İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ KUBİT DOLANIKLIK MANİPÜLASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökhan TORUN

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

OCAK 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ KUBİT DOLANIKLIK MANİPÜLASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökhan TORUN
(509101125)

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali YILDIZ

OCAK 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509101125 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Gökhan TORUN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"ÜÇ KUBİT DOLANIKLIK MANİPÜLASYONU"** başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Ali YILDIZ** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Metin ARIK Boğaziçi Üniversitesi	....

Teslim Tarihi : **17 Aralık 2012**
Savunma Tarihi : **23 Ocak 2013**

ÖNSÖZ

Öncelikle bu tezin hazırlanmasında büyük emeği olan, her türlü desteğini benden esirgemeyen, hayatım boyunca kendisini örnek alacağım değerli danışman hocam Doç. Dr. Ali YILDIZ'a ilgisinden ve anlayışından dolayı çok teşekkür ederim.

Ayrıca benim ve kardeşlerimin eğitimimiz için daima çabalayan ve bundan dolayı da her türlü saygıyı hakeden sevgili anneme ve sevgili babama teşekkür ederim.

Ocak 2013

Gökhan TORUN
Fizik Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

LOCC : Local Operations and Classical Communication
SLOCC : Stochastic Local Operations and Classical Communication
POVM : Positive Operator-Valued Measure
GHZ : Greenberger-Horne-Zeilinger
OSBP : One Successful Branch Protocol

ÜÇ KUBİT DOLANIKLIK MANİPÜLASYONU

ÖZET

Kuantum dolanıklık iki veya daha fazla sistem arasında yerel olarak yaratılamayan bir bağdır. Kuantum dolanıklığı kuantum mekaniğinin kavramsal olarak anlaşılmasındaki en önemli olgulardan biri olmasının yanı sıra son yıllarda kuantum bilgi işleme süreçlerinde kaynak olarak kullanılmaktadır. Kuantum bilgi işleme süreçlerinde kaynak olarak kullanılacak dolanıklığın istenilen özelliklere sahip olması bilgi işleme süreçlerinin başarısı için son derece önemlidir. Bu da iki ya da daha fazla parçacık arasındaki dolanıklığın optimal manipülasyonu probleminin çözülmesini gerektirir.

Bu tezde hem N seviyeli iki parçacık arasındaki dolanıklığın hem de iki seviyeli üç parçacık arasındaki dolanıklığın optimal manipülasyonu için geliştirilen yöntemler sunulacaktır.

İkinci bölümde $N \otimes N$ kuantum durumlarının manipülasyonunu inceliyoruz. İlk olarak $2 \otimes 2$ durumlar için dolanıklığın azaldığı ve dolanıklığın arttığı durumları ayrı ayrı ele alacağız. Dolanıklığın arttığı durumlar arasındaki geçiş için elde edilen yöntem kuantum ışınlama ve yoğun kodlama gibi bilgi işleme süreçleri için oldukça önemlidir. Kuantum ışınlama işlemlerinde paylaşılan durum maksimal dolanık durum değilse bilginin tamamen kaybolma ihtimali vardır. Gönderilmek istenilen bilginin kaybolma ihtimalinden dolayı paylaşılan durum maksimal dolanık duruma dönüştürülür. Böylelikle bilginin kaybolma ihtimalinin önüne geçilmiş olunur. Bu açıdan az dolanık bir durumdan çok dolanık bir duruma geçiş için elde edilen yöntem önemli olmaktadır. Daha sonra sırasıyla majorization şartının sağlandığı $3 \otimes 3$ ve $4 \otimes 4$ durumlar arasındaki geçişleri inceliyoruz. $3 \otimes 3$ ve $4 \otimes 4$ durumlar arasındaki geçiş için majorization şartının sağlanması bu geçişin $p = 1$ olasılıkla gerçekleşmesi anlamına gelir. $3 \otimes 3$ ve $4 \otimes 4$ durumlar arasındaki geçişler için açıklanan yöntem geçişin tek ölçümde gerçekleşmesi açısından önemlidir. Bölümün sonunda $4 \otimes 4$ durumlar için elde edilen yöntemden yararlanarak $N \otimes N$ durumlar arasındaki geçişi inceliyoruz. $N \otimes N$ durumlar arasındaki geçiş için $2 \otimes 2$ için sunulan yöntem kullanıldığında geçiş için $(N-1)$ ölçüm yapılır. Öte yandan $4 \otimes 4$ durumlar için sunulan yöntem kullanıldığında geçiş için gerekli ölçüm sayısı $(N-3)$ olmaktadır.

Üçüncü bölümde üç kubit saf durumun optimal manipülasyonu problemi için çözümler sunulacaktır. İlk olarak üç kubite ait üniter dönüşümlerden bahsedilerek iki seviyeli üç kubit saf durumun kanonik formunu yazıyoruz. Kanonik formu yazdıktan sonra üç kubit için POVM'nin genel formunu buluyoruz. Kanonik POVM'yi bularak yapılacak hesaplamalar üzerindeki yükü azaltmış oluyoruz. Ardından yerel operasyonlarla birbirine dönüştürülemeyen iki farklı üç kubit dolanıklık sınıfının olduğunu ve herhangi bir durumun hangi denklik sınıfında olduğunu anlayabilmek için bilinmesi gerekenleri gösteriyoruz. Saf W durumuyla yapılamayan birçok kuantum bilgi işlem süreci asimetrik W durumu ve GHZ durumuyla yapılabilmektedir. Bu tezin son bölümünde GHZ durumunun elde edilmesi için bir yöntem önerilecek ve bu yöntem kullanılarak GHZ

durum elde etme olasılığı ile yapılması gereken ölçümler üç kubit sisteminin değişmezleri cinsinden bulunacaktır.

THREE QUBIT ENTANGLEMENT MANIPULATION

SUMMARY

Quantum entanglement is a quantum mechanical correlation between two or more parties which can not be created locally. It is not only one of the most distinctive phenomenon which contributes to the understanding the concepts of quantum mechanics but also it is used as a resource in quantum information processes. The use of quantum entanglement as a resource requires a deep understanding of how the states are transformed under local operations and classical communication. The success probability in fulfilling quantum information tasks depends on the properties of the entangled state which is used as a resource. This requires the solution of optimal entanglement manipulation problem. The optimal manipulation of pure states leads to the introduction of canonical forms, the equivalence classes under local unitary transformations, as the states that can be transformed into each other by local unitary transformations are equivalent in the context of fulfilling the information theoretic tasks.

In this thesis, we present optimal manipulation methods for N level bipartite and two level tripartite entangled states.

In the second chapter, we investigate the manipulation of $N \otimes N$ quantum states. Any N level bipartite entangled state can be converted into

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |0\rangle |0\rangle + \lambda_1 |1\rangle |1\rangle + \lambda_2 |2\rangle |2\rangle + ... + \lambda_{N-1} |N-1\rangle |N-1\rangle$$

by local unitary transformations. This is the canonical form of N level bipartite entangled states. The parameters λ_i are called Schmidt coefficients and satisfy the following condition

$$\sum_i \lambda_i^2 = 1, \quad \lambda_i^2 \geq 0.$$

Firstly, we discuss the entanglement of $2 \otimes 2$ pure states. For the two qubit case, the canonical form is given by

$$a|00\rangle + b|11\rangle, \quad a \geq b \geq 0$$

and the optimal distillation of the maximally entangled state

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

from a single copy is obtained by performing the positive operator valued measurement (POVM) of $\frac{b}{a}|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ on the first qubit. The success probability of distilling a maximally entangled state turns out to be $2b^2$. On the other hand, any state can be obtained from maximally entangled state with unit probability. We obtain the POVM elements and probabilities for both cases. Without loss of generality we find the parameters that define POVM elements in terms of Schmidt coefficients of the original state and the final state.

The process of entanglement concentration is very important for quantum-information processes such as perfect teleportation and dense coding. If the original state is a maximally entangled state then the quantum information can be teleported with unit probability. However, if the original state is not a maximally entangled state then there is always a probability of losing the information. To avoid the probability of losing the information, we first transform the original state into a maximally entangled state and then teleport the quantum information. Then we investigate the transformations of $3\otimes 3$ and $4\otimes 4$ pure states respectively. These transformations depend on the majorization condition which determines the transformation properties of $N\otimes N$ bipartite entangled states. The transformation between $N\otimes N$ pure states, that majorization condition is satisfied, exists with unit probability. The method we present for the transformations of both $3\otimes 3$ and $4\otimes 4$ pure entangled states is important because of the fact that the transformation can be done by a single measurement. When we try to obtain these methods we, firstly, find necessary unitary transformations on two particles. There are two cases for $3\otimes 3$ and four cases for $4\otimes 4$ pure states transformations depending on the value of the Schmidt coefficients. We obtain unitary transformations for all cases one by one. After we find the unitary transformations we find POVM elements. We discuss the transformations between $N\otimes N$ pure states by the using the method we present for $4\otimes 4$ pure states at the end of this chapter. The number of the measurements is $(N-1)$ when the method that we find for $2\otimes 2$ pure states is used for transformations between $N\otimes N$ pure states. On the other hand, number of the measurements for transformations between $N\otimes N$ pure states is $(N-3)$ if we use the method that we find for $4\otimes 4$ pure states. This is another beneficial consequence of method that we present for $4\otimes 4$ pure states.

In the second chapter, we present solutions for optimal manipulation problem of three-qubit pure states. We define the canonical forms of local positive operator valued measurements (POVMs) on three-qubit pure states as the equivalence classes under local unitary transformations. We use these canonical forms, which simplifies the problem of manipulation of the states by local operations, in the distillation of Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) states and obtain the optimal distillation protocols in terms of the bipartite concurrences and the three-tangle. Firstly, we discuss the unitary transformations for three qubits and then we obtain the three-qubit canonical form. Any three-qubit state

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} t_{ijk}\,|ijk\rangle$$

defines matrices T_0 and T_1 by

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} T_{0,jk}\,|0\rangle\,|jk\rangle + T_{1,jk}\,|1\rangle\,|jk\rangle.$$

Under the unitary transformations on the first qubit, the matrices T_0 and T_1 transform as

$$T_0' = u_{00}T_0 + u_{01}T_1, \quad T_1' = u_{10}T_0 + u_{11}T_1.$$

It is always possible to make $\det T_0' = 0$ and the unitary transformations on the second and third qubits diagonalize T_0'. Then the canonical form of the generic three-qubit states is defined by

$$\lambda_0\,|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}\,|100\rangle + \lambda_2\,|101\rangle + \lambda_3\,|110\rangle + \lambda_4\,|111\rangle\,, \quad \lambda_i \geq 0.$$

However, the parameters λ_i and ϕ do not uniquely determine the the state (the equivalence class) because there are two solutions for $\det T_0' = 0$, and this leads to two sets of parameters for the canonical form. The state with the other set of parameters can be found to be

$$|\widetilde{\psi}\rangle = \widetilde{\lambda}_0 |000\rangle + \widetilde{\lambda}_1 e^{i\widetilde{\varphi}} |100\rangle + \widetilde{\lambda}_2 |101\rangle + \widetilde{\lambda}_3 |110\rangle + \widetilde{\lambda}_4 |111\rangle , \quad \widetilde{\lambda}_i \geq 0.$$

We investigate the canonical form of general POVM using the fact that local operations which transform the states from one equivalence class into another with the same probability are equivalent from the information theoretic point of view. Then we discuss the equivalences classes of states. In the three-qubit case there are two classes of tripartite-entangled states which cannot be converted into each other by stochastic local operations and classical communication namely the GHZ and W class states. Any two states of the same class can be converted into each other by means of SLOCC. The GHZ state,

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle),$$

and the symmetric W state,

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle),$$

are considered as the representatives of the GHZ and W classes respectively. There are two solutions for $\det T_0' = 0$ and hence there are two sets of values of λ's for any generic state. If the three-tangle given by $\lambda_0\lambda_4$ is nonzero, then the three-qubit state is of GHZ class. If three-tangle is zero and the reduced density matrices $\rho_A \equiv tr_{BC}(|\psi\rangle \langle\psi|)$, ρ_B and ρ_C have rank two, then the state $|\psi\rangle$ is a W class state. Although symmetric W state is not suitable for quantum-information processes, asymmetric W states

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle + \frac{1}{2} |010\rangle + \frac{1}{2} |001\rangle ,$$

$$\frac{1}{2} |100\rangle + \frac{1}{2} |010\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |001\rangle ,$$

and GHZ state are suitable for these processes. If the three-qubit entangled state used as a resource is not a GHZ state or an asymmetric W state then distilling these states is necessary to successfully perform quantum-information tasks. The solution of GHZ manipulation is important in this respect. We propose a method for GHZ manipulation. The problem of optimal distillation of the GHZ state using OSBP is reduced to the problem of maximizing probability subject to the constraints that we find. The solution for most general case, where all bipartite entanglements C_{ab}, C_{ac}, and C_{bc} are nonzero, requires numerical calculations. However we find the analytical solutions in terms of the concurrences and the three tangle in the cases where at least one of the concurrences is zero.

1. GİRİŞ

Kuantum dolanıklığı sadece klasik fizikle kuantum mekaniğini birbirinden ayıran en önemli özelliklerden biri değil aynı zamanda klasik bilgi işlemede karşılığı olmayan kuantum ışınlama [1] ve yoğun kodlama [2] gibi birçok kuantum bilgi işleme süreçlerinde kaynak olarak kullanılmaktadır. Kaynak olarak kullanılan iki kubit arasındaki dolanıklığın miktarı kuantum bilgi işlemedeki başarı olasılığını arttırmaktadır. Kaynak olarak kullanılacak durum maksimal dolanık durum değilse, önce kaynak maksimal duruma getirilir sonra bilgi işlemede kullanılır. Dolayısıyla kuantum durumlarının manipülasyonu kuantum bilgi işleme için oldukça önemlidir. Kuantum ışınlama ve yoğun kodlama kuantum bilgi işleme süreçlerine örnek olarak verilebilir.

Kuantum ışınlamada Alice ve Bob dolanık bir duruma sahiplerse aralarında kuantum kanal olmamasına rağmen biri diğerine klasik kanallar ile bir kuantum bilgisini gönderebilir. Alice'in elinde Bob'a yollamak istediği bir kubitlik bilgi, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, var olsun. Alice ve Bob'un paylaştıkları durum maximal dolanık durum ise Alice yollamak istediği bilgiyi $p = 1$ olasılıkla gönderebilir. Eğer Alice ve Bob'un paylaştıkları dolanık durum maximal dolanık durum değilse, $a|00\rangle + b|11\rangle$, Alice Bob'a bilgiyi $p = 1$ olasılıkla gönderemez. Bu durumda Alice'in Bob'a göndermek istediği bilginin Bob'a ulaşma olasılığı $2b^2$ olur [3–5]. Bu olasılık gerçekleşmediğinde bilgi tamamen kaybolur. Bilginin tamamen kaybolma ihtimali olduğu için Alice bilgiyi hemen Bob'a göndermek yerine ilk önce ellerindeki $a|00\rangle + b|11\rangle$ durumunu POVM yardımı ile $2b^2$ olasılıkla maximal dolanık duruma dönüştürür. Daha sonra eğer ellerindeki durum maximal dolanık duruma dönüşmüşse Alice Bob'a göndermek istediği bilgiyi gönderir. $2 \otimes 2$ durumlar için kuantum ışınlama protokolünün işleyişi bu şekildedir. $2 \otimes 2 \otimes 2$ durumlar için de protokolün işleyişi benzerdir [6]. Üçüncü bölümde yerel operasyonlarla birbirine dönüştürülemeyen iki farklı üç kubit dolanık durum, GHZ ve W, olduğunu göstereceğiz [7]. Eğer paylaşılan durum saf W ise bilginin alıcıya ulaşma ihtimali $2/3$ olmaktadır [8]. Paylaşılan durum saf W ise gönderilmek istenilen bilginin tamamen kaybolma ihtimali vardır. Bu da saf W durumunun ışınlama protokolü için uygun olmadığı anlamına gelir. Eğer paylaşılan dolanık durum eğer asimetrik W durumu ise bilgi alıcıya $p = 1$ olasılıkla gönderilir [9]. Saf W durumunda karşımıza çıkan sorun GHZ durumunda yoktur. Eğer paylaşılan durum GHZ ise gönderilmek istenilen bilgi alıcıya $p = 1$ olasılıkla gönderilir. Dolayısıyla GHZ durumu ışınlama protokolü için uygundur.

Yoğun kodlama, prensip olarak kuantum ışınlama protokolünün tersidir. Yoğun kodlamada klasik bilgi kuantum kanallar aracılığıyla gönderilmektedir. Bu protokol temel olarak şu şekildedir: Başlangıçta Alice ve Bob Bell durumlarından birini, örneğin singlet durum, paylaşıyor olsun.

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$$
$$|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \tag{1.1}$$

Alice Bob'a göndermek istediği klasik bilgiye, $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ ve $|11\rangle$, göre kendi parçacığı üzerinde dört farklı üniter dönüşüm, I, σ_z, σ_x ve σ_y, yaptıktan sonra elindeki parçacığı Bob'a göndermektedir. Bu üniter dönüşümler

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

şeklindedir. Bu dört üniter dönüşümün herbiri mevcut durumu dört Bell durumundan birine dönüştürür. Bob elindeki iki parçacık üzerinde dört farklı Bell durumunu birbirinden ayıran ölçüm yaparak kendisine hangi iki bitlik bilginin gönderildiğini anlayabilir. Böylelikle iki bitlik bilgi karşı tarafa gönderilir. Kuantum ışınlamada olduğu gibi başlangıçta Alice ve Bob maksimal dolanık durumu paylaşmıyor ise ilk olarak paylaştıkları durum maksimal dolanık duruma dönüştürülür ve ardından yukarıda anlatılan protokol uygulanır.

Bu tezin ilk bölümünde yukarıda anlatılan kuantum ışınlama ve yoğun kodlama süreçlerinin başarı olasılığını arttırmak için elimizdeki mevcut durumun daha kullanışlı bir duruma dönüştürülebilmesi için gerekli protokol anlatılacaktır. Daha sonra ise üç kubit saf durumlar ile ilgili genel bilgi verilecek ve ardından üç kubit dolanıklık manipülasyonu ve yoğunlaştırması sunulacaktır.

2. $N \otimes N$ SAF KUANTUM DURUMLARININ MANİPÜLASYONLARI

Bu bölümde önce herhangi iki $2 \otimes 2$ durum arasındaki geçişi inceleyeceğiz. Bunu yaparken dolanıklığın arttığı ve azaldığı durumları ayrı ayrı ele alacağız. Daha sonra $3 \otimes 3$ durumları inceleyeceğiz. Majorization [10] şartının sağlandığı $3 \otimes 3$ durumlar arasındaki geçişin $p = 1$ olasılıkla gerçekleştiğini göstereceğiz ve bu geçişi mümkün kılan POVM'leri bulacağız. $3 \otimes 3$ durumları inceledikten sonra benzer hesapları $4 \otimes 4$ durumlar için de tekrarlayıp son olarak $N \otimes N$ durumlar arasındaki geçişi veren protokolü bulacağız. Öncelikle sık sık kullanacağımız kanonik form, POVM [11] ve majorization kavramlarını kısaca açıklayalım.

2.1 İki Parçacıklı Saf Durumların Kanonik Formu

En genel $N \otimes N$

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_{AB} &= \alpha_0 |0\rangle|0\rangle + \alpha_1 |0\rangle|1\rangle + \alpha_2 |0\rangle|2\rangle + ... + \alpha_{N-1} |0\rangle|N-1\rangle + \beta_0 |1\rangle|0\rangle \\ &+ \beta_1 |1\rangle|1\rangle + \beta_2 |1\rangle|2\rangle + ... + \beta_{N-1} |1\rangle|N-1\rangle + ... + \gamma_0 |N-1\rangle|0\rangle \\ &+ \gamma_1 |N-1\rangle|1\rangle + ... + \gamma_{N-1} |N-1\rangle|N-1\rangle \end{aligned} \quad \textbf{(2.1)}$$

iki parçacık sistemini düşünelim. Burada A ve B parçacıklarına ait yoğunluk matrisleri

$$\rho_A = tr_B(|\phi\rangle\langle\phi|), \quad \rho_B = tr_A(|\phi\rangle\langle\phi|) \quad \textbf{(2.2)}$$

olmak üzere ρ_A ve ρ_B'nin özdeğerlerinin aynı oldukları gösterilebilir. Dolayısıyla, $|i_A\rangle$ A'nın ve $|i_B\rangle$ de B'nin ortonormal bazları olmak üzere iki parçacık kanonik formu

$$\sum_i \lambda_i |i_A\rangle|i_B\rangle \quad \textbf{(2.3)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu $|\phi\rangle_{AB}$ durumunun yerel üniter dönüşümlerle $\sum_i \lambda_i |i_A\rangle|i_B\rangle$ durumuna dönüştürülebileceği anlamına gelir. Burada λ_i'ler Schmidt katsayıları olarak bilinir ve de

$$\sum_i \lambda_i^2 = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

olmaktadır. Bu durumda

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i^2 |i_A\rangle\langle i_A|, \quad \rho_B = \sum_i \lambda_i^2 |i_B\rangle\langle i_B| \quad \textbf{(2.4)}$$

olur. Bundan sonraki yapacağımız tüm hesaplamalarda $N \otimes N$ genel durumunu

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |0\rangle |0\rangle + \lambda_1 |1\rangle |1\rangle + \lambda_2 |2\rangle |2\rangle + ... + \lambda_{N-1} |N-1\rangle |N-1\rangle \qquad \textbf{(2.5)}$$

formunda alacağız.

2.2 İzdüşüm Ölçüm ve POVM

Genişletilmiş uzaydaki yardımcı parçacıkla üniter olan etkileşimin ardından yardımcı parçacık üzerinde yapılan izdüşümsel ölçüm sonucu kuantum durumu çöker. Kısmi iz alarak ilk parçacığın yeni durumunu ve çökme olasılığını bulduğumuzda elimizdeki parçacığın yeni durumunu ve bu duruma geçiş olasılığını bu parçacığa etkiyen POVM'ler şeklinde yazmak mümkündür. Şimdi genişletilmiş uzaydaki üniter olan etkileşimin ardından yardımcı parçacık üzerinde yapılan izdüşümsel ölçüm ile POVM ölçümünün birbirine denk olduğunu yapılan ölçümlerin formunu açık olarak yazarak görelim.

İlk olarak izdüşüm ölçümden bahsedelim. İzdüşüm ölçüm, $M = \sum_m \lambda_m P_m$ olmak üzere,

$$P_m = |m\rangle \langle m| \qquad \textbf{(2.6)}$$

şeklinde tanımlıdır ve de $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ olmaktadır. Yapılacak ölçüm sonucu olarak λ_m değerini bulma olasılığı $p(m) = \langle\psi| P_m |\psi\rangle$ olur. Ölçüm sonucu λ_m değeri elde edilirse elimizdeki durum

$$\frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} \qquad \textbf{(2.7)}$$

durumuna çöker. İzdüşüm ölçüm prensip olarak bu şekildedir.

İkinci olarak POVM'den bahsedelim. Kuantum ölçüm operatörleri $\{M_m\}$ olarak gösterilir. Burada m ölçüm sonucunda elde edilecek değerle ilgilidir. Başlangıçta elimizdeki durum $|\psi\rangle$ olsun. Ölçüm yapıldığında λ_m değerini bulma olasılığı

$$p(m) = \langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle \qquad \textbf{(2.8)}$$

olur. Bu olasılık gerçekleştiğinde $|\psi\rangle$ durumu

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle}} \qquad \textbf{(2.9)}$$

durumuna çöker. Olasılıkların toplamının 1 olması

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle = 1 \Rightarrow \sum_m M_m^\dagger M_m = I \qquad \textbf{(2.10)}$$

sonucunu verir. Burada $E_m \equiv M_m^\dagger M_m$ olarak tanımlanırsa $p(m) = \langle\psi| E_m |\psi\rangle$ olur. Bunun yanı sıra

$$\sum_m E_m = \sum_m M_m^\dagger M_m = I \tag{2.11}$$

olmak üzere, E_m pozitif bir operatordür. E_m yapılan ölçümle ilişkili olan POVM elemanları olmaktadır, $\{E_m\}$ seti de POVM olarak adlandırılır.

2.3 Majorization

Alice ve Bob'un elindeki durum

$$|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad \psi_1 \geq \psi_2 \geq ... \geq \psi_N \tag{2.12}$$

olsun. Alice'e ait yoğunluk matrisi $\rho_\psi = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$ olmak üzere ρ_ψ'nin özdeğerleri ψ_i olur. Benzer şekilde

$$|\phi\rangle = \sum_i \phi_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad \phi_1 \geq \phi_2 \geq ... \geq \phi_N \tag{2.13}$$

olmak üzere $|\phi\rangle$ durumu için $\rho_\phi = tr_B(|\phi\rangle\langle\phi|)$ ve ρ_ϕ'nin özdeğerleri ϕ_i olur. Bu durumda $|\psi\rangle$ ve $|\phi\rangle$ $N \otimes N$ iki saf durum olmak üzere, eğer her k için

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_i \leq \sum_{i=1}^{k} \phi_i \tag{2.14}$$

eşitsizliği sağlanırsa $|\psi\rangle \to |\phi\rangle$ geçişi $p = 1$ olasılıkla gerçekleşir [12]. Burada $N \otimes N$ saf durumlar arasındaki geçiş için yapılacak ölçüm sayısı $(N-1)$ olmaktadır.

