq$ kısmi sıralaması,
"$\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow$ Her $A \in \mathcal{F}$ için $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$" noktasal sıralamasıdır.
(2) $\mu_1, \mu_2 \in oba(\mathcal{F}, E)$ olsun. λ ve τ, $\mathcal{F}$' den E' ye aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\lambda(A) = \sup\{\mu_1(B) + \mu_2(A \setminus B), B \subset A, B \in \mathcal{F}\}$$

ve

$$\tau(A) = \inf\{\mu_1(B) + \mu_2(A \setminus B), B \subset A, B \in \mathcal{F}\}.$$

Bu durumda $\lambda, \tau \in oba(\mathcal{F}, E)$ dir.
(3) $oba(\mathcal{F}, E)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır.

Yukarıda (2)' de tanımlanan λ ve τ sırasıyla $\mu_1 \vee \mu_2$ ve $\mu_1 \wedge \mu_2$ sıra sınırlı ölçülerine karşılık gelir. Aşağıdaki sonuç Teorem 3.1.1' in doğal sonucudur ve (Schmidt, 1986)'da bulunabilir.

Sonuç 3.1.1 *μ toplamsal ölçüsünün sıra sınırlı olması için gerek yeter şart μ' nün Jordan parçalanışının olmasıdır.*

Bu bölümün geri kalanında $obca(\mathcal{F}, E)$ sınıfını, $oba(\mathcal{F}, E)$ Dedekind tam Riesz uzayının alt uzayı olarak ele alıp, $obca(\mathcal{F}, E)$'nin sıra ve altuzay özellikleri ile ilgileneceğiz. Aşağıdaki önerme gerçel değerli sayılabilir toplamsal ölçülerden esinlenerek Riesz uzay değerli sıra sayılabilir ölçülere genişletilmiştir.

Önerme 3.1.2 *$\mu \in a(\mathcal{F}, E)$ için aşağıdakiler denktir.*

(1) μ sıra sayılabilir toplamsaldır.

(2) $\mathcal{F}$' nin her $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ şartını sağlayan A_n artan kümeler dizisi için

$$o - \lim \mu(A_n) = \mu(A)$$

.

(3) $\mathcal{F}$' nin her $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ şartını sağlayan A_n azalan kümeler dizisi için

$$o - \lim \mu(A_n) = \mu(A)$$

.

(4) $\mathcal{F}$' nin her $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$ şartını sağlayan A_n azalan kümeler dizisi için

$$o - \lim \mu(A_n) = 0$$

.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) μ sıra sayılabilir toplamsal olsun. (A_n) artan dizisi $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ şartını sağlasın. (A_n) dizisini yeniden düzenleyerek ikişer ikişer ayrık $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, ..., $B_n = A_n - A_{n-1}$,..., olacak şekilde birleşimleri A' yı veren (B_n) dizisini oluşturalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n) \\ &= o - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \\ &= o - \lim \mu(A_n) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) (A_n) azalan dizisi $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ şartını sağlasın. $(A_n)^c$ dizisi artan dizisi (1)'in argümanını sağladığından

$$\mu(X - A) = \mu(X) - o - \lim \mu(X - A_n)$$

eşitliğinden istenilen elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Bu kısım açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1) μ' nin sıra sayılabilir olduğunu görmek için $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{F}$ şartını sağlayan $\mathcal{F}$' deki B_n ikişer ikişer ayrık dizisini alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_n = \bigcup_{m\geq n} B_m$$

olarak tanımlayalım. (A_n) azalan dizisi için $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$ dir. (4)' den

$$\begin{aligned}
0 &= o - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = o - \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{m\geq n} B_m) \\
&= o - \lim_{n\to\infty} \mu(B - \bigcup_{m=1}^{n-1} B_m) \\
&= o - \lim_{n\to\infty} [\mu(B) - \sum_{m=1}^{n-1} \mu(B_m)]
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_m),$$

yani, μ sıra sayılabilir toplamsaldır.

$obca(\mathcal{F}, E)$' nin $oba(\mathcal{F}, E)$' nin bir altuzayı olduğunu kolayca gözlemleyebiliriz. Bu alt uzayın, sıra anlamında $oba(\mathcal{F}, E)$'nin özel bir altuzay olduğunu, (Schwartz, 1989)' dan biliyoruz. Aşağıdaki teorem bu sonucu ifade etmektedir.

Teorem 3.1.2 *$obca(\mathcal{F}, E)$ altuzayı, $oba(\mathcal{F}, E)$ Dedekind tam uzayının bir izdüşüm bandıdır.*

Bu, her sıra sınırlı toplamsal ölçü sıra sınırlı sayılabilir toplamsal ve sıra sayılabilir toplamsal ölçülerin dik bileşeni olan bir elemanın direk toplamı şeklinde yazılacağı anlamına gelir.

3.2 Sıra Sınırlı Toplamsal Ölçülere İki Yaklaşım

Toplamsal ölçülerin, üzerinde tanımlı oldukları kümeler cebirinin kardinalitesinin, sıra sınırlı ölçü olmalarında nasıl bir rol oynadığı, sorulması gereken doğal sorulardan biridir. Riesz uzay değerli ölçüler için bir genellemesini elde ettiğimiz aşağıdaki teoremin gerçel değerli versiyonu (Bade, 1958)' de bulunabilir.

Teorem 3.2.1 *$\mathcal{F}$, X'in altkümelerinin bir kümeler cebiri ve E Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*
(1) $\mathcal{F}$ sonlu kardinaliteye sahiptir.
(2) Her toplamsal $\mu : \mathcal{F} \to E$ ölçüsü sıra sınırlı toplamsaldır.

İspat: (1)⇒(2) E'nin Riesz uzayı olmasından hemen elde edilir.
(2)⇒(1) $\mathcal{F}$'nin kardinalitesinin sonlu olmadığını ve her toplamsal $\mu : \mathcal{F} \to E$ ölçüsünün sıra sınırlı toplamsal olduğunu kabul edelim. Sıra sınırlı olmayan bir ölçü inşa ederek çelişkiye düşeceğiz. $\mathcal{F}$'nin elemanlarından, ikişer ikişer ayrık ve herbiri boştan farklı olan bir (C_n) dizisi alalım. Şimdi her bir $n \in \mathbb{N}$ için $c_n \in C_n$ seçelim ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için toplamsal gerçel değerli bir ölçü olan $p_n : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ dizisini,

$$p_n(A) = \begin{cases} 1, & c_n \in A \text{ ise} \\ 0, & c_n \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ toplamsal gerçel değerli ölçüsü de

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{5^n} p_n(A)$$

ile tanımlansın. $\xi = (\frac{\pi^n}{5^n})$ ailesi rasyonel cisim üzerinde lineer bağımsız olduğundan lineer cebirden ξ' yi gerçel sayıların bir $\mathfrak{B}$ Hamel tabanına genişletebiliriz. Şimdi e, E'nin pozitif bir elemanı olsun. $\alpha : \mathfrak{B} \to E$ doğrusal dönüşümünü,

$$\alpha(x) = \begin{cases} ne, & x \in \xi \text{ ise} \\ 0, & x \in \mathfrak{B} \setminus \xi \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlayalım. $\mathfrak{B}$ gerçel sayılar Riesz uzayının sınırlanan altvektör uzayıdır. (Kantorovic, 1937)'den, α' nın gerçel sayılara $\overline{\alpha}$ pozitif doğrusal genişlemesi vardır. Şimdi $\mu : \mathcal{F} \to E$ toplamsal ölçüsünü, her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\mu(A) = \overline{\alpha}(\nu(A))$$

olarak tanımlayalım. Bu ölçü sıra sınırlı değildir. Bu çelişki bizi $\mathcal{F}$'nin kardinalitesinin sonlu olduğu sonucuna götürür.
Aslında E Dedekind tam Riesz uzayı olduğunda, Dedekind tam Riesz uzayı yapısı teşkil ettiğini bildiğimiz sıra sınırlı ölçüler sınıfını, yani $oba(\mathcal{F}, E)$ uzayını, bir başka açıdan ele almamızı sağlayacak aşağıdaki tanımla bu uzay ile ilgilenmeye devam ediyoruz. Aşağıdaki tanımın gerçel versiyonu (Bhaskara Rao and Bhaskara Rao, 1983)' de bulunabilir.

Tanım 3.2.1 *μ, $\mathcal{F}$ kümeler cebirinde tanımlı, E Riesz uzay değerli toplamsal ölçü olsun. $\mathcal{F}$' deki her ikişer ikişer ayrık (A_n) dizisi için $o-\lim \mu(A_n) = 0$ ise μ' ye* ***s-sınırlı*** *ölçü denir. $\mathcal{F}$' den E' ye tüm toplamsal ve s-sınırlı ölçülerin sınıfını* ***sba***$(\mathcal{F}, E)$ *ile gösterelim.*

Sıra sınırlı toplamsal ölçülerin, s-sınırlı olduğunu görmek kolaydır. μ böyle bir ölçü ve (E_i) ikişer ikişer ayrık dizisi $\mathcal{F}$' den alınmış olsun.

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) < \sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{F}\}$$

ifadesinden, $o-\lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = 0$ olduğu sonucuna varılır. Yani sıra sınırlı toplamsal ölçüler s-sınırlıdır. Herhangi bir Riesz uzayında tersi doğru mu sorusuna karşılık cevabımız negatiftir. Bunun için Örnek 3.1.2 'de tanımlanan ölçünün s-sınırlı ancak sıra sınırlı olmadığı görülebilir. Bu durumda $oba(\mathcal{F}, E) \subset sba(\mathcal{F}, E)$ içermesinin alt uzay anlamında kesin olduğunu söyleyebiliriz. Ancak ölçülerimizin değer aldığı Riesz uzayı üzerine yada sınırlılık tanımlarına bazı ek şartlar koyarak denklikler elde edilebilir. Bunun için bir kaç tanıma daha ihtiyacımız olacak.

Tanım 3.2.2 *E Riesz uzayında, (h_k) dizisi azalamayan bir dizi olsun. Eğer her $e \in E$ için $|e| \leq th_k$ olacak şekilde $t > 0$ gerçel sayısı var ise E uzayına* ***PR özelliğine sahip*** *Riesz uzayı denir.*

Kolayca görüleceği üzere sıra birime sahip her Riesz uzayı PR özelliğine sahiptir. Ancak sıra birime sahip olmayan PR özelliğine sahip Riesz uzayları da vardır. Bu bağlamda sadece sonlu terimi sıfırdan farklı olan dizilerden oluşan c_{00} uzayı koordinat sıralamasıyla ele alındığında böyle bir Riesz uzayına örnektir. Asagidaki teoremin ispatı (Schwartz, 1989)' daki Teorem 1 kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 3.2.2 *$\mathcal{F}$, X'in altkümelerinin bir kümeler cebiri ve E Riesz uzayı, PR özelliğine sahip olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(1) $\mu : \mathcal{F} \to E$ toplamsal ölçüsü sıra sınırlıdır.

(2) $\mu : \mathcal{F} \to E$ toplamsal ölçüsü s-sınırlıdır.

Yukarıdaki teoremden E' nin PR özelliğine sahip Dedekind tam Riesz uzayı olması durumunun Riesz alt uzay anlamında $sba(\mathcal{F}, E) = oba(\mathcal{F}, E)$ sonucunu verdiğine dikkat edelim. O halde aşağıdaki sonuç kaçınılmazdır.

