ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYRIK KESİRLİ BASAMAKTAN DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Serkan ASLIYÜCE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AYRIK KESİRLİ BASAMAKTAN DENKLEMLER İÇİN
BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Serkan ASLIYÜCE

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. A. Feza GÜVENİLİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ayrık kesirli analizin temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ayrık kesirli analiz için Laplace dönüşümü ve genel zaman skalasında tanımlanmış olan Taylor monomialın ayrık kesirli analizdeki analogu verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bir başlangıç değer problemi ele alınarak kesirli birleşim kuralları ve Laplace dönüşümü kullanılarak çözümleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Son bölümde, sınır değer problemi tanımlanmış ve bu sınır değer problemi için Green fonksiyonu elde edilip özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu sınır değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği Banach daralma dönüşümü teoremi ve Krasnosel'skii teoremleri kullanılarak gösterilmiştir.

Haziran 2013, 90 sayfa

Anahtar Kelimeler : Ayrık kesirli analiz, kesirli basamaktan fark operatörü, kesirli basamaktan toplam operatörü, kesirli basamaktan fark denklemleri, Laplace dönüşümü, başlangıç değer problemi, sınır değer problemi, varlık - teklik.

ABSTRACT

Master Thesis

INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR DISCRETE FRACTIONAL EQUATIONS

Serkan ASLIYÜCE

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. A. Feza GÜVENİLİR

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts of discrete fractional calculus have been recalled.

In the third chapter, for discrete fractional calculus Laplace transform and analogue of Taylor monomial that defined in general time scale theory is defined.

In the fourth chapter, by taking an initial value problem, its solutions were examined using unifying rules and Laplace transform separately.

In the last chapter, a boundary value problem is taken. For this problem, a Green's function is obtained and its properties analyzed. Moreover, by using Banach's contraction mapping theorem and Krasnosel'skii theorem existence and uniqueness of solutions of this problem is shown.

January 2013, 90 pages

Key Words: Discrete fractional analysis, fractional order difference operator, fractional order sum operator, fractional order difference equations, Laplace transform, initial value problem, boundary value problem, existence and uniqueness.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Doç.Dr. A. Feza GÜVENİLİR (Ankara Üniversitesi Matamatik Anabilim Dalı)'e ve çalışmalarım sırasında bana her zaman destek olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tez çalışmalarım ve tez yazım süreci boyunca bana destek olan arkadaşlarım Metehan KARAGÖZ, Yasemin YILMAZ, Sezgin SUCU ve Mehtap LAFCI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Serkan ASLIYÜCE
Ankara, Haziran 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Δ	Fark operatörü
σ	İleri sıçrama operatörü
Γ	Gama fonksiyonu
$t^{\underline{v}}$	Azalan fonksiyon
Δ_a^{-v}	v. basamaktan toplam operatörü
Δ_a^{v}	v. basamaktan fark operatörü
$\mathcal{L}_a$	Laplace dönüşüm operatörü
$h_\mu(t,a)$	μ. Taylor Monomial
$G(t,s)$	Green fonksiyonu
$\lceil . \rceil$	Tavan fonsiyonu

1. GİRİŞ

Kesirli analiz çalışmaları 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital arasındaki mektuplaşmayla başlamıştır ve günümüzde de devam etmektedir. Süreklilik durumunda, kesirli analiz ile ilgili çalışmalar 19. yüzyılın sonlarından itibaren birçok matematikçinin katkısıyla büyük bir ivme kazanmıştır. Bu matematikçilerin en önemlileri Riemann, Liouville, Grünwald ve Letnikov'dur. Kesirli türeve ilişkin farklı tanımlar olmasına rağmen en çok kullanılanları Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleridir. Kesirli diferensiyel denklemler viskoelastisite, elektroanalitik kimya, kontrol teori ve fizik problemleri gibi bir çok uygulamada kullanılmaktadır. Kesirli diferensiyel denklemlerle ilgili daha fazla bilgi ve örnekler için Podlubny (1999), Oldham-Spanier (2002), Samko-Kilbas-Marichev (1993) ve Diethelm (2010) in çalışmaları referans verilebilir.

Süreksizlik durumunda, kesirli analizle ilgili çalışmalar yakın zamanda başlamıştır. Süreksizlik durumundaki ilk çalışmalar Diaz-Osler (1974), Gray-Zhang (1988) ve Miller-Ross (1988) tarafından yapılmıştır. Diaz-Osler, çalışmalarında keyfi basamaktan farklar için bir tanım vermiş ve iki fonksiyonun kesirli farklarının çarpımı için Leibniz kuralını ifade etmişlerdir. Gray-Zhang, çalışmalarında kesirli basamaktan farkın tanımı yapmış ve bu tanıma dayanarak kuvvet kuralı ve Leibniz kuralını da içeren bazı sonuçlar vermişlerdir. Gray-Zhang, bu çalışmalarında ileri (delta) farktan ziyade geri (nabla) farkı kullanmışlardır. Miller-Ross, çalışmalarında lineer bir fark denkleminden yola çıkarak keyfi, reel basamaktan fark tanımını elde etmişlerdir. Bu tanımdan yararlanarak kuvvet kuralı ve Leibniz kuralı gibi bazı sonuçlar vermişlerdir.

Atici-Eloe (2007, 2009a, 2009b, 2011) nin bu konudaki çalışmaları ile birlikte kesirli fark denklemleri tekrar ilgi çekmeye başlamıştır. Atici-Eloe bu çalışmalarında ileri (delta) ve geri (nabla) farklarla ilgili sonuçları tekrar düzenlemiş ve geliştirmiştir. Ayrıca Holm (2011a, 2011b, 2011c), Goodrich (2010, 2011a, 2011b, 2012) başta olmak üzere bir çok matematikçi bu konuda çalışmaya başlamıştır.

Bu tez boyunca, Atici-Eloe ve Holm'un ileri (delta) fark alanında yapmış oldukları çalışmalar temel alınarak bu konuda bir derleme yapılacaktır. İkinci bölümde, kesirli basamaktan fark ve kesirli basamaktan toplam operatörlerinin tanımı verilecektir. Ayrıca kesirli fark ve kesirli toplam operatörlerinin birleşim kuralları verilecektir. Üçüncü bölümde, kesirli basamaktan fark ve kesirli basamaktan toplam operatörlerinin üstel basamakları incelenecek ve ayrık kesirli analiz için Laplace dönüşümü tanımlanacaktır. Bu bölümde zaman skalasında Laplace dönüşümleri çalışılırken önemli bir fonksiyon olan Taylor monomialın ayrık kesirli analizdeki tanımı yapılacaktır. Dördüncü bölümde, bir başlangıç değer problemi ele alınacaktır. Bu problemin çözümü, ikinci bölümde elde edilen birleşim kuralları ve üçüncü bölümde tanımlanan Laplace dönüşümü kullanılarak ayrı ayrı incelenecektir. Son bölümde ise bir sınır değer problemi incelenecektir. Önce bu problem için Green fonksiyonu elde edilecek ve bu fonksiyonun özellikleri incelenecektir. Daha sonra, bu Green fonksiyonu yardımıyla verilen sınır değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği Banach daralma dönüşümü teoremi ve Krasnosel'skii sabit nokta teoremleri kullanılarak incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R},\ \mathbb{N}_a := \{a\} + \mathbb{N}_0 = \{a, a+1, a+2, ...\}$$

dır.

Tanım 2.1. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ olmak üzere Δ fark operatörü $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\Delta f(t) := f(t+1) - f(t)$$

dır (Kelley ve Peterson 2001).

Tanım 2.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü, $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, $t \in \mathbb{N}_a$ için $\sigma(t) = t+1$ dir (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.1. $f, g : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $t \in \mathbb{N}_a$ için
(i) $\Delta\alpha = 0$
(ii) $\Delta\alpha f(t) = \alpha\Delta f(t)$
(iii) $\Delta\left(f(t) + g(t)\right) = \Delta f(t) + \Delta g(t)$
(iv) $\Delta\alpha^{t+\beta} = (\alpha - 1)\alpha^{t+\beta}$
(v) $\Delta(f(t)g(t)) = f(\sigma(t))\Delta g(t) + \Delta f(t)g(t)$
(vi) $g(t) \neq 0$ olmak üzere $\Delta\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)\Delta f(t) - \Delta f(t)g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$
dır (Kelley ve Peterson 2001).

Tanım 2.3. Euler Gamma fonksiyonu $v \in \mathbb{C} \setminus \{..., -2, -1\}$ için

$$\Gamma(v) := \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1} dt$$

dır. Gamma fonksiyonunun grafiği (Şekil 1.1) ve önemli özellikleri aşağıda verilmiştir:

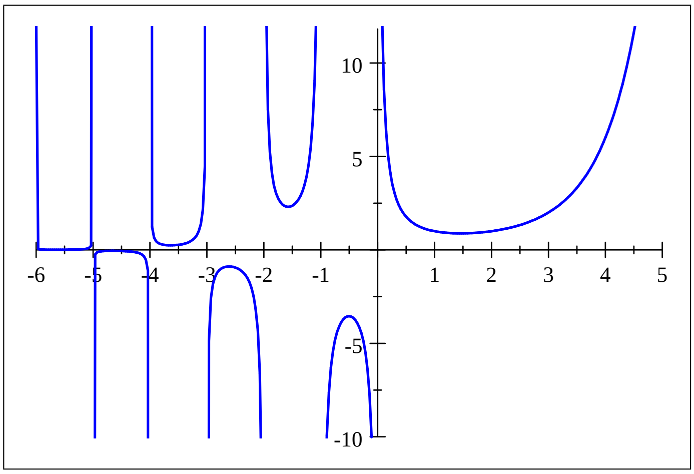
(i) $v > 0$ için $\Gamma(v) > 0$,

(ii) $v \in \mathbb{C} \setminus \{..., -2, -1\}$ için $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$,

(iii) $n \in \mathbb{N}_0$ için $\Gamma(n+1) = n!$,

(iv) $v \in \mathbb{C} \setminus \{..., -2, -1\}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $\frac{\Gamma(v+k)}{\Gamma(v)} = (v+k-1)...(v+1)v$,

(v) $x \in [2, \infty)$ için $\Gamma(x)$ monoton artandır.



Şekil 1.1 $\Gamma : \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, ...\} \to \mathbb{R}$ Gamma fonksiyonu

Aşağıda falling foksiyonun tanımı verilecektir.

Tanım 2.4. $t, v \in \mathbb{R}$ için

$$t^{\underline{v}} := \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-v)}$$

dır. Ayrıca

(i) $v^{\underline{v}} = \Gamma(v+1)$

(ii) $\Delta t^{\underline{v}} = v t^{\underline{v-1}}$

(iii) $t^{\underline{v+1}} = (t-v)t^{\underline{v}}$

sağlanır (Atici ve Eloe 2007).

Uyarı 2.1. Yukarıdaki tanımda $(t+1-v) \in \{..., -2, -1\}$ ise $t^{\underline{v}} = 0$ alınacaktır.

Tanım 2.5. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $v > 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun v. basamaktan kesirli toplamı $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\Delta_a^{-v} f(t) := \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-1}} f(s)$$

dır. Ayrıca, $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için $\Delta_a^{-0} f(t) := f(t)$ dır (Atici ve Eloe 2007).

Tanım 2.6. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $N \in \mathbb{N}$ için $N-1 < v \leq N$ olacak şekilde $v \geq 0$ seçilsin. Bu durumda f fonksiyonunun v. basamaktan kesirli farkı $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için

$$\Delta_a^v f(t) := \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t)$$

dır (Atici ve Eloe 2007).

Uyarı 2.2. $v \in \mathbb{N}$ durumunda Tanım 2.6, Tanım 2.1 ile denktir: Herhangi $v = N \in \mathbb{N}_0$ *ve* $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\Delta_a^v f(t) = \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t) = \Delta^N \Delta_a^{-0} f(t) = \Delta^N f(t)$$

dır.

Uyarı 2.3. $N-1<v\leq N$ olmak üzere $v>0$ için

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{-v}f(a+v-N) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}f(s)\Big|_{t=a+v-N}\\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{a-N}(a+v-N-\sigma(s))^{\underline{v-1}}f(s)\\
&= 0\\
&\vdots\\
\Delta_a^{-v}f(a+v-1) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}f(s)\Big|_{t=a+v-1}\\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{a-1}(a+v-1-\sigma(s))^{\underline{v-1}}f(s)\\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\Delta_a^{-v}f(a+v-N)=\Delta_a^{-v}f(a+v-N+1)=...=\Delta_a^{-v}f(a+v-1)=0$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $\Delta_a^{-v}f$ operatörünün ilk aşikar olmayan değeri $t=a+v$ noktasında ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{-v}f(a+v) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}f(s)\Big|_{t=a+v}\\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{a}(a+v-\sigma(s))^{\underline{v-1}}f(s)\\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}(v-1)^{\underline{v-1}}f(a)\\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\Gamma(v)f(a)\\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemler dikkate alınırsa $\Delta_a^{-v}f$ operatörünün tanım kümesini Tanım 2.5 de olduğu gibi

$$\mathcal{D}\left\{\Delta_a^{-v}f\right\}:=\mathbb{N}_{a+v}$$

alarak N tane başlangıç sıfırını yok saymak uygundur.

Kesirli farkların tanım kümeleri

Kesirli farkların tanım kümelerini belirlemek için kesirli toplamların tanım kümeleri kullanılabilir. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R},\ N-1 < v \leq N,\ v > 0$ olmak üzere v. basamaktan kesirli farkın tanım kümesi,

$$\mathcal{D}\left\{\Delta_a^v f\right\} = \mathcal{D}\left\{\Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f\right\} = \mathcal{D}\left\{\Delta_a^{-(N-v)} f\right\} = \mathbb{N}_{a+N-v}$$

şeklindedir.

$f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $v, \mu > 0$ verilsin. $N, M \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $N-1 < v \leq N$ ve $M-1 < \mu \leq M$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda kesirli toplam ve fark operatörleri ve birleşimlerinin tanım kümeleri

$\mathcal{D}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\} = \mathbb{N}_{a+v},$
$\mathcal{D}\left\{\Delta_a^{v} f\right\} = \mathbb{N}_{a+N-v},$
$\mathcal{D}\left\{\Delta_{a+\mu}^{-v} \Delta_a^{-\mu} f\right\} = \mathbb{N}_{a+\mu+v},$
$\mathcal{D}\left\{\Delta_{a+\mu}^{v} \Delta_a^{-\mu} f\right\} = \mathbb{N}_{a+\mu+N-v},$
$\mathcal{D}\left\{\Delta_{a+M-\mu}^{-v} \Delta_a^{\mu} f\right\} = \mathbb{N}_{a+M-\mu+v},$
$\mathcal{D}\left\{\Delta_{a+M-\mu}^{v} \Delta_a^{\mu} f\right\} = \mathbb{N}_{a+M-\mu+N-v}$

şeklindedir.

Teorem 2.2 (Leibniz Kuralı)**.** $g : \mathbb{N}_{a+v} \mathrm{x} \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ verilsin. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\Delta\left(\sum_{s=a}^{t-v} g(t,s)\right) = \sum_{s=a}^{t-v} \Delta_t g(t,s) + g(t+1, t+1-v) \tag{2.1}$$

dır.

İspat: $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\sum_{s=a}^{t-v} g(t,s)\right) &= \sum_{s=a}^{t+1-v} g(t+1,s) - \sum_{s=a}^{t-v} g(t,s) \\
&= \sum_{s=a}^{t-v} (g(t+1,s) - g(t,s)) + g(t+1, t+1-v) \\
&= \sum_{s=a}^{t-v} \Delta_t g(t,s) + g(t+1, t+1-v)
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 2.3. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $N-1 < v \leq N$ ile $v > 0$ verilmiş olsun. $\Delta_a^v f : \mathbb{N}_{a+N-v} \to \mathbb{R}$ için aşağıdaki iki tanım denktir:

$$\Delta_a^v f(t) := \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t), \tag{2.2}$$

$$\Delta_a^v f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=a}^{t+v} (t - \sigma(s))^{\underline{-v-1}} f(s) & , N-1 < v < N \\ \Delta^N f(t) & , v = N \end{cases} \tag{2.3}$$

dır (Holm 2011b).

İspat: f ve v teoremin ifadesindeki gibi verilmiş olsun.

$v = N$ ise (2.2) ve (2.3) ifadeleri denktir, çünkü

$$\begin{aligned}
\Delta_a^v f(t) &= \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t) \\
&= \Delta^N \Delta_a^{-0} f(t) \\
&= \Delta^N f(t)
\end{aligned}$$

dır.

$N-1<v<N$ ise Leibniz kuralı N kez uygulanarak

$$
\begin{aligned}
\Delta_a^v f(t) &= \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t) \\
&= \Delta^N \left[\frac{1}{\Gamma(N-v)} \sum_{s=a}^{t-(N-v)} (t-\sigma(s))^{\underline{N-v-1}} f(s) \right] \\
&= \Delta^{N-1} \Delta \left[\frac{1}{\Gamma(N-v)} \sum_{s=a}^{t-(N-v)} (t-\sigma(s))^{\underline{N-v-1}} f(s) \right] \\
&= \frac{\Delta^{N-1}}{\Gamma(N-v)} \left[\sum_{s=a}^{t-(N-v)} (N-v-1)(t-\sigma(s))^{\underline{N-v-2}} f(s) \right. \\
&\quad \left. + (t+1-\sigma(t+1-(N-v)))^{\underline{N-v-1}} f(t+1-(N-v)) \right] \\
&= \Delta^{N-1} \left[\sum_{s=a}^{t-(N-v)} \frac{(N-v-1)(t-\sigma(s))^{\underline{N-v-2}}}{\Gamma(N-v)} f(s) + f(t+1-(N-v)) \right] \\
&= \Delta^{N-1} \left[\sum_{s=a}^{t+1-(N-v)} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{N-v-2}}}{\Gamma(N-v-1)} f(s) \right] \\
&= \Delta^{N-1} \left[\frac{1}{\Gamma(N-v-1)} \sum_{s=a}^{t-(N-v-1)} (t-\sigma(s))^{\underline{N-v-2}} f(s) \right] \\
&= \Delta^{N-1} \left[\frac{1}{\Gamma(N-v-1)} \sum_{s=a}^{t-(N-v-1)} (t-\sigma(s))^{\underline{N-v-2}} f(s) \right] \\
&= \Delta^{N-2} \left[\frac{1}{\Gamma(N-v-2)} \sum_{s=a}^{t-(N-v-2)} (t-\sigma(s))^{\underline{N-v-3}} f(s) \right] \\
&\;\;\vdots \\
&= \Delta^{N-N} \left[\frac{1}{\Gamma(N-v-N)} \sum_{s=a}^{t-(N-v-N)} (t-\sigma(s))^{\underline{N-v-(N+1)}} f(s) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=a}^{t+v} (t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}} f(s)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerde $N-1<v<N$ olduğundan her $k=1,2,...,N$ için $\frac{1}{\Gamma(N-v-k)}$

terimi mevcuttur. Ayrıca, her $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için

$$\begin{aligned}(t-\sigma(s))^{\underline{N-v-k-1}} &= \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-N+v+k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(a+N-v+m-s)}{\Gamma(a+m+k+1-s)}\end{aligned}$$

dir. Bu ifade her $k \in \{1, 2, ..., N\}$ ve her $s \in \{a, a+1, ..., t-(N-v-k)\} = \{a, a+1, ..., a+m+k\}$ için mevcuttur.

Teorem 2.4. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ verilmiş olsun. Bu durumda $\Delta_a^v f$ kesirli farkı $v \geq 0$ a göre süreklidir. Yani, her $v > 0$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için $t_{v,m} := a + \lceil v \rceil - v + m$, $\mathcal{D}\{\Delta_a^v f\}$ kümesinde bir sabit nokta olmak üzere her $m \in \mathbb{N}_0$ sabiti için

$$v \mapsto \Delta_a^v f(t_{v,m})$$

$[0, \infty)$ üzerinde süreklidir (Holm 2011b).

