

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SABİT EĞİMLİ YÜZEYLER VE UYGULAMALARI

Murat BABAARSLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

SABİT EĞİMLİ YÜZEYLER VE UYGULAMALARI

Murat BABAARSLAN

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Yedi bölümden oluşan doktora tezinin birinci bölümünde; konunun tarihi gelişimi ifade edildi. İkinci bölümünde; Öklid 3-uzayında ve Minkowski 3-uzayında eğrilerin ve yüzeylerin, kuaterniyonların ve split kuaterniyonların temel tanım ve teoremleri verildi. Üçüncü bölümde; Öklid 3-uzayında, S^2 Öklid 2-küresi üzerindeki birim hızlı eğriler için Sabban çatısı ve küresel evolüt kavramları verildi. S^2 Öklid 2-küresi üzerindeki birim hızlı eğrilerden Bertrand eğrilerinin oluşturulabileceği gösterildi. Bertrand eğrileriyle helisler arasındaki bir bağlantı verildi. Bertrand eğrilerinin Darboux göstergelerinin küresel evolütlere eşit olduğu ispatlandı. Ayrıca bir uzay eğrisinin teğetler, asli normaller, binormaller ve Darboux göstergeleri için sabit eğimli yüzeylerin parametrizasyonları bulundu ve bazı sonuçlar elde edildi. Sabit eğimli yüzeylerin ν -parametre eğrilerine karşılık gelen Bertrand eğrileri araştırıldı. Dördüncü bölümde; Minkowski 3-uzayında, S_1^2 de Sitter 2-uzayındaki birim hızlı space-like eğriler için Lorentz anlamında Sabban çatısı, de Sitter evolüt kavramları tanımlandı ve bu eğrilerin invaryantları araştırıldı. Daha sonra üçüncü bölümde elde edilen sonuçlar burada incelendi. Beşinci bölümde; dördüncü bölümdeki sonuçlar \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayındaki birim hızlı space-like eğriler için araştırıldı. Altıncı bölümde; Öklid 3-uzayında kuaterniyonlar ile sabit eğimli yüzeylerin bağlantıları verildi. Benzer şekilde, yedinci bölümde; Minkowski 3-uzayında split kuaterniyonlar ile space-like sabit eğimli yüzeylerin bağlantıları araştırıldı.

Ocak 2013, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bertrand eğrileri, helisler, küresel evolütler, küresel göstergeler, Sabban çatısı, Öklid 3-uzay, Minkowski 3-uzay, kuaterniyonlar, sabit eğimli yüzeyler

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CONSTANT SLOPE SURFACES AND THEIR APPLICATIONS

Murat BABAARSLAN

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

In the first chapter of the thesis consisting of seven chapters; the historical background of subject is expressed. In the second chapter; fundamental definitions and theorems related to curves and surfaces in Euclidean 3-space and Minkowski 3-space, quaternions and split quaternions are given. In the third chapter; the concepts of Sabban frame, spherical evolute for unit speed curves on Euclidean 2-sphere \mathbb{S}^2 in Euclidean 3-space are given. It is shown that Bertrand curves can be constructed from unit speed curves on Euclidean 2-sphere \mathbb{S}^2 . A relation between Bertrand curves and helices is given. It is proved that the Darboux indicatrices of Bertrand curves are equal to spherical evolutes. Furthermore, the parametrizations of constant slope surfaces for the tangent, principal normal, binormal and Darboux indicatrices of a space curve are found and some results are obtained. Bertrand curves corresponding to v -parameter curves of constant slope surfaces are investigated. In the fourth chapter; the concepts of Lorentzian Sabban frame, de Sitter evolute for unit speed space-like curves on de Sitter 2-space \mathbb{S}_1^2 in Minkowski 3-space are defined and the invariants of these curves are studied. Afterwards, the results which are obtained in the third chapter are investigated here. In the fifth chapter; the results of fourth chapter are studied for unit speed space-like curves on pseudo-hyperbolic space \mathbb{H}^2 . In the sixth chapter; the relations between quaternions and constant slope surfaces are given in Euclidean 3-space. Similarly, in the seventh chapter; the relations between split quaternions and space-like constant slope surfaces are studied in Minkowski 3-space.

January 2013, 70 pages

Key Words: Bertrand curves, helices, spherical evolutes, spherical indicatrices, Sabban frame, Euclidean 3-space, Minkowski 3-space, quaternions, constant slope surfaces

TEŐEKKÖR

Çalıőmalarımı yönlendiren, araőtırmalarımın her aőamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beőeri iliőkilerde de engin fikirleriyle yetiőme ve geliőmeme katkıda bulunan danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalıőmalarım sırasında önemli katkılarda bulunan ve yönlendiren Prof. Dr. Marian Ioan MUNTEANU'ya (Iaői, Alexandru Ioan Cuza Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalıőmalarım süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen eőim Öğr. Gör. Funda BABAARSLAN'a (Bozok Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve aileme en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Murat BABAARSLAN

Ankara, Ocak 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
3. \mathbb{R}^3 ÖKLİD 3-UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİNİN VE SABİT EĞİMLİ YÜZEYLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI.....	23
4. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACE-LIKE BERTRAND EĞRİLERİ VE SPACE-LIKE KONİ ÜZERİNDE YATAN SPACE-LIKE SABİT EĞİMLİ YÜZEYLER.....	36
4.1 \mathbb{S}_1^2 De Sitter 2-Uzayındaki Birim Hızlı Space-like Eğrilerin Space-like Yükseklik Fonksiyonları.....	37
4.2 \mathbb{S}_1^2 De Sitter 2-Uzayındaki Birim Hızlı Space-like Eğrilerin İnvaryantları.....	38
4.3 Space-like Bertrand Eğrileri ve Space-like Koni Üzerinde Yatan Space-like Sabit Eğimli Yüzeyler.....	40
5. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA TIME-LIKE BERTRAND EĞRİLERİ VE TIME-LIKE KONİ ÜZERİNDE YATAN SPACE-LIKE SABİT EĞİMLİ YÜZEYLER.....	46
6. SABİT EĞİMLİ YÜZEYLERE KUATERNİYONLARLA YENİ BİR YAKLAŞIM.....	53

7. SPLIT KUATERNİYONLAR VE SPACE-LIKE SABİT EĞİMLİ	
YÜZEYLER	58
7.1 Split Kuaterniyonlar ve Space-like Koni Üzerinde Yatan	
Space-like Sabit Eğimli Yüzeyleyler.....	58
7.2 Split Kuaterniyonlar ve Time-like Koni Üzerinde Yatan	
Space-like Sabit Eğimli Yüzeyleyler.....	60
7.3 Örnekler	63
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar cismi
\mathbb{R}^3	Öklid 3-uzay
\mathbb{R}_1^3	Minkowski 3-uzay
S	Yüzey
S^2	Öklid 2-küre
S_1^2	De Sitter 2-uzay
\mathbb{H}^2	Pseudo-hiperbolik uzay
\mathbb{H}	Kuaterniyon cebiri
\mathbb{H}'	Split kuaterniyon cebiri
$\ \cdot\ $	Norm
κ, τ	Eğrilik, torsiyon
κ_g	Jeodezik eğrilik
T	Teğet vektör alanı
N	Asli normal vektör alanı
B	Binormal vektör alanı
D	Darboux vektör alanı
\wedge	Vektörel çarpım
\times	Kuaterniyon çarpım

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Sağ dairesel helis.....	6
Şekil 2.2 Tor yüzeyi.....	10
Şekil 3.1 Sabit eğimli yüzey.....	33
Şekil 3.2 ν -parametre eğrisi.....	34
Şekil 3.3 Bertrand eğrisi.....	35
Şekil 4.1 Space-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey.....	44
Şekil 4.2 Space-like Bertrand eğrisi.....	45
Şekil 5.1 Time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey.....	51
Şekil 5.2 Time-like Bertrand eğrisi.....	52
Şekil 6.1 Sabit eğimli yüzey.....	57
Şekil 7.1 Space-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey.....	64
Şekil 7.2 Time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey.....	65

1. GİRİŞ

Eğrilerin diferansiyel geometrisinde, en önemli problemlerden biri regüler bir eğrinin karakterizasyonudur. Bu problemin çözümünde κ eğriliği ve τ torsiyonu etkili bir rol oynar. Örneğin;

i) $\kappa \equiv 0$ ise eğri bir doğrudur,

ii) $\kappa \neq 0$ ve $\tau \equiv 0$ ise eğri düzlemseldir,

iii) $\kappa = \text{sabit} > 0$ ve $\tau \equiv 0$ ise eğri yarıçapı $1/\kappa$ olan bir çemberdir.

Böylece bir eğrinin eğriliğini ve torsiyonunu kullanılarak eğrinin biçimini ve uzunluğunu belirleyebiliriz (Millman ve Parker 1977).

Teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğrilere genel helis veya sabit eğimli eğri denir. Helislerle ilgili klasik bir sonuç 1802 yılında M. A. Lancret tarafından ifade edilmiş ve ilk olarak 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ispatlanmıştır: Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $\tau/\kappa = \text{sabit}$ olmasıdır. Eğer $\kappa = \text{sabit} > 0$ ve $\tau = \text{sabit} \neq 0$ ise eğriye dairesel helis denir (Millman ve Parker 1977).

Helislerin birçok ilginç uygulamaları vardır. Örneğin; DNA çifti ve kolajen üçlü helis, karbon nano tüpler, helis biçimindeki merdivenler, fraktal geometrideki helis yapılar ve vb. Bu yüzden helisler doğadaki ve bilimdeki en büyüleyici eğrilerden birisidir (İlarslan ve Boyacıoğlu 2008, Munteanu 2010).

Eğrilerin karakterizasyonu için diğer bir yol eğrilerin Frenet vektörleri arasındaki bağlantılardır. Örnek olarak involüt-evolüt çiftini verebiliriz. 1668 yılında C. Huygens daha kusursuz bir saat yapmaya çalışırken involütleri keşfetmiştir. $\forall s \in I$ için α ve $\tilde{\alpha}$ eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki teğetleri ortogonal ise α ya $\tilde{\alpha}$ nın evolütü ve $\tilde{\alpha}$ ya da α nın involütü denir. $(\alpha, \tilde{\alpha})$ ikilisine ise evolüt-involüt çifti denir (Millman ve Parker 1977). Diğer taraftan Öklid 3-uzayında bir düzlemsel eğrinin evolütü, eğrinin eğrilik merkezinin geometrik yeridir.

Izumiya vd. (2004) çalışmalarında \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayındaki eğrilerin evolütlerini tanımladılar ve bu evolütlerin singüler noktaları ile eğrilerin geometrik invaryantları arasında bağlantı kurdular.

Diferansiyel geometride önemli bir yeri olan diğer eğri 1850 yılında J. Bertrand tarafından bulunan Bertrand eğrileridir. Bertrand eğrisinin her noktasındaki asli normal vektörü Bertrand çifti denilen diğer bir eğrinin de asli normal vektörüdür. $\forall s \in I$ için α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı A, B reel sabitlerinin olmasıdır. Böylece düzlemsel eğriler ve dairesel helisler Bertrand eğrileridir (Millman ve Parker 1977, Izumiya ve Takeuchi 2002).

Izumiya ve Takeuchi (2002) çalışmalarında Öklid 3-uzayında, Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerden elde edilebileceğini ispatladılar. Ayrıca küresel evolüt kavramını tanımladılar. Küresel eğrilerin Singüler nokta teorisinin bir uygulaması olarak Bertrand eğrilerinin “generic” özelliklerini incelediler.

Bertrand eğrileri, bilgisayar destekli tasarımda ve bilgisayar destekli üretimde önemli bir yeri olan paralel (offset) eğrilerin özel örnekleridir (Nutbourne ve Martin 1988).

Son yıllarda, $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ çarpım uzayındaki yüzeylerin geometrisi ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu yüzeylere örnek olarak sabit açılı yüzeyleri verebiliriz. Öklid 3-uzayında birim normal, belirli sabit bir vektörle sabit açı yapan yüzeylere, sabit açılı yüzeyler denir (Cermelli ve Di Scala 2007). Bu yüzeyler helis kavramının bir genellemesi olarak düşünülebilir. Dillen vd. (2007, 2009) çalışmalarında $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ çarpım uzaylarında sabit açılı yüzeyleri incelediler. Bu yüzeylerin birim normal, \mathbb{R} doğrultusundaki teğet ile sabit açı yapar.

Munteanu (2010) makalesinde her noktasındaki normal, o noktadaki konum vektörüyle sabit açı yapan yüzeyleri sabit eğimli yüzeyler olarak isimlendirdi ve bu yüzeylerin karakterizasyonu verdi;

$S \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin sabit eğimli yüzey olması için gerek ve yeter şart S nin ya orijin merkezli \mathbb{S}^2 Öklid 2-küresinin açık bir parçası olmasıdır ya da

$$x(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi f(v) + \sin \xi f(v) \wedge f'(v)) \quad (1.1)$$

şeklinde parametrize edilebilmesidir, burada θ , sıfırdan farklı sabit, $\xi = \xi(u) = \cot \theta \ln u$ ve f , \mathbb{S}^2 Öklid 2-küresinde birim hızlı eğridir.

Fu ve Yang (2012) çalışmalarında Minkowski 3-uzayında, space-like sabit eğimli yüzeylerin space-like ve time-like konide bulunmalarına göre karakterizasyonlarını verdiler;

$S \subset \mathbb{R}_1^3$ yüzeyinin, space-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey olması için gerek ve yeter şart bu yüzeyin

$$x(u, v) = u \cosh \theta (\cosh \xi_1 f(v) + \sinh \xi_1 f(v) \wedge f'(v)) \quad (1.2)$$

şeklinde parametrize edilebilmesidir, burada θ , sıfırdan farklı sabit, $\xi_1 = \xi_1(u) = \tanh \theta \ln u$ ve f , \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayında birim hızlı space-like eğridir.

Ayrıca $S \subset \mathbb{R}_1^3$ yüzeyinin, time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey olması için gerek ve yeter şart bu yüzeyin

$$x(u, v) = u \sinh \theta (\cosh \xi_2 g(v) + \sinh \xi_2 g(v) \wedge g'(v)) \quad (1.3)$$

şeklinde parametrize edilebilmesidir, burada θ , sıfırdan farklı sabit, $\xi_2 = \xi_2(u) = \coth \theta \ln u$ ve g , \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayında birim hızlı space-like eğridir.

Sabit eğimli yüzeylerin güzel biçimleri vardır ve diferansiyel geometri açısından ilginçtirler. Bu yüzden sabit eğimli yüzeylere hem Öklid 3-uzayındaki hem de Minkowski 3-uzayındaki en büyüleyici yüzeylerden birisi diyebiliriz.

Bu tez çalışmasında, Öklid 3-uzayında, S^2 Öklid 2-küresi üzerindeki birim hızlı eğriler için Sabban çatısı ve küresel evolüt kavramları verildi. S^2 Öklid 2-küresi üzerindeki birim hızlı eğrilerden Bertrand eğrilerinin oluşturulabileceği gösterildi. Bertrand eğrileriyle helisler arasındaki bir bağlantı verildi. Bertrand eğrilerinin Darboux göstergelerinin küresel evolütlere eşit olduğunu ispatlandı. Ayrıca bir uzay eğrisinin teğetler, asli normaller, binormaller ve Darboux göstergeleri için sabit eğimli yüzeylerin parametrizasyonları bulundu ve bazı sonuçlar elde edildi. Sabit eğimli yüzeylerin ν -parametre eğrilerine karşılık gelen Bertrand eğrileri araştırıldı. Dördüncü bölümde; Minkowski 3-uzayında, S_1^2 de Sitter 2-uzayında birim hızlı space-like eğriler için Lorentz anlamında Sabban çatısı, de Sitter evolüt kavramları tanımlandı ve bu eğrilerin invaryantları araştırıldı. Bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar burada incelendi. Beşinci bölümde; dördüncü bölümdeki sonuçlar \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayındaki birim hızlı space-like eğriler için araştırıldı. Altıncı bölümde; Öklid 3-uzayında kuaterniyonlar ile sabit eğimli yüzeylerin bağlantıları verildi. Benzer şekilde, yedinci bölümde; Minkowski 3-uzayında split kuaterniyonlar ile space-like sabit eğimli yüzeylerin bağlantıları araştırıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada sıkça kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

2.1 Öklid 3-Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha & : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyona \mathbb{R}^3 Öklid 3-uzayında bir eğri denir (O'Neill 1997).

Tanım 2.1.2. α , \mathbb{R}^3 de bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

hız vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektörü denir (Shifrin 2011).

Tanım 2.1.3. α , \mathbb{R}^3 de bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ ise α eğrisine regüler bir eğri denir (O'Neill 1997).