Sonuç 3.2.1 *$\mathcal{F}$, X'in altkümelerinin bir kümeler cebiri ve E Dedekind tam Riesz uzayı, sıra birim elemana sahip olsun. Bu durumda $oba(\mathcal{F}, E)$ ile $sba(\mathcal{F}, E)$ uzayları aynıdır.*

3.3 Dış Ölçü

Bu bölümde Riesz uzay değerli integral teorisini inşa etmek için bizim için önemli bir araç olacak "dış ölçü" kavramı ile ilgileneceğiz. Bu bölüm boyunca X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{F}$ bu küme üzerinde tanımlı bir kümeler cebiri, E Dedekind tam Riesz uzayı ve $\mu \in oba(\mathcal{F}, E)$ pozitif olacaktır. Ayrıca $\tilde{e} \in \tilde{E}^n$ sabitlenmiş kesin pozitif sıra sürekli bir fonksiyoneli simgelesin.

Önerme 3.3.1 $\mu^* : \wp(X) \to [0, \infty)$ *fonksiyonu,*

$$\mu^*(A) = \inf\{\tilde{e}(\mu(B)) : A \subset B, B \in \mathcal{F}\}$$

olarak tanımlanmış olsun. Bu küme fonksiyonu her kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonel için genişletilmiş gerçel değerli bir dış ölçüdür.

İspat: Öncelikle $\mu^*(\emptyset) = 0$ olduğunu görelim. Bunun için,

$$0 \leq \inf\{\tilde{e}(\mu(B)) : \emptyset \subset B, B \in \mathcal{F}\} \leq \tilde{e}(\mu(\emptyset)) = 0$$

olduğuna dikkat etmek yeterlidir. μ^*' ın monoton olduğunu göstermek için $A \subset C \subset X$ olsun.

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf\{\tilde{e}(\mu(B)) : A \subset B, B \in \mathcal{F}\} \\ &\leq \inf\{\tilde{e}(\mu(B)) : A \subset C \subset B, B \in \mathcal{F}\} \\ &= \mu^*(C) \end{aligned}$$

Alt toplamsallık özelliğinden önce her $A \in \mathcal{F}$ için $\mu^*(A) = \tilde{e}(\mu(A))$ olduğunu görelim. Aslında $\tilde{e}(\mu(A))$, önerme 3.1.1 (iii)' den $\{\tilde{e}(\mu(B)) : A \subset B, B \in \mathcal{F}\}$ kümesi için bir alt sınırdır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf\{\tilde{e}(\mu(B)) : A \subset B, B \in \mathcal{F}\} \\ &\leq \tilde{e}(\mu(A)) \end{aligned}$$

olduğundan $\mu^*(A) = \tilde{e}(\mu(A))$ elde edilir. Alt toplamsallık için $A, B \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\tilde{e}(\mu(A_1)) \leq \tilde{e}(\mu(A)) + \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $A \subset A_1 \in \mathcal{F}$ ve $B \subset B_1 \in \mathcal{F}$ vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) &\leq \mu^*(A_1 \cup B_1) = \tilde{e}(\mu(A_1 \cup B_1)) \\ &\leq \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan, $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ sonucuna varılır. Bu bölümün başında μ' yü $oba(\mathcal{F}, E)$' nin pozitif bir elemanı olarak almıştık. Aslında verilen herhangi bir $\mu \in oba(\mathcal{F}, E)$ için bir μ^* dış ölçüsü üretilebilir. $oba(\mathcal{F}, E)$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan, her $\mu \in oba(\mathcal{F}, E)$ için $|\mu|$, $oba(\mathcal{F}, E)$' nin pozitif bir elemanı olacaktır. Yukarıdaki prosedür $|\mu|$ ile devam ettirilirse istenilen dış ölçü elde edilir. Tabi ki bu noktada sıra sürekli dualin zenginliğinin de önem teşkil ettiğini belirtelim. $oba(\mathcal{F}, E)$ Dedekind tam Riesz uzayının keyfi bir elemanından dış ölçü elde etme durumunu aşağıdaki önerme ile incelemeye devam edelim.

Önerme 3.3.2 *μ_1 ve μ_2, $oba(\mathcal{F}, E)$' nin iki pozitif elemanı olsun. Bu durumda,*

$$(\mu_1 + \mu_2)^* = \mu_1^* + \mu_2^*$$

eşitliği sağlanır.

İspat: μ_1 ve μ_2 $oba(\mathcal{F}, E)$' nin iki pozitif elemanı olsun. $A \subset X$ için,

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2)^*(A) &= \inf\{\tilde{e}((\mu_1 + \mu_2)(B)); A \subset B, B \in \mathcal{F}\} \\ &= \inf\{\tilde{e}(\mu_1(B)) + \tilde{e}(\mu_2(B)); A \subset B, B \in \mathcal{F}\} \\ &\geq \inf\{\tilde{e}(\mu_1(B)); A \subset B, B \in \mathcal{F}\} + \inf\{\tilde{e}(\mu_2(B)); A \subset B, B \in \mathcal{F}\} \\ &= \mu_1^*(A) + \mu_2^*(A). \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(\mu_1 + \mu_2)^* \geq \mu_1^* + \mu_2^*$. Diğer taraftan $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\tilde{e}(\mu_1(B_1)) \leq \mu_1^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\tilde{e}(\mu_2(B_2)) \leq \mu_2^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $A \subset B_1 \in \mathcal{F}, A \subset B_2 \in \mathcal{F}$ vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2)^*(A) &\leq \tilde{e}((\mu_1 + \mu_2)(B_1 \cap B_2)) \\ &= \tilde{e}(\mu_1(B_1 \cap B_2)) + \tilde{e}(\mu_2(B_1 \cap B_2)) \\ &\leq \mu_1^*(A) + \mu_2^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan, $(\mu_1 + \mu_2)^* \leq \mu_1^* + \mu_2^*$ sağlanır. O halde $(\mu_1 + \mu_2)^* = \mu_1^* + \mu_2^*$ eşitliği sağlanır.
Yukarıdaki önermeden hemen elde edilebilecek bir sonuç ile bu bölümü noktalıyoruz.

Sonuç 3.3.1 *Herhangi bir $\mu \in oba(\mathcal{F}, E)$ için, $|\mu|^* = \mu_+^* + \mu_-^*$ sağlanır.*

3.4 Sıfır Kümeler ve Sıfır Fonksiyonlar

Bu bölümde klasik ölçü teorisinde oldukça önemli yere sahip sıfır küme ve sıfır fonksiyon kavramlarını, Riesz uzay değerli ölçüler ve fonksiyonlar için vereceğiz. Bir sonraki bölümün konusunu oluşturacak bir çeşit yakınsaklık elde etmemizi sağlayacak bu kavramlar, integrallenebilirlik tanımına giden yolda epeyce yararlandığımız kavramlar olacak. Bu bölümde X boştan farklı bir küme, $\mathcal{F}$ bu küme üzerinde bir kümeler cebiri ve μ sıra sınırlı toplamsal bir ölçü olmak üzere, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ üçlüsü gösterimini ölçü uzayı için kullanacağız.

Tanım 3.4.1 *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ ölçü uzayı verilsin. $|\mu|^*(A) = 0$ koşulunu sağlayan X' in A altkümesine **μ-sıfır kümesi** denir.*

μ-sıfır kümelerin bazı temel özelliklerinin verildiği aşağıdaki önermenin ispatı, önerme 3.3.1'den elde edilebilir.

Önerme 3.4.1 *Bir $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ölçü uzayında aşağıdakiler sağlanır.*
(1) $\emptyset$ bir μ-sıfır kümedir.
(2) A bir μ-sıfır küme ve $B \subset A$ ise B de bir μ-sıfır kümedir.
(3) Sonlu tane μ-sıfır kümenin birleşimi yine bir μ-sıfır kümedir.

μ-sıfır küme kavramını kullanarak Riesz uzay değerli fonksiyonlar için söz konusu olacak bir tanımla devam edelim.

Tanım 3.4.2 *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ ölçü uzayı ve $\tilde{e} \in \tilde{E}^n$ sabitlenmiş kesin pozitif sıra sürekli bir fonksiyoneli simgelesin. f, g, h fonkisyonları X' de tanımlı ve E Dedekind tam Riesz uzayında değer alan fonksiyonlar olsun.*
*(1) Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde f için $|\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f(x)|) > \varepsilon)\}) = 0$ koşulu sağlanıyor ise f' ye **μ-sıfır fonksiyon** denir.*
*(2) Eğer $f - g$ bir μ-sıfır fonksiyon ise f ile g **hemen hemen her yerde***

eşittir *denir. Böyle iki fonksiyonu "**f=g** μ**-h.h.h.**" ile göstereceğiz.*

*(3) Eğer $f \leq g+h$ ve h bir μ-sıfır fonksiyon ise f , g tarafından **hemen hemen her yerde domine ediliyor** denir. Söz konusu sıralama noktasal sıralamadır. Böyle iki fonksiyonu "$f \leq g$ μ**-h.h.h.**" ile göstereceğiz.*

μ-sıfır küme tanımında olduğu gibi μ-sıfır fonksiyon tanımında da $\tilde{e} \in \tilde{E}^n$ sabitlenmiş kesin pozitif sıra sürekli fonksiyonelin oynadığı role dikkat çekmek isteriz. Tabi ki her iki tanım da bu fonksiyonelin seçimine bağlıdır. Ayrıca tanım 3.4.2 (ii)' deki f=g μ-h.h.h. bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu belirtmek isteriz. Aşağıdaki önerme μ-sıfır fonksiyonların bazı temel özellikleri ile ilgilidir.

Önerme 3.4.2 *Sabitlenmiş kesin pozitif sıra sürekli $\tilde{e} \in \tilde{E}^n$ fonksiyoneli ve $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ölçü uzayı verilsin. X de tanımlı ve E Dedekind tam Riesz uzayında değerli f, g, h fonksiyonları için aşağıdakiler sağlanır.*

(1) Eğer f ve g μ-sıfır fonksiyonlar, c ve d birer gerçel sayı ise $cf + dg$ ve $|f|$ fonksiyonları da μ-sıfır fonksiyondur.

(2) Eğer f bir μ-sıfır fonksiyon ve $|g| \leq |f|$ ise g de bir μ-sıfır fonksiyondur.

İspat: (1) Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin ve f, g, c, d yukarıdaki gibi olsun.

$$\begin{aligned} |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|cf(x) &+ dg(x)|) > \varepsilon)\}) \\ &\leq |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|c||f(x)| + |d||g(x)|) > \varepsilon)\}) \\ &\leq |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f(x)|) > \frac{\varepsilon}{2|c|})\}) \\ &\cup |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|g(x)|) > \frac{\varepsilon}{2|d|})\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Böylece $cf+dg$ bir μ-sıfır fonksiyondur. Ayrıca söz konusu noktasal sıralamaya göre $|f|(x) = |f(x)|$ olduğundan $|f|$' de bir μ-sıfır fonksiyondur.

(2) f bir μ-sıfır fonksiyon ve $|g| \leq |f|$ olsun. Bir h μ-sıfır fonksiyonu için $|g| \leq |f| + h$ dir. (1)'den dolayı $|f| + h$ bir μ-sıfır fonksiyondur. Ayrıca,

$$\{x \in X : \tilde{e}(|g(x)|) > \varepsilon)\} \subset \{x \in X : \tilde{e}(|f(x)| + h(x)|) > \varepsilon)\}$$

olduğundan,

$$|\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|g(x)|) > \varepsilon)\}) \leq |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(||f(x)| + h(x)| > \varepsilon)\}) = 0$$

elde edilir. Yani g bir μ-sıfır fonksiyondur.
Yukarıdaki önerme μ-sıfır fonksiyonların sınıfının X^E Riesz uzayında, bir sıra ideal olduğu şekline okunabilir.