İspat: $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ olsun. İspat için

$$\Delta_a^v f(a+N-v+m),\ (N-1, N) \text{ üzerinde } v \text{ ye göre süreklidir.} \tag{2.4}$$

$$v \to N^- \text{ iken } \Delta_a^v f(a+N-v+m) \to \Delta^N f(a+m) \text{ dır.} \tag{2.5}$$

$$v \to (N-1)^+ \text{ iken } \Delta_a^v f(a+N-v+m) \to \Delta^{N-1} f(a+m-1) \text{ dır.} \tag{2.6}$$

ifadelerinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

(2.4) ifadesini göstermek için herhangi bir $v \in (N-1, N)$ sabiti için

$$\begin{aligned}&\Delta_a^v f(a+N-v+m) \\ =\ & \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=a}^{t+v} (t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}} f(s)\Big|_{t=a+N-v+m} \\ =\ & \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=a}^{a+N+m} (a+N-v+m-\sigma(s))^{\underline{-v-1}} f(s)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=a}^{a+N+m} \frac{\Gamma(a+N-v+m-s)}{\Gamma(a+N+m-s)} f(s) \\
&= \sum_{s=a}^{a+N+m} \frac{1}{\Gamma(a+N+m-s)} \frac{\Gamma(a+N-v+m-s)}{\Gamma(-v)} f(s) \\
&= \sum_{s=a}^{a+N+m-1} \frac{1}{\Gamma(a+N+m-s)} \frac{\Gamma(a+N-v+m-s)}{\Gamma(-v)} f(s) + f(a+N+m) \\
&= \sum_{s=a}^{a+N+m-1} \frac{(a+N-v+m-s-1)...(-v)}{(a+N+m-s)!} f(s) + f(a+N+m)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu son eşitlikte $a+N+M-s=i$ dönüşümü yapılırsa

$$
\Delta_a^v f(a+N-v+m) = \sum_{i=1}^{N+m} \frac{(i-1-v)...(-v)}{i!} f(a+N+m-i) + f(a+N+m) \quad (2.7)
$$

elde edilir. (2.7) den $(N-1,N)$ üzerinde $\Delta_a^v f(a+N-v+m)$ v ye göre süreklidir. Bu da (2.4) tür.

(2.5) ifadesini göstermek için $v \to N^-$ iken (2.7) ifadesinin limiti alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\lim_{v \to N^-} \Delta_a^v f(a+N-v+m) \\
&= \lim_{v \to N^-} \left[\sum_{i=1}^{N+m} \left(\frac{(i-1-v)...(-v)}{i!} f(a+N+m-i) \right) + f(a+N+m) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{N+m} \left(\frac{(i-1-N)...(-N)}{i!} f(a+N+m-i) \right) + f(a+N+m) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(i-1-N)...(-N)}{i!} f(a+N+m-i) \right) + f(a+N+m) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left((-1)^i \frac{(N)...(N-i+1)}{i!} f(a+N+m-i) \right) + f(a+N+m) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left((-1)^i \binom{N}{i} f(a+N+m-i) \right) + f(a+N+m) \\
&= \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \binom{N}{i} f(a+N+m-i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}f((a+m)+N-i)\\
&= \Delta^N f(a+m).
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Son olarak, (2.6) ifadesini göstermek için $v \to (N-1)^+$iken (2.7) ifadesinin limiti alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\lim_{v\to(N-1)^+} \Delta_a^v f(a+N-v+m)\\
&= \lim_{v\to(N-1)^+} \left[\sum_{i=1}^{N+m}\left(\frac{(i-1-v)...(-v)}{i!}f(a+N+m-i)\right)+f(a+N+m)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{N+m}\left(\frac{(i-N)...(-N+1)}{i!}f(a+N+m-i)\right)+f(a+N+m)\\
&= \sum_{i=1}^{N-1}\left((-1)^i\frac{(N-1)...(N-i)}{i!}f(a+N+m-i)\right)+f(a+N+m)\\
&= \sum_{i=1}^{N-1}\left((-1)^i\binom{N-1}{i}f(a+N+m-i)\right)+f(a+N+m)\\
&= \sum_{i=0}^{N-1}\left((-1)^i\binom{N-1}{i}f(a+m+1+(N-1)-i)\right)\\
&= \Delta^{N-1}f(a+m+1)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu üç ifadenin sağlanması teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 2.4. Teorem 2.4, $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\Delta_a^{1.9}f(a+m+0.1),\ \Delta_a^{1.99}f(a+m+0.01),\ \Delta_a^{1.999}f(a+m+0.001),...$$

dizisinin $\Delta^2 f(a+m)$ değerine yaklaştığını gösterir. Bu "basamak sürekliliği" kesirli analize tamsayı basamaktan analizde olmayan bir güzellik katar.

Kesirli fark ve kesirli toplamlar aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Tanım 2.7. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $v > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için f fonksiyonunun v. basamaktan kesirli toplamı,

$$\Delta_a^{-v} f(t) := \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a}^{t-v} (t - \sigma(s))^{\underline{v-1}} f(s),$$

(ii) $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için f fonksiyonunun v. basamaktan kesirli farkı,

$$\Delta_a^{v} f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum\limits_{s=a}^{t+v} (t - \sigma(s))^{\underline{-v-1}} f(s) & ; v \notin \mathbb{N} \\ \Delta^N f(t) & ; v = N \end{cases}$$

dır (Holm 2011b).

Teorem 2.5. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $N - 1 < v \leq N$ olmak üzere $v > 0$ verilmiş olsun.

Her $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için

$$\Delta_a^{v} f(t) = \sum_{k=0}^{v+t-a} (-1)^k \binom{v}{k} f(t + v - k), \tag{2.9}$$

her $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\begin{aligned} \Delta_a^{-v} f(t) &= \sum_{k=0}^{-v+t-a} (-1)^k \binom{-v}{k} f(t - v - k) \qquad (2.10) \\ &= \sum_{k=0}^{-v+t-a} \binom{v+k-1}{k} f(t - v - k) \qquad (2.11) \end{aligned}$$

dır (Holm 2011b).

İspat: f, v, N teoremin ifadesinde verildiği gibi, $m \in \mathbb{N}_0$ için $t = a+N-v+m$ olmak üzere $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.7 nin uygulanmasıyla

$$
\begin{aligned}
\Delta_a^v f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=a}^{t+v} (t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}} f(s) \\
&= \sum_{s=a}^{t+v} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(-v)\Gamma(t-s+v+1)} f(s) \\
&= \sum_{s=a}^{a+N+m} \frac{\Gamma(a+N-v+m-s)}{\Gamma(-v)\Gamma(a+N+m-s+1)} f(s) \\
&= \sum_{s=0}^{N+m} \frac{\Gamma(N-v+m-s)}{\Gamma(-v)\Gamma(N+m-s+1)} f(s+a) \\
&= f(a+N+m) + \sum_{s=0}^{N+m-1} \frac{(N-v+m-s-1)...(-v)}{\Gamma(N+m-s+1)} f(s+a) \\
&= f(a+N+m) + \sum_{s=0}^{N+m-1} (-1)^{N+m-s} \frac{(v)...(v-(N+m-s)+1)}{\Gamma(N+m-s+1)} f(s+a) \\
&= f(a+N+m) + \sum_{s=0}^{N+m-1} (-1)^{N+m-s} \binom{v}{N+m-s} f(s+a) \\
&= \sum_{s=0}^{N+m} (-1)^{N+m-s} \binom{v}{N+m-s} f(s+a)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitlikte s yerine $N+m-k$ alınır ve $t = a+N-v+m$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta_a^v f(t) &= \sum_{k=0}^{N+m} (-1)^k \binom{v}{k} f(a+N+m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{N+m} (-1)^k \binom{v}{k} f(a+N-v+m+v-k) \\
&= \sum_{k=0}^{v+t-a} (-1)^k \binom{v}{k} f(t+v-k)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu (2.9) ifadesini ispatlar. $v = N$ olduğunda (2.9) ifadesi $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\Delta^N f(t) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} f(t+N-k)$$

Binom formülüne indirgenir. Benzer şekilde (2.10) ifadesi de ispatlanabilir. $v = N$

olduğunda $\binom{-N}{k}$ ifadesi

$$\begin{aligned}\binom{-N}{k} &= \frac{\Gamma(-N+1)}{\Gamma(-N-k+1)} \\ &= \frac{(-N)...(-N-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k\binom{N+k-1}{k}\end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradan, $v > 0$ için

$$\begin{aligned}\binom{-v}{k} &= \frac{(-v)!}{(-v-k)!k!} \\ &= \frac{(-v)(-v-1)...(-v-k+1)(-v-k)!}{(-v-k)!k!} \\ &= \frac{(-v)(-v-1)...(-v-(k-1))}{k!} \\ &= (-1)^k\frac{(v+(k-1))...(v+1)(v)}{k!} \\ &= (-1)^k\binom{v+k-1}{k}\end{aligned}$$

dir. Bu ifadenin (2.10) ifadesinde yazılması ile (2.11) elde edilir.

Lemma 2.6. $a \in \mathbb{R}$ ve $\mu > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda, her tanımlı t için

$$\Delta(t-a)^{\underline{\mu}} = \mu(t-a)^{\underline{\mu-1}} \tag{2.12}$$

dır. Ayrıca, $\nu > 0$ olmak üzere $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için

$$\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \mu^{\underline{-\nu}}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}} \tag{2.13}$$

ve $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+N-\nu}$ için

$$\Delta_{a+\mu}^{\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \mu^{\underline{\nu}}(t-a)^{\underline{\mu-\nu}} \tag{2.14}$$

dır (Atici ve Eloe 2007).

İspat: Tanım 2.1 ve Tanım 2.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta(t-a)^{\underline{\mu}} &= (t+1-a)^{\underline{\mu}}-(t-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{\Gamma(t+2-a)}{\Gamma(t+2-a-\mu)}-\frac{\Gamma(t+1-a)}{\Gamma(t+1-a-\mu)} \\
&= \frac{\Gamma(t+2-a)-(t+1-a-\mu)\Gamma(t+1-a)}{\Gamma(t+2-a-\mu)} \\
&= \frac{[(t+1-a)-(t+1-a-\mu)]\,\Gamma(t+1-a)}{\Gamma(t+1-a-(\mu-1))} \\
&= \mu\frac{\Gamma(t+1-a)}{\Gamma(t+1-a-(\mu-1))} \\
&= \mu(t-a)^{\underline{\mu-1}}
\end{aligned}$$

(2.12) elde edilir.

$(t-a)^{\underline{\mu}}$, $(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}$ ve $(t-a)^{\underline{\mu-\nu}}$ fonksiyonları iyi tanımlı ve $\mathbb{N}_{a+\mu}$, $\mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$, $\mathbb{N}_{a+\mu+N-\nu}$ tanım kümelerinde pozitiftir.

(2.13) eşitliğinin ispatı için, $\nu=1$ ve $\nu\in(0,1)\cup(1,\infty)$ durumları ayrı ayrı ele alınacaktır.

$\nu=1$ için, (2.12) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+\mu}^{-1}(t-a)^{\underline{\mu}} &= \Delta_{a+\mu}^{-1}\Delta\left(\frac{(t-a)^{\underline{\mu+1}}}{\mu+1}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)}\sum_{s=a+\mu}^{t-1}\left(\Delta\frac{(s-a)^{\underline{\mu+1}}}{\mu+1}\right) \\
&= \left.\frac{(s-a)^{\underline{\mu+1}}}{\mu+1}\right|_{s=a+\mu}^{t} \\
&= \frac{(t-a)^{\underline{\mu+1}}}{\mu+1}-\frac{\mu^{\underline{\mu+1}}}{\mu+1} \\
&= \frac{1}{\mu+1}(t-a)^{\underline{\mu+1}}-\frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu+1)\Gamma(\mu+1-(\mu+1))}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu+1)\Gamma(\mu+1-(\mu+1))} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu+1)\Gamma(0)} = 0$$

ve

$$\mu^{\underline{-1}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-(-1))} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu+1)\Gamma(\mu+1)} = \frac{1}{\mu+1}$$

olduğundan

$$\Delta_{a+\mu}^{-1}(t-a)^{\underline{\mu}} = \mu^{\underline{-1}}(t-a)^{\underline{\mu+1}}$$

dır.

$\nu \in (0,1) \cup (1,\infty)$ olmak üzere, $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için

$$\begin{aligned} g_1(t) \; &: = \Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} \\ g_2(t) \; &: = \mu^{\underline{-v}}(t-a)^{\underline{\mu+v}} \end{aligned}$$

tanımlayalım. g_1 ve g_2 fonksiyonlarının her ikisinin de iyi tanımlı, birinci basamaktan

$$\begin{cases} (t-a-(\mu+v)+1)\Delta g(t) = (\mu+v)g(t), \;\; t \in \mathbb{N}_{a+\mu+v} \\ \qquad g(a+\mu+\nu) = \Gamma(\mu+1) \end{cases} \tag{2.15}$$

başlangıç değer probleminin çözümü olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} g_1(t)\big|_{t=a+\mu+v} &= \Delta_{a+\mu}^{-v}(t-a)^{\underline{\mu}}\Big|_{t=a+\mu+v} \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}}\Bigg|_{t=a+\mu+v} \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{a+\mu}(a+\mu+v-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)}(\mu+v+a-s-1)^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}}\Bigg|_{s=a+\mu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)}(v-1)^{\underline{v-1}}\mu^{\underline{\mu}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\frac{\Gamma(v)}{\Gamma(1)}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1)} \\
&= \Gamma(\mu+1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
g_2(t)\big|_{t=a+\mu+v} &= \mu^{\underline{-v}}(t-a)^{\underline{\mu+v}}\big|_{t=a+\mu+v} \\
&= \mu^{\underline{-v}}(\mu+v)^{\underline{\mu+v}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}\frac{\Gamma(\mu+v+1)}{\Gamma(1)} \\
&= \Gamma(\mu+1)
\end{aligned}
$$

olduğundan g_1 ve g_2 fonksiyonlarının her ikisi de (2.15) başlangıç değer problemindeki başlangıç koşulunu sağlar.

Şimdi g_1 fonksiyonunun (2.15) başlangıç değer problemindeki fark denklemini sağladığını gösterelim. $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için (2.1) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\Delta g_1(t) &= \Delta\left[\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(v-1)(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\
&\quad+\frac{(t+1-(t+2-v))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)}(t+1-v-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{v-1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\
&\quad+\frac{(v-1)^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)}(t+1-v-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{v-1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\
&\quad+\frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v)\Gamma(1)}(t+1-v-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{v-1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}(s-a)^{\underline{\mu}}+(t+1-v-a)^{\underline{\mu}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-1}} (s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-v+1)} (s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} (t-s-v+1) \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-v+2)} (s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} (t-\sigma(s)-(v-2))(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}} (s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} \left[(t-a-(\mu+v)+1)-(s-a-\mu)\right] (t-\sigma(s))^{\underline{v-2}} (s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{(t-a-(\mu+v)+1)}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-2}} (s-a)^{\underline{\mu}} \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-2}} (s-a)^{\underline{\mu+1}} \\
&= h(t) - k(t)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$
\begin{cases}
h(t) := \frac{(t-a-(\mu+v)+1)}{\Gamma(v)} \sum\limits_{s=a+\mu}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-2}} (s-a)^{\underline{\mu}} \\
k(t) := \frac{1}{\Gamma(v)} \sum\limits_{s=a+\mu}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-2}} (s-a)^{\underline{\mu+1}}
\end{cases}
$$

dır.

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-2}} (s-a)^{\underline{\mu+1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{(t-v+1)-1} \Delta \left((s-a)^{\underline{\mu+1}} \left(-\frac{(t-s)^{\underline{v-1}}}{v-1} \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+\mu}^{(t-v+1)-1} \left(-\frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{v-1} \right) \Delta (s-a)^{\underline{\mu+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\,(s-a)^{\underline{\mu+1}}\left(-\frac{(t-s)^{\underline{v-1}}}{v-1}\right)\Bigg|_{s=a+\mu}^{s=t-v+1} \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{(t-v+1)-1}\left(-\frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{v-1}\right)(\mu+1)(s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}(t-v+1-a)^{\underline{\mu+1}}\left(-\frac{(t-t+v-1)^{\underline{v-1}}}{v-1}\right) \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(v)}(a+\mu-a)^{\underline{\mu+1}}\left(\frac{(t-a-\mu)^{\underline{v-1}}}{v-1}\right) \\
&\quad +\frac{\mu+1}{\Gamma(v)(v-1)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}(t-v+1-a)^{\underline{\mu+1}}\left(-\frac{(v-1)^{\underline{v-1}}}{v-1}\right) \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(v)}\mu^{\underline{\mu+1}}\left(\frac{(t-a-\mu)^{\underline{v-1}}}{v-1}\right) \\
&\quad +\frac{\mu+1}{\Gamma(v)(v-1)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}(t-v+1-a)^{\underline{\mu+1}}\frac{-\Gamma(v)}{\Gamma(1)} \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(v)}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(0)}\frac{\Gamma(t-a-\mu+1)}{(v-1)\Gamma(t-a-\mu-v+2)} \\
&\quad +\frac{\mu+1}{\Gamma(v)(v-1)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\left[\frac{\mu+1}{v-1}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-a)^{\underline{\mu}}-(t-v+1-a)^{\underline{\mu+1}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(t-a-(\mu+v)+1)\Delta g_1(t) &= (v-1)h(t)+(t+1-v-a)^{\underline{\mu+1}} \\
(\mu+1)g_1(t)-(v-1)k(t) &= (t+1-v-a)^{\underline{\mu+1}}
\end{aligned}
$$

dır.

O halde,

$$
\begin{aligned}
(t-a-(\mu+v)+1)\Delta g_1(t) &= (v-1)h(t)+(\mu+1)g_1(t)-(v-1)k(t)\\
&= (v-1)g_1(t)+(\mu+1)g_1(t)\\
&= (\mu+v)g_1(t)
\end{aligned}
$$

olup g_1 fonksiyonu (2.15) başlangıç değer problemindeki fark denklemini sağlar. Son olarak, g_2 fonksiyonunun da (2.15) başlangıç değer problemindeki fark denklemini sağladığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(t-a-(\mu+v)+1)\Delta g_2(t) &= (t-a-(\mu+v)+1)\Delta\left[\mu^{\underline{-v}}(t-a)^{\underline{\mu+v}}\right]\\
&= (t-a-(\mu+v)+1)\mu^{\underline{-v}}(\mu+v)(t-a)^{\underline{\mu+v-1}}\\
&= (t-a-(\mu+v)+1)\mu^{\underline{-v}}(\mu+v)\\
&\quad\times\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a+1-(\mu+v)+1)}\\
&= (\mu+v)\mu^{\underline{-v}}\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a+1-(\mu+v))}\\
&= (\mu+v)\mu^{\underline{-v}}(t-a)^{\underline{\mu+v}}\\
&= (\mu+v)g_2(t).
\end{aligned}
$$

İyi tanımlı (2.15) başlangıç değer probleminin çözümünün tekliğinden dolayı $\mathbb{N}_{a+N-v}$ üzerinde $g_1\equiv g_2$, yani

$$\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}}=\mu^{\underline{-v}}(t-a)^{\underline{\mu+v}}$$

dir.

(2.14) eşitliğini göstermek için, $t\in\mathbb{N}_{a+\mu+N-v}$ için Tanım 2.6 ve (2.13) kuralının uygulanmasıyla

$$
\begin{aligned}
\Delta_{a+\mu}^{v}(t-a)^{\underline{\mu}} &= \Delta^N\left[\Delta_{a+\mu}^{-(N-v)}(t-a)^{\underline{\mu}}\right]\\
&= \Delta^N\left[\mu^{\underline{-(N-v)}}(t-a)^{\underline{\mu+N-v}}\right]\\
&= \Delta^N\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+N-v)}(t-a)^{\underline{\mu+N-v}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.12) eşitliğinin N defa uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
\Delta^{v}_{a+\mu}(t-a)^{\underline{\mu}} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+N-v)}((\mu+N-v)...(\mu+1-v))(t-a)^{\underline{\mu-v}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+N-v)}\frac{\Gamma(\mu+N-v+1)}{\Gamma(\mu+1-v)}(t-a)^{\underline{\mu-v}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-v)}(t-a)^{\underline{\mu-v}} \\
&= \mu^{\underline{v}}(t-a)^{\underline{\mu-v}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.7. $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ olsun. $\nu,\mu>0$ olmak üzere $t\in\mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için

$$\Delta^{-v}_{a+\mu}\Delta^{-\mu}_{a}f(t) = \Delta^{-v-\mu}_{a}f(t) = \Delta^{-\mu}_{a+v}\Delta^{-v}_{a}f(t)$$

dır (Holm 2011b).