2.4 $2 \otimes 2$ Saf Durumlar

Bu bölümde elimizdeki herhangi bir

$$|\psi\rangle_{12} = a_1|00\rangle + b_1|11\rangle, \quad a_1 \geq b_1 \geq 0 \tag{2.15}$$

durumundan başka bir

$$|\phi\rangle_{12} = a_2|00\rangle + b_2|11\rangle, \quad a_2 \geq b_2 \geq 0 \tag{2.16}$$

durumuna geçişte kullanılacak POVM'yi ve bu geçiş için maksimum olasılığı elde edeceğiz. POVM elemanlarını belirleyen parametreleri bulmak için yardımcı parçacık ve POVM'yi ilişkilendireceğiz. Yardımcı parçacık $|0\rangle_3$ durumunda olsun.

$$\begin{aligned}
|\psi'\rangle_{123} &= |\psi\rangle_{12} \otimes |0\rangle_3 = (a_1|00\rangle + b_1|11\rangle)_{12} \otimes |0\rangle_3 \\
&= a_1|000\rangle_{123} + b_1|110\rangle_{123} \\
&= a_1|0\rangle_1 \otimes |00\rangle_{23} + b_1|1\rangle_1 \otimes |10\rangle_{23}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

olmak üzere, ikinci parçacık ve yardımcı parçacık etkileştiğinde zaman içinde

$$\begin{aligned} |00\rangle_{23} &\rightarrow \alpha_1 |00\rangle + \beta_1 |01\rangle + \gamma_1 |10\rangle + \delta_1 |11\rangle \\ |10\rangle_{23} &\rightarrow \alpha_2 |00\rangle + \beta_2 |01\rangle + \gamma_2 |10\rangle + \delta_2 |11\rangle \end{aligned} \tag{2.18}$$

durumlarına evrilirler. Bu evrimin üniter olması parametreler üzerinde

$$\begin{aligned} |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + |\gamma_1|^2 + |\delta_1|^2 = 1, &\quad |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 + |\gamma_2|^2 + |\delta_2|^2 = 1 \\ \alpha_1 \alpha_2^* + \beta_1 \beta_2^* + \gamma_1 \gamma_2^* + \delta_1 \delta_2^* = 0, &\quad \alpha_1^* \alpha_2 + \beta_1^* \beta_2 + \gamma_1^* \gamma_2 + \delta_1^* \delta_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

şartlarını verecektir. Üniter evrimden sonra

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle_{123} \;=\; & a_1 |0\rangle_1 \otimes (\alpha_1 |00\rangle + \beta_1 |01\rangle + \gamma_1 |10\rangle + \delta_1 |11\rangle)_{23} \\ & + b_1 |1\rangle_1 \otimes (\alpha_2 |00\rangle + \beta_2 |01\rangle + \gamma_2 |10\rangle + \delta_2 |11\rangle)_{23} \end{aligned} \tag{2.20}$$

olmak üzere, düzenlersek

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle_{123} \;=\; & (a_1\alpha_1 |00\rangle + a_1\gamma_1 |01\rangle + b_1\alpha_2 |10\rangle + b_1\gamma_2 |11\rangle)_{12} \otimes |0\rangle_3 \\ & + (a_1\beta_1 |00\rangle + a_1\delta_1 |01\rangle + b_1\beta_2 |10\rangle + b_1\delta_2 |11\rangle)_{12} \otimes |1\rangle_3 \end{aligned} \tag{2.21}$$

elde edilir. Üçüncü parçacık üzerinde izdüşüm ölçümü yapılırsa $|0\rangle$ ya da $|1\rangle$ elde edilir. Diyelim ki üçüncü parçacık üzerinde izdüşüm ölçümü yaptık ve $|0\rangle$ elde ettik. Bu durumda $|\psi''\rangle_{123}$

$$(a_1\alpha_1 |00\rangle + a_1\gamma_1 |01\rangle + b_1\alpha_2 |10\rangle + b_1\gamma_2 |11\rangle)_{12} \otimes |0\rangle_3 \tag{2.22}$$

durumuna çöker. Öte yandan üçüncü parçacık üzerinde izdüşüm ölçümü yapılınca $|0\rangle$ elde edilirse, birinci ve ikinci parçacıklar için

$$a_1\alpha_1 |00\rangle + a_1\gamma_1 |01\rangle + b_1\alpha_2 |10\rangle + b_1\gamma_2 |11\rangle \tag{2.23}$$

elde edilir. Üçüncü parçacık üzerinde izdüşüm ölçümü yapınca $|0\rangle$ değilde $|1\rangle$ elde edilirse $|\psi''\rangle_{123}$

$$(a_1\beta_1 |00\rangle + a_1\delta_1 |01\rangle + b_1\beta_2 |10\rangle + b_1\delta_2 |11\rangle)_{12} \otimes |1\rangle_3 \tag{2.24}$$

durumuna çöker. Üçüncü parçacık üzerinde izdüşüm ölçümü yapılınca $|1\rangle$ elde edilmesi birinci ve ikinci parçacıklar için

$$a_1\beta_1 |00\rangle + a_1\delta_1 |01\rangle + b_1\beta_2 |10\rangle + b_1\delta_2 |11\rangle \tag{2.25}$$

elde edildiği anlamına gelir. İzdüşüm ölçüm ile POVM ölçümünü ilişkilendirebilmek için POVM ölçümü ile ne tür sonuçlar elde edeceğimize bakalım. POVM kullanarak elde edilen sonuçlarla yardımcı parçacık kullanarak elde edilen sonuçları karşılaştırarak POVM elemanlarını a_1, b_1, a_2 ve b_2 cinsinden elde edeceğiz. İkinci parçacığa uygulanacak POVM, $\{M_1, M_2\}$ şeklinde alınırsa

$$M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I \qquad \textbf{(2.26)}$$

olmak durumundadır. Diyelim ki $|\psi''\rangle$ için üçüncü parçacık üzerinde izdüşüm ölçümü yaptık ve $|0\rangle$ elde ettik, bu durumda

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_0}}(a_1\alpha_1|00\rangle + a_1\gamma_1|01\rangle + b_1\alpha_2|10\rangle + b_1\gamma_2|11\rangle) \qquad \textbf{(2.27)}$$

$$p_0 = a_1^2|\alpha_1|^2 + a_1^2|\gamma_1|^2 + b_1^2|\alpha_2|^2 + b_1^2|\gamma_2|^2 \qquad \textbf{(2.28)}$$

olur. İkinci parçacık üzerine uygulanacak genel POVM'nin ilk elemanı

$$M_1 = a|0\rangle\langle 0| + b|0\rangle\langle 1| + c|1\rangle\langle 0| + d|1\rangle\langle 1| \qquad \textbf{(2.29)}$$

şeklinde olsun. Bu durumda, $|\psi\rangle = a_1|00\rangle + b_1|11\rangle$ olmak üzere, eğer ikinci parçacık üzerinde yapılan POVM ölçüm sonunda λ_1 değeri elde edilirse kuantum durumu

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{p_0}} = \frac{1}{\sqrt{p_0}}(a_1|0\rangle\otimes(a|0\rangle + c|1\rangle) + b_1|1\rangle\otimes(b|0\rangle + d|1\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_0}}(a_1a|00\rangle + a_1c|01\rangle + b_1b|10\rangle + b_1d|11\rangle) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.30)}$$

durumuna

$$p_0 = \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = a_1^2|a|^2 + a_1^2|c|^2 + b_1^2|b|^2 + b_1^2|d|^2 \qquad \textbf{(2.31)}$$

olasılıkla çöker. Gerek (**2.27**) nolu eşitlikte bulunan, gerekse (**2.30**) nolu eşitlikte bulunan $|\psi_0\rangle$ aynıdır. Dolayısıyla (**2.27**) ve (**2.30**) nolu eşitlikler birbiri ile karşılaştırılırsa

$$a = \alpha_1, \quad b = \alpha_2, \quad c = \gamma_1, \quad d = \gamma_2 \qquad \textbf{(2.32)}$$

bulunur. Bu durumda

$$M_1 = \alpha_1|0\rangle\langle 0| + \alpha_2|0\rangle\langle 1| + \gamma_1|1\rangle\langle 0| + \gamma_2|1\rangle\langle 1| \qquad \textbf{(2.33)}$$

olur. $|\psi''\rangle$ için üçüncü parçacık üzerinde izdüşüm ölçümü yapınca $|0\rangle$ değilde $|1\rangle$ elde edilirse, bu durumda

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_1}}(a_1\beta_1|00\rangle + a_1\delta_1|01\rangle + b_1\beta_2|10\rangle + b_1\delta_2|11\rangle) \qquad \textbf{(2.34)}$$

$$p_1 = a_1^2|\beta_1|^2 + a_1^2|\delta_1|^2 + b_1^2|\beta_2|^2 + b_1^2|\delta_2|^2 \tag{2.35}$$

olur. İkinci parçacık üzerine uygulanacak genel POVM'nin diğer elemanı

$$M_2 = e\,|0\rangle\,\langle 0| + f\,|0\rangle\,\langle 1| + g\,|1\rangle\,\langle 0| + h\,|1\rangle\,\langle 1| \tag{2.36}$$

şeklinde olsun. Eğer yapılan POVM ölçümü sonucunda λ_2 değeri elde edilirse kuantum durumu

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{M_2\,|\psi\rangle}{\sqrt{p_1}} = \frac{1}{\sqrt{p_1}}(a_1\,|0\rangle \otimes (e\,|0\rangle + g\,|1\rangle) + b_1\,|1\rangle \otimes (f\,|0\rangle + h\,|1\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_1}}(a_1 e\,|00\rangle + a_1 g\,|01\rangle + b_1 f\,|10\rangle + b_1 h\,|11\rangle) \end{aligned} \tag{2.37}$$

durumuna

$$p_1 = \langle\psi|\,M_2^\dagger M_2\,|\psi\rangle = a_1^2|e|^2 + a_1^2|g|^2 + b_1^2|f|^2 + b_1^2|h|^2 \tag{2.38}$$

olasılıkla çöker. Gerek (**2.34**) nolu eşitlikte bulunan, gerekse (**2.37**) nolu eşitlikte bulunan $|\psi_1\rangle$ aynıdır. Dolayısıyla (**2.34**) ve (**2.37**) nolu eşitlikler birbiri ile karşılaştırılırsa

$$e = \beta_1, \quad f = \beta_2, \quad g = \delta_1, \quad h = \delta_2 \tag{2.39}$$

bulunur. Bu durumda

$$M_2 = \beta_1\,|0\rangle\,\langle 0| + \beta_2\,|0\rangle\,\langle 1| + \delta_1\,|1\rangle\,\langle 0| + \delta_2\,|1\rangle\,\langle 1| \tag{2.40}$$

olur. Şimdi herhangi bir $a_1\,|00\rangle + b_1\,|11\rangle$ durumundan başka bir $a_2\,|00\rangle + b_2\,|11\rangle$ durumunu nasıl elde edebileceğimizi tartışabiliriz. Kuantum durumları arasındaki

$$a_1\,|00\rangle + b_1\,|11\rangle \to a_2\,|00\rangle + b_2\,|11\rangle \tag{2.41}$$

geçişi için kullanılacak POVM'nin ilk elemanı olan M_1'i ikinci parçacığa etki ettirdiğimizde

$$\frac{1}{\sqrt{p_0}}(a_1\alpha_1\,|00\rangle + a_1\gamma_1\,|01\rangle + b_1\alpha_2\,|10\rangle + b_1\gamma_2\,|11\rangle) = a_2\,|00\rangle + b_2\,|11\rangle \tag{2.42}$$

elde edilmişti. Genelliği bozmadan $\gamma_1 = 0$ ve $\alpha_2 = 0$ seçebiliriz. Bu durumda

$$\frac{1}{\sqrt{p_0}}(a_1\alpha_1\,|00\rangle + b_1\gamma_2\,|11\rangle) = a_2\,|00\rangle + b_2\,|11\rangle \tag{2.43}$$

$$p_0 = a_1^2|\alpha_1|^2 + b_1^2|\gamma_2|^2, \quad M_1 = \alpha_1\,|0\rangle\,\langle 0| + \gamma_2\,|1\rangle\,\langle 1| \tag{2.44}$$

elde edilir. Öte yandan M_1 yerine M_2'yi ikinci parçacığa etki ettirdiğimizde

$$\frac{1}{\sqrt{p_1}}(a_1\beta_1\,|00\rangle + a_1\delta_1\,|01\rangle + b_1\beta_2\,|10\rangle + b_1\delta_2\,|11\rangle) = a_2'\,|00\rangle + b_2'\,|11\rangle \tag{2.45}$$

elde edilmişti. Genelliği bozmadan $\delta_1 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ seçebiliriz. Bu durumda

$$\frac{1}{\sqrt{p_1}}(a_1\beta_1 |00\rangle + b_1\delta_2 |11\rangle) = a_2' |00\rangle + b_2' |11\rangle \quad \textbf{(2.46)}$$

$$p_1 = a_1^2|\beta_1|^2 + b_1^2|\delta_2|^2, \quad M_2 = \beta_1 |0\rangle\langle 0| + \delta_2 |1\rangle\langle 1| \quad \textbf{(2.47)}$$

elde edilir. $a_1 |00\rangle + b_1 |11\rangle \rightarrow a_2 |00\rangle + b_2 |11\rangle$, bu geçişte iki durum söz konusudur. Birinci durumda dolanıklık artıyor, yani $a_1 > a_2$ iken $b_1 < b_2$ olmaktadır, ikinci durumda ise dolanıklık azalıyor, yani $a_1 < a_2$ iken $b_1 > b_2$ olmaktadır. Her iki durum için de olasılığın alabileceği maksimum değeri ve POVM'leri hesaplayalım.

2.4.1 Dolanıklığın arttığı durum

Dolanıklığın arttığı durum $a_1 > a_2$ ve $b_1 < b_2$ olduğu durumlardır. Eğer (**2.43**) nolu eşitliğe bakarsak $a_1\alpha_1 = \sqrt{p_0}a_2$ ve $b_1\gamma_2 = \sqrt{p_0}b_2$ olmaktadır. Düzenlersek

$$\frac{a_1\alpha_1}{a_2} = \frac{b_1\gamma_2}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_1}$$

$a_1 > a_2$ ve $b_2 > b_1$ için $a_1 b_2 > b_1 a_2$ olur. Bu durumda

$$\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} > 1, \quad \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_1} > 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 > \alpha_1 \quad \textbf{(2.48)}$$

olur. Olasılığı, $p_0 = \gamma_2^2(b_1^2/b_2^2)$, maksimize edersek $\gamma_2 = 1$ elde edilir. Bu durumda $\delta_2 = 0$ ve $\alpha_1 < 1$ olur, ve de olasılığımız

$$b_1\gamma_2 = b_2\sqrt{p_0} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{b_1^2}{b_2^2} \quad \textbf{(2.49)}$$

olur. Ayrıca,

$$a_1\alpha_1 = a_2\sqrt{p_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} \quad \textbf{(2.50)}$$

olur. POVM, $\{M_1, M_2\}$,

$$M_1 = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \quad M_2 = \sqrt{1 - \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}} |0\rangle\langle 0| \quad \textbf{(2.51)}$$

olarak elde edilir. Daha dolanık bir durum elde etme olasılığı $p = b_1^2/b_2^2$ olur. POVM ölçümü sonucunda M_1 istenilen durumu elde etmemizi sağlarken M_2 dolanıklığı ortadan kaldırmaktadır.

Bu durum için örnek olarak herhangi bir durumdan maksimal dolanık duruma geçişi ve geçiş olasılığını elde etmeye çalışalım.

$$a_1 |00\rangle + b_1 |11\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad \textbf{(2.52)}$$

Bu durumda $a_2 = b_2 = 1/\sqrt{2}$ olur. Maksimal dolanık durumu elde etmek için kullanılacak POVM elemanı

$$M_1 = \frac{b_1}{a_1} |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| \qquad \textbf{(2.53)}$$

olmaktadır. Bunun yanı sıra maksimal dolanık duruma geçiş olasılığı $p = 2b_1^2$ olur.

2.4.2 Dolanıklığın azaldığı durum

Dolanıklığın azaldığı durum $a_1 < a_2$ ve $b_1 > b_2$. Şimdi çok dolanık durumdan az dolanık durumu maksimum olasılıkla elde etmek için gerekli POVM elemanlarını ve maksimum olasılığı bulalım. Dolanıklığın azaldığı durum için majorization şartı sağlanır. Dolayısıyla çok dolanık bir durumdan az dolanık bir duruma geçiş $p = 1$ olasılıkla gerçekleşir. Eğer, (**2.43**) ve (**2.46**) nolu eşitliklere geri dönersek,

$$\begin{aligned} a_1\alpha_1 &= \sqrt{p_0}a_2, \quad b_1\gamma_2 = \sqrt{p_0}b_2 \\ a_1\beta_1 &= \sqrt{p_1}a_2', \quad b_1\delta_2 = \sqrt{p_1}b_2' \end{aligned} \qquad \textbf{(2.54)}$$

olmakta idi. (**2.54**) nolu eşitlik ve $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ ile $|\gamma_2|^2 + |\delta_2|^2 = 1$ bilgilerini ve de toplam olasılığın 1 olması gerektiği, $p_0 + p_1 = 1$, bilgisini kullanarak POVM elemanlarını a_1, b_1, a_2 ve b_2 cinsinden elde edelim. Bu sayede p_0 ve p_1 olasılıkları için de bir değer elde etmiş olacağız. Burada M_1'i $|\psi\rangle$'ye etki ettirdiğimizde elde edilen durum $|\phi\rangle$'ye eşitken, M_2'yi $|\psi\rangle$'ye etki ettirdiğimizde elde edilen durum $|\phi\rangle$'ye eşit değil. Ancak $|0\rangle \to |1\rangle$ ve $|1\rangle \to |0\rangle$ üniter dönüşümüyle kolayca $|\phi\rangle$ elde edilir. Yapılacak bu üniter dönüşümden dolayı işlemlere başlamadan önce $a_2' = b_2$ ve $b_2' = a_2$ olarak alacağız ve böylelikle de olasılığı maksimize etmiş olacağız.

$$p_0 + p_1 = 1 = |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2, \quad p_0 = \frac{a_1^2}{a_2^2}|\alpha_1|^2, \quad p_1 = \frac{a_1^2}{b_2^2}|\beta_1|^2 \qquad \textbf{(2.55)}$$

Yukarıdaki p_0 ve p_1 değerlerini yerine koyarsak

$$p_0 + p_1 = \frac{a_1^2}{a_2^2}|\alpha_1|^2 + \frac{a_1^2}{b_2^2}|\beta_1|^2 = |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 \qquad \textbf{(2.56)}$$

elde edilir. Düzenlersek

$$(\frac{a_1^2}{b_2^2} - 1)|\beta_1|^2 = (1 - \frac{a_1^2}{a_2^2})|\alpha_1|^2 \quad \Rightarrow \quad |\beta_1|^2 = |\alpha_1|^2 \frac{b_2^2(a_2^2 - a_1^2)}{a_2^2(a_1^2 - b_2^2)} \qquad \textbf{(2.57)}$$

olur. Elde edilen bu eşitliği, $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ eşitliğinde uygun şekilde kullanırsak

$$|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = |\alpha_1|^2(1 + \frac{b_2^2(a_2^2 - a_1^2)}{a_2^2(a_1^2 - b_2^2)}) = 1 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_1|^2 = \frac{a_2^2(a_1^2 - b_2^2)}{a_1^2(a_2^2 - b_2^2)} \qquad \textbf{(2.58)}$$

ve de

$$|\beta_1|^2 = |\alpha_1|^2 \frac{b_2^2(a_2^2-a_1^2)}{a_2^2(a_1^2-b_2^2)} = \frac{b_2^2(a_2^2-a_1^2)}{a_1^2(a_2^2-b_2^2)} \quad \textbf{(2.59)}$$

olarak elde edilir. Benzer işlemler γ_2 ve δ_2 için de tekrarlanırsa

$$|\gamma_2|^2 = \frac{b_2^2(b_1^2-a_2^2)}{b_1^2(b_2^2-a_2^2)}, \quad |\delta_2|^2 = \frac{a_2^2(b_2^2-b_1^2)}{b_1^2(b_2^2-a_2^2)} \quad \textbf{(2.60)}$$

olur. Bu durumda POVM, $\{M_1, M_2\}$,

$$M_1 = \frac{a_2}{a_1}\sqrt{\frac{(a_1^2-b_2^2)}{(a_2^2-b_2^2)}}\,|0\rangle\langle 0| + \frac{b_2}{b_1}\sqrt{\frac{(b_1^2-a_2^2)}{(b_2^2-a_2^2)}}\,|1\rangle\langle 1| \quad \textbf{(2.61)}$$

$$M_2 = \frac{b_2}{a_1}\sqrt{\frac{(a_2^2-a_1^2)}{(a_2^2-b_2^2)}}\,|0\rangle\langle 0| + \frac{a_2}{b_1}\sqrt{\frac{(b_2^2-b_1^2)}{(b_2^2-a_2^2)}}\,|1\rangle\langle 1| \quad \textbf{(2.62)}$$

olur. Olasılık değerlerimiz

$$p_0 = \frac{(a_1^2-b_2^2)}{(a_2^2-b_2^2)}, \quad p_1 = \frac{(a_2^2-a_1^2)}{(a_2^2-b_2^2)} \quad \textbf{(2.63)}$$

olmaktadır. Dolanıklığın azaldığı durum için POVM elemanlarını, $\{M_1, M_2\}$, ve olasılık değerlerini elde ettik.

Bu durum için özel olarak maksimal dolanık durumdan herhangi bir duruma geçiş sırasında kullanılacak POVM'yi ve geçiş olasılığını elde ettiğimiz sonuçları kullanarak bulalım.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \rightarrow a_2|00\rangle + b_2|11\rangle \quad \textbf{(2.64)}$$

Bu durumda $a_1 = b_1 = 1/\sqrt{2}$ olur. İlk olarak POVM'yi bulalım.

$$|\alpha_1|^2 = \frac{a_2^2(a_1^2-b_2^2)}{a_1^2(a_2^2-b_2^2)} = (\frac{1-2b_2^2}{a_2^2-b_2^2})a_2^2 = a_2^2, \quad |\beta_1|^2 = 1-|\alpha_1|^2 = 1-a_2^2 = b_2^2$$

olur. Benzer şekilde

$$|\gamma_2|^2 = \frac{b_2^2(b_1^2-a_2^2)}{b_1^2(b_2^2-a_2^2)} = (\frac{1-2a_2^2}{b_2^2-a_2^2})b_2^2 = b_2^2, \quad |\delta_2|^2 = 1-|\gamma_2|^2 = 1-b_2^2 = a_2^2$$

olur. Bu durumda POVM

$$M_1 = \alpha_1|0\rangle\langle 0| + \gamma_2|1\rangle\langle 1| = a_2|0\rangle\langle 0| + b_2|1\rangle\langle 1| \quad \textbf{(2.65)}$$

$$M_2 = \beta_1|0\rangle\langle 0| + \delta_2|1\rangle\langle 1| = b_2|0\rangle\langle 0| + a_2|1\rangle\langle 1| \quad \textbf{(2.66)}$$

olur. Olasılığımız ise

$$p_0 = \frac{(a_1^2-b_2^2)}{(a_2^2-b_2^2)} = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{(a_2^2-a_1^2)}{(a_2^2-b_2^2)} = \frac{1}{2}$$

olur. Toplam olasılık $p = p_0 + p_1 = 1$ olmaktadır. Bu sonuç da majorization [12] şartı ile uyumludur.

2.5 $3 \otimes 3$ Saf Durumlar

Bu bölümde elimizdeki herhangi bir $a_1 |00\rangle + b_1 |11\rangle + c_1 |22\rangle$ $(a_1 \geq b_1 \geq c_1 > 0)$ durumundan başka bir $a_2 |00\rangle + b_2 |11\rangle + c_2 |22\rangle$ $(a_2 \geq b_2 \geq c_2 \geq 0)$ durumuna geçişin $p = 1$ olasılıkla olmasını mümkün kılacak POVM'yi elde etmeye çalışacağız.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow |\phi\rangle \\ a_1 |00\rangle + b_1 |11\rangle + c_1 |22\rangle &\rightarrow a_2 |00\rangle + b_2 |11\rangle + c_2 |22\rangle \end{aligned} \quad \textbf{(2.67)}$$

$|\psi\rangle$ ve $|\phi\rangle$ durumları için majorization şartı sağlanmalıdır. Bu şart gereği

$$a_2^2 \geq a_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2 \geq a_1^2 + b_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad \textbf{(2.68)}$$

olmak durumundadır. Şimdi $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ geçişini gerçekleştireceğiz. Ancak burada önemli bir nokta var. Elimizdeki durumlar majorization şartını sağlasa bile $b_1 \geq b_2$ ve $b_2 \geq b_1$ durumları için farklı iki POVM'nin gerekli olduğu görülmüştür. Bu nedenden dolayı $b_1 \geq b_2$ ve $b_2 \geq b_1$ durumları için ayrı hesaplar yapacağız.

2.5.1 $b_1 \geq b_2$ olduğu durum

İlk olarak $b_1 \geq b_2$ için $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ geçişinin $p = 1$ olasılıkla gerçekleşmesini sağlayacak POVM'yi bulalım. Birinci kubite uygulayacağımız, ikinci kubite de uygulanabilirdi, genel POVM, $\{M_1, M_2, M_3\}$,

$$M_i = \sqrt{\alpha_i} |0\rangle \langle 0| + \sqrt{\beta_i} |1\rangle \langle 1| + \sqrt{\gamma_i} |2\rangle \langle 2|, \quad i = 1,2,3 \quad \textbf{(2.69)}$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{3} M_i^\dagger M_i = M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 + M_3^\dagger M_3 = I \quad \textbf{(2.70)}$$

olmalıdır. Burada görüldüğü üzere 3 elemanlı bir POVM kullanıyoruz. Amacımız $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ geçişini tek ölçümle yapabilmek olduğu için 3 elemanlı bir POVM kullanıyoruz. Ölçüm sayısını önemsemeden $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ geçişini gerçekleştirmek isteseydik POVM'nin 3 elemanlı alınması zorunlu olmazdı. POVM'yi $|\psi\rangle$ durumuna etki ettirirsek

$$|\psi_i\rangle = \frac{M_i |\psi\rangle}{\sqrt{p_i}} = \frac{1}{\sqrt{p_i}}(\sqrt{\alpha_i} a_1 |00\rangle + \sqrt{\beta_i} b_1 |11\rangle + \sqrt{\gamma_i} c_1 |22\rangle) \quad \textbf{(2.71)}$$

elde edilir. Burada

$$p_i = \langle \psi | M_i^\dagger M_i | \psi \rangle = \alpha_i a_1^2 + \beta_i b_1^2 + \gamma_i c_1^2, \quad i = 1,2,3 \quad \textbf{(2.72)}$$

olmaktadır. POVM kullanarak $|\psi\rangle$ durumundan p_1 olasılıkla $|\psi_1\rangle$, p_2 olasılıkla $|\psi_2\rangle$ ve p_3 olasılıkla $|\psi_3\rangle$ durumları elde edildi. Toplam olasılık

$$p = \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i a_1^2 + \beta_i b_1^2 + \gamma_i c_1^2) = 1 \quad \textbf{(2.73)}$$

olur.

$$|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle \sim |\psi_3\rangle \sim |\phi\rangle = a_2 |00\rangle + b_2 |11\rangle + c_2 |22\rangle \quad \textbf{(2.74)}$$

Burada $|\psi_1\rangle$ durumu $|\phi\rangle$'ye eşitken, $|\psi_2\rangle$ ve $|\psi_3\rangle$ üzerinde yapılacak üniter dönüşümlerle $|\phi\rangle$ elde edilir. $|\psi_2\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad |2\rangle \rightarrow |2\rangle \quad \textbf{(2.75)}$$

ve $|\psi_3\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \rightarrow |2\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad |2\rangle \rightarrow |0\rangle \quad \textbf{(2.76)}$$

şeklinde olmalıdır. (**2.71**) nolu eşitlik (**2.74**) nolu eşitlik ile değerlendirildiğinde ve $|\psi_2\rangle$ ile $|\psi_3\rangle$ için yapılması gereken üniter dönüşümler de göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{p_1}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{p_1}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{p_1}} = c_2 \quad \textbf{(2.77)}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{p_2}} = b_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{p_2}} = a_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{p_2}} = c_2 \quad \textbf{(2.78)}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{p_3}} = c_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{p_3}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_3}}{\sqrt{p_3}} = a_2 \quad \textbf{(2.79)}$$

olmaktadır. Elde edilen bu eşitlikleri kendi aralarında düzenlersek

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = x, \quad \beta_1 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} x, \quad \gamma_1 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} x \quad \textbf{(2.80)}$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{b_2^2 b_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{b_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = y, \quad \beta_2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{b_1^2 b_2^2} y, \quad \gamma_2 = \frac{a_1^2 c_2^2}{c_1^2 b_2^2} y \quad \textbf{(2.81)}$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{c_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{c_2^2 c_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = z, \quad \beta_3 = \frac{a_1^2 b_2^2}{c_2^2 b_1^2} z, \quad \gamma_3 = \frac{a_1^2 a_2^2}{c_2^2 c_1^2} z \quad \textbf{(2.82)}$$

elde edilir. POVM elemanlarının katsayılarını x, y ve z gibi üç yeni parametre cinsinden ifade ettik. Eğer x, y ve z parametrelerini bulursak POVM elemanlarının katsayılarını da bulmuş oluruz. (**2.70**) nolu eşitlik gereği

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1, \quad \beta_1+\beta_2+\beta_3=1, \quad \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=1 \tag{2.83}$$

olmaktadır. (**2.80**), (**2.81**) ve (**2.82**) nolu eşitliklerden yararlanarak (**2.83**) nolu eşitliği yeniden yazmak istersek ortaya üç bilinmeyenli üç tane denklem çıkar. Bu denklemler

$$\begin{gathered}
x+y+z=1\\
\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2b_1^2}x+\frac{a_1^2a_2^2}{b_1^2b_2^2}y+\frac{a_1^2b_2^2}{c_2^2b_1^2}z=1\\
\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2c_1^2}x+\frac{a_1^2c_2^2}{c_1^2b_2^2}y+\frac{a_1^2a_2^2}{c_2^2c_1^2}z=1
\end{gathered} \tag{2.84}$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü bize POVM elemanlarının katsayılarının, α_i, β_i ve γ_i, ne olması gerektiğini söyler. Bu denklem sistemini çözdüğümüz takdirde x, y ve z aşağıdaki gibi bulunur.

$$x = \frac{a_2^2(b_2^4c_1^2+b_1^2c_2^4+a_1^2(a_2^4-b_2^2c_2^2)-a_2^2(b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2))}{a_1^2(a_2^2-b_2^2)(a_2^2-c_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}, \tag{2.85}$$

$$y = \frac{b_2^2(-a_2^2b_1^2+a_1^2b_2^2+b_2^2c_1^2-b_1^2c_2^2)}{a_1^2(-a_2^2+b_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}, \tag{2.86}$$

$$z = \frac{-c_2^2(-a_2^2c_1^2-b_2^2c_1^2+(a_1^2+b_1^2)c_2^2)}{a_1^2(a_2^2-c_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2))} \tag{2.87}$$

(**2.80**), (**2.81**) ve (**2.82**) nolu eşitlikler kullanılarak POVM elemanlarının katsayıları elde edilir. Böylelikle $b_1 \geq b_2$ olduğu durum için POVM'yi, $\{M_1,M_2,M_3\}$, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 ve c_2 cinsinden hesaplamış olduk.

