HEMEN HEMEN ALFA KENMOTSU
PSEUDO RIEMANN YAPILAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bilal IŞIKLI

Danışman
Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN ALFA KENMOTSU PSEUDO RIEMANN YAPILAR ÜZERİNE

Bilal IŞIKLI

Danışman
Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN ALFA KENMOTSU
PSEUDO RIEMANN YAPILAR ÜZERİNE

Bilal IŞIKLI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusu hakkında genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılar üzerinde yarı simetrik, lokal simetrik, M-projektif, konsirküler, konharmonik ve konformal eğrilik tensör şartları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılar belli bir deformasyon ve null dağılımı yardımıyla araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2021, v + 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kenmotsu manifoldu, Pseudo Riemann metrik, Hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu, Pseudo Riemann eğrilik tensörü, Değme dağılımı, (κ,μ)-uzay.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON ALMOST ALPHA KENMOTSU PSEUDO
RIEMANNIAN STRUCTURES

Bilal IŞIKLI
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Hakan ÖZTÜRK

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, a general literature information about the topic of thesis is given.. In the second chapter, the necessary basic concepts and definitions are presented. In the third chapter, semi symmetric, local symmetric, M-projective, concircular, conharmonic and conformal curvature tensor conditions are studied on alpha Kenmotsu pseudo Riemann structures. In the fourth chapter, by the help of a certain deformation and null distribution almost alpha Kenmotsu pseudo Riemann structures are investigated and some results are obtained.

2021, v + 44 pages

Keywords: Kenmotsu manifold, Pseudo Riemann metric, Almost alpha Kenmotsu pseudo Riemannian manifold, Pseudo Riemannian curvature tensor, Contact distribution, (κ,μ)-space.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, çalışmaların yönlendirilmesi, hesaplanması, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Bilal IŞIKLI

Afyonkarahisar 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
R	Riemann eğrilik tensör alanı
D	Değme dağılımı
S	Ricci eğrilik tensör alanı
Q	Ricci operatörü
N	Nijenhuis tensör alanı
∇	Levi Civita konneksiyonu
$\chi(M)$	M üzerindeki C^{∞} vektör alanları uzayı
$\Gamma(TM)$	M üzerindeki tanjant demeti
div	Diverjans operatörü
$TM^{\perp}$	M üzerindeki tanjant demetinin ortogonal tümleyeni
K	Konsirküler eğrilik tensör alanı
J	Hemen hemen kompleks yapı
H	Konharmonik eğrilik tensör alanı
M^{*}	M-projektif eğrilik tensör alanı
C	Konformal eğrilik tensör alanı
B	D-konformal eğrilik tensör alanı
r	Skalar eğrilik

1 GİRİŞ

Değme metrik ve Sasakian yapılar üzerinde tanımlanan manifoldlar birçok yazarın ilgisini çekmiştir. Özellikle, Blair'in son monografisi; bu konuda yapılan çoğu çalışmayı ve bulunan sonuçları en geniş anlamda detaylı olarak incelemiştir (Blair 2002). Ancak klasik anlamda yapılan araştırmalar Riemann metriğine sahip değme metrik manifoldlarla ilgiliydi. Değme metrik yapılar üzerinde pseudo Riemann metriği ile uyumlu ilk araştırma Takahashi tarafından yapılmıştır (Takahashi 1969). Bu çalışmayı takiben, pseudo Riemann metriği ile birlikte verilen değme manifoldlar ve Sasakian pseudo Riemann manifoldlar bazı yazarlar tarafından da çalışılmıştır (Duggal 1990, Calvaruso ve Perrone 2010, 2011). Calvaruso ve Perrone bu konuda en sistematik çalışmayı ortaya koymuşlardır. Riemann metriği ile pseudo Riemann metriği arasındaki benzerlikler ve farklılıklar vurgulanmıştır. Sabit kesit eğrilikli değme pseudo metrik manifoldlar, 3-boyutlu lokal simetrik değme pseudo metrik yapılar ve 3-boyutlu homojen değme Lorentzian metrik yapılar sınıflandırılmıştır (Calvaruso ve Perrone 2010). Bilhassa yarı Riemann uzayla ilgili çalışan tüm yazarların temel kaynağının O'neil (1983) olduğunu unutmayalım.

Diğer yandan, hemen hemen değme metrik manifoldların bir analojisi olarak kabul edilebilecek Kenmotsu manifoldları ilk defa Kenmotsu tarafından tanıtılmıştır (Kenmotsu 1972). Çoğu yazar bu yapıyı kullanarak farklı geometrik şartlar altında çalışmalar yapmışlardır (Kim ve Pak 2005, Jun vd. 2005, De vd. 2009, Dileo ve Pastore 2007, 2009, Öztürk 2010, Naik vd. 2020). Örnek olarak, Jun vd. tarafından yapılan çalışmada Ricci yarı simetrik ve konformal yarı simetrik Kenmotsu yapılar incelenmiştir (Jun vd. 2005). Bundan başka, ϕ-rekürent Kenmotsu manifoldlar De vd. tarafından ele alınmıştır (De vd. 2009).

Bir Kenmotsu manifold her zaman bir hemen hemen Kenmotsu manifoldudur, ancak bu önermenin tersi doğru olmak zorunda değildir. Dileo ve Pastore hemen hemen Kenmotsu yapılar üzerinde lokal simetri, eta paralellik ve null dağılımına odaklandılar (Dileo ve Pastore 2007, 2009). Ayrıca, bazı yazarlar klasik anlamda hemen hemen Kenmotsu manifoldları genelleştirerek adına hemen hemen alfa Kenmotsu denilen manifoldlar üzerinde çalıştılar (Öztürk 2009, 2014, 2016, Dileo ve Pastore 2011).

Şu ana kadar hemen hemen Kenmotsu pseudo metrik manifoldlar üzerinde çok fazla sistematik çalışmalar ortaya konulmasa da özellikle Wang ve Liu, Venkatesha vd., Naik vd., Öztürk vd. tarafından bazı çalışmalar literatüre kazandırılmıştır (Wang ve Liu 2016, Venkatesha vd. 2019, Naik vd. 2019, Öztürk 2020).

Bu yüksek lisans tez çalışması, hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldlar ve normal hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldlar olarak tanımlanan alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldlara adanmış, belli tensör şartları ve özellikler kullanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

İkinci bölümde, araştırma konumuz ile ilgili temel literatür bilgileri sunulmuştur. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, pseudo Riemann ve Riemann manifoldlarla ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısım, hemen hemen alfa Kenmotsu yapılardaki temel kavramlara adanmıştır. Üçüncü kısımda hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılarla ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılar üzerinde bazı şartlar incelenmiştir. Özellikle, yarı simetrik, lokal simetrik şartlar; M-projektif, projektif, konharmonik ve konformal eğrilik tensör şartları kullanılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılar bir deformasyon yardımıyla araştırılmıştır. Ayrıca, null dağılımı olarak adlandırılan (κ, μ)-uzaylarıyla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2 TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan tanımlar ve kavramlar sunulmuştur.

2.1 Pseudo Riemann Manifoldları

Bu kısım pseudo Riemann manifoldları üzerindeki temel kavramlara adanmıştır.

Tanım 2.1.1 $g : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ile verilen U reel bir vektör uzayı, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall v, z, w \in U$ olmak üzere,

(a) $g(v, z) = g(z, v)$,

(b) $g(\lambda_1 v + \lambda_2 z, w) = \lambda_1 g(v, w) + \lambda_2 g(z, w)$,

$g(v, \lambda_1 z + \lambda_2 w) = \lambda_1 g(v, z) + \lambda_2 g(v, w)$,

eşitlikleri geçerli ise o zaman g dönüşümüne U üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.2 U, reel bir vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olmak üzere,

(a) $\forall u \in U$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) > 0$ ise g pozitif tanımlıdır,

(b) $\forall u \in U$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) < 0$ ise g negatif tanımlıdır,

(c) $\forall u \in U$ için $g(u, u) \geq 0$ ise g pozitif yarı tanımlıdır,

(d) $\forall u \in U$ ve $u \neq 0$ için $g(u, u) \leq 0$ ise g negatif yarı tanımlıdır

biçiminde ifade edilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.3 U, reel bir vektör uzayı ve g de U üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu taktirde, $0 \neq \xi \in U$ olmak üzere, $\forall u \in U$ için $g(\xi, u) = 0$ eşitliği geçerli ise g ye U üzerinde dejeneredir denir. Aksi taktirde, g ye dejenere değildir adı verilir. Yani, $\forall u \in U$ için $g(u, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ şartının sağlanması için gerek ve yeter koşul g nin dejenere olmamasıdır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.4 U, reel bir vektör uzayı, g de U üzerinde simetrik bilineer form olmak üzere,

$$g_{|_w} : W \times W \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.1}$$

negatif tanımlı olacak şekilde maksimum boyutlu W altuzayının boyutuna g nin indeksi denir ve v ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5 U, reel bir vektör uzayı ve g de U üzerinde simetrik bilineer form olmak üzere,

(a) $i \neq j$ için $g(\gamma_i, \gamma_j) = 0$,

(b) $1 \leq i \leq \varsigma$ için $g(\gamma_i, \gamma_i) = 1$,

(c) $\varsigma + 1 \leq i \leq \varsigma + v$ için $g(\gamma_i, \gamma_i) = -1$,

(d) $\varsigma + v + 1 \leq j \leq n = \varsigma + v + \mu$ için $g(\gamma_i, \gamma_i) = 0$,