İspat: $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $\nu,\mu>0$ olsun. $t\in\mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için

$$\begin{aligned}
\Delta^{-v}_{a+\mu}\Delta^{-\mu}_{a}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=a}^{s-\mu}(s-\sigma(r))^{\underline{\mu-1}}f(r)\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)\Gamma(\mu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-v}\sum_{r=a}^{s-\mu}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-\sigma(r))^{\underline{\mu-1}}f(r) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)\Gamma(\mu)}\sum_{r=a}^{t-(v+\mu)}\sum_{s=r+\mu}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}(s-\sigma(r))^{\underline{\mu-1}}f(r)
\end{aligned}$$

dir. Burada $x = s - \sigma(r)$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+\mu}^{-v}\Delta_a^{-\mu}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(v)\Gamma(\mu)}\sum_{r=a}^{t-(v+\mu)}\left[\sum_{x=\mu-1}^{t-v-r-1}(t-x-r-2))^{\underline{v-1}}x^{\underline{\mu-1}}\right]f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(v)\Gamma(\mu)}\sum_{r=a}^{t-(v+\mu)}\left[\sum_{x=\mu-1}^{(t-r-1)-v}((t-r-1)-\sigma(x))^{\underline{v-1}}x^{\underline{\mu-1}}\right]f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=a}^{t-(v+\mu)}\left[\left(\Delta_{\mu-1}^{-v}(t^{\underline{\mu-1}})\right)\Big|_{t-r-1}f(r)\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=a}^{t-(v+\mu)}(\mu-1)^{\underline{-v}}(t-r-1)^{\underline{\mu-1+v}}f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=a}^{t-(v+\mu)}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+v)}(t-r-1)^{\underline{\mu+v-1}}f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(v+\mu)}\sum_{r=a}^{t-(v+\mu)}(t-\sigma(r))^{\underline{(v+\mu)-1}}f(r)\\
&= \Delta_a^{-(v+\mu)}f(t)\\
&= \Delta_a^{-v-\mu}f(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. v ve μ keyfi olduğundan, daha genel olarak $t \in \mathbb{N}_{a+v+\mu}$ için

$$\Delta_{a+\mu}^{-v}\Delta_a^{-\mu}f(t) = \Delta_a^{-v-\mu}f(t) = \Delta_{a+v}^{-\mu}\Delta_a^{-v}f(t)$$

dir.

Lemma 2.8. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R},\ \mu > 0$ olsun. $M - 1 < \mu \leq M$ olmak üzere herhangi $k \in \mathbb{N}_0,\ t \in \mathbb{N}_{a+\mu}$ için

$$\Delta^k\Delta_a^{-\mu}f(t) = \Delta_a^{k-\mu}f(t) \tag{2.16}$$

ve $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu}$ için

$$\Delta^k\Delta_a^{\mu}f(t) = \Delta_a^{k+\mu}f(t) \tag{2.17}$$

dır (Holm 2011b).

İspat: f, μ, M ve k lemmanın ifadesindeki gibi olsun. İspat aşağıdaki iki durumda yapılacaktır.

1. $\mu = M$ durumu:

$t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta_a^{-1} f(t) &= \Delta\left[\sum_{s=a}^{t-1} f(s)\right] \\
&= \sum_{s=a}^{t} f(s) - \sum_{s=a}^{t-1} f(s) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

dir.

Herhangi $k \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{N}_{a+k}$ için

$$\begin{aligned}
\Delta^k \Delta_a^{-k} f(t) &= \Delta^{k-1}\left[\Delta\Delta_{a+k-1}^{-1}(\Delta_a^{-(k-1)} f(t))\right] \\
&= \Delta^{k-1}\Delta_a^{-(k-1)} f(t), \\
&= ... \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

dir. Böylece, herhangi $t \in \mathbb{N}_{a+M}$ için

$$\Delta^k \Delta_a^{-M} f(t) = \begin{cases} \Delta^{k-M}\left[\Delta^M \Delta_a^{-M} f(t)\right] = \Delta^{k-M} f(t) & , \ k \geq M \\ \Delta^k \Delta_{a+M-k}^{-k}\left[\Delta_a^{-(M-k)} f(t)\right] = \Delta_a^{k-M} f(t) & , k < M \end{cases}$$

elde edilir. (Bu durumda, tamsayı basamaktan farkların değişimli (komütatif) olduğu kullanılmıştır.)

2. $M - 1 < \mu < M$ durumu:

Önce $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu}$ için $\Delta\Delta_a^{\mu} f(t) = \Delta_a^{1+\mu} f(t)$ olduğunu göstermeliyiz. $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu}$

için Tanım 2.5 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta_a^{\mu} f(t) &= \Delta\left[\frac{1}{\Gamma(-\mu)}\sum_{s=a}^{t+\mu}(t-\sigma(s))^{\underline{-\mu-1}} f(s)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\left[\Delta\sum_{s=a}^{t+\mu}(t-\sigma(s))^{\underline{-\mu-1}} f(s)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Parantezin içindeki terime (2.1) kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta_a^{\mu} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\left[\sum_{s=a}^{t+\mu}(-\mu-1)(t-\sigma(s))^{\underline{-\mu-2}} f(s)\right. \\
&\quad \left. + (-\mu-1)^{\underline{-\mu-1}} f(t+\mu+1)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\left[\sum_{s=a}^{t+\mu}(-\mu-1)(t-\sigma(s))^{\underline{-\mu-2}} f(s) + \Gamma(-\mu) f(t+\mu+1)\right] \\
&= \frac{(-\mu-1)}{\Gamma(-\mu)}\sum_{s=a}^{t+\mu}(t-\sigma(s))^{\underline{-\mu-2}} f(s) + \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(-\mu)} f(t+\mu+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\mu-1)}\sum_{s=a}^{t+\mu}(t-\sigma(s))^{\underline{-\mu-2}} f(s) + f(t+\mu+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\mu-1)}\sum_{s=a}^{t+\mu+1}(t-\sigma(s))^{\underline{-\mu-2}} f(s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\mu-1)}\sum_{s=a}^{t-(-\mu-1)}(t-\sigma(s))^{\underline{(-\mu-1)-1}} f(s) \\
&= \Delta_a^{-(-\mu-1)} f(t) \\
&= \Delta_a^{1+\mu} f(t)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $k \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu}$ için

$$\begin{aligned}
\Delta^k\Delta_a^{\mu} f(t) &= \Delta^{k-1}\left[\Delta\Delta_a^{\mu} f(t)\right] \\
&= \Delta^{k-1}\Delta_a^{1+\mu} f(t) \\
&= ... \\
&= \Delta_a^{k+\mu} f(t)
\end{aligned}$$

dir. Böylece (2.17) ifadesinin ispatı tamamlanmış olur.

(2.16) ifadesinin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.9. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $v, \mu > 0$ olsun. $N-1 < v \leq N$ olmak üzere $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+N-v}$ için

$$\Delta_{a+\mu}^{v}\Delta_a^{-\mu}f(t) = \Delta_a^{v-\mu}f(t)$$

dır (Holm 2011b).

İspat: f, v, N ve μ teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+N-v}$ için Teorem 2.7 ve Lemma 2.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+\mu}^{v}\Delta_a^{-\mu}f(t) &= \Delta^N\Delta_{a+\mu}^{-(N-v)}\Delta_a^{-\mu}f(t) \\
&= \Delta^N\Delta_a^{-(N-v+\mu)}f(t) \\
&= \Delta_a^{N-(N-v+\mu)}f(t) \\
&= \Delta_a^{v-\mu}f(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.10. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ve $v > 0$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t) = \Delta_a^{k-v}f(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(a)}{\Gamma(v-k+j+1)}(t-a)^{\underline{v-k+j}} \tag{2.18}$$

dır. Ayrıca, $\mu > 0$ olmak üzere $M-1 < \mu \leq M$ ve $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu+v}$ için

$$\Delta_{a+M-\mu}^{-v}\Delta_a^{\mu}f(t) = \Delta_a^{\mu-v}f(t) - \sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta^{j-(M-\mu)}f(a+M-\mu)}{\Gamma(v-M+j+1)}(t-a-M+\mu)^{\underline{v-M+j}} \tag{2.19}$$

dır (Holm 2011b).

İspat: $k \in \mathbb{N}_0$ verilmiş olsun ve $v \notin \{1, 2, ..., k-1\}$ olmak üzere v negatif olmayan olsun. Bu durumda, $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için Tanım 2.7 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}\left[\Delta^k f(s)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}\left[\Delta\Delta^{k-1} f(s)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. k kez kısmi toplama kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t) &= \frac{1}{\Gamma(v)}\left.(t-s)^{\underline{v-1}}\Delta^{k-1}f(s)\right|_{s=a}^{t-v+1} \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}-(v-1)(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}\Delta^{k-1}f(s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\left[(v-1)^{\underline{v-1}}\Delta^{k-1}f(t-v+1)-(t-a)^{\underline{v-1}}\Delta^{k-1}f(a)\right] \\
&\quad +\frac{(v-1)}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}\Delta^{k-1}f(s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\left[\Gamma(v)\Delta^{k-1}f(t-v+1)-(t-a)^{\underline{v-1}}\Delta^{k-1}f(a)\right] \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(v-1)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}\Delta^{k-1}f(s) \\
&= \Delta^{k-1}f(t-v+1)-\frac{(t-a)^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)}\Delta^{k-1}f(a) \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(v-1)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}\Delta^{k-1}f(s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v-1)}\sum_{s=a}^{t-v+1}(t-\sigma(s))^{\underline{v-2}}\Delta^{k-1}f(s)-\frac{\Delta^{k-1}f(a)}{\Gamma(v)}(t-a)^{\underline{v-1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v-1)}\sum_{s=a}^{t-(v-1)}(t-\sigma(s))^{\underline{(v-1)-1}}\Delta^{k-1}f(s)-\frac{\Delta^{k-1}f(a)}{\Gamma(v)}(t-a)^{\underline{v-1}} \\
&= \Delta_a^{-(v-1)}\left[\Delta^{k-1}f(t)\right]-\frac{\Delta^{k-1}f(a)}{\Gamma(v)}(t-a)^{\underline{v-1}} \\
&= \Delta_a^{1-v}\Delta^{k-1}f(t)-\frac{\Delta^{k-1}f(a)}{\Gamma(v)}(t-a)^{\underline{v-1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta_a^{2-v}\Delta^{k-2}f(t) - \frac{\Delta^{k-1}f(a)}{\Gamma(v)}(t-a)^{\underline{v-1}} - \frac{\Delta^{k-2}f(a)}{\Gamma(v-1)}(t-a)^{\underline{v-2}} \\
&\quad \vdots \\
&= \Delta_a^{k-v}f(t) - \sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta^{k-i}f(a)}{\Gamma(v-i+1)}(t-a)^{\underline{v-i}} \\
&= \Delta_a^{k-v}f(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^{j}f(a)}{\Gamma(v-k+j+1)}(t-a)^{\underline{v-k+j}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Kabulden, bu ifade iyi tanımlı ve $v-k+j+1 \notin \{...,-2,-1\}$ dır.

$v \in \{1,2,...,k-1\}$ olsun. Bu durumda $k-v \in \mathbb{N}$ dir. Teoremler 2.7, 2.9 ve 2.12 nin kullanılmasıyla $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$
\begin{aligned}
\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t) &= \Delta^{k-v}\Delta_a^{-(k-v)}\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t) \\
&= \Delta^{k-v}\left[\Delta_a^{-(k-v)}\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t)\right] \\
&= \Delta^{k-v}\left[\Delta_a^{-k}\Delta^k f(t)\right] \\
&= \Delta^{k-v}\left[f(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)}(t-a)^{\underline{j}}\right] \\
&= \Delta^{k-v}f(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)}\left[\Delta^{k-v}(t-a)^{\underline{j}}\right] \\
&= \Delta^{k-v}f(t) - \sum_{j=k-v}^{k-1}\frac{\Delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-k+v)}(t-a)^{\underline{j-k+v}} \\
&= \Delta^{k-v}f(t) - \sum_{j=k-v}^{k-1}\frac{\Delta^j f(a)}{\Gamma(j+1-k+v)}(t-a)^{\underline{j-k+v}}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Yukarıdaki iki durum birleştirilerek (2.18) ispatlanır. Yani, $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(i)\ v &\notin \{1,2,...,k-1\} \\
(ii)\ v &\in \{1,2,...,k-1\}
\end{aligned}
$$

durumları için (2.18) ispatlanmış olur.

Şimdi (2.19) ifadesini ispatlamak için $v, \mu > 0$ ve $M-1 < \mu \leq M$ olsun.

$$g(t) := \Delta_a^{-(M-\mu)} f(t) \text{ ve } b := a + M - \mu$$

tanımlayalım. Burada b, g nin tanım kümesinin ilk elemanıdır. $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu+v}$ için Teorem 2.9 ve $v > M$ durumunda Teorem 2.7 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+M-\mu}^{-v} \Delta_a^{\mu} f(t) &= \Delta_{a+M-\mu}^{-v} \left[\Delta^M \Delta_a^{-(M-\mu)} f(t) \right] \\
&= \Delta_{a+M-\mu}^{-v} \Delta^M g(t) \\
&= \Delta_{a+M-\mu}^{M-v} g(t) - \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\Delta^j g(b)}{\Gamma(v-M+j+1)} (t-b)^{\underline{v-M+j}} \\
&= \Delta_{a+M-\mu}^{M-v} \Delta_a^{-(M-\mu)} f(t) - \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\Delta^j \Delta_a^{-(M-\mu)} f(b)}{\Gamma(v-M+j+1)} (t-b)^{\underline{v-M+j}} \\
&= \Delta_a^{\mu-v} - \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\Delta_a^{j-M+\mu} f(a+M-\mu)}{\Gamma(v-M+j+1)} (t-a-M+\mu)^{\underline{v-M+j}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.11. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $N-1 < v \leq N$ ve $M-1 < \mu \leq M$ olmak üzere $v, \mu > 0$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu+N-v}$ için

$$\Delta_{a+M-\mu}^{v} \Delta_a^{\mu} f(t) = \Delta_a^{v+\mu} f(t) - \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\Delta_a^{j-M+\mu} f(a+M-\mu)}{\Gamma(-v-M+j+1)} (t-a-M+\mu)^{\underline{-v-M+j}} \tag{2.20}$$

dır. (2.17) ve Uyarı 2.1 den $v \in \mathbb{N}_0$ durumunda toplamdaki terimler kaybolur (Holm 2011b).

İspat: f, v ve μ teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. $v = N$ durumunda Lemma 2.8 dan (2.20) açıktır. Diğer taraftan, $N-1 < v < N$ ise $t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu+N-v}$ için

(2.16) ve (2.19) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\Delta^{v}_{a+M-\mu}\Delta^{\mu}_{a}f(t) &= \Delta^{N}\left[\Delta^{-(N-v)}_{a+M-\mu}\Delta^{\mu}_{a}f(t)\right] \\
&= \Delta^{N}\Delta_a^{-N+v+\mu}f(t) \\
&\quad -\Delta^{N}\left[\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(a+M-\mu)}{\Gamma(N-v-M+j+1)}(t-a-M+\mu)^{\underline{N-v-M+j}}\right] \\
&= \Delta_a^{v+\mu}f(t) \\
&\quad -\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(a+M-\mu)}{\Gamma(N-v-M+j+1)}\Delta^{N}\left[(t-a-M+\mu)^{\underline{N-v-M+j}}\right] \\
&= \Delta_a^{v+\mu}f(t) \\
&\quad -\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(a+M-\mu)}{\Gamma(-v-M+j+1)}\left[(t-a-M+\mu)^{\underline{-v-M+j}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 2.1. $f:\mathbb{N}_a\to\mathbb{R}$, $N-1<v\leq N$ ve $M-1<\mu\leq M$ olmak üzere $v,\mu>0$ olsun. Bu durumda $t\in\mathbb{N}_{a+M-\mu+N-v}$ için

$$
\begin{aligned}
\Delta^{v}_{a+M-\mu}\Delta^{\mu}_{a}f(t) &= \Delta^{\mu}_{a+N-v}\Delta^{v}_{a}f(t) \\
&\quad +\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Delta_a^{j-N+v}f(a+N-v)}{\Gamma(-\mu-N+j+1)}(t-a-N+v)^{\underline{-\mu-N+j}} \\
&\quad -\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(a+M-\mu)}{\Gamma(-v-M+j+1)}(t-a-M+\mu)^{\underline{-v-M+j}}
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca $t\in\mathbb{N}_{a+2(N-v)}$ için

$$
\Delta^{v}_{a+N-v}\Delta^{v}_{a}f(t)=\Delta_a^{2v}f(t)-\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Delta_a^{j-N+V}f(a+N-v)}{\Gamma(-v-N+j+1)}(t-a-N+v)^{\underline{-v-N+j}}
$$

dir.

Örnek 2.1. v ve μ, toplamları tamsayı olan fakat tamsayı olmayan sayılar ($v,\mu\notin\mathbb{Z}$, $(v+\mu)\in\mathbb{Z}$) olmak üzere $\Delta^{v}_{a+M-\mu}\circ\Delta^{\mu}_{a}$ kesirli birleşiminin, tamsayı basamaktan

$\Delta^{v+\mu}$ operatöründen ne kadar farklı olduğunu araştıralım.

$f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ olsun. $N-1 < v < N$ ve $M-1 < \mu < M$ olmak üzere $v+\mu = P$ olacak şekilde $M, N, P \in \mathbb{N}$ bulunsun. Bu durumda $N+M = P+1$ dir. Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left\{\Delta^v_{a+M-\mu} \circ \Delta^\mu_a f\right\} &= \mathbb{N}_{a+M-\mu+N-v} \\ &= \mathbb{N}_{a+(M+N)-(\mu+v)} \\ &= \mathbb{N}_{a+1} \\ &\subseteq \mathcal{D}\left\{\Delta^P f\right\} \end{aligned}$$

dir. $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için (2.20) den

$$\begin{aligned} & \Delta^v_{a+M-\mu}\Delta^\mu_a f(t) \\ = \; & \Delta^P_a f(t) - \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\Delta_a^{j-M+\mu} f(a+M-\mu)}{\Gamma(-v-M+j+1)}(t-a+M-\mu)^{\underline{-v-M+j}} \end{aligned}$$

elde edilir. $j \in \{0, ..., M-1\}$ için

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{v\to N^- \\ \mu\to(M-1)^+}} (t-a-M+\mu)^{\underline{-v-M+j}} &= (t-a-1)^{\underline{j-P-1}} \\ &= \frac{\Gamma(t-a)}{\Gamma(t-a+P+1-j)} \in (0,\infty), \end{aligned}$$

$$\lim_{\mu\to(M-1)^+} \Delta_a^{j-M+\mu} f(a+M-\mu) = \Delta_a^{j-1} f(a+1) \in [0,\infty)$$

ve

$$\lim_{v\to N^-} \frac{1}{\Gamma(-v-M+j+1)} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{\substack{v\to N^- \\ \mu\to(M-1)^+}} \left(\Delta^P_a f(t) - \Delta^v_{a+M-\mu}\Delta^\mu_a f(t)\right) = 0$$

bulunur.

Örnek 2.2. Örnek 2.1 in kabulleri altında t büyüdükçe $\Delta^v_{a+M-\mu} \circ \Delta^\mu_a$ kesirli birleşim operatörü ile tamsayı basamaktan $\Delta^{v+\mu}$ operatörü arasındaki farkı karşlaştıralım.

$f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ olsun. $N-1<v<N$ ve $M-1<\mu<M$ olmak üzere $v+\mu=P$ olacak şekilde $M,N,P\in\mathbb{N}$ bulunsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\left(\Delta_a^P f(t)-\Delta_{a+M-\mu}^{v}\Delta_a^{\mu} f(t)\right)\\
=&\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(a+M-\mu)}{\Gamma(-v-M+j+1)}(t-a+M-\mu)^{\underline{-v-M+j}}\right)\\
=&\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(a+M-\mu)}{\Gamma(-v-M+j+1)}\lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma(t-a-M+\mu+1)}{\Gamma(t-a+P+1-j)}
\end{aligned}$$

dır. Sıkıştırma teoremi gereğince, $t\in\mathbb{N}_{a+2}$ için

$$\begin{aligned}
&t-a-M+\mu+1\geq 2 \text{ ve } t-a+P+1-j\geq 2\\
\Rightarrow\;& 0\leq\frac{\Gamma(t-a-M+\mu+1)}{\Gamma(t-a+P+1-j)}\leq\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a+2)}=\frac{1}{t-a+1}\\
\Rightarrow\;& \lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma(t-a-M+\mu+1)}{\Gamma(t-a+P+1-j)}=0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{t\to\infty}\left(\Delta_a^P f(t)-\Delta_{a+M-\mu}^{v}\Delta_a^{\mu} f(t)\right)=0$$

bulunur.

