

ALFA BOZUNUMUNUN KESİRSEL MATEMATİK
KULLANILARAK İNCELENMESİ

Buket ÖDER

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Temmuz – 2013

ALFA BOZUNUMUNUN KESİRSEL MATEMATİK
KULLANILARAK İNCELENMESİ

Buket ÖDER

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. A. Engin ÇALIK

Temmuz – 2013

KABUL ve ONAY SAYFASI

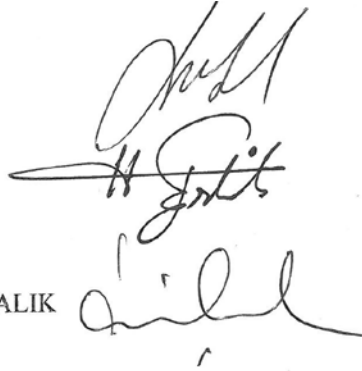
Buket ÖDER'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Alfa Bozunumunun Kesirsel Matematik Kullanılarak İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

21 /06 / 2013

Üye : Doç. Dr. Cemal PARLAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ERTİK

Danışman Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah Engin ÇALIK



Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ALFA BOZUNUMUNUN KESİRSSEL MATEMATİK KULLANILARAK İNCELENMESİ

Buket Öder

Fizik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2013

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. A. Engin Çalık

ÖZET

Bu çalışmada nükleer bozunma denklemi kesirsel matematik kullanılarak yeniden çözülmektedir. Bu bağlamda, nükleer bozunma denklemindeki birinci mertebeden zamana bağlı türev operatörü yerine Caputo kesirsel türev operatörü kullanılmaktadır. Böylece, elde edilen yeni denklem zaman-kesirsel nükleer bozunma denklemine dönüşür. Bu yeni denklemin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden elde edilmektedir. Bu zaman-kesirsel formun bir uygulaması olarak alfa bozunması yapan Pb, Po, Rn, Ra, Th ve U izotoplarının yarı ömür değerleri hesaplanmaktadır. Literatürde deneysel ve teorik yarı ömür değerlerini eşdeğer yapabilmek amacıyla düzeltme çarpanı kullanılmaktadır. Bu çalışmada ise herhangi bir düzeltme çarpanı kullanılmadan kesirsel yarı ömür değerleri deneysel yarı ömür değerleri ile uyum içinde elde edilmektedir. Sonuç olarak, kesirsel türev mertebesi ile nükleer yapı arasında yakın bir ilişki olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Alfa Bozunumu, Caputo Kesirsel Türevi, Kesirsel Matematik, Mittag-Leffler Fonksiyonu, Nükleer Bozunma Denklemi.

INVESTIGATION OF ALPHA DECAY BY USING FRACTIONAL CALCULUS

Buket Öder

Physics Department, M.S. Thesis, 2013

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. A. Engin Çalık

SUMMARY

In this study, the nuclear decay equation has been taken again under consideration of the nuclear decay equation fractional calculus. In this context, a Caputo fractional derivative operator has been performed instead of the first order time derivative operator. Hence, the resulting new equation converts to the time fractional nuclear decay equation. The solution of this new equation has been obtained in terms of Mittag-Leffler function. As an application of this time-fractional formalism, alpha decay half-life values have been calculated for Pb, Po, Rn, Ra, Th and U isotopes. In the literature, a corrected factor has been used in order to make the equivalent experimental and theoretical half-life values. However, the fractional half-life values in the present study, have been obtained in consistent with the experimental data. Consequently, the fractional derivative order and nuclear structure have been concluded closely related to each other.

Key Words : Alpha Decay, Caputo Fractional Derivative, Fractional Calculus, Mittag-Leffler Function, Nuclear Decay Equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince benden bilgi ve tecrübelerini, manevi desteğini, hoşgörüsünü ve sabrını hiçbir zaman esirgemeyen; eğitime ve bilime bakış açısıyla ufkumu genişleten, hayata yaklaşımıyla örnek teşkil eden saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. A. Engin Çalık'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Akdeniz Üniversitesi'nden sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Ertik ve Ege Üniversitesi'nden sayın Dr. Hüseyin Şirin'e katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Dumlupınar Üniversitesi'nden sayın Dr. M. Emre Kansu'ya öğrenimim süresince desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca yardımını, bilgisini cömertçe paylaşan, birlikte çalışmayı keyifli bir deneyim olarak yaşadığım özverili, değerli arkadaşım Mürsel Şen'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca sevgiyle, şefkatle, sabırla yanımda olan desteklerini esirgemeyen annem Suna Öder'e, babam Süleyman Öder'e, kardeşlerim Burcu Öder ve Burak Öder'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Buket ÖDER

Temmuz 2013, Kütahya

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
SİMGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. ALFA BOZUNMA TEORİSİ.....	4
2.1 Alfa Bozunması.....	4
2.1.1 Alfa bozunma teorisi.....	4
2.1.1.1 Tünel olayı	4
2.1.1.2 Alfa bozunması	8
2.2 Kabuk Modeli	11
3. KESİRSEL MATEMATİK.....	16
3.1 Kesirsel Matematiğin Tarihsel Gelişimi	16
3.2 Kesirsel Diferansiyel Hesap Tekniği	18
3.2.1 Gamma fonksiyonu	18
3.2.2 Laplace dönüşümü	19
3.2.3 Mittag-Leffler (ML) fonksiyonu	20
3.3 Kesirsel Türevler Ve İntegraller.....	22
3.3.1 Kesirsel türev ve integrallerin tanımları.....	22
3.3.1.1 Grünwald-Letnikov tanımı.....	23
3.3.1.2 Riemann-Liouville tanımı	26
3.3.1.3 Caputo tanımı	33
4. ALFA BOZUNUMUNUN KESİRSEL MATEMATİK İLE İNCELENMESİ.....	36
4.1 Radyoaktif (Nükleer) Bozunma Denkleminin Çözümü.....	36
4.2 Alfa Bozunumunun Kesirsel Matematik İle Çözümü	37
5. HESAPLAR VE SONUÇLAR	42

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
6. TARTIŞMA	53
KAYNAKLAR DİZİNİ	54

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Bir boyutlu sonlu potansiyel engeli	5
Şekil 2.2 Çekirdeğin potansiyelinin r ile değişimi.	9
Şekil 2.3 Çekirdeğin proton yoğunluğunun yarıçap ile değişimi.	13
Şekil 2.4 Woods-Saxon potansiyelinin kare kuyu ve harmonik osilatör potansiyeli ile karşılaştırılması.	13
Şekil 2.5 Kabuk modeli için potansiyeller	14
Şekil 2.6 Spin yörünge bağlaşımı ile sihirli sayıların varlığı.	15
Şekil 5.1 Pb izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri.....	48
Şekil 5.2 Po izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri.....	49
Şekil 5.3 Rn izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri	49
Şekil 5.4 Ra izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri	50
Şekil 5.5 Th izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri	50
Şekil 5.6 U izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri	51
Şekil 5.7 $N=126$ olan Po, Rn, Ra, Th, U izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri	51
Şekil 5.8 Nötron sayısı maksimum olan Po, Rn, Ra, Th, U izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri	52

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 5.1 Pb, Po ve Rn izotopları için deneysel ve teorik bozunma sabitleri.....	43
Çizelge 5.2 Ra, Th ve U izotopları için deneysel ve teorik bozunma sabitleri.....	44
Çizelge 5.3 Pb, Po ve Rn izotopları için deneysel, standart ve kesirsel yarı ömür değerleri.....	45
Çizelge 5.4 Ra, Th ve U izotopları için deneysel, standart ve kesirsel yarı ömür değerleri.....	46

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
λ	Bozunma sabiti
G	Gamow çarpanı
ν_0	Frekans
P	Engelden geçme olasılığı
P_0	Düzeltilme faktörü
$\frac{d}{dx}$	Türev operatörü
ML	Mittag-Leffler tanımı
E_α	Mittag-Leffler fonksiyonu
RL	Riemann-Liouville tanımı
D^α	Riemann-Liouville türev operatörü
J^α	Riemann-Liouville integral operatörü
D_*^α	Caputo türev operatörü
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
α	Alfa kesirsel türev/integral mertebesi
$N(t)$	t anındaki radyoaktif çekirdek sayısı
$t_{1/2}$	Yarı-ömür
Pb	Kurşun
Po	Polonyum
Ra	Radyum
Rn	Radon
Th	Toryum
U	Uranyum
N	Nötron numarası
Z	Proton numarası

1. GİRİŞ

Kesirsel matematik, tamsayı mertebeli türev ve integral işlemcilerinin kesirsel mertebeli olarak genelleştirilmesi ve uygulamalarıyla ilgili matematiğin bir dalıdır. Sürekli ancak türevlenemeyen fraktal fonksiyonlar standart matematiksel yaklaşımlarla incelenememektedir. Bu tip fonksiyonlar genelde deneye dayalı yaklaşımlarla ortaya konduğundan çözümü kesirsel matematik kullanılarak elde edilmektedir (Podlubyn, 1999).

Kesirsel matematiğin geçmişi Leibniz'e (1695) kadar uzanmaktadır. Bu konu üzerine birçok bilim adamı teoriye katkıda bulunmuşlardır. Özellikle son yüzyılda fizik ve mühendisliğin birçok dalında uygulamaları bulunmaktadır. Esneklik, akışkanlar, elektrokimya, fizikokimya, Schrödinger denklemi, fraktal süreçler, birçok difüzyon süreçleri bunlara örnek verilebilir (Çavuş, 2006; Ertik, 2010; Carpinteri and Mainari, 1997). Fiziksel sistemleri tanımlamak için kullanılan tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler, türev mertebeleri kesirsel olacak şekilde genelleştirilmektedir. Kesirsel matematik üzerine yapılan çalışmalar, bu teorinin gelişime açık olduğunu ve farklı alanlara uygulanabileceğini göstermektedir.

Fiziksel bir niceliğin zaman içindeki evrimini tanımlayan diferansiyel denklemler literatürde kinetik denklemler olarak adlandırılmaktadır. Kinetik denklem, $W=W(t)$ zamana bağlı olarak değişen fiziksel bir nicelik olmak üzere, aşağıdaki şekilde verilir (Şirin, 2011),

$$\frac{dW(t)}{dt} = aW(t) .$$

Burada, $t \in R$ zaman niceliğidir, a ise lineer ya da lineer olmayan bir operatör ya da denklemi boyutsuz hale getiren bir sabit olabilir. Kinetik denklemlerin çözümleri ise üstel azalan/artan formda olup

$$W(t) = W(0)e^{at}$$

şeklindedir. Burada, $W(0)$ ilgili problemin başlangıç koşulu, $a = -1/\tau$ ise fiziksel olaya ait karakteristik zaman ölçeğidir. Zamanın homojen olduğu durumlarda standart kinetik denklemin tanımında standart türev kullanılabilir. Standart kinetik denklemin kesirsel formdaki hali ise kesirsel kinetik denklem olarak adlandırılır ve literatürde çözümü yapılmaktadır (Sokolov, et al., 2002; Şirin, 2011). Bu amaçla literatürde standart türev operatörü yerine $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ alınır, burada α kesirsel türev mertebesidir.

Nükleer bozunma denklemi kinetik denklem ile aynı formda olup

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $N(t)$, t anında mevcut olan radyoaktif çekirdek sayısıdır, λ ise bozunma sabitidir. Bu diferansiyel denklemin çözümü,

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

şeklinde kinetik denklemin çözümünün bir benzeri olarak elde edilir, burada $N_0=N(t=0)$.

Bu çalışmada, yukarıda verilen nükleer bozunma denklemi kesirsel matematik kullanılarak çözülmüştür. Bu denklemin türev mertebesi, kesirsel olarak alınırsa kesirsel nükleer bozunma denklemi

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} N(t) = -\lambda^\alpha N(t)$$

şeklinde yazılır. Boyutsal uyumun korunması için λ , α 'nın kuvveti biçiminden yazılmaktadır. Bu denklemin çözümü ise

$$N(t) = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

şeklinde dir. Buradaki seri Mittag-Leffler fonksiyonu olup bu denklem

$$N(t) = N(0) E_\alpha(-\lambda^\alpha t^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Yukarıda elde edilen kesirsel nükleer bozunma denklemi kullanılarak alfa bozunumu yapan çift-çift Pb, Po, Rn, Ra, Th ve U izotoplarının yarı ömürleri incelenmiştir. Literatürde alfa bozunma mekanizmasını daha iyi anlayabilmek için birçok model geliştirilmiştir (Zhang and Royer, 2008; Zhang, et al., 2009 a; Zhang, et al., 2009 b; Singh, et al., 2011; Mohr, 2006). Bu modellerden biri olan alfa-cluster modelinde λ bozunma sabiti, engele çarpma frekansı ile engelden geçme olasılığının çarpımı yani $\lambda = \nu_0 P$ yerine,

$$\lambda = P_0 \nu_0 P$$

ifadesi ile verilmektedir. Burada P_0 , düzeltme faktörü olarak adlandırılmaktadır ve

$$P_0 = \frac{\lambda_{Deney}}{\lambda_{Teorik}} = \frac{t_{1/2}^{Teorik}}{t_{1/2}^{Deneyssel}}$$

şeklinde teorik ve deneysel bozunma sabitlerinin veya yarı ömürlerinin birbirlerine oranlanması ile tanımlanan ve deneysel ve teorik yarı ömürleri arasındaki farklılığı gidermek için kullanılan bir çarpandır (Zhang and Royer, 2008).

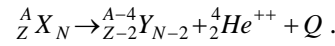
Bu çalışmada ise, kesirsel matematik kullanılarak elde edilen kesirsel nükleer bozunma denkleminin çözümü ile incelenen izotopların yarı ömür değerleri düzeltme faktörüne ihtiyaç duyulmadan deneysel yarı ömür değerleri ile uyumlu olarak elde edilmiştir. Ayrıca nükleer yapının kesirsel matematik ile bağımlılığı araştırılmıştır. Kesirsel matematiğin nükleer fiziğe uygulaması ilk defa bu çalışmada uygulanmıştır (Çalık, vd., 2013).

Bölüm 2’de alfa bozunumu deneysel ve teorik olarak ele alınmakta, nükleonların etkileşimine dayanan kabuk modeli anlatılmaktadır. Bölüm 3’te kesirsel matematiğin tarihsel gelişimine, kesirsel diferansiyel hesap tekniğine ve yaygın olarak kullanılan kesirsel türev ve integrallerin tanımlarına yer verilmektedir. Bölüm 4’te nükleer bozunma denklemini zaman-kesirsel formda ele alınmakta ve çözümü yapılmaktadır. Bölüm 5’de ise elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır.

2. ALFA BOZUNMA TEORİSİ

2.1 Alfa Bozunması

Kendiliğinden meydana gelen reaksiyonlar, birçok ağır çekirdek, özellikle doğal radyoaktif seri üyeleri, pozitif parçalanma enerjisi ile alfa parçacığı yayınlamaya meydana gelmektedir. Kendiliğinden meydana gelen bu süreç Coulomb itmesi olayından ibarettir ve alfa bozunumu olarak adlandırılır (Arya, 1999). Alfa bozunumu aşağıdaki şekilde ifade edilir;



Ağır çekirdeklerde nükleon-nükleon kuvveti kütle numarası (A) ile artarken Coulomb kuvveti proton sayısının karesi (Z^2) ile artar. Bu durumda çekirdek daha kararlı hale gelebilmek için pozitif yükün bir kısmını dışarı atar. Dışarı atılan pozitif yük iki kez iyonlaşmış helyum atomundan ibaret olup alfa parçacığı olarak adlandırılır. Alfa parçacığı çok kararlı ve sıkıca bağlı yapısı nedeniyle, ayrı ayrı bileşenlerinin toplam külesinden daha küçük bir küleye sahiptir ve bozunma sonunda hafif parçalanma ürünlerine ve dolayısıyla mümkün olan en büyük kinetik enerjiye sahip olur (Arya, 1999; Krane, 2001).

2.1.1 Alfa bozunma teorisi

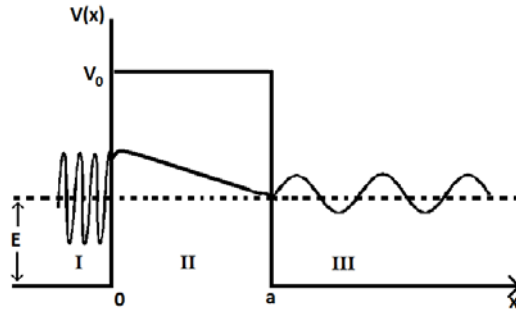
1928 yılında alfa bozunmasını klasik teoriden tamamen farklı olarak kuantum mekaniksel biçimde ele alan Gamow, Gurney ve Condon tarafından eş zamanlı geliştirilen bir teoridir (Gamow, 1928). Şöyle ki alfa parçacığı yayınlamaya meydana gelen ağır çekirdekler incelendiğinde alfa parçacıklarının Coulomb potansiyel engelini aşmak için gerekli enerjiye sahip olmadıkları halde yayınlanması klasik bakış açısına göre imkânsızken, kuantum mekaniksel olarak böyle bir engelden “sızma” veya “tünelleme” için bir şansı vardır. O halde alfa bozunma teorisini daha iyi anlamak için öncelikle kuantum mekaniğindeki tünel olayını incelemek gerekir (Krane, 2001).

2.1.1.1 Tünel olayı

Tek boyutlu potansiyel engeli klasik mekanikte incelenirse, parçacık potansiyel engele engelden daha fazla enerji ile geliyorsa geçip gitmesi, potansiyel engelin altında bir kinetik enerjiyle geliyorsa engele çarpıp geri dönmesi beklenir. Bu bölge klasik olarak yasaktır. Kuantum mekaniğinde ise klasik olarak yasaklı bölgede parçacık potansiyel engelinden tünelleme yapabilir yani parçacık bu potansiyel engelini delip geçebilir. Bu engeli delip geçme olasılığı P ile gösterilir ve

$$\text{Geçme olasılığı} = \frac{\text{Geçen şiddet}}{\text{Gelen şiddet}} = \frac{(\text{Geçen genlik})^2}{(\text{Gelen genlik})^2}$$

olarak tarif edilir (Karaoğlu, 1994).