özelliklerini gerçekleyen U nun bir $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ tabanı vardır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.6 Bir U reel vektör uzayı üzerinde dejenere olmayan simetrik bilineer form mevcutsa bu forma bir pseudo Öklid metriği ya da skalar çarpım denir. O halde g, U üzerinde bir psödo Öklid metriği olmak üzere, (V, g) ikilisine de psödo Öklid uzayı adı verilir. Aşikar olarak, eğer g pozitif tanımlı ise g bir Öklid metriği olur, (V, g) ikilisine de Öklid uzayı denir. Ayrıca, eğer g nin indeksi $v = 1$ ise g ye Minkowski metriği ve (V, g) ikilisine de Minkowski (Lorentz) uzayı denir. Bunun yanısıra, eğer g dejenere ise U uzayına g ye göre dejenere (lightlike) vektör uzayı denir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.7 C^∞ sınıfından bir manifold M ve $\forall p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsunlar. O halde,

$$g_{|_p} : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

ile verilen simetrik, bilineer, dejenere olmayan ve $(0, 2)$ tipinden tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör alanı denir. M manifoldu bir g metrik tensör alanı ile donatılmış ise M ye pseudo Riemann (yarı Riemann) manifoldu adı verilir. Bir M pseudo Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensör alanının indeksine pseudo Riemann manifoldunun indeksi denir, indeks v ile gösterilir. Ayrıca, aşikar olarak $0 \leq v \leq boyM$ dir. Keyfi olarak, $v = 0$ alınırsa $\forall p \in M$ için metrik tensör T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olacağından M bir Riemann manifoldu olur. Eğer $v = 1$ ve $boyM = n \geq 2$ ise M bir Lorentz manifoldudur (O'neill 1983).

Tanım 2.1.8 C^∞ sınıfından n-boyutlu bir manifold M olmak üzere, $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, $\phi(t, p) = \phi_t(p)$ ile verilen ϕ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ϕ ye M nin dif.bilir bir 1-parametreli grubu adı verilir:

(a) $\forall t \in \mathbb{R}$ için, $\phi_t : p \longrightarrow \phi_t(p)$ diffeomorfizm,

(b) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $p \in M$ için, $\phi_{t+s}(p) = \phi_t(\phi_s(p))$ (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.9 M, C^∞ sınıfından n-boyutlu bir manifold ve Y de onun üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda Y ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup ϕ_t ve L bir tensör alanı olmak üzere, $\forall p \in M$ için

$$(\mathcal{L}_X L)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[L_p - (\phi_t L)_p \right]$$

ile verilen $\mathcal{L}_Y L$ dönüşümüne Y yönünde L nin Lie türevi adı verilir. M üzerindeki Lie türevi için aşağıdaki önermeler sağlanır:

(a) Y ve Z keyfi tensör alanları olmak üzere, $\mathcal{L}_X(Y \otimes Z) = (\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)$,

(b) f, K cismi üzerinde bir fonksiyon olmak üzere, $\mathcal{L}_X f = X(f)$,

(c) Y keyfi bir tensör alanı olmak üzere, $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$,

(d) $\sigma, (0,2)$-tipli bir tensör alanı için $(\mathcal{L}_X \sigma)(Y, Z) = X(\sigma(Y, Z)) - \sigma([X, Y], Z) - \sigma(Y, [X, Z])$ (Blair 2002).

Tanım 2.1.10 M, C^∞ sınıfından n-boyutlu bir manifold M olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\xrightarrow{\text{2-lineer}} \Gamma(TM) \\ (X, Y) \qquad &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

ile verilen ∇ dönüşümü, $\forall\ f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$, $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için

(a) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$, $\nabla_{fX+gY} Z = f\ \nabla_X Z + g\ \nabla_Y Z$

(b) $\nabla_X(f\ Y) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ dönüşümüne M üzerinde bir konneksiyon denir. Burada $\Gamma(TM)$, M üzerindeki tanjant demetidir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.11 M,bir pseudo Riemann (Riemann) manifoldu olsun. ∇ dönüşümü M üzerinde bir konneksiyon olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

(b) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

koşulları sağlanıyorsa ∇ ye M nin Levi Civita konneksiyonu adı verilir ve ∇ yardımıyla adına Koszul formülü de denilen bir denklemle aşağıdaki gibi tek türlü ifade edilir:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \tag{2.2}$$

(O'neill 1983).

Tanım 2.1.12 M, bir pseudo Riemann (Riemann) manifoldu olmak üzere,

$$\begin{aligned} R &: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM) \\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.3}$$

ile verilen $(1,3)$ tipli tensör alanı R ye M nin pseudo Riemann (Riemann) eğrilik tensörü adı verilir ve $\forall X, Y, Z, V, W \in \Gamma(TM)$ için

(a) $g(R(X,Y)Z,V) = -g(R(Y,X)Z,V)$, $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$,

(b) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$, $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$,

önermeleri sağlanır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.13 M, bir sabit k eğriliğine sahip olan manifold olmak üzere,

$$R(X,Y)W = k\left[g(Y,W)X - g(X,W)Y\right]$$

ile tanımlanır. Burada X, Y ve W, M üzerindeki keyfi vektör alanlarıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.14 M, bir pseudo Riemann (Riemann) manifoldu olsun. Π, T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı ve $U, V \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı $g(U,U)g(V,V) - g(U,V)^2 \neq 0$ için

$$K(U,V) = \frac{g(R(U,V)V,U)}{g(U,U)g(V,V) - g(U,V)^2}$$

değerine Π altuzayının kesit eğriliği adı verilir ve $K(\Pi)$ ile sembolize edilir. Burada, eğer $g_{|\pi}$ metriği pozitif tanımlı ise paralel kenarın alanı pozitif değer alırken, eğer $g_{|\pi}$ metriği negatif tanımlı ise o zaman paralel kenarın alanı negatif değer alır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.15 M, bir pseudo Riemann manifoldu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} S &: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\longrightarrow S(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i, X_p)Y_p, e_i) \end{aligned} \tag{2.4}$$

ile verilen $(0,2)$ tipli S tensör alanına M üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir ve $S(X_p, Y_p)$ değerine de Ricci eğriliği adı verilir. Burada $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal bir baz ve $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ dır. Bundan başka,

$$S(X_p, Y_p) = g(QX_p, Y_p) \tag{2.5}$$

ile verilen $(0,2)$ tipli Q ya Ricci operatörü denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.16 M, bir pseudo Riemann manifoldu olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i S(e_i, e_i) \tag{2.6}$$

reel sayısına M nin skalar eğriliği adı verilir. Burada $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, M üzerinde lokal bir bazdır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.17 M, bir pseudo Riemann (Riemann) manifoldu olsun. M nin Riemann eğrilik tensör alanı R olmak üzere, M nin her noktasında $R = 0$ (R özdeş olarak sıfır) oluyorsa M ye flattir denir. Eğer $\nabla R = 0$ ise M lokal simetrik uzay olarak adlandırılır Buna ilaveten, M nin flat olabilmesi için gerek ve yeter koşul M nin kesit eğriliğinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (O'neill 1983).

2.2 Hemen Hemen Alfa Kenmotsu Yapılar

Bu kısımda, öncelikle hemen hemen değme yapılar üzerinde temel tanımlar verilmiş ve hemen hemen alfa Kenmotsu manifoldlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.2.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde ϕ, ξ ve η, sırasıyla, $(1,1)$ tipli bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olmak üzere, keyfi Y vektör alanı için

$$\eta(\xi) = 1,\ \phi^2 Y = -Y + \eta(Y)\xi \tag{2.7}$$

eşitlikleri geçerli ise o zaman (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı adı verilir. Bu yapı ile beraber M ye de bir hemen hemen değme manifold denir ve (M, ϕ, ξ, η) ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold ve (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı olsun. g, M üzerinde bir Riemann metriği olmak üzere,

$$\eta(X) = g(X, \xi),\ g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.8}$$

denklemleri sağlanıyorsa g ye M üzerinde hemen hemen değme metrik ve (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapı denir. O halde, (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifold olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold ve (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı olsun. Bu durumda, $(1,1)$ tipli tensör alanı ϕ ters simetriktir, başka bir ifadeyle,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \tag{2.9}$$

dir (Blair 2002).

Tanım 2.2.3 M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold ve (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı olsun. Bu taktirde, hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu olarak adlandırılan Φ dönüşümü

$$\Phi(X, Y) = g(\phi X, Y) \tag{2.10}$$

ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4 M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. Keyfi vektör alanları için ω, sırasıyla, 1-form ve 2-form olmak üzere,

$$2d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega[X, Y] \tag{2.11}$$

ve

$$\begin{aligned} 3d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, Y)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad -\omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y) \end{aligned} \tag{2.12}$$

eşitlikleriyle tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman

(a) $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z)$,

(b) $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$,

(c) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y)$,

(d) $2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$, $3d\Phi(X, Y, Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$

Burada ∇, M nin Levi Civita konneksiyonu ve $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, sırasıyla X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı sembolize etmektedir (Chiena ve Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.5 M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olmak üzere, M nin her s noktası için $J^2 = -I$ ile verilen T_sM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcutsa J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bu yapı ile birlikte verilen M ye bir hemen hemen kompleks manifold olarak denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.6 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olmak üzere, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde keyfi bir vektör alanı $(Y, g\dfrac{d}{ds})$ biçiminde tanımlanır. Burada Y, M ye teğet keyfi bir vektör alanı; g, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir dif.bilir fonksiyon ve s de $\mathbb{R}$ nin bir koordinatıdır (Blair 2002).