Aşağıdaki tablo $f(t)=e^t,\ a=0$ ve $v=\mu=\frac{1}{2}$ özel durumu için $\Delta_{a+M-\mu}^{v}\Delta_a^{\mu}f(t)$ ve $\Delta_a^P f(t)$ operatörleri arasındaki farkların ilk yedisini göstermektedir.

t	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{1/2}^{1/2}\Delta_0^{1/2}e^t-\Delta e^t$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{7}{256}$	$\frac{21}{1024}$	$\frac{33}{2048}$	$\frac{429}{32768}$

3. AYRIK KESİRLİ ANALİZDE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Tanım 3.1. $\mathcal{R}$ regressive cümlesi

$$\mathcal{R} := \{s \in \mathbb{C} : s \neq -1\}$$

dır (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 3.2. $\mathcal{R}$ cümlesi üzerinde

$$\begin{aligned} p \oplus q &: = p + q + pq \\ \ominus p &: = \frac{-p}{1+p} \\ p \ominus q &: = p \oplus [\ominus q] \end{aligned}$$

dır (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 3.3. $f : \mathbb{T}_a \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü $s \in \mathcal{D}\{f\}$ için

$$\mathcal{L}_a\{f\}(s) := \int_a^\infty e^\sigma_{\ominus s}(t,a) f(t) \Delta t \tag{3.1}$$

dır. Burada $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{T}_a$ infimumu a olan sınırsız bir zaman skalası ve $\mathcal{D}\{f\}$ integralin yakınsak olduğu tüm regressive kompleks sabitlerin cümlesidir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 3.4. $\mathbb{N}_a$ cümlesi üzerindeki üstel fonksiyon $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$e_p(t,a) := (1+p)^{t-a}$$

dır. Bu durumda (3.1) Laplace dönüşümündeki üstel fonksiyon

$$\begin{aligned} e^{\sigma}_{\ominus s}(t,a) &= e_{\ominus s}(t+1,a) \\ &= (1+\ominus s)^{t+1-a} \\ &= \left(1-\frac{s}{1+s}\right)^{t+1-a} \\ &= \frac{1}{(s+1)^{t-a+1}} \end{aligned}$$

şeklindedir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 3.5. $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $s \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a\{f\}(s): &= \int_a^{\infty} \frac{f(t)}{(s+1)^{t-a+1}}\Delta t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{f(t+a)}{(s+1)^{t+1}}\Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

dır. $s \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ için (3.2) serisi yakınsaktır. Bu seri, $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Ayrık Laplace Dönüşümüdür (Holm 2011c).

Tanım 3.6. $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ olmak üzere yeterince büyük $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$|f(t)| \leq Ar^t$$

olacak şekilde bir $A > 0$ sabiti mevcut ise f fonksiyonuna r üstel basamaklıdır denir.

Sonuç 3.1. $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r > 0$ üstel basamaklı olsun. Bu durumda, her $t \in \mathbb{N}_{a+m}$ için $|f(t)| \leq Ar^t$ olacak şekilde $A > 0$ sabiti ve $m \in \mathbb{N}_0$ vardır. Böylece

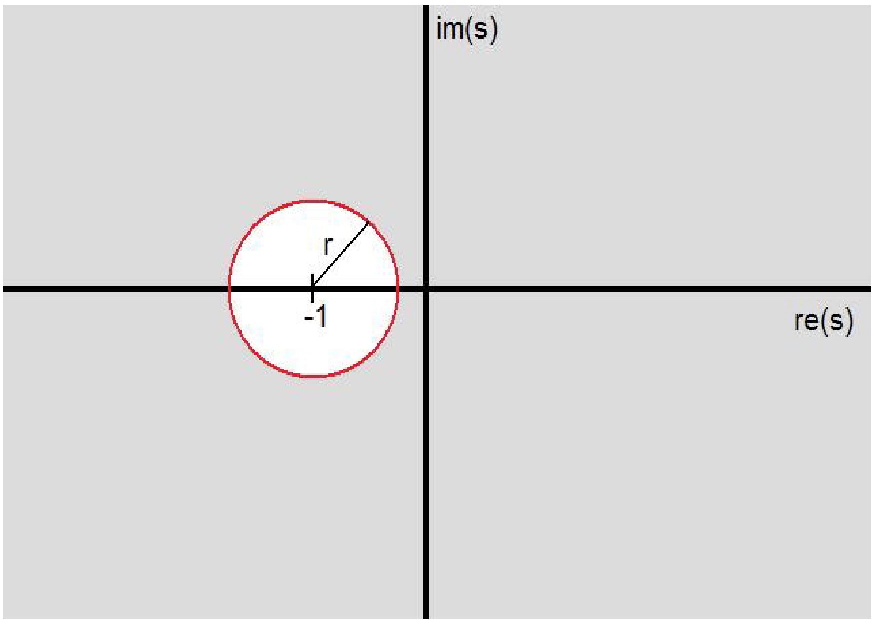
$\overline{B_{-1}(r)}$ küresinin dışındaki herhangi $s \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a\{f\}(s) &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}}\right| \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}}\right| + \sum_{k=m}^{\infty}\left|\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}}\right| + \sum_{k=m}^{\infty}\frac{Ar^{k+a}}{|s+1|^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}}\right| + \frac{Ar^a}{|s+1|}\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{r}{|s+1|}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}}\right| + \frac{Ar^a}{|s+1|}\frac{\left(\frac{r}{|s+1|}\right)^m}{1-\left(\frac{r}{|s+1|}\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}}\right| + \frac{A}{|s+1|^m}\frac{r^{a+m}}{|s+1|-r} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu sonuç, f hangi basamaktan üstel olursa olsun, tanım kümesini kısıtlayarak $\mathcal{L}_a\{f\}(s)$ operatörünün yakınsaklığının garanti edilmesini sağlar.

Lemma 3.1. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r > 0$ üstel basamaklı olsun. Bu durumda, $\mathcal{L}_a\{f\}(s)$ operatörü $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için mevcuttur (Holm 2011c).

Bu bölümün geri kalanı için, çalışmalarımızda üstel basamak $\mathcal{L}_a\{f\}(s)$ Laplace dönüşümünün $\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ tanım kümesinde var olmasını sağlayan fonksiyonlara kısıtlanacaktır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Laplace Dönüşümü için yakınsaklık kümesi

Örnek 3.1. $p \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbb{N}_a$ kümesinde üstel fonksiyon $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$e_p(t,a) = (1+p)^{t-a}$$

şeklindedir. Aşikar olarak, $(1+p)^{t-a}$ ifadesi $1+p$ üstel basamaklıdır. O halde, $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(1+p)}$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a\left\{(1+p)^{t-a}\right\}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{(s+1)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p+1}{s+1}\right)^k \\
&= \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{1-\frac{p+1}{s+1}}\right) \\
&= \frac{1}{s-p}
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki formülün önemli bir durumu $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_a\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

olmasıdır.

Lemma 3.2. $f, g : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $r > 0$ üstel basamaklı ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_a \left\{ c_1 f + c_2 g \right\}(s) = c_1 \mathcal{L}_a \left\{ f \right\}(s) + c_2 \mathcal{L}_a \left\{ g \right\}(s) \tag{3.3}$$

ve

$$\mathcal{L}_a \left\{ f \right\}(s) \equiv \mathcal{L}_a \left\{ g \right\}(s) \Leftrightarrow f(t) \equiv g(t) \tag{3.4}$$

dır (Bohner ve Peterson 2001).

Lemma 3.3. $m \in \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{N}_{a-m} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $r > 0$ üstel basamaklı olsun. $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{a-m} \left\{ f \right\}(s) = \frac{1}{(s+1)^m} \mathcal{L}_a \left\{ f \right\}(s) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(k+a-m)}{(s+1)^{k+1}} \tag{3.5}$$

ve

$$\mathcal{L}_{a+m} \left\{ g \right\}(s) = (s+1)^m \mathcal{L}_a \left\{ g \right\}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} (s+1)^{m-1-k} g(k+a) \tag{3.6}$$

dır (Holm 2011c).

İspat: f, g, r ve m lemmanın ifadesinde verildiği gibi olsun. Bu durumda $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{a-m}\{f\}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k+a-m)}{(s+1)^{k+1}}\\
&= \sum_{k=m}^{\infty}\frac{f(k+a-m)}{(s+1)^{k+1}}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(k+a-m)}{(s+1)^{k+1}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+m+1}}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(k+a-m)}{(s+1)^{k+1}}\\
&= \frac{1}{(s+1)^{m}}\mathcal{L}_{a}\{f\}(s)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(k+a-m)}{(s+1)^{k+1}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{a+m}\{g\}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(k+a+m)}{(s+1)^{k+1}}\\
&= \sum_{k=m}^{\infty}\frac{g(k+a)}{(s+1)^{k-m+1}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(k+a)}{(s+1)^{k-m+1}}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g(k+a)}{(s+1)^{k-m+1}}\\
&= (s+1)^{m}\mathcal{L}_{a}\{g\}(s)-\sum_{k=0}^{m-1}(s+1)^{m-1-k}g(k+a)
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç 3.2. (3.5) ve (3.6) dan $s\in\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{(a+m)-m}\{f\}(s)=\mathcal{L}_{(a-m)+m}\{f\}(s)=\mathcal{L}_{a}\{f\}(s)$$

özdeşliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

Ayrık kesirli analizde Laplace dönüşümünün uygulanmasında, genel zaman skalası teorisinde tanımlanan ve geliştirilen Taylor monomial oldukça kullanışlıdır.

Tanım 3.7. $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}_a$ için ardışık olarak Taylor monomial

$$\begin{cases} h_0(t,a) := 1 \\ h_{n+1}(t,a) := \int\limits_a^t h_n(s,a)\Delta s \end{cases} \tag{3.7}$$

dır. Taylor monomial açıkca $n \in \mathbb{N}_0,\ t \in \mathbb{N}_a$ için

$$h_n(t,a) = \frac{(t-a)^{\underline{n}}}{n!}$$

olarak yazılabilir (Bohner ve Peterson 2001).

Taylor monomial daha genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.8. Her $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{...,-2,-1\}$ olmak üzere μ. Taylor monomial $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$h_\mu(t,a) := \frac{(t-a)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)}$$

dır (Holm 2011c).

Lemma 3.4. $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{...,-2,-1\}$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için $\mu = b - a$ olsun. Bu durumda $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\mathcal{L}_b\left\{h_\mu(.,a)\right\}(s) = \frac{(s+1)^\mu}{s^{\mu+1}} \tag{3.8}$$

dır (Holm 2011c).

İspat: $|x| < |y|$ olacak şekilde $v, x, y \in \mathbb{R}$ için genel Binom formülü

$$(x+y)^v = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{v}{k}x^k y^{v-k}$$

dır, burada

$$\binom{v}{k} := \frac{v^{\underline{k}}}{k!}$$

dır. $k \in \mathbb{N}_0$ ve $v > 0$ için

$$\begin{aligned}
\binom{-v}{k} &= \frac{(-v)^{\underline{k}}}{k!} \\
&= \frac{(-v)...(-v-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(k+v-1)^{\underline{k}}}{k!} \\
&= (-1)^k \binom{k+v-1}{v-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki iki durum birleştirilerek $v \in \mathbb{R}$ ve $|y| < 1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-y)^v} = ((-y)+1)^{-v} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-v}{k} (-y)^k 1^{-v-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-v}{k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+v-1}{v-1} y^k
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\mu = b - a$ olduğundan $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{(s+1)^\mu}{s^{\mu+1}} &= \frac{1}{s+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{s+1}\right)^{\mu+1}} \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\mu}{\mu} \frac{1}{(s+1)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\mu)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h_\mu(k+b, a) \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \\
&= \mathcal{L}_b \left\{ h_\mu(., a) \right\} (s)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 3.1. Lemma 3.1'den $h_\mu(t, a)$, $r > 0$ üstel basamaklı ise, $\mathcal{L}_b \left\{ h_\mu(., a) \right\} (s)$ kompleks düzlemde mevcuttur.

Her $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{...,-2,-1\}$ için, h_μ fonksiyonunun $r>1$ üstel basamaklı olduğunu gösterelim. $\mu>0$ olsun ve $M-1<\mu\leq M$ olacak şekilde $M\in\mathbb{N}$ alalım. Bu durumda herhangi bir $r>1$ ve yeterince büyük $t\in\mathbb{N}_a$ için

$$\begin{aligned} h_\mu(t,a) &= \frac{(t-a)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)} \\ &= \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+1-\mu)} \\ &< \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+1-M)} \\ &= \frac{(t-a)...(t-a-M+1)}{\Gamma(\mu+1)} \\ &< \frac{(t-a)^M}{\Gamma(\mu+1)} \\ &< \frac{r^t}{\Gamma(\mu+1)} \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan, $\mu\leq 0$ ise yeterince büyük $t\in\mathbb{N}_a$ için

$$\begin{aligned} h_\mu(t,a) &= \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+1-\mu)} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu iki durum birleştirilirse, $\varepsilon>0$ için $h_\mu(t,a)$ fonksiyonunun $1+\varepsilon$ üstel basamaklı olduğu elde edilir. O halde, Lemma 3.1, $\mathcal{L}_a\{h_\mu(.,a)\}(s)$ operatörünün

$$\begin{aligned} \bigcup_{r>1}\left(\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}\right) &= \mathbb{C}\backslash\left(\bigcap_{r>1}\overline{B_{-1}(r)}\right) \\ &= \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(1)} \end{aligned}$$

üzerinde tanımlı olduğunu söyler. Bu durum, Lemma 3.4'teki tanım kümesinin doğru olduğunu gösterir.

Tanım 3.8 (Konvolüsyon)**.** $f, g : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(f * g)(t) := \sum_{r=a}^{t-1} f(r)g(t-1-r+a), \ t \in \mathbb{N}_a \tag{3.9}$$

dır (Holm 2011c).

Lemma 3.5. $f, g : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $r > 0$ üstel basamaklı olsun. Bu durumda $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_a \{f * g\}(s) = \mathcal{L}_a \{f\}(s) \mathcal{L}_a \{g\}(s) \tag{3.10}$$

dır (Holm 2011c).

İspat: f, g ve r lemmanın ifadesindeki gibi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a \{f * g\}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f*g)(k+a)}{(s+1)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \sum_{r=a}^{k+a-1} f(r)g(k+a-r-1+a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f(r+a)g(k-r-1+a)}{(s+1)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{k} \frac{f(r-1+a)g(k-r+a)}{(s+1)^{k+1}}
\end{aligned}$$

dır. Seriler için Cauchy çarpımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a \{f * g\}(s) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(l-r+a+(r-1))}{(s+1)^{l-r+1+(r-1)}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(l-1+a)}{(s+1)^{l}} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(l+a-1)}{(s+1)^{l}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(l-1+a)}{(s+1)^{l}} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g(l+a)}{(s+1)^{l+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f(l+a)}{(s+1)^{l+1}} \\
&= \mathcal{L}_a \{f\}(s) \mathcal{L}_a \{g\}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere $N-1 < v \leq N$ olacak şekilde $v > 0$ olsun. f fonksiyonunun v. basamaktan kesirli toplamı $t \in \mathbb{N}_{a+v-N}$ için

$$\Delta_a^{-v} f(t) := \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-1}} f(s)$$

dır. Burada $\Delta_a^{-v} f$ operatörü $\{a+v-N, ..., a+v-1\}$ kümesi üzerinde N tane başlangıç sıfırına sahiptir. Benzer olarak, f fonksiyonunun v. basamaktan kesirli farkı $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için

$$\Delta_a^{v} f(t) := \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t)$$

dır. Teorem 2.3 te bu tanımın $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için

$$\Delta_a^{v} f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum\limits_{s=a}^{t+v} (t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}} f(s) & , N-1 < v < N \\ \Delta^N f(t) & , v = N \end{cases}$$

tanımına denk olduğu gösterilmiştir.

Uyarı 3.2. $N \in \mathbb{N}_0$ için

$$\mathcal{L}_a \left\{ \Delta_a^{-N} f \right\}(s) = \frac{\mathcal{L}_a \{f\}(s)}{s^N} \tag{3.11}$$

ve

$$\mathcal{L}_a \left\{ \Delta_a^{-N} f \right\}(s) = s^N \mathcal{L}_a \{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{N-1-j} f(a) \tag{3.12}$$

dır.

Lemma 3.6. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r > 0$ üstel basamaklı ve $v > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda, $\epsilon > 0$ için $\Delta_a^{-v} f$ ve $\Delta_a^{v} f$ operatörleri $r + \epsilon$ üstel basamaklıdır (Holm 2011c).

İspat: f, r üstel basamaklı olduğundan,

$$t \geq T \text{ için } |f(t)| \leq Ar^t$$

olacak şekilde bir $A > 0$ ve $T \in \mathbb{N}_a$ vardır.

Önce $\Delta_a^{-v} f$ toplamının üstel basamağını inceleyelim. $\epsilon > 0$ belirli olsun ve $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ olmak üzere $t - v \geq T + 2$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left|\Delta_a^{-v} f(t)\right| &= \left|\sum_{s=a}^{T-1} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} f(s) + \sum_{s=T}^{t-v} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} f(s)\right| \\ &\leq \sum_{s=a}^{T-1} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} |f(s)| + \sum_{s=T}^{t-v} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} A r^s \qquad (3.13) \end{aligned}$$

dır. (3.13) eşitsizliğindeki iki terimi ayrı ayrı ele alalım. İkinci toplam için

$$\begin{aligned} \sum_{s=T}^{t-v} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} A r^s &= \frac{A}{\Gamma(v)} \sum_{s=T}^{t-v} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-v+1)} r^s \\ &= \frac{A}{\Gamma(v)} \Bigg(\Gamma(v) r^{t-v} + \Gamma(v+1) r^{t-v-1} \\ &\quad + \sum_{s=T}^{t-v-2} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-v+1)} r^s \Bigg) \\ &< \frac{A}{r^v}\left(1 + \frac{v}{r}\right) r^t + \frac{A}{\Gamma(v)} \sum_{s=T}^{t-v-2} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-v+1)} r^s \\ &= \frac{A}{r^v}\left(1 + \frac{v}{r}\right) r^t + \frac{A}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-v-T-2} \frac{\Gamma(t-s-T)}{\Gamma(t-s-T-v+1)} r^s \\ &= \frac{A}{r^v}\left(1 + \frac{v}{r}\right) r^t \\ &\quad + \frac{A}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-v-T-2} (t-T-s-1)...(t-T-s-N+1) r^s \\ &< \frac{A}{r^v}\left(1 + \frac{v}{r}\right) r^t + \frac{A t^{N-1}}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-v-T-2} r^s \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $r \in (0, 1]$ ise yeterince büyük $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{s=T}^{t-v} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} A r^s &< \frac{A}{r^v}\left(1 + \frac{v}{r}\right) r^t + \frac{A t^{N-1}}{\Gamma(v)} \\ &\leq \left(\frac{A}{r^v}\left(1 + \frac{v}{r}\right) + \frac{A}{\Gamma(v)}\right) r^t \\ &\leq \frac{1}{2}(r+\epsilon)^t \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, $r \in (1,\infty)$ ise yeterince büyük $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{s=T}^{t-v} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} A r^s &< \frac{A}{r^v}\left(1+\frac{v}{r}\right) r^t + \frac{A t^{N-1}}{\Gamma(v)}(t-v-T-1) r^{t-v-T-2} \\ &< \left(\frac{A}{r^v}\left(1+\frac{v}{r}\right) + \frac{A t^{N-1}}{\Gamma(v)}\right) r^t \\ &\leq \frac{1}{2}(r+\epsilon)^t\end{aligned}$$

dır.

Benzer işlemler yapılarak (3.13) ifadesinin ikinci toplamının, $t > T+v$ olmak üzere yeterince büyük $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için

$$\sum_{s=a}^{T-1} \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} |f(s)| < \left(\sum_{s=a}^{T-1} \frac{|f(s)|}{\Gamma(v)}\right) t^{N-1} \leq \frac{1}{2}(r+\epsilon)^t$$

eşitsizliğini sağladığı gösterilebilir.