2.5.2 $b_2 \geq b_1$ olduğu durum

İkinci olarak $b_2 \geq b_1$ için $|\psi\rangle \to |\phi\rangle$ geçişinin $p=1$ olasılıkla gerçekleşmesini sağlayacak POVM'yi bulalım. Burada $b_2 \geq b_1$ olduğu durum için yapılacak hesaplamalar ile $b_1 \geq b_2$ olduğu durum için yapılan hesaplamalar benzerdir, sadece yapılacak üniter dönüşümler farklıdır. (**2.74**) nolu eşitliğe kadar yapılacak işlemler tamamen aynı olduğundan dolayı (**2.74**) nolu eşitlikten sonraki hesaplamaları yapmamız yeterlidir. (**2.74**) nolu eşitliğe geri dönersek

$$|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle \sim |\psi_3\rangle \sim |\phi\rangle = a_2\,|00\rangle + b_2\,|11\rangle + c_2\,|22\rangle \tag{2.88}$$

olmak üzere burada $|\psi_1\rangle$ durumu $|\phi\rangle$'ye eşitken, $|\psi_2\rangle$ ve $|\psi_3\rangle$ üzerinde yapılacak üniter dönüşümlerle $|\phi\rangle$ elde edilir. $|\psi_2\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \rightarrow |2\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad |2\rangle \rightarrow |0\rangle \tag{2.89}$$

ve $|\psi_3\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |2\rangle, \quad |2\rangle \rightarrow |1\rangle \tag{2.90}$$

şeklinde olmalıdır. (**2.71**) nolu eşitlik (**2.88**) nolu eşitlik ile değerlendirildiğinde ve $|\psi_2\rangle$ ile $|\psi_3\rangle$ için yapılması gereken üniter dönüşümler de göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{p_4}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{p_4}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{p_4}} = c_2 \tag{2.91}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{p_5}} = c_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{p_5}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{p_5}} = a_2 \tag{2.92}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{p_6}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{p_6}} = c_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_3}}{\sqrt{p_6}} = b_2 \tag{2.93}$$

olmaktadır. Elde edilen bu eşitlikleri kendi aralarında düzenlersek

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = x, \quad \beta_1 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2}x, \quad \gamma_1 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2}x \tag{2.94}$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{c_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{c_2^2 c_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = y, \quad \beta_2 = \frac{a_1^2 b_2^2}{b_1^2 c_2^2}y, \quad \gamma_2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{c_1^2 c_2^2}y \tag{2.95}$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = z, \quad \beta_3 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 b_1^2}z, \quad \gamma_3 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 c_1^2}z \tag{2.96}$$

elde edilir. POVM elemanlarının katsayılarını x, y ve z gibi üç yeni parametre cinsinden ifade ettik. Eğer x, y ve z parametrelerini bulursak POVM elemanlarının katsayılarını da bulmuş oluruz. (**2.94**), (**2.95**) ve (**2.96**) nolu eşitliklerden yararlanarak (**2.83**) nolu eşitliği yeniden yazmak istersek ortaya üç bilinmeyenli üç tane denklem çıkar. Bu denklemler

$$x + y + z = 1 \tag{2.97}$$

$$\frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2}x + \frac{a_1^2 b_2^2}{b_1^2 c_2^2}y + \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 b_1^2}z = 1 \tag{2.98}$$

$$\frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} x + \frac{a_1^2 a_2^2}{c_1^2 c_2^2} y + \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 c_1^2} z = 1 \qquad (\mathbf{2.99})$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü bize POVM elemanlarının katsayılarının, α_i, β_i ve γ_i, ne olması gerektiğini söyler. Bu denklem sistemini çözdüğümüz taktirde x, y ve z aşağıdaki gibi bulunur.

$$x = \frac{a_2^2(-a_2^4 b_1^2 - a_1^2 b_2^4 + b_1^2 b_2^2 c_2^2 - c_1^2 c_2^4 + a_2^2(b_2^2 c_1^2 + a_1^2 c_2^2))}{a_1^2(a_2^2 - c_2^2)(-b_2^2 + c_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}, \qquad (\mathbf{2.100})$$

$$y = \frac{-c_2^2(-a_2^2(b_1^2 + c_1^2) + a_1^2(b_2^2 + c_2^2))}{a_1^2(a_2^2 - c_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}, \qquad (\mathbf{2.101})$$

$$z = \frac{a_2^2(-a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + b_2^2 c_1^2 - b_1^2 c_2^2)}{a_1^2(b_2^2 - c_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)} \qquad (\mathbf{2.102})$$

(**2.94**), (**2.95**) ve (**2.96**) nolu eşitlikler kullanılarak POVM elemanlarının katsayıları elde edilir. Böylelikle $b_2 \geq b_1$ olduğu durum için POVM'yi, $\{M_1, M_2, M_3\}$, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 ve c_2 cinsinden hesaplamış olduk.

Sonuç olarak gerek $b_1 \geq b_2$ için gerekse $b_2 \geq b_1$ için ayrı ayrı hesaplamaları yaparak majorization şartını sağlayan herhangi iki $3 \otimes 3$ durum arasındaki geçişin $p = 1$ olasılıkla olmasını mümkün kılacak POVM'leri elde ettik.

2.6 $4 \otimes 4$ Saf Durumlar

Bu bölümde elimizdeki herhangi bir

$$|\psi\rangle = a_1 |00\rangle + b_1 |11\rangle + c_1 |22\rangle + d_1 |33\rangle, \quad a_1 \geq b_1 \geq c_1 \geq d_1 > 0 \qquad (\mathbf{2.103})$$

durumundan başka bir

$$|\phi\rangle = a_2 |00\rangle + b_2 |11\rangle + c_2 |22\rangle + d_2 |33\rangle, \quad a_2 \geq b_2 \geq c_2 \geq d_2 \geq 0 \qquad (\mathbf{2.104})$$

durumuna geçişi inceleyeceğiz ve bu geçişin $p = 1$ olasılıkla olmasını mümkün kılacak POVM'yi elde etmeye çalışacağız. Elimizdeki iki durum için majorization şartı sağlanmalıdır. Bu şart gereği

$$a_2^2 \geq a_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2 \geq a_1^2 + b_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \geq a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 1 \qquad (\mathbf{2.105})$$

olmak durumundadır. Şimdi $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ geçişini gerçekleştireceğiz. Ancak burada önemli bir nokta var. Elimizdeki durumlar majorization şartını sağlasa bile $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$,

$b_2 \geq b_1$ ve $c_2 \geq c_1$, $b_1 \geq b_2$ ve $c_2 \geq c_1$, $b_2 \geq b_1$ ve $c_1 \geq c_2$ durumları için farklı POVM'nin gerekli olduğu görülmüştür. Bu nedenden dolayı bu 4 farklı durum için ayrı hesaplar yapacağız.

2.6.1 $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum

İlk olarak $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ için $|\psi\rangle \to |\phi\rangle$ geçişinin $p = 1$ olasılıkla gerçekleşmesini sağlayacak POVM'yi bulalım. Birinci kubite uygulayacağımız, ikinci kubite de uygulanabilirdi, genel POVM, $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$,

$$M_i = \sqrt{\alpha_i}\,|0\rangle\langle 0| + \sqrt{\beta_i}\,|1\rangle\langle 1| + \sqrt{\gamma_i}\,|2\rangle\langle 2| + \sqrt{\delta_i}\,|3\rangle\langle 3|, \quad i = 1,2,3,4 \qquad \textbf{(2.106)}$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{4} M_i^\dagger M_i = M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 + M_3^\dagger M_3 + M_4^\dagger M_4 = I \qquad \textbf{(2.107)}$$

olmalıdır. POVM'yi $|\psi\rangle$ durumuna etki ettirirsek

$$\begin{aligned} |\psi_i\rangle &= \frac{M_i\,|\psi\rangle}{\sqrt{p_i}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_i}}\left(\sqrt{\alpha_i}a_1\,|00\rangle + \sqrt{\beta_i}b_1\,|11\rangle + \sqrt{\gamma_i}c_1\,|22\rangle + \sqrt{\delta_i}d_1\,|33\rangle\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.108)}$$

elde edilir. Burada

$$p_i = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = \alpha_i a_1^2 + \beta_i b_1^2 + \gamma_i c_1^2 + \delta_i d_1^2, \quad i = 1,2,3,4 \qquad \textbf{(2.109)}$$

olmaktadır. POVM kullanarak $|\psi\rangle$ durumundan p_1 olasılıkla $|\psi_1\rangle$, p_2 olasılıkla $|\psi_2\rangle$, p_3 olasılıkla $|\psi_3\rangle$ ve p_4 olasılıkla $|\psi_4\rangle$ durumları elde edildi. Toplam olasılık

$$p = \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i a_1^2 + \beta_i b_1^2 + \gamma_i c_1^2 + \delta_i d_1^2) = 1 \qquad \textbf{(2.110)}$$

olur.

$$|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle \sim |\psi_3\rangle \sim |\psi_4\rangle \sim |\phi\rangle = a_2\,|00\rangle + b_2\,|11\rangle + c_2\,|22\rangle + d_2\,|33\rangle \qquad \textbf{(2.111)}$$

Burada $|\psi_1\rangle$ durumu $|\phi\rangle$'ye eşitken, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve $|\psi_4\rangle$ üzerinde yapılacak üniter dönüşümlerle $|\phi\rangle$ elde edilir. $|\psi_2\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |1\rangle, \quad |1\rangle \to |0\rangle, \quad |2\rangle \to |2\rangle, \quad |3\rangle \to |3\rangle \qquad \textbf{(2.112)}$$

$|\psi_3\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |2\rangle, \quad |1\rangle \to |1\rangle, \quad |2\rangle \to |0\rangle, \quad |3\rangle \to |3\rangle \qquad \textbf{(2.113)}$$

ve son olarak $|\psi_4\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \rightarrow |3\rangle\,, \quad |1\rangle \rightarrow |1\rangle\,, \quad |2\rangle \rightarrow |2\rangle\,, \quad |3\rangle \rightarrow |0\rangle \tag{2.114}$$

şeklinde olmalıdır. (**2.108**) nolu eşitlik (**2.111**) nolu eşitlik ile değerlendirildiğinde ve $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve de $|\psi_4\rangle$ için yapılması gereken üniter dönüşümler de göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{p_1}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{p_1}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{p_1}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{p_1}} = d_2 \tag{2.115}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{p_2}} = b_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{p_2}} = a_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{p_2}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{p_2}} = d_2 \tag{2.116}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{p_3}} = c_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{p_3}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_3}}{\sqrt{p_3}} = a_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{p_3}} = d_2 \tag{2.117}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_4}}{\sqrt{p_4}} = d_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_4}}{\sqrt{p_4}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_4}}{\sqrt{p_4}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_4}}{\sqrt{p_4}} = a_2 \tag{2.118}$$

olmaktadır. Elde edilen bu eşitlikleri kendi aralarında düzenlersek

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\delta_1} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.119}$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{b_2^2 b_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{b_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\delta_2} = \frac{b_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.120}$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{c_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{c_2^2 c_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\delta_3} = \frac{c_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.121}$$

$$\frac{\alpha_4}{\beta_4} = \frac{d_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\gamma_4} = \frac{d_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\delta_4} = \frac{d_2^2 d_1^2}{a_1^2 a_2^2} \tag{2.122}$$

olur. Eğer $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = z$ ve $\alpha_4 = t$ olarak alırsak

$$\alpha_1 = x, \quad \beta_1 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2}x, \quad \gamma_1 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2}x, \quad \delta_1 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 d_1^2}x \tag{2.123}$$

$$\alpha_2 = y, \quad \beta_2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{b_2^2 b_1^2}y, \quad \gamma_2 = \frac{a_1^2 c_2^2}{b_2^2 c_1^2}y, \quad \delta_2 = \frac{a_1^2 d_2^2}{b_2^2 d_1^2}y \tag{2.124}$$

$$\alpha_3 = z, \quad \beta_3 = \frac{a_1^2 b_2^2}{c_2^2 b_1^2}z, \quad \gamma_3 = \frac{a_1^2 a_2^2}{c_2^2 c_1^2}z, \quad \delta_3 = \frac{a_1^2 d_2^2}{c_2^2 d_1^2}z \tag{2.125}$$

$$\alpha_4 = t, \quad \beta_4 = \frac{a_1^2 b_2^2}{d_2^2 b_1^2} t, \quad \gamma_4 = \frac{a_1^2 c_2^2}{d_2^2 c_1^2} t, \quad \delta_4 = \frac{a_1^2 a_2^2}{d_2^2 d_1^2} t \tag{2.126}$$

elde edilir. POVM elemanlarının katsayılarını x, y, z ve t gibi dört yeni parametre cinsinden ifade ettik. Eğer x, y, z ve t parametrelerini bulursak POVM elemanlarının katsayılarını da bulmuş oluruz. (**2.107**) nolu eşitlik gereği

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 1, \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 1 \end{aligned} \tag{2.127}$$

olmaktadır. (**2.123**), (**2.124**), (**2.125**) ve (**2.126**) nolu eşitliklerden yararlanarak (**2.127**) nolu eşitliği yeniden yazmak istersek ortaya dört bilinmeyenli dört tane denklem çıkar. Bu denklemler

$$\begin{aligned} x + y + z + t = 1 \\[2ex] \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} x + \frac{a_1^2 a_2^2}{b_2^2 b_1^2} y + \frac{a_1^2 b_2^2}{c_2^2 b_1^2} z + \frac{a_1^2 b_2^2}{d_2^2 b_1^2} t = 1 \\[2ex] \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} x + \frac{a_1^2 c_2^2}{b_2^2 c_1^2} y + \frac{a_1^2 a_2^2}{c_2^2 c_1^2} z + \frac{a_1^2 c_2^2}{d_2^2 c_1^2} t = 1 \\[2ex] \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 d_1^2} x + \frac{a_1^2 d_2^2}{b_2^2 d_1^2} y + \frac{a_1^2 d_2^2}{c_2^2 d_1^2} z + \frac{a_1^2 a_2^2}{d_2^2 d_1^2} t = 1 \end{aligned} \tag{2.128}$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü bize POVM elemanlarının katsayılarının, α_i, β_i, γ_i ve δ_i, ne olması gerektiğini söyler. Bu denklem sistemini çözdüğümüz takdirde

$$\begin{aligned} x \;=\; & \frac{a_2^2(-b_2^4 c_2^2 d_1^2 - b_2^2 c_2^4 d_1^2 - b_2^4 c_1^2 d_2^2 + b_1^2 b_2^2 c_2^2 d_2^2 + b_2^2 c_1^2 c_2^2 d_2^2 - b_1^2 c_2^4 d_2^2)}{a_1^2(a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 - c_2^2)(a_2^2 - d_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)} \\[2ex] & + \frac{a_2^2(b_2^2 c_2^2 d_1^2 d_2^2 - b_2^2 c_1^2 d_2^4 - b_1^2 c_2^2 d_2^4 + a_2^2 c_1^2 d_2^4 + a_2^2 b_1^2(c_2^4 + d_2^4))}{a_1^2(a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 - c_2^2)(a_2^2 - d_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)} \\[2ex] & + \frac{a_2^2(-a_2^4(b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + d_1^2 d_2^2) + a_2^2(c_2^4 d_1^2 + b_2^4(c_1^2 + d_1^2)))}{a_1^2(a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 - c_2^2)(a_2^2 - d_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)} \\[2ex] & + \frac{a_2^2(a_2^6 + 2b_2^2 c_2^2 d_2^2 - a_2^2(c_2^2 d_2^2 + b_2^2(c_2^2 + d_2^2)))}{(a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 - c_2^2)(a_2^2 - d_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)}, \end{aligned} \tag{2.129}$$

$$y = \frac{b_2^2(a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2 - b_2^2 c_1^2 + b_1^2 c_2^2 - b_2^2 d_1^2 + b_1^2 d_2^2)}{a_1^2(a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)}, \tag{2.130}$$

$$z=\frac{c_2^2(-a_2^2c_1^2-b_2^2c_1^2+a_1^2c_2^2+b_1^2c_2^2+c_2^2d_1^2-c_1^2d_2^2)}{a_1^2(-a_2^2+c_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \quad (\mathbf{2.131})$$

$$t=\frac{d_2^2(-a_2^2d_1^2-b_2^2d_1^2-c_2^2d_1^2+a_1^2d_2^2+b_1^2d_2^2+c_1^2d_2^2)}{a_1^2(-a_2^2+d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \quad (\mathbf{2.132})$$

olarak bulunur. Bulunan x, y, z ve t ile (**2.123**), (**2.124**), (**2.125**) ve (**2.126**) nolu eşitlikler kullanılarak POVM elemanlarının katsayıları elde edilir. Böylelikle $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum için POVM'yi, $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, a_1, b_1, c_1, d_1 a_2, b_2, c_2 ve d_2 cinsinden hesaplamış olduk.

2.6.2 $b_1 \geq b_2$ ve $c_2 \geq c_1$ olduğu durum

Burada $b_1 \geq b_2$ ve $c_2 \geq c_1$ olduğu durum için yapılacak hesaplamalar $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum için yapılan hesaplamalar ile benzerdir. Ancak $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum ile $b_1 \geq b_2$ ve $c_2 \geq c_1$ olduğu durum için yapılacak üniter dönüşümler farklıdır. (**2.111**) nolu eşitliğe kadar yapılacak işlemler tamamen aynıdır. Dolayısıyla (**2.111**) nolu eşitlikten sonraki hesaplamaları yapmamız yeterlidir. (**2.111**) nolu eşitliğe geri dönersek

$$|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle \sim |\psi_3\rangle \sim |\psi_4\rangle \sim |\phi\rangle = a_2|00\rangle + b_2|11\rangle + c_2|22\rangle + d_2|33\rangle \quad (\mathbf{2.133})$$

olmak üzere burada $|\psi_1\rangle$ durumu $|\phi\rangle$'ye eşitken, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve $|\psi_4\rangle$ üzerinde yapılacak üniter dönüşümlerle $|\phi\rangle$ elde edilir. $|\psi_2\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |1\rangle, \quad |1\rangle \to |0\rangle, \quad |2\rangle \to |2\rangle, \quad |3\rangle \to |3\rangle \quad (\mathbf{2.134})$$

$|\psi_3\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |2\rangle, \quad |1\rangle \to |1\rangle, \quad |2\rangle \to |0\rangle, \quad |3\rangle \to |3\rangle \quad (\mathbf{2.135})$$

ve son olarak $|\psi_4\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |0\rangle, \quad |1\rangle \to |1\rangle, \quad |2\rangle \to |3\rangle, \quad |3\rangle \to |2\rangle \quad (\mathbf{2.136})$$

şeklinde olmalıdır. (**2.108**) nolu eşitlik (**2.111**) nolu eşitlik ile değerlendirildiğinde ve $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve de $|\psi_4\rangle$ için yapılması gereken üniter dönüşümler de göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{p_1}}=a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{p_1}}=b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{p_1}}=c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{p_1}}=d_2 \quad (\mathbf{2.137})$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{p_2}} = b_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{p_2}} = a_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{p_2}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{p_2}} = d_2 \tag{2.138}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{p_3}} = c_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{p_3}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_3}}{\sqrt{p_3}} = a_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{p_3}} = d_2 \tag{2.139}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_4}}{\sqrt{p_4}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_4}}{\sqrt{p_4}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_4}}{\sqrt{p_4}} = d_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_4}}{\sqrt{p_4}} = c_2 \tag{2.140}$$

olmaktadır. Elde edilen bu eşitlikleri kendi aralarında düzenlersek

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\delta_1} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.141}$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{b_2^2 b_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{b_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\delta_2} = \frac{b_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.142}$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{c_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{c_2^2 c_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\delta_3} = \frac{c_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.143}$$

$$\frac{\alpha_4}{\beta_4} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\gamma_4} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 d_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\delta_4} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 c_2^2} \tag{2.144}$$

olur. Eğer $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = z$ ve $\alpha_4 = t$ olarak alırsak

$$\alpha_1 = x, \quad \beta_1 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} x, \quad \gamma_1 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} x, \quad \delta_1 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 d_1^2} x \tag{2.145}$$

$$\alpha_2 = y, \quad \beta_2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{b_2^2 b_1^2} y, \quad \gamma_2 = \frac{a_1^2 c_2^2}{b_2^2 c_1^2} y, \quad \delta_2 = \frac{a_1^2 d_2^2}{b_2^2 d_1^2} y \tag{2.146}$$

$$\alpha_3 = z, \quad \beta_3 = \frac{a_1^2 b_2^2}{c_2^2 b_1^2} z, \quad \gamma_3 = \frac{a_1^2 a_2^2}{c_2^2 c_1^2} z, \quad \delta_3 = \frac{a_1^2 d_2^2}{c_2^2 d_1^2} z \tag{2.147}$$

$$\alpha_4 = t, \quad \beta_4 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} t, \quad \gamma_4 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 c_1^2} t, \quad \delta_4 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 d_1^2} t \tag{2.148}$$

elde edilir. POVM elemanlarının katsayılarını x, y, z ve t gibi dört yeni parametre cinsinden ifade ettik. Eğer x, y, z ve t parametrelerini bulursak POVM elemanlarının katsayılarını da bulmuş oluruz. (**2.145**), (**2.146**), (**2.147**) ve (**2.148**) nolu eşitliklerden yararlanarak (**2.127**) nolu eşitliği yeniden yazmak istersek ortaya dört bilinmeyenli dört tane denklem çıkar. Bu denklemler

$$x + y + z + t = 1$$

$$\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2b_1^2}x+\frac{a_1^2a_2^2}{b_2^2b_1^2}y+\frac{a_1^2b_2^2}{c_2^2b_1^2}z+\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2b_1^2}t=1$$

$$\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2c_1^2}x+\frac{a_1^2c_2^2}{b_2^2c_1^2}y+\frac{a_1^2a_2^2}{c_2^2c_1^2}z+\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2c_1^2}t=1$$

$$\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2d_1^2}x+\frac{a_1^2d_2^2}{b_2^2d_1^2}y+\frac{a_1^2d_2^2}{c_2^2d_1^2}z+\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2d_1^2}t=1 \tag{2.149}$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü bize POVM elemanlarının katsayılarının, α_i, β_i, γ_i ve δ_i, ne olması gerektiğini söyler. Bu denklem sistemini çözdüğümüz takdirde

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a_2^2(b_2^4c_1^2c_2^2+b_1^2c_2^6-a_2^6d_1^2-b_2^2c_2^4d_1^2-b_2^4c_1^2d_2^2+a_2^4(b_1^2+c_1^2)d_2^2)}{a_1^2(a_2^2-b_2^2)(a_2^2-c_2^2)(c_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \\
&+\frac{a_2^2(b_2^2c_1^2c_2^2d_2^2-b_2^4d_1^2d_2^2+b_1^2b_2^2d_2^4-b_1^2c_2^2d_2^4+c_1^2(c_2^4+b_2^2d_2^2))}{a_1^2(a_2^2-b_2^2)(a_2^2-c_2^2)(c_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \\
&+\frac{a_2^2(-a_2^2(b_1^2c_2^2(b_2^2+d_2^2)-d_1^2(b_2^4+b_2^2c_2^2+c_2^2d_2^2)))}{a_1^2(a_2^2-b_2^2)(a_2^2-c_2^2)(c_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \\
&+\frac{a_2^2(a_2^4c_2^2-a_2^2d_2^2(b_2^2+d_2^2)+b_2^2(-c_2^4+c_2^2d_2^2+d_2^4))}{(a_2^2-b_2^2)(a_2^2-c_2^2)(c_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)},
\end{aligned} \tag{2.150}$$

$$y=\frac{b_2^2(a_2^2b_1^2-a_1^2b_2^2-b_2^2c_1^2+b_1^2c_2^2-b_2^2d_1^2+b_1^2d_2^2)}{a_1^2(a_2^2-b_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \tag{2.151}$$

$$z=\frac{c_2^2(a_2^2(c_1^2+d_1^2)+b_2^2(c_1^2+d_1^2)-(a_1^2+b_1^2)(c_2^2+d_2^2))}{a_1^2(a_2^2-c_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \tag{2.152}$$

$$t=\frac{a_2^2(a_2^2d_1^2+b_2^2d_1^2+c_2^2d_1^2-a_1^2d_2^2-b_1^2d_2^2-c_1^2d_2^2)}{a_1^2(c_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \tag{2.153}$$

olarak bulunur. Bulunan x, y, z ve t ile (**2.145**), (**2.146**), (**2.147**) ve (**2.148**) nolu eşitlikler kullanılarak POVM elemanlarının katsayıları elde edilir.