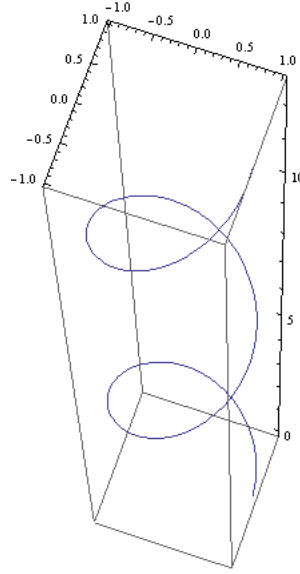
Örnek 2.1.1.

$$\begin{aligned}\alpha & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow \alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)\end{aligned}$$

eğrisi verilsin, burada $r > 0$ ve $h > 0$ dır. Bu eğriye sağ dairesel helis denir ($h < 0$ ise sol dairesel helistir). Dairesel helisin xy -düzlemine izdüşümü bir çemberdir.

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, h) \neq \mathbf{0}$$

olduğundan α regüler bir eğridir. α nın resmi ($r = 1$ ve $h = 1$);



Şekil 2.1 Sağ dairesel helis $\alpha(t)$

şeklindedir (Millman ve Parker 1977).

Tanım 2.1.4. α , $I \subset \mathbb{R}$ da tanımlı bir eğri olsun. Eğer $h: J \rightarrow I$, J açık aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\beta = \alpha(h): J \rightarrow I$$

bileşke fonksiyonu bir diferansiyellenebilir eğridir ve β ya h ile α nın yeniden parametrizasyonu denir (O'Neill 1997).

Tanım 2.1.5. β , $J \subset \mathbb{R}$ de tanımlı \mathbb{R}^3 de bir eğri olsun. $\forall s \in J$ için

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

ise β ya birim hızlı eğri ve s ye de yay-parametresi denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.6. α , $I \subset \mathbb{R}$ da tanımlı \mathbb{R}^3 de bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına $t = a$ dan $t = b$ ye α nın yay-uzunluğu denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.7. α , $I \subset \mathbb{R}$ da tanımlı \mathbb{R}^3 de birim hızlı bir eğri ve $T = \alpha'$, α eğrisinin birim teğet vektör alanı olsun.

$$\begin{aligned} \kappa & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s & \rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| \end{aligned}$$

reel sayısına α eğrisinin eğriliği denir (O'Neill 1997).

Tanım 2.1.8. α , $\kappa > 0$ eğriliğine sahip \mathbb{R}^3 de birim hızlı bir eğri olsun. $N = T'/\kappa$ vektör alanına α eğrisinin asli normal vektör alanı ve $B = T \wedge N$ vektör alanına da α eğrisinin binormal vektör alanı denir (O'Neill 1997).

Teorem 2.1.1. α , $\kappa > 0$ eğriliğine sahip \mathbb{R}^3 de birim hızlı bir eğri olsun. T , N , B vektör alanları α eğrisinin her noktasında ortonormal vektör alanlarıdır ve α eğrisi üzerinde Frenet çatı alanı olarak isimlendirilir (O'Neill 1997).

Tanım 2.1.9. α , \mathbb{R}^3 de birim hızlı bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} \tau & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s & \rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \end{aligned}$$

reel sayısına α eğrisinin torsiyonu denir (O'Neill 1997).

Tanım 2.1.10. α , $\kappa > 0$ eğriliğine sahip \mathbb{R}^3 de birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin T , N , B vektör alanlarının her s anında bir eksen etrafında ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör, $D = \tau T + \kappa B$ dir. Buradan Frenet formülleri;

$$\begin{aligned} T' & = D \wedge T, \\ N' & = D \wedge N, \\ B' & = D \wedge B \end{aligned}$$

olur (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.1.2. α , $\kappa > 0$ eğriliğine ve τ torsiyonuna sahip \mathbb{R}^3 de birim hızlı bir eğri olsun. Böylece Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

şeklindedir (O'Neill 1997).

Teorem 2.1.3. α , \mathbb{R}^3 de regüler bir eğri olsun. Bu durumda Frenet formülleri, eğrilik ve torsiyon

$$\begin{aligned} T' &= \alpha' / \|\alpha'\|, \\ N' &= B \wedge T, \quad \kappa = \|\alpha' \wedge \alpha''\| / \|\alpha'\|^3, \\ B' &= \alpha' \wedge \alpha'' / \|\alpha' \wedge \alpha''\|, \quad \tau = \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') / \|\alpha' \wedge \alpha''\|^2 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

şeklindedir (O'Neill 1997).

Tanım 2.1.11. α , \mathbb{R}^3 de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi boyunca birim teğet vektörler orijin merkezli \mathbb{S}^2 birim Öklid 2-küresi üzerinde

$$\begin{aligned} T &: I \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ s &\rightarrow T(s) \end{aligned}$$

eğrisini meydana getirirler. Bu eğri regüler olmayabilir. T eğrisine α nın teğetler göstergesi (küresel teğet resmi) denir. Ayrıca asli normaller göstergesi (küresel asli normal resmi) N ve binormaller göstergesi (küresel binormal resmi) B de \mathbb{S}^2 üzerindeki diğer eğrilerdir (Millman ve Parker 1977).

Benzer şekilde $C(s) = D(s) / \|D(s)\|$ olmak üzere birim Darboux vektörleri \mathbb{S}^2 üzerinde C eğrisini meydana getirirler. Bu eğriye α nın Darboux göstergesi (küresel Darboux resmi) denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 2.1.12. $\mathcal{U}, \mathbb{R}^2$ nin açık bir alt kümesi olsun. $S \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesinin regüler bir parametrizasyonu

$$x: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, x_u \wedge x_v \neq \mathbf{0}$$

şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir ve birebir fonksiyondur. $x^{-1}: x(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ ters fonksiyonu sürekli olmak üzere, $S \subset \mathbb{R}^3$ bağlantılı alt kümesinin her noktasında regüler parametrizasyonlu bir komşuluk varsa S ye \mathbb{R}^3 de bir yüzey denir (Shifrin 2011).

Örnek 2.1.2.

$$\begin{aligned} \alpha &: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (2 + \cos s, 0, 2 + \sin s) \end{aligned}$$

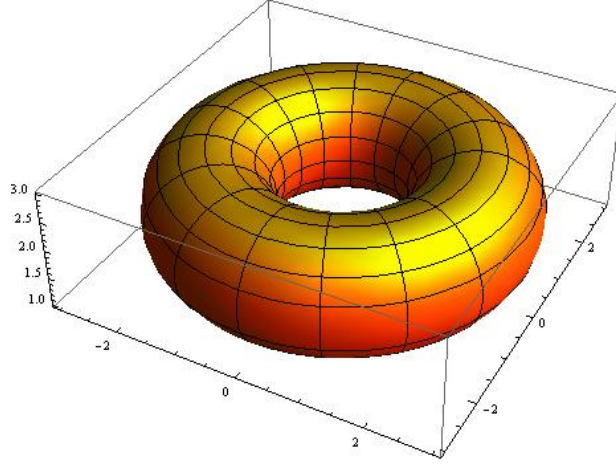
eğrisini alalım. α eğrisinin z -ekseni etrafında θ açısı kadar döndürülmesiyle oluşan dönele yüzey

$$x(\theta, s) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 + \cos s \\ 0 \\ 2 + \sin s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(2 + \cos s) \\ \sin \theta(2 + \cos s) \\ 2 + \sin s \end{bmatrix}$$

tor yüzeyidir. Burada

$$x_\theta \wedge x_s = (2 + \cos s)(\cos s \cos \theta, \cos s \sin \theta, \sin s) \neq \mathbf{0}$$

dir. Tor yüzeyinin resmi;



Şekil 2.2 Tor yüzeyi $x(\theta, s)$

şeklindedir.

Tanım 2.1.13. S , \mathbb{R}^3 de bir yüzey olsun. S yüzeyi üzerinde $v = v_0$ sabit ve u değişken alınarak elde edilen eğriye u -parametre eğrisi, $u = u_0$ sabit ve v değişken alınarak elde edilen eğriye de v -parametre eğrisi denir (Shifrin 2011).

Tanım 2.1.14. S , \mathbb{R}^3 de bir yüzey ve $P \in S$ olsun.

$$x: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, P = x(u_0, v_0)$$

regüler parametrizasyonunu düşünelim. Böylece S yüzeyinin P noktasındaki teğet düzlemi x_u ve x_v vektörleri ile gerilen $T_p(S)$ alt uzayıdır (Shifrin 2011).

$T_p(S)$ teğet düzlemine dik olan $\mathbf{n} = x_u \wedge x_v / \|x_u \wedge x_v\|$ birim vektörüne, S yüzeyinin birim normali denir (Shifrin 2011).

Tanım 2.1.15. S , basit bir yüzey (2-boyutlu diferansiyellenebilir manifold) olsun. $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir dönüşümünün $d\varphi_p: T_p(S) \rightarrow T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^3)$ türev dönüşümü birebir ise φ dönüşümüne immersiyon denir. Eğer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S)$ için

$$\langle d\varphi_p(\mathbf{v}), d\varphi_p(\mathbf{w}) \rangle_{\varphi(p)} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p$$

ise φ dönüşümüne izometrik immersiyon denir (Do Carmo 1976).

2.2 Minkowski 3-Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.2.1. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, \mathbb{R}^3 Öklid 3-uzayında iki vektör olmak üzere

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

Lorentz metriğiyle donatılmış \mathbb{R}^3 uzayına, Minkowski 3-uzayı denir ve \mathbb{R}_1^3 ile gösterilir (Lopez 2008).

Tanım 2.2.2. Bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörüne;

- (i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ veya $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ise space-like vektör,
- (ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ ise time-like vektör,
- (iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ve $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ise light-like (null) vektör denir (Lopez 2008).

Tanım 2.2.3. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$$

reel sayısına \mathbf{x} vektörünün normu denir. Normu bir birim olan vektöre birim vektör denir. Sonuç olarak;

(i) \mathbf{x} space-like vektör ise $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$,

(ii) \mathbf{x} time-like vektör ise $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

dir (Lopez 2008).

Tanım 2.2.4. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\wedge: \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_2 y_1 - x_1 y_2) \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlı " \wedge " operatörüne Lorentz anlamında vektörel çarpım denir (Lopez 2008).

Öklid 3-uzayındaki vektörel çarpıma benzer olarak Lorentz anlamında vektörel çarpımın da aşağıdaki gibi cebirsel ve geometrik özellikleri vardır;

(i) $\langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$,

(ii) $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$,

(iii) $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$,

(iv) $\langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$,

(v) \mathbb{R}_1^3 deki her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektörü için $\langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2$

dir.

Tanım 2.2.5. α , \mathbb{R}_1^3 de bir eğri olsun. α nın hız vektörü α' olmak üzere

(i) $\alpha'(t)$ space-like ise α eğrisine space-like,

(ii) $\alpha'(t)$ time-like ise α eğrisine time-like,

(iii) $\alpha'(t)$ light-like ise α eğrisine light-like

eğri denir (Lopez 2008).

Tanım 2.2.6. \mathbb{R}_1^3 de

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$$

ve

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$$

yüzeylerine sırasıyla de Sitter 2-uzay ve pseudo-hiperbolik uzay denir (Lopez 2008).

Teorem 2.2.1. α , $\kappa > 0$ eğriliğine ve τ torsiyonuna sahip \mathbb{R}_1^3 de birim hızlı bir time-like eğri olsun. $\mathbf{T} = \alpha'$ birim teğet, $\mathbf{N} = \alpha''/\|\alpha''\|$ asli normal ve $\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$ binormal vektör olmak üzere Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

dir (Lopez 2008). α birim hızlı time-like eğrisinin Darboux vektörü $\mathbf{D} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ dir. $\forall s \in I$ için $\mathbf{D}(s)$ light-like vektör olmasın. Buradan

$$\begin{aligned} C &: I \rightarrow \mathbb{H}^2 \\ s &\rightarrow C(s) = \frac{\mathbf{D}(s)}{\|\mathbf{D}(s)\|} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır ve α nın hiperbolik Darboux göstergesi olarak isimlendirilir (Wang ve Pei 2011).

Teorem 2.2.2. α , \mathbb{R}_1^3 de regüler bir time-like eğri olsun. Bu durumda α time-like eğrisinin eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad (2.2.3)$$

şeklindedir (Lopez 2008).

Teorem 2.2.3. α , $\kappa > 0$ eğriliğine ve τ torsiyonuna sahip \mathbb{R}_1^3 de birim hızlı bir space-like eğri olsun. $\mathbf{T} = \alpha'$ birim teğet, $\mathbf{N} = \alpha''/\|\alpha''\|$ space-like asli normal ve $\mathbf{B} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{T}$ binormal vektör olmak üzere Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

dir. (Lopez 2008). α birim hızlı space-like eğrisinin Darboux vektörü $\mathbf{D} = -\tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ dir. $\forall s \in I$ için $\mathbf{D}(s)$ light-like vektör olmasın. Buradan

$$\begin{aligned} C &: I \rightarrow \mathbb{S}_1^2 \\ s &\rightarrow C(s) = \frac{\mathbf{D}(s)}{\|\mathbf{D}(s)\|} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır ve α nın de Sitter Darboux göstergesi olarak isimlendirilir (Wang ve Pei 2011).

Teorem 2.2.4. α , \mathbb{R}_1^3 de regüler bir space-like eğri olsun. α space-like eğrisinin eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad (2.2.5)$$

dir (Lopez 2008).

Tanım 2.2.7. α , \mathbb{R}_1^3 de regüler bir eğri olsun. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sabit vektörü için $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{v} \rangle$ sabit bir fonksiyon ise α ya helis denir (Lopez 2008).

Teorem 2.2.5. α , \mathbb{R}_1^3 de space-like veya time-like bir eğri olsun. α eğrisi helis ise $\tau/\kappa = \text{sabit}$ dir (Lopez 2008).

Teorem 2.2.6. α , \mathbb{R}_1^3 de asli normali light-like olmayan space-like veya time-like bir eğri olsun. $\tau/\kappa = \text{sabit}$ ise α eğrisi helistir (Lopez 2008).

Teorem 2.2.7. α , \mathbb{R}_1^3 de space-like veya time-like bir eğri olsun. α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ eşitliğini sağlayacak şekilde sıfırdan farklı A, B reel sabitlerinin olmasıdır (Lopez 2008).

2.3 Kuaterniyonlar ve Homotetik Hareketler

Tanım 2.3.1. $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir q kuaterniyonu

$$\begin{aligned} q &= (a_0, a_1, a_2, a_3) \\ &= (a_0, \mathbf{w}) \\ &= a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

şeklindedir, burada $S_q = a_0$, q nun skaler kısmı ve $\mathbf{V}_q = (a_1, a_2, a_3)$ da vektörel kısmıdır. Böylece q kuaterniyonu, $q = S_q + \mathbf{V}_q$ şeklinde yazılabilir (Ward 1997).

Tanım 2.3.2. $q = S_q + \mathbf{V}_q$ ve $p = S_p + \mathbf{V}_p$ kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (\mathbf{V}_q + \mathbf{V}_p)$$

dir (Ward 1997).

Tanım 2.3.3. $q = S_q + \mathbf{V}_q$ kuaterniyonunun bir $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleriyle çarpımı $\lambda q = \lambda S_q + \lambda \mathbf{V}_q$ şeklindedir (Ward 1997).

Tanım 2.3.4. $q = S_q + \mathbf{V}_q$ kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q} = S_q - \mathbf{V}_q$ dir (Ward 1997).

Tanım 2.3.5. $q = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ kuaterniyonunun normu

$$N_q = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

dir (Ward 1997).

Tanım 2.3.6. $q = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ kuaterniyonu için $N_q = 1$ ise q ya birim kuaterniyon denir. Her q kuaterniyonu

$$q = N_q(\cos \theta + \sin \theta \mathbf{v})$$

şeklinde kutupsal biçimde yazabilir, burada $\cos \theta = a_0/N_q$, $\sin \theta = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}/N_q$ ve $\mathbf{v} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})/\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, \mathbb{R}^3 de birim vektördür (Ward 1997).

Tanım 2.3.7. $q = S_q + \mathbf{V}_q$ ve $p = S_p + \mathbf{V}_p$ kuaterniyonlarının, kuaterniyon çarpımı

$$q \times p = S_q S_p - \langle \mathbf{V}_q, \mathbf{V}_p \rangle + S_q \mathbf{V}_p + S_p \mathbf{V}_q + \mathbf{V}_q \wedge \mathbf{V}_p \quad (2.3.1)$$

eşitliğiyle verilir, burada $\langle \mathbf{V}_q, \mathbf{V}_p \rangle$ ve $\mathbf{V}_q \wedge \mathbf{V}_p$, sırasıyla \mathbf{V}_q ve \mathbf{V}_p arasındaki iç çarpımı ve vektörel çarpımı gösterir (Ward 1997).