Yukarıdaki iki adım birleştirerek, her $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ için $t \geq T_\epsilon \geq T+v+2$ olmak üzere

$$\left|\Delta_a^{-v} f(t)\right| \leq (r+\epsilon)^t$$

olacak şekilde bir $T_\epsilon \in \mathbb{N}_{a+v}$ nin varlığı görülür. Diğer bir deyişle, her $\epsilon > 0$ için $\Delta_a^{-v} f$ operatörü $r+\epsilon$ üstel basamaklıdır.

Şimdi $\Delta_a^v f = \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f$ kesirli farkına dönelim. İspatın ilk kısmından, $\epsilon > 0$ için $\Delta_a^{-(N-v)} f$ kesirli toplamının $A = 1$ sabiti ile $r+\epsilon$ üstel basamaklı olduğu bilinmektedir. Böylece, her $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için $t \geq T_\epsilon \geq T+N-v+2$ olmak üzere

$$\left|\Delta_a^{-(N-v)} f(t)\right| \leq (r+\epsilon)^t$$

olacak şekilde bir $T_\epsilon \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ vardır.

$t \geq T_\epsilon$ olmak üzere her $t \in \mathbb{N}_{a+N-v}$ için

$$\begin{aligned}
|\Delta_a^v f(t)| &= \left|\Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \Delta_a^{-(N-v)} f(t+N-k)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left|\Delta_a^{-(N-v)} f(t+N-k)\right| \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (r+\epsilon)^{N-k}\right) (r+\epsilon)^t
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\Delta_a^v f$ kesirli farkının da her $\epsilon > 0$ için $r+\epsilon$ üstel basamaklı olduğu sonucu elde edilir.

Sonuç 3.3. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r > 0$ üstel basamaklı, $N-1 < v \leq N$ olmak üzere $v > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda, $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) \text{ ve } \mathcal{L}_{a+N-v}\left\{\Delta_a^v f\right\}(s)$$

mevcuttur.

Teorem 3.6. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r \geq 1$ üstel basamaklı ve $N-1 < v \leq N$ olmak üzere $v > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda, $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{a+v}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) = \frac{(s+1)^v}{s^v} \mathcal{L}_a\{f\}(s) \tag{3.14}$$

ve

$$\mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) = \frac{(s+1)^{v-N}}{s^v} \mathcal{L}_a\{f\}(s) \tag{3.15}$$

dır (Holm 2011c).

İspat: f, r, v ve N teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. f fonksiyonunun, $r \geq 1$

üstel basamaklı kabul edilmesine karşın

$$f,\ r \in (0,1) \text{ üstel basamaklıdır} \Longrightarrow f,\ 1 \text{ üstel basamaklıdır}$$

olduğuna dikkat ediniz.

(3.14) ile (3.15) ifadeleri arasındaki ilişkiyi görmek için önce Lemma 3.2 uygulanacaktır. $\Delta_a^{-v} f$ kesirli toplamının N tane sıfırı da hesaplamaya dahil edilerek, (3.5) öteleme formülünün kullanılmasıyla her $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) &= \frac{1}{(s+1)^N} \mathcal{L}_{a+v}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta_a^{-v} f(k+a+v-N)}{(s+1)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(s+1)^N} \mathcal{L}_{a+v}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, Tanım 2.5, (3.9), (3.10) ve $r \geq 1$ için (3.8) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a+v}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_a^{-v} f(k+a+v)}{(s+1)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \sum_{r=a}^{k+a} \frac{(k+a+v-\sigma(r))^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)} f(r) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \sum_{r=a}^{k+a} f(r) h_{v-1}((k+a)-r+a, a-(v-1)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f * h_{v-1}(., a-(v-1)))(k+a)}{(s+1)^{k+1}} \\ &= \mathcal{L}_a\left\{f * h_{v-1}(., a-(v-1))\right\}(s) \\ &= (s+1) \mathcal{L}_a\{f\}(s) \mathcal{L}_a\left\{h_{v-1}(., a-(v-1))\right\}(s) \\ &= (s+1) \frac{(s+1)^{v-1}}{s^v} \mathcal{L}_a\{f\}(s) \\ &= \frac{(s+1)^v}{s^v} \mathcal{L}_a\{f\}(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.14) eşitliği ispatlanır. Son olarak $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s) = \frac{1}{(s+1)^N} \mathcal{L}_{a+v}\left\{\Delta_a^{-v} f\right\}(s)$$

$$= \frac{(s+1)^{v-N}}{s^v} \mathcal{L}_a \{f\}(s)$$

den (3.15) eşitliği elde edilir.

Uyarı 3.3. (3.15)'de $v = N$ olduğunda, iyi bilinen (3.11) formülünün elde edildiğine dikkat ediniz. Benzer bir genişletme bir kesirli farkın Laplace dönüşümü için de geçerlidir.

Teorem 3.7. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r \geq 1$ üstel basamaklı ve $N-1 < v \leq N$ olmak üzere $v > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda, $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{a+N-v} \left\{ \Delta_a^{-v} f \right\}(s) = \frac{s^v}{(s+1)^{v-N}} \mathcal{L}_a \{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta_a^{v-1-j} f(a+N-v) \tag{3.16}$$

dır (Holm 2011c).

İspat: f, r, v ve N teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. $v = N$ olduğunda, (3.16) ifadesinin iyi bilinen (3.12) ifadesine denk olduğuna dikkat ediniz. $0 < N - v < 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{a+N-v} \left\{ \Delta_a^{-v} f \right\}(s) &= \mathcal{L}_{a+N-v} \left\{ \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f \right\}(s) \\
&= s^N \mathcal{L}_{a+N-v} \left\{ \Delta_a^{-(N-v)} f \right\}(s) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{N-1-j} \Delta_a^{-(N-v)} f(a+N-v) \\
&= s^N \frac{(s+1)^{N-v}}{s^{N-v}} \mathcal{L}_a \{f\}(s) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{N-1-j} \Delta_a^{-(N-v)} f(a+N-v) \\
&= \frac{s^v}{(s+1)^{v-N}} \mathcal{L}_a \{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta_a^{v-1-j} f(a+N-v)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 3.4. Teorem 3.6 ve 3.7'nin benzer kabulleri altında, $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{(a+v-N)+N-v}\left\{\Delta_{a+v-N}^{v}\Delta_a^{-v}f\right\}(s) \\
= \; & \mathcal{L}_a\left\{\Delta_{a+v-N}^{v}\left(\Delta_a^{-v}f\right)\right\}(s) \\
= \; & \frac{s^v\mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\Delta_a^{-v}f\right\}(s)}{(s+1)^{v-N}} \\
& -\sum_{j=0}^{N-1} s^j\Delta_{a+v-N}^{v-1-j}\Delta_a^{-v}f((a+v-N)+N-v) \\
= \; & \frac{s^v}{(s+1)^{v-N}}\left[\frac{(s+1)^{v-N}}{s^v}\mathcal{L}_a\left\{f\right\}(s)\right]-\sum_{j=0}^{N-1}s^j\Delta_a^{-(j+1)}f(a) \\
= \; & \mathcal{L}_a\left\{f\right\}(s).
\end{aligned}$$

dır.

Örnek 3.2. $t \in \mathbb{N}_{5+\pi}$ için $f(t) = (t-5)^{\underline{\pi}} = \Gamma(\pi+1)h_\pi(t,5)$ olsun. Uyarı 3.1 ve (3.8)'den, $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{5+\pi}\left\{f\right\}(s) = \Gamma(\pi+1)\mathcal{L}_{5+\pi}\left\{h_\pi(.,5)\right\}(s) = \Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^\pi}{s^{\pi+1}}$$

elde edilir. Ayrıca, $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(1)}$ için (3.15) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2+\pi+e}\left\{\Delta_{5+\pi}^{-e}f\right\}(s) &= \frac{(s+1)^{e-3}}{s^e}\left(\Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^\pi}{s^{\pi+1}}\right) \\
&= \Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^{\pi+e-3}}{s^{\pi+e+1}}
\end{aligned}$$

bulunur.Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{8+\pi-e}\left\{\Delta_{5+\pi}^{e}f\right\}(s) \\
= \; & s^e(s+1)^{3-e}\left(\Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^\pi}{s^{\pi+1}}\right)-\sum_{j=0}^{2}s^j\Delta_{5+\pi}^{e-1-j}f(8+\pi-e) \\
= \; & \Gamma(\pi+1)\left(\frac{(s+1)^{\pi-e+3}}{s^{\pi-e+1}}-\sum_{j=0}^{2}s^j\frac{(3+\pi-e)^{\underline{\pi-e+j+1}}}{\Gamma(\pi-e+j+2)}\right) \\
= \; & \Gamma(\pi+1)\left(\frac{(s+1)^{\pi-e+3}}{s^{\pi-e+1}}-\frac{(3+\pi-e)(2+\pi-e)}{2}-(3+\pi-e)s-s^2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 3.5. Şimdi Teorem 3.8'deki kuvvet kuralını ispatlamak için, $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(1)}$ için sağ ve sol tarafın Laplace dönüşümlerinin eşit olduğu gösterilecektir. Bu Laplace dönüşümleri için doğru yakınsaklık kümesinin neden $\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(1)}$ olduğunu görmek için Uyarı 3.1 ve Lemma 3.6 kullanılırsa, her $\epsilon > 0$ için $(t-a)^{\underline{\mu}}$, $1+\epsilon$ üstel basamaklıdır ve böylece $\Delta_{a+\mu}^{-v}(t-a)^{\underline{\mu}}$, $1+2\epsilon$ üstel basamaklıdır sonucu elde edilir. $\mathcal{L}_{a+\mu+v}\left\{\Delta_{a+\mu}^{-v}(t-a)^{\underline{\mu}}\right\}$ ve $\mathcal{L}_{a+\mu}\left\{(t-a)^{\underline{\mu}}\right\}$ dönüşümlerinin $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(1)}$ için mevcut olduğunu göstermek için Sonuç 3.3'te verilene özdeş bir argüman uygulanabilir.

Teorem 3.8. $v, \mu > 0$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+v}$ için

$$\Delta_{a+\mu}^{-v}(t-a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+v)}(t-a)^{\underline{\mu+v}}$$

dır (Holm 2011c).

İspat: Uyarı 3.4, (3.14) ve (3.8) den $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{a+\mu+v}\left\{\Delta_{a+\mu}^{-v}(t-a)^{\underline{\mu}}\right\}(s) &= \frac{(s+1)^v}{s^v}\mathcal{L}_{a+\mu}\left\{(t-a)^{\underline{\mu}}\right\}(s) \\
&= \frac{(s+1)^v}{s^v}\Gamma(\mu+1)\mathcal{L}_{a+\mu}\left\{h_\mu(.,a)\right\}(s) \\
&= \frac{(s+1)^v}{s^v}\Gamma(\mu+1)\frac{(s+1)^\mu}{s^{\mu+1}} \\
&= \Gamma(\mu+1)\frac{(s+1)^{\mu+v}}{s^{\mu+v+1}} \\
&= \Gamma(\mu+1)\mathcal{L}_{a+\mu+v}\left\{h_{\mu+v}(.,a)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}_{a+\mu+v}\left\{\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}(t-a)^{\underline{\mu+v}}\right\}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4)'ten $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+v}$ için

$$\Delta_{a+\mu}^{-v}(t-a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+v)}(t-a)^{\underline{\mu+v}}$$

bulunur.

Teorem 3.9. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r > 0$ üstel basamaklı ve $v, \mu > 0$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+v}$ için

$$\Delta_{a+\mu}^{-v}\Delta_a^{-\mu}f(t) = \Delta_a^{-v-\mu}f(t) = \Delta_{a+v}^{-\mu}\Delta_a^{-v}f(t)$$

dır (Holm 2011c).

İspat: f, r, μ ve v teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. Sonuç 3.3'ten

$$\mathcal{L}_{a+\mu+v}\left\{\Delta_a^{-v}\Delta_a^{-\mu}f\right\},\ \mathcal{L}_{a+\mu}\left\{\Delta_a^{-\mu}f\right\},\ \mathcal{L}_{a+(v+\mu)}\left\{\Delta_a^{-(v+\mu)}f\right\}$$

dönüşümleri $\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ de mevcuttur. Böylece, $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için (3.14) ifadesinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{a+\mu+v}\left\{\Delta_{a+\mu}^{-v}\Delta_a^{-\mu}f\right\}(s) &= \frac{(s+1)^v}{s^v}\mathcal{L}_{a+\mu}\left\{\Delta_a^{-\mu}f\right\}(s) \\
&= \frac{(s+1)^v}{s^v}\frac{(s+1)^\mu}{s^\mu}\mathcal{L}_a\left\{f\right\}(s) \\
&= \frac{(s+1)^{v+\mu}}{s^{v+\mu}}\mathcal{L}_a\left\{f\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}_{a+(v+\mu)}\left\{\Delta_a^{-(v+\mu)}f\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}_{a+v+\mu}\left\{\Delta_a^{-v-\mu}f\right\}(s)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Laplace dönüşümünün bire bir olma özelliğinden

$$\Delta_{a+\mu}^{-v}\Delta_a^{-\mu}f(t) = \Delta_a^{-v-\mu}f(t) = \Delta_{a+v}^{-\mu}\Delta_a^{-v}f(t)$$

elde edilir.

4. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

v. basamaktan bir kesirli başlangıç değer problemini tam olarak çözebilmek için Bölüm 2'de geliştirilen yöntemlere ihtiyacımız vardır.

Teorem 4.1. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $N-1 < v \leq N$ olmak üzere $v > 0$ olsun. v. basamaktan

$$\Delta^v_{a+v-N} y(t) = f(t), \ t \in \mathbb{N}_a \tag{4.1}$$

kesirli fark denklemini ve

$$\begin{gathered} \Delta^v_{a+v-N} y(t) = f(t), \ t \in \mathbb{N}_a \\ \Delta^i y(a+v-N) = A_i, \ i \in \{0,1,...,N-1\}, \ A_i \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{4.2}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. (4.1) fark denkleminin genel çözümü

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta_a^{-v} f(t), \ t \in \mathbb{N}_{a+v-N} \tag{4.3}$$

dır. Burada $\{\alpha_i\}_{i=0}^{N-1}$ ler N tane reel sayıdır. Ayrıca, (4.2) başlangıç değer probleminin çözümü $i \in \{0,1,...,N-1\}$ için

$$\alpha_i = \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{\underline{N-v}} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} A_p$$

belirli sabitleri ile (4.3) ifadesidir (Holm 2011b).

İspat: f ve v teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. Keyfi, ancak belirli $\{\alpha_i\}_{i=0}^{N-1} \subseteq \mathbb{R}$ sabitleri için, $y : \mathbb{N}_{a+v-N} \to \mathbb{R}$

$$y(t) := \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta_a^{-v} f(t)$$

tanımlansın.

Burada kesirli toplamın tanım kümesi $\Delta_a^{-v}f$ operatörünün Uyarı 2.3'te anlatılan N tane sıfırı dahil ederek $\mathbb{N}_{a+v}$ kümesinden daha geniş olan $\mathbb{N}_{a+v-N}$ kümesine genişletilmiştir.

$t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\begin{aligned}\Delta_{a+v-N}^{v}y(t) &= \Delta_{a+v-N}^{v}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i(t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta_a^{-v}f(t)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\Delta_{a+v-N}^{v}(t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta_{a+v-N}^{v}\Delta_a^{-v}f(t)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Tanım 2.7'den

$$\begin{aligned}\Delta_{a+v-N}^{v}(t-a)^{\underline{i+v-N}} &= \frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=a+v-N}^{t+v}(t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}}(s-a)^{\underline{i+v-N}}\\ &= \frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=a+v-N+i}^{t+v}(t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}}(s-a)^{\underline{i+v-N}}\\ &= \Delta_{a+i+v-N}^{v}(t-a)^{\underline{i+v-N}},\ i \in \{0,1,...,N-1\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Delta_{a+v-N}^{v}\Delta_a^{-v}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=a+v-N}^{t+v}(t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}}\Delta_a^{-v}f(s)\\ &= \frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=a+v}^{t+v}(t-\sigma(s))^{\underline{-v-1}}\Delta_a^{-v}f(s)\\ &= \Delta_{a+v}^{v}\Delta_a^{-v}f(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (2.14) kuvvet kuralı ve Teorem 2.9 uygulanarak

$$\begin{aligned}\Delta_{a+v-N}^{v}y(t) &= \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\Delta_{a+i+v-N}^{v}(t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta_{a+v}^{v}\Delta_a^{-v}f(t)\\ &= \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\frac{\Gamma(i+v-N+1)}{\Gamma(i-N+1)}(t-a)^{\underline{i-N}} + \Delta_a^{v-v}f(t)\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, (4.1) fark denkleminin her çözümünün y formunda olması gerektiğini gösterelim. $z : \mathbb{N}_{a+v-N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\Delta^{v}_{a+v-N} z(t) = f(t),\ t \in \mathbb{N}_a \\
&\Rightarrow \Delta^{-v}_{a}\Delta^{v}_{a+v-N} z(t) = \Delta^{-v}_{a} f(t),\ t \in \mathbb{N}_{a+v-N} \\
&\Rightarrow \Delta^{0}_{a+v-N} z(t) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta^{i-(N-v)}_{a+v-N} z(a)}{\Gamma(i+v-N+1)} (t-a)^{\underline{i+v-N}} = \Delta^{-v}_{a} f(t) \\
&\Rightarrow z(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta^{i+v-N}_{a+v-N} z(a)}{\Gamma(i+v-N+1)} (t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta^{-v}_{a} f(t) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. z fonksiyonu (4.3) ifadesi ile aynı formda olduğundan $t \in \mathbb{N}_{a+v-N}$ için

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta^{-v}_{a} f(t)$$

fonksiyonunun (4.1) denkleminin genel çözümü olduğu sonucu elde edilir.

(2.13) den $\{\alpha_i\}_{i=0}^{N-1} \subseteq \mathbb{R}$ sabitleri $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$ için

$$\alpha_i = \frac{\Delta^{i+v-N}_{a+v-N} y(a)}{\Gamma(i+v-N+1)}$$

şeklindedir. Ancak uygunluk için, her α_i sabiti $\{A_p\}_{p=0}^{N-1}$ cinsinden yazılmalıdır. Diğer bir deyişle, her $\Delta^{i+v-N}_{a+v-N} y(a)$ kesirli başlangıç koşulunu tamsayı basamaktan $\{\Delta^p y(a+v-N)\}_{p=0}^{N-1}$ başlangıç koşulu cinsinden yazmamız gerekmektedir. Bu işleme geçmeden önce $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$g(t+m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k g(t) \qquad (4.5)$$

formülünü hatırlayalım. (4.5) ve (2.9)'dan

$$
\begin{aligned}
\Delta_{a+v-N}^{i+v-N} y(a) &= \sum_{k=0}^{i}(-1)^k \binom{i+v-N}{k} y(a+i+v-N-k) \\
&= \sum_{k=0}^{i}(-1)^k \binom{i+v-N}{k} y((a+v-N)+(i-k)) \\
&= \sum_{k=0}^{i}(-1)^k \binom{i+v-N}{k} \sum_{p=0}^{i-k} \binom{i-k}{p} \Delta^p y(a+v-N) \\
&= \sum_{k=0}^{i}\sum_{p=0}^{i-k}(-1)^k \binom{i+v-N}{k} \binom{i-k}{p} A^p \\
&= \sum_{p=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-p}(-1)^k \binom{i+v-N}{k} \binom{i-k}{p} A^p \\
&= \sum_{p=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-p}(-1)^k \frac{\Gamma(i+v-N+1)}{\Gamma(i+v-N-k+1)} \frac{(i-k)!}{p!(i-k-p)!} A^p \\
&= \Gamma(i+v-N+1) \\
&\quad \times \sum_{p=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} \frac{\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(i-k+1+v-N)} \frac{i!}{p!} \frac{(i-p)!}{k!(i-p-k)!} A^p \\
&= \Gamma(i+v-N+1) \sum_{p=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{\underline{N-v}} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} A^p
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$ için

$$
\alpha_i = \sum_{p=0}^{i} \left(\sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{\underline{N-v}} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} \right) A^p
$$

dir.