Uyarı 3.4.1 *Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\{x \in X : \tilde{e}(|f(x)|) > \varepsilon)\} \subset \{x \in X : \tilde{e}(|f(x)|) \neq 0)\})$$

olduğundan, eğer f için $|\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f(x)|) \neq 0)\}) = 0$ koşulu sağlanıyorsa f'nin μ-sıfır olacağına dikkat edelim. Ancak bu koşul μ-sıfır olmaya denk değildir. $E = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{N}$, $\tilde{e} = x$ ve $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} : A$ ya da A^c sonlu$\}$ olsun. A sonlu ise $\mu(A) = 0$, A^c sonlu ise $\mu(A) = 1$ kuralıyla verilen ölçüyü ele alalım. $f(n) = \frac{1}{n}$ alınırsa f' nin μ-sıfır olduğu halde söz konusu şartı sağlamadığı görülür.

3.5 Puslu Yakınsaklık

Daha önce işaret ettiğimiz yakınsaklık çeşidi ile ilgileneceğimiz bu bölümde sabitlenmiş kesin pozitif sıra sürekli $\tilde{e} \in \tilde{E}^n$ fonksiyoneli ve bir önceki bölümdeki gibi olan $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ölçü uzayı ile çalışmaya devam edeceğiz. Dedekind tam Riesz uzay değerli fonksiyonlar için klasik anlamdaki sıra yakınsaklık ile de ilişkili olduğunu kanıtlayacağımız puslu yakınsaklık kavramının tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.5.1 *f_n fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu X üzerinde tanımlı ve E değerli olsun. Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\lim_{n\to\infty} |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \varepsilon\}) = 0$$

*ise f_n dizisi f' ye **puslu** yakınsaktır denir.*

Aşağıdaki önerme hazy yakınsaklığın μ-h.h.h. anlamında biricikliğini ifade etmektedir.

Önerme 3.5.1 *Her bir $n \in \mathbb{N}$ için X' den E' ye tanımlı f_n dizisi, X' den E' ye tanımlı f ve g fonksiyonlarına puslu yakınsak olsun. Bu durumda $f = g$ μ-h.h.h. dir. Tersine f_n dizisi f' ye hazliy yakınsak ve $f = g$ μ-h.h.h. ise f_n dizisi g' ye puslu yakınsaktır.*

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. İlk kısım için,

$$\begin{aligned}\{x \in X : \tilde{e}(|f(x) - g(x)|) > \varepsilon\} &\subset \{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \frac{\varepsilon}{2}\} \\ &\cup \{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - (x)|) > \frac{\varepsilon}{2}\}\end{aligned}$$

ikinci kısım için ise,

$$\begin{aligned}\{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - g(x)|) > \varepsilon\} &\subset \{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \frac{\varepsilon}{2}\} \\ &\cup \{x \in X : \tilde{e}(|f(x) - g(x)|) > \frac{\varepsilon}{2}\}\end{aligned}$$

ifadeleri ile dış ölçünün monotonluğunu kullanıp limit almak yeterlidir.

Puslu yakınsak dizilerin, cebirsel ve sıra özelliklerini inceleyen aşağıdaki teorem ile devam edelim.

Teorem 3.5.1 *X' den E' ye tanımlı f_n ve g_n dizileri, sırasıyla X' den E' ye tanımlı f ve g fonksiyonlarına puslu yakınsak olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*
(1) c ve d iki gerçel sayı olmak üzere $cf_n + dg_n$ dizisi $cf + dg$ fonksiyonuna puslu yakınsar.
(2) $f_n \vee g_n$ dizisi $f \vee g$ fonksiyonuna puslu yakınsar.

İspat: (1) Dış ölçünün monotonluğu ile birlikte aşağıdaki içermeler için limit alındığında istenilen görülür.

$$\begin{aligned}\{x \in X \;&:\; \tilde{e}(|cf_n(x) + dg_n(x) - cf(x) - dg(x)|) > \varepsilon\} \\ &\subset \{x \in X \;: \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \frac{\varepsilon}{2|c|}\} \\ &\cup \{x \in X \;: \tilde{e}(|g_n(x) - g(x)|) > \frac{\varepsilon}{2|d|}\}.\end{aligned}$$

(2) X^E Riesz uzayında Birkhoff eşitsizliğinin bir sonucudur. Yani,

$$|f_n \vee g_n| \leq |f_n - f| + |g_n - g|$$

eşitsizliği ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}\{x \in X \;&:\; \tilde{e}(|f_n \vee g_n(x) - f \vee g(x)|) > \varepsilon\} \\ &\subset \{x \in X \;: \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \frac{\varepsilon}{2}\} \\ &\cup \{x \in X \;: \tilde{e}(|g_n(x) - g(x)|) > \frac{\varepsilon}{2}\}.\end{aligned}$$

içermelerinden istenilen elde edilir.

Bu bölümü X^E Riesz uzayında sıra yakınsaklığın puslu yakınsaklığı gerektirdiğini ifade eden teorem ile sonlandırıyoruz.

Teorem 3.5.2 *f_n dizisi $f : X \to E$ fonkiyonuna E^X' de sıra yakınsak ise f_n dizisi f fonksiyonuna puslu yakınsaktır.*

İspat: f_n dizisi f fonksiyonuna sıra yakınsak olduğundan her $x \in X$ için E' de $p_n(x)$ değerini alan ve $n \to \infty$ iken $p_n \downarrow 0$ olan, her bir $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $|f_n(x) - f(x)| \leq p_n(x)$ sağlayacak p_n dizisi vardır. $\tilde{e}$ kesin pozitif sıra sürekli bir fonksiyonel olduğundan, $\tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) \leq \tilde{e}(p_n(x))$' dir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) \leq \lim_{n\to\infty} \tilde{e}(p_n(x))$$

eşitsizliği her bir $x \in X$ için geçerlidir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Yani f_n dizisi f fonksiyonuna puslu yakınsaktır.

4 RİESZ UZAY DEĞERLİ İNTEGRAL

Bu bölümde Dış ölçü ve Puslu yakınsaklık bölümlerinde yaptığımız gibi verilen kesin pozitif $\tilde{e} \in \tilde{E}^n$ fonksiyonelini kullanarak, Dedekind tam Riesz uzay değerli basit fonksiyonun integralinden başlayıp Dedekind tam Riesz uzay değerli fonksiyonun integraline doğru ilerleyeceğiz.

4.1 Basit Fonksiyonların İntegrali

Bu bölüm boyunca X, boştan farklı bir küme $\mathcal{F}$, X' in altkümelerinden oluşmuş bir kümeler cebiri, E Dedekind tam Riesz uzayı, $\mu \in oba(\mathcal{F}, E)$ olsun. $\varphi : X \to E$ fonksiyonu her bir $i = 1, .., n$ için $\varphi^{-1}(\{x_i\}) = A_i \in \mathcal{F}$ olmak üzere sonlu $x_1, x_2, ..., x_n \in E$ değerlerini alıyor ise φ fonksiyonuna E**-değerli basit fonksiyon** diyeceğiz. Aşağıdaki formülü E-değerli basit fonksiyonun **standart gösterimi** için kullanacağız.

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}.xi$$

gösteriminde $\varphi^{-1}(\{x_i\}) = A_i \in \mathcal{F}$ kümeleri ayrık olmasa bile kolayca ayrıklaştırılıp tekrar düzenlenebileceğinden bu kümeler hep ayrıkmış gibi davranacağız. İlk olarak E-değerli basit fonksiyonlar uzayının noktasal işlemlere göre bir Riesz uzayı yapısı teşkil edeceği gözlemini yapalım. Şimdi E-değerli basit fonksiyonların E-değerli integralinin tanımını vererek başlayalım.

Tanım 4.1.1 *$\varphi : X \to E$, E-basit fonksiyon olsun. φ' nin integrali,*

$$\int \varphi d(\tilde{e}, |\mu|) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).x_i$$

ile tanımlanır. Bu vektorü $\int \varphi d(\tilde{e}, |\mu|)$ ile göstereceğiz. Burada $\tilde{e} \otimes |\mu|(A_i)$ anlamı $\tilde{e}(|\mu|(A_i))$ dir.

Aşağıdaki önerme tanım 4.1.1 de tanımlanan E-değerli basit fonksiyonun integralinin, E-basit fonksiyonun gösterimlerinden bağımsız olduğunu söylemektedir.

Önerme 4.1.1 *Eğer her $j = 1, .., m$ için, $y_j \neq 0$ ve $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{B_j}.y_j$, E-değerli φ basit fonksiyonun başka bir gösterimi ise bu durumda,*

$$\int \varphi d(\tilde{e}, |\mu|) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{e} \otimes |\mu|(B_j).y_j$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Eğer

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}.xi,$$

φ'nin standart gösterimi ise,

$$0 = \varphi - \varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}.xi - \sum_{j=1}^{m} \chi_{B_j}.y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \chi_{A_i \cap B_j}.(x_i - y_j)$$

olduğundan $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ durumunda $x_i = y_j$ olduğu elde edilir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).x_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i \cap B_j).x_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i \cap B_j).x_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i \cap B_j).y_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} \tilde{e} \otimes |\mu|(B_j).y_j
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.1 de ki E- değerli basit fonksiyonların integralin doğrusallığı kolayca elde edilebilir. Ayrıca μ-h.h.h. eşit basit fonksiyonların integrallerinin eşit olacağını belirtelim.

Önerme 4.1.2 *Eğer φ, ve ϕ E-değerli μ-h.h.h. eşit basit fonksiyonlar ise,*

$$\int \varphi d(\tilde{e}, |\mu|) = \int \phi d(\tilde{e}, |\mu|)$$

sağlanır.

İspat: Öncelikle,

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}.xi$$

standart gösterimine sahip h sıfır fonksiyonu için

$$\int hd(\tilde{e}, |\mu|) = 0$$

olduğunu görelim. Bir $i \in \{1, ..., n\}$ için $x_i \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ sayısı $\varepsilon < \tilde{e}(|x_i|)$ olacak şekilde verilsin. h bir basit fonksiyon olduğundan

$\{x \in: \tilde{e}(|h(x)|) > \varepsilon\}$ kümesi, aynı $i \in \{1, ..., n\}$ için A_i kümesini kapsayan $\mathcal{F}$' nin bir elemanıdır. h' nin sıfır fonksiyon olmasından,

$$|\mu|^*(\{x \in: \tilde{e}(|h(x)|) > \varepsilon\}) = 0$$

sağlanır. $|\mu|^*$' ın monotonluğu ve önerme 3.3.1' ın ispatından

$$|\mu|^*(A_i) = \tilde{e}(|\mu|(A_i)) = 0$$

sonucu elde edilir. Şimdi bu sonucu $\phi - \varphi$ basit fonksiyonuna uygularsak, istenilen elde edilmiş olur.

Bir $A \in \mathcal{F}$ kümesi için φ E-değerli basit fonksiyonun integralini

$$\int_A \phi d(\tilde{e}, |\mu|) = \int \chi_A \phi d(\tilde{e}, |\mu|)$$

notasyonu ile göstereceğiz. Aşağıdaki teorem E-değerli basit fonksiyonların özelliklerini detaylı bir şekilde ifade etmektedir.