Tanım 2.3.8. Kuaterniyonların $\mathbb{H} = \{q = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ cebiri, $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazı ile \mathbb{R} üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır. Baz elemanları arasında aşağıdaki özellikler vardır;

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -1 \text{ ve } \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$$

dir. Açıkça \mathbb{H} birleşmeli fakat değişmeli olmayan bir cebirdir ve \mathbb{H} nın birim elemanı 1 dir (Ata ve Yaylı 2007).

Tanım 2.3.6. Herhangi iki q ve p kuaterniyonları için $\overline{q \times p} = \overline{p} \times \overline{q}$ dir (Ward 1997).

Tanım 2.3.7. q kuaterniyonunun tersi, $I_q = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ olmak üzere

$$q^{-1} = \frac{1}{I_q} \overline{q}$$

ile verilir. Ayrıca $q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$ ve $(q \times p)^{-1} = p^{-1} \times q^{-1}$ dir (Ward 1997).

Tanım 2.3.8. $q = S_q + V_q$ kuaterniyonu için $S_q = 0$ ise q ya pür kuaterniyon denir (Ward 1997).

Tanım 2.3.9. Herhangi iki q ve p kuaterniyonları için iç çarpım

$$\langle q, p \rangle = \frac{(\bar{q} \times p + \bar{p} \times q)}{2}$$

şeklindedir. Eğer $q = p$ ise $I_q = \langle q, q \rangle = \bar{q} \times q$ olur (Toth 1998).

Tanım 2.3.10. Bir w pür kuaterniyonu üzerinde

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ w &\rightarrow \phi(w) = q \times w \times q^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ϕ dönüşümü lineerdir. Genelliği bozmadan $N_q = 1$ seçelim.

$\mathbb{R}^3 = \text{span}\{i, j, k\}$ olduğundan eğer $q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ise

$$\begin{aligned} \phi(i) &= (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)i + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)j + (2a_1 a_3 - 2a_0 a_2)k, \\ \phi(j) &= (-2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)i + (a_0^2 + a_2^2 - a_1^2 - a_3^2)j + (2a_0 a_1 + 2a_2 a_3)k, \\ \phi(k) &= (2a_0 a_2 + 2a_1 a_3)i + (2a_2 a_3 - 2a_0 a_1)j + (a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2)k \end{aligned}$$

dir. Böylece ϕ dönüşümünün matris gösterimi;

$$R_q = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & -2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 & 2a_0 a_2 + 2a_1 a_3 \\ 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 & a_0^2 + a_2^2 - a_1^2 - a_3^2 & 2a_2 a_3 - 2a_0 a_1 \\ 2a_1 a_3 - 2a_0 a_2 & 2a_0 a_1 + 2a_2 a_3 & a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

şeklindedir. R_q nin ortogonal olduğunu göstermek zor değildir; $R_q R_q^T = I$ ve $\det R_q = 1$ dir. Böylece $\phi(w) = q \times w \times q^{-1}$ lineer dönüşümü, \mathbb{R}^3 de bir dönme gösterir (Ward 1997).

Tanım 2.3.11. \mathbb{R}^3 de katı bir cismin bir parametrelili homotetik hareketi analitik olarak

$$\mathbf{x}' = h\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}$$

eşitliğiyle verilir, burada \mathbf{x}' ve \mathbf{x} konum vektörleridir ve sütun matrisleriyle gösterilir. A 3×3 -tipinde ortogonal matristir, C öteleme vektörüdür ve h hareketin homotetik skalasıdır. h, A ve C aynı zamanda bir $t \in \mathbb{R}$ parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır (Düldül 2010).

2.4 Split Kuaterniyonlar ve Yarı-Öklidiyen Uzaylar

Tanım 2.4.1. Bir split kuaterniyon

$$p = p_1 1 + p_2 \mathbf{i} + p_3 \mathbf{j} + p_4 \mathbf{k}$$

ile ifade edilir, burada $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ aşağıdaki değışmeli olmayan çarpım kuralını sağlayan split kuaterniyon birimleridir;

$$\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \text{ ve } \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

dir (Inoguchi 1998).

Tanım 2.4.2. Split kuaterniyonların cebiri \mathbb{H}' ve onun standard bazı $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dir. \mathbb{H}' nün bir elemanına split kuaterniyon denir (Inoguchi 1998).

Tanım 2.4.3. $p = p_1 1 + p_2 \mathbf{i} + p_3 \mathbf{j} + p_4 \mathbf{k}$ split kuaterniyonun eşleniğı, \bar{p} ile gösterilir ve

$$\bar{p} = p_1 1 - p_2 \mathbf{i} - p_3 \mathbf{j} - p_4 \mathbf{k}$$

şeklinde ifade edilir (Inoguchi 1998).

Tanım 2.4.4. p split kuaterniyonun, skaler ve vektörel kısmı, sırasıyla, $S_p = p_1$ ve $V_p = p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ ile gösterilir. $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ split kuaterniyonların split kuaterniyon çarpımı

$$p \times q = p_1q_1 + \langle V_p, V_q \rangle + p_1V_q + q_1V_p + V_p \wedge V_q \quad (2.4.1)$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$\langle V_p, V_q \rangle = -p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4$$

ve

$$V_p \wedge V_q = \begin{vmatrix} -\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix} = (p_4q_3 - p_3q_4)\mathbf{i} + (p_4q_2 - p_2q_4)\mathbf{j} + (p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{k}$$

dir. Eğer $S_p = 0$ ise p ye pür split kuaterniyon denir (Kula ve Yaylı 2007).

Tanım 2.4.5. \mathbb{R}^n , n -boyutlu Öklid uzayı

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\sum_{i=1}^v x_i y_i + \sum_{i=v+1}^n x_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq v \leq n$$

metrik tensörü ile yarı-Öklidiyen uzayı olarak isimlendirilir ve \mathbb{R}_v^n ile gösterilir, burada v , metriğin indeksidir. Eğer $v=0$ ise \mathbb{R}_v^n , \mathbb{R}^n n -boyutlu Öklid uzayına indirgenir. $n \geq 2$ için \mathbb{R}_1^n , Minkowski n -uzayı olarak isimlendirilir; eğer $n=4$ ise \mathbb{R}_1^4 , Minkowski space-time dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.6. \mathbb{R}_v^n , \langle, \rangle metrik tensörüyle donatılmış bir yarı-Öklidiyen uzay olsun. Bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_v^n$ vektörüne;

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ veya $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ise space-like vektör,

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ ise time-like vektör,

(iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ve $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ise light-like vektör ve $\sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$ reel sayısına da \mathbf{x} vektörünün normu denir. \mathbb{R}_v^n yarı-Öklidiyen uzayında, eğer $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ise \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerine ortogonaldır denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.7. \mathbb{R}_v^n yarı-Öklidiyen uzayında de Sitter n -uzay ve pseudo-hiperbolik uzay

$$\mathbb{S}_v^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_v^n \mid -\sum_{i=1}^v x_i^2 + \sum_{i=v+1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

ve

$$\mathbb{H}_{v-1}^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_v^n \mid -\sum_{i=1}^v x_i^2 + \sum_{i=v+1}^n x_i^2 = -1 \right\}$$

dir. Aynı zamanda $v=1$ ve $x_1 > 0$ için $\mathbb{H}^{n-1} = \mathbb{H}_0^{n-1}$, \mathbb{R}_1^n in pseudo-hiperbolik uzayıdır (Dursun 2010).

Tanım 2.4.8. $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ split kuaterniyona, $I_p = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2$ olmak üzere;

(i) $I_p < 0$ ise space-like split kuaterniyon,

(ii) $I_p > 0$ ise time-like split kuaterniyon,

(iii) $I_p = 0$ ise light-like split kuaterniyon

denir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.4.9. $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ split kuaterniyonun normu

$$N_p = \sqrt{|p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2|}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $N_p = 1$ ise p ye birim split kuaterniyon denir. $N_p \neq 0$ olmak üzere $p_0 = p/N_p$ birim split kuaterniyondur. Space-like ve time-like split kuaterniyonların, $p^{-1} = \bar{p}/I_p$ olacak şekilde bir tersi vardır, fakat light-like split kuaterniyonların tersi yoktur (Özdemir ve Ergin 2006).

Teorem 2.4.1. Her space-like vektör kısmı time-like split kuaterniyon

$$p = N_p (\cosh \theta + \mathbf{v} \sinh \theta) \quad (2.4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $\cosh \theta = p_1/N_p$, $\sinh \theta = \sqrt{-p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}/N_p$ ve $\mathbf{v} = (p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k})/\sqrt{-p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}$, \mathbb{R}_1^3 de birim space-like vektördür (Özdemir ve Ergin 2006, Kula ve Yaylı 2007).

Teorem 2.4.2. Her time-like vektör kısmı time-like split kuaterniyon

$$p = N_p (\cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta) \quad (2.4.3)$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $\cos \theta = p_1/N_p$, $\sin \theta = \sqrt{p_2^2 - p_3^2 - p_4^2}/N_p$ ve $\mathbf{v} = (p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k})/\sqrt{p_2^2 - p_3^2 - p_4^2}$, \mathbb{R}_1^3 de birim time-like vektördür (Özdemir ve Ergin 2006, Kula ve Yaylı 2007).

Tanım 2.4.10. Eğer $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ birim time-like split kuaterniyon ise \mathbf{V} , pür split kuaterniyon olmak üzere

$$(p \times \mathbf{V} \times p^{-1})_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \mathbf{V}_j$$

dönüşümü kullanılarak, bu dönüşüme karşılık gelen

$$R_p = \begin{bmatrix} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 & 2p_1p_4 - 2p_2p_3 & -2p_1p_3 - 2p_2p_4 \\ 2p_2p_3 + 2p_4p_1 & p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_4^2 & -2p_3p_4 - 2p_2p_1 \\ 2p_2p_4 - 2p_3p_1 & 2p_2p_1 - 2p_3p_4 & p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

matrisi bulunur. Bu matrisin bütün satırları Lorentz anlamında ortogonaldır. Bu matris, $\det(R_p) = 1$ şartıyla Minkowski 3-uzayında bir dönme gösterir. p birim time-like split kuaterniyonun vektör kısmının time-like veya space-like olması önemlidir. Eğer p nin vektör kısmı time-like veya space-like ise dönme açısı, sırasıyla, küresel veya hiperboliktir (Özdemir ve Ergin 2006).

3. \mathbb{R}^3 ÖKLİD 3-UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİNİN VE SABİT EĞİMLİ YÜZEYLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde, \mathbb{S}^2 Öklid 2-küresi üzerindeki birim hızlı eğriler için Sabban çatısı ve küresel evolüt kavramlarını verdik. \mathbb{S}^2 Öklid 2-küresi üzerindeki birim hızlı eğrilerden Bertrand eğrilerinin oluşturulabileceğini gösterdik. Bertrand eğrileriyle helisler arasındaki bir bağlantıyı verdik. Bertrand eğrilerinin Darboux göstergelerinin küresel evolütlere eşit olduğunu ispatladık. Ayrıca bir uzay eğrisinin teğetler, asli normaler, binormaler ve Darboux göstergeleri için sabit eğimli yüzeylerin parametrizasyonlarını bulduk ve bazı sonuçlar elde ettik. Sabit eğimli yüzeylerin v -parametre eğrilerine karşılık gelen Bertrand eğrilerini araştırdık.

$f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğri olsun. f nin yay-parametresini v ile gösterelim. $\mathbf{t}(v) = f'(v)$ olmak üzere $\mathbf{t}(v)$, f nin v noktasındaki teğettir. $\mathbf{s}(v) = f(v) \wedge \mathbf{t}(v)$ olsun, burada $f(v)$, eğrinin konum vektörüdür. Böylece f boyunca $\{f(v), \mathbf{t}(v), \mathbf{s}(v)\}$ ortonormal çatısı elde edilir. Bu çatıya f eğrisinin Sabban çatısı denir (Koenderink 1990). Buradan f nin küresel Frenet formülleri;

$$\begin{cases} f'(v) = \mathbf{t}(v) \\ \mathbf{t}'(v) = -f(v) + \kappa_g(v)\mathbf{s}(v) \\ \mathbf{s}'(v) = -\kappa_g(v)\mathbf{t}(v) \end{cases}$$

şeklindedir, burada $\kappa_g(v) = \det(f(v), \mathbf{t}(v), \mathbf{t}'(v))$ olmak üzere f nin jeodezik eğriliğidir.

Şimdi $\kappa_g(v) \neq 0$ olmak üzere herhangi bir $v_0 \in I$ için

$$e_f(v_0) = \frac{\kappa_g(v_0)f(v_0) + \mathbf{s}(v_0)}{\sqrt{\kappa_g^2(v_0) + 1}}$$

birim vektörünü düşünelim. Ayrıca $r_0 = \kappa_g(v_0) / \sqrt{\kappa_g^2(v_0) + 1}$ olmak üzere

$$S^1(e_f(v_0), r_0) = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \langle x, e_f(v_0) \rangle = r_0\}$$

çemberini alalım. Buradan

$$h_{e_f(v_0)} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}; h_{e_f(v_0)}(x) = \langle x, e_f(v_0) \rangle - r_0$$

yükseklik fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece

$$(h_{e_f} \circ f)(v_0) = \frac{d}{dv}(h_{e_f} \circ f)(v_0) = \frac{d^2}{dv^2}(h_{e_f} \circ f)(v_0) = 0$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda $S^1(e_f(v_0), r_0)$, f ye $f(v_0)$ noktasında 2. basamaktan değer. Böylece $S^1(e_f(v_0), r_0)$, f nin $f(v_0)$ noktasındaki eğrilik çemberidir. Ayrıca $e_f(v_0)$, f nin $f(v_0)$ noktasındaki eğrilik merkezidir. Sonuç olarak, f nin eğrilik merkezinin geometrik yeri veya f nin küresel evolütü

$$e_f(v) = \frac{\kappa_g(v)f(v) + s(v)}{\sqrt{\kappa_g^2(v) + 1}}$$

dir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Bertrand eğrilerinin karakterizasyonu, Izumiya ve Takeuchi (2002) makalelerinde verildi. Burada Bertrand eğrilerinin farklı bir karakterizasyonunu lemma olarak verelim.

Lemma 3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğri olsun. Bu durumda

$$\tilde{\gamma}(v) = a \int_0^v f(t) dt + a \tan \xi \int_0^v f(t) \wedge f'(t) dt \quad (3.1)$$

bir Bertrand eğrisidir, burada a ve $\xi = \xi(u) = \cot \theta \ln u$ sabit sayılardır. Ayrıca bütün Bertrand eğrileri bu methodla inşa edilebilir.

İspat. (\Rightarrow): Izumiya ve Takeuchi (2002)'deki metodu uygulayalım. $\tilde{\gamma}$ nın eğriliğini ve torsiyonunu hesaplayalım. (3.1) eşitliğinin v ye göre üç kez türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(v) &= a(f(v) + \tan \xi s(v)), \\
\tilde{\gamma}''(v) &= a(1 - \tan \xi \kappa_g(v))t(v), \\
\tilde{\gamma}'''(v) &= a(-1 + \tan \xi \kappa_g(v))f(v) - a \tan \xi \kappa_g'(v)t(v) + a(\kappa_g(v) - \tan \xi \kappa_g^2(v))s(v)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (2.1.2)'deki eğrilik ve torsiyon eşitlikleri kullanılarak, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\kappa(v) = \varepsilon \frac{\cos^2 \xi (1 - \tan \xi \kappa_g(v))}{a} \text{ ve } \tau(v) = \frac{\cos^2 \xi (\kappa_g(v) + \tan \xi)}{a} \quad (3.2)$$

bulunur. Buradan $a(\varepsilon \kappa(v) + \tan \xi \tau(v)) = 1$ olduğundan $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisidir.