(4.2) başlangıç değer problemi kısıtlama ve bilgi kaybı olmaksızın direkt olarak çözüldüğünden bu çözüm tektir.

Uyarı 4.1. $\{\alpha_i\}_{i=0}^{N-1}$ sabitlerini elle hesaplamak oldukça zordur. Bununla beraber, daha düşük basamaktan problemler çözülürken, birkaç α_i sabiti için aşağıdaki ifadeler kullanılabilir.

$$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R},\ g(t) := t^{\underline{N-v}}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda ilk beş α_i sabiti

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= g(0)A_0, \\
\alpha_1 &= g(1)A_1 - (g(0) - g(1))A_0, \\
\alpha_2 &= \frac{g(2)}{2}A_2 - (g(1) - g(2))A_1 + \frac{g(0) - 2g(1) + g(2)}{2}A_0, \\
\alpha_3 &= \frac{g(3)}{6}A_3 - \frac{g(2) - g(3)}{2}A_2 + \frac{g(1) - 2g(2) + g(3)}{2}A_1 \\
&\quad - \frac{g(0) - 3g(1) + 3g(2) - g(3)}{6}A_0, \\
\alpha_4 &= \frac{g(4)}{24}A_4 - \frac{g(3) - g(4)}{6}A_3 + \frac{g(2) - 2g(3) + g(4)}{4}A_2 \\
&\quad - \frac{g(1) - 3g(2) + 3g(3) - g(4)}{2}A_1 \\
&\quad + \frac{g(0) - 4g(1) + 6g(2) - 4g(3) + g(4)}{24}A_0.
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Uyarı 4.2. (4.2) başlangıç değer probleminde $v = N$ olduğunda

$$\begin{cases} \Delta^N y(t) = f(t) & , \ t \in \mathbb{N}_a \\ \Delta^i y(a) = A_i & , \ i \in \{0, 1, ..., N-1\}, \ A_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tamsayı basamaktan başlangıç değer problemi elde edilir. Bu durumda, Teorem 4.1'de verilen çözüm tamsayı basamaktan başlangıç değer probleminin $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{p=0}^{i} \left(\sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} \right) A_p \right] (t-a)^{\underline{i}} + \Delta_a^{-N} f(t) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{p=0}^{i} \frac{A_p}{i!} \binom{i}{p} \sum_{k=0}^{i-p} (-1)^k \binom{i-p}{k} \right] (t-a)^{\underline{i}} + \Delta_a^{-N} f(t) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A_i}{i!} (t-a)^{\underline{i}} + \Delta_a^{-N} f(t) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

çözümüne indirgenir.

$$\sum_{k=0}^{i-p}(-1)^k\binom{i-p}{k} = \begin{cases} 0 & , \ i-p>0 \\ 1 & , \ i-p=0 \end{cases}$$

sonucundan (4.3) çözümünden daha basit olan (4.6) çözümü elde edilmiştir. (4.6) çözümündeki ifadeler y fonksiyonu cinsinden yazılmak istenirse

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta^i y(a)}{i!}(t-a)^{\underline{i}} + \Delta_a^{-N}\Delta^N y(t)$$

elde edilir. Bu $y : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için Taylor Teoreminin ayrık analizdeki versiyonunu sağlar. Daha özel olarak, $N \to \infty$ iken

$$\Delta_a^{-N}\Delta^N y(t) = \frac{1}{\Gamma(N)}\sum_{s=a}^{t-N}(t-\sigma(s))^{\underline{N-1}}\Delta^N y(s) \to 0$$

olduğundan $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta^i y(a)}{i!}(t-a)^{\underline{i}} \tag{4.7}$$

yazılabilir.

Ayrıca, $t \in \mathbb{N}_a$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için $t = a+m$ olsun. Bu durumda (4.5) den (4.7) ifadesi

$$y(t) = y(a+m) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta^i y(a)}{i!} m^{\underline{i}} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \Delta^i y(a)$$

eşitliğine dönüşür.

Örnek 4.1.

$$\begin{cases} \Delta_{-0,3}^{2,7} y(t) = t^{\underline{2}}, \ t \in \mathbb{N}_0 \\ y(-0,3) = 2, \ \Delta y(-0,3) = 3, \ \Delta^2 y(-0,3) = 5 \end{cases} \tag{4.8}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Teorem 4.1'den

$$a = 0, \ v = 2,7, \ N = 3, \ f(t) = t^{\underline{2}}$$
$$A_0 = 2, \ A_1 = 3, \ A_2 = 5$$

dır. O halde (4.8), (4.2)'nin bir özel durumudur. Buradan, (4.8) başlangıç değer probleminin çözümü

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta_a^{-v} f(t), \ t \in \mathbb{N}_{a+v-N} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \alpha_i (t-a)^{\underline{i-0,3}} + \Delta_0^{-2,7} t^{\underline{2}}, \ t \in \mathbb{N}_{-0,3}
\end{aligned}
$$

ile verilir. Burada Uyarı 4.1 kullanılarak α_i sabitleri

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= 0^{\underline{0,3}}, \\
\alpha_1 &= 1^{\underline{0,3}} A_1 - (0^{\underline{0,3}} - 1^{\underline{0,3}}) A_0, \\
\alpha_2 &= \frac{2^{\underline{0,3}}}{2} A_2 - (1^{\underline{0,3}} - 2^{\underline{0,3}}) A_1 + \frac{0^{\underline{0,3}} - 2.1^{\underline{0,3}} + 2^{\underline{0,3}}}{2} A_0 \\
&\Rightarrow \ \alpha_0 \approx 1,541, \ \alpha_1 \approx 3,962, \ \alpha_2 \approx 3,684
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak, (2.13) kuralı kullanılarak ve $0^{\underline{2}} = 1^{\underline{2}} = 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$
\begin{aligned}
\Delta_0^{-2,7} t^{\underline{2}} &= \Delta_2^{-2,7} t^{\underline{2}} \\
&= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5,7)} t^{\underline{4,7}} \\
&\approx 0,0276 t^{\underline{4,7}}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. O halde, (4.8) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$
y(t) \approx 1,541 t^{\underline{-0,3}} + 3,962 t^{\underline{0,7}} + 3,684 t^{\underline{1,7}} + 0,0276 t^{\underline{4,7}}, \ t \in \mathbb{N}_{-0,3}
$$

dır.

Uyarı 4.3. Laplace dönüşümünün en önemli uygulaması aşağıdaki Teorem 4.2'de verilmiştir. Teorem 4.2'de Ayrık Kesirli Laplace dönüşüm metodu ile çözülen (4.9) probleminin Teorem 4.1'de kesirli birleşim kuralları ile çözülen (4.2) başlangıç değer problemine denk olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 4.2. $f:\mathbb{N}_a\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $r\geq 1$ üstel basamaklı ve $N-1<v\leq N$ olmak üzere $v>0$ olsun.

$$\begin{cases} \Delta^v_{a+v-N}y(t)=f(t) & ,\ t\in\mathbb{N}_a \\ \Delta^i y(a+v-N)=A_i & ,\ i\in\{0,1,...,N-1\}\,;\ A_i\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{4.9}$$

kesirli başlangıç değer probleminin tek çözümü $t\in\mathbb{N}_{a+v-N}$ için

$$y(t)=\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i(t-a)^{\underline{i+v-N}}+\Delta_a^{-v}f(t)$$

dır. Burada $i\in\{0,1,...,N-1\}$ için

$$\alpha_i=\sum_{p=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-p}\frac{(-1)^k}{i!}(i-k)^{\underline{N-v}}\binom{i}{p}\binom{i-p}{k}A_p$$

şeklindedir (Holm 2011c).

İspat: (4.9) problemi Teorem 4.1'de kesirli birleşim kuralları kullanılarak çözüldüğü için burada sadece Laplace dönüşüm metodunu içeren kısmın ispatı verilecektir. f fonksiyonu r üstel basamaklı olduğundan Lemma 3.1'den $\mathcal{L}_a\{f\}$ dönüşümünün $\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ üzerinde mevcut olduğu bilinmektedir. (4.9) başlangıç değer problemindeki kesirli fark denkleminin her iki tarafına Laplace Dönüşümünün uygulanmasıyla, $s\in\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için (3.16) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_a\left\{\Delta^v_{a+v-N}y\right\}(s)=\mathcal{L}_a\{f\}(s) \\ \Rightarrow\ & \frac{s^v\mathcal{L}_{a+v-N}\{y\}(s)}{(s+1)^{v-N}}-\sum_{j=0}^{N-1}s^j\Delta^{v-j-1}_{a+v-N}y(a)=\mathcal{L}_a\{f\}(s) \\ \Rightarrow\ & \mathcal{L}_{a+v-N}\{y\}(s)=\frac{\mathcal{L}_a\{f\}(s)}{s^v(s+1)^{N-v}}+\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Delta^{v-j-1}_{a+v-N}y(a)}{s^{v-j}(s+1)^{N-v}} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.15)'den aşikar olarak

$$\frac{\mathcal{L}_a\left\{f\right\}(s)}{s^v(s+1)^{N-v}}=\mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\Delta_a^{-v}f\right\}(s)$$

elde edilir.

Ayrıca, (3.8) ifadesi ve (3.5) öteleme formülünün kullanılmasıyla her $j\in\{0,1,...,N-1\}$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^{v-j}(s+1)^{N-v}} &= \frac{1}{(s+1)^{N-j-1}}\frac{(s+1)^{v-j-1}}{s^{v-j}}\\ &= \frac{1}{(s+1)^{N-j-1}}\mathcal{L}_{a+v-j-1}\left\{h_{v-j-1}(.,a)\right\}(s)\\ &= \mathcal{L}_{a+v-N}\left\{h_{v-j-1}(.,a)\right\}(s)\\ &\quad -\sum_{k=0}^{N-j-2}\frac{h_{v-j-1}(k+v+v-N,a)}{(s+1)^{k+1}}\\ &= \mathcal{L}_{a+v-N}\left\{h_{v-j-1}(.,a)\right\}(s)\end{aligned}$$

bulunur. Çünkü, $k\in\{0,1,...,N-j-2\}$ için

$$\begin{aligned}h_{v-j-1}(k+v+v-N,a) &= \frac{(k+v-N)^{\underline{v-j-1}}}{\Gamma(v-j)}\\ &= \frac{\Gamma(k+v-N)}{\Gamma(v-j)\Gamma(k-(N-j-1))}\\ &= 0\end{aligned}$$

dır.

Bu iki adım birlikte ele alınarak, $s\in\mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{a+v-N}\left\{y\right\}(s) &= \mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\Delta_a^{-v}f\right\}(s)\\ &\quad +\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_{a+v-N}^{v-j-1}y(a)\mathcal{L}_{a+v-N}\left\{h_{v-j-1}(.,a)\right\}(s)\\ &= \mathcal{L}_{a+v-N}\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_{a+v-N}^{v-j-1}y(a)h_{v-j-1}(.,a)+\Delta_a^{-v}f\right\}(s)\end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 3.2'den Laplace dönüşümünün bire bir olduğu bilindiğinden $t \in \mathbb{N}_{a+v-N}$ için

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \Delta_{a+v-N}^{v-j-1} y(a) h_{v-j-1}(t,a) + \Delta_a^{-v} f(t) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Delta_{a+v-N}^{v-j-1} y(a)}{\Gamma(v-j)} (t-a)^{\underline{v-j-1}} + \Delta_a^{-v} f(t) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta_{a+v-N}^{i+v-N} y(a)}{\Gamma(i+v-N+1)} \right) (t-a)^{\underline{i+v-N}} + \Delta_a^{-v} f(t)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Teorem 4.1'in ispatında, $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$ için

$$
\frac{\Delta_{a+v-N}^{i+v-N} y(a)}{\Gamma(i+v-N+1)} = \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{\underline{N-v}} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} \Delta^i y(a+v-N)
$$

olduğu gösterildiği için ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.2. π. basamaktan

$$
\begin{cases}
\Delta_{\pi-4}^{\pi} y(t) = \pi^4 t^{\underline{2}} \\
y(\pi-4) = 2,\ \Delta y(\pi-4) = 3,\ \Delta^2 y(\pi-4) = 5,\ \Delta^3 y(\pi-4) = 7
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

kesirli problemini ele alalım.

Teorem 4.2'den

$$
\begin{aligned}
&a = 0, \quad v = \pi, \quad N = 4, \quad f(t) = \pi^4 t^{\underline{2}}, \\
&A_0 = 2, \quad A_1 = 3, \quad A_2 = 5, \quad A_3 = 7
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla (4.10) problemi, (4.9) probleminin özel bir durumudur.

Ayrık Laplace dönüşüm metodu ve (2.13) kuvvet kuralı uygulanır ve $0^{\underline{2}} = 1^{\underline{2}} = 0$

olduğu göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{i=0}^{3} \alpha_i t^{\underline{i+\pi-4}} + \Delta_0^{-\pi}(\pi^4 t^{\underline{2}}) \\
&= \sum_{i=0}^{3} \alpha_i t^{\underline{i+\pi-4}} + \Delta_2^{-\pi}(\pi^4 t^{\underline{2}}) \\
&\approx 0,303 t^{\underline{\pi-4}} + 5,040 t^{\underline{\pi-3}} + 6,977 t^{\underline{\pi-2}} + 4,876 t^{\underline{\pi-1}} + 3,272 t^{\underline{\pi+2}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Yukarıdaki son adımda $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ için

$$
\alpha_i = \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{\underline{4-\pi}} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} A_p
$$

dir.

5. SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bir sınır değer problemi ele aldığımızda onunla ilgili olarak Green fonksiyonunun verilmesi önemlidir. Aslında, Green fonksiyonunun elde edilmesi, oldukça eskilere dayanır. Bununla ilgili olarak İngiliz matematikçi George Green 1830'larda genel stratejiyi geliştirdi. Daha sonraları da pek çok matematikçi bu konu ile ilgilenmiştir. Bu bölümde, Green'in yöntemini bir kesirli sağ sınır koşuluna sahip, lineer olmayan bir $(N-1,1)$ ayrık kesirli sınır değer problemine uygulayacağız. Bir pozitif çözümün varlığını göstermek için Green fonksiyonu bize Krasnoselski Teoremi ve Banach Daralma Teoremini uygulamamızı sağlar.

Bu bölümde lineer olmayan, $(N-1,1)$

$$\begin{cases} -\Delta^{v}_{v-N}y(t) = f(t, y(t+v-1)) & , \ t \in \{0, ..., b+M\} \\ \Delta^{i}y(v-N) = 0 & , \ i \in \{0, ..., N-2\} \\ \Delta^{\mu}_{v-N}y(b+M+v-\mu) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

kesirli sınır değer problemi ele alınacaktır. Burada

$i)$ $N-1 < v \leq N$, $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere $v \geq 2$ dir.

$ii)$ $M-1 < \mu \leq M$, $M \in \mathbb{N}$ olmak üzere $1 \leq \mu < v$ dır.

$iii)$ $b \in \mathbb{N}$ dır.

$iv)$ $y \geq 0$ için $f : \{0, ..., b+M\}\text{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli, negatif olmayandır.

(5.1) problemindeki fonksiyonların tanım kümeleri

$\mathcal{D}\left\{\Delta^{v}_{v-N}y\right\} = \{0, ..., b+M\}$,

$\mathcal{D}\{y\} = \{v-N, ..., b+M+v\}$

$\mathcal{D}\{\Delta^{i}y\} = \{v-N, ..., b+M+v-i\}$, $i \in \{0, ..., N-2\}$,

$\mathcal{D}\left\{\Delta^{\mu}_{v-N}y\right\} = \{v-N+M-\mu, ..., b+M+v-\mu\}$.

şeklindedir.

(5.1) problemindeki bilinmeyen fonksiyon

$$y : \{v - N, ..., b + M + v\} \to \mathbb{R}$$

formuna sahiptir.

Uyarı 5.1. Önceki bölümlerde verilen tanım ve kurallara ek olarak genelleştirilmiş azalan fonksiyonunun çalışmalarımızda kullanılacak iki özelliği

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ verilsin, } t > maks\{-1, \alpha - 1\} \text{ için } t \mapsto t^{\underline{\alpha}} \text{ pozitiftir.} \tag{5.2}$$

$$\alpha > 0 \text{ verilsin, } t > \alpha - 1 \text{ için } t \mapsto t^{\underline{\alpha}} \text{ artandır.} \tag{5.3}$$

şeklindedir.

Lineer olmayan $f(t, y)$ terimi y'ye bağlı olmasın. Daha sonra lineer

$$\begin{cases} -\Delta_{v-N}^{v} y(t) = h(t) & , \ t \in \{0, ..., b + M\} \\ \Delta^{i} y(v - N) = 0 & , \ i \in \{0, ..., N - 2\} \\ \Delta_{v-N}^{\mu} y(b + M + v - \mu) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

sınır değer problemini çözerek (5.1) problemi için Green fonksiyonu elde edelim.

Teorem 4.1'de elde edildiği gibi, (5.4) problemindeki kesirli fark denkleminin çözümü $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $t \in \{v - N, ..., b + M + v\}$ olmak üzere

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i t^{\underline{i+v-N}} - \Delta_0^{-v} h(t)$$

şeklindedir.

$N - 1$ tane

$$\Delta^{i} y(v - N) = 0, \ i \in \{0, ..., N - 2\}$$

sol sınır şartının uygulanmasıyla

$$y(v-N) = y(v-N+1) = ... = y(v-2) = 0$$

bulunur. Ayrıca, her $k \in \{0, ..., N-2\}$ için

$$\begin{aligned} \Delta_0^{-v} h(v-N+k) &= \left(\frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{t-v} (t-\sigma(s))^{\underline{v-1}} h(s) \right) \Bigg|_{t=v-N+k} \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{-N+k} (v-N+k-\sigma(s))^{\underline{v-1}} h(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= y(v-N+k) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (v-N+k)^{\underline{i+v-N}} - \Delta_0^{-v} h(v-N+k) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \frac{\Gamma(v-N+k+1)}{\Gamma(k-i+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \frac{\Gamma(v-N+k+1)}{(k-i)!} \end{aligned}$$

elde edilir. $\{\alpha_i\}_{i=0}^{N-1}$ için yukarıdaki $N-1$ denklemli sistem çözülerek

$$\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{N-2} = 0$$

elde edilir. Böylece, (5.4) probleminin genel çözümü

$$y(t) = \alpha_{N-1} t^{\underline{v-1}} - \Delta_0^{-v} h(t)$$

dir.

Şimdi,

$$\Delta_{v-N}^{\mu} y(b+M+v-\mu) = 0$$

sağ sınır koşulu uygulanır, (2.14) ve Teorem 2.9 kullanılarak α_{N-1} için çözülürse

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mu}_{v-N}y(t) &= \alpha_{N-1}\Delta^{\mu}_{v-N}t^{\underline{v-1}} - \Delta^{\mu}_{v-N}\Delta_0^{-v}h(t) \\
&= \alpha_{N-1}\Delta^{\mu}_{v-1}t^{\underline{v-1}} - \Delta^{\mu}_{v}\Delta_0^{-v}h(t) \\
&= \alpha_{N-1}\frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v-\mu)}t^{\underline{v-1-\mu}} - \Delta_0^{\mu-v}h(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 0 = \Delta^{\mu}_{v-N}y(b+M+v-\mu) \\
& \quad = \alpha_{N-1}\frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v-\mu)}(b+M+v-\mu)^{\underline{v-1-\mu}} - \Delta_0^{\mu-v}h(b+M+v-\mu) \\
\Rightarrow \quad & \alpha_{N-1} = \frac{\Gamma(v-\mu)}{\Gamma(v)}\frac{\Delta_0^{\mu-v}h(b+M+v-\mu)}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-1-\mu}}}
\end{aligned}$$

bulunur. (5.2) den $(b+M+v-\mu)^{\underline{v-1-\mu}} > 0$ olduğuna dikkat ediniz. Böylece (5.4) probleminin her çözümü

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\Gamma(v-\mu)}{\Gamma(v)}\frac{\Delta_0^{\mu-v}h(b+M+v-\mu)}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-1-\mu}}}t^{\underline{v-1}} - \Delta_0^{-v}h(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\left(\sum_{s=0}^{t+\mu-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}h(s)\right)\Bigg|_{t=b+M+v-\mu}\frac{t^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-1-\mu}}} \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=0}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}h(s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=0}^{b+M}\frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}t^{\underline{v-1}}h(s) \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=0}^{t-v}(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}h(s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=0}^{t-v}\left\{\frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}t^{\underline{v-1}} - (t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}\right\}h(s) \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=t-v+1}^{b+M}\left\{\frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}t^{\underline{v-1}}\right\}h(s) \\
&= \sum_{s=0}^{b+M}G(t,s)h(s)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(v)}\begin{cases}\frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}t^{\underline{v-1}}-(t-\sigma(s))^{\underline{v-1}} \\ \qquad\qquad ;\ 0\le s\le t-v\le b+M \\ \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}t^{\underline{v-1}} \\ \qquad\qquad ;\ 0\le t-v+1\le s\le b+M \\ 0 \qquad ;\ t\in\{v-N,...,v-2\},\ s\in\{0,...,b+M\}\end{cases}$$

ile verilen $G:\{v-N,...,b+M+v\}\text{x}\{0,...,b+M\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (5.1) ve (5.4) problemlerinin ilgili homojen problemi için Green fonksiyonudur.