Teorem 4.1.1 *(1) Eğer φ E-değerli basit fonksiyon ise, her $A \in \mathcal{F}$ için,*

$$\int_A \phi d(\tilde{e}, |\mu|) = \int_A \phi d(\tilde{e}, \mu_+) + \int_A \phi d(\tilde{e}, \mu_-)$$

ve

$$|\int_A \phi d(\tilde{e}, |\mu|)| \leq \int_A |\phi| d(\tilde{e}, |\mu|)$$

eşitliği ve eşitsizliği sağlanır.

(2) Eğer φ, X üzerinde E-değerli basit fonksiyon ve $A \in \mathcal{F}$ için, $\varphi \geq 0$ μ-h.h.h. ise,

$$\int_A \varphi d(\tilde{e}, |\mu|) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Özellikle ϕ, X üzerinde E-değerli basit fonksiyon ve $A \in \mathcal{F}$ için, $\varphi \geq \phi$ μ-h.h.h. ise,

$$\int_A \varphi d(\tilde{e}, |\mu|) \geq \int_A \phi d(\tilde{e}, |\mu|)$$

eşitsizliği sağlanır.

(3) φ ve ϕ, X üzerinde E-değerli basit fonksiyonlar olsun. Her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\begin{aligned} |\int_A |\varphi| d(\tilde{e}, |\mu| - \int_A |\phi| d(\tilde{e}, |\mu|)| &\leq \int_A ||\varphi| - |\phi|| d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &\leq \int_A |\varphi + \phi| d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &\leq \int_A |\varphi| d(\tilde{e}, |\mu|) + \int_A |\phi| d(\tilde{e}, |\mu|) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: (1) Terimleri yeniden düzenleyerek

$$J = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ ve } x_i \neq 0\}$$

alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_A \varphi d(\tilde{e}, |\mu|) &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).x_i = \sum_{i \in J} \tilde{e} \otimes (\mu_+(A_i) + \mu_-(A_i)).x_i \\
&= \sum_{i \in J} \tilde{e} \otimes \mu_+(A_i).x_i + \sum_{i \in J} \tilde{e} \otimes \mu_-(A_i).x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes \mu_+(A_i).x_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes \mu_-(A_i).x_i \\
&= \int_A \varphi d(\tilde{e}, \mu_+) + \int_A \varphi d(\tilde{e}, \mu_-).
\end{aligned}$$

Eşitsizlik ,

$$\begin{aligned}
|\int_A \varphi d(\tilde{e}, |\mu|)| &= |\sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).x_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).|x_i| \\
&= \int_A |\varphi| d(\tilde{e}, |\mu|).
\end{aligned}$$

olduğundan istenilen elde edilir.
(2) Öncelikle $\phi \geq 0$ μ-h.h.h. ise $\phi \geq h$ olacak şekilde h sıfır fonksiyonu vardır. Böyle bir h basit fonksiyonunun integrali sıfır olduğundan ve ilk eşitsizlikden istenilen sonuca varılır. Şimdi biraz önceki prosedürü $\phi - \varphi$' e uygularsak diğer eşitsizlik de elde edilir.
(3) İstenilen eşitsizlikler (1) ve basit fonksiyonun integralinin doğrusallığından hemen elde edilir.
Şimdi klasik ölçüler için önemli bir yere sahip olan mutlak yakınsaklık kavramını Riesz uzay değerli ölçülere genişletelim.

Tanım 4.1.2 *$\mu \in oba(\mathcal{F}, E)$ ve ν, $\mathcal{F}$' de tanımlı E değerli bir ölçü olsun. $A \in \mathcal{F}$ için $\tilde{e}(|\nu(A)|) < \varepsilon$ olsun. Eğer $\tilde{e}(|\mu|(A)) < \delta$ olacak şekilde ε' a bağlı bir $\delta > 0$ var ise ν ölçüsüne* ***μ' e göre mutlak süreklidir*** *denir.*

Önerme 4.1.3 *φ, E-değerli basit fonksiyon ise, her $A \in \mathcal{F}$ için,*

$$\nu(A) = \int_A \phi d(\tilde{e}, |\mu|)$$

ile tanımlı ν fonksiyonu sıra sınırlı ve μ' ye göre mutlak sürekli bir ölçüdür.

İspat: Öncelikle ν' nün sıra sınırlı bir ölçü olduğunu gösterelim. $\chi_{\emptyset}.\varphi = 0$ olduğundan $\nu(A) = 0$' dır. Toplamsallığı görmek için, $A \cap B = \emptyset$ olan $A, B \in \mathcal{F}$ kümeleri için

$$\chi_{A\cup B}.\varphi = \chi_A.\varphi + \chi_B.\varphi$$

eşitliğinin geçerli olduğuna dikkat edelim. Ayrıca her $A \in \mathcal{F}$ için teorem 4.1.1 (1)' den

$$|\nu(A)| \leq \int_A |\phi| d(\tilde{e}, |\mu|) \leq \int_X |\phi| d(\tilde{e}, |\mu|)$$

ve E'nin Dedekind tam olmasından sıra sınırlı bir ölçü olduğu sonucuna varılır. Mutlak sürekliliği için standart gösterimi $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}.xi$ olan E değerli basit fonksiyon için

$$c = \max\{\tilde{e}(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

olsun. Herhangi bir $A \in \mathcal{F}$ için,

$$|\nu(A)| = |\sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).|x_i|$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \tilde{e}(|\nu(A)|) &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A).\tilde{e}(|x_i|) \\ &\leq c.\tilde{e} \otimes |\mu|(A) \end{aligned}$$

Böylece ν ölçüsü μ' ye göre mutlak süreklidir.

Aşağıdaki önerme E değerli fonksiyonun integrallenebilirliği için kilit rol oynayacaktır.

Teorem 4.1.2 *φ_n ve ϕ_n, X üzerinde tanımlı Dedekind tam E Riesz uzayında değer alan ve bir f fonksiyonuna puslu yakınsayan basit fonksiyon dizileri olsun. Ayrıca,*

$$o - \lim_{m,n\to\infty} \int |\phi_n - \phi_m| d(\tilde{e}, |\mu|) = o - \lim_{m,n\to\infty} \int |\varphi_n - \varphi_m| d(\tilde{e}, |\mu|) = 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $A \in \mathcal{F}$ için aşağıdaki limitler vardır ve

$$o-\lim_{n\to\infty}\int \phi_n d(\tilde{e},|\mu|) = o-\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n d(\tilde{e},|\mu|)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Öncelikle Teorem 4.1.1 (1)' den her $A \in \mathcal{F}$ için

$$|\int_A \varphi_n d(\tilde{e},|\mu|) - \int_A \varphi_m d(\tilde{e},|\mu|)| \leq \int_X |\varphi_n - \varphi_m| d(\tilde{e},|\mu|)$$

her $m,n \geq 1$ için sağlanır. Aynı eşitsizlik φ_n yerine ϕ_n yazıldığında da geçerlidir. E Dedekind tam olduğundan söz konusu sıra limitleri vardır. İspatın geri kalanında bunların eşit olduğunu göseterecеğiz. Bunun için adım adım gideceğiz.

1. $g_n = |\varphi_n - \phi_n|$ ve $\nu_n(A) = \int_A g_n d(\tilde{e},|\mu|)$ olarak tanımlansın. Önerme 4.1.3' den her $n \in \mathbb{N}$ için ν_n sıra sınırlı ölçüdür.

2. Şimdi ν_n dizisinin her $A \in \mathcal{F}$ için sıra yakınsak olduğunu gösterelim. Teorem 4.1.1 (3)' den,

$$\begin{aligned}
|\nu_n(A) - \nu_m(A)| &= |\int_A |\varphi_n - \phi_n| d(\tilde{e},|\mu|) - \int_A |\varphi_m - \phi_m| d(\tilde{e},|\mu|)| \\
&\leq \int_A |\varphi_n - \varphi_m + \phi_n - \phi_m| d(\tilde{e},|\mu|) \\
&\leq \int_A |\varphi_n - \varphi_m| d(\tilde{e},|\mu|) + \int_A |\phi_n - \phi_m| d(\tilde{e},|\mu|) \\
&\leq \int_A |\varphi_n - \varphi_m| d(\tilde{e},|\mu|) + \int_A |\phi_n - \phi_m| d(\tilde{e},|\mu|)
\end{aligned}$$

olduğundan ν_n dizisi her $A \in \mathcal{F}$ için sıra Cauchy olduğu sonucuna ulaşılır. E Dedekind tam olduğundan her $A \in \mathcal{F}$ için ν_n sıra yakınsaktır. Şimdi her $A \in \mathcal{F}$ için sıra yakınsadığı değerlerin teşkil ettiği fonksiyona η diyelim. η' nın E değerli bir ölçü olacağına dikkat edelim.

3. Geri kalan kısımda her $A \in \mathcal{F}$ için $\eta(A) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Çünkü eğer böyle ise,

$$|\int_A \varphi_n d(\tilde{e},|\mu|) - \int_A \phi_n d(\tilde{e},|\mu|)| \leq \int_A |\varphi_n - \phi_n| d(\tilde{e},|\mu|) = \nu_n(A)$$

olduğundan ispat tamamlanmış olacak.

4. Şimdi η' nin μ' e göre mutlak sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin.

Sıra limit tanımından her bir $A \in \mathcal{F}$ için

$$|\nu_n(A) - \eta(A)| < p_n(A)$$

olacak şekilde $p_n(A) \downarrow 0$ dizisi bulunabilir. Burada E' deki sıra yakınsaklık $E^{\mathcal{F}}$' deki sıra yakınsaklığı gerektireceğinden, $n \geq n_0$ olduğunda

$$\tilde{e}(|\nu_n(A) - \eta(A)|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $A \in \mathcal{F}$' den bağımsız bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabileceğine dikkat edelim. ν_{n_0}' ın μ' e göre mutlak sürekliliğinden, her bir $A \in \mathcal{F}$ için $\tilde{e}(|\nu_{n_0}(A)|) < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğunda $\tilde{e}(|\mu|(A)) < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Ayrıca her bir $A \in \mathcal{F}$ için,

$$|\eta(A)| \leq |\eta(A) - \nu_{n_0}(A)| + \nu_{n_0}(A)$$

sağlanır. Yukarıdakiler ve $\tilde{e}$'nin kesin pozitifliğinden,

$$\begin{aligned} \tilde{e}(|\eta(A)|) &\leq \tilde{e}(|\eta(A) - \nu_{n_0}(A)|) + \tilde{e}(|\nu_{n_0}(A)|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani η, μ' e göre mutlak süreklidir.

5. Yukarıda yapılanlar özetlenmek istenirse:
$A \in \mathcal{F}$ için $\varepsilon > 0$ sayısı $\tilde{e}(|\eta(A)|) < \varepsilon$ olacak şekilde verildiğinde, $\tilde{e}(|\mu|(A)) < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulanabilir. Ayrıca aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\tilde{e}(|\nu_n(B) - \eta(B)|) < \varepsilon \tag{1}$$

olacak şekilde $B \in \mathcal{F}$'den bağımsız bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

6. $\tilde{e}(|\eta(X)|) = 0$ olduğu sonucuna varmak istiyoruz. Çünkü bu durumda $\tilde{e}$' nin kesin pozitifliği her $A \in \mathcal{F}$ için $\eta(A) = 0$ olduğunu gerektirecek. Bunun için,

$$A^c = \{x \in X : g_{n_0}(x) = 0\}$$

olsun. g_{n_0} E-değerli bir basit fonksiyon olduğundan $A^c \in \mathcal{F}$ olmalıdır. Ayrıca $\nu_{n_0}(A^c) = 0$ olduğu ν_{n_0} tanımından hemen elde edilir. 5. adımdan keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\tilde{e}(|\eta(A^c)|) < \varepsilon$ elde edilir. Bu gözleme tekrar ihtiyaç duyacağımızı hatırlatmak isteriz. Eğer $\tilde{e}(|\eta(A)|) = 0$ ise, bu durumda,

$$\tilde{e}(|\eta(X)|) = \tilde{e}(|\eta(A) + \eta(A^c)|) \leq \tilde{e}(|\eta(A)|) + \tilde{e}(|\eta(A^c)|) < \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\tilde{e}(|\eta(A)|) = 0$ durumu için ispat tamamlanır.