(\Leftarrow): $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı A ve B reel sabitleri vardır. $A = a$ ve $B = a \tan \xi$ alalım. Ayrıca $a > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ ve $\varepsilon \cos \xi / a > 0$ olsun. Şimdi

$$f(s) = \varepsilon (\cos \xi T(s) - \sin \xi B(s))$$

küresel eğrisini tanımlayalım. Böylece

$$f'(s) = \varepsilon \cos \xi (\kappa(s) + \tan \xi \tau(s))N(s) = \frac{\varepsilon}{a} \cos \xi N(s)$$

bulunur. f nin yay-parametresi v olsun. Bu durumda $dv/ds = \varepsilon \cos \xi / a$ dir. Ayrıca

$$af(s) \frac{dv}{ds} = a\varepsilon (\cos \xi T(s) - \sin \xi B(s)) \frac{\varepsilon}{a} \cos \xi = \cos \xi (\cos \xi T(s) - \sin \xi B(s))$$

ve

$$\begin{aligned}
a \tan \xi f(s) \wedge \frac{df}{dv} \frac{dv}{ds} &= a \tan \xi \varepsilon (\cos \xi T(s) - \sin \xi B(s)) \wedge \frac{\varepsilon}{a} \cos \xi N(s) \\
&= \sin \xi (\cos \xi B(s) + \sin \xi T(s))
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
a \int_0^v f(t) dt + a \tan \xi \int_0^v f(t) \wedge f'(t) dt &= \int_{s_0}^s \cos \xi (\cos \xi T(t) - \sin \xi B(t)) dt \\
&+ \int_{s_0}^s \sin \xi (\cos \xi B(t) + \sin \xi T(t)) dt \\
&= \int_{s_0}^s T(t) dt = \tilde{\gamma}(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Bu lemmadan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin çember olması için gerek ve yeter şart f ye karşılık gelen $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Bertrand eğrisinin dairesel helis olmasıdır (Babaarslan vd. 2012).

İspat. (3.2) eşitliklerini kullanarak

$$\kappa'(v) = -\varepsilon \frac{\sin 2\xi \kappa'_g(v)}{2a} \text{ ve } \tau'(v) = \frac{\cos^2 \xi \kappa'_g(v)}{a}$$

elde edilir. $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin çember olması için gerek ve yeter şart $\kappa'_g(v) \equiv 0$ olmasıdır. Bu durum, $\kappa(v)$ ve $\tau(v)$ nin sabit olmasına denktir. Buradan $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Bertrand eğrisi bir dairesel helistir. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğri ve f ye karşılık gelen Bertrand eğrisi $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ nın Darboux göstergesi, f nin küresel evolütüne eşittir.

İspat. (3.2) eşitliklerinden

$$\kappa(v) = \varepsilon \frac{\cos^2 \xi (1 - \tan \xi \kappa_g(v))}{a} \text{ ve } \tau(v) = \frac{\cos^2 \xi (\kappa_g(v) + \tan \xi)}{a}$$

dir. Ayrıca hesaplanırsa

$$T(v) = a(f(v) + \tan \xi s(v)) \frac{dv}{ds} \text{ ve } N(v) = \varepsilon t(v)$$

olarak bulunur. Böylece

$$B(v) = T(v) \wedge N(v) = \varepsilon a \frac{dv}{ds} (s(v) - \tan \xi f(v))$$

dir. Buradan

$$D(v) = \tau(v)T(v) + \kappa(v)B(v) = \frac{dv}{ds} (\kappa_g(v)f(v) + s(v))$$

olur. Sonuç olarak $C(v) = D(v)/\|D(v)\| = e_f(v)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğri ve $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, f ye karşılık gelen Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}'$ eğrisi, $x(u, v)$ sabit eğimli yüzeyi üzerinde yatar.

İspat. (3.1) eşitliğinin v ye göre türevi alınır

$$\tilde{\gamma}'(v) = af'(v) + a \tan \xi f(v) \wedge f'(v)$$

bulunur. Bu eşitlikte $a = u \sin \theta \cos \xi$ ve bu durumda $a \tan \xi = u \sin \theta \sin \xi$ alınabilir, burada u ve θ sabitlerdir. Böylece (1.1) eşitliğinden $\tilde{\gamma}'$, $x(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisidir ve bu yüzey üzerinde yatar. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2. $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, S sabit eğimli yüzeyinin \mathbb{R}^3 Öklid 3-uzayına izometrik immersiyonu ve $x(v)$, $x(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi olsun. Bu durumda $\int_0^v x(v)dv$ bir Bertrand eğrisidir.

İspat. (1.1) eşitliğinde u =sabit alınarak

$$x(v) = u \sin \theta \cos \xi f(v) + u \sin \theta \sin \xi f(v) \wedge f'(v)$$

bulunur. Eğer $x(v)$ eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_0^v x(v)dv = u \sin \theta \cos \xi \int_0^v f(v)dv + u \sin \theta \sin \xi \int_0^v f(v) \wedge f'(v)dv$$

elde edilir. $f(v)$ ve $f(v) \wedge f'(v)$ nin katsayıları sabit olduğundan $u \sin \theta \cos \xi = a$ ve bu durumda $u \sin \theta \sin \xi = a \tan \xi$ alınabilir. Buradan

$$\int_0^v x(v)dv = a \int_0^v f(v)dv + a \tan \xi \int_0^v f(v) \wedge f'(v)dv$$

bulunur. Böylece Lemma 3.1'den, $\int_0^v x(v)dv$ bir Bertrand eğrisidir.

Şimdi bir uzay eğrisinin, teğetler, asli normaller, binormaller ve Darboux göstergeleri için aşağıdaki sonuçları verelim.

Önerme 3.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, s yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir uzay eğrisi ve $T: I \rightarrow \mathbb{S}^2$, α uzay eğrisinin teğetler göstergesi olsun. Bu durumda sabit eğimli yüzey

$$x_T(u, v) = u \sin \theta \cos \xi T(v) + u \sin \theta \sin \xi B(v)$$

şeklinde parametrize edilebilir, burada $v = \int_0^s \|T'(s)\| ds$ dir.

İspat. (1.1) eşitliğinden sabit eğimli yüzey

$$x(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi f(v) + \sin \xi f(v) \wedge f'(v))$$

dir. $T: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ küresel eğri olduğundan, $f(v) = T(v)$ alınabilir. Böylece

$$x_T(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi T(v) + \sin \xi T(v) \wedge T'(v))$$

bulunur. Frenet çatısı ve Frenet formülleri kullanılarak bu eşitlik

$$x_T(u, v) = u \sin \theta \cos \xi T(v) + u \sin \theta \sin \xi B(v)$$

olur.

Önerme 3.2'nin aşağıdaki sonuçlarını verebiliriz.

Sonuç 3.2. $x_T(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_T(v)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$\langle x_T(v), T(v) \rangle = \text{sabit}, \langle x_T(v), B(v) \rangle = \text{sabit ve } \langle x_T(v), N(v) \rangle = 0$$

dir.

Sonuç 3.3. $x_T(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_T(v)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^v x_T(v) dv = u \sin \theta \cos \xi \int_0^v T(v) dv + u \sin \theta \sin \xi \int_0^v B(v) dv$$

bir Bertrand eğrisidir.

Sonuç 3.4. $T: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin çember olması için gerek ve yeter şart T ye karşılık gelen $\int_0^v x_T(v) dv$ Bertrand eğrisinin dairesel helis olmasıdır.

Önerme 3.3. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, s yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir uzay eğrisi ve $N: I \rightarrow \mathbb{S}^2$, α uzay eğrisinin asli normaller göstergesi olsun. Bu durumda sabit eğimli yüzey

$$x_N(u, v) = u \sin \theta \cos \xi N(v) + u \sin \theta \sin \xi C(v)$$

şeklinde parametrize edilebilir, burada $v = \int_0^s \|N'(s)\| ds$ dir.

İspat. (1.1) eşitliğinden sabit eğimli yüzey

$$x(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi f(v) + \sin \xi f(v) \wedge f'(v))$$

dir. $N : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ küresel eğri olduğundan $f(v) = N(v)$ alınabilir. Böylece

$$x_N(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi N(v) + \sin \xi N(v) \wedge N'(v))$$

dir. $N(v) \wedge N'(v) = C(v)$ olduğundan

$$x_N(u, v) = u \sin \theta \cos \xi N(v) + u \sin \theta \sin \xi C(v)$$

elde edilir.

Önerme 3.3'ün aşağıdaki sonuçlarını verebiliriz.

Sonuç 3.5. $x_N(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_N(v)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$\langle x_N(v), N(v) \rangle = \text{sabit ve } \langle x_N(v), C(v) \rangle = \text{sabit}$$

dir.

Sonuç 3.6. $x_N(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_N(v)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^v x_N(v) dv = u \sin \theta \cos \xi \int_0^v N(v) dv + u \sin \theta \sin \xi \int_0^v C(v) dv$$

bir Bertrand eğrisidir.

Sonuç 3.7. $N : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin çember olması için gerek ve yeter şart N ye karşılık gelen $\int_0^v x_N(v) dv$ Bertrand eğrisinin dairesel helis olmasıdır.

Önerme 3.4. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, s yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir uzay eğrisi ve $B: I \rightarrow \mathbb{S}^2$, α uzay eğrisinin binormaller göstergesi olsun. Bu durumda sabit eğimli yüzey

$$x_B(u, v) = u \sin \theta \cos \xi B(v) + u \sin \theta \sin \xi T(v)$$

şeklinde parametrize edilebilir, burada $v = \int_0^s \|B'(s)\| ds$ dir.

İspat. (1.1) eşitliğinden sabit eğimli yüzey

$$x(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi f(v) + \sin \xi f(v) \wedge f'(v))$$

dir. $B: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ küresel eğri olduğundan $f(v) = B(v)$ alınabilir. Böylece

$$x_B(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi B(v) + \sin \xi B(v) \wedge B'(v))$$

dir. Frenet çatısını ve Frenet formüllerini kullanarak

$$x_B(u, v) = u \sin \theta \cos \xi B(v) + u \sin \theta \sin \xi T(v)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.4'ün aşağıdaki sonuçlarını verebiliriz.

Sonuç 3.8. $x_B(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_B(v)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$\langle x_B(v), T(v) \rangle = \text{sabit}, \langle x_B(v), B(v) \rangle = \text{sabit ve } \langle x_B(v), N(v) \rangle = 0$$

dir.

Sonuç 3.9. $x_B(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_B(v)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^v x_B(v) dv = u \sin \theta \cos \xi \int_0^v B(v) dv + u \sin \theta \sin \xi \int_0^v T(v) dv$$

bir Bertrand eğrisidir.

Sonuç 3.10. $B: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin çember olması için gerek ve yeter şart B ye karşılık gelen $\int_0^v x_B(v)dv$ Bertrand eğrisinin dairesel helis olmasıdır.

Önerme 3.5. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, s yay-parametresiyle parametrelendirilmiş bir uzay eğrisi ve $C: I \rightarrow \mathbb{S}^2$, α uzay eğrisinin Darboux göstergesi olsun. Bu durumda sabit eğimli yüzey

$$x_C(u, v) = u \sin \theta \cos \xi C(v) + u \sin \theta \sin \xi N(v)$$

şeklinde parametrize edilebilir, burada $v = \int_0^s \|C'(s)\| ds$ dir.

İspat. (1.1) eşitliğinden sabit eğimli yüzey

$$x(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi f(v) + \sin \xi f(v) \wedge f'(v))$$

dir. $C: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ küresel eğri olduğundan $f(v) = C(v)$ alınabilir. Böylece

$$x_C(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi C(v) + \sin \xi C(v) \wedge C'(v)) \quad (3.4)$$

dir. $C = (\tau T + \kappa B) / \sqrt{\tau^2 + \kappa^2}$ olmak üzere $C' = (\kappa T - \tau B) / \sqrt{\tau^2 + \kappa^2}$ bulunur. Buradan

$C \wedge C' = N$ dir. Bu eşitlik (3.4)'de yerine yazılırsa

$$x_C(u, v) = u \sin \theta \cos \xi C(v) + u \sin \theta \sin \xi N(v)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.11. $x_C(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_C(v)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$\langle x_C(v), N(v) \rangle = \text{sabit ve } \langle x_C(v), C(v) \rangle = \text{sabit}$$

dir.

Sonuç 3.12. $x_C(u, v)$ sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi $x_C(v)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^v x_C(v)dv = u \sin \theta \cos \xi \int_0^v C(v)dv + u \sin \theta \sin \xi \int_0^v N(v)dv$$

bir Bertrand eğrisidir.

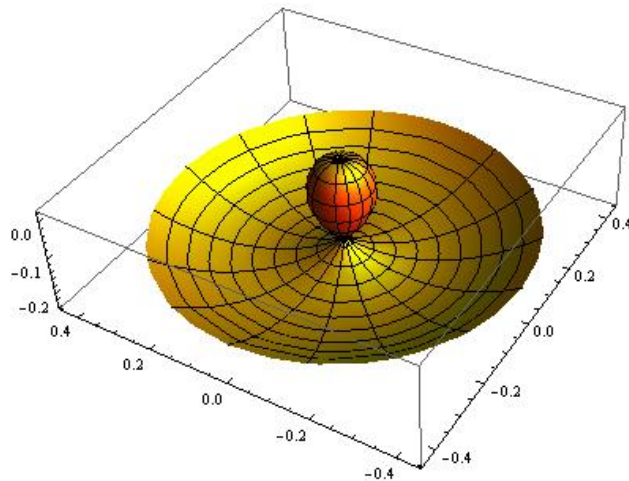
Sonuç 3.13. $C: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin çember olması için gerek ve yeter şart C ye karşılık gelen $\int_0^v x_C(v)dv$ Bertrand eğrisinin dairesel helis olmasıdır.

Şimdi Mathematica programını kullanarak sabit eğimli yüzeylere ve Bertrand eğrilerine bir örnek verelim.

Örnek 3.1. \mathbb{S}^2 üzerindeki $f(v) = (\cos v, \sin v, 0)$ birim hızlı eğrisini düşünelim. Böylece $f(v) \wedge f'(v) = (0, 0, 1)$ bulunur. $\theta = \pi/5$ için sabit eğimli yüzey;

$$x(u, v) = u \sin \frac{\pi}{5} \left(\cos \left(\cot \frac{\pi}{5} \ln u \right) f(v) + \sin \left(\cot \frac{\pi}{5} \ln u \right) f(v) \wedge f'(v) \right)$$

şeklindedir.

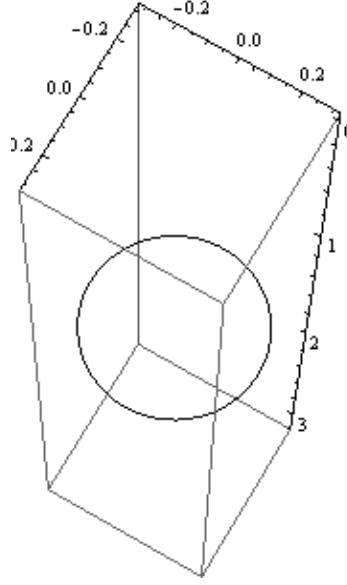


Şekil 3.1 Sabit eğimli yüzey $x(u, v)$

Eğer $u = e$ alınırsa yüzeyin v -parametre eğrisi;

$$x(v) = e \sin \frac{\pi}{5} \left(\cos \left(\cot \frac{\pi}{5} \right) f(v) + \sin \left(\cot \frac{\pi}{5} \right) f(v) \wedge f'(v) \right)$$

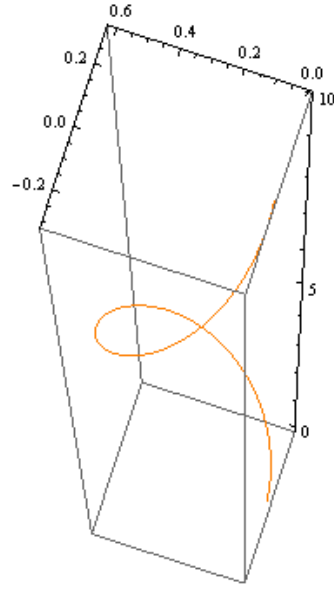
olur.



Şekil 3.2 v -parametre eğrisi $x(v)$

Böylece Teorem 3.2'yi kullanarak aşağıdaki Bertrand eğrisi elde edilir;

$$\int_0^v x(v) dv = e \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \cos \left(\cot \frac{\pi}{5} \right) \int_0^v (\cos v, \sin v, 0) dv + e \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \sin \left(\cot \frac{\pi}{5} \right) \int_0^v (0, 0, 1) dv.$$



Şekil 3.3 Bertrand eğrisi $\int_0^v x(v)dv$

f eğrisi çember olduğundan Sonuç 3.1'den, $\int_0^v x(v)dv$ Bertrand eğrisi bir dairesel helistir.

4. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACE-LIKE BERTRAND EĞRİLERİ VE SPACE-LIKE KONİ ÜZERİNDE YATAN SPACE-LIKE SABİT EĞİMLİ YÜZEYLER

Bu bölümde, \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayındaki birim hızlı space-like eğriler için Lorentz anlamında Sabban çatısını ve de Sitter evolüt kavramlarını tanımladık ve bu eğrilerin invaryantlarını araştırdık. Daha sonra space-like Bertrand eğrilerinin, \mathbb{S}_1^2 deki birim hızlı space-like eğrilerden elde edilebileceğini gösterdik. Ayrıca space-like Bertrand eğrileriyle helisler arasındaki bir bağlantıyı verdik. Bertrand eğrilerinin de Sitter Darboux göstergelerinin, de Sitter evolütlere eşit olduklarını ispatladık. \mathbb{R}_1^3 de space-like Bertrand eğrileriyle space-like koni üzerinde space-like sabit eğimli yüzeylerin bağlantılarını verdik.