2.6.3 $b_2 \geq b_1$ ve $c_2 \geq c_1$ olduğu durum

Burada $b_2 \geq b_1$ ve $c_2 \geq c_1$ olduğu durum için yapılacak hesaplamalar, $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum için yapılan hesaplamalar ile benzerdir. Ancak $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum ile $b_2 \geq b_1$ ve $c_2 \geq c_1$ olduğu durum için yapılacak üniter dönüşümler farklıdır.

(**2.111**) nolu eşitliğe kadar yapılacak işlemler tamamen aynıdır. Dolayısıyla (**2.111**) nolu eşitlikten sonraki hesaplamaları yapmamız yeterlidir. (**2.111**) nolu eşitliğe geri dönersek

$$|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle \sim |\psi_3\rangle \sim |\psi_4\rangle \sim |\phi\rangle = a_2\,|00\rangle + b_2\,|11\rangle + c_2\,|22\rangle + d_2\,|33\rangle \qquad (\mathbf{2.154})$$

olmak üzere burada $|\psi_1\rangle$ durumu $|\phi\rangle$'ye eşitken, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve $|\psi_4\rangle$ üzerinde yapılacak üniter dönüşümlerle $|\phi\rangle$ elde edilir. $|\psi_2\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |3\rangle, \quad |1\rangle \to |1\rangle, \quad |2\rangle \to |2\rangle, \quad |3\rangle \to |0\rangle \qquad (\mathbf{2.155})$$

$|\psi_3\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |0\rangle, \quad |1\rangle \to |3\rangle, \quad |2\rangle \to |2\rangle, \quad |3\rangle \to |1\rangle \qquad (\mathbf{2.156})$$

ve son olarak $|\psi_4\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |0\rangle, \quad |1\rangle \to |1\rangle, \quad |2\rangle \to |3\rangle, \quad |3\rangle \to |2\rangle \qquad (\mathbf{2.157})$$

şeklinde olmalıdır. (**2.108**) nolu eşitlik (**2.111**) nolu ile değerlendirildiğinde ve $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve de $|\psi_4\rangle$ için yapılması gereken üniter dönüşümler de göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{p_1}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{p_1}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{p_1}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{p_1}} = d_2 \qquad (\mathbf{2.158})$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{p_2}} = d_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{p_2}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{p_2}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{p_2}} = a_2 \qquad (\mathbf{2.159})$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{p_3}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{p_3}} = d_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_3}}{\sqrt{p_3}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{p_3}} = b_2 \qquad (\mathbf{2.160})$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_4}}{\sqrt{p_4}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_4}}{\sqrt{p_4}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_4}}{\sqrt{p_4}} = d_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_4}}{\sqrt{p_4}} = c_2 \qquad (\mathbf{2.161})$$

olmaktadır. Elde edilen bu eşitlikleri kendi aralarında düzenlersek

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\delta_1} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \qquad (\mathbf{2.162})$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{d_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{d_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\delta_2} = \frac{d_2^2 d_1^2}{a_1^2 a_2^2} \qquad (\mathbf{2.163})$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 d_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\delta_3} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 b_2^2} \qquad (\mathbf{2.164})$$

$$\frac{\alpha_4}{\beta_4} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\gamma_4} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 d_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\delta_4} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 c_2^2} \tag{2.165}$$

olur. Eğer $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = z$ ve $\alpha_4 = t$ olarak alırsak

$$\alpha_1 = x, \quad \beta_1 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} x, \quad \gamma_1 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} x, \quad \delta_1 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 d_1^2} x \tag{2.166}$$

$$\alpha_2 = y, \quad \beta_2 = \frac{a_1^2 b_2^2}{d_2^2 b_1^2} y, \quad \gamma_2 = \frac{a_1^2 c_2^2}{d_2^2 c_1^2} y, \quad \delta_2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{d_2^2 d_1^2} y \tag{2.167}$$

$$\alpha_3 = z, \quad \beta_3 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 b_1^2} z, \quad \gamma_3 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} z, \quad \delta_3 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 d_1^2} z \tag{2.168}$$

$$\alpha_4 = t, \quad \beta_4 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} t, \quad \gamma_4 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 c_1^2} t, \quad \delta_4 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 d_1^2} t \tag{2.169}$$

elde edilir. POVM elemanlarının katsayılarını x, y, z ve t gibi dört yeni parametre cinsinden ifade ettik. Eğer x, y, z ve t parametrelerini bulursak POVM elemanlarının katsayılarını da bulmuş oluruz. (**2.166**), (**2.167**), (**2.168**) ve (**2.169**) nolu eşitliklerden yararlanarak (**2.127**) nolu eşitliği yeniden yazmak istersek ortaya dört bilinmeyenli dört tane denklem çıkar. Bu denklemler

$$\begin{gathered}
x + y + z + t = 1 \\
\frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} x + \frac{a_1^2 b_2^2}{d_2^2 b_1^2} y + \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 b_1^2} z + \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} t = 1 \\
\frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} x + \frac{a_1^2 c_2^2}{d_2^2 c_1^2} y + \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} z + \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 c_1^2} t = 1 \\
\frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 d_1^2} x + \frac{a_1^2 a_2^2}{d_2^2 d_1^2} y + \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 d_1^2} z + \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 d_1^2} t = 1
\end{gathered} \tag{2.170}$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü bize POVM elemanlarının katsayılarının, α_i, β_i, γ_i ve δ_i, ne olması gerektiğini söyler. Bu denklem sistemini çözdüğümüz takdirde

$$\begin{aligned}
x \quad = \quad & \frac{a_2^4 (b_2^4 c_1^2 + b_1^2 c_2^4 + c_2^2 d_1^2 d_2^2 + a_1^2 d_2^4 - b_2^2 (a_1^2 c_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_2^2 + 2 c_2^2 d_1^2 - d_1^2 d_2^2))}{a_1^2 (a_2^2 - d_2^2)(-b_2^2 + d_2^2)(-c_2^2 + d_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)} \\
& + \frac{a_2^6 (b_2^2 c_1^2 - c_1^2 d_2^2 + b_1^2 (c_2^2 - d_2^2)) + a_2^2 a_1^2 (b_2^2 c_2^4 - c_2^4 d_2^2 + b_2^4 (c_2^2 - d_2^2))}{a_1^2 (a_2^2 - d_2^2)(-b_2^2 + d_2^2)(-c_2^2 + d_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)} \\
& + \frac{a_2^2 d_2^2 (-b_2^4 c_1^2 - b_1^2 c_2^4 + c_1^2 c_2^2 d_2^2 - d_1^2 d_2^4 + b_2^2 (c_2^2 d_1^2 + b_1^2 d_2^2))}{a_1^2 (a_2^2 - d_2^2)(-b_2^2 + d_2^2)(-c_2^2 + d_2^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)},
\end{aligned} \tag{2.171}$$

$$y=\frac{d_2^2(a_2^2(b_1^2+c_1^2+d_1^2)-a_1^2(b_2^2+c_2^2+d_2^2))}{a_1^2(a_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \tag{2.172}$$

$$z=\frac{a_2^2(-a_2^2b_1^2+a_1^2b_2^2+b_2^2c_1^2-b_1^2c_2^2+b_2^2d_1^2-b_1^2d_2^2)}{a_1^2(b_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \tag{2.173}$$

$$t=\frac{a_2^2(-a_2^2c_1^2-b_2^2c_1^2+a_1^2c_2^2+b_1^2c_2^2+c_2^2d_1^2-c_1^2d_2^2)}{a_1^2(c_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \tag{2.174}$$

olarak bulunur. Bulunan x, y, z ve t ile (**2.166**), (**2.167**), (**2.168**) ve (**2.169**) nolu eşitlikler kullanılarak POVM elemanlarının katsayıları elde edilir. Böylelikle $b_2 \geq b_1$ ve $c_2 \geq c_1$ olduğu durum için POVM'yi, $\{M_1,M_2,M_3,M_4\}$, a_1, b_1, c_1, d_1 a_2, b_2, c_2 ve d_2 cinsinden hesaplamış olduk.

2.6.4 $b_2 \geq b_1$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum

Burada $b_2 \geq b_1$ ve $c_1 \geq c_2$ için yapılacak hesaplamalar, $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ için yapılan hesaplamalar ile benzerdir. Ancak $b_1 \geq b_2$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum ile $b_2 \geq b_1$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum için yapılacak üniter dönüşümler farklıdır. (**2.111**) nolu eşitliğe kadar yapılacak işlemler tamamen aynıdır. (**2.111**) nolu eşitliğe geri dönersek

$$|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle \sim |\psi_3\rangle \sim |\psi_4\rangle \sim |\phi\rangle = a_2|00\rangle + b_2|11\rangle + c_2|22\rangle + d_2|33\rangle \tag{2.175}$$

olmak üzere burada $|\psi_1\rangle$ durumu $|\phi\rangle$'ye eşitken, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve $|\psi_4\rangle$ üzerinde yapılacak üniter dönüşümlerle $|\phi\rangle$ elde edilir. Diğer üç durumdan farklı olarak burada tek bir üniter dönüşüm yeterli olmamaktadır. Elde edilen sonuçlar göstermiştir ki iki farklı üniter dönüşüme ihtiyaç vardır, $b_2 \geq b_1$ ve $c_1 \geq c_2$ olan durumlar arasındaki geçiş için bu iki üniter dönüşümden sadece biri kullanılacak. Birinci üniter dönüşümün sonuç vermediği durumlarda ikinci üniter dönüşüm, ikinci üniter dönüşümün sonuç vermediği durumlarda birinci üniter dönüşüm kullanılır. Her iki üniter dönüşüm için hesapları ayrı ayrı yapacağız. İlk olarak birinci üniter dönüşüme bakalım. $|\psi_2\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |3\rangle, \quad |1\rangle \to |1\rangle, \quad |2\rangle \to |2\rangle, \quad |3\rangle \to |0\rangle \tag{2.176}$$

$|\psi_3\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |0\rangle, \quad |1\rangle \to |3\rangle, \quad |2\rangle \to |2\rangle, \quad |3\rangle \to |1\rangle \tag{2.177}$$

ve son olarak $|\psi_4\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |0\rangle, \quad |1\rangle \to |2\rangle, \quad |2\rangle \to |1\rangle, \quad |3\rangle \to |3\rangle \tag{2.178}$$

şeklinde olmalıdır. (**2.108**) nolu eşitlik (**2.111**) nolu eşitlik ile değerlendirildiğinde ve $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve de $|\psi_4\rangle$ için yapılması gereken üniter dönüşümler de göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{p_1}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{p_1}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{p_1}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{p_1}} = d_2 \tag{2.179}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{p_2}} = d_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{p_2}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{p_2}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{p_2}} = a_2 \tag{2.180}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{p_3}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{p_3}} = d_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_3}}{\sqrt{p_3}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{p_3}} = b_2 \tag{2.181}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_4}}{\sqrt{p_4}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_4}}{\sqrt{p_4}} = c_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_4}}{\sqrt{p_4}} = b_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_4}}{\sqrt{p_4}} = d_2 \tag{2.182}$$

olmaktadır. Elde edilen bu eşitlikleri kendi aralarında düzenlersek

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\delta_1} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.183}$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{d_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{d_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\delta_2} = \frac{d_2^2 d_1^2}{a_1^2 a_2^2} \tag{2.184}$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 d_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\delta_3} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 b_2^2} \tag{2.185}$$

$$\frac{\alpha_4}{\beta_4} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\gamma_4} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_4}{\delta_4} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.186}$$

olur. Eğer $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = z$ ve $\alpha_4 = t$ olarak alırsak

$$\alpha_1 = x, \quad \beta_1 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 b_1^2} x, \quad \gamma_1 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} x, \quad \delta_1 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 d_1^2} x \tag{2.187}$$

$$\alpha_2 = y, \quad \beta_2 = \frac{a_1^2 b_2^2}{d_2^2 b_1^2} y, \quad \gamma_2 = \frac{a_1^2 c_2^2}{d_2^2 c_1^2} y, \quad \delta_2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{d_2^2 d_1^2} y \tag{2.188}$$

$$\alpha_3 = z, \quad \beta_3 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 b_1^2} z, \quad \gamma_3 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 c_1^2} z, \quad \delta_3 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 d_1^2} z \tag{2.189}$$

$$\alpha_4 = t, \quad \beta_4 = \frac{a_1^2 c_2^2}{a_2^2 b_1^2} t, \quad \gamma_4 = \frac{a_1^2 b_2^2}{a_2^2 c_1^2} t, \quad \delta_4 = \frac{a_1^2 d_2^2}{a_2^2 d_1^2} t \tag{2.190}$$

elde edilir. POVM elemanlarının katsayılarını x, y, z ve t gibi dört yeni parametre cinsinden ifade ettik. Eğer x, y, z ve t parametrelerini bulursak POVM elemanlarının katsayılarını da bulmuş oluruz. (**2.187**), (**2.188**), (**2.189**) ve (**2.190**) nolu eşitliklerden yararlanarak (**2.127**) nolu eşitliği yeniden yazmak istersek ortaya dört bilinmeyenli dört tane denklem çıkar. Bu denklemler

$$x+y+z+t=1$$

$$\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2b_1^2}x+\frac{a_1^2b_2^2}{d_2^2b_1^2}y+\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2b_1^2}z+\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2b_1^2}t=1$$

$$\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2c_1^2}x+\frac{a_1^2c_2^2}{d_2^2c_1^2}y+\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2c_1^2}z+\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2c_1^2}t=1$$

$$\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2d_1^2}x+\frac{a_1^2a_2^2}{d_2^2d_1^2}y+\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2d_1^2}z+\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2d_1^2}t=1 \tag{2.191}$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü bize POVM elemanlarının katsayılarının, α_i, β_i, γ_i ve δ_i, ne olması gerektiğini söyler. Bu denklem sistemini çözdüğümüz takdirde

$$\begin{aligned} x \;=\; & \frac{a_2^2(a_1^2(b_2^6+c_2^2d_2^4-b_2^2c_2^2(c_2^2+d_2^2))+d_2^2(-c_2^4d_1^2-c_1^2d_2^4-b_1^2b_2^4))}{a_1^2(b_2^2-c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(b_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \\ & +\frac{a_2^2(d_2^2b_2^2(c_1^2c_2^2+d_1^2d_2^2)-a_2^2b_2^4(c_1^2+d_1^2)+a_2^2b_2^2(b_1^2c_2^2+c_2^2d_1^2))}{a_1^2(b_2^2-c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(b_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \\ & +\frac{a_2^4(b_2^2d_2^2(-a_1^2+c_1^2)+c_2^2(a_1^2c_2^2+c_2^2d_1^2-(b_1^2+d_1^2)d_2^2))}{a_1^2(b_2^2-c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(b_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \\ & +\frac{a_2^6(b_1^2(b_2^2-c_2^2)+c_1^2(-c_2^2+d_2^2))+a_2^2d_2^2b_1^2c_2^2d_2^2}{a_1^2(b_2^2-c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(b_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \end{aligned} \tag{2.192}$$

$$y=\frac{d_2^2(a_2^2(b_1^2+c_1^2+d_1^2)-a_1^2(b_2^2+c_2^2+d_2^2))}{a_1^2(a_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \tag{2.193}$$

$$z=\frac{a_2^2(-a_2^2(b_1^2+c_1^2)+a_1^2(b_2^2+c_2^2)+b_2^2d_1^2+c_2^2d_1^2-b_1^2d_2^2-c_1^2d_2^2)}{a_1^2(b_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \tag{2.194}$$

$$t=\frac{a_2^2(a_2^2c_1^2+b_2^2c_1^2-a_1^2c_2^2-b_1^2c_2^2-c_2^2d_1^2+c_1^2d_2^2)}{a_1^2(b_2^2-c_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \tag{2.195}$$

olarak bulunur. Bulunan x, y, z ve t ile (**2.187**), (**2.188**), (**2.189**) ve (**2.190**) nolu eşitlikler kullanılarak POVM elemanlarının katsayıları elde edilir.

Birinci üniter dönüşüm için POVM'yi bulduk. Şimdi de ikinci üniter dönüşüme bakalım. $|\psi_2\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |2\rangle\,, \quad |1\rangle \to |1\rangle\,, \quad |2\rangle \to |0\rangle\,, \quad |3\rangle \to |3\rangle \tag{2.196}$$

$|\psi_3\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |0\rangle\,, \quad |1\rangle \to |2\rangle\,, \quad |2\rangle \to |1\rangle\,, \quad |3\rangle \to |3\rangle \tag{2.197}$$

ve son olarak $|\psi_4\rangle$ için hem birinci hem de ikinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm

$$|0\rangle \to |3\rangle\,, \quad |1\rangle \to |1\rangle\,, \quad |2\rangle \to |2\rangle\,, \quad |3\rangle \to |0\rangle \tag{2.198}$$

şeklinde olmalıdır. (**2.108** nolu eşitlik (**2.111**) nolu eşitlik ile değerlendirildiğinde ve $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve de $|\psi_4\rangle$ için yapılması gereken üniter dönüşümler de göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{p_1}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{p_1}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{p_1}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{p_1}} = d_2 \tag{2.199}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{p_2}} = c_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{p_2}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{p_2}} = a_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{p_2}} = d_2 \tag{2.200}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{p_3}} = a_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{p_3}} = c_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_3}}{\sqrt{p_3}} = b_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{p_3}} = d_2 \tag{2.201}$$

$$\frac{a_1\sqrt{\alpha_4}}{\sqrt{p_4}} = d_2, \quad \frac{b_1\sqrt{\beta_4}}{\sqrt{p_4}} = b_2, \quad \frac{c_1\sqrt{\gamma_4}}{\sqrt{p_4}} = c_2, \quad \frac{d_1\sqrt{\delta_4}}{\sqrt{p_4}} = a_2 \tag{2.202}$$

olmaktadır. Elde edilen bu eşitlikleri kendi aralarında düzenlersek

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_1}{\delta_1} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.203}$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{c_2^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{c_2^2 c_1^2}{a_1^2 a_2^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\delta_2} = \frac{c_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.204}$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{a_2^2 b_1^2}{a_1^2 c_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{a_2^2 c_1^2}{a_1^2 b_2^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\delta_3} = \frac{a_2^2 d_1^2}{a_1^2 d_2^2} \tag{2.205}$$

$$\frac{\alpha_4}{\beta_4}=\frac{d_2^2b_1^2}{a_1^2b_2^2},\quad \frac{\alpha_4}{\gamma_4}=\frac{d_2^2c_1^2}{a_1^2c_2^2},\quad \frac{\alpha_4}{\delta_4}=\frac{d_2^2d_1^2}{a_1^2a_2^2} \tag{2.206}$$

olur. Eğer $\alpha_1=x$, $\alpha_2=y$, $\alpha_3=z$ ve $\alpha_4=t$ olarak alırsak

$$\alpha_1=x,\quad \beta_1=\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2b_1^2}x,\quad \gamma_1=\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2c_1^2}x,\quad \delta_1=\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2d_1^2}x \tag{2.207}$$

$$\alpha_2=y,\quad \beta_2=\frac{a_1^2b_2^2}{c_2^2b_1^2}y,\quad \gamma_2=\frac{a_1^2a_2^2}{c_2^2c_1^2}y,\quad \delta_2=\frac{a_1^2d_2^2}{c_2^2d_1^2}y \tag{2.208}$$

$$\alpha_3=z,\quad \beta_3=\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2b_1^2}z,\quad \gamma_3=\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2c_1^2}z,\quad \delta_3=\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2d_1^2}z \tag{2.209}$$

$$\alpha_4=t,\quad \beta_4=\frac{a_1^2b_2^2}{d_2^2b_1^2}t,\quad \gamma_4=\frac{a_1^2c_2^2}{d_2^2c_1^2}t,\quad \delta_4=\frac{a_1^2a_2^2}{d_2^2d_1^2}t \tag{2.210}$$

elde edilir. POVM elemanlarının katsayılarını x, y, z ve t gibi dört yeni parametre cinsinden ifade ettik. Eğer x, y, z ve t parametrelerini bulursak POVM elemanlarının katsayılarını da bulmuş oluruz. (**2.207**), (**2.208**), (**2.209**) ve (**2.210**) nolu eşitliklerden yararlanarak (**2.127**) nolu eşitliği yeniden yazmak istersek ortaya dört bilinmeyenli dört tane denklem çıkar. Bu denklemler

$$\begin{gathered}
x+y+z+t=1\\
\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2b_1^2}x+\frac{a_1^2b_2^2}{c_2^2b_1^2}y+\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2b_1^2}z+\frac{a_1^2b_2^2}{d_2^2b_1^2}t=1\\
\frac{a_1^2c_2^2}{a_2^2c_1^2}x+\frac{a_1^2a_2^2}{c_2^2c_1^2}y+\frac{a_1^2b_2^2}{a_2^2c_1^2}z+\frac{a_1^2c_2^2}{d_2^2c_1^2}t=1\\
\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2d_1^2}x+\frac{a_1^2d_2^2}{c_2^2d_1^2}y+\frac{a_1^2d_2^2}{a_2^2d_1^2}z+\frac{a_1^2a_2^2}{d_2^2d_1^2}t=1
\end{gathered} \tag{2.211}$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem sisteminin çözümü bize POVM elemanlarının katsayılarının, α_i, β_i, γ_i ve δ_i, ne olması gerektiğini söyler. Bu denklem sistemini çözdüğümüz takdirde

$$\begin{aligned}
x \;=\;& \frac{a_2^2(-a_2^6b_1^2+c_2^6d_1^2+a_2^4(a_1^2c_2^2+b_2^2(c_1^2+d_1^2))-a_1^2c_2^4d_2^2-b_1^2c_2^4d_2^2+c_1^2c_2^2d_2^4)}{a_1^2(a_2^2-c_2^2)(-b_2^2+c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}\\
&+\frac{a_2^2(b_2^4(-c_2^2d_1^2+(a_1^2+d_1^2)d_2^2)+b_2^2d_2^2(a_1^2c_2^2+c_1^2(c_2^2-d_2^2)))}{a_1^2(a_2^2-c_2^2)(-b_2^2+c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}\\
&+\frac{a_2^4(c_1^2c_2^4+b_2^2c_2^2d_1^2+b_2^2c_1^2d_2^2+c_2^2d_1^2d_2^2+a_1^2b_2^2(b_2^2+d_2^2))}{a_1^2(a_2^2-c_2^2)(-b_2^2+c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}\\
&-\frac{a_2^2(b_2^2d_2^4b_1^2+a_2^2b_1^2(b_2^2c_2^2+c_2^2d_2^2+d_2^4))}{a_1^2(a_2^2-c_2^2)(-b_2^2+c_2^2)(a_2^2-d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)},
\end{aligned} \tag{2.212}$$

$$y=\frac{c_2^2(a_2^2(b_1^2+c_1^2)-a_1^2(b_2^2+c_2^2)-b_2^2d_1^2-c_2^2d_1^2+b_1^2d_2^2+c_1^2d_2^2)}{a_1^2(a_2^2-c_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \qquad (\mathbf{2.213})$$

$$z=\frac{a_2^2(-a_2^2b_1^2+a_1^2b_2^2+b_2^2c_1^2-b_1^2c_2^2+b_2^2d_1^2-b_1^2d_2^2)}{a_1^2(b_2^2-c_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)}, \qquad (\mathbf{2.214})$$

$$t=\frac{d_2^2(-a_2^2d_1^2-b_2^2d_1^2-c_2^2d_1^2+a_1^2d_2^2+b_1^2d_2^2+c_1^2d_2^2)}{a_1^2(-a_2^2+d_2^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)} \qquad (\mathbf{2.215})$$

olarak bulunur. Bulunan x, y, z ve t ile (**2.207**), (**2.208**), (**2.209**) ve (**2.210**) nolu eşitlikler kullanılarak POVM elemanlarının katsayıları elde edilir. Böylelikle $b_2 \geq b_1$ ve $c_1 \geq c_2$ olduğu durum için POVM'yi, $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, a_1, b_1, c_1, d_1 a_2, b_2, c_2 ve d_2 cinsinden hesaplamış olduk.

Böylelikle majorization şartını sağlayan herhangi iki $4\otimes 4$ durum arasındaki geçişin $p=1$ olasılıkla olmasını mümkün kılacak POVM'leri elde ettik.