Tanım 2.2.7 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O halde, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde

$$J(Y, g\frac{d}{ds}) = \left(\phi Y - g.\xi, \eta(Y)\frac{d}{ds}\right)$$

ile verilen bir hemen hemen kompleks yapı vardır ve $J^2 = -I$ dır (Blair 2002).

Tanım 2.2.8 M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde $(1,1)$ tipli bir tensör alanı E olmak üzere,

$$N_E(Y,Z) = E^2[Y,Z] + [EY, EZ] - E[EY, Z] - E[Y, EZ] \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlı N_E tensör alanına E ye göre Nijenhuis tensör alanı denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9 Bir M, n-boyutlu C^∞ manifoldu bir J hemen hemen kompleks yapısı ile birlikte verilsin. Bu durumda,

$$N_J(Y,Z) = -[Y,Z] + [JY, JZ] - J[JY, Z] - J[Y, JZ] \tag{2.14}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10 M, hemen hemen kompleks yapısı J ile birlikte verilen $(2n)$-boyutlu bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer $N_J = 0$ ise o zaman J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11 M, $(2n)$-boyutlu bir C^{∞} manifold olmak üzere, $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise o zaman hemen hemen değme yapısı normal olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.3 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M üzerindeki hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_{\phi} + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

önermesinin sağlamasıdır. Burada N_{ϕ}, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis tensör alanını göstermektedir (Blair 2002).

Tanım 2.2.12 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olmak üzere,

$$d\Phi = 0 \text{ ve } d\eta = 0$$

eşitlikleri geçerli ise M ye hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer $N_{\phi} = 0$ (M normal) ise M bir kosimplektik manifold olarak adlandırılır (Janssens ve Vanhecke 1981).

Tanım 2.2.13 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ve keyfi vektör alanları için

$$d\eta = 0 \text{ ve } d\Phi = 2\alpha\,(\eta \wedge \Phi) \tag{2.15}$$

denklemleri geçerli ise M ye bir hemen hemen alfa Kenmotsu manifoldu denir (Kim ve Pak 2005).

Teorem 2.2.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M bir Kenmotsu manifoldudur ancak ve ancak keyfi vektör alanları için

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

dır (Kenmotsu 1972).

Önerme 2.2.4 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu manifoldu olmak üzere,

$$hY = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_{\xi}\phi)Y \tag{2.16}$$

$$\nabla_Y \xi = -\alpha\phi^2 Y - \phi h Y \tag{2.17}$$

$$\nabla_\xi \xi = 0 \text{ ve } \nabla_\xi \phi = 0 \tag{2.18}$$

$$(\nabla_Y \eta)Z = \alpha\left[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right] + g(\phi Z, hY) \tag{2.19}$$

$$(\nabla_\xi h)\circ\phi + \phi\circ(\nabla_\xi h) = 0 \tag{2.20}$$

eşitlikleri mevcuttur (Öztürk 2009).

Önerme 2.2.5 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu manifoldu olmak üzere,

$$\begin{aligned} R(Y,Z)\xi = \alpha^2\left[\eta(Y)Z - \eta(Z)Y\right] + \alpha\left[-\eta(Y)\phi hZ + \eta(Z)\phi hY\right] \\ +(\nabla_Z \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)Z \end{aligned} \tag{2.21}$$

dır (Öztürk 2009).

Önerme 2.2.6 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu manifoldu olmak üzere,

$$\begin{aligned} R(Y,Z)\xi &= (\nabla_Z \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)Z + \alpha\left[-\eta(Y)\phi hZ + \eta(Z)\phi hY\right] \\ &\quad - \left[\alpha^2 + \nabla_\xi \alpha\right]\left[-\eta(Y)Z + \eta(Z)Y\right] \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$R(Y,\xi)\xi = \left[\alpha^2 + \nabla_\xi \alpha\right]\phi^2 Y + 2\alpha\phi hY - h^2 Y + \phi(\nabla_\xi h)Y \tag{2.23}$$

$$R(Y,\xi)\xi - \phi R(\phi Y,\xi)\xi = 2\left[(\alpha^2 + \nabla_\xi \alpha)\phi^2 Y - h^2 Y\right] \tag{2.24}$$

$$(\nabla_\xi h)Y = -\phi R(Y,\xi)\xi - \left[\alpha^2 + \nabla_\xi \alpha\right]\phi Y - 2\alpha hY - \phi h^2 Y \tag{2.25}$$

$$S(Y,\xi) = -2n\left[\alpha^2 + \nabla_\xi \alpha\right]\eta(Y) - (\mathrm{div}(\phi h))Y \tag{2.26}$$

$$S(\xi,\xi) = -\left[2n(\alpha^2 + \nabla_\xi \alpha) + \dot{I}z(h^2)\right] \tag{2.27}$$

eğrilik özellikleri geçerlidir. Burada alfa, M üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile tanımlı dif.bilir bir fonksiyon ve $\xi(\alpha) = \nabla_\xi \alpha$ alfa dif.bilir fonksiyonunun ξ vektör alanı yönündeki ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevidir (Öztürk 2018).

Tanım 2.2.14 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu manifoldu olsun. $\forall p \in M$ için

$$\mathcal{D}_p = Ker\left(\eta_p\right) = \{Y \in T_pM : \eta(Y_p) = 0\} \tag{2.28}$$

ile verilen $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ dağılımına M nin bir $(2n)$-boyutlu dağılımı denir ve değme dağılımı olarak adlandırılır (Blair 2002).

Sonuç 2.2.1 M bir hemen hemen alfa Kenmotsu manifold olduğundan $d\eta = 0$ dır. Bu durumda, $\mathcal{D}$ dağılımı integrallenebilirdir. Bundan dolayı $\mathcal{D}$ dağılımına $(2n)$-boyutlu integral altmanifoldları karşılık gelir (Kim ve Pak 2005).

2.3 Hemen Hemen Alfa Kenmotsu Pseudo Riemann Yapılar

Bu kısımda, hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılar için temel kavramlar sunulmuştur.

Tanım 2.3.1 M, $(2n+1)$-boyutlu manifoldu (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birlikte verilsin. g, M üzerinde bir pseudo Riemann metrik tensörü olmak üzere,

$$\varepsilon g(Y, \xi) = \eta(Y) \tag{2.29}$$

$$g(\phi Y, \phi Z) = g(Y, Z) - \varepsilon \eta(Y)\eta(Z) \tag{2.30}$$

denklemleri sağlanıyorsa g ye M üzerinde hemen hemen değme pseudo Riemann metriği denir. Böylece (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen pseudo Riemann değme metrik manifold olarak adlandırılır. O halde, ξ karakteristik vektör alanı ya spacelike $(g(\xi, \xi) = +1)$ ya da timelike $(g(\xi, \xi) = -1)$ dır. Fakat asla lightlike $(g(\xi, \xi) = 0)$ olamaz. Burada $g(\xi, \xi) = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ ve $g(\phi Y, Z) = -g(Y, \phi Z)$ dır (Wang ve Liu 2016).

Tanım 2.3.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen pseudo Riemann değme metrik manifold olmak üzere,

$$d\eta = 0 \text{ ve } d\Phi = 2\alpha\,(\eta \wedge \Phi) \tag{2.31}$$

şartları sağlanıyorsa M ye hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold denir. Burada alfa reel sabit olarak alınmıştır (Esendemir 2019).

Önerme 2.3.1 (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)$-boyutlu bir pseudo Riemann manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= -3d\Phi(X, Y, Z) + 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) \\ &\quad +2\varepsilon d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \\ &\quad +g(N^{(0)}(Y, Z), \phi X) + \varepsilon N^{(1)}(Y, Z)\eta(X) \end{aligned} \tag{2.32}$$

dir. Ayrıca, $N^{(0)}$ ve $N^{(1)}$ tensör alanları,

$$N^{(0)}(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{2.33}$$

$$N^{(1)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\phi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\phi Y}\eta)X \tag{2.34}$$

şeklinde tanımlıdır (Calvaruso ve Perrone 2010).

Önerme 2.3.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olmak üzere,

$$hY = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\phi)Y \tag{2.35}$$

$$\nabla_Y\xi = -\alpha\phi^2 Y - \phi hY \tag{2.36}$$

$$\nabla_\xi\xi = 0 \text{ ve } \nabla_\xi\phi = 0 \tag{2.37}$$

$$(\nabla_Y\eta)Z = \alpha\left[\varepsilon g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right] + \varepsilon g(\phi Z, hY) \tag{2.38}$$

eşitlikleri sağlanır (Esendemir 2019).

Önerme 2.3.3 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\phi)Y,Z) = -2g\alpha(\varepsilon g(X,\phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X, Z) \\ +g(N^{(0)}(Y,Z),\phi X) \end{aligned} \tag{2.39}$$

dır (Esendemir 2019).

Önerme 2.3.4 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} R(Y,Z)\xi &= \alpha^2\left[\eta(Y)Z - \eta(Z)Y\right] + \alpha\left[-\eta(Y)\phi hZ + \eta(Z)\phi hY\right] \\ &\quad +(\nabla_Z\phi h)Y - (\nabla_Y\phi h)Z \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$R(Y,\xi)\xi = \alpha^2\phi^2 Y + 2\alpha\phi hY - h^2Y + \phi(\nabla_\xi h)Y \tag{2.41}$$

$$(\nabla_\xi h)Y = -\phi R(Y,\xi)\xi - \alpha^2\phi Y - 2\alpha hY - \phi h^2 Y \tag{2.42}$$

$$R(Y,\xi)\xi - \phi R(\phi Y,\xi)\xi = 2\left[\alpha^2\phi^2 Y - h^2 Y\right] \tag{2.43}$$

$$S(Y,\xi) = -2n\alpha^2\eta(Y) - (\mathrm{div}(\phi h))Y \tag{2.44}$$

$$S(\xi,\xi) = -\left[2n\alpha^2 + \dot{I}z(h^2)\right] \tag{2.45}$$

dir. Burada alfa reel sabit olarak alınmıştır (Esendemir 2019).