7. Şimdi $\tilde{e}(|\eta(A)|) > 0$ durumunu inceleyelim. Teorem 3.5.1' den (g_n) dizisinin 0'a puslu yakınsadığını biliyoruz. $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde $\delta > 0$ nasıl verilirse verilsin, $n \geq n_1$ olduğunda,

$$|\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|g_n(x)|) > \frac{\varepsilon}{\tilde{e}(|\mu|(A))}\}) < \delta$$

olacak $n_1 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Şimdi

$$B^c = \{x \in X : \tilde{e}(|g_n(x)|) > \frac{\varepsilon}{\tilde{e}(|\mu|(A))}\}$$

olsun. g_{n_1}, E-değerli basit fonksiyon olduğundan, $B^c \in \mathcal{F}$' dir. Ayrıca eğer $x \in B$ ise $\tilde{e}(|g_n(x)|) \leq \frac{\varepsilon}{\tilde{e}(|\mu|(A))}$ olacağına dikkat edelim. $|\mu|$' nün sıra sınırlı pozitif ölçü olmasından ve $\tilde{e}$' nin pozitifliğinden,

$$\tilde{e}(|\mu|(A \cap B^c)) \leq |\mu|^*(B^c) < \delta$$

dır. η' nın μ' ye göre mutlak sürekliliğinden,

$$\tilde{e}(|\eta(A \cap B^c)|) < \varepsilon \tag{2}$$

elde edilir. Şimdi $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ olsun. (1) eşitsizliğinde $A \cap B$ yazılırsa,

$$\tilde{e}(|\eta(A \cap B)|) < \varepsilon + \tilde{e}(|\nu_{n_2}(A \cap B)|) \tag{3}$$

ve ν_{n_2} ve B kümesinin tanımlarından,

$$\tilde{e}(|\nu_{n_2}(A \cap B)|) < \varepsilon \tag{4}$$

elde edililir. Şimdi 2, 3, 4 eşitsizlikleri ve (6)' daki gözlem ile birlikte,

$$\tilde{e}(|\eta(X)|) \leq \tilde{e}(|\eta(A \cap B)|) + \tilde{e}(|\eta(A \cap B^c)|) + \tilde{e}(|\eta(A^c)|) < 4\varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan ispat tamamlanır.

Önerme 4.1.4 *Basit fonksiyonların $p_n : X \to E$ dizisi sıfır sabit fonksiyona E^X uzayında azalarak veya artarak yaklaşsın. Bu durumda $\int p_n d(\tilde{e}, |\mu|)$ dizisi E' nin sıfırına azalarak veya artarak yaklaşır. Yani,*

$$p_n \downarrow\uparrow 0 \Rightarrow \int p_n d(\tilde{e}, |\mu|) \downarrow\uparrow 0$$

sağlanır.

İspat: İspatı azalan durum için yapacağız. Artan durum için de benzerdir. J kümesini, $J := \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ sonlu}\}$ olarak tanımlayalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için p_n' nin tanımlı olduğu X'in $\mathcal{F}$' deki parçalanışını, $I \in J$ olmak üzere $(A_i^n)_{i \in I}$ kümeleri ile gösterelim. Burada $|I|$ ile I' nın eleman sayısını gösterelim ve her bir $\tilde{e} \otimes |\mu|(X)(p_1^n + .. + p_{|I|}^n)$ için, p_n' nin bu parçalınışda aldığı değerleri p_i^n ile gösterelim.

$$\begin{aligned}
\int p_n d(\tilde{e}, |\mu|) &= \sum_{i \in I} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i^n).p_i^n \\
&= [\tilde{e} \otimes |\mu|(A_1^n).p_1^n + ... + \tilde{e} \otimes |\mu|(A_{|I|}^n).p_{|I|}^n] \\
&\leq \tilde{e} \otimes |\mu|(X)(p_1^n + .. + p_{|I|}^n)
\end{aligned}$$

ifadesinin her $n \in \mathbb{N}$ için sağlandığına dikkat edelim. Şimdi (p_n) dizisinin E^X' de sıfıra azalması $I \in J$ parçalanışından bağımsız olarak, $(p_i^n)_{i \in I}$ dizisinin E de sıfıra azalmasını gerektireceğinden,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \{\int p_n d(\tilde{e}, |\mu|)\} \leq \inf\{\tilde{e} \otimes |\mu|(X)(p_1^n + .. + p_{|I|}^n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Artan durumuda benzerdir.
Şimdi E-değerli artan ya da azalan basit fonksiyonlar için sıra limit ile integralin yer değişebileceğini ifade edelim.

Teorem 4.1.3 *Basit fonksiyonların azalan veya artan $f_n : X \to E$ dizisi, bir $f : X \to E$ fonksiyona E^X uzayında sıra yakınsak ise $\int p_n d(\tilde{e}, |\mu|)$ dizisi de E Riesz uzayında $\int f d(\tilde{e}, |\mu|)$ elemanına sıra yakınsaktır.*

İspat: Basit fonksiyonların (f_n) dizisi azalan ve sıra limiti f olsun. Bu durumda (Zaanen, 1997) de görüleceği üzere (f_n) dizisi f' e azalarak yaklaşır. O halde $(f_n - f)$ dizisi sıfır sabit fonksiyonuna azalarak yaklaşır. Önerme 4.1.4' dan $\int (f_n - f) d(\tilde{e}, |\mu|)$ dizisi E' de sıfıra yaklaşır. Basit fonksiyonun integralinin ve sıra limitin doğrusallığından istenilen elde edilir.

Önerme 4.1.5 *$f : X \to E$ basit fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır.*
(1) $\nu : \mathcal{F} \to E$ sıra sınırlı ölçüsü için $|\nu| \leq |\mu|$ ise her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\int_A f d(\tilde{e}, |\nu|) \leq \int_A f d(\tilde{e}, |\mu|)$$

eşitsizliği geçerlidir.
(2) $\tilde{l}$, E' nin sürekli sıra dualinden alınmış pozitif ve $\tilde{l} \leq \tilde{e}$ şartını sağlayan bir

fonksiyonel olsun. Bu durumda,

$$\int_A fd(\tilde{l}, |\mu|) \leq \int_A fd(\tilde{e}, |\mu|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (1) $|\nu| \leq |\mu|$ olsun. Bunun anlamı her $A \in \mathcal{F}$ için, $|\nu|(A) \leq |\mu|(A)$ olmasıdır. O halde

$$\begin{aligned}\int_A \phi d(\tilde{e}, |\nu|) &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\nu|(A_i).x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \tilde{e} \otimes |\mu|(A_i).x_i \\ &= \int_A \phi d(\tilde{e}, |\mu|)\end{aligned}$$

elde edilir. (2)' de benzer şekilde ispatlanır.

4.2 İntegrallenebilirlik

Bu bölümde E Dedekind tam Riesz uzayı değerli bir fonksiyonun integrallenebilirliği ile ilgileneceğiz. Böyle fonksiyonların integrallenebilirliğini tanımlayabilmek için geçen bölümün sonunda yer alan Teorem 4.1.2' den güç alacağız. Bu bölümde de $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uzayından anlamamız gereken aynı olsun.

Tanım 4.2.1 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *bir ölçü uzayı olsun. Eğer X üzerinde tanımlı ve E değerli f fonksiyonu için aşağıdaki iki şart sağlanır ise f' ye μ**' ye göre integrallenebilir** ya da kısaca **integrallenebilir** diyeceğiz:*

(1) f' ye puslu yakınsayacak E-değerli basit fonksiyonların bir (f_n) dizisi vardır.

(2) Bu (f_n) için, $o - \lim_{m,n\to\infty} \int |f_n - f_m| d(\tilde{e}, |\mu|) = 0$ sağlanır.

Eğer f μ' e göre integrallenebilir bir fonksiyon ise f' nin integrali E' de bir vektördür. $\int fd(\tilde{e}, |\mu|)$ ile göstereceğimiz bu değer,

$$o - \lim_{n\to\infty} \int f_n d(\tilde{e}, |\mu|) = \int fd(\tilde{e}, |\mu|)$$

ile tanımlıdır. Burada söz konusu E-değerli basit fonksiyonlardan oluşmuş (f_n) dizisine f' nin **belirleyici dizisi** denir. Teorem 4.1.2' den bildiğimiz üzere, böyle bir fonksiyonun integrali belirleyici diziden bağımsızdır. Her E-değerli basit fonksiyonun integrallenebilir olduğuna dikkat edelim. f, E-değerli basit fonksiyon ise belirleyici dizi olarak her $n \in \mathbb{N}$ için f sabit değerini alan f_n dizisini alabiliriz. Bu durumda geçen bölümdeki E-değerli basit fonksiyonun integral tanımını elde etmiş oluruz.

Uyarı 4.2.1 *Eğer f integrallenebilir bir fonksiyon ise bir $A \in \mathcal{F}$ için $\chi_A f$' nin de integrallenebilir olduğuna dikkat edelim. Eğer (f_n), f'nin belirleyici dizisi ise $\chi_A f_n$, $\chi_A f$' nin belirleyici dizisi olacaktır. Dolayısıyla bu durumda $\int_A f d(\tilde{e}, |\mu|)$ gösterimini,*

$$\int_A f d(\tilde{e}, |\mu|) = \int \chi_A f d(\tilde{e}, |\mu|)$$

için kullanacağız.

Önerme 4.2.1 *$f : X \to E$ fonksiyonu μ' ye göre integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler sağlanır:*
(1) $\nu : \mathcal{F} \to E$ sıra sınırlı ölçüsü için $|\nu| \leq |\mu|$ ise f fonksiyonu ν' ye göre de integrallenebilirdir. Ayrıca her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\int_A f d(\tilde{e}, |\nu|) \leq \int_A f d(\tilde{e}, |\mu|)$$

eşitsizliği geçerlidir.
(2) $\tilde{l}$, E' nin sürekli sıra dualinden alınmış pozitif ve $\tilde{l} \leq \tilde{e}$ şartını sağlayan bir fonksiyonel olsun. Bu durumda,

$$\int_A f d(\tilde{l}, |\mu|) \leq \int_A f d(\tilde{e}, |\mu|)$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 4.2.2 *f integrallenebilir bir fonksiyon ve (f_n), f'nin belirleyici dizisi olsun. Bu durumda her bir $n \in \mathbb{N}$ için,$f_n - f$ integrallenebilirdir ve,*

$$o - \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d(\tilde{e}, |\mu|) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat: n doğal sayısını bir an için sabit olarak alalım. Bu durumda hemen görüleceği üzere $f_n - f_m$ dizisi $m \to \infty$ iken $f_n - f$ fonksiyonuna puslu yakınsar. Ayrıca $|f_n - f_m|$ her bir $m \in \mathbb{N}$ için E-değerli basit fonksiyon olduğundan integrallenebilirdir. $|f_n - f|$ için, $|f_n - f_m|$ belirleyici dizisini alır ve f'nin integrallenebilirliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} o-\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f| d(\tilde{e},|\mu|) &= o-\lim_{n\to\infty}[o-\lim_{m\to\infty}\int |f_n - f| d(\tilde{e},|\mu|)] \\ &= o-\lim_{n,m\to\infty}\int |f_n - f_m| d(\tilde{e},|\mu|) = 0. \end{aligned}$$

Böylece istenlen elde edilir.