2.7 $N\otimes N$ Saf Durumlar

Bu bölümde majorization şartını sağlayan $N\otimes N$ $(N\geq 5)$ iki durum arasındaki geçişi inceleyeceğiz. Elimizde

$$|\psi\rangle=\sum_{j=0}^{N-1}\psi_j\,|j\rangle\,|j\rangle, \qquad |\phi\rangle=\sum_{j=0}^{N-1}\phi_j\,|j\rangle\,|j\rangle \qquad (\mathbf{2.216})$$

gibi iki $N\otimes N$ durum olsun. Şimdi $|\psi\rangle\rightarrow|\phi\rangle$ geçişinin maksimum olasılıkla gerçekleşmesini sağlayan protokolü bulalım. $|\psi\rangle$ durumu, $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$,...,$|N-1\rangle$ ortonormal bazlarından oluşan $N\otimes N$'lik bir saf durum olmak üzere

$$|\psi\rangle=\cos(\theta)(a_1\,|00\rangle+b_1\,|11\rangle+c_1\,|22\rangle+d_1\,|33\rangle)+\sin(\theta)\,|\psi_\perp\rangle \qquad (\mathbf{2.217})$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=1$, $|\psi_\perp\rangle$ normalize bir durumdur ve

$$|\psi_\perp\rangle=\sum_{j=4}^{N-1}\lambda_j\,|j\rangle\,|j\rangle \qquad (\mathbf{2.218})$$

formundadır. $|\psi\rangle\rightarrow|\phi\rangle$ geçişini yaparken ilk olarak $|\psi\rangle\rightarrow|\phi'\rangle$ geçişini gerçekleştiriyoruz. $|\phi'\rangle$ durumu,

$$|\phi'\rangle=\cos(\theta)(a_2\,|00\rangle+b_2\,|11\rangle+c_2\,|22\rangle+d_2\,|33\rangle)+\sin(\theta)\,|\psi_\perp\rangle \qquad (\mathbf{2.219})$$

formunda olmak üzere burada $a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2=1$'dir. Burada kullanılacak POVM

$$\begin{aligned}\tilde{M}_i &= \sqrt{\alpha_i}\,|0\rangle\langle 0|+\sqrt{\beta_i}\,|1\rangle\langle 1|+\sqrt{\gamma_i}\,|2\rangle\langle 2|+\sqrt{\delta_i}\,|3\rangle\langle 3| \\ &+\sum_{j=4}^{N-1}\sqrt{p_i}\,|j\rangle\langle j|, \quad i=1,2,3,4\end{aligned} \qquad (\mathbf{2.220})$$

olmaktadır. Ayrıca burada $a_2 \cos(\theta)$ katsayısı $|\phi\rangle$ durumunun en büyük Schmidt katsayısı olan ϕ_0'a eşittir. Bu durumda

$$a_2 = \frac{\phi_0}{\cos(\theta)} \tag{2.221}$$

olmaktadır. $|\phi'\rangle$ durumunu elde ettikten sonra $|\phi'\rangle$ durumu

$$|\phi'\rangle = \phi_0 |00\rangle + \alpha(a_3 |11\rangle + b_3 |22\rangle + c_3 |33\rangle + d_3 |44\rangle) + \beta |\psi'_\perp\rangle \tag{2.222}$$

formunda yazılır. Burada $\phi_0^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$, $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + d_3^2 = 1$ ve

$$|\psi'_\perp\rangle = \sum_{j=5}^{N-1} \lambda'_j |j\rangle |j\rangle \tag{2.223}$$

olmaktadır. Ardından $|\phi'\rangle \to |\phi''\rangle$ geçişini gerçekleştiriyoruz. $|\phi''\rangle$ durumu,

$$|\phi''\rangle = \phi_0 |00\rangle + \alpha(a_4 |11\rangle + b_4 |22\rangle + c_4 |33\rangle + d_4 |44\rangle) + \beta |\psi'_\perp\rangle \tag{2.224}$$

formunda olmak üzere burada $a_4^2 + b_4^2 + c_4^2 + d_4^2 = 1$'dir. Burada kullanılacak POVM

$$\begin{aligned} \tilde{M}'_i &= \sqrt{p'_i} |0\rangle\langle 0| + \sqrt{\alpha'_i} |1\rangle\langle 1| + \sqrt{\beta'_i} |2\rangle\langle 2| + \sqrt{\gamma'_i} |3\rangle\langle 3| + \sqrt{\delta'_i} |4\rangle\langle 4| \\ &+ \sum_{j=5}^{N-1} \sqrt{p'_i} |j\rangle\langle j|, \quad i = 1,2,3,4 \end{aligned} \tag{2.225}$$

olmaktadır. Ayrıca burada $a_4\alpha$ katsayısı $|\phi\rangle$ durumunun en büyük ikinci Schmidt katsayısı olan ϕ_1'e eşittir. Bu durumda

$$a_4 = \frac{\phi_1}{\alpha} \tag{2.226}$$

olmaktadır. Daha sonra benzer şekilde $|\phi''\rangle \to |\phi'''\rangle$ geçişini ve bu şekilde devam ederek son olarak $|\phi^{N-4}\rangle \to |\phi\rangle$ geçişini gerçekleştiriyoruz. Bu ard arda geçişler sonucunda $(N-3)$ ölçümle $|\psi\rangle \to |\phi\rangle$ geçişini elde etmiş olacağız.

$$|\psi\rangle \to \begin{cases} p_1, & |\psi_1\rangle \\ p_2, & |\psi_2\rangle \\ p_3, & |\psi_3\rangle \\ p_4, & |\psi_4\rangle \end{cases} \sim |\phi'\rangle \to \begin{cases} p'_1, & |\psi'_1\rangle \\ p'_2, & |\psi'_2\rangle \\ p'_3, & |\psi'_3\rangle \\ p'_4, & |\psi'_4\rangle \end{cases} \sim |\phi''\rangle \to ..... \to |\phi\rangle \tag{2.227}$$

Bütün bu geçişlerde $4 \otimes 4$ için elde ettiğimiz sonuçları kullanacağız. Her geçişte $|\phi\rangle$ durumuna ait Schmidt katsayılarından birini, azalan sırada, elde edeceğiz. Böylelikle son geçişte $|\phi\rangle$ durumuna ait son dört Schmidt katsayısını elde ederek $|\psi\rangle \to |\phi\rangle$ geçişini tamamlayacağız. Buradaki en önemli nokta $4 \otimes 4$ için elde ettiğimiz sonuçları uyguladığımız dört terim dışında kalan diğer terimlerin değişmez kalmasını sağlamak.

Böylelikle majorization koşulu da bozulmamış olacak. Bu geçişler sırasında kullanılacak POVM, $\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3, \tilde{M}_4\}$,

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & \sqrt{p_i} I_{N-4} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3,4 \qquad \textbf{(2.228)}$$

şeklindedir. POVM'nin sağlaması gereken koşul

$$\sum_{i=1}^{4} \tilde{M}_i^\dagger \tilde{M}_i = \tilde{M}_1^\dagger \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2^\dagger \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3^\dagger \tilde{M}_3 + \tilde{M}_4^\dagger \tilde{M}_4 = I_{N \times N} \qquad \textbf{(2.229)}$$

olmaktadır. Bunun yanı sıra buradaki M_i'ler $4 \otimes 4$ durumlar için elde ettiğimiz POVM'lerdir ve de $\sum_{i=1}^{4} M_i^\dagger M_i = I_{4\times 4}$ olmaktadır.

3. ÜÇ KUBİT SAF DURUMLARIN MANİPÜLASYONU

Bu bölümde ilk olarak üç kubit durumlar için yapılan üniter dönüşümler ele alınacak. Daha sonra bu üniter dönüşümlerden yararlanarak üç kubit için kanonik formu [13] elde edeceğiz. Kanonik formu elde ettikten sonra sırasıyla üç kubite uygulanacak POVM'lerin kanonik formunu elde edeceğiz. Herhangi bir $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ geçişini aynı olasılıkla gerçekleştiren POVM'ler birbirine denktir. Genelliği bozmadan POVM elemanlarını belirleyen parametre sayısını ne kadar azaltabilirsek, ki elde edilen bu daha az parametreli POVM kanonik POVM olmaktadır, yapılacak hesaplamalar üzerindeki yük o kadar azalır. Dolayısıyla en genel POVM'nin kanonik formunu elde etmek önemlidir. Son olarak elimizdeki durumun hangi denklik sınıfında, GHZ ya da W, olduğunu anlamak için bilinmesi gerekenler gösterildikten sonra GHZ durumunun optimal manipülasyonu problemi kanonik POVM'ler kullanılarak çözülecek ve maksimum olasılık değerleri ile POVM elemanları kuantum durumunun üniter değişmezleri cinsinden bulunacaktır.

3.1 Üniter Dönüşümler

İlk olarak üç kubit için üniter dönüşümleri inceleyelim. Üç kubit saf durumun genel formu

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} t_{ijk} |ijk\rangle \tag{3.1}$$

şeklindedir. Genel formu açık olarak yazarsak

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= t_{000}|000\rangle + t_{100}|100\rangle + t_{010}|010\rangle + t_{001}|001\rangle + t_{110}|110\rangle \\ &\quad + t_{101}|101\rangle + t_{011}|011\rangle + t_{111}|111\rangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

olur. Matris elemanları t_{ijk}'lardan oluşan T_0 ve T_1 gibi iki matris tanımlarsak, bu matrisler

$$T_0 = \begin{pmatrix} t_{000} & t_{001} \\ t_{010} & t_{011} \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} t_{100} & t_{101} \\ t_{110} & t_{111} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

şeklindedir. Sırayla her üç kubit için yapılacak üniter dönüşümleri bulalım. İlk olarak birinci kubite $U_1^\dagger U_1 = I$, $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$, olacak şekilde

$$U_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2^* & \alpha_1^* \end{pmatrix} : \quad |0\rangle \rightarrow \alpha_1|0\rangle - \alpha_2^*|1\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow \alpha_2|0\rangle + \alpha_1^*|1\rangle \tag{3.4}$$

üniter dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|\psi'\rangle &= t_{000}(\alpha_1|0\rangle-\alpha_2^*|1\rangle)|00\rangle+t_{100}(\alpha_2|0\rangle+\alpha_1^*|1\rangle)|00\rangle \\
&\quad +t_{010}(\alpha_1|0\rangle-\alpha_2^*|1\rangle)|10\rangle+t_{001}(\alpha_1|0\rangle-\alpha_2^*|1\rangle)|01\rangle \\
&\quad +t_{110}(\alpha_2|0\rangle+\alpha_1^*|1\rangle)|10\rangle+t_{101}(\alpha_2|0\rangle+\alpha_1^*|1\rangle)|01\rangle \\
&\quad +t_{011}(\alpha_1|0\rangle-\alpha_2^*|1\rangle)|11\rangle+t_{111}(\alpha_2|0\rangle+\alpha_1^*|1\rangle)|11\rangle \\
&= t'_{000}|000\rangle+t'_{100}|100\rangle+t'_{010}|010\rangle+t'_{001}|001\rangle+t'_{110}|110\rangle \\
&\quad +t'_{101}|101\rangle+t'_{011}|011\rangle+t'_{111}|111\rangle
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
t'_{000}&=\alpha_1t_{000}+\alpha_2t_{100}, & t'_{100}&=-\alpha_2^*t_{000}+\alpha_1^*t_{100} \\
t'_{010}&=\alpha_1t_{010}+\alpha_2t_{110}, & t'_{110}&=-\alpha_2^*t_{010}+\alpha_1^*t_{110} \\
t'_{001}&=\alpha_1t_{001}+\alpha_2t_{101}, & t'_{101}&=-\alpha_2^*t_{001}+\alpha_1^*t_{101} \\
t'_{011}&=\alpha_1t_{011}+\alpha_2t_{111}, & t'_{111}&=-\alpha_2^*t_{011}+\alpha_1^*t_{111}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

olmak üzere, T'_0 matrisi

$$\begin{aligned}
T'_0 &= \begin{pmatrix} t'_{000} & t'_{001} \\ t'_{010} & t'_{011} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1t_{000}+\alpha_2t_{100} & \alpha_1t_{001}+\alpha_2t_{101} \\ \alpha_1t_{010}+\alpha_2t_{110} & \alpha_1t_{011}+\alpha_2t_{111} \end{pmatrix} \\
&= \alpha_1\begin{pmatrix} t_{000} & t_{001} \\ t_{010} & t_{011} \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} t_{100} & t_{101} \\ t_{110} & t_{111} \end{pmatrix}=\alpha_1T_0+\alpha_2T_1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ve T'_1 matrisi

$$\begin{aligned}
T'_1 &= \begin{pmatrix} t'_{100} & t'_{101} \\ t'_{110} & t'_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2^*t_{000}+\alpha_1^*t_{100} & -\alpha_2^*t_{001}+\alpha_1^*t_{101} \\ -\alpha_2^*t_{010}+\alpha_1^*t_{110} & -\alpha_2^*t_{011}+\alpha_1^*t_{111} \end{pmatrix} \\
&= -\alpha_2^*\begin{pmatrix} t_{000} & t_{001} \\ t_{010} & t_{011} \end{pmatrix}+\alpha_1^*\begin{pmatrix} t_{100} & t_{101} \\ t_{110} & t_{111} \end{pmatrix}=-\alpha_2^*T_0+\alpha_1^*T_1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Birinci kubite uygulanan üniter dönüşüme geri dönersek

$$U_1=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2^* & \alpha_1^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
T'_0 &= u_{00}T_0+u_{01}T_1 \\
T'_1 &= u_{10}T_0+u_{11}T_1
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olur. Birinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşümün genel formunu elde ettik. Şimdi üçüncü kubite $U_3^\dagger U_3=I$, $|\beta_1|^2+|\beta_2|^2=1$, olacak şekilde

$$U_3=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -\beta_2^* & \beta_1^* \end{pmatrix}: \quad |0\rangle\to\beta_1|0\rangle-\beta_2^*|1\rangle, \quad |1\rangle\to\beta_2|0\rangle+\beta_1^*|1\rangle \tag{3.11}$$

üniter dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|\psi'\rangle &= t_{000}|00\rangle(\beta_1|0\rangle-\beta_2^*|1\rangle)+t_{100}|10\rangle(\beta_1|0\rangle-\beta_2^*|1\rangle) \\
&\quad +t_{010}|01\rangle(\beta_1|0\rangle-\beta_2^*|1\rangle)+t_{001}|00\rangle(\beta_2|0\rangle+\beta_1^*|1\rangle) \\
&\quad +t_{110}|11\rangle(\beta_1|0\rangle-\beta_2^*|1\rangle)+t_{101}|10\rangle(\beta_2|0\rangle+\beta_1^*|1\rangle) \\
&\quad +t_{011}|01\rangle(\beta_2|0\rangle+\beta_1^*|1\rangle)+t_{111}|11\rangle(\beta_2|0\rangle+\beta_1^*|1\rangle) \\
&= t'_{000}|000\rangle+t'_{100}|100\rangle+t'_{010}|010\rangle+t'_{001}|001\rangle+t'_{110}|110\rangle \\
&\quad +t'_{101}|101\rangle+t'_{011}|011\rangle+t'_{111}|111\rangle
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
t'_{000} &= \beta_1 t_{000}+\beta_2 t_{001}, & t'_{001} &= -\beta_2^* t_{000}+\beta_1^* t_{001} \\
t'_{010} &= \beta_1 t_{010}+\beta_2 t_{011}, & t'_{011} &= -\beta_2^* t_{010}+\beta_1^* t_{011} \\
t'_{100} &= \beta_1 t_{100}+\beta_2 t_{101}, & t'_{101} &= -\beta_2^* t_{100}+\beta_1^* t_{101} \\
t'_{110} &= \beta_1 t_{110}+\beta_2 t_{111}, & t'_{111} &= -\beta_2^* t_{110}+\beta_1^* t_{111}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olmak üzere, T'_0 matrisi

$$\begin{aligned}
T'_0 &= \begin{pmatrix} t'_{000} & t'_{001} \\ t'_{010} & t'_{011} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 t_{000}+\beta_2 t_{001} & -\beta_2^* t_{000}+\beta_1^* t_{001} \\ \beta_1 t_{010}+\beta_2 t_{011} & -\beta_2^* t_{010}+\beta_1^* t_{011} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t_{000} & t_{001} \\ t_{010} & t_{011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & -\beta_2^* \\ \beta_2 & \beta_1^* \end{pmatrix} = T_0 U_3^T
\end{aligned} \tag{3.14}$$

ve T'_1 matrisi

$$\begin{aligned}
T'_1 &= \begin{pmatrix} t'_{100} & t'_{101} \\ t'_{110} & t'_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 t_{100}+\beta_2 t_{101} & -\beta_2^* t_{100}+\beta_1^* t_{101} \\ \beta_1 t_{110}+\beta_2 t_{111} & -\beta_2^* t_{110}+\beta_1^* t_{111} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t_{100} & t_{101} \\ t_{110} & t_{111} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & -\beta_2^* \\ \beta_2 & \beta_1^* \end{pmatrix} = T_1 U_3^T
\end{aligned} \tag{3.15}$$

olur. Sonuç olarak üçüncü kubit için

$$T'_0 = T_0 U_3^T, \quad T'_1 = T_1 U_3^T \tag{3.16}$$

elde edilir. Üçüncü kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşümün de genel formunu elde ettik. Benzer üniter dönüşüm ikinci kubit için de yapılırsa, ikinci kubit için

$$T'_0 = U_2 T_0, \quad T'_1 = U_2 T_1 \tag{3.17}$$

elde edilir. Her üç kubit için de kubitler üzerinde yapılacak üniter dönüşümlerin genel formunu elde ettik. Birinci kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşüm (**3.10**) nolu eşitlikte elde edilen T_0' matrisinin determinantının sıfır, $\det T_0' = 0$, olmasını mümkün kılacak şekilde seçilir. $\det T_0' = 0$ eşitliğinin iki tane çözümü vardır. Bu çözümler U_1 üniter matrisinin matris elemanlarının, α_1 ve α_2, ne olması gerektiğini söyler. Daha sonra T_0' matrisi soldan U_2 ve sağdan U_3^T üniter matrisleri ile çarpılarak köşegen hale getirilir. Böylelikle üç kubit üzerinde üniter dönüşümler yapılarak elimizdeki durum kanonik hale getirilmiş olur.

3.2 Kanonik Form

Üç kubit saf durumdan yola çıkarak kanonik formu elde edeceğiz. Üç kubit saf durumun genel formu

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a_0|000\rangle + a_1|100\rangle + a_2|010\rangle + a_3|001\rangle + a_4|110\rangle \\ &\quad + a_5|101\rangle + a_6|011\rangle + a_7|111\rangle \end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklinde alınabilir. Bu durumda T_0 ve T_1 matrisleri

$$T_0 = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_2 & a_6 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_5 \\ a_4 & a_7 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

olur. Burada a_l, $l = 0, 1, ..., 7$, katsayıları $a_l' e^{i\phi_l}$ formundadır. Üç kubit üzerinde yapılacak üniter dönüşümler

$$U_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2^* & \alpha_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -\beta_2^* & \beta_1^* \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ -\gamma_2^* & \gamma_1^* \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

şeklinde olsun. Bu durumda birinci kubit için yapılacak üniter dönüşüm sonucunda elde edilen T_0' ve T_1' matrisleri

$$T_0' = u_{00}T_0 + u_{01}T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 & \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_5 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_4 & \alpha_1 a_6 + \alpha_2 a_7 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$$T_1' = u_{10}T_0 + u_{11}T_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_2^* a_0 + \alpha_1^* a_1 & -\alpha_2^* a_3 + \alpha_1^* a_5 \\ -\alpha_2^* a_2 + \alpha_1^* a_4 & -\alpha_2^* a_6 + \alpha_1^* a_7 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

olur. İkinci ve üçüncü kubitler için de üniter dönüşümleri yapalım. Bunun için T_0' matrisini soldan U_2 ve sağdan U_3^T ile çarpacağız.

$$\begin{aligned} U_2 T_0' U_3^T &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -\beta_2^* & \beta_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 & \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_5 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_4 & \alpha_1 a_6 + \alpha_2 a_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2^* \\ \gamma_2 & \gamma_1^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Burada $U_2T_0'U_3^T$ matrisine ait matris elemanları

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \gamma_1[\beta_1(\alpha_1a_0+\alpha_2a_1)+\beta_2(\alpha_1a_2+\alpha_2a_4)]+\gamma_2[\beta_1(\alpha_1a_3+\alpha_2a_5)\\
&\quad+\beta_2(\alpha_1a_6+\alpha_2a_7)]\\
A_{12} &= \gamma_1^*[\beta_1(\alpha_1a_3+\alpha_2a_5)+\beta_2(\alpha_1a_6+\alpha_2a_7)]-\gamma_2^*[\beta_1(\alpha_1a_0+\alpha_2a_1)\\
&\quad+\beta_2(\alpha_1a_2+\alpha_2a_4)]\\
A_{21} &= \gamma_1[-\beta_2^*(\alpha_1a_0+\alpha_2a_1)+\beta_1^*(\alpha_1a_2+\alpha_2a_4)]+\gamma_2[-\beta_2^*(\alpha_1a_3+\alpha_2a_5)\\
&\quad+\beta_1^*(\alpha_1a_6+\alpha_2a_7)]\\
A_{22} &= \gamma_1^*[-\beta_2^*(\alpha_1a_3+\alpha_2a_5)+\beta_1^*(\alpha_1a_6+\alpha_2a_7)]-\gamma_2^*[-\beta_2^*(\alpha_1a_0+\alpha_2a_1)\\
&\quad+\beta_1^*(\alpha_1a_2+\alpha_2a_4)] \qquad \textbf{(3.25)}
\end{aligned}$$

olmaktadır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
U_2T_1'U_3^T &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -\beta_2^* & \beta_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha_2^*a_0+\alpha_1^*a_1 & -\alpha_2^*a_3+\alpha_1^*a_5 \\ -\alpha_2^*a_2+\alpha_1^*a_4 & -\alpha_2^*a_6+\alpha_1^*a_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2^* \\ \gamma_2 & \gamma_1^* \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.26)}
\end{aligned}$$

olur. Burada $U_2T_1'U_3^T$ matrisine ait matris elemanları

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \gamma_1[\beta_1(-\alpha_2^*a_0+\alpha_1^*a_1)+\beta_2(-\alpha_2^*a_2+\alpha_1^*a_4)]+\gamma_2[\beta_1(-\alpha_2^*a_3+\alpha_1^*a_5)\\
&\quad+\beta_2(-\alpha_2^*a_6+\alpha_1^*a_7)]\\
B_{12} &= \gamma_1^*[\beta_1(-\alpha_2^*a_3+\alpha_1^*a_5)+\beta_2(-\alpha_2^*a_6+\alpha_1^*a_7)]-\gamma_2^*[\beta_1(-\alpha_2^*a_0+\alpha_1^*a_1)\\
&\quad+\beta_2(-\alpha_2^*a_2+\alpha_1^*a_4)]\\
B_{21} &= \gamma_1[-\beta_2^*(-\alpha_2^*a_0+\alpha_1^*a_1)+\beta_1^*(-\alpha_2^*a_2+\alpha_1^*a_4)]+\gamma_2[-\beta_2^*(-\alpha_2^*a_3+\alpha_1^*a_5)\\
&\quad+\beta_1^*(-\alpha_2^*a_6+\alpha_1^*a_7)]\\
B_{22} &= \gamma_1^*[-\beta_2^*(-\alpha_2^*a_3+\alpha_1^*a_5)+\beta_1^*(-\alpha_2^*a_6+\alpha_1^*a_7)]-\gamma_2^*[-\beta_2^*(-\alpha_2^*a_0+\alpha_1^*a_1)\\
&\quad+\beta_1^*(-\alpha_2^*a_2+\alpha_1^*a_4)] \qquad \textbf{(3.27)}
\end{aligned}$$

olmaktadır. T_0' matrisi soldan U_2 ve sağdan U_3^T üniter matrisleri ile çarpılarak köşegen hale getirilir. $U_2T_0'U_3^T$ matrisinin köşegen olması demek $A_{12}=0$ ve $A_{21}=0$ olması demektir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\det T_0' &= \det(U_2T_0'U_3^T)\\
&= A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\\
&= 0 \qquad \textbf{(3.28)}
\end{aligned}$$

olmak üzere, $A_{11}A_{22} = 0$ olmaktadır. $A_{11}A_{22} = 0$ eşitliğinin iki çözümü vardır. Bu iki çözüm: $A_{11} = 0, A_{22} \neq 0$ ya da $A_{22} = 0, A_{11} \neq 0$ olur. $A_{12} = 0$ ve $A_{21} = 0$ eşitliklerinden elde edilen sonuçlar $A_{22} = 0, A_{11} \neq 0$ olduğunu göstermektedir. Bu durumda

$$U_2 T_0' U_3^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 e^{i\theta_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$U_2 T_1' U_3^T = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{i\theta_1} & \lambda_2 e^{i\theta_2} \\ \lambda_3 e^{i\theta_3} & \lambda_4 e^{i\theta_4} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

olmak üzere,

$$|\psi'\rangle = \lambda_0 e^{i\theta_0}|000\rangle + \lambda_1 e^{i\theta_1}|100\rangle + \lambda_2 e^{i\theta_2}|101\rangle + \lambda_3 e^{i\theta_3}|110\rangle + \lambda_4 e^{i\theta_4}|111\rangle \tag{3.31}$$

elde edilir. $|\psi\rangle$ genel durumu üniter dönüşümlerle $|\psi'\rangle$ durumuna dönüştürüldü. $|\psi\rangle$ genel durumu üniter dönüşümler yardımıyla $|\psi'\rangle$ durumuna dönüştürülebildiği için $|\psi\rangle$ ve $|\psi'\rangle$ durumları birbirine denktir. Bundan dolayı genel durum olarak $|\psi\rangle$ durumu yerine $|\psi'\rangle$ durumu alabiliriz ki, bu bize hesaplamalarda kolaylık sağlayacaktır.

Üç kubit saf durum

$$|\psi\rangle = \lambda_0 e^{i\theta_0}|000\rangle + \lambda_1 e^{i\theta_1}|100\rangle + \lambda_2 e^{i\theta_2}|101\rangle + \lambda_3 e^{i\theta_3}|110\rangle + \lambda_4 e^{i\theta_4}|111\rangle \tag{3.32}$$

formuna indirgendi. Üniter dönüşümler yardımıyla $|\psi\rangle$ durumuna ait $\lambda_l e^{i\theta_l}$ katsayılarından en fazla kaç tanesinin reel yapılabildiğini bulalım. Üç kubit için yapılacak üniter dönüşümler

$$U_1 = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_0} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_1} \end{pmatrix} : \quad |0\rangle \to e^{i\alpha_0}|0\rangle, \quad |1\rangle \to e^{i\alpha_1}|1\rangle \tag{3.33}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} e^{i\beta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_1} \end{pmatrix} : \quad |0\rangle \to e^{i\beta_0}|0\rangle, \quad |1\rangle \to e^{i\beta_1}|1\rangle \tag{3.34}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_0} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_1} \end{pmatrix} : \quad |0\rangle \to e^{i\gamma_0}|0\rangle, \quad |1\rangle \to e^{i\gamma_1}|1\rangle \tag{3.35}$$

şeklinde olsun. $|\psi\rangle$ durumu üzerinde bu üniter dönüşümleri uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \lambda_0 e^{i(\theta_0+\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)}|000\rangle + \lambda_1 e^{i(\theta_1+\alpha_1+\beta_0+\gamma_0)}|100\rangle + \lambda_2 e^{i(\theta_2+\alpha_1+\beta_0+\gamma_1)}|101\rangle \\ &\quad + \lambda_3 e^{i(\theta_3+\alpha_1+\beta_1+\gamma_0)}|110\rangle + \lambda_4 e^{i(\theta_4+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)}|111\rangle \end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. $|\psi'\rangle$ durumuna ait katsayıların en fazla kaç tanesinin reel hale getirilebileceğini bulacağız. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} &(\theta_0+\alpha_0+\beta_0+\gamma_0), \quad (\theta_1+\alpha_1+\beta_0+\gamma_0), \quad (\theta_2+\alpha_1+\beta_0+\gamma_1) \\ &\qquad (\theta_3+\alpha_1+\beta_1+\gamma_0), \quad (\theta_4+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \end{aligned} \tag{3.37}$$

terimlerinden en fazla kaç tanesinin sıfır yapılabildiğini bulacağız . Eğer

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_0 = -\theta_3$$
$$\gamma_1 = -\theta_4, \quad \beta_0 = \theta_4 - \theta_2, \quad \alpha_0 = \theta_2 + \theta_3 - \theta_0 - \theta_4 \tag{3.38}$$

olarak alırsak,

$$(\theta_0 + \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) = 0, \quad (\theta_1 + \alpha_1 + \beta_0 + \gamma_0) = \theta_1 + \theta_4 - \theta_2 - \theta_3$$
$$(\theta_2 + \alpha_1 + \beta_0 + \gamma_1) = 0, \quad (\theta_3 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_0) = 0$$
$$(\theta_4 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 0 \tag{3.39}$$

elde edilir. Bu durumda $(\theta_1 + \theta_4 - \theta_2 - \theta_3) \equiv \varphi$ olmak üzere, kanonik durum

$$|\psi'\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{3.40}$$

formunda olur. Böylece üçkubit saf duruma ait kanonik formu elde etmiş olduk.