Teorem 2.3.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olmak üzere, M nin bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X\phi)Y = -\alpha\left[\varepsilon g(X,\phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X\right] \tag{2.46}$$

önermesinin sağlanmasıdır (Esendemir 2019).

Önerme 2.3.5 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu lokal simetrik ise o zaman $\nabla_\xi h = 0$ eşitliği sağlanır (Esendemir 2019).

Teorem 2.3.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu lokal simetrik ise o zaman aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

(a) M bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldudur (b) $h = 0$ dır.

Bu iki önermeden en az biri sağlanıyorsa M nin kesit eğriliği $K = -\alpha^2\varepsilon$ dır (Esendemir 2019).

Teorem 2.3.3 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu sabit K kesit eğriliği ile verilsin. O halde, M manifoldu $K = -\alpha^2\varepsilon$ kesit eğriliğine sahip bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldudur (Esendemir 2019).

Örnek 2.3.1 $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3_1$ pseudo Riemann manifoldu

$$\widetilde{M} = \left\{(v,z,w) \in \mathbb{R}^3_1 : \ w \neq 0\right\}.$$

ile verilsin. Burada $\mathbb{R}^3_1$ uzayının standart koordinat sistemi (v,z,w) olarak seçilmiştir. $\widetilde{M}$ nin bir lokal pseudo tabanı

$$E_1 = e^{2w}\frac{\partial}{\partial v},\ E_2 = e^{2w}\frac{\partial}{\partial z},\ E_3 = \frac{\partial}{\partial w}$$

olmak üzere, $\widetilde{g}$ pseudo Riemann metriği

$$\widetilde{g} = e^{-4w}\left(\varepsilon_1 dv^2 + \varepsilon_2 dz^2\right) + \varepsilon dw^2, \quad \eta = dw$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\varepsilon_i = g(E_i, E_i)$, $i = 1, 2, 3$ dır. Ayrıca,

$$\phi(\xi) = 0,\ \phi(E_1) = E_2,\ \phi(E_2) = -E_1$$

seçilirse

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)E_3,\ \eta(X) = \varepsilon g(E_3, X),\ \eta(E_3) = g(E_3, E_3) = \varepsilon$$

ve

$$\widetilde{g}(\phi X, \phi Y) = \widetilde{g}(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

olduğu açıktır.O halde, M üzerinde bir hemen hemen değme pseudo Riemann yapısı kurulmuş olur. Bundan başka, $d\eta = 0$ olduğu aşikar ve $\Phi(E_1, E_2) = -\varepsilon_i$, bunun dışındaki tüm Φ_{ij} ler $i \leq m$ için $\Phi_{im} = 0$ dır. Böylece

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = -\varepsilon_i e^{-4w}$$

dır. Buradan dış türev tanımı yardımıyla

$$d\Phi = 4\varepsilon_i e^{-4w}(dv \wedge dz \wedge dw)$$

bulunur. $\eta = dw$ ve yukarıdaki denklem kullanılırsa

$$d\Phi = 2(-2\varepsilon_i)\,(\eta \wedge \Phi)$$

olup

$$\alpha = -2\varepsilon_i$$

reel sabiti ile tanımlıdır. Buna ilaveten, $N_\phi = 0$ olduğundan $\widetilde{M}$ bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldudur.

3 ALFA KENMOTSU PSEUDO RIEMANN MANİFOLDLAR

Bu bölümde, bazı yarı simetrik ve lokal simetrik şartlar; M-projektif, konsirküler, konharmonik ve konformal eğrilik tensörleri yardımıyla alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılar çalışılmış, bazı sonuçlar elde edilmiştir. Tüm yapılan hesaplamalarda alfa sabit reel sayı olarak seçilmiştir.

Önerme 3.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olmak üzere,

$$\nabla_Y \xi = \alpha Y - \alpha \eta(Y)\xi \tag{3.1}$$

$$(\nabla_Y \eta)Z = \alpha \left[\varepsilon g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right] \tag{3.2}$$

$$R(Y,Z)\xi = \alpha^2 \left[\eta(Y)Z - \eta(Z)Y\right] \tag{3.3}$$

$$R(Y,\xi)Z = -\alpha^2 \left[-\varepsilon g(Y,Z)\xi + \eta(Z)Y\right] \tag{3.4}$$

$$R(Y,\xi)\xi - \phi R(\phi Y,\xi)\xi = -2\alpha^2 Y + 2\alpha^2 \eta(Y)\xi \tag{3.5}$$

$$\eta(R(Y,Z)W) = -\varepsilon\alpha^2 \left[\eta(Y)g(Z,W) - \eta(Z)g(Y,W)\right] \tag{3.6}$$

$$S(Y,\xi) = -2n\alpha^2 \eta(Y) \tag{3.7}$$

$$S(\phi Y,\phi Z) = \varepsilon\alpha^2 S(Y,Z) - 2n\alpha^2 \left[g(Y,Z) - \varepsilon\eta(Y)\eta(Z)\right] \tag{3.8}$$

önermeleri sağlanır. Burada α sabit reel sayı ve $\varepsilon = g(\xi,\xi)$ olarak alınmıştır (Öztürk 2020).

Önerme 3.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olmak üzere, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$\operatorname{div} \eta = -2n\alpha\varepsilon \tag{3.9}$$

$$\operatorname{div} \xi = 2\alpha n \tag{3.10}$$

$$K(\xi,Y) = \alpha^2 \varepsilon. \tag{3.11}$$

Burada yapılan hesaplamalarda $\{e_1,\cdots,e_n,\phi e_1,\cdots,\phi e_n,\xi\}$ cümlesi M üzerinde bir lokal pseudo ortonormal tabandır. Bu taban lokal pseudo ϕ-tabanı olarak da isimlendirilir. Bundan başka, $g(\xi,\xi) = \varepsilon$ ve $\varepsilon^2 = 1$ dir.

İspat: Öncelikle diverjans operatörü tanımını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\eta &= -\sum_{i=1}^{n}\left[(\nabla_{e_i}\eta)e_i + (\nabla_{\phi e_i}\eta)\phi e_i + (\nabla_{\xi}\eta)\xi\right] \\ &= -\dot{I}z(\nabla\eta) \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\xi &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left[g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) + g(\nabla_{\phi e_i}\xi, \phi e_i)\right] \\ &= \alpha\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left[g(e_i, e_i) + g(\phi e_i, \phi e_i)\right]\right] \\ &= \dot{I}z(\nabla\xi) = 2\alpha n \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$-\varepsilon\operatorname{div}\xi = \operatorname{div}\eta$$

olduğundan (3.9) ve (3.10) eşitliklerinin ispatı açıktır. Diğer yandan, (2.41) eşitliği ve kesit eğriliğinin tanımıyla

$$\begin{aligned} K(\xi, Y) &= \frac{R(\xi, Y, \xi, Y)}{g(\xi,\xi)g(Y,Y) - g(\xi,Y)g(\xi,Y)} \\ &= -\frac{g(R(Y,\xi)\xi, Y)}{g(\xi,\xi)g(Y,Y) - g(\xi,Y)g(\xi,Y)} \\ &= -\frac{g(\alpha^2\phi^2 Y, Y)}{\varepsilon g(Y,Y) - [\eta(Y)]^2} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} K(\xi, Y) &= \frac{\alpha^2 g(\phi Y, \phi Y)}{\varepsilon g(Y,Y) - [\eta(Y)]^2} \\ &= \frac{\alpha^2(g(Y,Y) - \varepsilon\,[\eta(Y)]^2)}{\varepsilon g(Y,Y) - [\eta(Y)]^2} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$K(\xi, Y) = \frac{\alpha^2\varepsilon\left(\varepsilon g(Y,Y) - [\eta(Y)]^2\right)}{\varepsilon g(Y,Y) - [\eta(Y)]^2}$$

denklemi yardımıyla (3.11) eşitliğinin ispatı tamamlanır.

Hatırlatma 3.1 Üzerinde çalıştığımız M alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu normal yapıda olduğundan $h = 0$ dır. Yani, Önerme 2.3.4 de yer alan tüm önermeler $h = 0$ için sağlanır.

Tanım 3.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M nin S Ricci tensörü keyfi vektör alanları için

$$S(Y,Z) = \lambda_1 g(Y,Z) + \varepsilon\lambda_2\eta(Y)\eta(Z) \tag{3.12}$$

şartını sağlıyorsa M ye bir η-Einstein manifoldu adı verilir. Burada λ_1 ve λ_2, M üzerindeki fonksiyonlardır. Özel olarak, $\lambda_2 = 0$ seçilirse η-Einstein manifoldu Einstein manifolduna dönüşür.

Teorem 3.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M manifoldu η-Einstein manifoldu ise o zaman

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2n\alpha^2\varepsilon \tag{3.13}$$

$$r = \lambda_1(2n+1) + \lambda_2 \tag{3.14}$$

$$\lambda_1 = \frac{r}{2n} + \alpha^2\varepsilon \text{ ve } \lambda_2 = -\left[\frac{r}{2n} + (2n+1)\alpha^2\varepsilon\right] \tag{3.15}$$

dir. Burada $g(\xi,\xi) = \varepsilon$ ve r, M nin skalar eğriliğidir.