Şekil 2.1 Bir boyutlu sonlu potansiyel engeli

Şekil 2.1'de bir boyutlu sonlu potansiyel engeli farklı dalga sayılarına sahip üç bölgenin oluşmasına sebep olmuştur. Bu üç bölge için potansiyel ifade,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ için} \\ V_0 & 0 < x < a \text{ için} \\ 0 & x > a \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde olup, her bölge için ayrı olarak verilmiştir. Schrödinger denklemi bu farklı üç bölge için ayrı ayrı aşağıdaki gibi çözülür.

I. ve III. Bölgeler için zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde olup

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} \quad (2.2)$$

olarak alınırsa (2.1) denklemi yerine;

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (2.3)$$

yazılır. Bu ikinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklemin çözümü;

$$\Psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2.4)$$

$$\Psi_{III} = Fe^{ikx} + \cancel{Ge^{-ikx}} \quad (2.5)$$

şeklindedir. Burada I. ve III. bölgelerdeki denklemlere baktığımızda karşımıza düzlem dalga ($e^{\pm ikx}$) çıkmaktadır ve A, B, F sırasıyla gelen, yansıyan, geçen dalgaların genlikleridir. III. bölge için dalga denklemi ifadesi olan Ψ_{III} de ikinci terim alınmaz. Çünkü III. bölgede yansıyan dalga yoktur.

II. bölge için zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi = 0 \quad (2.6)$$

şeklindedir. Bu ifadede

$$k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = \frac{q}{\hbar} \quad (2.7)$$

olarak alınırsa denklem (2.6) yerine;

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k'^2\psi = 0 \quad (2.8)$$

yazılabilir. Bu ikinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklemin çözümü;

$$\Psi_{II} = Ce^{k'x} + De^{-k'x} \quad (2.9)$$

şeklindedir. Burada C ve D sabittirler. Görüldüğü üzere II. bölgede parçacığın hareketi dalga olmadığından ($e^{\pm k'x}$) Ψ_{II} olarak yazdığımız denklem (2.9) dalga denklemi değildir.

Bir fonksiyonun dalga fonksiyonu olması için kendisinin ve türevinin sürekli olması gerçeğinden sınır şartları gereğince $x=0$ ve $x=a$ 'da aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır:

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \quad \Rightarrow \quad A + B = C + D$$

$$\frac{d}{dx}\Psi_I(0) = \frac{d}{dx}\Psi_{II}(0) \quad \Rightarrow \quad ik(A - B) = ik'(C - D)$$

$$\Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a) \quad \Rightarrow \quad Ce^{ik'a} + De^{-ik'a} = Fe^{ika}$$

$$\frac{d}{dx} \Psi_{II}(a) = \frac{d}{dx} \Psi_{III}(a) \quad \Rightarrow \quad ik'(Ce^{ik'a} - De^{-ik'a}) = ikFe^{ika}$$

Bu dört denklem kendi aralarında çözüldüğünde B ve F genlikleri A gelen dalganın genliği cinsinden yazılabilir,

$$B = \frac{(k^2 - k'^2) \sin k'a}{(k^2 + k'^2) \sin k'a + 2ikk' \cos k'a} A \quad (2.10)$$

$$F = \frac{2ikk'(k^2 - k'^2) \sin k'a}{e^{ika} [2ikk' \cos k'a - i(k^2 + k'^2) \sin k'a]} A \quad (2.11)$$

ve bu iki ifadeden yansıma (R) ve geçme olasılığı (P) katsayıları,

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sin k'a} \right]^{-1} \quad (2.12)$$

$$P = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2 \sin k'a}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1} \quad (2.13)$$

bulunur. Bulduğumuz bu yansıma ve geçme olasılığı eşitliklerinde $k' \rightarrow -i\alpha$ değişikliği ile $\sinh iy = i \sin y$, $\cosh iy = \cos y$ özdeşliklerinden yararlanarak yeniden yazıldığında,

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2 \alpha a} \right]^{-1} \quad (2.14)$$

$$P = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \alpha a}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1} \quad (2.15)$$

bulunur.

$E < V_0$ olması halinde geçme olasılığı (P), 0 ile 1 arasında sonlu bir değerdedir. Yani parçacığın enerjisi engelden küçük olsa bile III. bölgeye geçme olasılığı vardır. Klasik mekanikte karşılığı olmayan bu duruma “tünel olayı” denir (Arya, 1999; Karaoğlu, 1994; Zengin ve Aygün, 2006).

Geçme olasılığı (P) parçacığın enerjisine ve engelin genişliğine bağlı olarak değişir. Bu P ifadesinin limit değerleri için $\alpha a = \sqrt{2m(V_0 - E)a^2} / \hbar$ parametresi incelenirse;

i. $\alpha a \gg 1$ ise $(V_0 - E)a^2 \gg 1$, yani $E \ll V_0$ demektir. Bu durumda $\sinh \alpha a = (e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) / 2 \approx e^{\alpha a} / 2$ alınabilir ve P geçme olasılığının paydasındaki terim, yanındaki birden daha büyüktür. Böylece

$$P = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \alpha a}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1}$$

ifadesi elde edilir. Buna göre bir parçacığın geçme olasılığı enerjisi küçük ise engelin genişliğiyle üstel olarak azalmaktadır.

ii. $\alpha a \ll 1$ ise $(V_0 - E)a^2 \ll 1$, yani $E \approx V_0$ demektir. Bu durumda $\sinh \alpha a \approx \alpha a$ alınabilir ve P geçme olasılığı için yaklaşık ifade

$$P = \left[1 + \frac{2ma^2V_0^2}{\hbar^2 E} \right]^{-1}$$

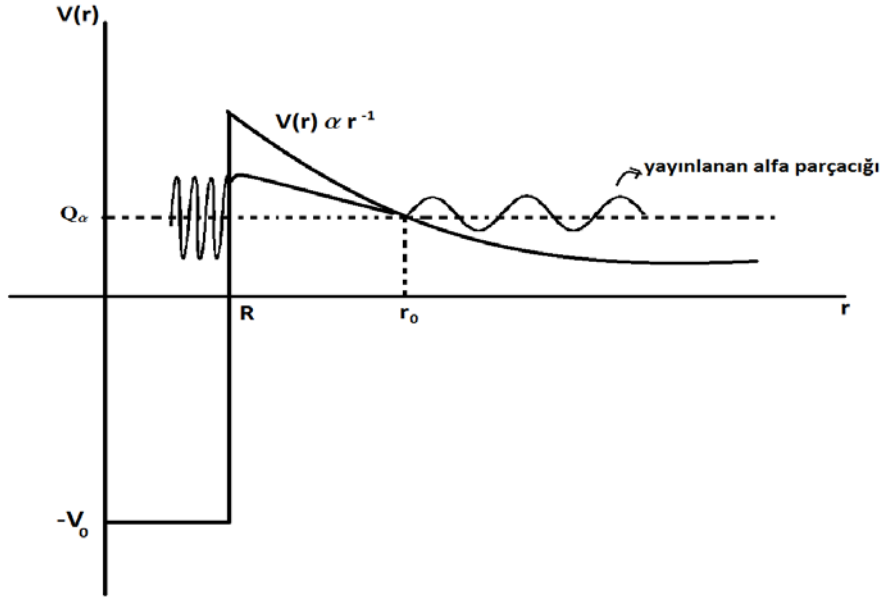
olur. Geçme olasılığı yine engelin genişliği ile azalmakta, ancak kinetik enerjinin E değeri potansiyel enerji V_0 'a ne kadar yakın olursa o kadar artmaktadır.

iii. Limit $E = V_0$ değerinde $\sinh \alpha a = 0$ ve $P = 1$ 'dir (Karaoğlu, 1994).

2.1.1.2 Alfa bozunması

Bu teoriye göre bir alfa parçacığının ana çekirdek içinde ayrı bir cins olarak var olduğu ve ürün çekirdekle belirlenen bir küresel bölgede hareket ettiği kabul edilir. Özellikle çift-çift çekirdekler için çok iyi çalışan bu teori, alfa parçacıklarının önceden oluşturulduğunu kanıtlamasa da, önceden oluşturulmuş gibi davrandıklarını gösterir (Krane, 2001).

Şekil 2.2 alfa parçacığı ile ürün çekirdek arasındaki potansiyel enerjinin merkezleri arasındaki uzaklığa bağlı olarak değişimini göstermektedir. Q_α yatay çizgisi parçalanma enerjisidir. R yarıçapı ürün çekirdek ile alfa parçacığının yarıçapının toplamı olarak alınabilir. Şekil 2.2'yi incelediğimizde alfa parçacığının Coulomb engeli boyunca tünelleme yaptığı görülür.



Şekil 2.2 Çekirdeğin potansiyelinin r ile değişimi.

Şekil 2.2'ye göre $r=R$ deki çekirdek yüzeyinin içinde potansiyel, bir kare kuyu potansiyel ile temsil edilir. Yüzeyin ötesinde yalnızca Coulomb itmesi kendini gösterir, Alfa parçacığı, R den r_0 'a Coulomb engeli boyunca tünelleme yapar. Tünel olayında incelediğimiz gibi Coulomb potansiyeli ile ayrılan üç bölge için aşağıdaki yorumlar yapılır;

- i. $r < R$ bölgesinde alfa parçacığı klasik olarak dışarı çıkamaz ve kinetik enerjisi bariyerin yüksekliğinden daha azdır.
- ii. $R < r < r_0$ bölgesinde ise klasik olarak izinli olmayan tünelleme olayı meydana gelmektedir.
- iii. $r > r_0$ bölgesinde ise artık alfa parçacığı çekirdekten dışarı çıkmış ve kendi kinetik enerjisi ile hareketine devam etmektedir (Krane, 2001).

Önceden oluşturulduğu düşünülen alfa parçacığı, kısıtlandığı küresel bölgede ileri geri hareketlerle kendini tekrar tekrar potansiyel engel önünde bulur. Bu engel kararsız alfa çekirdeklerinin hemen bozunmayacağını söyler ve Şekil 2.2'de görüldüğü gibi engeli delip geçene kadar bu hareketine devam eden alfa parçacıkları gerekli şartları tamamlayınca tünelleme yaparak genellikle Coulomb alanında saçılırlar (Arya, 1999; Krane, 2001).

Saniyedeki kaçış ihtimali olarak tanımlanan bozunma sabiti $\lambda = \nu_0 P$ ile verilir. ν_0 engele çarpma frekansı ve P engelden geçme olasılığıdır.

Burada alfa parçacığının potansiyel engele çarpma frekansı,

$$\nu_0 = \frac{v}{2R} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2Q_\alpha}{M}} \quad (2.16)$$

parçacığın hızının aldığı yola yani çekirdeğin çapına oranı olarak verilir. Denklem (2.16)'dan da görüldüğü gibi hız enerji- kütle cinsinden de yazılabilir. Parçacığın engelden geçme olasılığı ise

$$P = \exp[-2G] = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_0} \sqrt{2\mu(V(r) - Q_\alpha(r))} dr\right] \quad (2.17)$$

ile verilir. Burada potansiyel $V(r) = zZe^2/r = 2Ze^2/r$ 'dir. Alfa parçacığı 2 elektronunu kaybetmiş He çekirdeği olduğu için $z=2$ He çekirdeğinin atom numarasıdır ve Z çekirdeğin atom numarası, G ise Gamow çarpanıdır (Arya, 1999).

Denklem (2.17)'deki alfa parçacığının engelden geçme olasılığını veren P eşitliği ile denklem (2.16)'daki alfa parçacığının potansiyel engele çarpma frekansı ν_0 , bozunma sabiti $\lambda = \nu_0 P$ bağıntısıyla birleştirilirse,

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \approx \frac{v}{R} e^{-2G}$$

elde edilir. Burada

$$G = \left\{ \left(\frac{2mzZe^2}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{R}{r_0} \right)^{1/2} - \left(\frac{R}{r_0} - \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.18)$$

veya $\frac{R}{r_0} = \frac{Q_\alpha}{V(R)} = \frac{Q_\alpha R}{zZe^2}$ olduğundan

$$G = \left\{ \left(\frac{2mzZe^2 r_0}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{Q_\alpha}{V(R)} \right)^{1/2} - \left(\frac{Q_\alpha}{V(R)} - \left(\frac{Q_\alpha}{V(R)} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.19)$$

elde edilir. Bu olayla alfa parçacıklarının enerjileri ile yarı ömürleri arasındaki bağıntı açıklanır (Arya, 1999; Krane, 2001).

2.2 Kabuk Modeli

Çekirdeğin kabuk (tabakalı) modeli, atomun karmaşık yapısını anlamak için elektron yörüngeleri üzerine kurulan atomik kabuk modeline dayanmaktadır. Atomik kabuk modelinde, artan enerjili elektronlar Pauli prensibine uyacak şekilde kabukları doldururlar ve sonunda tamamen dolu kabuklardan oluşan bir eylemsiz kor ve birkaç değerlik elektronu elde edilir. Bu değerlik elektronları tarafından atomun özellikleri belirlenir. Bu model 1934 yılında Elzas ve Guggenheimer tarafından nükleer yapıya uygulanmıştır. Onların bu hipotezi ortaya atmalarının sebebi, çekirdeklerin yayınlamış olduğu alfa parçacıklarının proton numarası (Z) ve nötron numarasına (N) göre enerjilerinin değişim eğrilerinin sürekli değil kesikli olmasıydı. Bu süreksizlik 2, 8, 20, 28, 50, 82 ve 126 sayılarına sahip proton veya nötronun özellikle de 82. proton ve 126. nötron için büyük bir bağlanma enerjisinin varlığını gösteriyordu. Bu sayılara “sihirli sayılar”(magic number) adı verilir ve dolu ana kabukları temsil ederler. Atomik kabuk yapısında da atom numaraları 2, 10, 18, 36, 54 olan atomların iyonizasyon enerjileri komşularına göre daha fazladır. Bu noktada nükleer kabuk yapısı atomik kabuk yapısıyla kıyaslanacak olursa bunlardan biri potansiyel, bir diğeri uzaysal yörüngelerin varlığıdır:

i. Potansiyel, atomik durumda çekirdeğin Coulomb kuvvetiyle sağlanır. Atomlarda elektronları tabakalarda tutan kuvvet elektron ile çekirdek arasındaki Coulomb kuvvetidir. Alt kabuklar (yörüngeler) bir dış kaynak tarafından oluşturulur. Elektronların yerleştirilebileceği alt kabukların enerjileri de bu potansiyel için Schrödinger denkleminin çözümünden hesaplanabilir. Çekirdekte pozitif yüklü protonlar ve yüksüz nötronlar bulunduğundan Coulomb kuvvetine benzer bir kuvvet söz konusu değildir. Nükleonlar kendilerinin yarattığı bir potansiyel içinde hareket ederler ve atomik yapıdaki gibi bir dış kaynak yoktur. Bir nükleonun hareketini diğer tüm nükleonların oluşturduğu potansiyel belirler. Bu şekilde her bir nükleon göz önüne alındığında, nükleonlar sırasıyla bir alt kabuk serisinin enerji düzeylerini doldurabilir.

ii. Pauli dışarlama ilkesine bağlı olan uzaysal yörüngeler, atomik kabuk için elektron yörüngeleridir. Elektronlar bu yörüngelerde diğer elektronlarla çarpışmadan serbest bir şekilde hareket edebilirler. Nükleonların böyle yörüngelerde dolandığını düşünecek olursak tek bir nükleon her yörüngede birçok çarpışma yapar. Nükleonlar çarpıştığında biri diğerine enerji aktarır ve enerji kazanan nükleon değerlik düzeyi dışında bir düzeye gitmek ister. Eğer değerlik nükleonlarının bulunduğu düzeye kadar tüm enerji düzeyleri dolu ise bu mümkün değildir. Dolu olmasa bile böyle bir geçiş için nükleonların çarpışmaları sırasında birbirlerine aktardıkları enerjiden çok daha fazlası gereklidir. Bu nedenle çarpışmaların olmadığı ve nükleonların

yörüngelerde saydam parçacıklar gibi dolandıkları söylenir (Cottingham and Greenwood, 2001; Krane, 2001; Tanyel, 1994).

Nükleer kabuk modelinde, her bir nükleon öteki nükleonlardan bağımsız olarak onların meydana getirdiği ortalama bir potansiyel içerisinde hareket eder. Uygun bir potansiyel fonksiyonun seçilmesiyle bir tek nükleonun bu potansiyel içindeki hareketi incelenir, enerji özdeğerleri araştırılarak kabuklardan her birinin bağlanma enerjisi bulunur ve Pauli dışarlama ilkesi gereğince bu kabukların alabileceği nükleon sayıları hesaplanır. Eğer seçilen potansiyel gerçekçi ise sihirli sayıların elde edilmesi gerekir.

Sihirli sayıların varlığını destekleyen deneyler kabuk modeli oluşturulmadan önce gerçekleştirildiğinden kabuk modelinin formüle edilmesinde güçlü katkısı olmuştur. Sihirli sayıda nötronu ve protonu olan çekirdekler komşu çekirdeklerle kıyaslandığında;

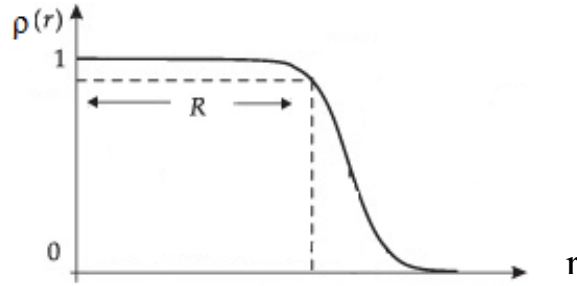
- daha kararlı oldukları,
- kararlı izoton ve izotop sayısının daha büyük olduğu,
- nötron yakalama tesir kesitlerinin çok küçük olduğu,
- son nükleonun bağlanma enerjisinin çok büyük olduğu,
- çift-çift çekirdekte birinci uyarılmış durumlarının çok büyük olduğu

deneylerle gözlenmiştir.

Ayrıca sihirli sayıda proton ve nötron olan çekirdekler için kuadropol momentlerinin minimum olması ile küresel simetriye yakın kapalı kabukların varlığına delil olarak gösterilmiştir (Cottingham and Greenwood, 2001; Krane, 2001; Tanyel, 1994).