3.3 Üç Kubit İçin Genel POVM'nin Formu

Kanonik formu yazıp, sırasıyla üç kubite uygulanacak POVM'nin genel formunu elde edeceğiz. Kanonik form

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle, \quad \lambda_i \geq 0 \tag{3.41}$$

Birinci kubite uygulayacağımız genel POVM

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} ae^{i\beta_1} & be^{i\beta_2} \\ ce^{i\beta_3} & de^{i\beta_4} \end{pmatrix} \\ &= ae^{i\beta_1} |0\rangle\langle 0| + be^{i\beta_2} |0\rangle\langle 1| + ce^{i\beta_3} |1\rangle\langle 0| + de^{i\beta_4} |1\rangle\langle 1| \end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklinde olsun. Şimdi genel POVM'yi birinci kubite uygulayalım.

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p}}(M \otimes I_2 \otimes I_3) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}}[\lambda_0(ae^{i\beta_1} |0\rangle + ce^{i\beta_3} |1\rangle) |00\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}(be^{i\beta_2} |0\rangle + de^{i\beta_4} |1\rangle) |00\rangle \\ &\quad + \lambda_2(be^{i\beta_2} |0\rangle + de^{i\beta_4} |1\rangle) |01\rangle + \lambda_3(be^{i\beta_2} |0\rangle + de^{i\beta_4} |1\rangle) |10\rangle \\ &\quad + \lambda_4(be^{i\beta_2} |0\rangle + de^{i\beta_4} |1\rangle) |11\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}}[(\lambda_0 ae^{i\beta_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} be^{i\beta_2}) |000\rangle + (\lambda_0 ce^{i\beta_3} + \lambda_1 e^{i\varphi} de^{i\beta_4}) |100\rangle \\ &\quad + \lambda_2 be^{i\beta_2} |001\rangle + \lambda_2 de^{i\beta_4} |101\rangle + \lambda_3 be^{i\beta_2} |010\rangle + \lambda_3 de^{i\beta_4} |110\rangle \\ &\quad + \lambda_4 be^{i\beta_2} |011\rangle + \lambda_2 de^{i\beta_4} |111\rangle] \end{aligned} \tag{3.43}$$

Elde edilen $|\psi'\rangle$ durumu kanonik formda değil. Bu yüzden $|\psi'\rangle$ durumunu üniter dönüşümlerle kanonik forma getirmemiz gerekmektedir. Birinci kubit için $U^\dagger U = I$ olacak şekilde

$$U = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ -\gamma_2^* & \gamma_1^* \end{pmatrix} : \quad |0\rangle \to \gamma_1 |0\rangle - \gamma_2^* |1\rangle, \quad |1\rangle \to \gamma_2 |0\rangle + \gamma_1^* |1\rangle \tag{3.44}$$

üniter dönüşümünü yapalım.

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle &= [(\lambda_0 a e^{i\beta_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} b e^{i\beta_2})\gamma_1 + (\lambda_0 c e^{i\beta_3} + \lambda_1 e^{i\varphi} d e^{i\beta_4})\gamma_2] |000\rangle \\ &\quad + [(\lambda_0 c e^{i\beta_3} + \lambda_1 e^{i\varphi} d e^{i\beta_4})\gamma_1^* - (\lambda_0 a e^{i\beta_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} b e^{i\beta_2})\gamma_2^*] |100\rangle \\ &\quad + [\lambda_2 b e^{i\beta_2}\gamma_1 + \lambda_2 d e^{i\beta_4}\gamma_2] |001\rangle + [\lambda_2 d e^{i\beta_4}\gamma_1^* - \lambda_2 b e^{i\beta_2}\gamma_2^*] |101\rangle \\ &\quad + [\lambda_3 b e^{i\beta_2}\gamma_1 + \lambda_3 d e^{i\beta_4}\gamma_2] |010\rangle + [\lambda_3 d e^{i\beta_4}\gamma_1^* - \lambda_3 b e^{i\beta_2}\gamma_2^*] |110\rangle \\ &\quad + [\lambda_4 b e^{i\beta_2}\gamma_1 + \lambda_4 d e^{i\beta_4}\gamma_2] |011\rangle + [\lambda_4 d e^{i\beta_4}\gamma_1^* - \lambda_4 b e^{i\beta_2}\gamma_2^*] |111\rangle \\ &= t'_{000} |000\rangle + t'_{100} |100\rangle + t'_{001} |001\rangle + t'_{101} |101\rangle \\ &\quad t'_{010} |010\rangle + t'_{110} |110\rangle + t'_{011} |011\rangle + t'_{111} |111\rangle \end{aligned} \tag{3.45}$$

Eğer $|001\rangle$, $|010\rangle$ ve $|011\rangle$ terimlerinin katsayılarına bakarsak $(be^{i\beta_2}\gamma_1 + de^{i\beta_4}\gamma_2)$ ifadesi ortaktır. $|\psi''\rangle$ durumunun üniter dönüşüm sonucunda kanonik formda olması için $|\psi''\rangle$ durumuna ait T'_0 matrisi $detT'_0 = 0$ olacak şekilde yazılır. Bu durumda T'_0 matrisi

$$T'_0 = \begin{pmatrix} t'_{000} & t'_{001} \\ t'_{010} & t'_{011} \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

olmak üzere,

$$detT'_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad be^{i\beta_2}\gamma_1 + de^{i\beta_4}\gamma_2 = 0 \tag{3.47}$$

olur. Bu durumda $|\psi''\rangle$ durumu

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle &= [(\lambda_0 a e^{i\beta_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} b e^{i\beta_2})\gamma_1 + (\lambda_0 c e^{i\beta_3} + \lambda_1 e^{i\varphi} d e^{i\beta_4})\gamma_2] |000\rangle \\ &\quad + [(\lambda_0 c e^{i\beta_3} + \lambda_1 e^{i\varphi} d e^{i\beta_4})\gamma_1^* - (\lambda_0 a e^{i\beta_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} b e^{i\beta_2})\gamma_2^*] |100\rangle \\ &\quad + [de^{i\beta_4}\gamma_1^* - be^{i\beta_2}\gamma_2^*][\lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle] \end{aligned} \tag{3.48}$$

olur. Eğer U ve M matrislerinin matris çarpımına bakarsak,

$$\begin{aligned} UM &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ -\gamma_2^* & \gamma_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{i\beta_1} & be^{i\beta_2} \\ ce^{i\beta_3} & de^{i\beta_4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 a e^{i\beta_1} + \gamma_2 c e^{i\beta_3} & \gamma_1 b e^{i\beta_2} + \gamma_2 d e^{i\beta_4} \\ -\gamma_2^* a e^{i\beta_1} + \gamma_1^* c e^{i\beta_3} & -\gamma_2^* b e^{i\beta_2} + \gamma_1^* d e^{i\beta_4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 e^{i\widetilde{\beta}_1} & 0 \\ c_1 e^{i\widetilde{\beta}_3} & d_1 e^{i\widetilde{\beta}_4} \end{pmatrix} = \widetilde{M} \end{aligned} \tag{3.49}$$

olur. $\widetilde{M}$'ya $|0\rangle \to e^{-i\widetilde{\beta}_1}|0\rangle$ ve $|1\rangle \to e^{-i\widetilde{\beta}_4}|1\rangle$ üniter dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} U\widetilde{M} &= \begin{pmatrix} e^{-i\widetilde{\beta}_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\widetilde{\beta}_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e^{i\widetilde{\beta}_1} & 0 \\ c_1 e^{i\widetilde{\beta}_3} & d_1 e^{i\widetilde{\beta}_4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 e^{i(\widetilde{\beta}_3-\widetilde{\beta}_4)} & d_1 \end{pmatrix} = M_1 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Eğer $(\widetilde{\beta}_3 - \widetilde{\beta}_4) \equiv \alpha_1$ seçilirse, bu durumda birinci kubite uygulanacak genel POVM

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 e^{i\alpha_1} & d_1 \end{pmatrix} = a_1 |0\rangle\langle 0| + c_1 e^{i\alpha_1}|1\rangle\langle 0| + d_1 |1\rangle\langle 1| \tag{3.51}$$

halini alır. Sonuç olarak birinci kubit üzerinde yapacağımız genel POVM ölçümü artık M formunda değilde M_1 formunda alınabilir. Benzer hesaplar ikinci ve üçüncü kubitler için de yapılırsa ikinci ve üçüncü kubitlere uygulanacak genel POVM'ler de bulunur. İkinci kubite uygulanacak genel POVM

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 e^{i\alpha_2} \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = a_2 |0\rangle\langle 0| + b_2 e^{i\alpha_2}|0\rangle\langle 1| + d_2 |1\rangle\langle 1| \tag{3.52}$$

ve üçüncü kubite uygulanacak genel POVM

$$M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 e^{i\alpha_3} \\ 0 & d_3 \end{pmatrix} = a_3 |0\rangle\langle 0| + b_3 e^{i\alpha_3}|0\rangle\langle 1| + d_3 |1\rangle\langle 1| \tag{3.53}$$

olmaktadır.

3.4 Denklik Sınıfları

Yerel operasyonlarla birbirine dönüştürülemeyen iki farklı üç kubit dolanıklık sınıfı vardır. Bu iki durum GHZ ve W durumudur.

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \tag{3.54}$$

şeklinde iken, W durumu

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle) \tag{3.55}$$

şeklindedir. Bu bölümde elimizdeki durumun hangi denklik sınıfına ait olduğunu belirleyen şartlar nelerdir, bunu bulacağız. $|GHZ\rangle$ durumu kanonik formda; ancak $|W\rangle$ durumu kanonik formda değil. O halde ilk olarak $|W\rangle$ durumunun kanonik formunu bulalım. T_0 ve T_1 matrisleri

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

olmak üzere, T_0' matrisi

$$T_0' = u_{00}T_0 + u_{01}T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} u_{01} & u_{00} \\ u_{00} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

olur. T_0' matrisinin determinantını hesaplarsak

$$\det T_0' = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{00}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{00} = 0, \quad u_{01} = 1 \tag{3.58}$$

olarak bulunur. Bu durumda T_0' matrisi

$$T_0' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

olur. İkinci ve üçüncü kubitler üzerinde yapılacak üniter dönüşümler ile T_0' matrisi köşegen hale getirilir. Burada T_0' matrisi zaten köşegen olduğu için ikinci ve üçüncü kubitler üzerinde yapılacak üniter dönüşümler $U_2 = I$ ve $U_3 = I$ olur. T_1' matrisini yazarsak

$$T_1' = u_{10}T_0 + u_{11}T_1 = -u_{01}T_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

olur. Bu durumda

$$|W'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle - |101\rangle - |110\rangle) \tag{3.61}$$

olmak üzere, eğer birinci kubit üzerinde $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ üniter dönüşümünü yaparsak, $|W\rangle$ durumunun kanonik formu

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |101\rangle + |110\rangle) \tag{3.62}$$

olarak bulunur. Üç kubit üzerinde POVM ölçümüne geçmeden önce dolanıklık ölçüsünden, concurrence [14], bahsetmemiz yerinde olacaktır. C_{AB}, birinci ve ikinci kubitler arasındaki dolanıklığın ölçüsü olarak tanımlıdır. C_{AB}'yi bulmak için ilk olarak elimizdeki duruma, $|\psi\rangle_{ABC}$, ait yoğunluk matrisini, ρ_{ABC}, bulacağız ve ardından üçüncü kubit üzerinde kısmi iz alarak ρ_{AB}'yi bulacağız. Daha sonra

$$\widetilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AB}^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) \tag{3.63}$$

olmak üzere $\rho_{AB}\widetilde{\rho}_{AB}$ matrisini elde edeceğiz, burada σ_y Pauli matrisidir. Son olarak $\rho_{AB}\widetilde{\rho}_{AB}$ matrisinin özdeğerlerini bulacağız. Bu durumda birinci ve ikinci kubitler arasındaki dolanıklığın ölçüsü, C_{AB},

$$C_{AB} = \max\{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4, 0\} \tag{3.64}$$

olarak yazılır. Burada α_1, α_2, α_3 ve α_4, azalan sırada, $\rho_{AB}\widetilde{\rho}_{AB}$'nin özdeğerlerinin karekök değerlerine eşittir.

Şimdi üç kubit üzerinde önce tek tek, sonra ikili ve son olarak üç kubit üzerinde POVM ölçümü alarak ne tür sonuçlar elde edeceğimizi görelim. Kanonik formu yazalım ve ölçüm almaya birinci kubitten başlayalım.

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \quad \textbf{(3.65)}$$

Birinci kubite uygulayacağımız POVM

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 e^{i\alpha_1} & d_1 \end{pmatrix} = a_1 |0\rangle \langle 0| + c_1 e^{i\alpha_1} |1\rangle \langle 0| + d_1 |1\rangle \langle 1| \quad \textbf{(3.66)}$$

şeklindedir. POVM'yi birinci kubite uygularsak

$$\begin{aligned} |\psi_1'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_1}} (M_1 \otimes I_2 \otimes I_3) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_1}} [\lambda_0 (a_1 |0\rangle + c_1 e^{i\alpha_1} |1\rangle) |00\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 |1\rangle |00\rangle + \lambda_2 d_1 |1\rangle |01\rangle \\ &\quad + \lambda_3 d_1 |1\rangle |10\rangle + \lambda_4 d_1 |1\rangle |11\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_1}} [\lambda_0 a_1 |000\rangle + (\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 d_1 e^{i\varphi}) |100\rangle + \lambda_2 d_1 |101\rangle \\ &\quad + \lambda_3 d_1 |110\rangle + \lambda_4 d_1 |111\rangle] \end{aligned} \quad \textbf{(3.67)}$$

olur. Burada

$$p_1 = \langle \psi | (M_1^\dagger M_1 \otimes I_2 \otimes I_3) |\psi\rangle \quad \textbf{(3.68)}$$

olmaktadır. Birinci kubite POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_1'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 d_1 e^{i\varphi} = 0, \quad \lambda_2 d_1 = 0, \quad \lambda_3 d_1 = 0, \quad \lambda_0 a_1 = \lambda_4 d_1 \quad \textbf{(3.69)}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_1 = \lambda_4 d_1 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ $d_1 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_2 = 0$ ve $\lambda_3 = 0$ olur. Bu durumda $C_{AC} = 2\lambda_0\lambda_2 = 0$ ve $C_{AB} = 2\lambda_0\lambda_3 = 0$ olur. Bu bize birinci kubit, A, ile ikinci kubit, B, ve birinci kubit ile üçüncü kubit, C, arasında ikili dolanıklık olmadığını söylemektedir. Sonuç olarak eğer birinci kubit ikinci ve üçüncü kubitler ile dolanık değilse elimizdeki durum $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Diğer bir deyişle $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 |100\rangle + \lambda_4 |111\rangle \quad \textbf{(3.70)}$$

olmak üzere, $|\psi_1\rangle$ durumu $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Öte yandan, birinci kubite POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_1'\rangle$ durumunun $|W\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 d_1 e^{i\varphi} = 0, \quad \lambda_4 d_1 = 0 \quad \textbf{(3.71)}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_3 d_1 = \lambda_2 d_1 = \lambda_0 a_1 \neq 0$ olduğundan dolayı $d_1 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_4 = 0$ olur. Sonuç olarak eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum $|W\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur.

İkinci kubite uygulayacağımız POVM

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 e^{i\alpha_2} \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = a_2 |0\rangle\langle 0| + b_2 e^{i\alpha_2} |0\rangle\langle 1| + d_2 |1\rangle\langle 1| \qquad \textbf{(3.72)}$$

şeklindedir. POVM'yi ikinci kubite uygularsak

$$\begin{aligned} |\psi_2'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_2}}(I_1 \otimes M_2 \otimes I_3)|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_2}}[\lambda_0 |0\rangle a_2 |0\rangle |0\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |1\rangle a_2 |0\rangle |0\rangle + \lambda_2 |1\rangle a_2 |0\rangle |1\rangle \\ &\quad + \lambda_3 |1\rangle (b_2 e^{i\alpha_2} |0\rangle + d_2 |1\rangle) |0\rangle + \lambda_4 |1\rangle (b_2 e^{i\alpha_2} |0\rangle + d_2 |1\rangle) |1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_2}}[\lambda_0 a_2 |000\rangle + (\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2}) |100\rangle \\ &\quad + (\lambda_2 a_2 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2}) |101\rangle + \lambda_3 d_2 |110\rangle + \lambda_4 d_2 |111\rangle] \end{aligned} \qquad \textbf{(3.73)}$$

olur. Burada

$$p_2 = \langle\psi| (I_1 \otimes M_2^\dagger M_2 \otimes I_3) |\psi\rangle \qquad \textbf{(3.74)}$$

olmaktadır. İkinci kubite POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_2'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2} = 0, \quad \lambda_2 a_2 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} = 0, \quad \lambda_3 d_2 = 0, \quad \lambda_0 a_2 = \lambda_4 d_2 \qquad \textbf{(3.75)}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_2 = \lambda_4 d_2 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olur. Bu durumda $\lambda_3 = 0$ ve de

$$\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \qquad \textbf{(3.76)}$$

olur. Bu durumda $C_{BC} = 2|\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi}| = 0$ ve $C_{BA} = 2\lambda_0\lambda_3 = 0$ olur. Bu bize ikinci kubit ile üçüncü kubit ve ikinci kubit ile birinci kubit arasında ikili dolanıklık olmadığını söylemektedir. Sonuç olarak eğer ikinci kubit birinci ve üçüncü kubitler ile dolanık değilse elimizdeki durum $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Diğer bir deyişle $|\psi_2\rangle$

$$|\psi_2\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_4 |111\rangle \qquad \textbf{(3.77)}$$

olmak üzere, $|\psi_2\rangle$ durumu $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Öte yandan, ikinci kubite POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_2'\rangle$ durumunun $|W\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2} = 0, \quad \lambda_4 d_2 = 0 \tag{3.78}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_2 = \lambda_2 a_2 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} = \lambda_3 d_2 \neq 0$ olduğundan dolayı $d_2 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_4 = 0$ olur. Sonuç olarak eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum $|W\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur.

Üçüncü kubite uygulayacağımız POVM

$$M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 e^{i\alpha_3} \\ 0 & d_3 \end{pmatrix} = a_3 |0\rangle \langle 0| + b_3 e^{i\alpha_3} |0\rangle \langle 1| + d_3 |1\rangle \langle 1| \tag{3.79}$$

şeklindedir. POVM'yi üçüncü kubite uygularsak

$$\begin{aligned} |\psi_3'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_3}} (I_1 \otimes I_2 \otimes M_3) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_3}} [\lambda_0 |00\rangle a_3 |0\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |10\rangle a_3 |0\rangle + \lambda_2 |10\rangle (b_3 e^{i\alpha_3} |0\rangle + d_3 |1\rangle) \\ &\quad + \lambda_3 |11\rangle a_3 |0\rangle + \lambda_4 |11\rangle (b_3 e^{i\alpha_3} |0\rangle + d_3 |1\rangle)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_3}} [\lambda_0 a_3 |000\rangle + (\lambda_1 e^{i\varphi} a_3 + \lambda_2 b_3 e^{i\alpha_3}) |100\rangle \\ &\quad + \lambda_2 d_3 |101\rangle + (\lambda_3 a_3 + \lambda_4 b_3 e^{i\alpha_3}) |110\rangle + \lambda_4 d_3 |111\rangle] \end{aligned} \tag{3.80}$$

olur. Burada

$$p_3 = \langle \psi | (I_1 \otimes I_2 \otimes M_3^\dagger M_3) |\psi\rangle \tag{3.81}$$

olmaktadır. Üçüncü kubite POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_3'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_1 e^{i\varphi} a_3 + \lambda_2 b_3 e^{i\alpha_3} = 0, \quad \lambda_3 a_3 + \lambda_4 b_3 e^{i\alpha_3} = 0, \quad \lambda_2 d_3 = 0, \quad \lambda_0 a_3 = \lambda_4 d_3 \tag{3.82}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_3 = \lambda_4 d_3 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ ve $d_3 \neq 0$ olur. Bu durumda $\lambda_2 = 0$ ve de

$$\lambda_1 e^{i\varphi} a_3 + \lambda_2 b_3 e^{i\alpha_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \tag{3.83}$$

olur. Bu durumda $C_{CB} = 2|\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi}| = 0$ ve $C_{CA} = 2\lambda_0\lambda_2 = 0$ olur. Bu bize üçüncü kubit ile ikinci kubit ve üçüncü kubit ile birinci kubit arasında ikili dolanıklık olmadığını söylemektedir. Sonuç olarak eğer üçüncü kubit birinci ve ikinci kubitler ile dolanık değilse elimizdeki durum $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Diğer bir deyişle $|\psi_3\rangle$

$$|\psi_3\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{3.84}$$

olmak üzere, $|\psi_3\rangle$ durumu $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Öte yandan üçüncü kubite POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_3'\rangle$ durumunun $|W\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_1 e^{i\varphi} a_3 + \lambda_2 b_3 e^{i\alpha_3} = 0, \quad \lambda_4 d_3 = 0 \tag{3.85}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_3 = \lambda_2 d_3 = \lambda_3 a_3 + \lambda_4 b_3 e^{i\alpha_3} \neq 0$ olduğundan dolayı $d_3 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_4 = 0$ olur. Sonuç olarak eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum $|W\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur.

Birinci ve ikinci kubitlere M_1 ve M_2 POVM'lerini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|\psi_4'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_4}}(M_1 \otimes M_2 \otimes I_3)\,|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_4}}[\lambda_0(a_1\,|0\rangle + c_1 e^{i\alpha_1}\,|1\rangle)a_2\,|0\rangle\,|0\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1\,|1\rangle\,a_2\,|0\rangle\,|0\rangle \\
&\quad + \lambda_2 d_1\,|1\rangle\,a_2\,|0\rangle\,|1\rangle + \lambda_3 d_1\,|1\rangle\,(b_2 e^{i\alpha_2}\,|0\rangle + d_2\,|1\rangle)\,|0\rangle \\
&\quad + \lambda_4 d_1\,|1\rangle\,(b_2 e^{i\alpha_2}\,|0\rangle + d_2\,|1\rangle)\,|1\rangle] \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_4}}[\lambda_0 a_1 a_2\,|000\rangle + (\lambda_0 a_2 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_2 + \lambda_3 d_1 b_2 e^{i\alpha_2})\,|100\rangle \\
&\quad + (\lambda_2 d_1 a_2 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2})\,|101\rangle + \lambda_3 d_1 d_2\,|110\rangle + \lambda_4 d_1 d_2\,|111\rangle]
\end{aligned} \tag{3.86}$$

olur. Burada

$$p_4 = \langle\psi|\,(M_1^\dagger M_1 \otimes M_2^\dagger M_2 \otimes I_3)\,|\psi\rangle \tag{3.87}$$

olmaktadır. Birinci ve ikinci kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_4'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\begin{gathered}
\lambda_0 a_2 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_2 + \lambda_3 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} = 0, \quad \lambda_2 d_1 a_2 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} = 0 \\
\lambda_3 d_1 d_2 = 0, \quad \lambda_0 a_1 a_2 = \lambda_4 d_1 d_2
\end{gathered} \tag{3.88}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_1 a_2 = \lambda_4 d_1 d_2 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_3 = 0$ olmaktadır. Bu durumda $C_{AB} = 2\lambda_0\lambda_3 = 0$ olur, bu ise, birinci ve ikinci kubitlerin birbiri ile dolanık olmadığı anlamına gelir. Sonuç olarak eğer birinci ve ikinci kubitler arasında dolanıklık yoksa elimizdeki durum $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Diğer bir deyişle $|\psi_4\rangle$

$$|\psi_4\rangle = \lambda_0\,|000\rangle + \lambda_1\,|100\rangle + \lambda_2\,|101\rangle + \lambda_4\,|111\rangle \tag{3.89}$$

olmak üzere, $|\psi_4\rangle$ durumu $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Öte yandan birinci ve ikinci kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_4'\rangle$ durumunun $|W\rangle$

durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_0 a_2 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_2 + \lambda_3 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} = 0, \quad \lambda_4 d_1 d_2 = 0 \tag{3.90}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_1 a_2 = \lambda_2 d_1 a_2 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} = \lambda_3 d_1 d_2 \neq 0$ olduğundan dolayı $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_4 = 0$ olur. Sonuç olarak eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum $|W\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur.

Birinci ve üçüncü kubitlere M_1 ve M_3 POVM'lerini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|\psi_5'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_5}}(M_1 \otimes I_2 \otimes M_3)|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_5}}[\lambda_0(a_1|0\rangle + c_1 e^{i\alpha_1}|1\rangle)|0\rangle a_3|0\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1|1\rangle|0\rangle a_3|0\rangle \\
&\quad + \lambda_2 d_1|1\rangle|0\rangle(b_3 e^{i\alpha_3}|0\rangle + d_3|1\rangle) + \lambda_3 d_1|1\rangle|1\rangle a_3|0\rangle \\
&\quad + \lambda_4 d_1|1\rangle|1\rangle(b_3 e^{i\alpha_3}|0\rangle + d_3|1\rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_5}}[\lambda_0 a_1 a_3|000\rangle + (\lambda_0 a_3 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_3 + \lambda_2 d_1 b_3 e^{i\alpha_3})|100\rangle \\
&\quad + \lambda_2 d_1 d_3|101\rangle + (\lambda_3 d_1 a_3 + \lambda_4 d_1 b_3 e^{i\alpha_3})|110\rangle + \lambda_4 d_1 d_3|111\rangle]
\end{aligned} \tag{3.91}$$

olur. Burada

$$p_5 = \langle\psi|(M_1^\dagger M_1 \otimes I_2 \otimes M_3^\dagger M_3)|\psi\rangle \tag{3.92}$$

olmaktadır. Birinci ve üçüncü kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_5'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\begin{gathered}
\lambda_0 a_3 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_3 + \lambda_2 d_1 b_3 e^{i\alpha_3} = 0, \quad \lambda_2 d_1 d_3 = 0 \\
\lambda_3 d_1 a_3 + \lambda_4 d_1 b_3 e^{i\alpha_3} = 0, \quad \lambda_0 a_1 a_3 = \lambda_4 d_1 d_3
\end{gathered} \tag{3.93}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_1 a_3 = \lambda_4 d_1 d_3 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $d_1 \neq 0$ ve $d_3 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_2 = 0$ olmaktadır. Bu durumda $C_{AC} = 2\lambda_0\lambda_2 = 0$ olur, bu ise, birinci ve üçüncü kubitlerin birbiri ile dolanık olmadığı anlamına gelir. Sonuç olarak eğer birinci ve üçüncü kubitler arasında dolanıklık yoksa elimizdeki durum $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Diğer bir deyişle $|\psi_5\rangle$

$$|\psi_5\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1|100\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle \tag{3.94}$$

olmak üzere, $|\psi_5\rangle$ durumu $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Öte yandan birinci ve üçüncü kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_5'\rangle$ durumunun $|W\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_0 a_3 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_3 + \lambda_2 d_1 b_3 e^{i\alpha_3} = 0, \quad \lambda_4 d_1 d_3 = 0 \tag{3.95}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_1 a_3 = \lambda_2 d_1 d_3 = \lambda_3 d_1 a_3 + \lambda_4 d_1 b_3 e^{i\alpha_3} \neq 0$ olduğundan dolayı $d_1 \neq 0$ ve $d_3 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_4 = 0$ olur. Sonuç olarak eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum $|W\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur.