$f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğri olsun. f nin yay-parametresini v ile gösterelim. $\mathbf{t}(v) = f'(v)$ olsun. $\mathbf{t}(v)$, f nin v noktasındaki teğettir. $\mathbf{s}(v) = f(v) \wedge \mathbf{t}(v)$ olsun. Bu eşitliğin bir sonucu olarak $\mathbf{s}(v) \wedge \mathbf{t}(v) = f(v)$ dir, burada f , eğrinin konum vektörüdür. Böylece f boyunca $\{f(v), \mathbf{t}(v), \mathbf{s}(v)\}$ Lorentz anlamında Sabban çatısı elde edilir. Sonuç olarak f nin küresel Frenet formülleri;

$$\begin{cases} f'(v) = \mathbf{t}(v) \\ \mathbf{t}'(v) = -f(v) - \kappa_g(v)\mathbf{s}(v) \\ \mathbf{s}'(v) = -\kappa_g(v)\mathbf{t}(v) \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklindedir, burada $\kappa_g(v) = \det(f(v), \mathbf{t}(v), \mathbf{t}'(v))$ olmak üzere f nin jeodezik eğriliğidir.

\mathbb{S}_1^2 de, $\kappa_g^2(v) > 1$ olmak üzere

$$d_f(v) = \frac{-\kappa_g(v)f(v) - \mathbf{s}(v)}{\sqrt{\kappa_g^2(v) - 1}}$$

eğrisini tanımlayalım. d_f ifadesine, f nin de Sitter evolütü denir.

4.1 \mathbb{S}_1^2 De Sitter 2-Uzayındaki Birim Hızlı Space-like Eğrilerin Space-like Yükseklik Fonksiyonları

$f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğrisi için

$$H^S : I \times \mathbb{S}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}; H^S(v, u) = \langle f(v), u \rangle$$

fonksiyonunu tanımlayalım. H^S ye, f nin space-like yükseklik fonksiyonu denir.

$H^S(v, u) = (h_u^S)(v)$ olarak gösterelim.

Böylece aşağıdaki önerme vardır.

Önerme 4.1.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğri olsun. Her $(v, u) \in I \times \mathbb{S}_1^2$ için;

(a) $(h_u^S)'(v) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $u \in \text{span}\{f(v), s(v)\}$ olmasıdır,

(b) $(h_u^S)'(v) = (h_u^S)''(v) = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$u = \pm \frac{\kappa_g(v)f(v) + s(v)}{\sqrt{\kappa_g^2(v) - 1}} \text{ ve } \kappa_g^2(v) > 1$$

olmasıdır.

İspat. (4.1)'deki küresel Frenet formülleri kullanılarak

(i) $(h_u^S)'(v) = \langle t(v), u \rangle$,

(ii) $(h_u^S)''(v) = \langle -f(v) - \kappa_g(v)s(v), u \rangle$

eşitlikleri elde edilir.

(i) eşitliği kullanılarak (a) kolayca elde edilir. (a) eşitliğinden $u = \lambda f(v) + \mu s(v)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. (ii) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
0 &= \langle -f(v) - \kappa_g(v)s(v), \lambda f(v) + \mu s(v) \rangle \\
&= -\lambda \langle f(v), f(v) \rangle - \mu \kappa_g(v) \langle s(v), s(v) \rangle \\
&= -\lambda + \mu \kappa_g(v)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $u = \mu(\kappa_g(v)f(v) + s(v))$ dir. $\langle u, u \rangle = 1$ olduğundan

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(v) - 1}}$$

dir. Buradan

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(v) - 1}} (\kappa_g(v)f(v) + s(v))$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.2 \mathbb{S}_1^2 De Sitter 2-Uzayındaki Birim Hızlı Space-like Eğrilerin İnvaryantları

Bu bölümde, Izumiya vd. (2004)'deki benzer metodları kullanarak \mathbb{S}_1^2 deki birim hızlı space-like eğrilerin de Sitter evölütlerinin geometrik özelliklerini araştırdık.

Herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ ve $u_0 \in \mathbb{S}_1^2$ için $PS^1(u_0, r) = \{u \in \mathbb{S}_1^2 \mid \langle u, u_0 \rangle = r\}$ olsun. $PS^1(u_0, r)$ ifadesine, merkezi u_0 olan \mathbb{S}_1^2 de bir pseudo-çember denir.

Şimdi aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 4.2.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğri olsun. $\kappa_g'(v) \equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart $u_0 = \pm (\kappa_g(v)f(v) + s(v)) / \sqrt{\kappa_g^2(v) - 1}$ vektörlerinin sabit olmasıdır. Bu koşul altında f , merkezi u_0 olan \mathbb{S}_1^2 de bir pseudo-çember parçasıdır.

İspat.

$$P_{\pm}(v) = \pm u_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(v)-1}} (\kappa_g(v)f(v) + s(v))$$

olsun. Bu eşitliğin v ye göre türevi alınırsa

$$P'_{\pm}(v) = \mp \kappa'_g(v) \frac{(f(v) + \kappa_g(v)s(v))}{(\kappa_g^2(v)-1)^{3/2}}$$

bulunur. Böylece $P'_{\pm}(v) \equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart $\kappa'_g(v) \equiv 0$ olmasıdır. Bu

koşul altında, $r = \pm \kappa_g(v) / \sqrt{\kappa_g^2(v)-1}$ ve $u_0 = \pm (\kappa_g(v)f(v) + s(v)) / \sqrt{\kappa_g^2(v)-1}$ alalım.

Böylece $f(v)$, $PS^1(u_0, r)$ pseudo-çemberinin bir parçasıdır.

$f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğri olsun. Herhangi bir $v_0 \in I$ için $u_0 = d_f(v_0)$ ve

$r_0 = \kappa_g(v_0) / \sqrt{\kappa_g^2(v_0)-1}$ olmak üzere $PS^1(u_0, r_0^{\pm})$ pseudo-çemberini düşünelim.

Buradan aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.2.2. Yukarıdaki gösterimler altında $PS^1(u_0, r_0)$ pseudo-çemberi, f ye $f(v_0)$ noktasında 2.basamaktan değer.

İspat. Önerme 4.1.1'deki (b) eşitliğinden $PS^1(u_0, r_0) \subset \mathbb{S}_1^2$ pseudo-çemberi, f ye $f(v_0)$ noktasında 2.basamaktan değer. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.2'deki $PS^1(u_0, r_0)$ ifadesine, jeodezik eğrilik pseudo-çemberi ve onun merkezi olan u_0 ifadesine de, jeodezik eğrilik merkezi denir. Böylece de Sitter evölüt, jeodezik eğrilik merkezinin geometrik yeridir.

4.3 Space-like Bertrand Eğrileri ve Space-like Koni Üzerinde Yatan Space-like Sabit Eğimli Yüzeyler

Lemma 4.3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğri olsun. Bu durumda

$$\tilde{\gamma}(v) = a \int_0^v f(t) dt + a \tanh \xi_1 \int_0^v f(t) \wedge f'(t) dt \quad (4.3.1)$$

bir space-like Bertrand eğrisidir, burada a ve $\xi_1 = \xi_1(u) = \tanh \theta \ln u$ sabitler ve θ , sıfırdan farklı sabittir. Ayrıca, bütün space-like Bertrand eğrileri bu metodla inşa edilebilir.

İspat. (\Rightarrow): $\tilde{\gamma}$ nın eğriliğini ve torsiyonunu hesaplayalım. (4.3.1) eşitliğinin v ye göre üç kez türevini alırsak

$$\tilde{\gamma}'(v) = a(f(v) + \tanh \xi_1 s(v)),$$

$$\tilde{\gamma}''(v) = a(1 - \tanh \xi_1 \kappa_g(v)) t(v),$$

$$\tilde{\gamma}'''(v) = -a(1 - \tanh \xi_1 \kappa_g(v)) f(v) - a \tanh \xi_1 \kappa_g'(v) t(v) - a(\kappa_g(v) - \tanh \xi_1 \kappa_g^2(v)) s(v)$$

eşitliklerini buluruz. Böylece (2.2.5) eşitliklerinden, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere $\kappa(v)$ ve $\tau(v)$ aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\kappa(v) = \varepsilon \frac{\cosh^2 \xi_1 (1 - \tanh \xi_1 \kappa_g(v))}{a} \text{ ve } \tau(v) = \frac{\cosh^2 \xi_1 (\kappa_g(v) - \tanh \xi_1)}{a} \quad (4.3.2)$$

dir. Buradan $a(\varepsilon \kappa(v) + \tanh \xi_1 \tau(v)) = 1$ eşitliği sağlanır. Böylece $\tilde{\gamma}$ bir space-like Bertrand eğrisidir.

(\Leftarrow): $\tilde{\gamma}$ space-like Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda, tanımdan $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı A , B reel sabitleri vardır. Bu eşitlikte $A = a$ ve $B = a \tanh \xi_1$ alalım. $a > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ ve $\varepsilon \cosh \xi_1 / a > 0$ olsun. $\tilde{\gamma}$ space-like eğrisinin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısını düşünelim. Bu üçlüde $T(s)$, $N(s)$ space-like vektörler ve $B(s)$ ise time-like vektördür. Böylece $T(s) \wedge N(s) = -B(s)$ ve $B(s) \wedge N(s) = -T(s)$ olur. Şimdi \mathbb{S}_1^2 üzerinde

$$f(s) = \varepsilon (\cosh \xi_1 \mathbf{T}(s) + \sinh \xi_1 \mathbf{B}(s))$$

space-like eğrisini düşünelim. Buradan

$$f'(s) = \varepsilon \cosh \xi_1 (\kappa(s) + \tanh \xi_1 \tau(s)) \mathbf{N}(s) = \frac{\varepsilon}{a} \cosh \xi_1 \mathbf{N}(s)$$

dir. f nin yay-parametresi v olsun. Böylece $dv/ds = \varepsilon \cosh \xi_1 / a$ dir. Ayrıca

$$af(s) \frac{dv}{ds} = \cosh \xi_1 (\cosh \xi_1 \mathbf{T}(s) + \sinh \xi_1 \mathbf{B}(s))$$

ve

$$\begin{aligned} a \tanh \xi_1 f(s) \wedge \frac{df}{dv} \frac{dv}{ds} &= a \tanh \xi_1 \varepsilon (\cosh \xi_1 \mathbf{T}(s) + \sinh \xi_1 \mathbf{B}(s)) \wedge \frac{\varepsilon}{a} \cosh \xi_1 \mathbf{N}(s) \\ &= \sinh \xi_1 (-\cosh \xi_1 \mathbf{B}(s) - \sinh \xi_1 \mathbf{T}(s)) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} a \int_0^v f(t) dt + a \tanh \xi_1 \int_0^v f(t) \wedge f'(t) dt &= \int_{s_0}^s \cosh \xi_1 (\cosh \xi_1 \mathbf{T}(t) + \sinh \xi_1 \mathbf{B}(t)) dt \\ &\quad + \int_{s_0}^s \sinh \xi_1 (-\cosh \xi_1 \mathbf{B}(t) - \sinh \xi_1 \mathbf{T}(t)) dt \\ &= \int_{s_0}^s \mathbf{T}(t) dt = \tilde{\gamma}(s) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Bu lemmanın bir sonucu olarak space-like Bertrand eğrileri ve helisler arasındaki aşağıdaki bağlantıyı verebiliriz.

Sonuç 4.3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğrisinin bir pseudo-çember parçası olması için gerek ve yeter şart f ye karşılık gelen $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ space-like Bertrand eğrisinin helis olmasıdır.

İspat. (4.3.2) eşitliklerini kullanarak

$$\kappa'(v) = -\varepsilon \frac{\sinh 2\xi_1 \kappa'_g(v)}{2a} \text{ ve } \tau'(v) = \frac{\cosh^2 \xi_1 \kappa'_g(v)}{a}$$

elde edilir. Önerme 4.2.1'den, $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğrisinin bir pseudo-çember parçası olması için gerek ve yeter şart $\kappa'_g(v) \equiv 0$ olmasıdır. Bu durum, $\kappa(v)$ ve $\tau(v)$ nin sabit olmasına denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 4.3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğri ve f ye karşılık gelen space-like Bertrand eğrisi $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ nin de Sitter Darboux göstergesi, f nin de Sitter evolütüne eşittir.

İspat. (4.3.2) eşitliklerinden

$$\kappa(v) = \varepsilon \frac{\cosh^2 \xi_1 (1 - \tanh \xi_1 \kappa_g(v))}{a} \text{ ve } \tau(v) = \frac{\cosh^2 \xi_1 (\kappa_g(v) - \tanh \xi_1)}{a}$$

dir. $\tilde{\gamma}$ space-like eğrisi için

$$\mathbf{T}(v) = a(f(v) + \tanh \xi_1 s(v)) \frac{dv}{ds} \text{ ve } \mathbf{N}(v) = \varepsilon \mathbf{t}(v)$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathbf{B}(v) = \mathbf{N}(v) \wedge \mathbf{T}(v) = -\varepsilon a \frac{dv}{ds} (s(v) + \tanh \xi_1 f(v))$$

dir. Böylece

$$\mathbf{D}(v) = -\tau(v)\mathbf{T}(v) + \kappa(v)\mathbf{B}(v) = \frac{dv}{ds} (-\kappa_g(v)f(v) - s(v))$$

olur. Sonuç olarak $C(v) = \mathbf{D}(v)/\|\mathbf{D}(v)\| = d_f(v)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 4.3.1. $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ birim hızlı space-like eğri ve f ye karşılık gelen space-like Bertrand eğrisi $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}'$ eğrisi, space-like koni üzerinde yatan $x(u, v)$ space-like sabit eğimli yüzey üzerinde yatar.

İspat. (4.3.1) eşitliğinin, v ye göre türevi alınırsa

$$\tilde{\gamma}'(v) = af(v) + a \tanh \xi_1 f(v) \wedge f'(v)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $a = u \cosh \theta \cosh \xi_1$ ve böylece $a \tanh \xi_1 = u \cosh \theta \sinh \xi_1$ alınabilir, burada u ve θ sabitlerdir. (1.2) eşitliğinden $\tilde{\gamma}'$, space-like koni üzerinde yatan $x(u, v)$ space-like sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisidir ve böylece bu yüzey üzerinde yatar. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.2. $x : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, S space-like sabit eğimli yüzeyinin \mathbb{R}_1^3 Minkowski 3-uzayına immersiyonu olsun ve x , space-like koni üzerinde yatsın. Eğer $x(v)$, space-like koni üzerinde yatan $x(u, v)$ space-like sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi ise $\int_0^v x(v)dv$ space-like Bertrand eğrisidir.