Nükleonların etkileşimini belirlemede ilk olarak sonsuz kuyu potansiyeli ele alındığında nükleer potansiyel keskin kenarlı olmadığından ayrıca bir nükleonu kuyudan çıkarabilecek sonsuz büyüklükte enerji sağlanması gerektiğinden bu potansiyelin çözüm için iyi bir yaklaşım olmadığı görülmüştür. Keskin bir şekle sahip olmayan harmonik salıncı potansiyeli kullanıldığında ise yine sonsuz ayrılma enerjisi gerektiğinden bu potansiyelde kullanılmamış ve sonunda bu iki potansiyel arasında bir şekle sahip olan ortalama bir potansiyel kullanılmıştır.

Seçilen bu ortalama potansiyel, kuramsal olarak düşünüldüğünde Şekil 2.3'te verilen çekirdeğin proton yoğunluğu (ρ) gibi değişmelidir.

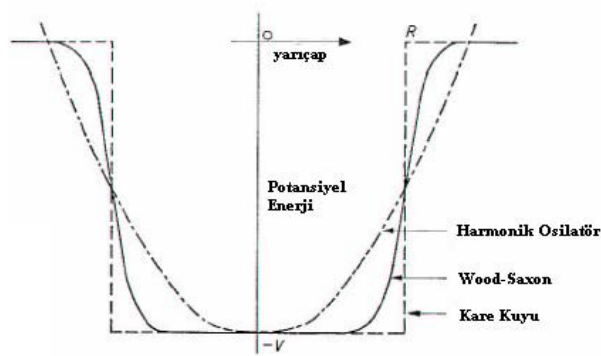


Şekil 2.3 Çekirdeğin proton yoğunluğunun yarıçap ile değişimi.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R)/a]} \quad (2.20)$$

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R)/a]} \quad (2.21)$$

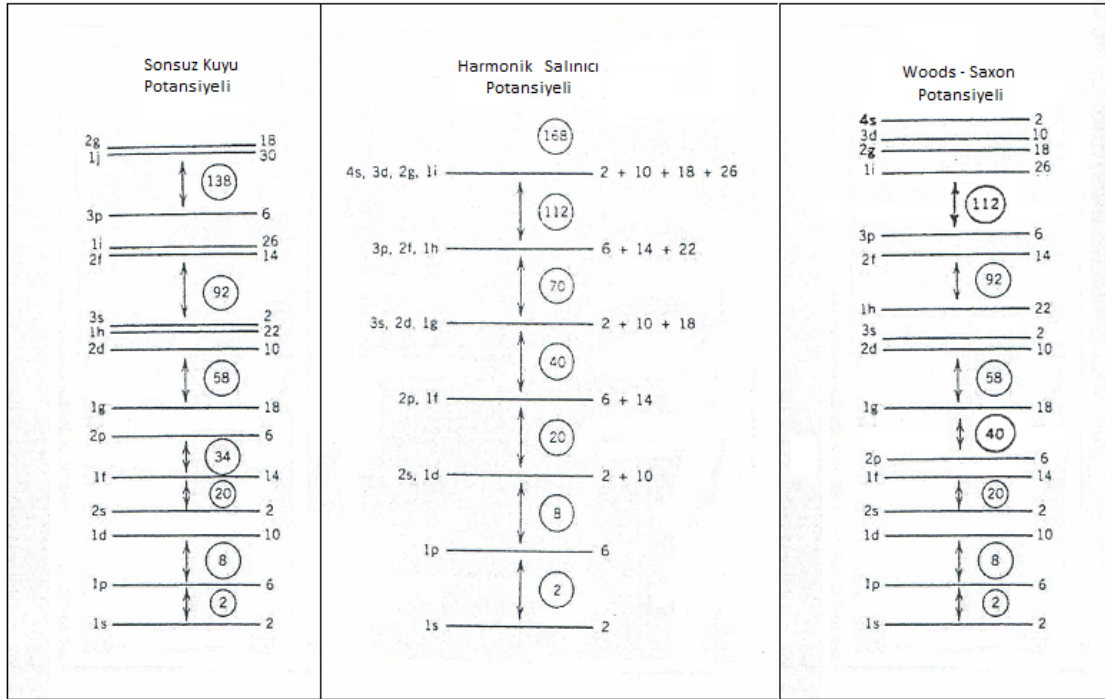
Denklem (2.20) ve (2.21)'de proton yoğunluğunun ve potansiyelinin yarıçap ile değişimi verilmiştir. Burada ρ_0 ve V_0 başlangıç değerleridir. Deneysel proton yoğunluğunu Şekil 2.3'teki gibi değiştirmiş ve nötron yoğunluğunun da buna benzediği görülmüştür. Bu nedenle proton yoğunluğu şekline uygun bir potansiyel seçilmiştir. Bu potansiyel Şekil 2.4'deki Woods-Saxon potansiyeli olarak bilinir. Ortalama yarıçap R , yüzey kalınlığı a , uygun ayrılma enerjisi için kuyu derinliği V_0 alınarak elde edilen enerji düzeyleri Şekil 2.5'de gösterilmiştir (Cottingham and Greenwood, 2001; Tanyel, 1994).



Şekil 2.4 Woods-Saxon potansiyelinin kare kuyu ve harmonik osilatör potansiyeli ile karşılaştırılması.

Şekil 2.5'den de görüldüğü gibi nükleonların kabukları doldurmasıyla 2, 8 ve 20 sihirli sayıları elde edilir. Ancak yüksek düzeylerde daha büyük sihirli sayılar elde edilemez. Woods-Saxon potansiyeli fiziksel anlamda çok iyi bir yaklaşım olduğundan potansiyelde köklü bir

değişiklik yapılmadan yine atomik kabuk modeli göz önüne alınarak 1949 yılında Mayer, Haxel, Suess ve Jensen potansiyele bir “spin-yörünge” terimi eklemişler ve alt kabukların ayrılmalarını tam olarak gösterecek yaklaşımı geliştirmişlerdir (Krane, 2001). Bu son gelişmeyle üst enerji düzeylerindeki daha büyük sihirli sayılar elde edilmiştir (Şekil 2.6).



Şekil 2.5 Kabuk modeli için potansiyeller

Bunun dışında dolu olan alt kabuklara karşılık gelen nükleon sayılarına da alt-sihirli sayı (submagic number) denir. Bu sayıları 2, 6, 14, 16, 32, 38, 40, 58, 64, ... olarak sıralanır. Alt-sihirli sayıya sahip olan çekirdekler sihirli sayılar kadar olmasa da kararlı yapıdadırlar. Şöyle ki alt kabukları dolu olmayan değerlik nükleonu bulunduran çekirdeklere göre alt-sihirli sayıya sahip nükleon bulunduran çekirdekler daha kararlıdır.

Açısal Momentum ($h\Omega/2\pi$)	Spin Yörünge Bağlaşımı ($1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \dots$)	Düzye Başına Nükleon Sayısı $2j+1$	Toplam Nükleon Sayısı	Sihirli Sayı	
7	1j	1j 15/2	16	[184]	— (184)
6	4s	3d 3/2	4	[168]	
6	3d	4s 1/2	2	[164]	
6	2g	2g 7/2	8	[162]	
6	1i	1i 11/2	12	[154]	
6	2g	3d 5/2	6	[142]	
6	1i	2g 9/2	10	[136]	
6	1i	1i 13/2	14	[126]	— (126)
5	3p	3p 1/2	2	[112]	
5	3p	3p 3/2	4	[110]	
5	2f	2f 5/2	6	[106]	
5	2f	2f 7/2	8	[100]	
5	1h	1h 9/2	10	[92]	
5	1h	1h 11/2	12	[82]	— (82)
4	3s	3s 1/2	2	[70]	
4	2d	2d 3/2	4	[68]	
4	2d	2d 5/2	6	[64]	
4	1g	1g 7/2	8	[58]	
4	1g	1g 9/2	10	[50]	— (50)
3	2p	2p 1/2	2	[40]	— (40)
3	2p	1f 5/2	6	[38]	
3	1f	2p 3/2	4	[32]	
3	1f	1f 7/2	8	[28]	— (28)
2	2s	1d 3/2	4	[20]	— (20)
2	1d	2s 1/2	2	[16]	
2	1d	1d 5/2	6	[14]	
1	1p	1p 1/2	2	[8]	— (8)
1	1p	1p 3/2	4	[6]	
0	1s	1s 1/2	2	[2]	— (2)

Şekil 2.6 Spin yörünge bağlaşımı ile sihirli sayıların varlığı.

Şekil 2.6'daki ilk sütunda enerji düzeylerine göre nükleonların bulunacakları durumlar yer almaktadır. İkinci sütunda açısal momentuma göre enerji düzeyleri verilmiştir. Spin yörünge bağlaşımı ile düzeylerin ayrıldığı görülmektedir. Bu düzeylere karşılık gelen nükleon sayıları her bir düzey sonunda toplandığında sihirli sayıların tam olarak elde edildiği görülür. Buda açık olarak kabuk etkisini gösterir.

3. KESİRSEL MATEMATİK

Tamsayı mertebeli türev ve integral operatörlerinin kesirsel olarak genelleştirilmesiyle ortaya çıkan kesirsel matematik, doğrusal olmayan, denge durumundan uzak süreçlerin çalışılmasında karşılaşılan fraktal fonksiyonların incelenmesinde ve doğal sistemlerin kuvvet yasası formundaki davranışları ile bu formdan sapma gösterdikleri davranışları arasındaki ilişkiyi açıklamada yetersiz kalan standart matematiğe alternatif olmuştur. Böyle bir genelleştirme, fiziksel sistemler için standart matematiğin açıklamadaki zayıflıklarını gidermekle beraber olayları inceleyebilme olanağı tanır ve olayların yorumlarına katkıda bulunur (Oldham and Spanier, 1974; Podlubyn, 1999; Miller and Ross, 1993).

3.1 Kesirsel Matematiğin Tarihsel Gelişimi

Kesirsel matematiğin geçmişi Leibniz'e (1695) kadar uzanmaktadır. Bu konu üzerine en erken yapılan sistematik çalışmalar 19. yüzyılın başlarında ve ortasında Liouville (1832), Riemann (1853) ve Holmgren (1864) tarafından yapılmıştır. Ayrıca Euler (1730), Lagrange (1772) ve diğer bazı bilim adamları da teoriye katkıda bulunmuşlardır. Bu katkılar şöyledir;

a) Kesirsel matematik üzerine ilk büyük çalışma $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \exp\{2x\}$ kesirsel türevini ele alarak 1832 yılında Liouville tarafından yapılmıştır. Liouville'nin yaptığı bu çalışma ile geometrideki ve mekanikteki bazı problemler kesirsel işlemciler kullanılarak çözülmüştür.

b) Kuvvet serilerine uygulanabilen tamsayı olmayan üslerle yazılmış ve bir belirli integral içeren farklı bir tanım 1853 yılında Riemann tarafından ortaya konulmuştur.

c) 1867 yılında Grünwald yapmış olduğu çalışmada, kendi başlangıç noktasını kullanarak q . mertebeden türev için belirli bir integral formülü elde etmiştir.

d) 1890 yılında Krug, sıradan türevler için Cauchy integral formülü ile çalışarak, Liouville tanımının ayırt edilebilir herhangi bir alt limiti yokken Riemann belirli integralinin bir alt limiti olabileceği yorumunu ortaya koymuştur.

Böylece, Grünwald ve Krug, Riemann ve Liouville' nin ortaya koydukları sonuçları birleştirmişlerdir. Aynı tarihlerde birçok uygulama da yapılmıştır. Bu uygulamalar:

i. 1823 yılında Abel yaptığı çalışmada, eş zaman (tautochrone) problemlerinde kullanılan integral denklemlerin çözümünü ortaya koymuştur. Abel' in çalıştığı

$\int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t)dt$ integrali, Riemann'ın kesirsel integral tanımına benzer formdadır. (Abel,

kesirsel matematiğin uygulamasını bir bilimsel çalışma ile sunan ilk bilim adamlarından biridir.)

ii. 1844 yılında Boole, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için kesirsel matematiği kullanmıştır.

iii. 1892, 1893 ve 1920 yıllarında Heaviside yapmış olduğu çalışmalarda, elektromanyetik teorisinin belirli problemlerinin çözümünü kesirsel matematiği kullanarak ortaya koymuştur.

iv. 1936 yılında Gemant, Heaviside'in iletim teorisi esneklik problemlerinde kullanmak için geliştirmiştir.

Geçtiğimiz yüzyılda kesirsel matematiğe olan katkılar ise özetle şöyledir:

i. Weyl (1917), Hardy (1917), Hardy ve Littlewood (1925, 1928, 1932), Kober (1940) ve Kuttner (1953) isimli bilim adamları, Lebesgue ve Lipschitz sınıflarına ait fonksiyonların diferintegrallerinin bazı özel ve doğal özelliklerini çalışmışlardır.

ii. Erdélyi (1939, 1940, 1954) ve Osler (1970) sıradan fonksiyonlara göre diferintegrallerin tanımını vermişlerdir.

iii. Riesz (1940), birden fazla değişkene bağlı fonksiyonlar için kesirsel integrasyon teorisini geliştirmiştir.

iv. Erdélyi (1964, 1965), integral denklemlerin çözümü için kesirsel matematiği uygulamıştır.

v. Higgins (1967), diferansiyel denklemleri çözmek için kesirsel integral işlemciler kullanmıştır.

vi. Scott Blair (1947), Shermorgor (1966) ve Graham (1961) isimli bilim adamları, diferintegral işlemcileri kullanarak akışkanlar teorisine katkılarda bulunmuşlardır.

vii. Belavin (1964), Oldham (1969), Oldham ve Spanier (1970), Grenness ve Oldham (1972) kesirsel integral ve türev işlemcilerini kullanarak elektrokimya bilimine katkılarda bulunan bilim adamlarıdır. Ayrıca, Oldham (1973), Oldham ve Spanier (1972) genel iletim problemlerini kesirsel matematik kullanarak incelemişlerdir.

viii. Somorjai ve Bishop (1970), kesirsel matematik yöntemleri kullanarak fizikokimya bilimine katkılarda bulunmuşlardır (Oldham and Spainer, 1974; Ertik, 2010).

3.2 Kesirsel Diferansiyel Hesap Tekniği

Kesirli hesabın tanımları ve kullanımını anlamak için gama fonksiyonları, Laplace dönüşümleri ve Mittag-Leffler fonksiyonları gibi bazı özel fonksiyonları ve integral dönüşümlerini iyi bilmek gerekmektedir (Podlubyn, 1999).

3.2.1 Gamma fonksiyonu

Kesirli hesabın temel fonksiyonlarından biri gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$ 'dir. Literatürde farklı tanımları bulunan gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonu olarak da bilinir. Gamma fonksiyonunun limit gösterimi z 'nin alabileceği bütün değerler için, yani karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genelleştirilmesi olan bir fonksiyondur (Podlubyn, 1999; Ertik, 2010; Bayın, 2004).

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (3.1)$$

Euler'in gamma fonksiyonu belirli integral tanımı ile verilir. Bu tanım $z > 0$ değerleri ile sınırlı olsa da yaygın olarak kullanılmaktadır

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (3.2)$$

(3.2) denkleminde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\Gamma(z) = - \int_0^{\infty} d(e^{-t}) t^{z-1} \quad (3.3)$$

$$\Gamma(z) = (z-1) \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-2} \quad (3.4)$$

şeklinde yazıldığında

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) \quad (3.5)$$

bulunur. Buradan daha sade bir şekilde

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (3.6)$$

ifadesine ulaşılır ki, bu gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biridir. z 'nin sıfırdan büyük ve tamsayı değerlerine baktığımızda $\Gamma(1) = 1$ olduğu açıktır, $z=1,2,3,\dots$ değerleri için

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \quad (3.7)$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \quad (3.8)$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \quad (3.9)$$

...

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = (n-1)! \quad (3.10)$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n! \quad (3.11)$$

bulunur. Gamma fonksiyonunun diğer bir önemli özelliği, $z = -n, (n = 0, 1, 2, \dots)$ kutup noktalarında sonsuza ıraksamasıdır (Podlubyn, 1999; Ertik, 2010; Bayın, 2004).

3.2.2 Laplace dönüşümü

Laplace dönüşümü temel olarak, t 'nin bilinmeyen bir fonksiyonu cinsinden yazılmış olan ve bu t -uzayında çözümü zor olan bir diferansiyel denklemi, s değişkeni bulunduran s -uzayına taşıyarak bir cebirsel probleme dönüştürür.

f fonksiyonu reel bir değer olan t serbest değişkeninin integrali alınabilen bir fonksiyonu olsun. Ayrıca, $t > 0$ olmak üzere reel bir sayı olan s parametresinin fonksiyonu olan bir \tilde{f} fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyon

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s) \quad (3.12)$$

şeklinde verilir. Eğer bu ifade s nin bütün değerleri için sağlanabiliyorsa \tilde{f} -fonksiyonuna, f -fonksiyonunun Laplace dönüşümü adı verilir.

f ve g $0 \leq t \leq b$ kapalı aralığında sürekli ve üstel mertebeli Laplace dönüşümü alınabilen iki fonksiyon olsunlar. Bu fonksiyonların $f * g$ şeklinde gösterilen ve

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanan ifadesine f ve g fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımları denir. Ayrıca

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (\text{değişme özelliği})$$

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (\text{toplama üzerine dağılma özelliği})$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } f(t) * (ag(t)) = a(g(t) * f(t))$$

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \quad (\text{birleşme özelliği})$$

özelliklerine sahiptir. Konvolüsyon çarpımının Laplace dönüşümü ise

$$L\{f(t) * g(t)\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \quad (3.14)$$

şeklindedir (Aydın vd., 2009; Podlubyn, 1999).