İspat: Hipotez gereğince (3.12) eşitliğini göz önüne alalım. (2.44) eşitliği yardımıyla (3.12) eşitliğinde Z yerine ξ vektör alanını alırsak,

$$S(Y,\xi) = -2n\alpha^2\eta(Y) = \lambda_1\varepsilon\eta(Y) + \varepsilon\lambda_2\eta(Y)\eta(\xi)$$

bulunur. Yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$-2n\alpha^2\eta(Y) = \eta(Y)\left[\lambda_1\varepsilon + \varepsilon\lambda_2\right]$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda_1+\lambda_2) &= -2n\alpha^2 \\ \varepsilon^2(\lambda_1+\lambda_2) &= -2n\alpha^2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklem (3.13) eşitliğinin ispatıdır. Burada $\varepsilon^2 = 1$ dir. Ayrıca, (3.12) eşitliğinde $E_j = \{e_1, \cdots, e_j, \phi e_1, \cdots, \phi e_j, \xi\}$ lokal pseudo ϕ-tabanı için $Y = Z = E_j$ seçilir ve j indeksi üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned} r &= \lambda_1\sum_{j=1}^{n} g(E_j,E_j) + \varepsilon\lambda_2\sum_{j=1}^{n}\eta(E_j)\eta(E_j) \\ r &= \lambda_1(2n+1) + \varepsilon^2\lambda_2 \end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Bu son denklemden (3.14) eşitliğinin ispatı kolayca görülür. Bunlara ilaveten, (3.13) ve (3.14) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa $\lambda_2 = r - \lambda_1(2n+1)$ için

$$-2n\lambda_1 + r = -2n\alpha^2\varepsilon$$

yazılır. Burada λ_1 fonksiyonu çekilirse istenen sonuç bulunur. Benzer olarak, $\dfrac{r-\lambda_2}{2n+1} = \lambda_1$ için

$$\begin{aligned} \frac{r-\lambda_2}{2n+1} + \lambda_2 &= -2n\alpha^2\varepsilon \\ r + 2n\lambda_2 &= -2n(2n+1)\alpha^2\varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan (3.15) eşitliklerinin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M Ricci yarı simetrik şartını sağlıyorsa o zaman $r = -2n(2n+1)\alpha^2\varepsilon$ skalar eğriliğine sahip bir Einstein manifoldudur.

İspat: M manifoldu Ricci yarı simetrik şartını sağlasın. Yani, keyfi vektör alanları için

$$R \cdot S = 0 \tag{3.16}$$

olsun. (3.16) denklemi tensör tanımından dolayı

$$R(Y,Z)S(V,W) = S(R(Y,Z)V,W) + S(V,R(Y,Z)W) \tag{3.17}$$

yazılır. Buradan

$$0 = S(R(Y,Z)V,W) + S(V,R(Y,Z)W) \tag{3.18}$$

bulunur. (3.18) eşitliğinde V yerine ξ alırsak

$$0 = S(R(Y,Z)\xi,W) + S(R(Y,Z)W,\xi)$$

elde edilir. Bu son eşitlik (3.3) ve (3.7) yardımıyla

$$0 = S(\alpha^2\eta(Y)Z - \alpha^2\eta(Z)Y, W) - 2n\alpha^2\eta(R(Y,Z)W)$$

haline dönüşür. (3.6) denklemi ve $Z = \xi$ alınarak

$$0 = \alpha^2\eta(Y)S(\xi,W) - \alpha^2 S(Y,W) - 2n\alpha^2\eta(R(Y,\xi)W)$$

denkelemine ulaşılır. Bu son denklem düzenlenirse

$$0 = -2n\alpha^4\eta(Y)\eta(W) - \alpha^2 S(Y,W) + 2n\alpha^4\eta(Y)\eta(W) - 2n\varepsilon\alpha^4 g(W,Y)$$

ve

$$-\alpha^2 S(Y,W) = 2n\alpha^4\varepsilon g(W,Y)$$

dır. Buradan

$$S(Y,W) = -2n\alpha^2\varepsilon g(W,Y) \tag{3.19}$$

elde edilir. Ayrıca, $E_i = \{e_1, \cdots, e_i, \phi e_1, \cdots, \phi e_i, \xi\}$ cümlesi bir lokal pseudo ϕ-tabanı olmak üzere, (3.19) denkleminde $Y = W = E_i$ için toplam alınırsa

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(E_i, E_i) = -2n\alpha^2\varepsilon g(E_i, E_i) \tag{3.20}$$

bulunur. Böylece M, (3.20) eşitliğiyle verilen bir Einstein manifoldudur.

Teorem 3.3 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M yarı simetrik şartını sağlıyorsa o zaman $r = -2n(2n+1)\alpha^2\varepsilon$ skalar eğriliğine sahip bir Einstein manifoldudur.

İspat: Hipotezden dolayı M nin yarı simetrik şartını sağladığını kabul edelim. Yani,

$$R \cdot R = 0 \tag{3.21}$$

dır. Tensör tanımından dolayı

$$\begin{aligned} 0 = R(Y,Z)R(U,V)W - R(R(Y,Z)U,V)W \\ -R(U,R(Y,Z)V)W - R(U,V)R(Y,Z)W \end{aligned} \tag{3.22}$$

yazılır. Burada (3.22) eşitliğinin sağ tarafındaki tensör ifadelerini ayrı ayrı hesaplamalıyız. Öncelikle, V yerine ξ alarak ilk tensör ifadesi (3.4) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} R(Y,Z)R(U,\xi)W &= R(Y,Z)\left[-\alpha^2\eta(W)U + \varepsilon\alpha^2 g(W,U)\xi\right] \\ &= -\alpha^2\eta(W)R(Y,Z)U + \varepsilon\alpha^2 g(W,U)R(Y,Z)\xi \end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. İkinci tensör ifadesi

$$-R(R(Y,Z)U,\xi)W = \alpha^2\eta(W)R(Y,Z)U - \varepsilon\alpha^2 g(R(Y,Z)U,W)\xi \tag{3.24}$$

şeklinde bulunur. Benzer olarak, sırasıyla, üçüncü ve dördüncü tensör ifadeleri

$$-R(U,R(Y,Z)V)W = -\alpha^2\eta(Y)R(U,Z)W + \alpha^2\eta(Z)R(U,Y)W \tag{3.25}$$

ve

$$-R(U,\xi)R(Y,Z)W = \alpha^2\eta(R(Y,Z)W)U - \varepsilon\alpha^2 g(R(Y,Z)W,U)\xi \tag{3.26}$$

ile verilir. (3.23)-(3.26) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon\alpha^2 g(W,U)R(Y,Z)\xi - \alpha^2\eta(Y)R(U,Z)W \\ +\alpha^2\eta(Z)R(U,Y)W + \alpha^2\eta(R(Y,Z)W)U \end{aligned} \tag{3.27}$$

denklemine ulaşılır. Bu son denklem $Y = \xi$ için

$$-\alpha^2 R(U,Z)W = -\varepsilon\alpha^4 g(W,U)Z + \varepsilon\alpha^4 g(W,Z)U$$

dır. Yukarıdaki denklem her iki tarafta U ile iç çarpılır ve U ya göre kontraksiyon yapılırsa

$$R(U,Z,W,U) = \varepsilon\alpha^2\left[g(W,U)g(Z,Y) - g(W,Z)g(U,U)\right]$$

ve

$$S(Z,W) = -2n\varepsilon\alpha^2 g(Z,W) \tag{3.28}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M lokal simetrik şartını sağlıyorsa o zaman $r = -2n(2n+1)\alpha^2\varepsilon$ skalar eğriliğine sahip bir Einstein manifoldudur.

İspat: Hipotez gereğince M nin lokal simetrik olduğunu varsayalım. Yani,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = 0 \tag{3.29}$$

dir. Ayrıca, (3.29) denkleminin X yönündeki açılımı

$$0 = \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y,Z)W - R(Y,\nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W$$

biçimindedir. Yukarıdaki denklemde W yerine ξ seçersek

$$0 = \nabla_X(R(Y,Z)\xi) - R(\nabla_X Y,Z)\xi - R(Y,\nabla_X Z)\xi - R(Y,Z)\nabla_X\xi$$

yazılır. (3.1) ve (3.3) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
&0 = \nabla_X(\alpha^2\eta(Y)Z - \alpha^2\eta(Z)Y) - \eta(\nabla_X Y)Z \\
&+\eta(Z)\nabla_X Y - \eta(Y)\nabla_X Z + \eta(\nabla_X Z)Y \\
&-R(Y,Z)(\alpha X - \alpha\eta(X)\xi)
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

elde edilir. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$R(Y,Z)X = -\alpha^2\varepsilon\,[g(Z,X)Y - g(Y,X)Z]$$

denklemine ulaşılır. Burada Teorem 3.3 de kullanılan yöntemle

$$S(Z,X) = -2n\alpha^2\varepsilon g(Z,X)$$

eşitliği kolayca bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M manifoldu M-projektif flat şartını sağlıyorsa o zaman M bir Einstein manifoldudur.