İspat. (1.2) eşitliğinde, $u = \text{sabit}$ alınarak,

$$x(v) = u \cosh \theta \cosh \xi_1 f(v) + u \cosh \theta \sinh \xi_1 f(v) \wedge f'(v)$$

elde edilir, burada $\xi_1 = \xi_1(u) = \tanh \theta \ln u$ dir. $x(v)$ nin integrali alınarak

$$\int_0^v x(v)dv = u \cosh \theta \cosh \xi_1 \int_0^v f(v)dv + u \cosh \theta \sinh \xi_1 \int_0^v f(v) \wedge f'(v)dv \quad (4.3.3)$$

bulunur. $f(v)$ ve $f(v) \wedge f'(v)$ nin katsayıları sabit olduğundan $u \cosh \theta \cosh \xi_1 = a$ ve böylece $u \cosh \theta \sinh \xi_1 = a \tanh \xi_1$ alınabilir. Buradan (4.3.3) eşitliği

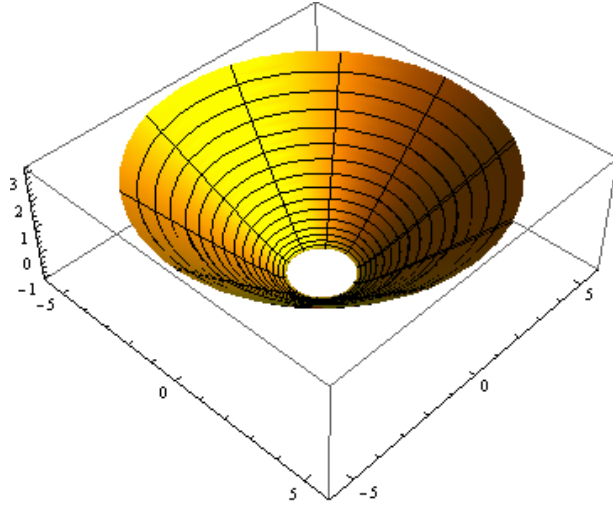
$$\int_0^v x(v)dv = a \int_0^v f(v)dv + a \tanh \xi_1 \int_0^v f(v) \wedge f'(v)dv$$

olur. Lemma 4.3.1'den, $\int_0^v x(v)dv$ space-like Bertrand eğrisidir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.3.1. (1.2) eşitliğini düşünerek, \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayında birim hızlı space-like eğri olarak $f(v) = (\sin v, \cos v, 0)$ yi alalım. Böylece $f(v) \wedge f'(v) = (0, 0, 1)$ dir. Buradan space-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey

$$x(u, v) = u \cosh \theta (\cosh(\tanh \theta \ln u) \sin v, \cosh(\tanh \theta \ln u) \cos v, \sinh(\tanh \theta \ln u))$$

şeklindedir. $\theta = 1.5$ için yüzeyin resmi, şekil 4.1'deki gibidir;

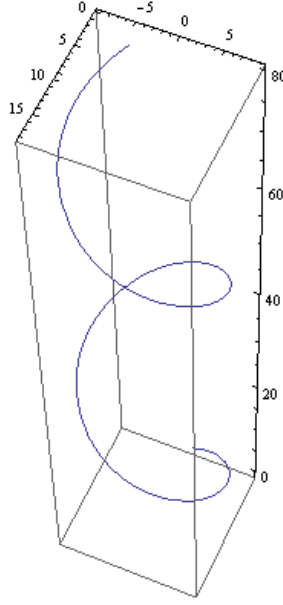


Şekil 4.1 Space-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey, $f(v) = (\sin v, \cos v, 0)$, $\theta = 1.5$

$u = e$ alarak,

$$\int_0^v x(v)dv = e \cosh(1.5) (-\cosh(\tanh(1.5))(\cos v - 1), \cosh(\tanh(1.5)) \sin v, \sinh(\tanh(1.5))v)$$

space-like Bertrand eğrisi elde edilir. f space-like eğrisi, \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayında bir pseudo-çember olduğundan Sonuç 4.3.1'den, bu space-like Bertrand eğrisi bir helistir. Böylece eğrinin resmi şekil 4.2'deki gibidir;



Şekil 4.2 Space-like Bertrand eğrisi, $\theta = 1.5$, $u = e$

5. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA TIME-LIKE BERTRAND EĞRİLERİ VE TIME-LIKE KONİ ÜZERİNDE YATAN SPACE-LIKE SABİT EĞİMLİ YÜZEYLER

Bu bölümde, 4. Bölüme benzer olarak \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayındaki birim hızlı space-like eğriler için Lorentz anlamında Sabban çatısı, hiperbolik evolüt ve pseudo-çember kavramlarını verdik. Daha sonra \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayındaki birim hızlı space-like eğrilerden time-like Bertrand eğrilerinin oluşturulabileceğini ispatladık. Ayrıca time-like Bertrand eğrileri, helisler, hiperbolik Darboux göstergeler, hiperbolik evolütler ve time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzeyler arasındaki bağlantıları araştırdık.

$g : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ birim hızlı space-like eğri olsun. g nin yay-parametresini v ile gösterelim. $\mathbf{t}(v) = g'(v)$ olsun. $\mathbf{t}(v)$, g nin v noktasındaki teğettir. $\mathbf{s}(v) = g(v) \wedge \mathbf{t}(v)$ olsun. Bu eşitliğin bir sonucu olarak $\mathbf{s}(v) \wedge \mathbf{t}(v) = g(v)$ dir, burada g , eğrinin konum vektörüdür. Böylece g boyunca $\{g(v), \mathbf{t}(v), \mathbf{s}(v)\}$ Lorentz anlamında Sabban çatısı elde edilir. Sonuç olarak g nin hiperbolik Frenet formülleri;

$$\begin{cases} g'(v) = \mathbf{t}(v) \\ \mathbf{t}'(v) = g(v) + \kappa_g(v)\mathbf{s}(v) \\ \mathbf{s}'(v) = -\kappa_g(v)\mathbf{t}(v) \end{cases}$$

şeklindedir, burada $\kappa_g(v) = \det(g(v), \mathbf{t}(v), \mathbf{t}'(v))$ olmak üzere g nin jeodezik eğriliğidir (Izumiya vd. 2004).

\mathbb{H}^2 de, $\kappa_g^2(v) > 1$ olmak üzere

$$h_g(v) = \frac{\kappa_g(v)g(v) + \mathbf{s}(v)}{\sqrt{\kappa_g^2(v) - 1}}$$

eğrisini tanımlayalım. h_g ye, g nin hiperbolik evolütü denir (Izumiya vd. 2004).

Herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ ve $u_0 \in \mathbb{H}^2$ için $PS^1(u_0, r) = \{u \in \mathbb{H}^2 \mid \langle u, u_0 \rangle = r\}$ olsun. $PS^1(u_0, r)$ ifadesine, merkezi u_0 olan \mathbb{H}^2 de bir pseudo-çember denir (Izumiya vd. 2004).

$g : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ birim hızlı space-like eğrisi ve herhangi bir $v_0 \in I$ için $u_0 = h_g(v_0)$ ve $r_0 = -\kappa_g(v_0) / \sqrt{1 - \kappa_g^2(v_0)}$ olmak üzere $PS^1(u_0, r_0^\pm)$ pseudo-çemberini düşünelim. 4. Bölümdeki gibi $PS^1(u_0, r_0)$ ifadesine, jeodezik eğrilik pseudo-çemberi ve onun merkezi olan u_0 ifadesine de, jeodezik eğrilik merkezinin geometrik yeri denir. Böylece hiperbolik evölüt, jeodezik eğrilik merkezinin geometrik yeridir (Izumiya vd. 2004).

Şimdi aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.1. $g : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ birim hızlı space-like eğri olsun. Bu durumda

$$\tilde{\gamma}(v) = a \int_0^v g(t) dt + a \tanh \xi_2 \int_0^v g(t) \wedge g'(t) dt \quad (5.1)$$

bir time-like Bertrand eğrisidir, burada a ve $\xi_2 = \xi_2(u) = \coth \theta \ln u$ sabitler ve θ sıfırdan farklı sabittir. Ayrıca, bütün time-like Bertrand eğrileri bu methodla inşa edilebilir.

İspat. (\Rightarrow): $\tilde{\gamma}$ nin eğriliğini ve torsiyonunu hesaplayalım. (5.1) eşitliğinin v ye göre üç kez türevini alırsak

$$\tilde{\gamma}'(v) = a(g(v) + \tanh \xi_2 s(v)),$$

$$\tilde{\gamma}''(v) = a(1 - \tanh \xi_2 \kappa_g(v)) t(v),$$

$$\tilde{\gamma}'''(v) = a(1 - \tanh \xi_2 \kappa_g(v)) g(v) - a \tanh \xi_2 \kappa_g'(v) t(v) + a(\kappa_g(v) - \tanh \xi_2 \kappa_g^2(v)) s(v)$$

eşitliklerini buluruz. Böylece (2.2.3) eşitliklerinden, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere $\kappa(v)$ ve $\tau(v)$ aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\kappa(v) = \varepsilon \frac{\cosh^2 \xi_2 (1 - \tanh \xi_2 \kappa_g(v))}{a} \text{ ve } \tau(v) = \frac{\cosh^2 \xi_2 (\kappa_g(v) - \tanh \xi_2)}{a} \quad (5.2)$$

dir. Buradan $a(\varepsilon\kappa(v) + \tanh \xi_2\tau(v)) = 1$ eşitliği sağlanır. Böylece $\tilde{\gamma}$ bir time-like Bertrand eğrisidir.

(\Leftarrow): $\tilde{\gamma}$ time-like Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda, tanımdan $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı A , B reel sabitleri vardır. Bu eşitlikte $A = a$ ve $B = a \tanh \xi_2$ alalım. $a > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ ve $\varepsilon \cosh \xi_2/a > 0$ olsun. $\tilde{\gamma}$ time-like eğrisinin $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ Frenet çatısını düşünelim. Bu üçlüde $\mathbf{T}(s)$, time-like vektör, $\mathbf{N}(s)$ ve $\mathbf{B}(s)$ ise space-like vektörlerdir. Böylece $\mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) = \mathbf{B}(s)$ ve $\mathbf{B}(s) \wedge \mathbf{N}(s) = \mathbf{T}(s)$ olur. Şimdi \mathbb{H}^2 üzerinde

$$g(s) = \varepsilon(\cosh \xi_2 \mathbf{T}(s) - \sinh \xi_2 \mathbf{B}(s))$$

space-like eğrisini düşünelim. Buradan

$$g'(s) = \varepsilon \cosh \xi_2 (\kappa(s) + \tanh \xi_2 \tau(s)) \mathbf{N}(s) = \frac{\varepsilon}{a} \cosh \xi_2 \mathbf{N}(s)$$

dir. g nin yay-parametresi v olsun. Böylece $dv/ds = \varepsilon \cosh \xi_2/a$ dir. Ayrıca

$$ag(s) \frac{dv}{ds} = \cosh \xi_2 (\cosh \xi_2 \mathbf{T}(s) - \sinh \xi_2 \mathbf{B}(s))$$

ve

$$\begin{aligned} a \tanh \xi_2 g(s) \wedge \frac{dg}{dv} \frac{dv}{ds} &= a \tanh \xi_2 \varepsilon (\cosh \xi_2 \mathbf{T}(s) - \sinh \xi_2 \mathbf{B}(s)) \wedge \frac{\varepsilon}{a} \cosh \xi_2 \mathbf{N}(s) \\ &= \sinh \xi_2 (\cosh \xi_2 \mathbf{B}(s) - \sinh \xi_2 \mathbf{T}(s)) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} a \int_0^v g(t) dt + a \tanh \xi_2 \int_0^v g(t) \wedge g'(t) dt &= \int_{s_0}^s \cosh \xi_2 (\cosh \xi_2 \mathbf{T}(t) - \sinh \xi_2 \mathbf{B}(t)) dt \\ &\quad + \int_{s_0}^s \sinh \xi_2 (\cosh \xi_2 \mathbf{B}(t) - \sinh \xi_2 \mathbf{T}(t)) dt \\ &= \int_{s_0}^s \mathbf{T}(t) dt = \tilde{\gamma}(s) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Bu lemmanın bir sonucu olarak time-like Bertrand eğrileri ve helisler arasındaki aşağıdaki bağlantıyı verebiliriz.

Sonuç 5.1. $g : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ birim hızlı space-like eğrisinin bir pseudo-çember parçası olması için gerek ve yeter şart g ye karşılık gelen $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ time-like Bertrand eğrisinin helis olmasıdır.

İspat. (5.2) eşitliklerini kullanarak

$$\kappa'(v) = -\varepsilon \frac{\sinh 2\xi_2 \kappa'_g(v)}{2a} \text{ ve } \tau'(v) = \frac{\cosh^2 \xi_2 \kappa'_g(v)}{a}$$

elde edilir. $g : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ birim hızlı space-like eğrisinin bir pseudo-çember parçası olması için gerek ve yeter şart $\kappa'_g(v) \equiv 0$ olmasıdır (Izumiya vd. 2004). Bu durum, $\kappa(v)$ ve $\tau(v)$ nin sabit olmasına denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 5.1. $g : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ birim hızlı space-like eğri ve g ye karşılık gelen time-like Bertrand eğrisi $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ nin hiperbolik Darboux göstergesi, g nin hiperbolik evolütüne eşittir.

İspat. (5.2) eşitliklerinden

$$\kappa(v) = \varepsilon \frac{\cosh^2 \xi_2 (1 - \tanh \xi_2 \kappa_g(v))}{a} \text{ ve } \tau(v) = \frac{\cosh^2 \xi_2 (\kappa_g(v) - \tanh \xi_2)}{a}$$

dir. $\tilde{\gamma}$ time-like eğrisi için

$$T(v) = a(g(v) + \tanh \xi_2 s(v)) \frac{dv}{ds} \text{ ve } N(v) = \varepsilon t(v)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{B}(v) = \mathbf{T}(v) \wedge \mathbf{N}(v) = \varepsilon a \frac{dv}{ds} (s(v) + \tanh \xi_2 g(v))$$

olur. Böylece

$$\mathbf{D}(v) = \tau(v)\mathbf{T}(v) + \kappa(v)\mathbf{B}(v) = \frac{dv}{ds} (\kappa_g(v)g(v) + s(v))$$

dir. Sonuç olarak $C(v) = \mathbf{D}(v)/\|\mathbf{D}(v)\| = h_g(v)$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 5.1. $g : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ birim hızlı space-like eğri ve g ye karşılık gelen time-like Bertrand eğrisi $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}'$ eğrisi, time-like koni üzerinde yatan $x(u, v)$ space-like sabit eğimli yüzey yatar.

İspat. (5.1) eşitliğinin, v ye göre türevi alınırsa

$$\tilde{\gamma}'(v) = ag(v) + a \tanh \xi_2 g(v) \wedge g'(v)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $a = u \sinh \theta \cosh \xi_2$ ve böylece $a \tanh \xi_2 = u \sinh \theta \sinh \xi_2$ alınabilir, burada u ve θ sabitlerdir. (1.3) eşitliğinden $\tilde{\gamma}'$, time-like koni üzerinde yatan $x(u, v)$ space-like sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisidir ve böylece bu yüzey üzerinde yatar. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.2. $x : S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, S space-like sabit eğimli yüzeyinin \mathbb{R}_1^3 Minkowski 3-uzayına immersiyonu olsun ve x , time-like koni üzerinde yatsın. Eğer $x(v)$, time-like koni üzerinde yatan $x(u, v)$ space-like sabit eğimli yüzeyinin v -parametre eğrisi ise $\int_0^v x(v)dv$ time-like Bertrand eğrisidir.

İspat. (1.3) eşitliğinde, $u = \text{sabit}$ alınarak,

$$x(v) = u \sinh \theta \cosh \xi_2 g(v) + u \sinh \theta \sinh \xi_2 g(v) \wedge g'(v)$$

elde edilir, burada $\xi_2 = \xi_2(u) = \coth \theta \ln u$ dir. $x(v)$ nin integrali alınarak

$$\int_0^v x(v)dv = u \sinh \theta \cosh \xi_2 \int_0^v g(v)dv + u \sinh \theta \sinh \xi_2 \int_0^v g(v) \wedge g'(v)dv \quad (5.3)$$

bulunur. $g(v)$ ve $g(v) \wedge g'(v)$ nin katsayıları sabit olduğundan $u \sinh \theta \cosh \xi_2 = a$ ve böylece $u \sinh \theta \sinh \xi_2 = a \tanh \xi_2$ alınabilir. Buradan (5.3) eşitliği

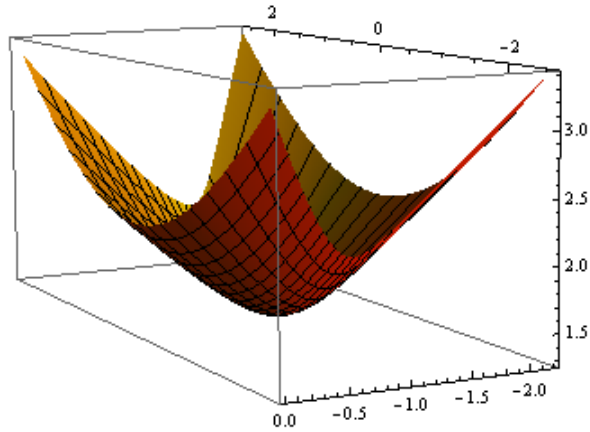
$$\int_0^v x(v)dv = a \int_0^v g(v)dv + a \tanh \xi_2 \int_0^v g(v) \wedge g'(v)dv$$

olur. Lemma 5.1'den, $\int_0^v x(v)dv$ time-like Bertrand eğrisidir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.1. (1.3) eşitliğini düşünerek, \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayında birim hızlı space-like eğri olarak $g(v) = (\sinh v, 0, \cosh v)$ yi alalım. Böylece $g(v) \wedge g'(v) = (0, 1, 0)$ dir. Buradan time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey

$$x(u, v) = u \sinh \theta (\cosh(\coth \theta \ln u) \sinh v, \sinh(\coth \theta \ln u), \cosh(\coth \theta \ln u) \cosh v)$$

şeklindedir. $\theta = 1.5$ için yüzeyin resmi, şekil 5.1'deki gibidir;

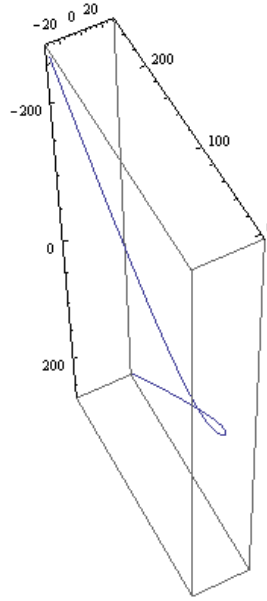


Şekil 5.1 Time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzey, $g(v) = (\sinh v, 0, \cosh v)$, $\theta = 1.5$

$u = e$ olarak,

$$\int_0^v x(v)dv = e \sinh(1.5) (\cosh(\coth(1.5))(\cosh v - 1), \sinh(\coth(1.5))v, \cosh(\coth(1.5)) \sinh v)$$

time-like Bertrand eğrisi elde edilir. g space-like eğrisi, \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayında bir pseudo-çember olduğundan Sonuç 5.1'den, bu time-like Bertrand eğrisi bir helistir. Böylece eğrinin resmi, şekil 5.2'deki gibidir;



Şekil 5.2 Time-like Bertrand eğrisi, $\theta = 1.5$, $u = e$

6. SABİT EĞİMLİ YÜZEYLERE KUATERNİYONLARLA YENİ BİR YAKLAŞIM

Bu bölümde, \mathbb{R}^3 de sabit eğimli yüzeylerin, birim kuaterniyonlar ve homotetik hareketler kullanılarak yeniden parametrize edilebileceğini gösterdik. Ayrıca sonuçlarımıza bir örnek verdik.