3.2.3 Mittag-Leffler (ML) fonksiyonu

İlk olarak Mittag-Leffler (1905) tarafından ortaya konan bu özel fonksiyon

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.15)$$

seri açılımı ile tanımlanmakta ve $\alpha = 1$ için $\exp(z)$ fonksiyonuna indirgenmektedir. Mittag-Leffler (ML) fonksiyonu kesirsel diferansiyel denklemlerin çözümünde en az tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümünde ki üstel fonksiyon $\exp(z)$ kadar önemli bir yere sahiptir. (ML) fonksiyonları α nın tamsayı değerleri için

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z} \quad (3.16)$$

$$E_1(z) = \exp(z) \quad (3.17)$$

$$E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}) \quad (3.18)$$

$$E_3(z) = \frac{1}{3} \left[\exp(\sqrt[3]{z}) + 2 \exp(-\sqrt[3]{z}/2) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{z}\right) \right] \quad (3.19)$$

$$E_4(z) = \frac{1}{2} \left[\cos(\sqrt[4]{z}) + \cosh(\sqrt[4]{z}) \right] \quad (3.20)$$

olarak verilirler. Tek-parametrelili ML fonksiyonunun iki-parametrelili genelleştirilmiş formu ise,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.21)$$

şeklinde (Podlubyn, 1999; Carpinteri and Mainari, 1997; Mainardi and Gorenflo, 2000). Burada $\alpha, \beta > 0$ ve $\beta = 1$ için bir-parametrelili ML fonksiyonu elde edilmektedir

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad (3.22)$$

Aşağıda iki-parametrelili genelleştirilmiş ML fonksiyonlarına birkaç örnek verilmektedir:

Üstel fonksiyonlar için,

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (3.23)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad (3.24)$$

...

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \quad (3.25)$$

Sinüs hiperbolik fonksiyonları için,

$$E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (3.26)$$

Hata fonksiyonu için,

$$E_{1/2,1}(z) = \exp(z^2) (1 + \operatorname{erf}(z)) \quad (3.27)$$

eşitlikleri yazılır.

S. B. Hadid ve Y. Luckho (Hadid and Luchko, 1996) tarafından ilginç bir genelleme öne sürülmüştür,

$$E(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \beta(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_m = k \\ l_1 > 0, \dots, l_m > 0}} \frac{(k; l_1, \dots, l_m) \prod_{i=1}^m z_i^{l_i}}{\Gamma(\beta + \sum_{i=1}^m \alpha_i l_i)}. \quad (3.28)$$

Burada $(k; l_1, \dots, l_m)$ çok terimli katsayılarıdır. Çok sayıda değişken içeren ML fonksiyonu, operatör metoduyla sabit katsayılı lineer kesirli denklemlerin çözümü için kullanılır (Podlubyn, 1999; Ertik, 2010; Bayın, 2004).

3.3 Kesirsel Türevler Ve İntegraller

Literatürde birçok kesirsel türev ve integral tanımı bulunmaktadır. Farklı matematiksel orijinlere dayanan bu tanımların birbirine denk olması gerekmez. Bunlardan en yaygın olanları nümerik hesaplamalar için kullanılan Grünwald-Letnikov tanımı, analitik hesaplamalar için ise Riemann-Liouville (RL) ve Caputo tanımıdır. Analitik hesaplamalarda RL kesirsel türev tanımı daha çok matematikçiler tarafından kullanılırken, uygulamalı alanlarda, fizikçiler ve mühendisler Caputo kesirsel türev tanımını kullanmaktadır. Çünkü sabit bir fonksiyonun RL kesirsel türevi sıfırdan farklıyken Caputo kesirsel türevi sıfıra eşittir ve başlangıç koşulları RL kesirsel türevi kullanıldığında fiziksel olarak anlamlı değilken, Caputo kesirsel türevi kullanıldığında kabul edilebilir başlangıç koşulları kullanılmaktadır. Bunlara ek olarak başka kesirsel integral ve türev tanımları mevcuttur. Bunlar temel tanımlar kadar kullanışlı olmasalarda sadece bazı özel fonksiyonlar için geçerli olup, doğru uygulandıkları takdirde temel tanımlarla uyduklarını göstermeleri açısından önemlidir (Şirin, 2011; Ertik, 2010; Bayın, 2004).

Literatürde fizik ve mühendisliğin birçok farklı alanlarında çalışma bulunmakta olup her geçen gün yeni ve ilginç uygulamaları çıkmaktadır. Esneklik, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler, birçok difüzyon süreçleri, iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi vs. bu uygulamalar arasında yer almaktadır (Şirin, 2011; Ertik, 2010; Bayın, 2004).

3.3.1 Kesirsel türev ve integrallerin tanımları

Bu bölümde Grünwald-Letnikov tanımı, Riemann-Liouville (RL) ve Caputo temel tanımlarına yer verilmiştir.

3.3.1.1 Grünwald-Letnikov tanımı

Grünwald-Letnikov tanımı, türevin genel tanımından yola çıkarak elde edilmiştir. Sürekli bir $y = f(t)$ fonksiyonu ele alınır ve bu fonksiyonun ardışık olarak türevleri yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(t) - f(t-h)]}{h} \right\} \\
 f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f'(t) - f'(t-h)]}{h} \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)]}{h^2} \right\} \\
 f'''(t) &= \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f''(t) - f''(t-h)]}{h} \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)]}{h^3} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

elde edilir. Burada katsayıların değişen işaretlerle binom katsayıları olduğunu açıktır öyleyse n . mertebeden türev için

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \right\} \tag{3.30}$$

yazılabilir. Eğer f fonksiyonunun n . mertebeden türevi mevcut ise, bu son denklem sınırsız bir limit olarak $\frac{d^n f}{dt^n}$ türevini tanımlar. Ayrıca h sıfıra sürekli olarak, yani aradaki bütün değerleri de alacak şekilde gitmektedir. Türev için yazılan son ifade bir toplamın limiti olarak integrali de tanımlayacak şekilde birleştirilebilir. İntegral ile ortak bir tanım için h sıfır değerine kesikli değerlerle yaklaşmalıdır. Bunun için $[a, t]$ aralığını N eşit parçaya bölerek,

$$h = \frac{t-a}{N}, \quad N = 1, 2, 3, \dots \tag{3.31}$$

yazılırsa türev ifadesi de

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ [h]^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \right\} \tag{3.32}$$

olacaktır. Burada a , t 'den küçük olan bir sayıdır ve alt limite yakın bir rol oynar. Sınırsız limit gibi sınırlı limitte mevcut ve birbirlerine eşitse denklem (3.32) yazılabilir. n bir tamsayı

olduğundan, $\binom{n}{j}$ olarak gösterilen binom katsayıları da $j > n$ değerleri için sıfır olacağından, türev ifadesi

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ [h]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \right\} \quad (3.33)$$

olarak yazılır. Buradan limitin sürekli durumlarda da var olduğu anlayışı ile n . dereceden türevi

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{t-a}{N} \right]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f \left(x - j \left[\frac{t-a}{N} \right] \right) \right\} \quad (3.34)$$

şeklinde ifade edilir.

$$\frac{d^n}{d(t-a)^n} = \frac{d^n}{dt^n} \quad (3.35)$$

olduğu için bu türev ifadesi

$$\frac{d^n f}{d(t-a)^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{t-a}{N} \right]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f \left(t - j \left[\frac{t-a}{N} \right] \right) \right\} \quad (3.36)$$

şeklinde de yazılabilir. Bir fonksiyonun n katlı integralini tanımlamak için, fonksiyonun integralinin onun altındaki alana eşit olmasından hareketle

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1} f}{d(t-a)^{-1}} &= \int_a^t f(t_0) dt_0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{ h [f(t) + f(t-h) + f(t-2h) + \dots + f(a+h)] \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ h \sum_{j=0}^{N-1} f(t - jh) \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

yazılabilir. Daha önce olduğu gibi burada da $h = \frac{t-a}{N}$ olarak alınmıştır. Bu ifadenin iki katlı integrali,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-2}f}{d(t-a)^{-2}} &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(t_0) dt_0 \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ [h]^2 [f(t) + 2f(t-h) + 3f(t-2h) + \dots + Nf(a+h)] \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ [h]^2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) f(t-jh) \right\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

şeklinde ve üç katlı integrali ise,

$$\frac{d^{-3}f}{d(t-a)^{-3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ [h]^3 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(j+1)(j+2)}{2} f(t-jh) \right\} \tag{3.39}$$

olarak verilir. Bir fonksiyonun n ardışık integrali ise,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{-n}f}{d(t-a)^{-n}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ [h]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(t-jh) \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{t-a}{N} \right]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f\left(t - j \left[\frac{t-a}{N} \right]\right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olacaktır. Buradaki toplamda katsayılar (3.34) ifadesinden farklı olarak $\binom{j+n-1}{j}$ şeklinde gitmektedir ve bütün terimler artı işaretlidir. Gama fonksiyonlarının

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \tag{3.41}$$

ifadesi ile verilen ilişkisini kullanarak, tamsayı değerler için türev ve integral aşağıdaki gibi tek bir formül ile ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
\frac{d^q f}{d(t-a)^q} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{t-a}{N} \right]^{-q} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j-q-1}{j} f\left(t - j \left[\frac{t-a}{N} \right]\right) \right\} \\
\frac{d^q f}{d(t-a)^q} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left[\frac{t-a}{N} \right]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(t - j \left[\frac{t-a}{N} \right]\right) \right\} .
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Burada q , her iki işaretten de tamsayı değerler almaktadır. $q > 0$ için türev tanımı, $q < 0$ için integral tanımı elde edilir. Böylece tamsayı değerler için türev ve integral tanımları tek bir formülde birleştirilmiştir.

Grünwald-Letnikov tanımı genelde nümerik hesaplamalarda kullanılmakta ve fonksiyon üzerine herhangi bir kısıtlama getirmemektedir. Bir fonksiyonun türev veya integrallerine gerek duymadan, fonksiyonun sadece kendisi ile kesirsel türev ya da integralinin hesaplanmasına büyük avantaj sağlarlar (Şirin, 2011; Ertik, 2010; Bayın, 2004; Oldham and Spainer, 1974; Podlubyn, 1999; Miller and Ross, 1993;).

3.3.1.2 Riemann-Liouville tanımı

Riemann-Liouville tanımı, çok katlı integralleri tek katlı formda yazmaya yarayan Cauchy formülünden elde edilir ve kesirsel matematikte analitik hesaplamalar için kullanılan en yaygın tanımdır.

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (3.43)$$

şeklinde bir türev tanımından yararlanarak Riemann-Liouville tanımını elde etmek için her iki tarafın a 'dan t 'ye kadar integrali alındığında,

$$\int_a^t f(\tau) d\tau = F(t) - F(a) \quad (3.44)$$

elde edilir. Bu ifadenin t ye göre türevi,

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} F(t) \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_a^t f(\tau) d\tau}_I = f(t) \quad (3.46)$$

olur. İntegral ifadesine I olarak tanımlanırsa bu fonksiyon

$$I = \int_{U(t)}^{V(t)} f(\tau) d\tau \quad (3.47)$$

$$I = I(V(t), U(t)) \quad (3.48)$$

olacak şekilde $U(t)$ ve $V(t)$ 'ye bağlı bir fonksiyon olacaktır. Kısmi türev özelliği kullanılarak

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V(t)} \frac{\partial V(t)}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial U(t)} \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (3.49)$$

yazılabilir. Burada I fonksiyonu yerine yazılıp integrali alınırsa,

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(\tau) d\tau}_I = \frac{\partial}{\partial V(t)} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(\tau) d\tau}_I \frac{\partial V(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U(t)} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(\tau) d\tau}_I \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (3.50)$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(\tau) d\tau}_I = \frac{\partial}{\partial V(t)} (F(V) - F(U)) \frac{\partial V(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U(t)} (F(V) - F(U)) \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (3.51)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{U(t)}^{V(t)} f(\tau) d\tau = f(V) \frac{dV}{dt} - f(U) \frac{dU}{dt} \quad (3.52)$$

ifadesine ulaşılır. Burada ‘-’ işareti bir önceki denklemin sağ tarafındaki son integral teriminin sınırlarının yer değiştirmesi neticesinde olmuştur. İntegralin

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t, \tau) d\tau = \int_a^b \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau \quad (3.53)$$

özelliğinden faydalanılarak (burada a ve b birer sabittirler) ve

$$I = \int_{U(t)}^{V(t)} f(t, \tau) d\tau \quad (3.54)$$

integrali için

$$I = I(t, V(t), U(t)) \quad (3.55)$$

olduğundan kısmi türev yardımıyla

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V(t)} \frac{\partial V(t)}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial U(t)} \frac{\partial U(t)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial I}{\partial t}}_{\frac{d}{dt}} \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(t, \tau) d\tau}_I = \frac{\partial}{\partial V(t)} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(t, \tau) d\tau}_I \frac{\partial V(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U(t)} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(t, \tau) d\tau}_I \frac{\partial U(t)}{\partial t} + \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(t, \tau) d\tau}_I \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{U(t)}^{V(t)} f(t, \tau) d\tau}_I = \frac{\partial}{\partial V(t)} (F(t, V) - F(t, U)) \frac{\partial}{\partial V(t)} + \frac{\partial}{\partial U(t)} : (F(t, V) - F(t, U)) \frac{\partial U(t)}{\partial t} + \int_{U(t)}^{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) d\tau \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{U(t)}^{V(t)} f(t, \tau) d\tau = f(t, V) \frac{dV}{dt} - f(t, U) \frac{dU}{dt} + \int_{U(t)}^{V(t)} \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau \quad (3.59)$$

eşitliğine ulaşılır ve bu ifade *Leibniz kuralı* olarak adlandırılır.

$I_n(t)$ integrali,

$$I_n(t) = \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (3.60)$$

şeklinde seçildiği zaman, burada $n \in \mathbb{Z}^+$, a ise sabittir. Bu integralde Leibniz'in denklemini kullanılırsa; burada $f(t, \tau) = (t - \tau)^{n-1} f(\tau)$ olduğu görülmektedir, $I_n(t)$ in türevi için

$$\frac{dI_n(t)}{dt} = (n-1) \int_a^t (t - \tau)^{n-2} f(\tau) d\tau + \left[(t - \tau)^{n-1} f(\tau) \right]_{\tau=t} \quad (3.61)$$

yazılır. Eşitliğin sağındaki ikinci ifadenin $n > 1$ için sıfıra gittiği açıktır ve bu nedenle $n > 1$ için

$$\frac{dI_n(t)}{dt} = (n-1)I_{n-1} \quad (3.62)$$

ve $n=1$ için ise

$$\frac{dI_1}{dt} = f(t) \quad (3.63)$$

olur. $I_n(t)$ 'nin türevi için (3.63) denkleminin k defa türevi alınırsa,

$$\frac{d^k I_n}{dt^k} = (n-1)(n-2)\dots(n-k)I_{n-k} \quad (3.64)$$

ifadesi elde edilir. $k = n-1$ değeri için daha kullanışlı olarak

$$\frac{d^{n-1}I_n}{dt^{n-1}} = (n-1)!I_1(t) \quad (3.65)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d^{n-1}I_n}{dt^{n-1}} = (n-1)!I_1(t) \quad (3.66)$$

$$\frac{d^n I_n}{dt^n} = (n-1)!f(t) \quad (3.67)$$

denklemleri elde edilir. Burada $n \geq 1$ değeri için son iki denklemi kullanarak

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_a^t f(t_1) dt_1 \\ I_2(t) &= \int_a^t \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \\ &\dots \\ I_n(t) &= (n-1)! \int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n \end{aligned} \quad (3.68)$$

genel ifadesine ulaşılır. Burada

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (3.69)$$

Cauchy integrali olarak bilinir. Bu ifadenin sağ tarafı bir operatör ile temsil edilirse ve n yerine her değeri alabilen α değeri yazılırsa, ifade

$$\frac{d^\alpha f}{d(t-a)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad ; \alpha < 0 \quad (3.70)$$

şeklini alır. Bu ifade Riemann-Liouville kesirli integrali olarak adlandırılır. Basit bir matematiksel işlem ile $n > \alpha$ olmak şartıyla $\alpha \geq 0$ değerleri için

$$\frac{d^\alpha f}{d(t-a)^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-(n-\alpha)-1} f(\tau) d\tau \right] \quad (3.71)$$

bağıntısı elde edilebilir. Bu denklem Riemann-Liouville kesirli türevi olarak bilinir. Bu yöntemle yazılan bir önceki integral sadece $\alpha < 0$ değerleri için yakınsaktır. Bu denklem $\alpha \geq 0$

için $n > \alpha$ olmak koşuluyla çözülür. (3.71) denkleminde görüldüğü gibi türevin n kez integrale uygulanması, çözümde zorluklara neden olabilmektedir.

(3.67) denkleminde (3.60) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\frac{d^n}{dt^n} I_n = (n-1)! f(t) \quad (3.72)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = (n-1)! f(t) \quad (3.73)$$

bulunur. Burada ifadenin n defa integrali alınır ve bir operatörle temsil edilirse

$$\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = (n-1)! \frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad (3.74)$$

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^t (t-\tau)^{-n-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad (3.75)$$

olduğu görülür. Bu ifade n nin negatif değerleri için geçerlidir çünkü gösterim integral temsili içindir (Çavuş, 2006).

Kesirsel integral ifadesine ulaşmak için denklem (3.75)'de integral notasyonu J^n alınırsa $\frac{d^n}{dt^n} = D^n = J^{-n}$ eşitliği elde edilir. Denklem (3.75) bu notasyona göre yeniden yazılırsa;

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^t (t-\tau)^{-n-1} f(\tau) d\tau = D^n f(t) \quad (3.76)$$

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = J^n f(t)$$

olur. İntegralin alt sınırı sıfırdan başlatılırsa yani $a=0$ alınırsa

$$J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.77)$$

elde edilir. Gama fonksiyonu özelliğinden $(n-1)! = \Gamma(n)$ 'dir.

Pozitif reel sayı α için (3.77) denklemini yeniden yazılırsa, (α veya n integralin katını gösterir ve (-) katlı integrasyon olmadığı için \mathbb{R}^+ alınır.)

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad , \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.78)$$

elde edilir. Eğer sıfırıncı mertebeden integral mevcut ise

$$J^0 := I$$

$$J^0 f(t) = f(t)$$

birim fonksiyona karşılık gelir yani fonksiyonun kendisini verir. Ayrıca $J^\alpha f(0^+)$ mevcuttur ($\lim_{t \rightarrow 0^+} J^\alpha f(t)$ vardır ve bu limit sonsuz olabilir). İki defa integral alındığında

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} \quad , \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (3.79)$$

yazılabilir ve uygulama sırası değişebilir $J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha$.