İspat: Bir Riemann manifoldu üzerinde M^* ile sembolize edilen M-projektif eğrilik tensör alanının aşağıda tanımı verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
&M^*(Y,Z)W = R(Y,Z)W \\
&-\tfrac{1}{4n}\,[S(Z,W)Y - S(Y,W)Z + g(Z,W)QY - g(Y,W)QZ]
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

(Pokhariyal ve Mishra 1971). Bu tanıma göre, hipotezden dolayı M nin M-projektif flat ($M^* = 0$) şartını sağladığını farz edelim. O halde,

$$R(Y,Z)W = \tfrac{1}{4n}\,[S(Z,W)Y - S(Y,W)Z + g(Z,W)QY - g(Y,W)QZ]$$

dir. Bu son denklemde W yerine ξ alırsak

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2\eta(Y)Z - \alpha^2\eta(Z)Y = \\
&\tfrac{1}{4n}\,[-2n\alpha^2\eta(Z)Y + 2n\alpha^2\eta(Y)Z + \varepsilon\eta(Z)QY - \varepsilon\eta(Y)QZ]
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

dır. Bundan başka, (3.7) eşitliği yardımıyla

$$g(QY,\xi) = -2n\alpha^2\varepsilon\eta(Y)$$

ve

$$QY = -2n\alpha^2\varepsilon Y$$

olduğundan

$$Q\xi = -2n\alpha^2\varepsilon\xi \tag{3.33}$$

yazılır. (3.33) eşitliği hesaba katılarak (3.32) denklemi $Z = \xi$ için

$$4n\alpha^2\left(\eta(Y)\xi - \varepsilon Y\right) = 4n\alpha^2\eta(Y)\xi - 2n\alpha^2\varepsilon Y + QY$$

bulunur. Yukarıdaki denklem sadeleştirilirse

$$QY = -2n\alpha^2\varepsilon Y \tag{3.34}$$

elde edilir. Buradan keyfi bir X vektör alanı için

$$g(QY, X) = -2n\alpha^2\varepsilon g(Y, X) = S(Y, X)$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu M-projektif flat ise o zaman M nin skalar eğriliği $r = -2n(2n+1)\alpha^2\varepsilon$ olur.

Teorem 3.6 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M manifoldunun M^* M-projektif eğrilik tensör alanı ile K konsirküler eğrilik tensör alanı lineer bağımlı ise o zaman M bir Einstein manifoldudur.

İspat: İlk olarak, keyfi vektör alanları için M üzerinde konsirküler eğrilik tensör alanı K

$$K(Y, Z)W = R(Y, Z)W - \tfrac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Z, W)Y - g(Y, W)Z\right] \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlıdır (Yano ve Kon 1984). O halde, $\mu \neq 0$ reel sabiti için

$$M^*(Y, Z)W = \mu K(Y, Z)W$$

olsun. (3.31) ve (3.35) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
&(1-\mu)R(Y, Z)W = \\
&\tfrac{1}{4n}\left[S(Z, W)Y - S(Y, W)Z + g(Z, W)QY - g(Y, W)QZ\right] \\
&-\tfrac{\mu r}{2n(2n+1)}\left[g(Z, W)Y - g(Y, W)Z\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliğe Y ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned} &(1-\mu)S(Z,W) = \\ &\tfrac{1}{4n}\left[(2n-1)S(Z,W) - 2n(2n+1)\alpha^2\varepsilon g(Z,W)\right] \\ &-\tfrac{\mu r}{2n(2n+1)}\left[2ng(Z,W)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(1-\mu-\tfrac{2n-1}{4n}\right)S(Z,W) + \left(\tfrac{\mu r}{2n+1} - \tfrac{r}{4n}\right)g(Z,W) = 0$$

haline dönüşür. Burada $2n+1 = c$ ve $4nk = d$ olarak alınırsa

$$S(Z,W) = \frac{rc-rd}{c(c-d)}g(Z,W) = \frac{r}{2n+1}g(Z,W)$$

dır. Bu son denklem ispatı tamamlamış olur.

Teorem 3.7 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M manifoldunun M^* M-projektif eğrilik tensör alanı ile H konharmonik eğrilik tensör alanı lineer bağımlı ise o zaman M bir Einstein manifoldudur.

İspat: Öncelikle, keyfi vektör alanları için M üzerinde konharmonik eğrilik tensör alanı H

$$\begin{aligned} &H(Y,Z)W = R(Y,Z)W \\ &-\tfrac{1}{2n-1}\left[S(Z,W)Y - S(Y,W)Z + g(Z,W)QY - g(Y,W)QZ\right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano ve Kon 1984). O halde, $\lambda \neq 0$ reel sabiti için

$$M^*(Y,Z)W = \lambda H(Y,Z)W$$

olduğunu kabul edelim. (3.31) ve (3.36) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)R(Y,Z)W = \\ &\left(\tfrac{1}{4n} - \tfrac{\lambda}{2n-1}\right)\left[S(Z,W)Y - S(Y,W)Z + g(Z,W)QY - g(Y,W)QZ\right] \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denkleme Y ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$\left[1-\lambda-p(2n-1)\right]S(Z,W) = prg(Z,W)$$

elde edilir. Burada $p = \left(\frac{1}{4n} - \frac{\lambda}{2n-1}\right)$ ve $r = -2n(2n+1)\alpha^2\varepsilon$ dir. Böylece

$$S(Z,W) = \left(\tfrac{pr}{1-\lambda-p(2n-1)}\right)g(Z,W)$$

yazılır. Gerekli sadeleştirme ve düzenlemelerden sonra

$$S(Z,W)=\left(\tfrac{r(2n-1-4n\lambda)}{4n^2-1}\right)g(Z,W)$$

formuna indirgenir. Dolayısıyla ispat aşikardır.

Teorem 3.8 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M manifoldunun M^* M-projektif eğrilik tensör alanı ile C konformal eğrilik tensör alanı lineer bağımlı ise o zaman M bir Einstein manifoldudur.

İspat: İlk önce, keyfi vektör alanları için M üzerinde konformal eğrilik tensör alanı C

$$\begin{aligned}
&C(Y,Z)W=R(Y,Z)W \\
&-\tfrac{1}{2n-1}[S(Z,W)Y-S(Y,W)Z-g(Y,W)QZ+g(Z,W)QY] \\
&+\tfrac{r}{2n(2n-1)}[g(Z,W)Y-g(Y,W)Z]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984). O halde, $\gamma\neq 0$ reel sabit olmak üzere,

$$M^*(Y,Z)W=\gamma C(Y,Z)W$$

olsun. Bu durumda (3.31) ve (3.37) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
&(1-\gamma)R(Y,Z)W \\
&-\left(\tfrac{1}{4n}-\tfrac{\gamma}{2n-1}\right)[S(Z,W)Y-S(Y,W)Z+g(Z,W)QY-g(Y,W)QZ] \\
&-\tfrac{\gamma r}{2n(2n-1)}[g(Z,W)Y-g(Y,W)Z]=0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklemde $p=\left(\tfrac{1}{4n}-\tfrac{\gamma}{2n-1}\right)$ ve $q=\tfrac{\gamma r}{2n(2n-1)}$ olarak alınırsa

$$[1-\gamma-p(2n-1)]\,S(Z,W)=(pr+2nq)g(Z,W)$$

elde edilir. Buradan

$$S(Z,W)=\left(\tfrac{pr+2nq}{1-\gamma-p(2n-1)}\right)g(Z,W)$$

yazılır. Böylece ispata ulaşılır.

Teorem 3.9 M, $(2n+1)$-boyutlu bir D-konformal flat alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer ξ vektör alanı timelike olarak alınırsa M bir η-Einstein manifoldudur. Aksi taktirde, ξ vektör alanı spacelike olarak alınırsa M üzerinde η-Einstein manifoldu yoktur.

İspat: Öncelikle $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu M üzerinde $(n \geq 2)$ için D-konformal eğrilik tensörünün tanımını verelim. $\forall Y, Z, V \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} B(Y,Z)V &= R(Y,Z)V \\ &+\tfrac{1}{2(n-1)}\left[S(Y,V)Z - S(Z,V)Y + g(Y,V)QZ - g(Z,V)QY - S(Y,V)\eta(Z)\xi \right. \\ &\left. +S(Z,V)\eta(Y)\xi - \eta(Y)\eta(V)QZ + \eta(Z)\eta(V)QY\right] \\ &-\tfrac{k-2}{2(n-1)}\left[g(Y,V)Z - g(Z,V)Y\right] \\ &+\tfrac{k}{2(n-1)}\left[g(Y,V)\eta(Z)\xi - g(Z,V)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(V)Z - \eta(Z)\eta(V)Y\right] \end{aligned} \tag{3.38}$$

dır. Burada $k = \frac{r+4n}{2n-1}$ dır (Yano ve Kon 1984). Hipotezden dolayı M nin D-konformal flat olduğunu kabul edelim. O halde