İkinci ve üçüncü kubitlere M_2 ve M_3 POVM'lerini uygulayalım.

$$
\begin{aligned}
|\psi_6'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_6}}(I_1 \otimes M_2 \otimes M_3)\,|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_6}}[\lambda_0\,|0\rangle\,a_2\,|0\rangle\,a_3\,|0\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}\,|1\rangle\,a_2\,|0\rangle\,a_3\,|0\rangle \\
&\quad +\lambda_2\,|1\rangle\,a_2\,|0\rangle\,(b_3 e^{i\alpha_3}\,|0\rangle + d_3\,|1\rangle) + \lambda_3\,|1\rangle\,(b_2 e^{i\alpha_2}\,|0\rangle + d_2\,|1\rangle)a_3\,|0\rangle \\
&\quad +\lambda_4\,|1\rangle\,(b_2 e^{i\alpha_2}\,|0\rangle + d_2\,|1\rangle)(b_3 e^{i\alpha_3}\,|0\rangle + d_3\,|1\rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_6}}[(\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 a_3 + \lambda_2 a_2 b_3 e^{i\alpha_3} + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2} a_3 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} b_3 e^{i\alpha_3})\,|100\rangle \\
&\quad +\lambda_0 a_2 a_3\,|000\rangle + (\lambda_2 a_2 d_3 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} d_3)\,|101\rangle \\
&\quad +(\lambda_3 d_2 a_3 + \lambda_4 d_2 b_3 e^{i\alpha_3})\,|110\rangle + \lambda_4 d_2 d_3\,|111\rangle]
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.96)}
$$

olur. Burada

$$
p_6 = \langle\psi|\,(I_1 \otimes M_2^\dagger M_2 \otimes M_3^\dagger M_3)\,|\psi\rangle \qquad \textbf{(3.97)}
$$

olmaktadır. İkinci ve üçüncü kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_6'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$
\begin{gathered}
\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 a_3 + \lambda_2 a_2 b_3 e^{i\alpha_3} + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2} a_3 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} b_3 e^{i\alpha_3} = 0 \\
\lambda_2 a_2 d_3 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} d_3 = 0, \quad \lambda_3 d_2 a_3 + \lambda_4 d_2 b_3 e^{i\alpha_3} = 0 \\
\lambda_0 a_2 a_3 = \lambda_4 d_2 d_3
\end{gathered}
\qquad \textbf{(3.98)}
$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_2 a_3 = \lambda_4 d_2 d_3 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ ve $d_3 \neq 0$ olur. Bu durumda

$$
\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2} = 0, \quad \lambda_2 a_2 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} = 0 \qquad \textbf{(3.99)}
$$

elde edilir. Eğer bu iki eşitliği düzenlersek

$$
\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi} = 0 \qquad \textbf{(3.100)}
$$

bulunur. $C_{BC} = 2|\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi}| = 0$ olması ikinci ve üçüncü kubitlerin birbiri ile dolanık olmadığı anlamına gelir. Sonuç olarak eğer ikinci ve üçüncü kubitler arasında dolanıklık yoksa elimizdeki durum $|GHZ\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur. Öte yandan ikinci ve üçüncü kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_6'\rangle$ durumunun $|W\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\lambda_1 e^{i\varphi} a_2 a_3 + \lambda_2 a_2 b_3 e^{i\alpha_3} + \lambda_3 b_2 e^{i\alpha_2} a_3 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} b_3 e^{i\alpha_3} = 0, \quad \lambda_4 d_2 d_3 = 0 \qquad \textbf{(3.101)}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_2 a_3 = \lambda_2 a_2 d_3 + \lambda_4 b_2 e^{i\alpha_2} d_3 = \lambda_3 d_2 a_3 + \lambda_4 d_2 b_3 e^{i\alpha_3} \neq 0$ olduğundan dolayı $d_2 \neq 0$ ve $d_3 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_4 = 0$ olur. Sonuç olarak eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum $|W\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur.

Son olarak birinci, ikinci ve üçüncü kubitlere M_1, M_2 ve M_3 POVM'lerini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|\psi_7'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_7}}(M_1 \otimes M_2 \otimes M_3)\,|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_7}}[\lambda_0(a_1|0\rangle + c_1 e^{i\alpha_1}|1\rangle)a_2|0\rangle a_3|0\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1|1\rangle a_2|0\rangle a_3|0\rangle \\
&\quad + \lambda_2 d_1|1\rangle a_2|0\rangle (b_3 e^{i\alpha_3}|0\rangle + d_3|1\rangle) + \lambda_3 d_1|1\rangle (b_2 e^{i\alpha_2}|0\rangle + d_2|1\rangle)a_3|0\rangle \\
&\quad + \lambda_4 d_1|1\rangle (b_2 e^{i\alpha_2}|0\rangle + d_2|1\rangle)(b_3 e^{i\alpha_3}|0\rangle + d_3|1\rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_7}}[\lambda_0 a_1 a_2 a_3|000\rangle + (\lambda_2 d_1 a_2 d_3 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} d_3)|101\rangle + (\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} a_2 a_3 \\
&\quad + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_2 a_3 + \lambda_2 d_1 a_2 b_3 e^{i\alpha_3} + \lambda_3 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} a_3 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} b_3 e^{i\alpha_3})|100\rangle \\
&\quad + (\lambda_3 d_1 d_2 a_3 + \lambda_4 d_1 d_2 b_3 e^{i\alpha_3})|110\rangle + \lambda_4 d_1 d_2 d_3|111\rangle] \qquad \textbf{(3.102)}
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$p_7 = \langle\psi|\,(M_1^\dagger M_1 \otimes M_2^\dagger M_2 \otimes M_3^\dagger M_3)\,|\psi\rangle \qquad \textbf{(3.103)}$$

olmaktadır. Birinci, ikinci ve üçüncü kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_7'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\begin{gathered}
\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} a_2 a_3 + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_2 a_3 + \lambda_2 d_1 a_2 b_3 e^{i\alpha_3} + \lambda_3 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} a_3 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} b_3 e^{i\alpha_3} = 0 \\
\lambda_2 d_1 a_2 d_3 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} d_3 = 0, \quad \lambda_3 d_1 d_2 a_3 + \lambda_4 d_1 d_2 b_3 e^{i\alpha_3} = 0 \\
\lambda_0 a_1 a_2 a_3 = \lambda_4 d_1 d_2 d_3 \qquad \textbf{(3.104)}
\end{gathered}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_1 a_2 a_3 = \lambda_4 d_1 d_2 d_3 \neq 0$ olduğundan dolayı $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ ve $d_3 \neq 0$ olur. Öte yandan birinci, ikinci ve üçüncü kubitlere POVM ugulandıktan sonra elde edilen $|\psi_7'\rangle$ durumunun $|W\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için

$$\begin{gathered}
\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} a_2 a_3 + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1 a_2 a_3 + \lambda_2 d_1 a_2 b_3 e^{i\alpha_3} + \lambda_3 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} a_3 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} b_3 e^{i\alpha_3} = 0 \\
\lambda_4 d_1 d_2 d_3 = 0 \qquad \textbf{(3.105)}
\end{gathered}$$

olmalıdır. Ayrıca $\lambda_0 a_1 a_2 a_3 = \lambda_2 d_1 a_2 d_3 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} d_3 = \lambda_3 d_1 d_2 a_3 + \lambda_4 d_1 d_2 b_3 e^{i\alpha_3} \neq 0$ olduğundan dolayı $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ ve $d_3 \neq 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda_4 = 0$ olur. Sonuç olarak eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum $|W\rangle$ durumuna dönüştürülebilir bir durumdur.

Herhangi bir durumun hangi denklik sınıfında olduğunu anlamak için yukarıda yapılanlardan elde edilen sonuç şudur: Elimizdeki durumun hangi denklik sınıfında olduğunu anlamak için öncelikle elimizdeki durumun kanonik formda olup olmadığına bakacağız. Elimizdeki durum kanonik formda değilse o durumu kanonik forma çevireceğiz. Daha sonra $|111\rangle$ teriminin katsayısına, λ_4, bakacağız. Eğer $\lambda_4 = 0$ ise elimizdeki durum W durumuna, $\lambda_4 \neq 0$ ise elimizdeki durum GHZ durumuna dönüştürürülebilir bir durumdur.

3.5 Üç Kubit Kanonik Form Üzerinde Operasyonlar

Üç kubit saf durumun kanonik formu

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle, \quad \lambda_i \geq 0 \tag{3.106}$$

olmaktadır. Kanonik formu elde ederken $\det T_0' = 0$ olarak alıp, ikinci ve üçüncü kubitler üzerindeki üniter dönüşümlerle T_0' matrisi köşegen hale getirilir. Bunun yanı sıra $\det T_0' = 0$ eşitliği iki adet çözüme sahiptir. Bu çözümlerden biri bize yukarıda yazılan kanonik forma ait λ_i ve ϕ parametrelerini verir. Benzer şekilde ikinci çözüm de bize başka bir kanonik form tanımlar. İkinci çözüm için elde edilecek kanonik form

$$|\widetilde{\psi}\rangle = \widetilde{\lambda}_0 |000\rangle + \widetilde{\lambda}_1 e^{i\widetilde{\varphi}} |100\rangle + \widetilde{\lambda}_2 |101\rangle + \widetilde{\lambda}_3 |110\rangle + \widetilde{\lambda}_4 |111\rangle, \quad \widetilde{\lambda}_i \geq 0 \tag{3.107}$$

olarak yazılabilir. Üniter dönüşümler yardımı ile $\widetilde{\lambda}_i$ ve $\widetilde{\phi}$ parametrelerini λ_i ve ϕ parametreleri cinsinden elde edebiliriz. (**3.106**) nolu eşitlikte tanımlanan kanonik form için T_0 ve T_1 matrisleri

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{i\varphi} & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

olmak üzere,

$$T_0' = u_{00} T_0 + u_{01} T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 u_{00} + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{01} & \lambda_2 u_{01} \\ \lambda_3 u_{01} & \lambda_4 u_{01} \end{pmatrix} \tag{3.109}$$

olur. Elde edilen T_0' matrisinin determinantını hesaplarsak

$$\det T_0' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_0 u_{00} + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{01}) \lambda_4 u_{01} - \lambda_2 u_{01} \lambda_3 u_{01} = 0$$

$$u_{01} [(\lambda_0 u_{00} + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{01}) \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3 u_{01}] = 0 \tag{3.110}$$

bulunur. Bu durumda ya $u_{01}=0$ ya da $[(\lambda_0 u_{00}+\lambda_1 e^{i\varphi}u_{01})\lambda_4-\lambda_2\lambda_3 u_{01}]=0$ olmak durumundadır. Eğer $u_{01}=0$ alınırsa, $u_{00}=1$ olur, ki bu bize yeni bir bilgi vermez. O halde diğer çözümü, $[(\lambda_0 u_{00}+\lambda_1 e^{i\varphi}u_{01})\lambda_4-\lambda_2\lambda_3 u_{01}]=0$, alalım.

$$(\lambda_0 u_{00}+\lambda_1 e^{i\varphi}u_{01})\lambda_4-\lambda_2\lambda_3 u_{01}=0 \quad\Rightarrow\quad u_{00}=\frac{(\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi})}{\lambda_0\lambda_4}u_{01} \qquad \textbf{(3.111)}$$

Bu durumda T_0' matrisi

$$T_0'=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4}u_{01} & \lambda_2 u_{01} \\ \lambda_3 u_{01} & \lambda_4 u_{01}\end{pmatrix}=u_{01}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4} & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4\end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.112)}$$

olur. İkinci ve üçüncü kubitler üzerinde üniter dönüşüm yaparak T_0' matrisini köşegen hale getirelim. İkinci ve üçüncü kubitler üzerinde yapılacak üniter dönüşümler

$$U_2=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^*\end{pmatrix},\quad U_3=\begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^*\end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.113)}$$

şeklinde olmak üzere, T_0' matrisini soldan U_2 ve sağdan U_3^T ile çarparsak

$$\begin{aligned} U_2T_0'U_3^T &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^*\end{pmatrix}u_{01}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4} & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d^* \\ d & c^*\end{pmatrix} \\ &= u_{01}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4}c+\lambda_2 d & -\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4}d^*+\lambda_2 c^* \\ \lambda_3 c+\lambda_4 d & -\lambda_3 d^*+\lambda_4 c^*\end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.114)}$$

elde edilir. $U_2T_0'U_3^T$ matrisinin köşegen olabilmesi için

$$a(-\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4}d^*+\lambda_2 c^*)+b(-\lambda_3 d^*+\lambda_4 c^*)=0 \qquad \textbf{(3.115)}$$

$$-b^*(\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4}c+\lambda_2 d)+a^*(\lambda_3 c+\lambda_4 d)=0 \qquad \textbf{(3.116)}$$

olmalıdır. Elde edilen bu iki eşitlikten yararlanarak a, b, c ve d'nin ne olması gerektiğini bulalım. Bu iki eşitliği düzenlersek

$$c^*d^*(\lambda_4^2-\lambda_3^2)=(d^{*2}-c^{*2})\lambda_3\lambda_4 \quad\Rightarrow\quad d^*=\frac{\lambda_4}{\lambda_3}c^* \qquad \textbf{(3.117)}$$

bulunur. Bu durumda

$$|c|^2+|d|^2=1 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}},\quad d=\frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}} \qquad \textbf{(3.118)}$$

olur. Benzer şekilde

$$-b^*(\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_4}c+\lambda_2 d)+a^*(\lambda_3 c+\lambda_4 d)=0 \quad\Rightarrow\quad b^*=\frac{\lambda_4}{\lambda_2}a^* \qquad \textbf{(3.119)}$$

olmak üzere

$$|a|^2+|b|^2=1 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_4^2}}, \quad b=\frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_4^2}} \tag{3.120}$$

olur. Bu durumda ikinci ve üçüncü kubitler üzerinde yapılan üniter dönüşümler

$$U_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_4^2}}\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad U_3=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ -\lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

olur. Bulunan a, b, c ve d terimlerini köşegen $U_2T_0'U_3^T$ matrisinde yerine yazarsak

$$U_2T_0'U_3^T = \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

olur. Burada

$$\widetilde{\lambda}_0 = u_{01}\frac{\sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}}{\lambda_4} \tag{3.123}$$

olmaktadır. (**3.111**) nolu eşitliği ve $|u_{00}|^2+|u_{01}|^2=1$ olduğu bilgisini kullanırsak

$$u_{01}=\frac{\lambda_0\lambda_4}{\sqrt{\lambda_0^2\lambda_4^2+|\lambda_2\lambda_3-\lambda_1e^{i\varphi}\lambda_4|^2}}, \quad u_{00}=\frac{(\lambda_2\lambda_3-\lambda_1e^{i\varphi}\lambda_4)}{\sqrt{\lambda_0^2\lambda_4^2+|\lambda_2\lambda_3-\lambda_1e^{i\varphi}\lambda_4|^2}} \tag{3.124}$$

olur. Bu durumda

$$\widetilde{\lambda}_0 = \lambda_0\sqrt{\frac{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}{\lambda_0^2\lambda_4^2+|\lambda_2\lambda_3-\lambda_1e^{i\varphi}\lambda_4|^2}} \tag{3.125}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde T_1' matrisini yazarsak

$$T_1' = u_{10}T_0+u_{11}T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0u_{10}+\lambda_1e^{i\varphi}u_{11} & \lambda_2u_{11} \\ \lambda_3u_{11} & \lambda_4u_{11} \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

$u_{10}=-u_{01}^*$ ve $u_{11}=u_{00}^*$ olmak üzere

$$T_1' = \begin{pmatrix} -\lambda_0u_{01}^*+\lambda_1e^{i\varphi}u_{00}^* & \lambda_2u_{00}^* \\ \lambda_3u_{00}^* & \lambda_4u_{00}^* \end{pmatrix} \tag{3.127}$$

olur. T_1' matrisini soldan U_2 ve sağdan U_3^T ile çarparsak

$$\begin{aligned} U_2T_1'U_3^T &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda_0u_{01}^*+\lambda_1e^{i\varphi}u_{00}^* & \lambda_2u_{00}^* \\ \lambda_3u_{00}^* & \lambda_4u_{00}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d^* \\ d & c^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_1e^{i\widetilde{\varphi}} & \widetilde{\lambda}_2 \\ \widetilde{\lambda}_3 & \widetilde{\lambda}_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.128}$$

elde edilir. İlk olarak $\widetilde{\lambda}_2$'yı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_2 &= a[-d^*(-\lambda_0 u_{01}^* + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{00}^*) + c^*\lambda_2 u_{00}^*] + b[-d^*\lambda_3 u_{00}^* + c^*\lambda_4 u_{00}^*] \\
&= \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_4^2}}[-\frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}(-\lambda_0 u_{01}^* + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{00}^*) + \frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}\lambda_2 u_{00}^*] \\
&\quad + \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_4^2}}[-\frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}\lambda_3 u_{00}^* + \frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}\lambda_4 u_{00}^*] \\
&= \frac{\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}}[\lambda_4(\lambda_0 u_{01}^* - \lambda_1 e^{i\varphi} u_{00}^*) + \lambda_3\lambda_2 u_{00}^*] \\
&= \frac{\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}}[\frac{\lambda_0^2\lambda_4^2 + (\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4)(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{-i\varphi}\lambda_4)}{\sqrt{\lambda_0^2\lambda_4^2 + |\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4|^2}}] \\
&= \lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_0^2\lambda_4^2 + |\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4|^2}{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}} \qquad \textbf{(3.129)}
\end{aligned}$$

Şimdi de $\widetilde{\lambda}_1 e^{i\widetilde{\varphi}}$'nın neye eşit olması gerektiğini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_1 e^{i\widetilde{\varphi}} &= a[c(-\lambda_0 u_{01}^* + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{00}^*) + d\lambda_2 u_{00}^*] + b[c\lambda_3 u_{00}^* + d\lambda_4 u_{00}^*] \\
&= \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_4^2}}[\frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}(-\lambda_0 u_{01}^* + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{00}^*) + \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}\lambda_2 u_{00}^*] \\
&\quad + \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_4^2}}[\frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}\lambda_3 u_{00}^* + \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2+\lambda_4^2}}\lambda_4 u_{00}^*] \\
&= \frac{\lambda_2\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}}[-\lambda_0 u_{01}^* + \lambda_1 e^{i\varphi} u_{00}^*] \\
&\quad + \frac{\lambda_4}{\sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}}[\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2]u_{00}^* \\
&= -i\lambda_1\sin(\varphi)\sqrt{\frac{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}{\lambda_0^2\lambda_4^2 + |\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4|^2}} \\
&\quad + \frac{\lambda_1\cos(\varphi)[\lambda_4^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2) - \lambda_2^2\lambda_3^2]}{\sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)(\lambda_0^2\lambda_4^2 + |\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4|^2)}} \\
&\quad + \frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_4^2)}{\sqrt{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)(\lambda_0^2\lambda_4^2 + |\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4|^2)}} \qquad \textbf{(3.130)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\widetilde{\lambda}_3$ ve $\widetilde{\lambda}_4$'yı hesaplarsak

$$\widetilde{\lambda}_3 = \lambda_3\sqrt{\frac{\lambda_0^2\lambda_4^2 + |\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4|^2}{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}} \qquad \textbf{(3.131)}$$

$$\widetilde{\lambda}_4 = \lambda_4\sqrt{\frac{\lambda_0^2\lambda_4^2 + |\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4|^2}{(\lambda_2^2+\lambda_4^2)(\lambda_3^2+\lambda_4^2)}} \qquad \textbf{(3.132)}$$

olarak bulunur. Böylelikle $\widetilde{\lambda}_i$ ve $\widetilde{\phi}$ parametrelerini λ_i ve ϕ parametreleri cinsinden bulduk. Bunun yanı sıra $\widetilde{\lambda}_i$ ve $\widetilde{\phi}$ parametreleri ile λ_i ve ϕ parametreleri arasında elde edilen bu eşitliklerin dışında başka eşitliklerin, örneğin $\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_0\lambda_2$, varlığından da bahsedebiliriz. Şimdi bu eşitlikleri bulalım. Kanonik form olarak

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_{ABC} = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{3.133}$$

alıp ne tür eşitlikler elde edeceğimize bakalım. C_{AC}, birinci ve üçüncü kubitler arasındaki dolanıklığın ölçüsüdür. C_{AC}'yı hesaplayalım. Bunun için ilk olarak kanonik duruma, $|\psi\rangle_{ABC}$, ait yoğunluk matrisini bulacağız ve ikinci kubit üzerinde kısmi iz alacağız.

$$\begin{aligned}
\rho_{AC} &= tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \\
&= \lambda_0^2 |00\rangle\langle 00| + \lambda_0\lambda_1 e^{-i\varphi} |00\rangle\langle 10| + \lambda_0\lambda_2 |00\rangle\langle 11| + \lambda_0\lambda_1 e^{i\varphi} |10\rangle\langle 00| \\
&\quad + \lambda_1^2 |10\rangle\langle 10| + \lambda_2\lambda_1 e^{i\varphi} |10\rangle\langle 11| + \lambda_0\lambda_2 |11\rangle\langle 00| \\
&\quad + \lambda_2\lambda_1 e^{-i\varphi} |11\rangle\langle 10| + \lambda_2^2 |11\rangle\langle 11| + \lambda_3^2 |10\rangle\langle 10| \\
&\quad + \lambda_3\lambda_4 |10\rangle\langle 11| + \lambda_4\lambda_3 |11\rangle\langle 10| + \lambda_4^2 |11\rangle\langle 11| \\
&= \lambda_0^2 |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + \lambda_0\lambda_1 e^{-i\varphi} |0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| + \lambda_0\lambda_2 |0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| \\
&\quad + \lambda_0\lambda_1 e^{i\varphi} |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| \\
&\quad + (\lambda_2\lambda_1 e^{i\varphi} + \lambda_3\lambda_4) |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + \lambda_0\lambda_2 |1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0| \\
&\quad + (\lambda_2\lambda_1 e^{-i\varphi} + \lambda_3\lambda_4) |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + (\lambda_2^2 + \lambda_4^2) |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 0 & \lambda_0\lambda_1 e^{-i\varphi} & \lambda_0\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0\lambda_1 e^{i\varphi} & 0 & \lambda_1^2 + \lambda_3^2 & \lambda_2\lambda_1 e^{i\varphi} + \lambda_3\lambda_4 \\ \lambda_0\lambda_2 & 0 & \lambda_2\lambda_1 e^{-i\varphi} + \lambda_3\lambda_4 & \lambda_2^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.134}$$

$\widetilde{\rho}_{AC}$ olarak tanımlanan yoğunluk matrisi

$$\widetilde{\rho}_{AC} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AC}^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) \tag{3.135}$$

şeklindedir. Burada σ_y Pauli matrisidir ve

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.136}$$

olmaktadır. ρ_{AC} ve $\widetilde{\rho}_{AC}$ matrislerini elde ettikten sonra $\rho_{AC}\widetilde{\rho}_{AC}$ matris çarpımını ve ardından $\rho_{AC}\widetilde{\rho}_{AC}$'nın özdeğerlerini bulacağız.

$$\det(\rho_{AC}\widetilde{\rho}_{AC} - \lambda I) = 0 \tag{3.137}$$

olmak üzere, $\rho_{AC}\widetilde{\rho}_{AC}$'nin özdeğerleri

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= 0, \quad \lambda^{(3)} = 2\lambda_0^2\lambda_2^2 + \lambda_0^2\lambda_4^2 - 2\sqrt{\lambda_0^4\lambda_2^4 + \lambda_0^4\lambda_2^2\lambda_4^2} \\ \lambda^{(2)} &= 0, \quad \lambda^{(4)} = 2\lambda_0^2\lambda_2^2 + \lambda_0^2\lambda_4^2 + 2\sqrt{\lambda_0^4\lambda_2^4 + \lambda_0^4\lambda_2^2\lambda_4^2} \end{aligned} \quad \textbf{(3.138)}$$

olarak bulunur. α_1, α_2, α_3 ve α_4, azalan sırada, $\rho_{AC}\widetilde{\rho}_{AC}$'nin özdeğerlerinin karekök değerlerine eşittir. Yani

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\lambda^{(4)}} = \sqrt{\lambda_0^2\lambda_2^2 + \lambda_0^2\lambda_4^2} + \lambda_0\lambda_2, \quad \alpha_3 = \sqrt{\lambda^{(1)}} = 0 \\ \alpha_2 &= \sqrt{\lambda^{(3)}} = \sqrt{\lambda_0^2\lambda_2^2 + \lambda_0^2\lambda_4^2} - \lambda_0\lambda_2, \quad \alpha_4 = \sqrt{\lambda^{(2)}} = 0 \end{aligned} \quad \textbf{(3.139)}$$

olmaktadır. Bu durumda

$$\begin{aligned} C_{AC} &= \max\{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4, 0\} \\ &= \max\{2\lambda_0\lambda_2, 0\} \\ &= 2\lambda_0\lambda_2 \end{aligned} \quad \textbf{(3.140)}$$

olur. Birinci ve üçüncü kubitler arasındaki dolanıklığın miktarı $2\lambda_0\lambda_2$ olmaktadır. Bunun yanı sıra $\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_2$ çarpımına bakarsak, $\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_0\lambda_2$ olduğu görülmektedir. Diğer bir deyişle

$$\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_0\lambda_2 = \frac{C_{AC}}{2} \quad \textbf{(3.141)}$$

olmaktadır. Birinci ve üçüncü kubitler arasındaki dolanıklığın ölçüsü olan C_{AC}'nin baz seçiminden bağımsız yani üniter dönüşümler altında değişmez olduğunu göstermiş olduk. İkinci olarak C_{AB}'yi, birinci ve ikinci kubitler arasındaki dolanıklığın ölçüsü, bulalım. Bunun için $B \leftrightarrow C$ değiştokuşuna bakmamız yeterli olacaktır. $B \leftrightarrow C$ değiştokuşu için

$$|\psi\rangle_{ACB} = \lambda_0\,|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}\,|100\rangle + \lambda_2\,|110\rangle + \lambda_3\,|101\rangle + \lambda_4\,|111\rangle \quad \textbf{(3.142)}$$

olmak üzere, $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_3$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$C_{AB} = 2\lambda_0\lambda_3 \quad \textbf{(3.143)}$$

olur. Öte yandan $\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_3$ çarpımına bakarsak, $\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_3 = \lambda_0\lambda_3$ olduğu görülmektedir. Başka bir ifadeyle

$$\widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_3 = \lambda_0\lambda_3 = \frac{C_{AB}}{2} \quad \textbf{(3.144)}$$

olmaktadır. İkinci ve üçüncü kubitler arasındaki dolanıklık miktarını, C_{BC}, bulalım. $A \leftrightarrow B$ değiştokuşu için

$$|\psi\rangle_{BAC} = \lambda_0\,|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}\,|010\rangle + \lambda_2\,|011\rangle + \lambda_3\,|110\rangle + \lambda_4\,|111\rangle \quad \textbf{(3.145)}$$

olur. $|\psi\rangle_{BAC}$ durumunu kanonik halde değil. Dolayısıyla ilk olarak $|\psi\rangle_{BAC}$ durumunun kanonik formunu bulmamız gerekmektedir. $|\psi\rangle_{BAC}$ için T_0 ve T_1 matrisleri