$Q(u, v) = \cos(\xi(u)/2) - \sin(\xi(u)/2)f'(v)$ birim kuaterniyonu, $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ Öklid 3-küresinde 2-boyutlu yüzey tanımlar, burada θ , sıfırdan farklı sabit, $\xi(u) = \cot \theta \ln u$, $f' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ ve f , \mathbb{S}^2 Öklid 2-küresinde birim hızlı eğridir. Böylece (2.3.2) eşitliğinden, $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünün matris gösterimi;

$$R_Q = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\xi}{2} + \sin^2 \frac{\xi}{2} (f'^2_1 - f'^2_2 - f'^2_3) & 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} f'_1 f'_2 + \sin \xi f'_3 & 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} f'_1 f'_3 - \sin \xi f'_2 \\ 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} f'_1 f'_3 - \sin \xi f'_2 & \cos^2 \frac{\xi}{2} + \sin^2 \frac{\xi}{2} (-f'^2_1 + f'^2_2 - f'^2_3) & \sin^2 \frac{\xi}{2} f'_2 f'_3 + \sin \xi f'_1 \\ 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} f'_1 f'_3 + \sin \xi f'_2 & \sin^2 \frac{\xi}{2} f'_2 f'_3 - \sin \xi f'_1 & \cos^2 \frac{\xi}{2} + \sin^2 \frac{\xi}{2} (-f'^2_1 - f'^2_2 + f'^2_3) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

dir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6.1. $x: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, S sabit eğimli yüzeyinin \mathbb{R}^3 Öklid 3-uzayına izometrik immersiyonu olsun. Bu durumda S sabit eğimli yüzeyi

$$x(u, v) = Q_1(u, v) \times Q_2(u, v)$$

eşitliğiyle yeniden parametrize edilebilir, burada, $Q_1(u, v) = \cos \xi(u) - \sin \xi(u)f'(v)$ birim kuaterniyon, $Q_2(u, v) = u \sin \theta f(v)$, \mathbb{R}^3 de bir yüzey ve bir pür kuaterniyon ve f , \mathbb{S}^2 Öklid 2-küresindeki birim hızlı eğridir.

İspat. $Q_1(u, v) = \cos \xi(u) - \sin \xi(u)f'(v)$ ve $Q_2(u, v) = u \sin \theta f(v)$ eşitlerini kullanarak $Q_1(u, v)$ ve $Q_2(u, v)$ nin kuaterniyon çarpımı

$$\begin{aligned}
Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) &= (\cos \xi(u) - \sin \xi(u) f'(v)) \times (u \sin \theta f(v)) \\
&= u \sin \theta (\cos \xi(u) - \sin \xi(u) f'(v)) \times f(v) \\
&= u \sin \theta \cos \xi(u) f(v) - u \sin \theta \sin \xi(u) f'(v) \times f(v)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

olur. (2.3.1) eşitliği kullanılarak

$$f' \times f = -\langle f', f \rangle f' \wedge f$$

bulunur. f , \mathbb{S}^2 Öklid 2-küresindeki birim hızlı eğri olduğundan

$$-f' \times f = f \wedge f' \tag{6.3}$$

dir. (6.3) eşitliği (6.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) = u \sin \theta (\cos \xi(u) f(v) + \sin \xi(u) f(v) \wedge f'(v))$$

elde edilir. Böylece (1.1) eşitliğinden

$$Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) = x(u, v)$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 6.1'den S sabit eğimli yüzeyinin, \mathbb{S}^3 Öklid 3-küresindeki 2-boyutlu $Q_1(u, v)$ yüzeyi ile \mathbb{R}^3 uzayındaki $Q_2(u, v)$ yüzeyinin kuaterniyon çarpımı olduğu görülür.

Şimdi bu teoremin bir sonucunu verelim.

Sonuç 6.1. $Q(u, v)$ birim kuaterniyonu için $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünün matris gösterimi R_Q olsun. Bu durumda S sabit eğimli yüzeyi

$$x(u, v) = R_Q Q_2(u, v) \tag{6.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Dönel yüzeyler, dönme matrisleriyle oluşturulabilir. Benzer şekilde S sabit eğimli yüzeyinin de R_Q matris gösterimiyle elde edilebileceği görülüyor. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 6.2. $\tilde{Q}(u, v) = u \sin \theta Q_1(u, v)$ homotetik hareketi için S sabit eğimli yüzeyi $x(u, v) = \tilde{Q}(u, v) \times f(v)$ eşitliğiyle yeniden parametrize edilebilir. Bu durumda

$$x(u, v) = u \sin \theta R_Q f(v)$$

dir.

Yorum 6.1. Teorem 6.1, $Q_1(u, v)$ birim kuaterniyonun $Q_2(u, v)$ yüzeyi üzerindeki konum vektörlerini $\text{span}\{f'(v)\}$ eksenini etrafında $\xi(u)$ açısı kadar döndürdüğünü ifade eder.

Yorum 6.2. Sonuç 6.2, $\tilde{Q}(u, v)$ kuaterniyonun $f(v)$ konum vektörlerini $\text{span}\{f'(v)\}$ eksenini etrafında $\xi(u)$ açısı kadar döndürdüğünü ve $u \sin \theta$ homotetik skalası kadar uzattığını ifade eder.

Şimdi sabit eğimli yüzeylere bir örnek verelim ve yüzeyin resmini Mathematica programını kullanarak çizelim.

Örnek 6.1. \mathbb{S}^2 üzerindeki $f(v) = 1/2(\cos 2v, \sqrt{3}, \sin 2v)$ birim hızlı eğrisini düşünelim.

Eğer $\theta = \pi/4$ alırsak

$$Q(u, v) = \cos(\ln u / 2) + (\sin(\ln u / 2) \sin 2v, 0, -\sin(\ln u / 2) \cos 2v)$$

ve

$$Q_2(u, v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} u \cos 2v, \frac{\sqrt{6}}{4} u, \frac{\sqrt{2}}{4} u \sin 2v \right)$$

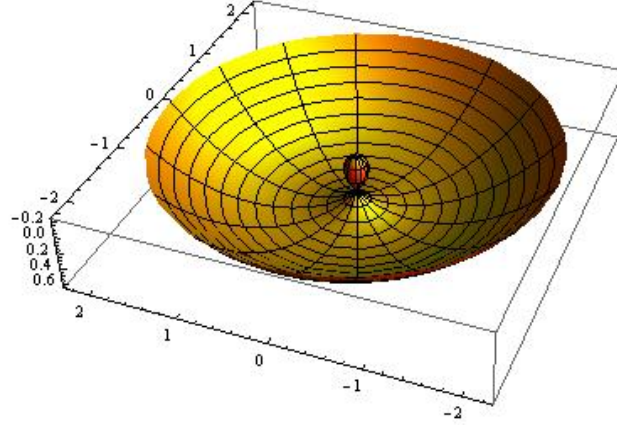
bulunur. Böylece (6.1) ve (6.4) eşitlikleri kullanılarak $x(u, v)$ sabit eğimli yüzeyi;

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \cos 4v & \sin(\ln u) \cos 2v & -\sin^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \sin 4v \\ -\sin(\ln u) \cos 2v & \cos(\ln u) & -\sin(\ln u) \sin 2v \\ -\sin^2(\ln u) \sin 4v & \sin(\ln u) \sin 2v & \cos^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) + \sin^2(\ln u) \cos 4v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} u \cos 2v \\ \frac{\sqrt{6}}{4} u \\ \frac{\sqrt{2}}{4} u \sin 2v \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} u \cos 2v (\cos(\ln u) + \sqrt{3} \sin(\ln u)) \\ \frac{\sqrt{6}}{4} u \cos(\ln u) - \frac{\sqrt{2}}{4} u \sin(\ln u) \\ \frac{\sqrt{2}}{4} u \sin 2v (\cos(\ln u) + \sqrt{3} \sin(\ln u)) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

dir. Buradan sabit eğimli yüzeyin Mathematica kodu;

$$\begin{aligned}
 &\text{ParametricPlot3D} \left[\left\{ \frac{\sqrt{2}}{4} u \text{Cos}[2v] (\text{Cos}[\text{Log}[u]] + \sqrt{3} \text{Sin}[\text{Log}[u]]), \right. \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sqrt{6}}{4} u \text{Cos}[\text{Log}[u]] - \frac{\sqrt{2}}{4} u \text{Sin}[\text{Log}[u]], \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sqrt{2}}{4} u \text{Sin}[2v] (\text{Cos}[\text{Log}[u]] + \sqrt{3} \text{Sin}[\text{Log}[u]]) \right\}, \{u, 0, Pi\}, \{v, 0, Pi\} \right]
 \end{aligned}$$

ve yüzeyinin resmi;



Şekil 6.1 Sabit eğimli yüzey $x(u, v) = R_Q Q_2(u, v)$, $f(v) = 1/2(\cos 2v, \sqrt{3}, \sin 2v)$,
 $\theta = \pi/4$

şeklindedir.

7. SPLIT KUATERNİYONLAR VE SPACE-LIKE SABİT EĞİMLİ YÜZEYLER

Bu bölümde, \mathbb{R}_1^3 de split kuaterniyonlar ile space-like sabit eğimli yüzeylerin bazı bağlantılarını verdik. Space-like sabit eğimli yüzeylerin, space-like vektör kısmı birim time-like split kuaterniyonlar ve homotetik hareketler kullanılarak yeniden parametrize edilebileceğini gösterdik. Daha sonra sonuçlarımıza bazı örnekler verdik.

7.1 Split Kuaterniyonlar ve Space-like Koni Üzerinde Yatan Space-like Sabit Eğimli Yüzeyler

$Q(u, v) = \cosh(\xi_1(u)/2) - \sinh(\xi_1(u)/2)f'(v)$ space-like vektör kısmı birim time-like split kuaterniyonu, \mathbb{H}_1^3 pseudo-hiperbolik uzayında, 2-boyutlu yüzey tanımlar, burada θ , sıfırdan farklı sabit, $\xi_1(u) = \tanh \theta \ln u$, $f' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ ve f , \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayında birim hızlı space-like eğridir. Böylece V pür split kuaterniyon olmak üzere

$(Q \times V \times Q^{-1})_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} V_j$ dönüşümü kullanılarak, bu dönüşüme karşılık gelen

$$R_Q = \begin{pmatrix} \cosh^2 \frac{\xi_1}{2} + \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} (f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2) & -2 \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} f_1' f_2' - \sinh \xi_1 f_3' & -2 \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} f_1' f_3' + \sinh \xi_1 f_2' \\ 2 \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} f_1' f_2' - \sinh \xi_1 f_3' & \cosh^2 \frac{\xi_1}{2} + \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} (-f_1'^2 - f_2'^2 + f_3'^2) & -2 \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} f_2' f_3' + \sinh \xi_1 f_1' \\ 2 \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} f_1' f_3' + \sinh \xi_1 f_2' & -2 \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} f_2' f_3' - \sinh \xi_1 f_1' & \cosh^2 \frac{\xi_1}{2} + \sinh^2 \frac{\xi_1}{2} (-f_1'^2 + f_2'^2 - f_3'^2) \end{pmatrix} \quad (7.1.1)$$

dönme matrisi bulunur.

Şimdi space-like vektör kısmı birim time-like split kuaterniyonlar ile space-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzeylerin bağlantısını verelim.

Teorem 7.1.1. $x: S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, S space-like sabit eğimli yüzeyinin \mathbb{R}_1^3 Minkowski 3-uzayına immersiyonu olsun ve x , space-like koni üzerinde yatsın. Bu durumda S space-like sabit eğimli yüzeyi

$$x(u, v) = Q_1(u, v) \times Q_2(u, v)$$

eşitliğiyle yeniden parametrize edilebilir, burada $Q_1(u, v) = \cosh \xi_1(u) - \sinh \xi_1(u) f'(v)$ space-like vektör kısımlı birim time-like split kuaterniyon, $Q_2(u, v) = u \cosh \theta f(v)$, \mathbb{R}_1^3 de bir yüzey ve bir pür space-like split kuaterniyon ve f , \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayında birim hızlı space-like eğridir.

İspat. $Q_1(u, v) = \cosh \xi_1(u) - \sinh \xi_1(u) f'(v)$ ve $Q_2(u, v) = u \cosh \theta f(v)$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) &= (\cosh \xi_1(u) - \sinh \xi_1(u) f'(v)) \times (u \cosh \theta f(v)) \\ &= u \cosh \theta (\cosh \xi_1(u) - \sinh \xi_1(u) f'(v)) \times f(v) \\ &= u \cosh \theta \cosh \xi_1(u) f(v) - u \sinh \theta \sinh \xi_1(u) f'(v) \times f(v) \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

dir. (2.4.1) eşitliği kullanılarak

$$f' \times f = \langle f', f \rangle + f' \wedge f$$

bulunur. f , \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayında birim hızlı space-like eğri olduğundan

$$-f' \times f = f \wedge f' \quad (7.1.3)$$

dir. Eğer (7.1.3) eşitliği (7.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) = u \cosh \theta (\cosh \xi_1(u) f(v) + \sinh \xi_1(u) f(v) \wedge f'(v))$$

elde edilir. Böylece (1.2) eşitliğinden

$$Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) = x(u, v)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 7.1.1'den space-like koni üzerinde yatan S space-like sabit eğimli yüzeyinin, \mathbb{H}_1^3 pseudo-hiperbolik uzayındaki 2-boyutlu $Q_1(u, v)$ yüzeyi ile \mathbb{R}_1^3 uzayındaki $Q_2(u, v)$ yüzeyinin split kuaterniyon çarpımı olduğu görülür.

Şimdi R_Q dönme matrisleri, homotetik hareketler ve space-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzeyler arasındaki bağlantıları verelim.

Sonuç 7.1.1. $Q(u, v)$ space-like vektör kısmılı birim time-like split kuaterniyona karşılık gelen dönme matrisi R_Q olsun. Bu durumda space-like koni üzerinde yatan S space-like sabit eğimli yüzeyi

$$x(u, v) = R_Q Q_2(u, v)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 7.1.2. $\tilde{Q}(u, v) = u \cosh \theta Q_1(u, v)$ homotetik hareketi için space-like koni üzerinde yatan S space-like sabit eğimli yüzeyi, $x(u, v) = \tilde{Q}(u, v) \times f(v)$ eşitliğiyle yeniden parametrize edilebilir. Bu durumda

$$x(u, v) = u \cosh \theta R_Q f(v) \quad (7.1.4)$$

dir.

Teorem 7.1.1 ve Sonuç 7.1.2 ile ilgili aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

Yorum 7.1.1. Teorem 7.1.1, $Q_1(u, v)$ birim split kuaterniyonun, $Q_2(u, v)$ yüzeyi üzerindeki konum vektörlerini $\text{span}\{f'(v)\}$ eksenini etrafında $\xi_1(u)$ hiperbolik açısı kadar döndürdüğünü söyler.

Yorum 7.1.2. Sonuç 7.1.2, $\tilde{Q}(u, v)$ split kuaterniyonun $f(v)$ konum vektörlerini $\text{span}\{f'(v)\}$ eksenini etrafında $\xi_1(u)$ hiperbolik açısı kadar döndürdüğünü ve $u \cosh \theta$ homotetik skalası kadar uzattığını söyler.