Kuvvet fonksiyonuna kesirsel integral uygulanırsa,

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} t^{\gamma+\alpha} \quad , \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (3.80)$$

eşitliği yazılır.

Denklem (3.2)'de gösterildiği gibi gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad , \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad , \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0 .$$

şeklinde ve denklem (3.12)'de gösterildiği gibi Laplace dönüşümü ifadesi,

$$L\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s) \quad , \quad s \in IC .$$

şeklinindedir. Burada Laplace dönüşümü $f(t) \div \tilde{f}(s)$ şeklinde gösterilebilir, ' \div ' gösterimi birbirine dönüşebileceğini ifade eder. Yani, $L\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ iken $L^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ olur. Dönüşümün sebebi işlem kolaylığı sağlamasından, t-uzayındaki türev veya integral s-uzayına taşınarak polinom halinde bir kuvvet serisi elde edilir ve sonuç tekrar t-uzayına taşınıp problem çözülmüş olur.

Laplace özelliğinden

$$J^\alpha f(t) \doteq \frac{\tilde{f}(s)}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (3.81)$$

yazılabilir.

Tamsayı mertebeli türev gösterimi D^n , $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir,

$$D^n J^n = I, \quad J^n D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.82)$$

Kesirsel türev ifadesine ulaşmak için denklem (3.77) eşitliği kullanılarak,

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0 \quad (3.83)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $f^{(k)}(0^+)$ terimi $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t)$ demektir. $t > 0$ olduğu için limit sağdan yaklaşmakta ve $m-1 < \alpha \leq m$ aralığında D^α kesirsel türevi için,

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &:= D^m J^{m-\alpha} f(t), \quad \alpha > 0 \\ &= \underbrace{D^m J^m}_{I} J^{-\alpha} f(t) \\ &= J^{-\alpha} f(t) \end{aligned} \quad (3.84)$$

eşitliği vardır. Denklem (3.84) ile verilen eşitlik sadece Riemann sınıfı fonksiyonlara uygulandığında geçerlidir. Denklem (3.78) yardımıyla kesirsel türev ifadesi

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.85)$$

$\alpha \rightarrow m-\alpha$ dönüşümü ile

$$J^{m-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.86)$$

bulunur. Denklem (3.84)'deki türev ifadesi, denklem (3.86)'daki kesirsel integral ifadesi kullanılarak tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &:= D^m J^{m-\alpha} f(t) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.87)$$

elde edilir. Kesirsel türev

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \quad (3.88)$$

şeklinde tanımlanır. $J^0 = I$ olduğundan bu ifade kesirsel türev içinde doğrudur. Yani $D^0 = I$ 'dir ve tamsayı mertebeli türev için yazıldığında (3.82)'deki ifadeler kesirsel mertebeden de yazılabilir, $D^\alpha J^\alpha = I$, $\alpha \geq 0$.

Kuvvet fonksiyonuna kesirsel türev uygulandığında

$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad \alpha > 0, \gamma > -1, t > 0 \quad (3.89)$$

eşitliğine ulaşılır. $\gamma = 0$ için, bu (3.89) denklemini yeniden yazıldığında

$$D^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha \geq 0, t > 0 \quad (3.90)$$

ifadesini elde edilir (Bayın, 2004; Podlubyn, 1999; Miller and Ross, 1993; Çavuş, 2006; Mainardi and Gorenflo, 2000).

3.3.1.3 Caputo tanımı

Caputo kesirsel türevi, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$D_*^\alpha f(t) := J^{m-\alpha} D^m f(t), \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (3.91)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki * alt indisi Caputo kesirsel türevi olduğunu ifade eder.

$$D_*^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \quad (3.92)$$

D_*^α Caputo kesirsel türevi (3.88) eşitliğini sınırlar. RL kesirsel türevi ile Caputo kesirsel türevi birbirine eşit değildir, Caputo kesirsel türevi RL tanımından integral ve türevin uygulama sırasından dolayı farklıdır:

$$D_*^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t) \neq J^{m-\alpha} D^m f(t) := D_*^\alpha f(t) \quad (3.93)$$

$$D^\alpha f(t) \neq D_*^\alpha f(t).$$

İkisi arasındaki farklanma terimi $m-1 < \alpha \leq m$, $t > 0$ için RL kesirsel türev ifadesinin, Caputo kesirsel türevi cinsinden karşılığı yazılarak açıkça görülebilir

$$D^\alpha f(t) = D_*^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+). \quad (3.94)$$

Bu eşitliği elde etmek için gamma fonksiyonunun $\Gamma(k-\alpha+1) = (k-\alpha)!$ özelliğinden yararlanılarak

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!} f^{(k)}(0^+) \quad (3.95)$$

elde edilir. (3.91) denkleminde

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &:= J^{m-\alpha} D^m f(t) \\ &= J^m J^{-\alpha} D^m f(t) \\ &= J^{-\alpha} \underbrace{J^m D^m f(t)}_{(4.37)} \end{aligned} \quad (3.96)$$

elde edilir. Burada (3.83) denklemini, denklem (3.96)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &:= J^{m-\alpha} D^m f(t) \\ &= J^{-\alpha} J^m D^m f(t) \\ &= J^{-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right] \\ &= J^{-\alpha} f(t) - J^{-\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \quad (J^{-\alpha} = D^\alpha) \\ &= D^\alpha f(t) - D^\alpha \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \\ &= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{k!} \underbrace{D^\alpha t^k}_{(4.40)} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır ve (3.89) denklemi kullanılır ve

$$\begin{aligned}
 D_*^\alpha f(t) &= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} \\
 &= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{k!} \frac{k!}{(k-\alpha)!} t^{k-\alpha} \\
 &= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}
 \end{aligned}$$

$$D^\alpha f(t) = D_*^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (3.97)$$

elde edilir. (3.97) denklemi ile RL ve Caputo arasındaki bağıntı elde edilmiş olur. Caputo kesirsel türevi için

$$D_*^\alpha 1 \equiv 0, \quad \alpha > 0$$

$$D^\alpha t^{\alpha-1} \equiv 0, \quad \alpha > 0, t > 0$$

ifadeleri yazılır (Mainardi and Gorenflo, 2000).

4. ALFA BOZUNUMUNUN KESİRSEL MATEMATİK İLE İNCELENMESİ

4.1 Radyoaktif (Nükleer) Bozunma Denkleminin Çözümü

Eğer bir t anında $N(t)$ sayıda radyoaktif çekirdek varsa ve numuneye yeni çekirdek ilave edilmiyorsa deneylerden elde edilen sonuçlara göre, kısa bir dt zaman aralığında bozunan $dN(t)$ çekirdek sayısı $N(t)$ ile orantılı olacak şekilde

$$dN(t) = -\lambda N(t)dt \quad (4.1)$$

denklemini verir. Burada λ saniyedeki kaçış ihtimali olarak tarif edilen bozunma sabitidir. Bu homojen lineer diferansiyel denklemin çözümü,

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt \quad (4.2)$$

şeklinde olup, integrali alınırsa,

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int -\lambda dt \quad (4.3)$$

$$\ln N(t) = -\lambda t + \ln C \quad (4.4)$$

bulunur. Buradan

$$\ln N(t) - \ln C = -\lambda t \quad (4.5)$$

$$\ln \frac{N(t)}{C} = -\lambda t \quad (4.6)$$

$$\frac{N(t)}{C} = \exp(-\lambda t) \quad (4.7)$$

$$N(t) = C \exp(-\lambda t) \quad (4.8)$$

sonucu elde edilir. Başlangıç koşulları (sınır şartları) için $t=0$ yazıldığında $N(0) = N_0 = C e^0 \Rightarrow C = N_0$ olur ve (4.8) denkleminde yerine konulursa

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (4.9)$$

sonucu elde edilir. Bu bağıntıya göre başlangıçta yani $t=0$ anında radyoaktif çekirdeklerin sayısı N_0 olan bir radyoaktif maddenin çekirdeklerinin N sayısı zamanın fonksiyonu olarak üstel şekilde azalır.

Mevcut çekirdeklerin sayısının yarıya inmesi için geçen zamana yarı ömür denir ve (4.9) bağıntısında N yerine $N_0/2$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{N_0}{2} &= N_0 \exp(-\lambda t_{1/2}) \\ \frac{1}{2} &= \exp(-\lambda t_{1/2}) \\ \lambda t_{1/2} &= \ln 2 = 0,693\end{aligned}$$

bulunur. Buradan deneysel elde edilen bozunma sabiti yerine yazılırsa yarı ömrün deneysel değeri

$$t_{1/2}^{deneyisel} = \frac{0,693}{\lambda} \quad (4.10)$$

olarak elde edilir.

Teorik olarak yarı ömür hesaplamak istenirse, önce tünel olayında anlatıldığı şekli ile, saniyedeki kaçış ihtimali olarak tarif edilen bozunma sabiti $\lambda = \nu_0 P$ ile hesaplanır. Daha sonra bu ifade (4.10) denkleminde yerine yazılarak,

$$t_{1/2}^{teorik} = \frac{0,693}{\nu_0 P} \quad (4.11)$$

elde edilir.

Bölüm 2’de (2.16) ve (2.17) denklemleri ile belirtildiği gibi, alfa parçacığının potansiyel engelle çarpma frekansı,

$$\nu_0 = \frac{v}{2R} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2Q_\alpha}{M}}$$

ve engelden geçme olasılığı

$$P = \exp[-2G] = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_0} \sqrt{2\mu(V(r) - Q_\alpha(r))} dr\right]$$

şeklindedir (Tanyel, 1994).

4.2 Alfa Bozunumunun Kesirsel Matematik İle Çözümü

Nükleer bozunma denklemleri (4.2) çözülerek, (4.11) denklemleri ile teorik olarak ve (4.10) denklemleri ile deneysel olarak incelendiğinde deneysel elde edilen bozunma sabiti ile teorik

hesaplanan bozunma sabiti birbirine eşit çıkmamaktadır. Dolayısıyla yarı ömürlerin de farklı olması beklenir. Bu farklanmayı gidermek için literatürde P_0 düzeltme çarpanına ihtiyaç duyulmuştur. Bu çalışmada ise P_0 düzeltme çarpanına gerek duyulmadan (4.2) diferansiyel denklemi kesirsel matematik kullanılarak kesirli mertebeden türevi alınarak çözülmüştür. Bozunma denklemi (4.2) tekrar ele alınırsa,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

birinci mertebeden türev α mertebesine taşındığında,

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$$

(4.2)'deki denklem artık zaman-kesirsel nükleer bozunma denklemi olarak

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} N(t) = -\lambda^\alpha N(t) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılır. $\underbrace{N(t)}_{\in \mathbb{Z}^+} = \underbrace{N_0 \exp(-\lambda t)}_{\in \mathbb{Z}^+}$ denkleminde boyut analizi yapıldığında $[\lambda t] = \frac{1}{s} s = 1$ yani

birimsizdir (boyutsuzdur). O halde mertebeye α olarak değiştirildiğinde $[\lambda^\alpha t^\alpha] = \frac{1}{s^\alpha} s^\alpha = 1$

şeklinde ifadenin yine birimsiz olması beklenir. (4.12) denkleminde eşitliğin sağ ve sol tarafının boyutunun eşit olabilmesi ve dolayısı ile fiziksel olarak anlamlı olması için λ , α 'yı üs olarak almalıdır (Naber, 2004).

Kesirsel matematikte Caputo kesirsel türev tanımından

$$D_*^\alpha N(t) = -\lambda^\alpha N(t) \quad (4.13)$$

yazılabilir. Denklem (3.91) ifadesinden kesirsel türev mertebesi aralığı $m-1 < \alpha \leq m$, $\alpha > 0$ için

$D_*^\alpha f(t) := J^{m-\alpha} D^m f(t)$ yazılabildiğinden (4.13) denkleminde bu ifade yerine yazılarak,

$$J^{m-\alpha} D^m N(t) = -\lambda^\alpha N(t) , \quad (4.14)$$

$$J^\alpha / J^{m-\alpha} D^m N(t) = -\lambda^\alpha N(t) , \quad (4.15)$$

$$J^\alpha J^m J^{-\alpha} D^m N(t) = -\lambda^\alpha J^\alpha N(t) , \quad (4.16)$$

$$J^m D^m N(t) = -\lambda^\alpha J^\alpha N(t) , \quad (4.17)$$

$$J^m D^m N(t) = N(t) - \sum_{k=0}^{m-1} N^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} = -\lambda^\alpha J^\alpha N(t) , \quad (4.18)$$

$$N(t) = \sum_{k=0}^{m-1} N^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} - \lambda^\alpha J^\alpha N(t) , \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada α kesirsel türev mertebesi kendinden bir önceki ve bir sonraki değerler arasında yer alır. $m-1 < \alpha \leq m$ için $m=1$ seçilirse $0 < \alpha \leq 1$ aralığında değerler almalıdır. Nükleer bozunma denklemi birinci dereceden bir diferansiyel denklem olduğu için kesirsel mertebenin üst sınır 1'e kadar olmalıdır.

$m=1$ için (4.19) denklemi tekrar yazılırsa

$$N(t) = N(0^+) \frac{t^0}{0!} - \lambda^\alpha J^\alpha N(t) \quad (4.20)$$

$$N(t) = N(0^+) - \lambda^\alpha J^\alpha N(t) \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) denklemi Laplace dönüşümü kullanılarak çözümlerse;

$$L\{N(t)\} = L\{N(0^+)\} - L\{\lambda^\alpha J^\alpha N(t)\} \quad (4.22)$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{N(0)}{s} - \lambda^\alpha \frac{\tilde{N}(s)}{s^\alpha} \quad (4.23)$$

$$\tilde{N}(s) + \lambda^\alpha \frac{\tilde{N}(s)}{s^\alpha} = \frac{N(0)}{s} \quad (4.24)$$

$$\tilde{N}(s) \left(1 + \frac{\lambda^\alpha}{s^\alpha} \right) = \frac{N(0)}{s} \quad (4.25)$$

$$\tilde{N}(s) \left(\frac{s^\alpha + \lambda^\alpha}{s^\alpha} \right) = \frac{N(0)}{s} \quad (4.26)$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{N(0)}{s} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + \lambda^\alpha} \quad (4.27)$$

$$\tilde{N}(s) = N(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^\alpha} \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) denkleminin ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L^{-1}\{\tilde{N}(s)\} = L^{-1}\left\{N(0)\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^\alpha}\right\} \quad (4.29)$$

$$N(t) = N(0)L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^\alpha}\right\} \quad (4.30)$$

$$N(t) = N(0)L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\lambda^\alpha}{s^\alpha}}}\right\} \quad (4.31)$$

Taylor serisi

ifadesi elde edilir. Bu (4.31) denkleminde ters Laplacenin çözümü Taylor serisi açılımı ile elde edilir. Taylor seri açılımı için,

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{\lambda^\alpha}{s^\alpha}}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left[1 - \frac{\lambda^\alpha}{s^\alpha} + \frac{\lambda^{2\alpha}}{s^{2\alpha}} - \frac{\lambda^{3\alpha}}{s^{3\alpha}} + \dots\right]\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{\lambda^\alpha}{s^{\alpha+1}} + \frac{\lambda^{2\alpha}}{s^{2\alpha+1}} - \frac{\lambda^{3\alpha}}{s^{3\alpha+1}} + \dots\right\} \quad (4.32) \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \lambda^\alpha L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha+1}}\right\} + \lambda^{2\alpha} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2\alpha+1}}\right\} - \lambda^{3\alpha} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3\alpha+1}}\right\} + \dots \\ &= 1 - \lambda^\alpha \frac{t^\alpha}{\alpha!} + \lambda^{2\alpha} \frac{t^{2\alpha}}{(2\alpha)!} - \lambda^{3\alpha} \frac{t^{3\alpha}}{(3\alpha)!} + \dots \end{aligned}$$

ulaşılan (4.32) eşitliği toplam sembolü kullanarak yazılırsa,

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{\lambda^\alpha}{s^\alpha}}\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^\alpha t^\alpha)^n}{(n\alpha)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (4.33) \\ &\quad \text{Mittag-Leffler} \\ &\quad \text{fonksiyonu} \\ &= E_\alpha(-\lambda^\alpha t^\alpha) \end{aligned}$$

Mittag-Leffler fonksiyonunun elde edildiği açıktır. Bu seri kısaca $E_\alpha(-\lambda^\alpha t^\alpha)$ olarak gösterilir ve bu gösterim için denklem (4.30) tekrar yazıldığında,

$$N(t) = N(0)E_\alpha(-\lambda^\alpha t^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.34)$$

ifadesi elde edilir. Mittag-Leffler fonksiyonunun seri gösterimi ve $N(0) \rightarrow N_0$ için

$$N(t) = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (4.35)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (4.11) denklemi kesirsel matematik kullanarak çözüldüğünde nükleer bozunma denklemi (4.34) veya (4.35) denklemleri ile kesirsel formda ifade edilebilir.

5. HESAPLAR VE SONUÇLAR

Nükleer bozunma denklemi (4.2),

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

kesirsel matematik kullanılarak (4.12) denklemi

$$\frac{d^\alpha N(t)}{dt^\alpha} = -\lambda^\alpha N(t)$$

şeklinde tanımlanmış ve bu denklemin çözümü de

$$N(t) = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

(4.35) şeklinde veya Mittag-Leffler fonksiyonunu içerecek şekilde olup aşağıdaki gibi elde edilmiştir,

$$N(t) = N_0 E_\alpha(-\lambda^\alpha t^\alpha).$$

Bu yeni çözüm $\alpha \rightarrow 1$ olması durumunda standart çözüm olan $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ denklemini vermektedir.

Kesirsel nükleer bozunma denkleminin çözümü olan (4.34) denklemi kullanılarak alfa bozunumu yapan Pb, Po, Rn Ra, Th ve U izotopların yarı ömürleri hesaplanmış ve $t_{1/2}(\text{deneysel}) = t_{1/2}(\text{teorik})$ elde edilmiştir. Bu hesaplamalar yapılırken daha önceki çalışmalardaki gibi bir düzeltme çarpanına (P_0) ihtiyaç duyulmamıştır. Elde edilen sonuçlardan α kesirsel türev mertebesi ile λ bozunma sabiti ilişkilendirilerek α kesirsel türev mertebesinin nükleer yapıya bağlılığı ortaya konmuştur.

Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'deki sütunlarda sırası ile Pb, Po, Rn Ra, Th ve U çekirdeklerinin izotopları, engele çarpma frekansı ν_0 , engelden geçme olasılığı P , düzeltme faktörü P_0 , deneysel bozunma sabiti λ^{deney} , teorik bozunma sabiti λ^{teorik} değerleri yer almaktadır. Burada engele çarpma frekansı ν_0 , engelden geçme olasılığı P , düzeltme faktörü P_0 değerleri (Zhang and Royer, 2008)'den alınmıştır.

Çizelge 5.1 Pb, Po ve Rn izotopları için deneysel ve teorik bozunma sabitleri.

İzotoplar	$\nu_0[s^{-1}]$	P	P_0	$\lambda^{deney} [s^{-1}]$	$\lambda^{teorik} [s^{-1}] = \nu_0 P$
$^{178}_{82}Pb$	$1,453 \times 10^{21}$	$4,097 \times 10^{-17}$	0,0506	$3,012 \times 10^3$	$59,529 \times 10^3$
$^{180}_{82}Pb$	$1,415 \times 10^{21}$	$3,098 \times 10^{-18}$	0,0317	$1,386 \times 10^2$	$43,837 \times 10^2$
$^{182}_{82}Pb$	$1,347 \times 10^{21}$	$2,558 \times 10^{-19}$	0,0359	$1,261 \times 10^1$	$34,456 \times 10^1$
$^{184}_{82}Pb$	$1,339 \times 10^{21}$	$2,262 \times 10^{-20}$	0,0375	$1,137 \times 10^0$	$30,288 \times 10^0$
$^{186}_{82}Pb$	$1,303 \times 10^{21}$	$1,845 \times 10^{-21}$	0,0240	$5,779 \times 10^{-2}$	$240,403 \times 10^{-2}$
$^{188}_{82}Pb$	$1,262 \times 10^{21}$	$6,264 \times 10^{-23}$	0,0325	$2,569 \times 10^{-3}$	$79,051 \times 10^{-3}$
$^{190}_{82}Pb$	$1,214 \times 10^{21}$	$8,784 \times 10^{-25}$	0,0361	$3,853 \times 10^{-5}$	$106,637 \times 10^{-5}$
$^{192}_{82}Pb$	$1,157 \times 10^{21}$	$3,237 \times 10^{-27}$	0,0514	$1,927 \times 10^{-7}$	$37,452 \times 10^{-7}$
$^{194}_{82}Pb$	$1,098 \times 10^{21}$	$5,278 \times 10^{-30}$	0,0122	$7,077 \times 10^{-11}$	$579,524 \times 10^{-11}$
$^{210}_{82}Pb$	$0,959 \times 10^{21}$	$6,676 \times 10^{-37}$	0,0293	$1,866 \times 10^{-17}$	$64,023 \times 10^{-17}$
$^{188}_{84}Po$	$1,452 \times 10^{21}$	$8,129 \times 10^{-17}$	0,0147	$1,733 \times 10^3$	$118,033 \times 10^3$
$^{190}_{84}Po$	$1,411 \times 10^{21}$	$5,907 \times 10^{-18}$	0,0333	$2,772 \times 10^2$	$83,348 \times 10^2$
$^{192}_{84}Po$	$1,371 \times 10^{21}$	$3,909 \times 10^{-19}$	0,0446	$2,392 \times 10^1$	$53,592 \times 10^1$
$^{194}_{84}Po$	$1,335 \times 10^{21}$	$3,249 \times 10^{-20}$	0,0410	$1,782 \times 10^0$	$43,374 \times 10^0$
$^{196}_{84}Po$	$1,299 \times 10^{21}$	$2,041 \times 10^{-21}$	0,0455	$1,205 \times 10^{-1}$	$26,512 \times 10^{-1}$
$^{198}_{84}Po$	$1,259 \times 10^{21}$	$8,283 \times 10^{-23}$	0,0439	$4,580 \times 10^{-3}$	$104,282 \times 10^{-3}$
$^{200}_{84}Po$	$1,222 \times 10^{21}$	$3,066 \times 10^{-24}$	0,0300	$1,124 \times 10^{-4}$	$37,466 \times 10^{-4}$
$^{202}_{84}Po$	$1,188 \times 10^{21}$	$1,721 \times 10^{-25}$	0,0251	$5,138 \times 10^{-6}$	$204,454 \times 10^{-6}$
$^{204}_{84}Po$	$1,161 \times 10^{21}$	$1,376 \times 10^{-26}$	0,0228	$3,638 \times 10^{-7}$	$159,753 \times 10^{-7}$
$^{206}_{84}Po$	$1,141 \times 10^{21}$	$2,254 \times 10^{-27}$	0,0191	$4,907 \times 10^{-8}$	$257,181 \times 10^{-8}$
$^{208}_{84}Po$	$1,126 \times 10^{21}$	$5,727 \times 10^{-28}$	0,0115	$7,427 \times 10^{-9}$	$644,860 \times 10^{-9}$
$^{210}_{84}Po$	$1,142 \times 10^{21}$	$7,615 \times 10^{-27}$	0,0065	$5,765 \times 10^{-8}$	$869,633 \times 10^{-8}$
$^{212}_{84}Po$	$1,466 \times 10^{21}$	$4,598 \times 10^{-14}$	0,0341	$2,295 \times 10^6$	$67,406 \times 10^6$
$^{214}_{84}Po$	$1,366 \times 10^{21}$	$4,309 \times 10^{-17}$	0,0873	$5,138 \times 10^3$	$588,609 \times 10^3$
$^{216}_{84}Po$	$1,278 \times 10^{21}$	$3,670 \times 10^{-20}$	0,0976	$4,580 \times 10^0$	$46,902 \times 10^0$
$^{218}_{84}Po$	$1,199 \times 10^{21}$	$2,844 \times 10^{-23}$	0,1092	$3,722 \times 10^{-3}$	$34,099 \times 10^{-3}$
$^{198}_{86}Rn$	$1,360 \times 10^{21}$	$9,928 \times 10^{-20}$	0,0790	$1,066 \times 10^1$	$135,020 \times 10^1$
$^{200}_{86}Rn$	$1,326 \times 10^{21}$	$8,491 \times 10^{-21}$	0,0616	$6,931 \times 10^{-1}$	$112,591 \times 10^{-1}$
$^{202}_{86}Rn$	$1,296 \times 10^{21}$	$9,713 \times 10^{-22}$	0,0480	$6,037 \times 10^{-2}$	$125,880 \times 10^{-2}$
$^{204}_{86}Rn$	$1,270 \times 10^{21}$	$1,375 \times 10^{-22}$	0,0397	$6,931 \times 10^{-3}$	$174,625 \times 10^{-3}$
$^{206}_{86}Rn$	$1,249 \times 10^{21}$	$2,830 \times 10^{-23}$	0,0382	$1,352 \times 10^{-3}$	$35,346 \times 10^{-3}$
$^{208}_{86}Rn$	$1,233 \times 10^{21}$	$9,051 \times 10^{-24}$	0,0284	$3,168 \times 10^{-4}$	$111,599 \times 10^{-4}$
$^{210}_{86}Rn$	$1,219 \times 10^{21}$	$3,957 \times 10^{-24}$	0,0158	$7,600 \times 10^{-5}$	$482,358 \times 10^{-5}$
$^{212}_{86}Rn$	$1,237 \times 10^{21}$	$3,810 \times 10^{-23}$	0,0099	$4,686 \times 10^{-4}$	$471,29 \times 10^{-4}$
$^{214}_{86}Rn$	$1,482 \times 10^{21}$	$4,350 \times 10^{-14}$	0,0399	$2,575 \times 10^6$	$64,467 \times 10^6$
$^{216}_{86}Rn$	$1,393 \times 10^{21}$	$1,011 \times 10^{-16}$	0,1101	$1,552 \times 10^4$	$14,083 \times 10^4$
$^{218}_{86}Rn$	$1,307 \times 10^{21}$	$1,226 \times 10^{-19}$	0,1220	$1,854 \times 10^1$	$16,024 \times 10^1$
$^{220}_{86}Rn$	$1,223 \times 10^{21}$	$6,470 \times 10^{-23}$	0,1558	$1,233 \times 10^{-2}$	$79,128 \times 10^{-2}$
$^{222}_{86}Rn$	$1,237 \times 10^{21}$	$1,055 \times 10^{-26}$	0,1743	$2,093 \times 10^{-6}$	$13,0503 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.2 Ra, Th ve U izotopları için deneysel ve teorik bozunma sabitleri.

İzotoplar	$\nu_0[s^{-1}]$	P	P_0	$\lambda^{deney} [s^{-1}]$	$\lambda^{teorik} [s^{-1}] = \nu_0 P$
$^{202}_{88}Ra$	$1,411 \times 10^{21}$	$2,931 \times 10^{-18}$	0,0645	$2,666 \times 10^2$	$41,356 \times 10^2$
$^{204}_{88}Ra$	$1,372 \times 10^{21}$	$1,893 \times 10^{-19}$	0,0452	$1,174 \times 10^1$	$25,972 \times 10^1$
$^{206}_{88}Ra$	$1,347 \times 10^{21}$	$3,750 \times 10^{-20}$	0,0572	$2,890 \times 10^0$	$50,512 \times 10^0$
$^{208}_{88}Ra$	$1,329 \times 10^{21}$	$1,193 \times 10^{-20}$	0,0310	$4,907 \times 10^{-1}$	$158,549 \times 10^{-1}$
$^{210}_{88}Ra$	$1,315 \times 10^{21}$	$5,682 \times 10^{-21}$	0,0256	$1,909 \times 10^{-1}$	$74,718 \times 10^{-1}$
$^{212}_{88}Ra$	$1,298 \times 10^{21}$	$1,982 \times 10^{-21}$	0,0191	$4,907 \times 10^{-2}$	$257,263 \times 10^{-2}$
$^{214}_{88}Ra$	$1,316 \times 10^{21}$	$1,575 \times 10^{-20}$	0,0133	$2,759 \times 10^{-1}$	$20,727 \times 10^{-1}$
$^{216}_{88}Ra$	$1,503 \times 10^{21}$	$5,580 \times 10^{-14}$	0,0454	$3,809 \times 10^6$	$83,867 \times 10^6$
$^{218}_{88}Ra$	$1,419 \times 10^{21}$	$2,049 \times 10^{-16}$	0,0928	$2,697 \times 10^4$	$29,075 \times 10^4$
$^{220}_{88}Ra$	$1,333 \times 10^{21}$	$2,854 \times 10^{-19}$	0,1001	$3,809 \times 10^1$	$38,0438 \times 10^1$
$^{222}_{88}Ra$	$1,245 \times 10^{21}$	$1,269 \times 10^{-22}$	0,1127	$1,782 \times 10^{-2}$	$15,799 \times 10^{-2}$
$^{224}_{88}Ra$	$1,155 \times 10^{21}$	$1,216 \times 10^{-26}$	0,1457	$2,046 \times 10^{-6}$	$14,045 \times 10^{-6}$
$^{226}_{88}Ra$	$1,056 \times 10^{21}$	$5,861 \times 10^{-32}$	0,2086	$1,291 \times 10^{-11}$	$6,189 \times 10^{-11}$
$^{210}_{90}Th$	$1,395 \times 10^{21}$	$9,009 \times 10^{-19}$	0,0325	$4,082 \times 10^1$	$125,675 \times 10^1$
$^{212}_{90}Th$	$1,381 \times 10^{21}$	$4,616 \times 10^{-19}$	0,0302	$1,927 \times 10^1$	$63,746 \times 10^1$
$^{214}_{90}Th$	$1,366 \times 10^{21}$	$1,978 \times 10^{-19}$	0,0257	$6,931 \times 10^0$	$270,194 \times 10^0$
$^{216}_{90}Th$	$1,382 \times 10^{21}$	$1,256 \times 10^{-18}$	0,0142	$2,459 \times 10^1$	$173,579 \times 10^1$
$^{218}_{90}Th$	$1,523 \times 10^{21}$	$7,388 \times 10^{-14}$	0,0616	$6,931 \times 10^6$	$112,519 \times 10^6$
$^{220}_{90}Th$	$1,447 \times 10^{21}$	$5,102 \times 10^{-16}$	0,0961	$7,093 \times 10^4$	$73,825 \times 10^4$
$^{222}_{90}Th$	$1,374 \times 10^{21}$	$2,514 \times 10^{-18}$	0,0712	$2,459 \times 10^2$	$34,542 \times 10^2$
$^{224}_{90}Th$	$1,298 \times 10^{21}$	$4,512 \times 10^{-21}$	0,0919	$5,381 \times 10^{-1}$	$58,566 \times 10^{-1}$
$^{226}_{90}Th$	$1,216 \times 10^{21}$	$1,901 \times 10^{-24}$	0,1221	$2,824 \times 10^{-4}$	$23,116 \times 10^{-4}$
$^{228}_{90}Th$	$1,121 \times 10^{21}$	$5,626 \times 10^{-29}$	0,1321	$8,333 \times 10^{-9}$	$63,067 \times 10^{-9}$
$^{230}_{90}Th$	$1,038 \times 10^{21}$	$1,203 \times 10^{-33}$	0,1714	$2,142 \times 10^{-13}$	$12,487 \times 10^{-13}$
$^{232}_{90}Th$	$0,957 \times 10^{21}$	$4,447 \times 10^{-39}$	0,2831	$1,205 \times 10^{-18}$	$4,256 \times 10^{-18}$
$^{218}_{92}U$	$1,437 \times 10^{21}$	$3,036 \times 10^{-17}$	0,0311	$1,358 \times 10^3$	$43,627 \times 10^3$
$^{220}_{92}U$	$1,553 \times 10^{21}$	$1,700 \times 10^{-13}$	0,0438	$1,156 \times 10^7$	$26,401 \times 10^7$
$^{224}_{92}U$	$1,411 \times 10^{21}$	$1,389 \times 10^{-17}$	0,0505	$9,904 \times 10^2$	$195,988 \times 10^2$
$^{226}_{92}U$	$1,329 \times 10^{21}$	$1,900 \times 10^{-20}$	0,0549	$1,386 \times 10^0$	$25,251 \times 10^0$
$^{228}_{92}U$	$1,245 \times 10^{21}$	$9,088 \times 10^{-24}$	0,1065	$1,205 \times 10^{-3}$	$11,314 \times 10^{-3}$
$^{230}_{92}U$	$1,164 \times 10^{21}$	$1,914 \times 10^{-27}$	0,1155	$2,575 \times 10^{-7}$	$22,279 \times 10^{-7}$
$^{232}_{92}U$	$1,103 \times 10^{21}$	$1,360 \times 10^{-30}$	0,1395	$2,093 \times 10^{-10}$	$15,001 \times 10^{-10}$
$^{234}_{92}U$	$1,042 \times 10^{21}$	$4,166 \times 10^{-34}$	0,1525	$6,620 \times 10^{-14}$	$43,409 \times 10^{-14}$
$^{236}_{92}U$	$1,007 \times 10^{21}$	$3,976 \times 10^{-36}$	0,1771	$7,093 \times 10^{-16}$	$40,038 \times 10^{-16}$
$^{238}_{92}U$	$0,970 \times 10^{21}$	$1,572 \times 10^{-38}$	0,2440	$3,722 \times 10^{-18}$	$15,248 \times 10^{-18}$

Çizelge 5.3 Pb, Po ve Rn izotopları için deneysel, standart ve kesirsel yarı ömür değerleri.