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \lambda_1 e^{i\varphi} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \tag{3.146}$$

olmak üzere, T_0' matrisi

$$T_0' = u_{00}T_0 + u_{01}T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 u_{00} & 0 \\ \lambda_1 e^{i\varphi} u_{00} + \lambda_3 u_{01} & \lambda_2 u_{00} + \lambda_4 u_{01} \end{pmatrix} \tag{3.147}$$

olur. T_0' matrisinin determinantını hesaplarsak

$$\det T_0' = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 u_{00}[\lambda_2 u_{00} + \lambda_4 u_{01}] = 0 \tag{3.148}$$

olur. $\det T_0' = 0$'ın iki çözümü vardır: $u_{00} = 0$ ya da $[\lambda_2 u_{00} + \lambda_4 u_{01}] = 0$. İlk çözümü, $u_{00} = 0$, alalım. Bu durumda $|u_{00}|^2 + |u_{01}|^2 = 1$ olmak üzere, $u_{01} = 1$ olur. T_0' matrisi

$$T_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \tag{3.149}$$

halini alır. İkinci ve üçüncü kubitlere uygulanacak üniter dönüşümler yardımıyla T_0' matrisini köşegenleştirelim. İkinci ve üçüncü kubitler üzerinde yapılacak üniter dönüşümler

$$U_B = \begin{pmatrix} e & f \\ -f^* & e^* \end{pmatrix}, \quad U_C = \begin{pmatrix} g & h \\ -h^* & g^* \end{pmatrix} \tag{3.150}$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} U_B T_0' U_C^T &= \begin{pmatrix} e & f \\ -f^* & e^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & -h^* \\ h & g^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(\lambda_3 g + \lambda_4 h) & f(-\lambda_3 h^* + \lambda_4 g^*) \\ e^*(\lambda_3 g + \lambda_4 h) & e^*(-\lambda_3 h^* + \lambda_4 g^*) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.151}$$

olmak üzere, $U_B T_0' U_C^T$ matrisinin köşegen matris olabilmesi için

$$f(-\lambda_3 h^* + \lambda_4 g^*) = 0, \quad e^*(\lambda_3 g + \lambda_4 h) = 0 \tag{3.152}$$

olmalıdır. Eğer $e = 0$ alırsak, $|e|^2 + |f|^2 = 1$ olmak üzere, $f = 1$ olur. Bu durumda

$$(-\lambda_3 h^* + \lambda_4 g^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad h^* = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} g^* \tag{3.153}$$

elde edilir, ve de

$$|g|^2 + |h|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}, \quad h = \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \tag{3.154}$$

olarak bulunur. Köşegen matrisimiz

$$\begin{aligned} U_B T_0' U_C^T &= \begin{pmatrix} f(\lambda_3 g + \lambda_4 h) & f(-\lambda_3 h^* + \lambda_4 g^*) \\ e^*(\lambda_3 g + \lambda_4 h) & e^*(-\lambda_3 h^* + \lambda_4 g^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \textbf{(3.155)}$$

olur. Ayrıca, ikinci ve üçüncü kubitler üzerinde yapılan üniter dönüşümler

$$U_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_C = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ -\lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.156)}$$

olur. T_1' matrisini yazarsak

$$T_1' = u_{10} T_0 + u_{11} T_1 = -u_{01}^* T_0 + u_{00}^* T_1 = -T_0 = -\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \lambda_1 e^{i\varphi} & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.157)}$$

olur. İkinci ve üçüncü kubitlere de üniter dönüşümleri uygularsak

$$\begin{aligned} U_B T_1' U_C^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 \\ -\lambda_1 e^{i\varphi} & -\lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \begin{pmatrix} \lambda_3 & -\lambda_4 \\ \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \begin{pmatrix} -\lambda_1 \lambda_3 e^{i\varphi} - \lambda_2 \lambda_4 & \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi} - \lambda_2 \lambda_3 \\ \lambda_0 \lambda_3 & -\lambda_0 \lambda_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \textbf{(3.158)}$$

elde edilir. $|\psi\rangle_{BAC}$ durumunun üniter dönüşümlerle kanonik forma getirilmiş hali

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle_{BAC} &= \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}|000\rangle - \frac{\lambda_1 \lambda_3 e^{i\varphi} + \lambda_2 \lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}|100\rangle + \frac{|\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi}|}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}|101\rangle \\ &+ \frac{\lambda_0 \lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}|110\rangle - \frac{\lambda_0 \lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}|111\rangle \end{aligned} \quad \textbf{(3.159)}$$

olur. $C_{AC} = 2\lambda_0 \lambda_2$ idi. Bu durumda

$$\begin{aligned} C_{BC} &= 2\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}\left(\frac{|\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi}|}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}\right) \\ &= 2|\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi}| \end{aligned} \quad \textbf{(3.160)}$$

olarak bulunur. Öte yandan $\widetilde{\lambda}_2 \widetilde{\lambda}_3 - \widetilde{\lambda}_1 \widetilde{\lambda}_4 e^{i\widetilde{\varphi}}$ ifadesini açık olarak hesaplarsak

$$\widetilde{\lambda}_2 \widetilde{\lambda}_3 - \widetilde{\lambda}_1 \widetilde{\lambda}_4 e^{i\widetilde{\varphi}} = \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{-i\varphi} \quad \textbf{(3.161)}$$

bulunur. Elde edilen ifadenin büyüklüğüne bakarsak

$$|\widetilde{\lambda}_2 \widetilde{\lambda}_3 - \widetilde{\lambda}_1 \widetilde{\lambda}_4 e^{i\widetilde{\varphi}}| = |\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{-i\varphi}| \quad \textbf{(3.162)}$$

olur. Bu durumda, $|\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{-i\varphi}| = |\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi}|$ olmak üzere,

$$|\widetilde{\lambda}_2 \widetilde{\lambda}_3 - \widetilde{\lambda}_1 \widetilde{\lambda}_4 e^{i\widetilde{\varphi}}| = |\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi}| = \frac{C_{BC}}{2} \quad \textbf{(3.163)}$$

olarak yazılır. Son olarak $C_{B(AC)}$'yi, ikinci kubitin birinci ve üçüncü kubitler ile dolanıklık miktarı, hesaplayalım İlk olarak ρ_B'yi bulacağız.

$$\begin{aligned} \rho_B &= tr_{AC}(|\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= (\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2)|0\rangle\langle 0| + (\lambda_1\lambda_3 e^{i\varphi}+\lambda_2\lambda_4)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad +(\lambda_1\lambda_3 e^{-i\varphi}+\lambda_2\lambda_4)|1\rangle\langle 0| + (\lambda_3^2+\lambda_4^2)|1\rangle\langle 1| \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2 & \lambda_1\lambda_3 e^{i\varphi}+\lambda_2\lambda_4 \\ \lambda_1\lambda_3 e^{-i\varphi}+\lambda_2\lambda_4 & \lambda_3^2+\lambda_4^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.164}$$

ρ_B'nin determinantını alalım.

$$\begin{aligned} \det\rho_B &= \lambda_1^2\lambda_4^2+\lambda_2^2\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+\lambda_0^2\lambda_3^2+\lambda_0^2\lambda_4^2 \\ &= |\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi}|^2+\lambda_0^2\lambda_3^2+\lambda_0^2\lambda_4^2 \end{aligned} \tag{3.165}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} C_{B(AC)} &= 2\sqrt{\det\rho_B} \\ &= 2\sqrt{|\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi}|^2+\lambda_0^2\lambda_3^2+\lambda_0^2\lambda_4^2} \end{aligned} \tag{3.166}$$

olur. Üçlü dolanıklık, τ, ise

$$\begin{gathered} C_{B(AC)}^2 = C_{BA}^2+C_{BC}^2+\tau \\ 4(|\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi}|^2+\lambda_0^2\lambda_3^2+\lambda_0^2\lambda_4^2) = 4\lambda_0^2\lambda_3^2+4|\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi}|^2+\tau \\ \tau = 4\lambda_0^2\lambda_4^2 \end{gathered} \tag{3.167}$$

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen eşitlikler bize, üniter dönüşümler altında dolanıklık miktarının ve τ'nun değişmez kalacağını söylemektedir. Elde edilen eşitlikleri tekrar yazarsak, üniter dönüşümler altında değişmez kalan büyüklükler

$$\begin{gathered} \widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_4 = \lambda_0\lambda_4 = \sqrt{\tau}/2 \\ \widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_0\lambda_2 = C_{AC}/2 \\ \widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_3 = \lambda_0\lambda_3 = C_{AB}/2 \\ |\widetilde{\lambda}_2\widetilde{\lambda}_3-\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_4 e^{i\widetilde{\varphi}}| = |\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_4 e^{i\varphi}| = C_{BC}/2 \\ \widetilde{\lambda}_2\widetilde{\lambda}_3-\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_4 e^{i\widetilde{\varphi}} = \lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_4 e^{-i\varphi} \end{gathered} \tag{3.168}$$

olarak bulunmaktadır.

Üç kubite ait POVM'lerin sağlaması gereken şarta bakalım. Birinci kubit için genel POVM

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 e^{i\alpha_1} & d_1 \end{pmatrix} = a_1|0\rangle\langle 0| + c_1 e^{i\alpha_1}|1\rangle\langle 0| + d_1|1\rangle\langle 1| \tag{3.169}$$

şeklinde idi. İlk olarak $M_1^\dagger M_1$ matrisinin özdeğerlerini bulacağız ve ardından bu özdeğerlerin sağlaması gereken şarttan yararlanarak M_1 için bir koşul elde edeceğiz. $M_1^\dagger M_1$ matrisi

$$M_1^\dagger M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 e^{-i\alpha_1} \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 e^{i\alpha_1} & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + c_1^2 & c_1 d_1 e^{-i\alpha_1} \\ c_1 d_1 e^{i\alpha_1} & d_1^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(3.170)}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \det(M_1^\dagger M_1 - \lambda) = (a_1^2 + c_1^2 - \lambda)(d_1^2 - \lambda) - c_1^2 d_1^2 = 0 \\ a_1^2 d_1^2 - a_1^2 \lambda + c_1^2 d_1^2 - c_1^2 \lambda - d_1^2 \lambda + \lambda^2 - c_1^2 d_1^2 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda(a_1^2 + c_1^2 + d_1^2) + a_1^2 d_1^2 = 0 \qquad \mathbf{(3.171)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $M_1^\dagger M_1$ matrisinin özdeğerlerinin birden küçük ya da en fazla bire eşit olması gerektiği bilgisinden yararlanırsak,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \mp \sqrt{(a_1^2 + c_1^2 + d_1^2)^2 - 4a_1^2 d_1^2}}{2} \leq 1 \qquad \mathbf{(3.172)}$$

olur. Buradan büyük kök için

$$a_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + \sqrt{((a_1 - d_1)^2 + c_1^2)((a_1 + d_1)^2 + c_1^2)} \leq 2 \qquad \mathbf{(3.173)}$$

elde edilir. Benzer şekilde $M_2^\dagger M_2$ ve $M_3^\dagger M_3$ matrislerinin özdeğerlerinin sağlaması gereken şarttan yararlanırsak M_2 ve M_3 için

$$a_i^2 + b_i^2 + d_i^2 + \sqrt{((a_i - d_i)^2 + b_i^2)((a_i + d_i)^2 + b_i^2)} \leq 2, \quad i = 2,3 \qquad \mathbf{(3.174)}$$

elde edilir.

3.6 GHZ Manipülasyonu ve Yoğunlaştırılması

Bu bölümde yerel operasyonları kullanarak üç kubit dolanıklığın manipülasyonunu inceleyeceğiz. W durumunun yoğunlaştırılması [15] bilinmektedir. Burada GHZ yoğunlaştırılması sunulacaktır. Üç kubite de POVM uygularsak

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{P}}(M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 |\psi\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{P}}[\lambda_0 a_1 a_2 a_3 |000\rangle \\ &\quad + ((\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1) a_2 a_3 + \lambda_2 d_1 a_2 b_3 e^{i\alpha_3} + \lambda_3 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} a_3 \\ &\quad + \lambda_3 d_1 b_2 b_3 e^{i(\alpha_2 + \alpha_3)}) |100\rangle + (|\lambda_2 d_1 a_2 d_3 + \lambda_4 d_1 b_2 e^{i\alpha_2} d_3|) |101\rangle \\ &\quad + (|\lambda_3 d_1 d_2 a_3 + \lambda_4 d_1 d_2 b_3 e^{i\alpha_3}|) |110\rangle + \lambda_4 d_1 d_2 d_3 |111\rangle] \qquad \mathbf{(3.175)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $P = \langle\psi| M_1^\dagger M_1 \otimes M_2^\dagger M_2 \otimes M_3^\dagger M_3 |\psi\rangle$ olmaktadır. $|\psi'\rangle$ durumunu elde etme olasılığının maksimizasyonu yerel olasılıkların maksimizasyonunu da gerekli kılar. Bu da üç adet kısıtlama, $\det(I - M_1^\dagger M_1) = 0$, $\det(I - M_2^\dagger M_2) = 0$ ve $\det(I - M_3^\dagger M_3) = 0$, ortaya çıkarır. Bu durumda

$$\det(I - M_1^\dagger M_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - a_1^2 - c_1^2)(1 - d_1^2) - c_1^2 d_1^2 = 0 \qquad \textbf{(3.176)}$$

olmak üzere, düzenlersek

$$(1 - a_1^2)(1 - d_1^2) = c_1^2 = \frac{C_{BC}^2}{\tau} d_1^2 \qquad \textbf{(3.177)}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\det(I - M_2^\dagger M_2) = 0$ ve $\det(I - M_3^\dagger M_3) = 0$ için de hesaplarsak

$$(1 - a_2^2)(1 - d_2^2) = b_2^2 = \frac{C_{AC}^2}{\tau} a_2^2 \qquad \textbf{(3.178)}$$

$$(1 - a_3^2)(1 - d_3^2) = b_3^2 = \frac{C_{AB}^2}{\tau} a_3^2 \qquad \textbf{(3.179)}$$

olur. Böylelikle P olasılığının maksimizasyonunda kullanılacak kısıtlamaların üç tanesini daha bulmuş olduk. Geri kalan kısıtlamaları da bulduktan sonra GHZ manipülasyonuna başlayabiliriz. Diğer kısıtlamalar için $|\psi'\rangle$ durumu ile $|GHZ\rangle$ durumunu mukayese edeceğiz. $|\psi'\rangle$ durumunun $|GHZ\rangle$ durumuna eşit olabilmesi için $|100\rangle$, $|101\rangle$ ve $|110\rangle$ terimlerinin katsayıları sıfır olmalıdır ve de $|000\rangle$ ve $|111\rangle$ terimlerinin katsayıları da birbirine eşit olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{gathered} \lambda_0 a_1 a_2 a_3 = \lambda_4 d_1 d_2 d_3 \\ c_1 e^{i\alpha_1} = \tfrac{\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 e^{i\varphi}\lambda_4}{\lambda_0\lambda_4} d_1, \quad b_2 = \tfrac{\lambda_2}{\lambda_4} a_2, \quad b_3 = \tfrac{\lambda_3}{\lambda_4} a_3, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \pi \end{gathered} \qquad \textbf{(3.180)}$$

elde edilir ve olasılık değerimiz,

$$P = 2\lambda_0^2 a_1^2 a_2^2 a_3^2 \qquad \textbf{(3.181)}$$

olur. GHZ manipülasyonu için (**3.173**), (**3.174**), (**3.177**), (**3.178**), (**3.179**) ve (**3.180**) nolu eşitliklerde elde edilen kısıtlamaları kullanarak (**3.181**) nolu eşitlikte yer alan olasılık değerini, P, maksimize edeceğiz.

i) Üç kubit arasında ikili dolanıklık yoksa; $C_{AB} = C_{AC} = C_{BC} = 0$, elimizdeki durumun kanonik formu

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_4 |111\rangle, \quad \lambda_0 \geq \lambda_4 \qquad \textbf{(3.182)}$$

olarak elde edilir. Eğer $|\psi\rangle$ durumu üzerinde herhangi bir kubite $\frac{\lambda_4}{\lambda_0}|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ operatörünü etki ettirirsek maksimum olasılıkla GHZ durumu elde edilir.

$$P_{max} = 1 - \sqrt{1-\tau} \quad \textbf{(3.183)}$$

ii) Eğer üç kubitten birinin diğer kubitlerle ikili dolanıklığı yoksa; Birinci kubit ikinci ve üçüncü kubit ile dolanık olmasın, $C_{AB} = C_{AC} = 0$, $C_{BC} \neq 0$. Bu durumda elimizdeki durumun kanonik formu

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1|100\rangle + \lambda_4|111\rangle \quad \textbf{(3.184)}$$

olur. Olasılık ise

$$P_{max} = 1 - \sqrt{1-\tau} \quad \textbf{(3.185)}$$

olarak bulunur. Burada GHZ yoğunlaştırması sadece birinci parçacığa bağlıdır. Diğer bir ifadeyle ikinci ve üçüncü parçacıkların GHZ yoğunlaştırmasına bir katkısı yoktur. Bu durumda

$$M_1 = \frac{\sqrt{P_{max}}}{\sqrt{2}\lambda_0}|0\rangle\langle 0| - \frac{\lambda_1\sqrt{P_{max}}}{\sqrt{2}\lambda_0\lambda_4}|1\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{P_{max}}}{\sqrt{2}\lambda_4}|1\rangle\langle 1|, \quad M_2 = I, \quad M_3 = I \quad \textbf{(3.186)}$$

olrak bulunur.

iii) Sadece bir çift arasında dolanıklık yoksa; Birinci ve ikinci kubitler arasında dolanıklık olmasın, $C_{AB} = 0$, $C_{AC} \neq 0$ ve $C_{BC} \neq 0$. Bu durumda elimizdeki durumun kanonik formu

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_4|111\rangle, \quad \lambda_0 \geq \lambda_4 \quad \textbf{(3.187)}$$

olur.

$$P_{max} = 1 + \frac{C_{AC}C_{BC}}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{(1+\frac{C_{AC}C_{BC}}{\sqrt{\tau}})^2 - \tau} \quad \textbf{(3.188)}$$

Burada açıklanan yoğunlaştırma yönteminin en uygun yöntem olup olmadığını kontrol etmek için

$$P(|\psi\rangle) \geq \sum_i p_i P(|\psi_i\rangle) \quad \textbf{(3.189)}$$

eşitsizliğinin her durumda, $|\psi\rangle$ durumunu p_i olasıkla $|\psi_i\rangle$ durumuna dönüştüren yerel operasyonlar için, sağlandığının gösterilmesi yeterli olacaktır. (**3.189**) nolu eşitsizliğinin sağ tarafı birden fazla adımda GHZ durumunun elde edilme olasılığı iken sol tarafı tek adımda, OSBP, GHZ elde etme olasılığı olmaktadır.

$$P(|\psi\rangle) \geq p_1 P(|\psi_1\rangle) + p_2 P(|\psi_2\rangle) \quad \textbf{(3.190)}$$

Burada $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$, $A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 = I$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 |0\rangle \langle 0| + c_1 e^{i\alpha_1} |1\rangle \langle 0| + d_1 |1\rangle \langle 1| \\ A_2 &= a_2 |0\rangle \langle 0| + c_2 e^{i\alpha_2} |1\rangle \langle 0| + d_2 |1\rangle \langle 1| \end{aligned} \quad \textbf{(3.191)}$$

POVM'lerin birinci kubite uygulanmasıyla elde edilmektedir. Birinci kubite A_1 ve A_2'yi uygularsak

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_1}}[\lambda_0 a_1 |000\rangle + (\lambda_0 c_1 e^{i\alpha_1} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_1) |100\rangle \\ &\quad + \lambda_2 d_1 |101\rangle + \lambda_3 d_1 |110\rangle + \lambda_4 d_1 |111\rangle] \end{aligned} \quad \textbf{(3.192)}$$

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_2}}[\lambda_0 a_2 |000\rangle + (\lambda_0 c_2 e^{i\alpha_2} + \lambda_1 e^{i\varphi} d_2) |100\rangle \\ &\quad + \lambda_2 d_2 |101\rangle + \lambda_3 d_2 |110\rangle + \lambda_4 d_2 |111\rangle] \end{aligned} \quad \textbf{(3.193)}$$

olur. Burada $p_i = \langle\psi| A_i^\dagger A_i \otimes I_2 \otimes I_3 |\psi\rangle$ olmaktadır. Eğer $[p_1 P(|\psi_1\rangle) + p_2 P(|\psi_2\rangle)]$'yi maksimize edersek, maksimum değerine $P(|\psi_1\rangle) = 0$ ya da $P(|\psi_2\rangle) = 0$ için ulaştığı görülecektir. Bunun anlamı ise, yukarıda açıklanan OSBP'den daha yüksek olasılıkta sonuç veren başka bir yöntem üretilemez.

4. SONUÇ

Bu tezi $N \otimes N$ saf durumlar arasındaki geçiş ve üç kubit saf durumun manipülasyonu ve yoğunlaştırılması olarak iki bölüme ayırabiliriz.

İlk olarak $2 \otimes 2$ saf durumlar incelendi. $2 \otimes 2$ durumlar için dolanıklığın azaldığı ve dolanıklığın arttığı durumlar ayrı ayrı ele alındı. Dolanıklığın arttığı durumlar arasındaki geçiş için elde edilen yöntem kuantum ışınlama ve yoğun kodlama süreçleri için oldukça önemlidir. Kuantum ışınlama sürecinde paylaşılan dolanık durum maksimal dolanık durum değilse bilginin tamamen kaybolma ihtimali vardır. Gönderilmek istenilen bilginin kaybolma ihtimalinden dolayı paylaşılan durum maksimal dolanık duruma dönüştürülür. Ardından bilgi gönderilir. Böylelikle bilginin tamamen kaybolmasının önüne geçilmiş olunur. Bu açıdan az dolanık bir durumdan çok dolanık bir duruma geçiş için elde edilen yöntem önemli olmaktadır. Daha sonra sırasıyla majorization şartının sağlandığı $3 \otimes 3$ ve $4 \otimes 4$ durumlar arasındaki geçişler incelendi. $3 \otimes 3$ ve $4 \otimes 4$ durumlar arasındaki geçişler için sunulan yöntem geçişin tek ölçümde gerçekleşmesi açısından önemlidir. Bu geçişi tek ölçüm ile yapan bir yöntem literatürde bulunmamaktadır. Hemen ardından $4 \otimes 4$ durumlar için elde edilen yöntemden yararlanarak $N \otimes N$ durumlar arasındaki geçiş için gerekli protokol sunuldu. $N \otimes N$ durumlar arasındaki geçiş için $2 \otimes 2$ için sunulan yöntem kullanıldığında geçiş için $(N-1)$ ölçüm yapılır. Öte yandan $4 \otimes 4$ durumlar için sunulan yöntem kullanıldığında geçiş için gerekli ölçüm sayısı $(N-3)$ olmaktadır.

Daha sonra üç kubit saf durumun manipülasyonu ve yoğunlaştırılması incelendi. Üç kubit saf durum için genel bilgi verildikten sonra GHZ yoğunlaştırılması incelendi. Saf W durumuyla yapılamayan birçok kuantum bilgi işlem süreci asimetrik W durumu ve GHZ durumuyla yapılabilmektedir. GHZ durumunun elde edilmesi için bir yöntem önerildi ve bu yöntem kullanılarak GHZ durum elde etme olasılığı ve yapılması gereken ölçümler üç kubit sisteminin değişmezleri cinsinden bulundu. Dolayısıyla burada sunulan GHZ manipülasyonu önemli olmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **Bennett, C.H.**, **Brassard, G.**, **Crépeau, C.**, **Jozsa, R.**, **Peres, A. ve Wotters, W.K.**, 1993. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, *Phys. Rev. Lett.*, **70(13)**.

[2] **Bennett, C.H.**, **Brassard, G.**, **Crépeau, C.**, **Jozsa, R.**, **Peres, A. ve Wotters, W.K.**, 1992. Communication via one-and two-particle oprators on Einstein-Podolsky-Rosen states, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2881.

[3] **Li, W.L.**, **Li, C.F. ve Guo, G.C.**, 2000. Probabilistic teleportation and entanglement matching, *Phys. Rev. A*, **61**, 034301.

[4] **Agrawal, P. ve Pati, A.**, 2002. Probabilistic quantum teleportation, *Phys. Lett. A*, **305**, 12–17.

[5] **Hao, J.C.**, **Li, C.F. ve Guo, G.C.**, 2000. Probabilistic dense coding and teleportation, *Phys. Lett. A*, **278**, 113–117.

[6] **Karlsson, A. ve Bourennane, M.**, 1998. Quantum teleportation using three-particle entanglement, *Phys. Rev. A*, **58(6)**.

[7] **Dür, W.**, **Vidal, G. ve Cirac, J.I.**, 2000. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, *Phys. Rev. A*, **62**, 062314.

[8] **Joo, J.**, **Park, Y.J.**, **Oh, S. ve Kim, J.**, 2003. Quantum teleportation via a W state, *New J. Phys.*, **5**, 136.1–136.9.

[9] **Agrawal, P. ve Pati, A.**, 2006. Perfect teleportation and superdense coding with W states, *Phys. Rev. A*, **74**, 062320.

[10] **Bhatia, R.**, 1997. Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York.

[11] **Nielsen, M.A. ve Chuang, I.L.**, 2000. Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, New York.

[12] **Nielsen, M.A.**, 1999. Conditions for a Class of Entanglement Transformations, *Phys. Rev. Lett.*, **83(2)**.

[13] **Acin, A.**, **Andrianov, A.**, **Jané, E. ve Tarrach, R.**, 2001. Three-qubit pure-state canonical forms, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**, 6725–6739.

[14] **Coffman, V.**, **Kundu, J. ve Wotters, W.K.**, 2000. Distributed entanglement, *Phys. Rev. A*, **61**, 052306.

[15] **Yıldız, A.**, 2010. Optimal distillation of three-qubit W states, *Phys. Rev. A*, **82**, 012317.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Gökhan TORUN

Doğum Yeri ve Tarihi : Tunceli, 17/06/1984

E-Posta : gokhantorun62@gmail.com

Lisans : İstanbul Teknik Üniversitesi, 2010

Y. Lisans : İstanbul Teknik Üniversitesi, 2013