Şimdi tanım 4.2.1' de verilen integrallenebilirliğin özelliklerini ele alan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.2.1 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *bir ölçü uzayı olsun.*

(1) f, E-değerli μ' e göre integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f μ_+ ve μ_- ölçülerine göre de integrallenebilirdir. Ayrıca her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\int_A f d(\tilde{e},|\mu|) = \int_A f d(\tilde{e},\mu_+) + \int_A f d(\tilde{e},\mu_-)$$

eşitliği geçerlidir.

(2) Eğer f, g E-değerli μ' e göre integrallenebilir fonksiyonlar ve $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $cf + dg$ ve $|f|$, f_+, f_-, $f \vee g$, $f \wedge g$ fonksiyonları da μ' e göre integrallenebilirdir. Özellikle her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$|\int_A f d(\tilde{e},|\mu|)| \leq \int_A |f| d(\tilde{e},|\mu|)$$

ve

$$\int_A cf + dg d(\tilde{e},|\mu|) = c\int_A f d(\tilde{e},|\mu|) + d\int_A g d(\tilde{e},|\mu|)$$

ve

$$\int_A f d(\tilde{e},|\mu|) + \int_A g d(\tilde{e},|\mu|) = \int_A f \vee g d(\tilde{e},|\mu|) + \int_A f \wedge g d(\tilde{e},|\mu|)$$

ve

$$\int_A f d(\tilde{e},|\mu|) = \int_A f_+ d(\tilde{e},|\mu|) - \int_A f_- d(\tilde{e},|\mu|)$$

eşitsizliği ve eşitlikleri sağlanır.

(3) Eğer f, X üzerinde E-değerli μ' e göre integrallenebilir fonksiyon ve $A \in \mathcal{F}$ için, $f \geq 0$ μ-h.h.h. ise,

$$\int_A f d(\tilde{e},|\mu|) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Özellikle g, μ' e göre integrallenebilir fonksiyon ve $A \in \mathcal{F}$ için, $f \geq g$ μ-h.h.h. ise,

$$\int_A f d(\tilde{e},|\mu|) \geq \int_A g d(\tilde{e},|\mu|)$$

eşitsizliği sağlanır.

(4) f ve g, X üzerinde E-değerli μ' e göre integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\begin{aligned} |\int_A |f| d(\tilde{e}, |\mu|) - \int_A |g| d(\tilde{e}, |\mu|)| &\leq \int_A ||f| - |g|| d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &\leq \int_A |f+g| d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &\leq \int_A |f| d(\tilde{e}, |\mu|) + \int_A |g| d(\tilde{e}, |\mu|) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: (1) (f_n), μ' e göre integrallenebilir olan f için belirleyici dizi olsun. Aslında $\mu_+ \leq |\mu|$ ve $\mu_- \leq |\mu|$ olduğundan (f_n), μ_+ ve μ_- ölçülerine göre de f için belirleyici dizidir. Dolayısıyla f, μ_+ ve μ_-' e göre integrallenebilirdir. Teorem 4.1.1' den her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\begin{aligned} \int_A f d(\tilde{e}, |\mu|) &= o - \lim_{n\to\infty} \int f_n d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &= o - \lim_{n\to\infty} [\int f_n d(\tilde{e}, \mu_+) + \int f_n d(\tilde{e}, \mu_-)] \\ &= o - \lim_{n\to\infty} \int f_n d(\tilde{e}, \mu_+) + o - \lim_{n\to\infty} \int f_n d(\tilde{e}, \mu_-) \\ &= \int_A f d(\tilde{e}, \mu_+) + \int_A f d(\tilde{e}, \mu_-) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(2) Eşitsizliği gösterelim. (f_n) dizisi, integrallenebilir olan f için belirleyici dizi olsun. Teorem 3.5.1 (2) ve teorem 4.1.1 (3)' den $(|f_n|)$ dizisi de $|f|$ için belirleyici dizidir. Ayrıca teorem 4.1.1 (1)' den her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$\begin{aligned} |\int_A f d(\tilde{e}, |\mu|)| &= o - \lim_{n\to\infty} |\int f_n d(\tilde{e}, |\mu|)| \\ &\leq o - \lim_{n\to\infty} \int |f_n| d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &= \int_A |f| d(\tilde{e}, |\mu|) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk eşitlik E değerli basit fonksiyonların integrallerinin doğrusallığından hemen elde edilir. İkinci eşitlik için sırasıyla (f_n) ve (g_n) dizileri, f ve g için belirleyici diziler olsun. Teorem 3.5.1 (3)' den biliyoruz ki $(f_n \vee g_n)$ dizisi $f \vee g$ fonksiyonuna puslu yakınsar. Ayrıca,

$$\int_A |f_n \vee g_n - f_m \vee g_m| d(\tilde{e}, |\mu|) \leq \int_A |f_n - f| d(\tilde{e}, |\mu|) + \int_A |g_n - g| d(\tilde{e}, |\mu|)$$

olduğundan $(f_n \vee g_n)$ dizisi $f \vee g$ fonksiyonu için belirleyici dizidir. Benzer olarak $(f_n \wedge g_n)$ dizisi de $f \wedge g$ fonksiyonu için belirleyici dizidir. Dolayısıyla $f + g = f \vee g + f \wedge g$ olduğundan ve ilk eşitlikten istenilen sonuca ulaşılır. Son eşitlik için $g = 0$ almak yeterlidir.

(3) $\chi_A.f \geq 0$ μ-h.h.h. olduğundan, $h + \chi_A.f \geq 0$ olacak şekilde bir h sıfır fonksiyonu vardır. Eğer (f_n) dizisi, f' nin belirleyici dizisi ise önerme 3.5.1'den $\chi_A.f_n$' de $h+\chi_A.f$ için belirleyici dizi olacaktır. Burada $(h+\chi_A.f)_+ = h+\chi_A.f$ ve bu fonksiyon için $(\chi_A.f_n)_+$' nın belirleyici dizi olduğuna dikkat edelim. Şimdi teorem 4.1.1 (2) ve integralin doğrusallağından,

$$\begin{aligned} \int_A fd(\tilde{e}, |\mu|) &= o - \lim_{n\to\infty} \int \chi_A.f_n d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &= o - \lim_{n\to\infty} \int (h + \chi_A.f_n) d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &= \int (h + \chi_A.f)_+ d(\tilde{e}, |\mu|) \\ &= o - \lim_{n\to\infty} \int (\chi_A.f_n)_+ d(\tilde{e}, |\mu|) \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan istenilen sonuca ulaşılır. Geri kalan kısım için $\chi_A.(g - f)$ almak yeterlidir.

(4) Teorem 4.1.1 (3)' den hemen elde edilir.

Önerme 4.2.3 *f, E-değerli μ' e göre integrallenebilir fonksiyon ise, her $A \in \mathcal{F}$ için,*

$$\nu(A) = \int_A fd(\tilde{e}, |\mu|)$$

ile tanımlı ν fonksiyonu sıra sınırlı ve μ' e göre mutlak sürekli bir ölçüdür.

İspat: ν' nün toplamsal olduğu açıktır. Sıra sınırlı olduğunu görmek için, her $A \in \mathcal{F}$ için,

$$|\nu(A)| = |\int_A fd(\tilde{e}, |\mu|)| \leq \int |f| d(\tilde{e}, |\mu|)$$

eşitsizliğine bakmak yeterlidir. Şimdi mutlak sürekliliği gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Önerme 4.2.2' den

$$\tilde{e}(\int |f - g| d(\tilde{e}, |\mu|)) < \varepsilon$$

olacak şekilde g basit fonksiyonu vardır. M gerçel sayısı, her $x \in X$ için $\tilde{e}(|g(x)|) \leq M$ olacak şekilde seçilsin. Şimdi $A \in \mathcal{F}$ için $\tilde{e}(|\mu|(A)) \leq \delta = \frac{\varepsilon}{M}$

olduğunda,

$$\begin{aligned}
\tilde{e}(|\nu(A)|) &\leq \tilde{e}(\int_A |f|d(\tilde{e},|\mu|) \\
&\leq \tilde{e}(\int_A |f-g|d(\tilde{e},|\mu|)) + \tilde{e}(\int_A |g|d(\tilde{e},|\mu|)) \\
&\leq \tilde{e}(\int_A |f-g|d(\tilde{e},|\mu|)) + M.\tilde{e}(|\mu|(A)) \\
&< \varepsilon + M.\frac{\varepsilon}{M}
\end{aligned}$$

olduğundan ν mutlak süreklidir. Ayrıca ν sıra sınırlı ölçü olduğundan,

$$\nu_+ = \frac{1}{2}(\nu + |\nu|) \text{ ve } \nu_- = \frac{1}{2}(\nu - |\nu|)$$

geçerlidir.

Önerme 4.2.4 *X üzerinde tanımlı E-değerli μ' e göre integrallenebilir f fonksiyonun sıfır fonksiyon olması için gerek yeter şart f' nin integrallenebilir ve $\int |f|d(\tilde{e},|\mu|) = 0$ olmasıdır. Ayrıca eğer f integrallenbilir ve g fonksyonu için $f = g$ μ-h.h.h. ise g' de integrallenebilirdir. Ayrıca her $A \in \mathcal{F}$ için,*

$$\int_A fd(\tilde{e},|\mu|) = \int_A gd(\tilde{e},|\mu|)$$

sağlanır.

İspat: Eğer f sıfır fonksiyon $f_n = 0$, sabit dizisi f' nin belirleyici dizisidir. Böylece $\int |f|d(\tilde{e},|\mu|) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan f integrallenebilir ve $\int |f|d(\tilde{e},|\mu|) = 0$ olsun. Burada f için (f_n) belirleyici dizi olsun.

$$o - \lim_{n\to\infty} \int f_n d(\tilde{e},|\mu|) = 0$$

olduğuna dikkat edelim. Verilen bir $\delta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_n(\delta) = \{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x)|) > \delta\}$$

ve

$$F_n(\delta) = \{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \delta\}$$

kümeleri yukarıdaki gibi tanımlanmış olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için f_n basit fonksiyon olduğundan $A_n \in \mathcal{F}$' dir. Ayrıca,

$$\int |f_n|d(\tilde{e},|\mu|) \geq \int_{A_n(\delta)} |f_n|d(\tilde{e},|\mu|)$$

olduğundan ve $\tilde{e}$' nin kesin pozitifliğinden,

$$\tilde{e}(\int |f_n| d(\tilde{e}, |\mu|)) \geq \tilde{e}(\int_{A_n(\delta)} |f_n| d(\tilde{e}, |\mu|)) \geq \tilde{e}(|\mu|(A_n(\delta))).\delta$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$o - \lim_{n \to \infty} \tilde{e}(|\mu|(A_n(\delta))) = 0$$

ve f_n' nin puslu limitinin f olduğundan dolayı,

$$o - \lim_{n \to \infty} |\mu|^*(F_n(\delta)) = 0$$

sağlanır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f(x)|) > 2\delta\}) &\leq |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x) - f(x)|) > \delta\}) \\ &+ |\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f_n(x)|) > \delta\}) \end{aligned}$$

geçerli olduğundan $n \to \infty$ için bu değerler 0'a yakınsar.Sonuç olarak δ keyfi olduğundan,

$$|\mu|^*(\{x \in X : \tilde{e}(|f(x)|) > 2\delta\}) = 0$$

sonucu elde edilir. Yani f sıfır fonksiyondur. Geri kalan kısmı için f yerine $f - g$ almak yeterlidir.