İzotoplar	$\log_{10}(t_{1/2})$ deneysel	$\log_{10}(t_{1/2})=\ln 2 / \lambda_0$ P standart hesaplama	$\log_{10}(t_{1/2})$ kesirsel hesaplama	α
¹⁷⁸ ₈₂ Pb	-3,64	-4,93	-3,64	0,347725
¹⁸⁰ ₈₂ Pb	-2,30	-3,80	-2,30	0,565853
¹⁸² ₈₂ Pb	-1,26	-2,69	-1,26	0,485794
¹⁸⁴ ₈₂ Pb	-0,21	-1,64	-0,21	0,478974
¹⁸⁶ ₈₂ Pb	1,08	-0,54	1,08	0,750370
¹⁸⁸ ₈₂ Pb	2,43	0,94	2,43	0,547517
¹⁹⁰ ₈₂ Pb	4,26	2,81	4,26	0,498147
¹⁹² ₈₂ Pb	6,56	5,26	6,56	0,346709
¹⁹⁴ ₈₂ Pb	9,99	8,08	9,99	0,403175
²¹⁰ ₈₂ Pb	16,57	15,03	16,57	0,613999
¹⁸⁸ ₈₄ Po	-3,40	-5,23	-3,40	0,393731
¹⁹⁰ ₈₄ Po	-2,60	-4,08	-2,60	0,538510
¹⁹² ₈₄ Po	-1,54	-2,89	-1,54	0,394832
¹⁹⁴ ₈₄ Po	-0,41	-1,80	-0,41	0,431794
¹⁹⁶ ₈₄ Po	0,76	-0,58	0,76	0,389640
¹⁹⁸ ₈₄ Po	2,18	0,82	2,18	0,403355
²⁰⁰ ₈₄ Po	3,79	2,27	3,79	0,595823
²⁰² ₈₄ Po	5,13	3,53	5,13	0,715014
²⁰⁴ ₈₄ Po	6,28	4,64	6,28	0,790994
²⁰⁶ ₈₄ Po	7,15	5,43	7,15	0,805306
²⁰⁸ ₈₄ Po	7,97	6,03	7,97	0,869900
²¹⁰ ₈₄ Po	7,08	4,90	7,08	0,903119
²¹² ₈₄ Po	-6,52	-7,99	-6,52	0,523215
²¹⁴ ₈₄ Po	-3,87	-4,93	-3,87	0,203365
²¹⁶ ₈₄ Po	-0,82	-1,83	-0,82	0,182692
²¹⁸ ₈₄ Po	2,27	1,31	2,27	0,164489
¹⁹⁸ ₈₆ Rn	-1,19	-2,29	-1,19	0,222668
²⁰⁰ ₈₆ Rn	0,0	-1,21	0,0	0,286749
²⁰² ₈₆ Rn	1,06	-0,26	1,06	0,368804
²⁰⁴ ₈₆ Rn	2,00	0,59	2,00	0,447170
²⁰⁶ ₈₆ Rn	2,71	1,29	2,71	0,464603
²⁰⁸ ₈₆ Rn	3,34	1,79	3,34	0,630693
²¹⁰ ₈₆ Rn	3,96	2,16	3,96	0,837116
²¹² ₈₆ Rn	3,17	1,17	3,17	0,880952
²¹⁴ ₈₆ Rn	-6,57	-7,97	-6,57	0,444265
²¹⁶ ₈₆ Rn	-4,35	-5,31	-4,35	0,163069
²¹⁸ ₈₆ Rn	-1,45	-2,36	-1,45	0,148558
²²⁰ ₈₆ Rn	1,75	0,94	1,75	0,119550
²²² ₈₆ Rn	5,52	4,73	5,52	0,116594

Çizelge 5.4 Ra, Th ve U izotopları için deneysel, standart ve kesirsel yarı ömür değerleri

İzotoplar	$\log_{10}(t_{1/2})$ deneysel	$\log_{10}(t_{1/2})=\ln 2 / \lambda_0$ P standart hesaplama	$\log_{10}(t_{1/2})$ kesirsel hesaplama	α
$^{202}_{88}\text{Ra}$	-2,58	-3,77	-2,58	0,277056
$^{204}_{88}\text{Ra}$	-1,23	-2,57	-1,23	0,390602
$^{206}_{88}\text{Ra}$	-0,62	-1,86	-0,62	0,308654
$^{208}_{88}\text{Ra}$	0,15	-1,36	0,15	0,577115
$^{210}_{88}\text{Ra}$	0,56	-1,03	0,56	0,702950
$^{212}_{88}\text{Ra}$	1,15	-0,57	1,15	0,805372
$^{214}_{88}\text{Ra}$	0,40	-1,47	0,40	0,856784
$^{216}_{88}\text{Ra}$	-6,74	-8,08	-6,74	0,389769
$^{218}_{88}\text{Ra}$	-4,59	-5,62	-4,59	0,191868
$^{220}_{88}\text{Ra}$	-1,74	-2,74	-1,74	0,178393
$^{222}_{88}\text{Ra}$	1,59	0,64	1,59	0,159596
$^{224}_{88}\text{Ra}$	5,53	4,69	5,53	0,126721
$^{226}_{88}\text{Ra}$	10,73	10,05	10,73	0,094071
$^{210}_{90}\text{Th}$	-1,77	-3,26	-1,77	0,549254
$^{212}_{90}\text{Th}$	-1,44	-2,96	-1,44	0,596974
$^{214}_{90}\text{Th}$	-1,00	-2,59	-1,00	0,700026
$^{216}_{90}\text{Th}$	-1,55	-3,40	-1,55	0,850160
$^{218}_{90}\text{Th}$	-7,00	-8,21	-7,00	0,286567
$^{220}_{90}\text{Th}$	-5,01	-6,03	-5,01	0,185518
$^{222}_{90}\text{Th}$	-2,55	-3,70	-2,55	0,248166
$^{224}_{90}\text{Th}$	0,11	-0,92	0,11	0,193618
$^{226}_{90}\text{Th}$	3,39	2,47	3,39	0,148293
$^{228}_{90}\text{Th}$	7,92	7,01	7,92	0,138132
$^{230}_{90}\text{Th}$	12,51	11,74	12,51	0,110174
$^{232}_{90}\text{Th}$	17,76	17,21	17,76	0,075138
$^{218}_{92}\text{U}$	-3,29	-4,79	-3,29	0,576558
$^{220}_{92}\text{U}$	-7,22	-8,58	-7,22	0,406591
$^{224}_{92}\text{U}$	-3,15	-4,45	-3,15	0,353855
$^{226}_{92}\text{U}$	-0,30	-1,56	-0,30	0,322454
$^{228}_{92}\text{U}$	2,76	0,48	2,76	0,168386
$^{230}_{92}\text{U}$	6,43	5,49	6,43	0,155992
$^{232}_{92}\text{U}$	9,52	8,67	9,52	0,131585
$^{234}_{92}\text{U}$	13,02	12,20	13,02	0,121766
$^{236}_{92}\text{U}$	14,99	14,24	14,99	0,107264
$^{238}_{92}\text{U}$	17,27	16,66	17,27	0,083477

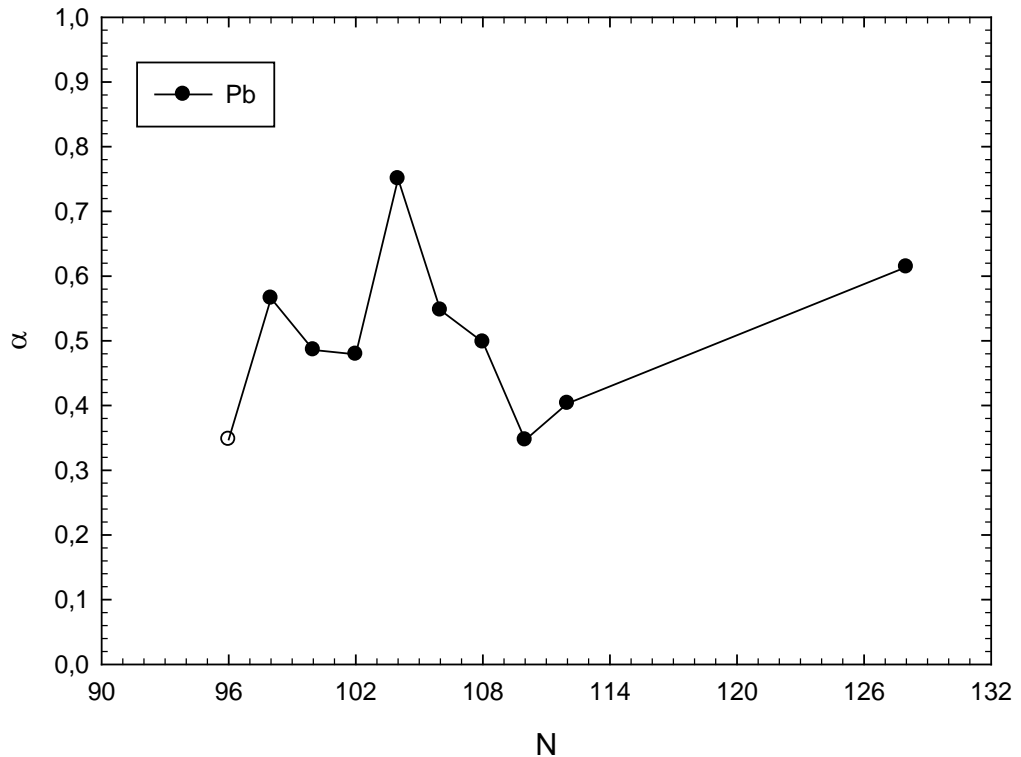
Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4 'te, birinci sütunda incelenen çift-çift Pb, Po, Rn Ra, Th ve U izotopları verilmiştir. İkinci sütunda deneysel elde edilen yarılanma ömrü, üçüncü sütunda standart matematik kullanılarak elde edilen teorik yarılanma ömrü, dördüncü sütunda bu çalışmada kesirsel matematik kullanılarak elde edilen yarılanma ömrü ve son sütunda kesirli türev mertebesi α değerleri verilmiştir. Deneysel yarı ömür değerleri (Zhang and Royer, 2008)'den alınmıştır. Üçüncü sütunda verilen yarı ömür değerleri için $\lambda = \nu_0 P$ olarak alınmıştır. Görüldüğü gibi bu değerler ile deneysel yarı ömür değerleri birbirinden farklıdır. Bu farklılığı gidermek için diğer çalışmalarda P_0 ile adlandırılan bir düzeltme faktörü ile λ çarpılmaktadır. Bu çalışmada, kesirsel matematik kullanılarak elde edilen yarı ömür değerleri ile deneysel yarı ömür değerleri karşılaştırıldığında, bu ikisinin birbirine eşit olduğu çok net görülmektedir. Nükleer bozunma denkleminin kesirsel çözümü olan $N(t) = N_0 E_\alpha(-\lambda^\alpha t^\alpha)$ denkleminde $\lambda = \nu_0 P$ olarak alınmıştır. Elde edilen α değerleri için Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'den de görüldüğü üzere kesirsel türev mertebesi $0 < \alpha < 1$ aralığında değişmektedir.

Şekil 5.1-5.6'da Pb, Po, Rn, Ra, Th, ve U izotopları için kesirsel türev mertebesinin nötron sayısına göre değişimleri verilmiştir. Şekil 5.2-5.6'dan görüldüğü gibi Po, Rn, Ra, Th ve U çekirdeklerinin hepsinde küresel kabuk kapandıkça yani $N=126$ 'ya kadar α değeri artmaktadır. $N=126$ olan izotoplarda ise α 'nın maksimum değere sahip olduğu görülmektedir. Kabuk kapandıktan sonra nötron sayısı arttıkça α değeri azalmaktadır. Şekil 1'e baktığımızda Pb çekirdeğinde nötron sayısının tüm değerleri 0,5 değeri civarında dalgalanmaktadır. Pb'nin mevcut izotopları arasında nötron sayısı sihirli sayı olan bir izotopu yoktur. Pb'nin proton sayısı $Z=82$ dir ve bu bir sihirli sayıdır. Dolayısıyla Pb'de nötron sayısına göre α nın değişiminde özel bir durum görmemek normaldir. Şekil 5.2-5.6'da görüldüğü gibi α değerleri Po, Rn, Ra, Th ve U izotopları için $N=126$ 'ya kadar gittikçe artmakta ve $N=126$ 'da maksimum olmaktadır. $N=126$ 'dan sonra ise hızla azalmaktadır. Bu piklerin olması beklenen bir durumdur. $N=126$ olan çekirdeklerde α değeri 1'e yaklaşmaktadır. Çünkü $N=126$ olan izotop en kararlı yapıdadır. Kesirsel nükleer bozunma denkleminde $\alpha \rightarrow 1$ olması standart duruma karşılık gelmektedir. Bu durum bize alfa bozunma mekanizması için α değerinin kapalı kabuk yapısında anahtar bir rol oynadığını gösterilmektedir.

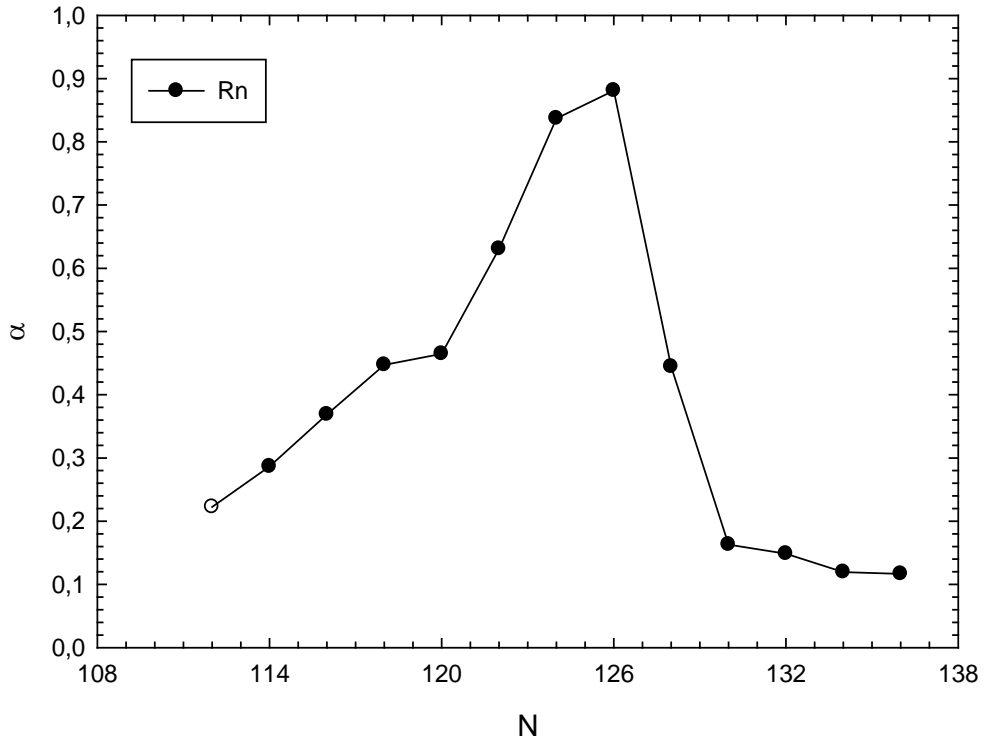
Nötron sayısı 126 olan Pb, Po, Rn, Ra, Th, ve U izotonlarının α değerlerinin proton sayısı ile değişimi Şekil 5.7'de gösterilmiştir. Proton sayısı $Z=82$ sihirli sayısından uzaklaşıldığında α değerleri azalmaktadır. Yukarıdaki yorum burada da geçerlidir. Çünkü sihirli sayıya yaklaştıkça çekirdek daha kararlı olmakta ve α değeri 1'e yaklaşmaktadır. $Z=82$

olduğunda yani kapalı kabuk yapısında çekirdek en kararlı durumdadır. Bu durum α 'nın 1 olması durumuna yani standart bozunma denkleminde karşılık gelmektedir. $Z=82$ 'den uzaklaştıkça çekirdek kararlı olmaktan çıkmakta dolayısıyla α değerleri de hızla azalmaktadır.

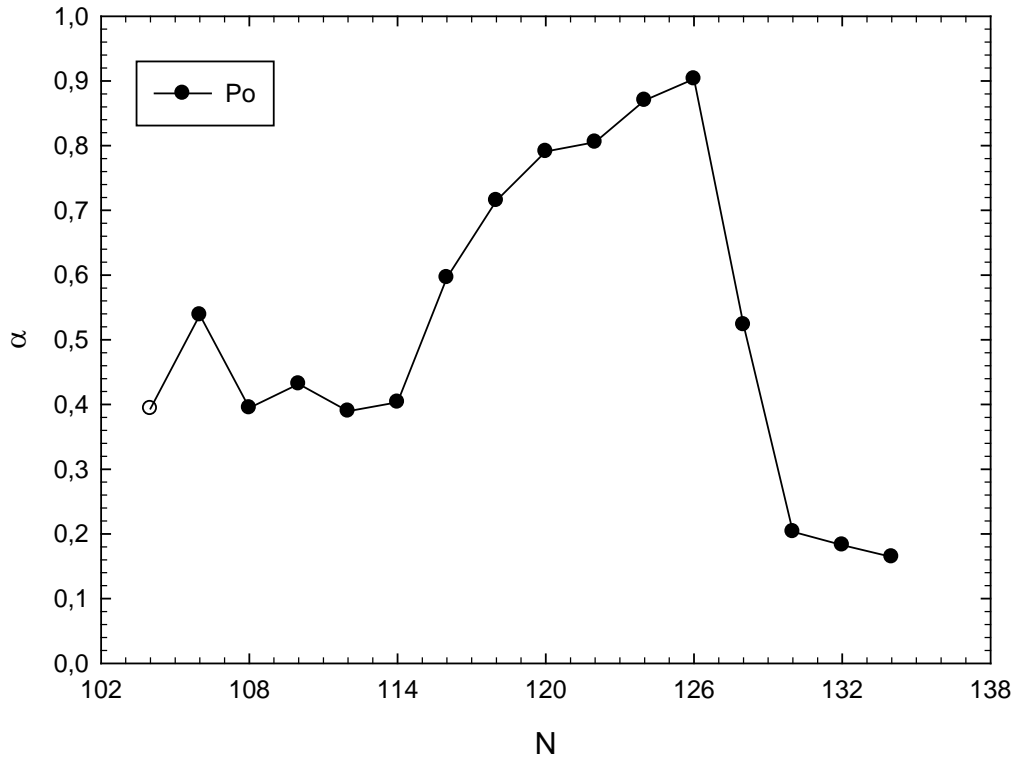
Şekil 5.2-5.6'dan görüldüğü gibi, Po, Rn, Ra, Th ve U izotoplarında $N=126$ olduktan sonra α nın değeri azalmakta ve her bir çekirdeğin en fazla nötronu olan izotopuna karşılık gelen α değeri minimum olmaktadır. Nötron sayısı arttıkça kararlı durumdan uzaklaşmakta ve dolayısıyla da α değeri çok küçülmektedir. Şekil 5.8'de minimum α değerlerine sahip, nötron-bakımından en zengin çekirdeklere karşılık gelen ^{218}Po , ^{222}Rn , ^{226}Ra , ^{232}Th ve ^{238}U izotoplarının proton sayısı ile α 'nın değişimi verilmiştir. Proton sayısı $Z=82$ sihirli sayısından uzaklaştıkça α değeri azalmaktadır. Ancak ^{232}Th 'den ^{238}U 'e giderken α değerinde bir artış görülmektedir. ^{238}U ($N=146$)'in nötron sayısı ^{232}Th ($N=142$) çekirdeğine göre alt sihirli sayıya ($N=152$) daha yakındır yani kararlılığı daha fazladır. Dolayısıyla ^{238}U 'un α değerinin ^{232}Th 'un α değerinden daha büyük olması doğaldır.