$$B(Y,Z)V = 0 \tag{3.39}$$

dır. Bu durumda (3.38) ve (3.39) denklemlerinden

$$\begin{aligned} R(Y,Z)V &= \\ &-\tfrac{1}{2(n-1)}\left[S(Y,V)Z - S(Z,V)Y + g(Y,V)QZ - g(Z,V)QY - S(Y,V)\eta(Z)\xi \right. \\ &\left. +S(Z,V)\eta(Y)\xi - \eta(Y)\eta(V)QZ + \eta(Z)\eta(V)QY\right] \\ &+\tfrac{k-2}{2(n-1)}\left[g(Y,V)Z - g(Z,V)Y\right] \\ &-\tfrac{k}{2(n-1)}\left[g(Y,V)\eta(Z)\xi - g(Z,V)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(V)Z - \eta(Z)\eta(V)Y\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) denkleminin her iki tarafı W göre iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} & g(R(Y,Z)V,W) = \\ & -\tfrac{1}{2(n-1)}\left[\begin{array}{l} S(Y,V)g(Z,W) - S(Z,V)g(Y,W) + g(Y,V)g(QZ,W) \\ -g(Z,V)g(QY,W) - \varepsilon S(Y,V)\eta(Z)\eta(W) \\ +\varepsilon S(Z,V)\eta(Y)\eta(W) - \eta(Y)\eta(V)g(QZ,W) + \eta(Z)\eta(V)g(QY,W) \end{array}\right] \\ & +\tfrac{k-2}{2(n-1)}\left[g(Y,V)g(Z,W) - g(Z,V)g(Y,W)\right] \\ & -\tfrac{k}{2(n-1)}\left[\begin{array}{l} \varepsilon g(Y,V)\eta(Z)\eta(W) - \varepsilon g(Z,V)\eta(Y)\eta(W) \\ +\eta(Y)\eta(V)g(Z,W) - \eta(Z)\eta(V)g(Y,W) \end{array}\right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada $g(R(Y,Z)V,W) = R(Y,Z,V,W)$ dır. Bu son eşitlikte W yerine ξ

alınır, (3.6) ve (3.7) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\eta(R(Y,Z)V) = -\alpha^2\varepsilon\eta(Y)g(Z,V) + \alpha^2\varepsilon\eta(Z)g(Y,V) = \\
&-\tfrac{\varepsilon}{2(n-1)}\left[\begin{array}{c}(\varepsilon-1)\eta(Z)S(Y,V) + (1-\varepsilon)\eta(Y)S(Z,V) \\ -2n\alpha^2\eta(Z)S(Y,V) + 2n\alpha^2\eta(Y)S(Z,V)\end{array}\right] \\
&+\tfrac{k-2}{2(n-1)}\left[\eta(Z)g(Y,V) - \eta(Y)g(Z,V)\right] \\
&-\tfrac{k\varepsilon}{2(n-1)}\left[\eta(Z)g(Y,V) - \eta(Y)g(Z,V)\right]
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki denklem $Z = \xi$ için

$$\begin{gathered}
\alpha^2 g(Y,V) - \alpha^2\eta(Y)\eta(V) = \\
-\tfrac{\varepsilon}{2(n-1)}\left[(\varepsilon-1)\varepsilon S(Y,V) - 2n\alpha^2\eta(Y)\eta(V) - 2n\alpha^2\varepsilon g(Y,V)\right] \\
+\tfrac{k-2}{2(n-1)}\left[\varepsilon g(Y,V) - \varepsilon\eta(Y)\eta(V)\right] \\
-\tfrac{k\varepsilon}{2(n-1)}\left[\varepsilon g(Y,V) - \varepsilon\eta(Y)\eta(V)\right]
\end{gathered}$$

bulunur. Son denklemde $S(Y,V)$ ifadesi çekilirse

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{\varepsilon-1}{2(n-1)}\right) S(Y,V) &= \left[-\alpha^2 + \tfrac{2n\alpha^2}{2(n-1)} + \tfrac{(k-2)\varepsilon}{2(n-1)} - \tfrac{k}{2(n-1)}\right] g(Y,V) \\
&\quad + \left[\alpha^2 + \tfrac{2n\alpha^2\varepsilon}{2(n-1)} - \tfrac{(k-2)\varepsilon}{2(n-1)} + \tfrac{k}{2(n-1)}\right] \eta(Y)\eta(V)
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Buradan

$$\begin{aligned}
S(Y,V) &= \left[k + \tfrac{2(\alpha^2-\varepsilon)}{(\varepsilon-1)}\right] g(Y,V) \\
&\quad + \left[\tfrac{2(\varepsilon-\alpha^2)+2n\alpha^2(\varepsilon+1)}{(\varepsilon-1)} - k\right] \eta(Y)\eta(V)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, yukarıdaki eşitlikte $\varepsilon = +1$ yani, ξ spacelike alınırsa M üzerinde η-Einstein manifoldu mevcut değildir. Eğer $\varepsilon = -1$ yani, ξ timelike alınırsa M üzerinde η-Einstein manifoldu mevcuttur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.10 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Bu durumda M üzerinde ξ vektör alanı spacelike olan ξ-D-konformal flat manifoldu mevcut değildir.

İspat: M nin ξ-D-konformal flat olduğunu kabul edelim. Yani,

$$B(Y,Z)\xi = 0 \tag{3.41}$$

dır. (3.38) eşitliği yardımıyla

$$
\begin{gathered}
0 = R(Y,Z)\xi \\
+\tfrac{1}{2(n-1)}\left[S(Y,\xi)Z - S(Z,\xi)Y + g(Y,\xi)QZ - g(Z,\xi)QY - S(Y,\xi)\eta(Z)\xi\right. \\
\left.+S(Z,\xi)\eta(Y)\xi - \varepsilon\eta(Y)QZ + \xi\eta(Z)QY\right] \\
-\tfrac{k-2}{2(n-1)}\left[\varepsilon g(Y,\xi)Z - \varepsilon g(Z,\xi)Y\right] \\
+\tfrac{k}{2(n-1)}\left[\varepsilon g(Y,\xi)\eta(Z)\xi - \varepsilon g(Z,\xi)\eta(Y)\xi + \varepsilon\eta(Y)Z - \varepsilon\eta(Z)Y\right]
\end{gathered}
$$

bulunur. Son eşitlikte (3.3) ve (3.7) denklemleri kullanır, her iki tarafı W vektör alanı ile iç çarparsak

$$
\begin{gathered}
0 = \alpha^2\eta(Y)g(Z,W) - \alpha^2\varepsilon\eta(Z)g(Y,W) \\
+\tfrac{1}{2(n-1)}\left[-2n\alpha^2\eta(Y)g(Z,W) + 2n\alpha^2\eta(Z)g(Y,W)\right] \\
-\tfrac{(k-2)\varepsilon}{2(n-1)}\left[\eta(Y)g(Z,W) - \eta(Z)g(Y,W)\right] \\
+\tfrac{k\varepsilon}{2(n-1)}\left[\eta(Y)g(Z,W) - \eta(Z)g(Y,W)\right]
\end{gathered}
$$

elde edilir. Bu son denklem $Z = \xi$ için

$$
\begin{aligned}
0 \quad = \quad & \left[-\varepsilon\alpha^2 + \tfrac{2n\alpha^2\varepsilon}{2(n-1)} + \tfrac{(k-2)}{2(n-1)} - \tfrac{k}{2(n-1)}\right] g(Y,W) \\
& + \left[\varepsilon\alpha^2 - \tfrac{2n\alpha^2\varepsilon}{2(n-1)} - \tfrac{(k-2)}{2(n-1)} + \tfrac{k}{2(n-1)}\right] \eta(Y)\eta(W)
\end{aligned}
$$

dır. Burada katsayıların hesaplanmasından sonra

$$
0 = \left(\tfrac{\alpha^2\varepsilon - 1}{n-1}\right)\left(g(Y,W) - \eta(Y)\eta(W)\right)
$$

denklemine ulaşılır. $\alpha^2 \neq 0$ ve $n \geq 2$ olduğundan

$$
0 = g(Y,W) - \eta(Y)\eta(W)
$$

yazılabilir. (2.30) eşitliği yardımıyla $\varepsilon = +1$ olmak üzere,

$$
g(\phi Y, \phi W) = 0
$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece teoremin ispatına ulaşılır.

Teorem 3.11 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer M manifoldu ϕ-D-konformal flat ise o zaman M bir η-Einstein manifoldudur.

İspat: M nin ϕ-D-konformal flat olduğunu kabul edelim. Yani,

$$0 = g(B(\phi Y, \phi Z)\phi W, \phi U) \tag{3.42}$$

dır. (3.38) ve (3.42) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 0 &= g(R(\phi Y, \phi Z)\phi W, \phi U) \\ &+ \tfrac{1}{2(n-1)} \left[\begin{array}{c} S(\phi Y, \phi W)g(\phi Z, \phi U) - S(\phi Z, \phi W)g(\phi Y, \phi U) \\ +S(\phi Z, \phi U)g(\phi Y, \phi W) - S(\phi Y, \phi U)g(\phi Z, \phi W) \end{array} \right] \\ &- \tfrac{k-2}{2(n-1)} \left[g(\phi Y, \phi W)g(\phi Z, \phi U) - g(\phi Z, \phi W)g(\phi Y, \phi U)\right] \end{aligned} \tag{3.43}$$