5 STONE KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde Riesz uzayları teorisinde önemli yere sahip iki gösterim teoremi ile ilgileneceğiz. Bu teoremler Maeda-Ogasawara ve Kakutani-Krein gösterim teoremleri olarak bilinmektedir. $C(X)$ gösterimini tıkız bir topolojik uzay olan X kümesinden gerçel sayılara giden tüm sürekli fonksiyonlar için kullanacağız. Böyle bir $C(X)$, Riesz uzayı yapısı teşkil etmektedir. Söz konusu gösterim teoremleri, Arşimedyen Riesz uzaylarını birer $C(X)$ uzayı veya $C(X)$' in bazı özel altuzayları olarak görmemizi sağlar.

5.1 Maeda-Ogasawara Uzayı

Maeda-Ogasawara gösterim teoremi, herhangi bir Arşimedyen Riesz uzayına, Stone uzayında tanımlı genişletilmiş sürekli fonksiyonlar ile yaklaşımı mümkün kılmıştır. Bu bölümde, bu gösterim teoremi ve bu teoremle ilgili ifadeler ile ilgileneceğiz. İhtiyacımız olacak bazı topolojik tanımlar ile bu bölüme başlayalım.

Tanım 5.1.1 *X topolojik uzayında her açık kümenin kapanışı açık ise bu topolojik uzaya* ***aşırı bağlantısız uzay*** *denir.*

Tanım 5.1.2 *Tıkız, Hausdorff ve aşırı bağlantısız X topolojık uzayına* ***Stone uzayı*** *denir. Bu isim M. H. Stone' dan dolayıdır.*

Tüm ayrık topolojik uzaylar aşırı bağlantısız uzaylara örnektir. Ayrıca ayrık topolojik uzayların Stone-Čech tıkızlaştırmaları Stone uzaylarına örnektir. Örneğin doğal sayılar için $\beta\mathbb{N}$ böyle bir uzaydır. Aşağıdaki önerme S topolojisi ile $C(S)$ sıra yapısı arasındaki ilişki ile ilgilidir.

Önerme 5.1.1 *Aşağıdakiler denktir.*
(1) S Stone uzayıdır.
(2) $C(S)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır.
(3) $C(S)$' deki her bant izdüşüm bandıdır.

Şimdi S bir Stone uzayı olmak üzere $C^{\infty}(S)$ olarak bilinen ve Maeda-Ogasawara teoreminin konusu olan uzay ile ilgilenmeye başlayalım.

Tanım 5.1.3 *S aşırı bağlantısız bir uzay olmak üzere $f : S \to [-\infty, \infty]$ sürekli fonksiyonu için $f^{-1}(\mathbb{R})$ kümesi S' de yoğun ise f fonksiyonuna* ***sürekli genişletilmiş fonksiyon*** *denir. Burada $[-\infty, \infty]$, gerçel sayıların iki nokta tıkızlaştırılmasıdır.*

Bir S Stone uzayı üzerinde tanımlı, sürekli genişletilmiş fonksiyonların kümesini $C^{\infty}(S)$ ile göstereceğiz. $C^{\infty}(S)$ bir küme olmanın ötesindedir. Bunu görmek için (Aliprantis and Burkinshaw, 2003)'de bulunabilecek aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 5.1.2 *S bir Stone uzayı ve O kümesi S' in açık bir altkümesi olsun. Eğer $f : O \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f'nin, O'nun kapanışı olan $\overline{O}$' dan $[-\infty, \infty]$ kümesine tek bir sürekli genişlemesi vardır.*

S bir Stone uzayı olmak üzere Riesz uzayı yapısı teşkil ettiğini bildiğimiz $C(S)$ uzayının tüm elemanlarını hatta tüm noktasal işlemlerini $[-\infty, \infty]$' e sürekli genişletebileceğimizi önerme 5.1.2 yardımı ile söyleyebiliriz. O halde $C^{\infty}(S)$ uzayı, $f, g \in C^{\infty}(S)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f + g = \overline{(f+g)|_{f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})}}$$

ve

$$(\alpha f) = \overline{(\alpha f)|_{f^{-1}(\mathbb{R})}}$$

işlemleri ile bir vektör uzaydır. Burada $f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})$ kümesinin S' de açık ve yoğun olduğuna dikkat edelim. $C^{\infty}(S)$' deki sıralamayı $C(S)$ uzayında olduğu gibi noktasal sıralama olarak alalım. $f, g \in C^{\infty}(S)$ elemanları için $f \vee g$ vektörünü, f ve g'nin $f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})$ üzerine kısıtlanışının önerme 5.1.2 anlamında sürekli genişlemesi olarak tanımlarsak, $C^{\infty}(S)$ uzayı söz konusu işlemler ve sıralamaya göre Riesz uzay yapısı teşkil edecektir. Bu uzayı daha iyi anlamak için bazı tanımlara ihtiyacımız olacak.

Tanım 5.1.4 *E Riesz uzayının boştan farklı ve elemanları birbirlerine dik elemanlardan oluşan her altkümesinin supremumu var ise E' ye* ***lateral tam*** *Riesz uzayı denir.*

Tanım 5.1.5 *Dedekind tam ve lateral tam E Riesz uzayına* ***evrensel tam*** *Riesz uzayı denir.*

Arşimedyan olmayan lateral Riesz uzayı örneği için gerçel düzlemi, sözlük sıralamasıyla düşünebiliriz. Lateral tam Riesz uzayın bazı özelliklerini aşağıdaki teoremden anlayabiliriz.

Teorem 5.1.1 *E lateral tam Riesz uzayı ise aşağıdakiler doğrudur.*
(1) E' deki her bant kendi başına bir lateral tam Riesz uzayıdır.
(2) E Arşimedyen ise zayıf sıra birimi vardır.
(3) E Arşimedyen ise her bant temel bandtır.

Aşağıdaki genişleme teoremi lateral ve evrensel tam olamayan uzayların bu anlamdaki tamlanışlarının nasıl olacağı ile ilgilidir.

Teorem 5.1.2 *E Dedekind tam ve F Arşimedyen lateral tam Riesz uzayları, $f : E \to F$ sıra sürekli bir Riesz homomorfizması olsun. Eğer Arşimedyen M uzayında, E sıra yoğun ise bu durumda f' nin tek türlü belirli bir sıra sürekli Riesz homomorfizma genişlemesi vardır.*

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, sırasıyla E_1 ve F_1 Arşimedyen evrensel tam Riesz uzayları E ve F' nin sıra yoğun ve Riesz izomorfik altuzayları olsun. Bu durumda E ve F' de Riesz izomorfiktir. Bu sonuç bize bir Arşimedyen Riesz uzayının evrensel tamlanışından bahsetmemize neden olur.

Tanım 5.1.6 *Eğer E Riesz uzayı, evrensel tam F uzayının bir sıra yoğun alt uzayına Riesz izomorfik ise F uzayına E' nin* ***evrensel tamlanışı*** *denir. E Riesz uzayının evrensel tamlanışını E^u ile göstereceğiz.*

Tabi ki tamlanıştan söz etmişken Dedekind tam olmayan Arşimedyen Riesz uzaylarının da Dedekind tamlanışlarının olduğunu ifade etmek gerekir. Bunu yaparken ki metod yukarıdakiyle aynıdır.

Tanım 5.1.7 *Dedekind tam F uzayına aşağıdaki şartlar sağlandığında E' nin* ***Dedekind tamlanışı*** *denir:.*
(1) F' nin E Riesz uzayına izomorfik olan bir G Riesz altuzayı vardır.
(2) Her $f \in F$ için

$$f = \sup\{g \in G : g \le f\} = \inf\{g \in G : g \ge f\}$$

eşitlikleri G' deki sup *ve* inf *için sağlanır. Ayrıca böyle bir F uzayını eğer var ise E^δ ile göstereceğiz.*

Aşağıdaki teoremin ispatı (Luxemburg, 1979)'da bulunabilir.

Teorem 5.1.3 *Her Arşimedyen E Riesz uzayının bir E^δ Dedekind tamlanışı vardır. Eğer F ' de E'nin Dedekind tamlanışı ise E^δ ile Riesz izomorfiktir.*

Yukarıdaki teoremi evrensel tamlık için tekrar yazabiliriz. Şimdi (Buskes and Van Rooij, 1996)' dan elde edilen bu tamlanışlar arasındaki ilişkiyi veren bir sonucu yazalım.

Teorem 5.1.4 *E Aşimedyen Riesz uzayı için E^δ,E^u' da bir sıra ideal dir.*

Şimdi Maeda-Ogasawara gösterim teoremi olarak bilinen önemli teoremi ifade ederek bu bölümü sonlandıralım.

Teorem 5.1.5 *E Arşimedyen bir Riesz uzayı olsun. $C^\infty(S)$ ile E' nin evrensel tamlanışı olan E^u' nun Riesz izomorfik olduğu bir S Stone uzayı vardır. Bu S uzayına E' nin **Maeda-Ogasawara** uzayı denir ve bu koşulu sağlayan başka bir K topolojik uzayı var ise S ile K homeomorfiktir.*

5.2 Kakutani-Krein Uzayı ve Merkez İdeal

Bu bölümde Riesz uzay teorisindeki bir diğer gösterim teoremini ve bir Riesz uzayının merkez idealini konu edeceğiz. S' nin topolojisinin, $C(S)$'in sıra yapısıyla olan ilişkisi ile ilgilenceğiz. Bu bölümde S tıkız Housdorff topolojik uzay olsun. Bazı gerekli tanımlar ile başlayalım.

Tanım 5.2.1 *$\|.\| : E \to \mathbb{R}$, fonsiyounu E Riesz uzayında $|f| \leq |g|$ olduğunda $\|f\| \leq \|g\|$ özelliğine sahip bir norm ise bu norma **Riesz normu** denir.*

Eğer E Riesz uzayı üzerinde tanımlı Riesz normuna göre Banach uzayı ise E'ye **Banach örgüsü** denir. Banach örgüleri için (Nieberg, 1991)'e bakılabilir.

Tanım 5.2.2 *$\|.\|$ Riesz normu, E Riesz uzayında her $f, g \in E_+$ için*

$$\|f \vee g\| = \max\{\|f\|, \|g\|\}$$

*özelliğine sahip bir norm ise, bu norma **M-normu** denir. Böyle bir norm ile Banach uzayı olan Riesz uzaylarına **soyut-M uzayı** denir.*

Aslında e sıra birime sahip, E Riesz uzayı aşağıdaki gibi tanımlanan ve sıra birimin ürettiği bir norm ile **M**-normlu uzay olarak ele alınabilir. Bu norm **sıra birimin ürettiği** norm olarak bilinir ve her $f \in E$ için,

$$\|f\|_e = \{\alpha \in \mathbb{R} : |f| \leq \alpha.|e|\}$$

ile tanımlanır. Yani e sıra birime sahip her E Riesz uzayı $\|.\|_e$ normu ile birlikte **M**-normlu uzayıdır.Aşağıdaki önerme (Nieberg, 1991)' de bulunabilir.