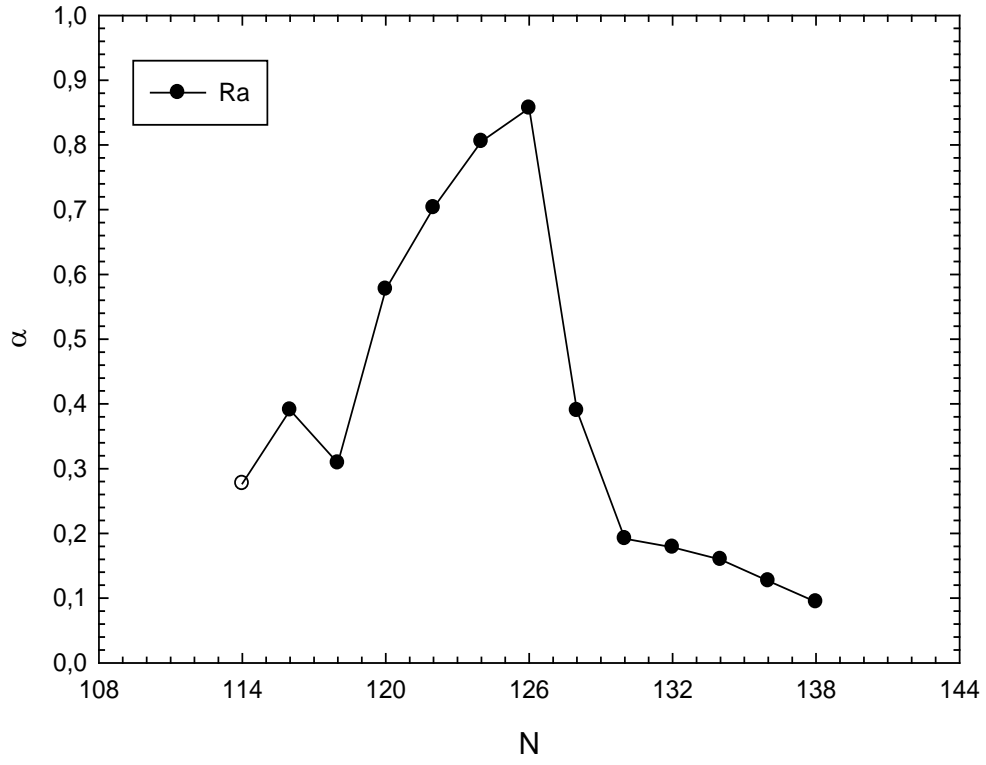
Şekil 5.1 Pb izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri



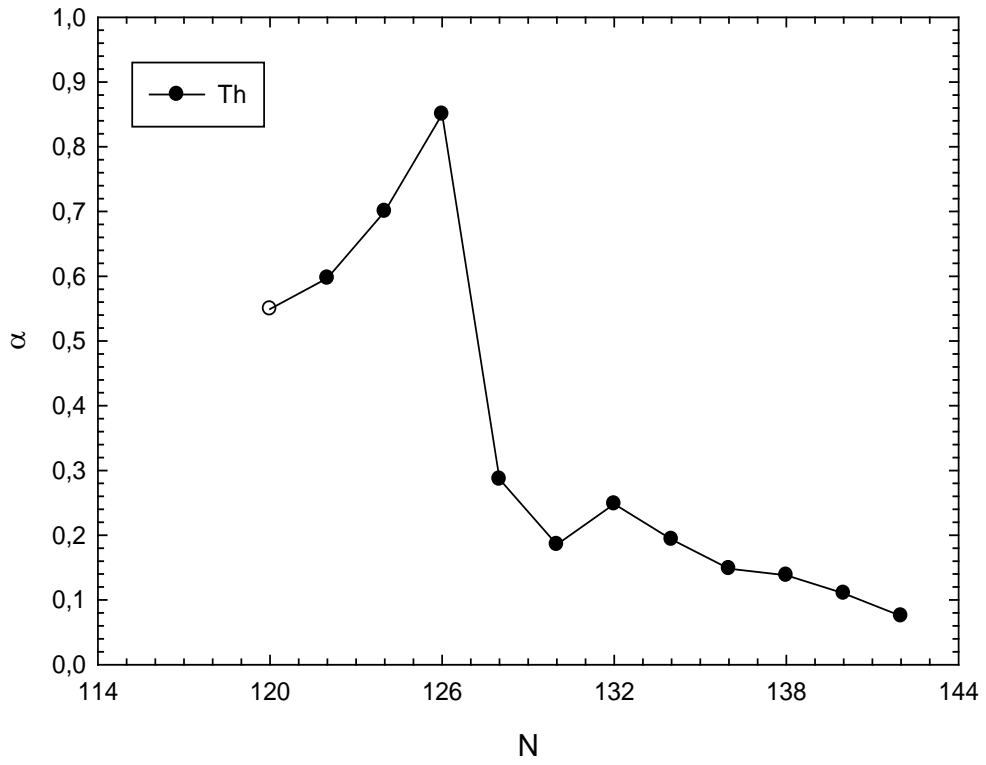
Şekil 5.2 Po izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri



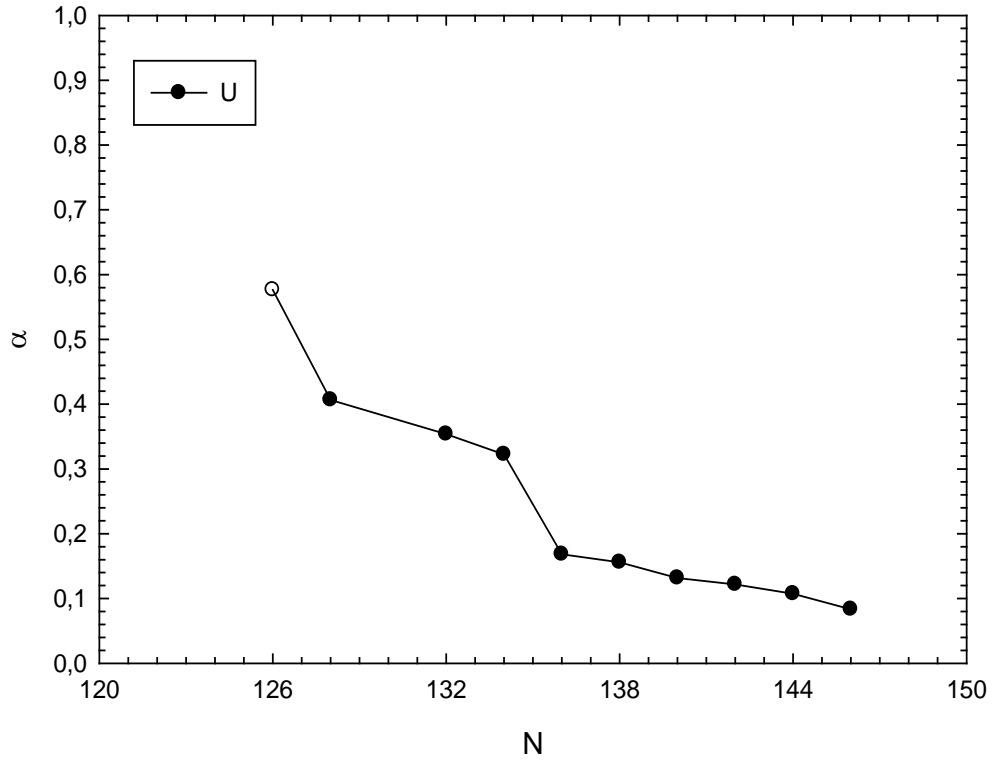
Şekil 5.3 Rn izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri



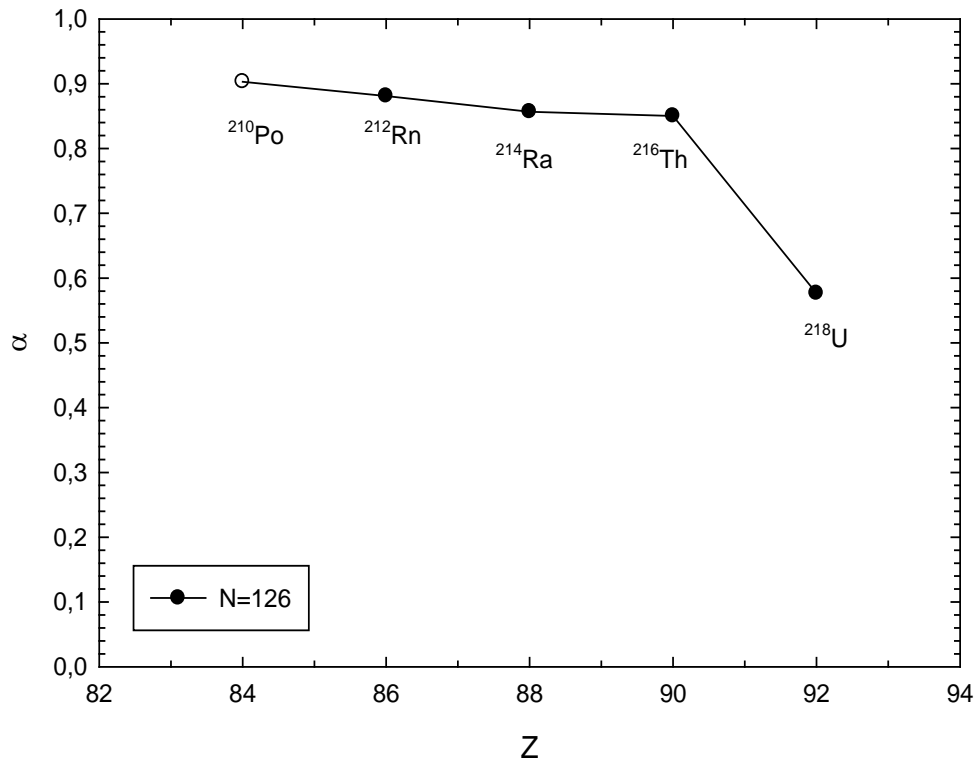
Şekil 5.4 Ra izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri



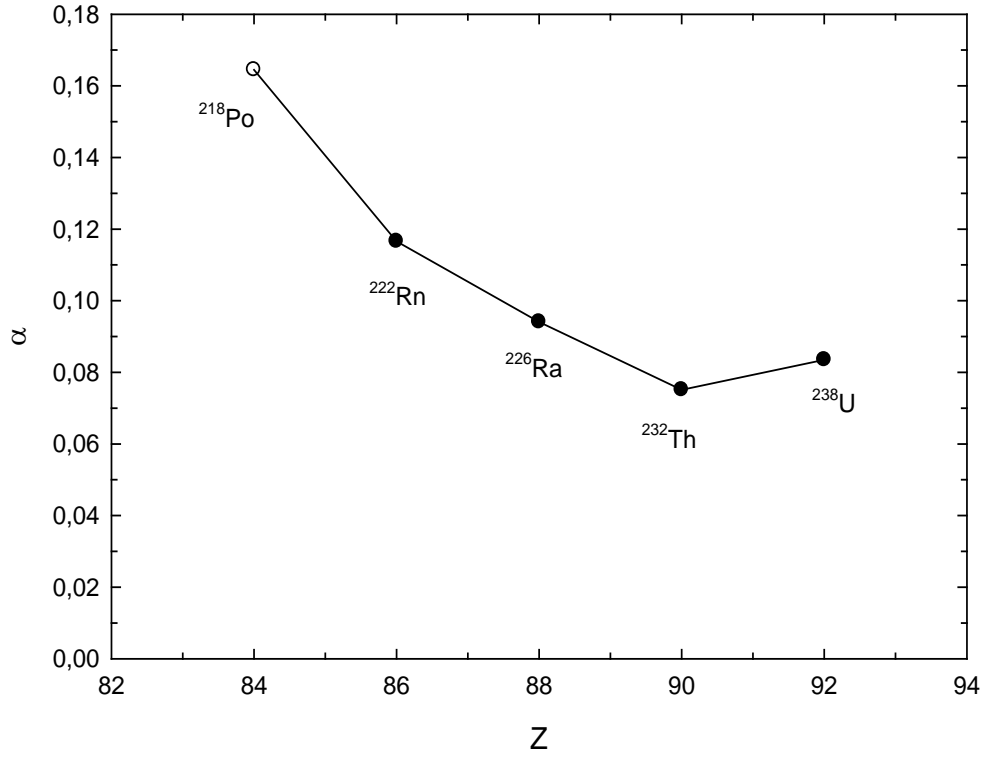
Şekil 5.5 Th izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri



Şekil 5.6 U izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri



Şekil 5.7 $N=126$ olan Po, Rn, Ra, Th, U izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri



Şekil 5.8 Nötron sayısı maksimum olan Po, Rn, Ra, Th, U izotoplarına karşılık gelen α -kesirsel türev mertebeleri

6. TARTIŞMA

Alfa bozunumunu daha iyi anlayabilmek için geliştirilen birçok modelden biri olan alfa-cluster modelinde bozunma sabiti λ , tünel olayında belirtildiği gibi $\nu_0 P$ şeklinde değil, engel çarpma frekansı (ν_0), engelden geçme olasılığı (P) ve düzeltme faktörünün (P_0) çarpımı $\nu_0 P P_0$ olarak verilir. Bölüm 1’de bu çarpımlardan biri olan düzeltme faktörü

$$P_0 = \frac{\lambda_{Deney}}{\lambda_{Teorik}} = \frac{t_{1/2}^{Teorik}}{t_{1/2}^{Deneyel}}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu faktör, teorik λ ile deneysel λ ’yı eşdeğer yapabilmek için sonradan eklenen bir çarpandır. Alfa bozunumu yapan çift-çift Pb, Po, Rn, Ra, Th ve U izotoplarının yarı ömürleri (4.2) ile verilen kesirsel nükleer bozunma denklemi ile hesaplanmış olup, P_0 ifadesine gerek kalmadan, uygun α değerleri için teorik yarıömür değerleri deneysel yarıömür değerleri ile eşdeğer olarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Pb izotopu hariç aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Elde edilen bu α değerlerinin Po, Rn, Ra, Th ve U çekirdeklerinin hepsinde N=126 olan izotoplarında maksimum değere sahip olduğu görülmüştür.
- α değeri N=126’da 1’e yaklaşmaktadır.
- N=126 olan izotonların proton sayısı ile α ’nın değişimine bakıldığında, Z=82’de α değerinin 1’e yakın olduğu ve proton sayısının artmasıyla α ’nın değerinin azaldığı görülmektedir.
- Nötron sayısı maksimum olan çekirdeklerin proton sayısı ile α ’nın değişimi incelendiğinde ise U izotopu hariç nötron sayısı arttıkça α ’nın değerinin azaldığı görülmüştür. ^{238}U ’un, ^{232}Th çekirdeğine göre kararlılığı daha fazla olduğundan ^{238}U ’un α değerinin ^{232}Th ’un α değerinden daha büyük olması doğaldır.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan, α ’nın da aynı P_0 gibi nükleer yapıya bağımlı olduğu sonucuna ulaşılır. Özellikle Z=82 ve N=126 sihirli sayılarına uyan çekirdeklere α ’nın değeri 1’e yaklaşmaktadır. Kapalı kabuk yapısına sahip izotoplar en kararlı oldukları için bu da bizi kesirsel durumdan standart duruma götürmektedir. α kesirsel türev mertebesi kapalı kabuk yapısı için anahtar bir rol oynamaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Arya, A.P., 1999, Çekirdek fiziğinin esasları, (Çev.Y.Şahin), Aktif Yayınevi, 427 s.
- Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., ve Oturanç, G., 2009, Diferansiyel denklemler ve uygulamaları, Barış Yayınları Fakülteler Kitabevi, 9.Baskı, 554 s.
- Bayın, S., 2004, Fen ve mühendislik bilimlerinde matematik yöntemler, Ders Kitapları Anonim Şirketi, 2.Baskı, 458 s.
- Carpinteri, A. and Mainari, F., 1997, Fractals and fractionl calculus in continuum mechanics, Springer Verlag.
- Cottingham, W.N. and Greenwood, D.A., 2001, Çekirdek fiziğine giriş, (Çev.İ.Açıkgöz ve S.Yıldırım), Literatür Yayınları.
- Çalık, A.E., Ertik, H., Öder, B., Şirin, H., 2013, A fractional calculus approach to investigate the alpha decay processes, International Journal of Modern Physics E (Accepted).
- Çavuş, M.S., 2006, Kesirli (fractional) diferansiyel denklemler teorisi ve dielektrik durulmanın kesirli master denklemleri yöntemiyle analizi, Yüksek Lisans tezi Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 90 s.
- Ertik, H., 2010, Kuantum gazlarının fiziksel özelliklerinin istatistiksel mekanik yöntemlerle incelenmesi, Doktora tezi Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 151 s.
- Gamow, G., 1928, Zur Quantentheorie des Atomkernes, Z. Phys., 204 p.
- Hadid, S.B. and Luchko, Y.,1996, An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order, Pan- american Mathematical Journal, 57-73 p.
- Hilfer, R., 2000, Applications of fractional calculus in physics, World Scientific.
- Karaoğlu, B., 1994, Kuantum mekaniğine giriş, Bilgi Tek Yayıncılık, 2. Basım, 277 s.
- Krane, K.S., 2001, Nükleer fizik, (Çev.B.Şarer), Palme Yayıncılık, 1. Cilt, 1. Baskı, 404 s.
- Mainardi, F. and Gorenflo, R., 2000, On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes, J. J. Comput. Appl. Math., 283-299 p.
- Miller, K.S. and Ross, B.,1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley and Sons Inc.
- Mohr, P., 2006, Phys. alpha-nucleus potentials, alpha-decay half-lives, and shell closures for superheavy nuclei, Rev. C.
- Naber, M., 2004, Time fractional Schrödinger equation, J.Math. Phys.
- Oldham, K. B. and Spanier, J., 1974, The fractional calculus, Academic Press.
- Podlubyn, I. 1999, Fractional differential equations, Academic Press.
- Singh, B., Patra, S.K., Gupta, R.K., 2011, Int. J. Mod. Phys. E.
- Sokolov, I.M., Klafter, J., Blumen, A., 2002, Fractional Kinetics, Phys. Today, 48p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Şirin, H., 2011, Tansport olayının istatistiksel mekanik yöntemlerle incelenmesi, Doktora tezi Ege Üniversitesi Fen Bilimleri enstitüsü, 83 s.

Tanyel, B., 1994, Nükleer fizik, , Ege Üniversitesi Basımevi, 340 s.

Zengin, D.M. ve Aygün, E., 2006, Kuantum fiziği, 7.Baskı, Bilim Yayınevi.

Zhang, H.F. and Royer G., 2008, α particle preformation in heavy nuclei and penetration probability, Phys. Rev. C.

Zhang, H.F., Dong, J.M., Royer, G., Zuo, W., Lir, J.Q., 2009 a, Preformation of clusters in heavy nuclei and cluster radioactivity, Phys. Rev. C.

Zhang, H.F., Royer, G., Wang, Y.J., Dong, J.M., Zuo, W., Lir, J.Q., 2009 b, Analytic expressions for α particle preformation in heavy nuclei, Phys. Rev. C.