Kısaca lineer olmayan (5.1) problemi için uygun bir $G(t,s)$ Green fonksiyonu bulunmuştur ve (5.4) lineer probleminin tek çözümünün

$$y(t)=\sum_{s=0}^{b+M}G(t,s)h(s),\ t\in\{v-N,...,b+M+v\}$$

olduğu gösterilmiştir.

Şimdi bu Green fonksiyonunun üç önemli özelliğini verelim.

Lemma 5.1. (5.1) probleminin $G(t,s)$ Green fonksiyonu her $s_0\in\{0,...,b+M\}$ için

$$\min_{t\in\{v-1,...,b+M+v\}}G(t,s_0)>0 \tag{5.5}$$

$$\underset{t\in\{v-N,...,b+M+v\}}{maks}G(t,s_0)=G(b+M+v,s_0) \tag{5.6}$$

$$\min_{t\in\{a+M+v-1,...,b+M+v-1\}}G(t,s_0)\ge\gamma.\underset{t\in\{v-N,...,b+M+v\}}{maks}G(t,s_0) \tag{5.7}$$

özelliklerine sahiptir. Burada $0<\gamma<1$ sabiti s_0 dan bağımsız ve $a:=\left\lceil\frac{3}{4}(b+M)\right\rceil$ dır (Holm 2011a).

İspat: Kolaylık olması bakımından, Green fonksiyonunun iki bileşenini

$$\begin{aligned} G_1(t,s) &:= \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} t^{\underline{v-1}} - (t-\sigma(s))^{\underline{v-1}}, \\ G_2(t,s) &:= \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} t^{\underline{v-1}} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

Her $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ için (5.2)'den

$$G(v-1, s_0) = \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} > 0$$

dir. O halde, (5.5) ve (5.6) ifadelerinin sağlandığını göstermek için
her $t \in \{v-N, ..., b+M+v-1\}$ için

$$\Delta_t G(t,s) \geq 0 \tag{5.8}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla, ispatın geri kalanı için belirli bir $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ alalım. (5.8) ifadesi aşağıdaki beş durumla gösterilecektir.

i) $t \in \{v-N, ..., v-3\}$ için ($v = N$ ise bu adım gerekli değildir.)

$$\Delta_t G(t,s) = G(t+1, s_0) - G(t, s_0) = 0 - 0 = 0$$

elde edilir.

ii) $t = v-2$ için, (5.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \Delta_t G(t,s) &= G_2(v-1, s_0) - 0 \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} (v-1)^{\underline{v-1}} \\ &= \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $t \in \{v-1,...,v+s_0-2\}$ için, (5.2) kullanılarak ve $t > maks\{-1, v-3\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\Delta_t G(t,s_0) &= \frac{1}{\Gamma(v)} \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} \Delta t^{\underline{v-1}} \\
&= \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{\Gamma(v)(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} (v-1) t^{\underline{v-2}} \\
&> 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv) $t = v+s_0-1$ için

$$\begin{aligned}
&\Gamma(v)\Delta_t G(t,s_0) \\
= \; & G_1(v+s_0,s_0) - G_1(v+s_0-1,s_0) \\
= \; & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} (v+s_0)^{\underline{v-1}} - (v-1)^{\underline{v-1}} \\
& - \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} (v+s_0-1)^{\underline{v-1}} \\
= \; & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} \left((v+s_0)^{\underline{v-1}} - (v+s_0-1)^{\underline{v-1}} \right) - \Gamma(v) \\
= \; & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} \left((v-1)(v+s_0-1)^{\underline{v-2}} \right) - \Gamma(v)
\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
& \Delta_t G(v+s_0-1,s_0)\geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}\left((v-1)(v+s_0-1)^{\underline{v-2}}\right)-1\geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}\frac{(v+s_0-1)^{\underline{v-2}}}{\Gamma(v-1)}\geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\Gamma(b+M+v-\mu-s_0)\Gamma(b+M+2)\Gamma(v+s_0)}{\Gamma(b+M-s_0+1)\Gamma(b+M+v-\mu+1)\Gamma(s_0+2)\Gamma(v-1)}\geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\Gamma(b+M+2)}{\Gamma(b+M-s_0+1)}\frac{\Gamma(b+M+v-\mu-s_0)}{\Gamma(b+M+v-\mu+1)}\frac{\Gamma(v+s_0)}{\Gamma(v-1)}\frac{1}{(s_0+1)!}\geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{[(b+M+1)...(b+M-s_0+1)][(v+s_0-1)...(v-1)]}{[(b+M+v-\mu)...(b+M+v-\mu-s_0)][(s_0+1)...1]}\geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \prod_{p=0}^{s_0}\left(\frac{b+M+1-p}{b+M+v-\mu-p}\frac{v-1+s_0-p}{1+s_0-p}\right)\geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{her } p\in\{0,...,s_0\} \text{ için } \frac{b+M+1-p}{b+M+v-\mu-p}\frac{v-1+s_0-p}{1+s_0-p}\geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{her } p\in\{0,...,s_0\} \text{ için } \frac{b+M+1-p}{b+M+v-\mu-p}\geq \frac{1+s_0-p}{v-1+s_0-p}
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca, $v\geq 2$ ve $maks\{s_0\}=b+M$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \text{her } p\in\{0,...,s_0\} \text{ için } \frac{b+M+1-p}{b+M+v-\mu-p}\geq \frac{1+b+M-p}{v-1+b+M-p} \\
\Leftrightarrow\ & v-1+b+M-p\geq b+M+v-\mu-p \\
\Leftrightarrow\ & \mu\geq 1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Kabulden bu doğrudur. Böylece $\Delta_t G(v+s_0-1,s_0)\geq 0$ dır.

$v)$ $t\in\{v+s_0,...,b+M+v-1\}$ için, $t=v+s_0+k$ olacak şekilde

$k \in \{0, ..., b+M-s_0-1\}$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& \Delta_t G(t, s_0) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \Gamma(v)\Delta_t G_1(t, s_0) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}\Delta t^{\underline{v-1}} - \Delta_t(t-\sigma(s_0))^{\underline{v-1}} \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}(v-1)t^{\underline{v-2}} \geq (v-1)(t-\sigma(s_0))^{\underline{v-2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}t^{\underline{v-2}} \geq (t-\sigma(s_0))^{\underline{v-2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\Gamma(b+M+v-\mu-s_0)\Gamma(b+M+2)\Gamma(t+1)}{\Gamma(b+M-s_0+1)\Gamma(b+M+v-\mu+1)\Gamma(t-v+3)} \geq \frac{\Gamma(t-s_0)}{\Gamma(t-s_0-v+2)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\Gamma(b+M+v-\mu-s_0)\Gamma(b+M+2)}{\Gamma(b+M-s_0+1)\Gamma(b+M+v-\mu+1)} \geq \frac{\Gamma(t-v+3)\Gamma(t-s_0)}{\Gamma(t-s_0-v+2)\Gamma(t+1)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(b+M+1)...(b+M-s_0+1)}{(b+M+v-\mu)...(b+M+v-\mu-s_0)} \geq \frac{(t-v+2)...(t-v-s_0+2)}{(t)...(t-s_0)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(b+M+1)...(b+M-s_0+1)}{(b+M+v-\mu)...(b+M+v-\mu-s_0)} \geq \frac{(s_0+k+2)...(k+2)}{(s_0+k+v)...(k+v)}
\end{aligned}
$$

dır. $v \geq 2$ ve $maks\,\{k\} = b+M-s_0-1$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \frac{(b+M+1)...(b+M-s_0+1)}{(b+M+v-\mu)...(b+M+v-\mu-s_0)} \\
& \geq \frac{(b+M+1)\,...(b+M+1-s_0)}{(b+M-1+)\,...(b+M-s_0-1+v)} \\
\Leftrightarrow \quad & (b+M-1+)\,...(b+M-s_0-1+v) \\
& \geq (b+M+v-\mu)...(b+M+v-\mu-s_0) \\
\Leftrightarrow \quad & \mu \geq 1
\end{aligned}
$$

bulunur. Kabulden bu doğrudur.

Yukarıdaki beş durum göz önüne alınırsa her $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ ve $t \in \{v-N, ..., b+M+v-1\}$ için

$$\Delta_t G(t, s_0) \geq 0$$

elde edilir. $G(v-1, s_0) > 0$ olduğundan, her $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ için (5.5) ve (5.6) dan

$$i)\ \{v-1,...,b+M+v\} \text{ üzerinde } G(t,s_0)>0\ ,$$

$$ii)\ \{v-N,...,b+M+v\} \text{ üzerinde } G(t,s_0) \text{ azalmayan}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

(5.7) ifadesinin ispatı için, a lemmanın ifadesindeki gibi tanımlanmış olsun. (5.6)'dan

$$\begin{aligned}
& \min_{t\in\{a+M+v-1,...,b+M+v-1\}} G(t,s_0) \\
= \ & G(a+M+v-1,s_0) \\
= \ & \frac{1}{\Gamma(v)}\begin{cases} \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}(a+M+v-1)^{\underline{v-1}} & ,\ 0\le s_0\le a+M-1 \\ \quad -(a+M+v-1-\sigma(s_0))^{\underline{v-1}} & \\ \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}(a+M+v-1)^{\underline{v-1}} & ,\ a+M\le s_0\le b+M \end{cases}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca, (5.6)'dan

$$\begin{aligned}
& \underset{t\in\{v-N,...,b+M+v\}}{maks} G(t,s_0) \\
= \ & G(b+M+v,s_0) \\
= \ & \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}(b+M+v)^{\underline{v-1}}-(b+M+v-\sigma(s_0))^{\underline{v-1}} \\
= \ & \frac{\Gamma(b+M+v-\mu-s_0)}{\Gamma(b+M-s_0+1)}\frac{\Gamma(b+M+2)}{\Gamma(b+M+v-\mu+1)}\frac{\Gamma(b+M+v+1)}{\Gamma(b+M+2)} \\
& -\frac{\Gamma(b+M+v-s_0)}{\Gamma(b+M-s_0+1)} \\
= \ & \frac{\Gamma(b+M+v-\mu-s_0)}{\Gamma(b+M-s_0+1)}\left[\frac{\Gamma(b+M+v+1)}{\Gamma(b+M+v-\mu+1)}-\frac{\Gamma(b+M+v-s_0)}{\Gamma(b+M+v-\mu-s_0)}\right] \\
= \ & (b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}\left[(b+M+v)^{\underline{\mu}}-(b+M+v-\sigma(s_0))^{\underline{\mu}}\right] \\
= \ & (b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}\mathcal{P}(s_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\mathcal{P}(s):=(b+M+v)^{\underline{\mu}}-(b+M+v-\sigma(s))^{\underline{\mu}}$$

dır. $\mu > 0$ ve $v-1 > \mu - 1$ olduğundan, $t \in \{v-1, ..., b+M+v\}$ için (5.3)'ten $t^{\underline{\mu}}$ fonksiyonu artandır. $(b+M+v-\sigma(s))^{\underline{\mu}}$ fonksiyonu da azalandır. Buradan $s \in \{0, ..., b+M\}$ için $\mathcal{P}(s)$ artandır. Ayrıca, (2.12)'den

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(0) &= (b+M+v)^{\underline{\mu}} - (b+M+v-1)^{\underline{\mu}} \\
&= \mu(b+M+v-1)^{\underline{\mu-1}} \\
&= \mu\frac{\Gamma(b+M+v)}{\Gamma(b+M+v-\mu+1)} \\
&\geq \mu \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

olduğundan, her $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ için

$$1 \leq \mathcal{P}(0) \leq \mathcal{P}(s_0) \leq \mathcal{P}(b+M)$$

dır. Böylece, her $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ için $0 < \gamma < 1$ sabiti üzerinde

$$\min_{t\in\{a+M+v-1,...,b+M+v-1\}} G(t, s_0) \geq \gamma \max_{t\in\{v-N,...,b+M+v\}} G(t, s_0)$$

olacak şekilde koşullar bulmak, her $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ için γ üzerinde

$$G(a+M+v-1, s_0) \geq \gamma(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}\mathcal{P}(s_0) \tag{5.9}$$

olacak şekilde koşullar bulmaya denktir.

Böyle bir γ sabiti bulmak için aşağıdaki iki durum ele alınacaktır.

1) $s_0 \in \{a+M, ..., b+M\}$ durumu:

Bu durumda, (5.9) ifadesi

$$
\begin{aligned}
& \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}(a+M+v-1)^{\underline{v-1}} \\
& \geq \gamma(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}\mathcal{P}(s_0) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(a+M+v-1)^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} \geq \gamma\mathcal{P}(s_0) \\
\Leftrightarrow \quad & 0<\gamma \leq \frac{1}{\mathcal{P}(s_0)}\frac{(a+M+v-1)^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} \\
\Leftrightarrow \quad & 0<\gamma \leq \frac{1}{\mathcal{P}(b+M)}\frac{(a+M+v-1)^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. (5.2)'den, $(a+M+v-1)^{\underline{v-1}}$ ve $(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}$ fonksiyonları pozitif olduğundan, istenilen koşul $0<\gamma<1$ olarak bulunur.

2) $s_0 \in \{0,...,a+M-1\}$ durumu:

Bu durumda, (5.9) ifadesi

$$
\begin{aligned}
& \frac{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}(a+M+v-1)^{\underline{v-1}} \\
& \qquad -(a+M+v-1-\sigma(s_0))^{\underline{v-1}} \\
& \geq \gamma(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}\mathcal{P}(s_0) \\
\Leftrightarrow \quad & 0<\gamma \leq \frac{\mathcal{Q}(s_0)}{\mathcal{P}(s_0)}
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. Buradaki $\mathcal{Q}$ fonksiyonu, $s \in \{-1,0,...,a+M-1\}$ için

$$
\mathcal{Q}(s) := \frac{(a+M+v-1)^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}} - \frac{(a+M+v-1-\sigma(s_0))^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu-\sigma(s_0))^{\underline{v-\mu-1}}}
$$

dır. Green fonksiyonu için $s=-1$ değeri tanım kümesine alınmamasına rağmen, $\mathcal{Q}$ fonksiyonunun $\{0,...,a+M-1\}$ üzerinde pozitif ve artan olduğunu göstermek için $s=-1$ noktasında tanımlandığına dikkat ediniz. $\mathcal{Q}(-1)=0$ ve $s \in$

$\{-1, 0, ..., a+M-1\}$ için

$$\begin{aligned}
& \Delta\mathcal{Q}(s) \\
= \ & \mathcal{Q}(s+1) - \mathcal{Q}(s) \\
= \ & \frac{(a+M+v-1-\sigma(s))^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}}} - \frac{(a+M+v-1-\sigma(s+1))^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu-\sigma(s+1))^{\underline{v-\mu-1}}} \\
= \ & \frac{\Gamma(a+M+v-1-s)}{\Gamma(a+M-s)} \frac{\Gamma(b+M+1-s)}{\Gamma(b+M+v-\mu-s)} \\
& - \frac{\Gamma(a+M+v-2-s)}{\Gamma(a+M-s-1)} \frac{\Gamma(b+M-s)}{\Gamma(b+M+v-\mu-1-s)}
\end{aligned}$$

dır. Bu denklemdeki tüm terimlerin $s \in \{-1, 0, ..., a+M-1\}$ için pozitif olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{Q}(s) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{\Gamma(a+M+v-1-s)}{\Gamma(a+M-s)} \frac{\Gamma(b+M+1-s)}{\Gamma(b+M+v-\mu-s)} \\
& > \frac{\Gamma(a+M+v-2-s)}{\Gamma(a+M-s-1)} \frac{\Gamma(b+M-s)}{\Gamma(b+M+v-\mu-1-s)} \\
\Leftrightarrow \quad & (b+M-s)(a+M+v-2-s) \\
& > (a+M-s-1)(b+M+v-\mu-1-s) \\
\Leftrightarrow \quad & (v-1)(b-a+1) + \mu(a+M-s) > 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Sol taraftaki her iki terim pozitif olduğundan bu önerme doğrudur. $\mathcal{Q}(-1) = 0$ ve $s \in \{-1, 0, ..., a+M-1\}$ için $\mathcal{Q}(s)$ artan olduğundan $0 < \gamma < 1$ sabiti için aranılan koşul

$$0 < \gamma \leq \frac{\mathcal{Q}(0)}{\mathcal{P}(a+M-1)}$$

dır.

Yukarıdaki iki durum birleştirilerek $s_0 \in \{0, ..., b+M\}$ için

$$\gamma \leq \min\left\{\frac{1}{\mathcal{P}(b+M)} \frac{(a+M+v-1)^{\underline{v-1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{v-\mu-1}}}, \frac{\mathcal{Q}(0)}{\mathcal{P}(a+M-1)}\right\}$$

sağlanacak şekildeki her hangi $0 < \gamma < 1$ seçiminin

$$\min_{t \in \{a+M+v-1,...,b+M+v-1\}} G(t, s_0) \geq \gamma \max_{t \in \{v-N,...,b+M+v\}} G(t, s_0)$$

eşitsizliğini sağlayacağı gösterilmiştir. $(a+M+v-2)^{\underline{v-1}}$, $(b+M+v-\mu-1)^{\underline{v-\mu-1}} > 0$ ve $\mathcal{P}$ artan olduğundan, $0 < \gamma < 1$ seçimi için daha basit fakat daha az kesin bir gereksinmenin

$$0 < \gamma \leq \frac{\mathcal{Q}(0)}{\mathcal{P}(b+M)}$$

olduğuna dikkat ediniz.

Tanım 5.1. $(\mathcal{B}, \|.\|)$ Banach uzayını

$$\|y\|_{\mathcal{B}} = \|y\| := \max_{t \in \{v-N,...,b+M+v\}} |y(t)|$$

normu ile birlikte

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{array}{c} y : \{v-N, ..., b+M+v\} \to \mathbb{R} : i \in \{0, ..., N-2\} \text{ için} \\ \Delta^i y(v-N) = 0 \text{ ve } \Delta^{\mu}_{v-N} y(b+M+v-\mu) = 0 \end{array} \right\}$$

ile tanımlayalım.

Ayrıca, tamamen sürekli $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ operatörü

$$Ty(t) := \sum_{s=0}^{b+M} G(t,s) f(s, y(s+v-1))$$

ile tanımlayalım (Holm 2011a).

Uyarı 5.2. Green fonksiyonunun özelliklerinden T operatörünün her sabit noktası (5.1) probleminin bir çözümüdür. T operatörünün sabit noktalarını ve (5.1) probleminin çözümlerinin varlığını göstermek için Krasnosel'skii ve Banach teoremleri uygulanacaktır. Banach teoreminin uygulanması (5.1) probleminin bir tek çözümünün var olduğunu söyler.

Teorem 5.2. $\mathcal{B}$ bir Banach uzayı, $K \subseteq \mathcal{B}$ bir koni, $\Omega_1$ve Ω_2, $\mathcal{B}$ uzayında $0 \in \Omega_1$ ve $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2$ olacak şekildeki açık cümleler olsun. $T : K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$ tamamen sürekli bir operatör olsun. Eğer

$$i)\ y \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ için } \|Ty\| \leq \|y\| \text{ ve } y \in K \cap \partial\Omega_2 \text{ için } \|Ty\| \geq \|y\|$$

ya da

$$ii)\ y \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ için } \|Ty\| \geq \|y\| \text{ ve } y \in K \cap \partial\Omega_2 \text{ için } \|Ty\| \leq \|y\|$$

sağlanırsa T operatörünün $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ üzerinde en az bir sabit noktası vardır (Agarwal 2001).