7.2 Split Kuaterniyonlar ve Time-like Koni Üzerinde Yatan Space-like Sabit Eğimli Yüzeyler

$Q(u, v) = \cosh(\xi_2(u)/2) - \sinh(\xi_2(u)/2)g'(v)$ space-like vektör kısmılı birim time-like split kuaterniyonu, \mathbb{H}_1^3 pseudo-hiperbolik uzayında, 2-boyutlu yüzey tanımlar, burada θ , sıfırdan farklı sabit, $\xi_2(u) = \coth \theta \ln u$, $g' = (g'_1, g'_2, g'_3)$ ve g , \mathbb{H}^2 pseudo-

hiperbolik uzayında birim hızlı space-like eğridir. Böylece V pür split kuaterniyon olmak üzere $(Q \times V \times Q^{-1})_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} V_j$ dönüşümü kullanılarak, bu dönüşüme karşılık gelen

$$R_Q = \begin{pmatrix} \cosh^2 \frac{\xi_2}{2} + \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} (g_1'^2 + g_2'^2 + g_3'^2) & -2 \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} g_1' g_2' - \sinh \xi_2 g_3' & -2 \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} g_1' g_3' + \sinh \xi_2 g_2' \\ 2 \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} g_1' g_2' - \sinh \xi_2 g_3' & \cosh^2 \frac{\xi_2}{2} + \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} (-g_1'^2 - g_2'^2 + g_3'^2) & -2 \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} g_2' g_3' + \sinh \xi_2 g_1' \\ 2 \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} g_1' g_3' + \sinh \xi_2 g_2' & -2 \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} g_2' g_3' - \sinh \xi_2 g_1' & \cosh^2 \frac{\xi_2}{2} + \sinh^2 \frac{\xi_2}{2} (-g_1'^2 + g_2'^2 - g_3'^2) \end{pmatrix} \quad (7.2.1)$$

dönme matrisi bulunur.

Şimdi space-like vektör kısımlı birim time-like split kuaterniyonlar ile time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzeylerin bağlantısını verelim.

Teorem 7.2.1. $x: S \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, S space-like sabit eğimli yüzeyinin \mathbb{R}_1^3 Minkowski 3-uzayına immersiyonu olsun ve x , time-like koni üzerinde yatsın. Bu durumda S space-like sabit eğimli yüzeyi

$$x(u, v) = Q_1(u, v) \times Q_2(u, v)$$

eşitliğiyle yeniden parametrize edilebilir, burada $Q_1(u, v) = \cosh \xi_2(u) - \sinh \xi_2(u) g'(v)$ space-like vektör kısımlı birim time-like split kuaterniyon, $Q_2(u, v) = u \sinh \theta g(v)$, \mathbb{R}_1^3 de bir yüzey ve bir pür time-like split kuaterniyon ve g , \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayında birim hızlı space-like eğridir.

İspat. $Q_1(u, v) = \cosh \xi_2(u) - \sinh \xi_2(u) g'(v)$ ve $Q_2(u, v) = u \sinh \theta g(v)$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) &= (\cosh \xi_2(u) - \sinh \xi_2(u) g'(v)) \times (u \sinh \theta g(v)) \\ &= u \sinh \theta (\cosh \xi_2(u) - \sinh \xi_2(u) g'(v)) \times g(v) \\ &= u \sinh \theta \cosh \xi_2(u) g(v) - u \cosh \theta \sinh \xi_2(u) g'(v) \times g(v) \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

dir. (2.4.1) eşitliği kullanılarak

$$g' \times g = \langle g', g \rangle + g' \wedge g$$

bulunur. g , \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayında birim hızlı space-like eğri olduğundan

$$-g' \times g = g \wedge g' \quad (7.2.3)$$

dir. Eğer (7.2.3) eşitliği (7.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) = u \sinh \theta (\cosh \xi_2(u) g(v) + \sinh \xi_2(u) g(v) \wedge g'(v))$$

elde edilir. Böylece (1.3) eşitliğinden

$$Q_1(u, v) \times Q_2(u, v) = x(u, v)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Benzer şekilde Teorem 7.2.1'den S time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzeyinin, \mathbb{H}_1^3 pseudo-hiperbolik uzayındaki iki boyutlu $Q_1(u, v)$ yüzeyi ile \mathbb{R}_1^3 uzayındaki $Q_2(u, v)$ yüzeyinin split kuaterniyon çarpımı olduğu görülür.

Şimdi R_Q dönme matrisleri, homotetik hareketler ve time-like koni üzerinde yatan space-like sabit eğimli yüzeyler arasındaki bağıntıları verelim.

Sonuç 7.2.1. $Q(u, v)$ space-like vektör kısımlı birim time-like split kuaterniyona karşılık gelen dönme matrisi R_Q olsun. Bu durumda time-like koni üzerinde yatan S space-like sabit eğimli yüzeyi

$$x(u, v) = R_Q Q_2(u, v)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 7.2.2. $\tilde{Q}(u, v) = u \sinh \theta Q_1(u, v)$ homotetik hareketi için time-like koni üzerinde yatan S space-like sabit eğimli yüzeyi, $x(u, v) = \tilde{Q}(u, v) \times g(v)$ eşitliğiyle yeniden parametrize edilebilir. Bu durumda

$$x(u, v) = u \sinh \theta R_Q g(v) \quad (7.2.4)$$

dir.

Teorem 7.2.1 ve Sonuç 7.2.2 ile ilgili aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

Yorum 7.2.1. Teorem 7.2.1, $Q_1(u, v)$ birim split kuaterniyonun, $Q_2(u, v)$ yüzeyi üzerindeki konum vektörlerini $\text{span}\{g'(v)\}$ eksenini etrafında $\xi_2(u)$ hiperbolik açısı kadar döndürdüğünü söyler.

Yorum 7.2.2. Sonuç 7.2.2, $\tilde{Q}(u, v)$ split kuaterniyonun $g(v)$ konum vektörlerini $\text{span}\{g'(v)\}$ eksenini etrafında $\xi_2(u)$ hiperbolik açısı kadar döndürdüğünü ve $u \sinh \theta$ homotetik skalası kadar uzattığını söyler.

7.3 Örnekler

Bu bölümde, space-like sabit eğimli yüzeylere bazı örnekler verdik ve Mathematica programını kullanarak resimlerini çizdik.

Örnek 7.3.1. \mathbb{S}_1^2 de Sitter 2-uzayında, $f(v) = (0, \cos v, \sin v)$ birim hızlı space-like eğrisini düşünelim. $\theta = 7$ ve $\tanh 7 \cong 1$ alarak homotetik hareket

$$\tilde{Q}(u, v) = u \cosh 7 (\cosh(\ln u) + (0, \sinh(\ln u) \sin v, -\sinh(\ln u) \cos v))$$

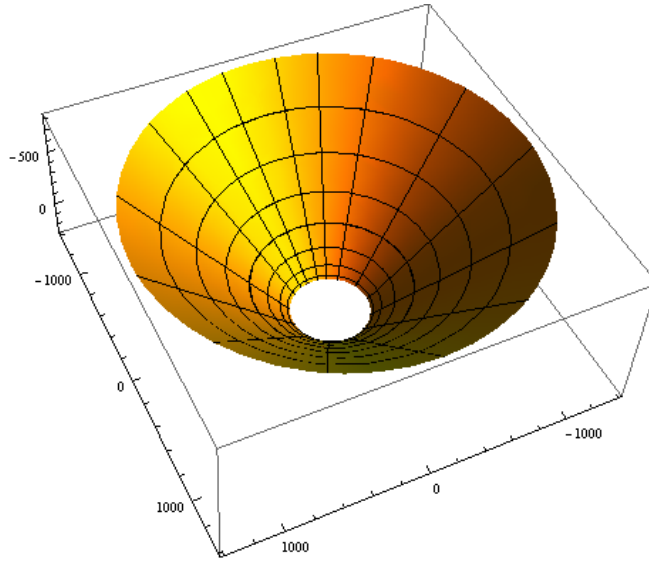
olur. (7.1.4) eşitliğini kullanarak aşağıdaki space-like koni üzerinde yatan $x(u, v) = u \cosh \theta R_Q f(v)$ space-like sabit eğimli yüzeyi elde edilir;

$$x(u, v) = u \cosh 7 \begin{bmatrix} \cosh(\ln u) & -\sinh(\ln u) \cos v & -\sinh(\ln u) \sin v \\ -\sinh(\ln u) \cos v & \cosh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \cos 2v & \sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \sin 2v \\ -\sinh(\ln u) \sin v & \sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \sin 2v & \cosh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \cos 2v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos v \\ \sin v \end{bmatrix}$$

ve sonuç olarak

$$x(u, v) = \begin{bmatrix} -u \cosh 7 \sinh(\ln u) \\ u \cosh 7 \cosh(\ln u) \cos v \\ u \cosh 7 \cosh(\ln u) \sin v \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $x(u, v) = u \cosh \theta R_\theta f(v)$ nin resmi;



Şekil 7.1 Space-like koni üzerinde yatan $x(u, v) = u \cosh \theta R_\theta f(v)$ space-like sabit eğimli yüzey, $f(v) = (0, \cos v, \sin v)$, $\theta = 7$

şeklindedir.

Örnek 7.3.2. \mathbb{H}^2 pseudo-hiperbolik uzayında, $g(v) = (\cosh v, 0, \sinh v)$ birim hızlı space-like eğrisini düşünelim. $\theta = 7$ ve $\coth 7 \cong 1$ alarak homotetik hareket

$$\tilde{Q}(u, v) = u \sinh 7 \left(\cosh(\ln u) + (-\sinh(\ln u) \sinh v, 0, -\sinh(\ln u) \cosh v) \right)$$

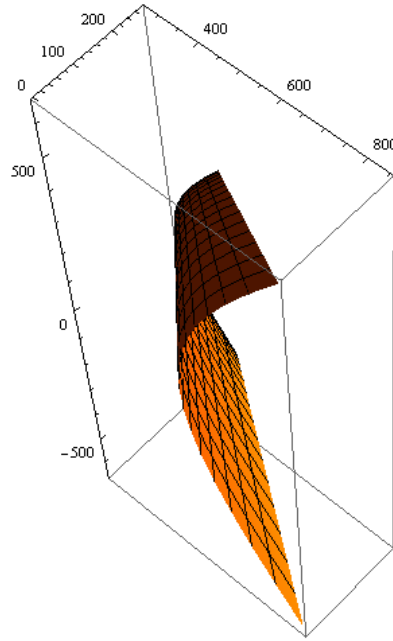
olur. (7.2.4) eşitliğini kullanarak aşağıdaki time-like koni üzerinde yatan $x(u, v) = u \sinh \theta R_Q g(v)$ space-like sabit eğimli yüzey elde edilir;

$$x(u, v) = u \sinh 7 \begin{bmatrix} \cosh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \cosh 2v & -\sinh(\ln u) \cosh v & -\sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \sinh 2v \\ -\sinh(\ln u) \cosh v & \cosh(\ln u) & \sinh(\ln u) \sinh v \\ \sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \sinh 2v & -\sinh(\ln u) \sinh v & \cosh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{\ln u}{2}\right) \cosh 2v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh v \\ 0 \\ \sinh v \end{bmatrix}$$

ve sonuç olarak

$$x(u, v) = \begin{bmatrix} u \sinh 7 \cosh(\ln u) \cosh v \\ -u \sinh 7 \sinh(\ln u) \\ u \sinh 7 \cosh(\ln u) \sinh v \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $x(u, v) = u \sinh \theta R_Q g(v)$ nin resmi;



Şekil 7.2 Time-like koni üzerinde yatan $x(u, v) = u \sinh \theta R_Q g(v)$ space-like sabit eğimli yüzey, $g(v) = (\cosh v, 0, \sinh v)$, $\theta = 7$

şeklindedir.

KAYNAKLAR

- Ata, E. and Yayli, Y. 2009. Dual quaternions and dual projective spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 40 (3); pp. 1255-1263.
- Babaarslan, M., Tandogan, Y.A. and Yayli, Y. 2012. A note on Bertrand curves and constant slope surfaces according to Darboux frame. *Journal of Advanced Mathematical Studies*, Vol. 5 (1); pp. 87-96.
- Cermelli, P. and Di Scala, A.J. 2007. Constant-angle surfaces in liquid crystals. *Philosophical Magazine*, Vol. 87 (12); pp. 1871–1888.
- Dillen, F., Fastenakels, J., Van der Veken, J. and Vrancken, L. 2007. Constant angle surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Monatshefte für Mathematik*, Vol. 152; pp. 89-96.
- Dillen, F. and Munteanu, M.I. 2009. Constant angle surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, Vol. 40; pp. 85-97.
- Do Carmo, M.P. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 502 p. New Jersey.
- Düldül, M. 2010. Two and Three Dimensional Regions from Homothetic Motions. *Applied Mathematics E-Notes*, Vol. 10; pp. 86-93.
- Fu, Y. and Yang, D. 2012. On constant slope space-like surfaces in 3-dimensional Minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 385 (1); pp. 208-220.
- Hacısalıhoğlu, H. 2000. *Diferensiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, 269 s. Ankara.
- İlarıslan, K. and Boyacıoğlu, Ö. 2008. Position vectors of a time-like and a null helix in Minkowski 3-space. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 38; pp. 1383-1389.

- Inoguchi, J. 1998. Time-like surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-space. Tokyo Journal of Mathematics, Vol. 21; pp. 140-152.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves. Journal of Geometry, Vol. 74; pp. 97-109.
- Izumiya, S., Pei, D.H., Sano, T. and Torii, E. 2004. Evolutes of Hyperbolic Plane Curves. Acta Mathematica Sinica (English Series), Vol. 20 (3); pp. 543-550.
- Koenderink, J. 1990. Solid shape, MIT Press, Cambridge, 699 p. MA.
- Kula, L. and Yayli, Y. 2007. Split quaternions and rotations in semi-Euclidean space \mathbb{E}_2^4 . Journal of the Korean Mathematical Society, Vol. 44; pp. 1313-1327.
- Lopez, R. 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space. arXiv:0810.3351v1 [math.DG].
- Millman, R.S. and Parker, G.D. 1977. Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall, 265 p. New Jersey.
- Munteanu, M.I. 2010. From golden spirals to constant slope surfaces, Journal of Mathematical Physics, Vol. 51 (7), 073507; pp. 1-9.
- Nutbourne, A.W. and Martin, R.R. 1988. Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design. Ellis Horwood, Chichester, 282 p. UK.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics, 103, Academic Press, Inc., 468 p. New York.
- O'Neill, B. 1997. Elementary Differential Geometry Second Edition. Academic Press, Inc. 482 p. New York.
- Özdemir, M. and Ergin, A.A. 2006. Rotations with unit time-like quaternions in Minkowski 3-space. Journal of Geometry and Physics, Vol. 56; pp. 322-326.

Shifrin, T. 2011. Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces. Preliminary Version, Fall, 125 p. University of Georgia, Athens, Georgia, 30602.

Toth, G. 1998. Glimpses of algebra and geometry. Berlin, Springer.

Wang, Z. and Pei, D. 2011. Null Darboux developable and pseudo-spherical Darboux image of null Cartan curve in Minkowski 3-space. Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 40; pp. 219-240.

Ward. J.P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 237 p. The Netherlands.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat BABAARSLAN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 29.10.1983

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü (2002-2006)

Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı (2006-2009)

Doktora : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2009-Ocak 2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Bozok Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,
Araştırma Görevlisi (2007-...)

Yayınları (SCI ve diğer)

Babaarslan, M. and Yayli, Y. 2011. The characterizations of constant slope surfaces and Bertrand curves. *International Journal of the Physical Sciences*, Vol. 6 (8); pp. 1868-1875.

Babaarslan, M. and Yayli, Y. 2011. On space-like constant slope surfaces and Bertrand curves in Minkowski 3-space, arXiv:1112.1504v4 [math. DG].

Babaarslan, M. and Yayli, Y. 2012. A new approach to constant slope surfaces with quaternions. *ISRN Geometry*, Vol. 2012, Article ID 126358, 8 pages. Doi:10.5402/2012/126358.

Babaarslan, M., Tandogan, Y.A. and Yayli, Y. 2012. A note on Bertrand curves and constant slope surfaces according to Darboux frame. *Journal of Advanced Mathematical Studies*, Vol. 5 (1); pp. 87-96.

Babaarslan, M., Tandogan, Y.A. and Yayli, Y. 2012. On Bertrand curves and constant slope surfaces according to Darboux frame. 10th International Conference on Geometry and Applications. Varna (Bulgaria), September 3-9, 2011. *Journal of Geometry*, Vol. 103; pp. 347–366.

Babaarslan, M. and Yayli, Y. 2013. Split Quaternions and Space-like Constant Slope Surfaces in Minkowski 3-space. *International Journal of Geometry*, Vol. 2 (1); pp. 61-71 (In Press).

Babaarslan, M. and Yayli, Y. Helices and Bertrand curves in Euclidean 3-space. *Mathematical and Computational Applications*, April 2013 (In Press).