Önerme 5.2.1 *Eğer E sıra birime sahip düzgün tam Riesz uzayı, ise bu uzay $\|.\|_e$ normu ile birlikte bir soyut-**M**-uzayıdır.*

S, tıkız ve Housdorff olmak üzere $C(S)$ uzayının $\mathbf{1}_S$, ile göstereceğimiz sıra birime sahip olduğunu hatırlatalım. Aslında bu uzayda norm olduğu iyi bilinen,

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

normu ile $\mathbf{1}_S$ sıra birimin ürettiği normun aynı olduğuna dikkat edelim. Bu anlamda $C(S)$ bir soyut-**M**-uzayı örneğidir. Hatta $C(S)$ bir örnek olmanın öteisnde soyut-**M**-uzayları için bir temsil uzayı olduğunu göreceğiz. Söz konusu uzaylarımızla yakından ilişkili **Banach-Stone** Teoremi olarak bilinen teoreminin vektör örgüsü versiyonunu ifade edelim.

Teorem 5.2.1 *K ve S tıkız Hausdorf topolojik uzayları olsun. $C(S)$ ve $C(K)$ Riesz izomorfik uzaylar ise K ve S homeomorfiktir.*

Şimdi de daha önce sözünü ettiğimiz, sıra birime sahip düzgün tam Riesz uzaylarını karakterize eden Kakutani-Krein Teoremini ifade edelim.

Teorem 5.2.2 *E düzgün tam Riesz uzayı, e sıra birimine sahip olsun. E ile $C(S)$ Riesz izomorfik olacak şekilde tıkız Hausdorff S topolojik uzayı vardır. E başka bir $C(X)$ ile Riesz izomorfik ise X ile S homeomorfiktir.*

Kauktani-Krein Teoremindeki S tıkız, Hausdorff uzayına E' nin **Kakutani-Krein uzayı** denir. Şimdi Arşimedyen bir uzayın merkezinin tanımı ile devam edelim.

Tanım 5.2.3 *E bir Riesz uzayı olmak üzere $T : E \to E$ doğrusal dönüşümü, her $x \in E$ için,*

$$|Tx| \leq \alpha|x|$$

olacak şekilde $\alpha \leq 0$ gerçel sayısı var ise T lineer dünüşümüne ***merkez dönüşümü*** *denir.*

Her merkez dönüşümünün bir fark dönüşümü olduğu ve her pozitif merkez dönüşümünün örgü homomorfizması olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 5.2.4 *E ve F birer Riesz uzayı olsunlar. $T : E \to F$ doğrusal dönüşümü için her $B \subset E$ bandının görüntüsü F' de bir bant oluyor ise T'e* ***bant koruyan dönüşüm*** *denir. Bant koruyan sıra sınırlı dönüşümlere de* ***ortomorfizma*** *denir. E üzerinde tanımlı tüm ortomorfizma dönüşümlerinin kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir. Bu küme ile ilgili (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)'den alınan aşağıdaki sonucu yazalım.*

Teorem 5.2.3 *E Arşimedyen Riesz uzayı olsun. Bu durumda $Orth(E) \subset Orth(E^\delta) \subset Orth(E^u)$ dur.*

İspatının (Abramovich and Koldunov, 1979) 'da bulunabileceği ortomorfizmalar ile merkez dönüşümleri arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 5.2.4 *E bir Banach örgüsü olsun. $T : E \to E$ doğrusal dönüşümü için aşağıdakiler denktir.*
(1) T merkez dönüşümüdür.
(2) T ortomorfizmadır.
(3) T bant koruyan dönüşümdür.

E Riesz uzayında tanımlı tüm merkez dönüşümlerinin kümesine E'nin **merkezi** denir. E' nin merkezini $Z(E)$ ile göstereceğiz. $Z(E)$, tüm doğrusal fark dönüşümlerinin sıralı vektör uzayı $L_r(E)$' de bir sıra ideal' dir. Keyfi bir E Riesz uzayı için $L_r(E)$ uzayının Riesz uzay olma zorunluluğunun olmadığı halde $Z(E)$ Riesz uzayı olur. Detaylar için (Abramovich and Aliprantis, 2002)'e bakılabilir.

Teorem 5.2.5 *E Arşimedyen Riesz uzayı olsun. Bu durumda $f, g \in Z(E)$ ve $x \in E_+$ için,*

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) \text{ ve } (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$$

işlemleriyle $Z(E)$ uzayı bir Riesz uzayıdır.

Aşağıdaki teoreme (Wickstead, 1977)' den ulaşılabilir.

Teorem 5.2.6 *E Aşimedyen Riesz uzayı olsun. $Z(E)$ uzayı, $\boldsymbol{I}$ birim dönüşümünün sıra birim olduğu bir soyut-$\boldsymbol{M}$ uzayıdır.*

Teorem 5.2.7 *(Zaanen, 1975) S tıkız, Hausdorff uzayı ise, $C(S)$ ile $Z(C(S))$ Riesz uzayları Riesz izomorfiktir.*

Bu sonuç Kakutani-Krein Teoremi ile ele alınırsa aşağıdaki iyi bilinen sonuca ulaşırız.

Teorem 5.2.8 *(Zaanen, 1975) E sıra birimli bir soyut-$\boldsymbol{M}$ uzayı ise E ile $Z(E)$ Riesz izomorfiktir.*

Şimdi (Ercan and Tan, 2013)' da bulunabilecek, Arşimedyen Riesz uzayı olan E' nin Maeda-Ogasawara uzayı ve $Z(E)$' nin Kakutani-Krein uzaylarının Riesz uzayı yapılarının aynı olduğunu söyleyen sonuca varmak için aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 5.2.2 *S bir Stone uzayı olsun. $Z(C(S)^u)$' nun Kakutani Krein uzayı S Stone uzayıdır. Yani $Z(C(S)^u)$ ile $C(S)$ Riesz izomorfiktir.*

Teorem 5.2.9 *(Ercan and Tan, 2013) E Arşimedyen Riesz uzayı olsun. $Z(E^\delta)$' nın Kakutani-Krein uzayı ve E' nin Maeda-Ogasawara uzayı homeomorfik uzaylardır.*

İspat: E Arşimedyen Riesz uzayının evrensel tamlanışı olan E^u' nun aynı zamanda E^δ' nın da evrensel tamlanışı olduğunu belirtelim. $x \in E^\delta$ verilsin. $T \in Z(E^u)$ için $|T(x)| \leq \alpha x$ olacağına dikkat edelim. E^δ, E^u'da bir sıra ideal olduğundan $|T(x)| \in E^\delta$ dır. Böylece $T(E^\delta) \subset E^\delta$ elde edilir. Bu sonuç ve Teorem 5.2.3' den $Z(E^u)$ ile $Z(E^\delta)$' nin Riesz izomorfik olduğu sonucunu doğurur. Diğer taraftan S,E'nin Maeda-Ogasawara uzayı ise Önerme 5.2.2' dan $Z(E^u)$ ile $C(S)$ Riesz izomorfiktir. Şimdi K ile $Z(E^\delta)$'nın Kakutani-Krein uzayını gösterelim. Kakutani-Krein gösterim teoreminden $C(K)$ ile $Z(E^\delta)$ Riesz izomorfiktir. Böylece $Z(E^u)$ ile $Z(E^\delta)$ Riesz izomorfik olduğundan $C(S)$ ve $C(K)$ Riesz izomorfik olmalıdır. Teorem 5.2.1'dan S ile K homeomorfiktir. Uzun ispatının (Nieberg, 1991)'den elde edilebilecek aşağıdaki gerçeğin farklı bir ispatını vererek bu bölümü bitiriyoruz.

Teorem 5.2.10 *(Ercan and Tan, 2013) S ve K aşırı bağlantısız topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) S ve K homeomorfiktir.

(2) $C^\infty(S)$ ve $C^\infty(K)$ Riesz izomorfik uzaylardır.

ispat: ((2) $:\Rightarrow$ (1)) $C^\infty(S)$ ve $C^\infty(K)$ Riesz izomorfik uzaylar olsun. Bu durumda $Z(C^\infty(S))$ ve $Z(C^\infty(K))$ uzayları da Riesz izomorfiktir. $Z(C^\infty(S))$ ve $Z(C^\infty(K))$ uzayları sırasıyla $C(S)$ ve $C(K)$ uzaylarına Riesz izomorfik olduğundan yine teorem 5.2.1'den S ile K homeomorfiktir.

((2) $:\Rightarrow$ (1)) Doğrudan teorem 5.2.1'den elde edilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abramovich, Y. A. Veskler, A. and **Koldunov, A.**, 1979, On operators preserving disjointness, *Soviet Math. Dokl.*, (20), 1089–1093.

Abramovich, Y.A. and **Aliprantis, C.D.**, 2002, *An invitation to operator theory*, Americal Mathematical Society.

Aliprantis, C.D. and **Burkinshaw, O.**, 1985, *Positive Operators*, Academic Press Inc.

Aliprantis, C.D. and **Burkinshaw, O.**, 1998, *Principle of Real Analysis*, Acedemic Press.

Aliprantis, C.D. and **Burkinshaw, O.**, 2003, *Locally Solid Riesz Space with Applications to Economics*, Americal Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Aliprantis, C.D. and **Tourky, R.**, 2007, *Cones and duality*, Americal Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Bade, W.G., 1958, A remark on finitely additive measures, *The American Mathematical Monthly*, 65(3), 190–191.

Bhaskara Rao, L.V. and **Bhaskara Rao, M.**, 1983, *Theory of Charge*, Academic Press Inc., London.

Buskes, G. and **Van Rooij, A.**, 1996, Whales and the universal completion, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(2), 423–427.

Diestel, J. and **Jr. Uhl, J.**, 1977, *Vector Measure*, American Mathematic Society.

Ercan, Z. and **Tan, N.O.**, 2013, On Kakutani-Krein and Maeda-Ogasawara spaces, *Turkish Journal of Math.*, (x), x.

Fremlin, D., 2002, *Measure theory*, Biddles Short Run Books.

Halmos, P., 1974, *Measure Theory*, Springer Verlag.

Kantorovic, L.V., 1937, On the moment problem a finite interval, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 14, 531–537.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Luxemburg, W., 1979, *Some aspect of the theory of Riesz spaces*, The university of Arkansas lecture notes.

Luxemburg, W. and **Zaanen, A.**, 1971, *Riesz spaces I*, North Holland Publishing Co.

Nieberg, P., 1991, *Banach Lattices*, Springer Verlag.

Schmidt, K.D., 1986, Decompositions of Vector Measures in Riesz Spaces and Banach Lattices, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 29, 23–39.

Schwartz, C., 1989, The Nikodym Boundedness Theorem for lattice-valued measures, *Arch. Math*, 53, 390–393.

Vulikh, B., 1967, *Introduction to theory of partially orderd spaces*, Wolters-Noordhooff Sci. Pulbl.

Wickstead, A., 1977, Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces, *Compositio Math*, 35, 225–238.

Zaanen, A.C., 1975, Examples of orthomorphisms, *J. Approx. Theory*, (13), 192–204.

Zaanen, A., 1997, *Introcduction to operator theory in Riesz spaces*, Springer Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Neşet Özkan TAN
- Adres : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
  35100, Bornova, İzmir
- Doğum Tarihi: 22.10.1985

Öğrenim Durumu

- 2004-2008 : Zonguldak Karaelmas Üniversites, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (Lisans)
- 2008-2010 : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Topoloji A.B.D (Yüksek Lisans)
- 2010-... : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Topoloji A.B.D (Doktora)