Krasnosel'skii teoremini uygularken yardımcı olması için

$$a := \left\lceil \frac{3(b+M)}{4} \right\rceil$$

$$\eta := \left(\sum_{s=0}^{b+M} G(b+M+v, s) \right)^{-1} = \left\| \sum_{s=0}^{b+M} G(., s) \right\|^{-1}$$

$$\lambda := \left(\sum_{s=a+M}^{b+M} G(b+M+v, s) \right)^{-1}$$

tanımlayalım. f fonksiyonu üzerindeki kabulleri

(A1) Her $0 \leq y \leq r_1$ ve her $t \in \{0, ..., b+M\}$ için $f(t, y) \leq \eta r_1$ olacak şekilde bir $r_1 > 0$ mevcut,

(A2) Her $\gamma r_2 \leq y \leq r_2$ ve her $t \in \{a+M, ..., b+M\}$ için $f(t, y) \geq \lambda r_2$ olacak şekilde bir $r_2 > 0$ mevcut,

(A3) $r_1 < \gamma r_2$ ya da $\lambda r_2 \leq \eta r_1$

şeklindedir.

Burada $\eta < \lambda$ ve $0 < \lambda < 1$ olmak üzere (A1) ve (A2) kabullerinin birbiri ile çeliştiği durumdan kaçınmak için (A3) kabulü yapılmaktadır.

Teorem 5.3. Lineer olmayan $f(t, y)$ fonksiyonu için (A1), (A2) ve (A3) kabullerinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda (5.1) problemi $min\{r_1, r_2\} \leq \|y_0\| \leq maks\{r_1, r_2\}$ olacak şekilde en az bir tane pozitif y_0 çözümüne sahiptir (Holm 2011a).

İspat: $f(t, y)$ fonksiyonu için (A1), (A2) ve (A3) sağlansın ve

$$\mathcal{K} := \left\{ \begin{array}{c} y \in \mathcal{B} : t \in \{v - N, ..., b + M + v\} \text{ için } y(t) \geq 0 \\ \text{ve} \displaystyle\min_{t \in \{a+M+v-1, ..., b+M+v-1\}} y(t) \geq \gamma \|y\| \end{array} \right\}$$

ile $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ konisini tanımlayalım.

İlk olarak $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ olduğu gösterilecektir. Herhangi $y \in \mathcal{K}$ ve $t \in \{v - N, ..., b + M + v\}$ için Green fonksiyonu negatif olmayan ve $y \geq 0$ için f fonksiyonu negatif değildir. Ayrıca $y \geq 0$ için f fonksiyonu negatif değildir. Ohalde

$$Ty(t) = \sum_{s=0}^{b+M} G(t, s) f(s, y(s + v - 1)) \geq 0$$

dır. Ayrıca, (5.7)'den

$$\begin{aligned} &\min_{t \in \{a+M+v-1, ..., b+M+v-1\}} Ty(t) \\ = &\sum_{s=0}^{b+M} \left(\min_{t \in \{a+M+v-1, ..., b+M+v-1\}} G(t, s) \right) f(s, y(s + v - 1)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{s=0}^{b+M}\left(\gamma \underset{t\in\{v-N,\ldots,b+M+v\}}{maks} G(t,s)\right) f(s,y(s+v-1)) \\
&= \gamma \underset{t\in\{v-N,\ldots,b+M+v\}}{maks} \sum_{s=0}^{b+M} G(t,s) f(s,y(s+v-1)) \\
&= \gamma \left\|Ty\right\|
\end{aligned}
$$

dır. Böylece $T:\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ dır.

Şimdi her $r>0$ için

$$\Omega_r := \{y\in\mathcal{B} : \|y\| < r\}$$

açık alt cümlelerini tanımlayalım. (A1) ve (A2) den ilgili r_1 ve r_2 sabitleri için

$$y\in\partial\Omega_{r_1} \Rightarrow \|y\| = r_1$$

ve

$$y\in\partial\Omega_{r_2} \Rightarrow \|y\| = r_2$$

dir.

Bu durumda (A3) aşağıdaki iki durumu gerektirir.

1) $r_1 < \gamma r_2$ durumu:

$r_1 < \gamma r_2$ ise (5.1) probleminin pozitif bir çözümünün varlığı için Teorem 5.2 (i) aşağıdaki şekilde uygulanır.

$i)$ $y\in\mathcal{K}\cap\partial\Omega_{r_1}$ olsun. Bu durumda (A1) ve (5.6)'dan

$$
\begin{aligned}
\|Ty\| &= \underset{t\in\{v-N,\ldots,b+M+v\}}{maks} \sum_{s=0}^{b+M} G(t,s) f(s,y(s+v-1)) \\
&= \sum_{s=0}^{b+M} G(b+M+v,s) f(s,y(s+v-1))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\leq \eta r_1 \left(\sum_{s=0}^{b+M} G(b+M+v,s) \right) \\ &= r_1 \\ &= \|y\| \end{aligned}$$

bulunur.

ii) $y \in \mathcal{K} \cap \partial\Omega_{r_2}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|Ty\| &= Ty(b+M+v) \\ &= \sum_{s=0}^{b+M} G(b+M+v,s) f(s, y(s+v-1)) \\ &\geq \sum_{s=a+M}^{b+M} G(b+M+v,s) f(s, y(s+v-1)) \end{aligned}$$

dır. $y \in \mathcal{K} \cap \partial\Omega_{r_2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\min_{t \in \{a+M+v-1,...,b+M+v-1\}} y(t) \geq \gamma \|y\| \\ \Rightarrow \quad & t \in \{a+M+v-1,...,b+M+v-1\} \text{ için } \gamma r_2 \leq y(t) \leq r_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (A2)'den

$$\begin{aligned} & t \in \{a+M+v-1,...,b+M+v-1\} \text{ için } f(t-v+1, y(t)) \geq \lambda r_2 \\ \Rightarrow \quad & s \in \{a+M,...,b+M\} \text{ için } f(s, y(s+v-1)) \geq \lambda r_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|Ty\| &\geq \sum_{s=a+M}^{b+M} G(b+M+v,s) f(s, y(s+v-1)) \\ &\geq \lambda r_2 \sum_{s=a+M}^{b+M} G(b+M+v,s) \\ &= r_2 \\ &= \|y\| \end{aligned}$$

bulunur.

$\Omega_1 := \Omega_{r_1}$ ve $\Omega_2 := \Omega_{r_2}$ olmak üzere Teorem 5.2 (i), T operatörünün $\mathcal{K} \cap \left(\overline{\Omega}_{r_2} \backslash \Omega_{r_1}\right)$ de bir y_0 sabit noktasına sahip olduğunu gösterir. Buradan $r_1 \leq \|y_0\| \leq r_2$ olmak üzere y_0, (5.1) probleminin bir çözümüdür.

2) $\lambda r_2 \leq \eta r_1$ durumu:

$\lambda r_2 \leq \eta r_1$ ise, $\mathcal{K} \cap \left(\overline{\Omega}_{r_1} \backslash \Omega_{r_2}\right)$ de $r_2 \leq \|y_0\| \leq r_1$ olacak şekilde bir pozitif y_0 çözümünün varlığını göstermek için $\Omega_1 := \Omega_{r_1}$ ve $\Omega_2 := \Omega_{r_2}$ ile Teorem 5.2 (ii) durum 1'deki şekilde uygulanabilir.

(A1) ve (A2)'deki r_1 ve r_2 pozitif olduğundan her iki durumda da y_0 çözümünün (5.1) probleminin

$$\min\{r_1,\ r_2\} \leq \|y_0\| \leq maks\{r_1,\ r_2\}$$

koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü olduğu görülür.

Örnek 5.1.

$$\begin{cases} -\Delta_{\pi-4}^{\pi} y(t) = \left(\frac{y(t+\pi-1)}{e^t}\right)^4, \ t \in \{0, ..., 12\} \\ y(\pi-4) = \Delta y(\pi-4) = \Delta^2 y(\pi-4) = 0 \\ \Delta_{\pi-4}^{e/2} y\left(12+\pi-e/2\right) = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

kesirli (3,1) sınır değer problemini ele alalım. Bu problem

$$v = \pi,\ N = 4,\ f(t, y) = \left(\tfrac{y}{e^t}\right)^4,$$
$$\mu = \tfrac{e}{2},\ M = 2,\ b = 10,\ a = 9$$

ve

$$\mathcal{D}\{y\} = \{\pi-4, ..., \pi+12\}$$

ile lineer olmayan (5.1) probleminin bir özel halidir.

(5.10) probleminin en az bir pozitif çözüme sahip olduğunu göstermek için Teorem

5.3 (i) uygulanabilir. Teorem 5.3 (i) nin uygulanabilmesi için, (A1), (A2) ve (A3) sağlanacak şekilde $r_1,\ r_2 > 0$ sabitleri bulunmalıdır.

Teorem 5.3'teki sabitler

$$\begin{aligned}
\gamma\ &:= \frac{\mathcal{Q}(0)}{\mathcal{P}(12)} \approx 0.0875 \\
\eta\ &:= \left\| \sum_{s=0}^{12} G(.,s) \right\|^{-1} \approx 0.00103 \\
\lambda\ &:= \left\| \sum_{s=11}^{12} G(.,s) \right\|^{-1} \approx 0.0108
\end{aligned}$$

şeklindedir.

(A1) in sağlanması için

$$\begin{aligned}
& 0 \le y \le r_1 \text{ ve } t \in \{0, ..., b+M\} \text{ için } 0 \le f(t,y) \le \eta r_1 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \le y \le r_1 \text{ ve } t \in \{0, ..., 12\} \text{ için } 0 \le \left(\frac{y}{e^t}\right)^4 \le \eta r_1 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \le (r_1)^4 \le \eta r_1 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \le r_1 \le \eta^{1/3} \approx 0.1010
\end{aligned}$$

olacak şekilde $r_1 > 0$ bulunmalıdır.

Böylece, $r_1 := \frac{1}{10}$ olmak üzere (A1) sağlanır.

(A2) nin sağlanması için

$$\begin{aligned}
& \gamma r_2 \le y \le r_2 \text{ ve } t \in \{a+M, ..., b+M\} \text{ için } f(t,y) \ge \lambda r_2 \\
\Leftrightarrow\ & 0.0875 r_2 \le y \le r_2 \text{ ve } t \in \{11, 12\} \text{ için } \left(\frac{y}{e^t}\right)^4 \ge 0.0108 r_2 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{0.0875 r_2}{e^{11}}\right)^4 \ge 0.0108 r_2 \\
\Leftrightarrow\ & r_2 \ge 13,328,472
\end{aligned}$$

olacak şekilde $r_2 > 0$ bulunmalıdır.

Böylece, $r_2 := 13,330,000$ olmak üzere (A2) sağlanır.

Son olarak $\frac{1}{10} < 0.0875x13,330,000$ olduğundan (A3) de sağlanır.

(A1), (A2) ve (A3) sağlandığından Teorem 5.3 (i), (5.10) kesirli sınır değer problemi-nin $\{\pi - 4, ..., \pi + 12\}$ üzerinde pozitif bir y_0 çözümü olduğunu söyler. Ayrıca,

$$\frac{1}{10} \leq \|y_0\| \leq 13,330,000$$

dır.

Teorem 5.4. (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \to X$ fonksiyonu bir daralma dönüşümü olsun. Her $x, y \in X$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

olacak şekilde bir $0 \leq L < 1$ sabiti bulunsun. Bu durumda

(i) f, bir tek $u \in X$ sabit noktasına sahip,
(ii) Her $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = u$,
(iii) Her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $d(f^n(x), u) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x, f(x))$

dır (Agarwal 2001).

Teorem 5.5. Her $t \in \{0, ..., b + M\}$ ve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \theta\,|y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunu sağlayacak şekilde bir $0 < \theta < \eta$ sabiti var ise lineer olmayan (5.1) sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir (Holm 2011a).

İspat: $f(t,y)$ fonksiyonu için teoremde ifade edilen Lipschitz koşulunu sağlayacak şekilde bir $0<\theta<\eta$ sabitinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, herhangi $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$ için

$$\begin{aligned}
& \|Ty_1 - Ty_2\| \\
= & \left\| \sum_{s=0}^{b+M} G(.,s) f(s, y_1(s+v-1)) - \sum_{s=0}^{b+M} G(.,s) f(s, y_2(s+v-1)) \right\| \\
\leq & \left\| \sum_{s=0}^{b+M} G(.,s) \left| f(s, y_1(s+v-1)) - f(s, y_2(s+v-1)) \right| \right\| \\
\leq & \left\| \sum_{s=0}^{b+M} G(.,s) \theta \left| y_1(s+v-1) - y_2(s+v-1) \right| \right\| \\
\leq & \ \theta \|y_1 - y_2\| \left\| \sum_{s=0}^{b+M} G(.,s) \right\| \\
= & \ \frac{\theta}{\eta} \|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

dır.

O halde T operatörü $\frac{\theta}{\eta} \in [0,1)$ Lipschitz sabiti ile bir daralma dönüşümüdür. Böylece Teorem 5.4, T operatörünün bir tek $y_0 \in \mathcal{B}$ sabit noktası olduğunu gösterir. Buradan $y_0 \in \mathcal{B}$, (5.1) probleminin bir tek çözümüdür. Ayrıca, herhangi $y \in \mathcal{B}$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} T^n y$$

hesaplanarak bu y_0 çözümü elde edilebilir. Bununla birlikte, herhangi $y \in \mathcal{B}$ başlangıç fonksiyonu için, Teorem 5.4 (iii)

$$\|T^n y - y_0\| \leq \frac{\theta^n}{\eta^{n-1}(\eta-\theta)} \|Ty - y\|$$

ile herhangi $n \in \mathbb{N}$ adımında tahmin hatasının hesaplanmasına olanak sağlar.

Uyarı 5.3.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta} &= \sum_{s=0}^{b+M} G(b+M+v,s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{b+M} (b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}} \\
&\qquad\qquad \text{x}\left[(b+M+v)^{\underline{\mu}} - (b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{\mu}}\right] \\
&< \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{b+M} (b+M+v-\mu-\sigma(s))^{\underline{v-\mu-1}} (b+M+v)^{\underline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=0}^{b+M} \frac{\Gamma(b+M+v-\mu-s)}{\Gamma(b+M-s+1)} \frac{\Gamma(b+M+v+1)}{\Gamma(b+M+v-\mu+1)} \\
&\leq \sum_{s=0}^{b+M} \frac{\Gamma(b+M+v+1)}{\Gamma(v)} \frac{\Gamma(v-\mu)}{\Gamma(b+M+v-\mu+1)} \\
&= (b+M+1) \frac{(b+M+v)...(v)}{(b+M+v-\mu)...(v-\mu)} \\
&= (b+M+1) \frac{(b+M+v)^{\underline{b+M+1}}}{(b+M+v-\mu)^{\underline{b+M+1}}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$0 \leq \frac{(b+M+v-\mu)^{\underline{b+M+1}}}{(b+M+1)(b+M+v)^{\underline{b+M+1}}} < \eta$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, f fonksiyonunun

$$\theta := \frac{(b+M+v-\mu)^{\underline{b+M+1}}}{(b+M+1)(b+M+v)^{\underline{b+M+1}}}$$

sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlayıp sağlamadığı kontrol edilebilir. Çünkü, bu durumda Teorem 5.5, (5.1) probleminin bir tek çözümünü garanti eder. Ayrıca, bu sonuç η sabiti için uzun hesaplamalara ihtiyaç duyulmadan elde edilebilir.

Örnek 5.2.

$$\begin{cases} -\Delta_{\pi-4}^{\pi} y(t) = \frac{\ln(|y(t+\pi-1)|+1)}{(t+4)^5}, \ t \in \{0,...,12\} \\ y(\pi-4) = \Delta y(\pi-4) = \Delta^2 y(\pi-4) = 0, \\ \Delta_{\pi-4}^{e/2} y(12+\pi-e/2) = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

kesirli (3,1) sınır değer problemini ele alalım. Bu problem

$$v = \pi \quad N = 4 \quad f(t,y) = \tfrac{\ln(|y|+1)}{(t+4)^5}$$
$$\mu = \tfrac{e}{2} \quad M = 2 \quad b = 10,\ a = 9$$

olmak üzere (5.1) probleminin bir özel halidir. Bu durumda, (5.11) probleminin $\{\pi - 4, ..., \pi + 12\}$ üzerinde bir tek çözümünün olduğunu göstermek için Teorem 5.5 kullanılabilir. $t \in \{0, ..., 12\}$ ve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
|f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \left| \frac{\ln(|y_1|+1)}{(t+4)^5} - \frac{\ln(|y_2|+1)}{(t+4)^5} \right| \\
&= \frac{1}{(t+4)^5} \left| \ln(|y_1|+1) - \ln(|y_2|+1) \right| \\
&\leq \frac{1}{4^5} \left| (|y_1|+1) - (|y_2|+1) \right| \\
&= \frac{1}{1024} \left| |y_1| - |y_2| \right| \\
&\leq \frac{|y_1 - y_2|}{1024}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$0 \leq \theta := \frac{1}{1024} \approx 0.00098 < 0.00103 \approx \eta$$

bulunur. O halde Teorem 5.5 ten (5.11) probleminin $\{\pi - 4, ..., \pi + 12\}$ üzerinde bir tek y_0 çözümü vardır.

KAYNAKLAR

Atici, F. M. and Eloe, P. W. 2007. A transform method in discrete fractional calculus. Int. J. Difference Equ. vol. 2; pp. 165–176.

Atıcı, F. M. and Eloe, P. W. 2009a. Discrete fractional calculus with the nabla operator. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. Special Edition I vol 3; 12 p.

Atici, F. M. and Eloe, P. W. 2009b. Initial value problems in discrete fractional calculus. Proc. Amer. Math. Soc. vol. 137; pp. 981–989.

Atıcı, F. M. and Eloe, P. W. 2011. Two-point boundary value problems for finite fractional difference equations. J. Difference Equ. Appl. vol. 17, pp. 445–456.

Bohner, M. and Peterson, A. 2001. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. 358 p.

Díaz, J. B. and Osler, T. J. 1974. Differences of fractional order. Math. Comp. vol. 28; pp. 185–202.

Diethelm, K. 2010. The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer-Verlag, Berlin. 247 p.

Goodrich, C. S. 2010. Continuity of solutions to discrete fractional initial value problems. Comput. Math. Appl. vol. 59; pp. 3489–3499.

Goodrich, C. S. 2011a. Existence and uniqueness of solutions to a fractional difference equation with nonlocal conditions. Comput. Math. Appl. vol. 61; pp. 191–202.

Goodrich, C. S. 2011b. Existence of a positive solution to a system of discrete fractional boundary value problems. Appl. Math. Comput. vol. 217; pp. 4740–4753.

Goodrich, C. S. 2012. On a discrete fractional three-point boundary value problem. J. Difference Equ. Appl. vol. 18; pp. 397–415.

Gray, H. L. and Zhang, N. F. 1988. On a new definition of the fractional difference. Math. Comp. vol. 50; pp. 513–529.

Holm, M. 2011a. Solutions to a discrete, nonlinear, (N-1,1) fractional boundary value problem. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. vol. 3; pp. 267–287.

Holm, M. 2011b. Sum and difference compositions in discrete fractional calculus. Cubo vol. 13; pp. 153–184.

Holm, M. 2011c. The Laplace transform in discrete fractional calculus. Comput. Math. Appl. 62; 1591–1601.

Kelley, W. G. and Peterson, A. C. 2001. Difference equations. An introduction with applications. Second edition. Harcourt/Academic Press, San Diego, CA. 403 p.

Miller, K. S. and Ross, B. 1989. Fractional difference calculus. Univalent functions, fractional calculus, and their applications (Kōriyama, 1988). Ellis Horwood Ser. Math. Appl.; pp. 139–152.

Oldham, K. B. and Spanier, J. 1974. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Academic Press, New York - London. 234 p.

Podlubny, I. 1999. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Academic Press, San Diego. 340 p.

Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam. 976 p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Serkan ASLIYÜCE
Doğum Yeri	:	Akçadağ
Doğum Tarihi	:	07.02.1988
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Akşemsettin Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi (2002-2006)
Lisans	:	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (Ekim 2006 - Temmuz 2010)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2011 - Haziran 2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Amasya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2011)