yazılır. (2.30), (3.6) ve (3.8) eşitlikleri (3.43) eşitliğinde hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon\alpha^2 g(\phi Y, \phi W)g(\phi Z, \phi U) - \varepsilon\alpha^2 g(\phi Z, \phi W)g(\phi Y, \phi U) \\ &+ \tfrac{1}{2(n-1)} \left[\begin{array}{c} \varepsilon\alpha^2 S(Y, W)g(Z, U) - 2n\alpha^2 g(Y, W)g(Z, U) + 2n\alpha^2\varepsilon\eta(Y)\eta(W)g(Z, U) \\ -\alpha^2 S(Y, W)\eta(Z)\eta(U) + 2n\alpha^2\varepsilon\eta(Z)\eta(U)g(Y, W) - \alpha^2 S(Z, W)g(Y, U) \\ +2n\alpha^2 g(Y, U)g(Z, W) - 2n\alpha^2\varepsilon\eta(Z)\eta(W)g(Y, U) + \alpha^2 S(Z, W)\eta(Y)\eta(U) \\ -2n\alpha^2\varepsilon\eta(Y)\eta(U)g(Z, W) + \varepsilon\alpha^2 S(Z, U)g(Y, W) - 2n\alpha^2 g(Y, W)g(Z, U) \\ +2n\alpha^2\varepsilon\eta(Z)\eta(U)g(Y, W) - \alpha^2 S(Z, U)\eta(Y)\eta(W) + 2n\alpha^2\varepsilon\eta(Y)\eta(W)g(Z, U) \\ -\varepsilon\alpha^2 S(Y, U)g(Z, W) + 2n\alpha^2 g(Y, U)g(Z, W) - 2n\alpha^2\varepsilon\eta(Y)\eta(U)g(Z, W) \\ +\alpha^2 S(Y, U)\eta(Z)\eta(W) + 2n\alpha^2\varepsilon\eta(Z)\eta(W)g(Y, U) \end{array} \right] \\ &- \tfrac{k-2}{2(n-1)} \left[\begin{array}{c} g(Y, W)g(Z, U) - \varepsilon g(Y, W)\eta(Z)\eta(U) - \varepsilon g(Z, U)\eta(Y)\eta(W) \\ -g(Z, W)g(Y, U) + \varepsilon g(Z, W)\eta(Y)\eta(U) + \varepsilon g(Y, U)\eta(Z)\eta(W) \end{array} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliğe $Y = U = E_i$ için kontraksiyon yapılırsa

$$0 = K_3 g(Z, W) + K_2\eta(Z)\eta(W) + K_1 S(Z, W) \tag{3.44}$$

denklemine dönüşür. O halde,

$$S(Z, W) = -\frac{K_3}{K_1}g(Z, W) - \frac{K_2}{K_1}\eta(Z)\eta(W) \tag{3.45}$$

elde edilir. Burada

$$K_1 = \frac{\alpha^2(\varepsilon - n)}{n-1}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \alpha^2(2n\varepsilon - 1) + b(1 - 2n) \\ &+ a\left[4n\alpha^4(1 - 2n) + \alpha^2 r + 2n\alpha^2(1 + \varepsilon)\right] \end{aligned}$$

$$K_3 = \alpha^2(\varepsilon + 2(n+1)) + b(2n\varepsilon - 1)$$
$$-\alpha^2 a(\varepsilon r + 6n) + 2n\alpha^2 a\varepsilon(1+4n)$$
$$-\frac{K_2}{K_1} = \frac{\alpha^2 n + 1}{n-\varepsilon} + \frac{\left[n\left(\alpha^2\varepsilon - 2\right) + 1\right]}{\alpha^2(2n-1)(n-\varepsilon)}$$
$$+\frac{4n^2\varepsilon(n-1)}{(2n-1)(n-\varepsilon)} + \frac{(n-1)\alpha^2 r - r(2n-1)}{2\alpha^2(2n-1)(n-\varepsilon)}$$
$$-\frac{K_3}{K_1} = \frac{\varepsilon\alpha^2(1-r) + 2\alpha^2(1-n+4n^2\varepsilon) + (r+2)(2n\varepsilon-1)}{2\alpha^2(n-\varepsilon)}$$
$$a = \tfrac{1}{2(n-1)},\ b = \tfrac{k-2}{2(n-1)},\ k = \tfrac{r+4n}{2n-1}$$

dır. Böylece (3.45) eşitliğinden ispat açıktır.

Teorem 3.12 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu D-konformal yarı simetrik pseudo Riemann manifold olsun. Eğer ξ vektör alanı timelike olarak alınırsa M bir η-Einstein manifoldudur. Aksi taktirde, ξ vektör alanı spacelike olarak alınırsa M üzerinde η-Einstein manifoldu yoktur.

İspat: İlk olarak, D-konformal yarı simetrik manifold tanımını verelim. Eğer M üzerinde D-konformal eğrilik tensörü B

$$R(Y,Z)\cdot B = 0 \tag{3.46}$$

şartını sağlıyorsa M ye D-konformal yarı simetrik manifold adı verilir $(n \geq 2)$ (Taleshian vd. 2011). O halde, verilen hipoteze göre M nin D-konformal yarı simetrik koşulunu sağladığını varsayalım. Diğer bir deyişle,

$$\left(R(Y,Z)\cdot B\right)(W,V)U = 0 \tag{3.47}$$

dır. Tensör tanımından dolayı (3.47) eşitliği

$$\begin{aligned} &R(Y,Z)B(W,V)U - B(R(Y,Z)W,V)U \\ &-B(W,R(Y,Z)V)U - B(W,V)R(Y,Z)U = 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

ile yazılabilir. (3.48) eşitliğinde $Y=\xi$ alınır ve (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\alpha^2\eta(B(W,V)U)Z - \alpha^2\varepsilon g(B(W,V)U,Z)\xi - \alpha^2\eta(W)B(Z,V)U \\ &+\alpha^2\varepsilon g(Z,W)B(\xi,V)U - \alpha^2\eta(V)B(W,Z)U + \alpha^2\varepsilon g(Z,V)B(W,\xi)U \\ &-\alpha^2\eta(U)B(W,V)Z + \alpha^2\varepsilon g(U,Z)B(W,V)\xi = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafının ξ ye göre iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}&\varepsilon\alpha^2\eta(B(W,V)U)\eta(Z)-\alpha^2 g(B(W,V)U,Z)-\varepsilon\alpha^2\eta(W)\eta(B(Z,V)U)\\&+\alpha^2 g(Z,W)\eta(B(\xi,V)U)-\varepsilon\alpha^2\eta(V)\eta(B(W,Z)U)+\alpha^2 g(Z,V)\eta(B(W,\xi)U)\\&-\varepsilon\alpha^2\eta(U)\eta(B(W,V)Z)+\alpha^2 g(U,Z)\eta(B(W,V)\xi)=0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemde $Z=W$ alınır ve her iki taraf α^2 ya bölünürse

$$\begin{aligned}&\varepsilon\eta(B(W,V)U)\eta(W)-g(B(W,V)U,W)-\varepsilon\eta(W)\eta(B(W,V)U)\\&+g(W,W)\eta(B(\xi,V)U)-\varepsilon\eta(V)\eta(B(W,W)U)+g(W,V)\eta(B(W,\xi)U)\\&-\varepsilon\eta(U)\eta(B(W,V)W)+g(U,W)\eta(B(W,V)\xi)=0\end{aligned} \tag{3.49}$$

yazılır. Ayrıca, (3.38) eşitliğinden

$$\eta(B(W,V)U=A\eta(V)g(W,U)-A\eta(W)g(V,U) \tag{3.50}$$

olduğu görülür. Burada

$$A=\varepsilon\alpha^2+\frac{1-n\alpha^2\varepsilon}{2(n-1)}$$

dır. (3.50) eşitliği (3.49) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}g(B(W,V)U,W)&=\varepsilon g(W,W)\left[A\eta(V)\eta(U)-Ag(V,U)\right]\\&+\varepsilon g(W,V)\left[Ag(W,U)-A\eta(W)\eta(U)\right]\\&-\varepsilon\eta(U)\left[A\eta(V)g(W,W)-A\eta(W)g(W,U)\right]\end{aligned} \tag{3.51}$$

denklemine ulaşılır. Buradan sadeleştirmelerden sonra

$$g(B(W,V)U,W)=\varepsilon A\left[g(W,V)g(W,U)-g(W,W)g(V,U)\right] \tag{3.52}$$

bulunur. (3.52) denklemine $W=E_i$ için kontraksiyon yapılırsa

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(B(E_i,V)U,E_i)=\varepsilon A(1-\varepsilon(2n+1))g(V,U) \tag{3.53}$$

elde edilir. Bunun yanısıra, (3.38) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2n+1} g(B(E_i,V)U,E_i)=S(V,U)\\&\tfrac{1}{2(n-1)}\left[\begin{array}{c}2S(V,U)-\varepsilon(2n+1)S(V,U)-rg(V,U)\\+\varepsilon S(V,U)+r\eta(V)\eta(U)+2n\alpha^2\eta(V)\eta(U)\left[\varepsilon+1\right]\end{array}\right]\\&-\tfrac{k-2}{2(n-1)}\left[g(V,U)-\varepsilon(2n+1)g(V,U)\right]\\&+\tfrac{k}{2(n-1)}\left[-\varepsilon g(V,U)+(1-2n\varepsilon)\eta(V)\eta(U)\right]\end{aligned} \tag{3.54}$$

şeklinde yazılır. (3.53) ve (3.54) denklemlerinin birlikte hesaba katılmasıyla

$$S(V,U) = A_1 g(V,U) + A_2 \eta(V)\eta(U) \tag{3.55}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$A_1 = \frac{2r(1-n) + 2(1-\varepsilon) + 4n\varepsilon(k-1) - k(1+2\varepsilon)}{2n(\varepsilon-1)} + \frac{(\varepsilon-1)(n\alpha^2 - 2\alpha^2 - 1) + 2n(1-n\alpha^2\varepsilon)}{2n(\varepsilon-1)}$$

ve

$$A_2 = \frac{2n\alpha^2(\varepsilon+1) + k(1-2n\varepsilon) + r}{2n(\varepsilon-1)}$$

dır. Böylece (3.55) eşitliğinden ispat aşikardır.

Teorem 3.13 M, $(2n+1)$-boyutlu bir alfa Kenmotsu Ricci D-konformal yarı simetrik pseudo Riemann manifold olsun. Bu durumda, M bir Einstein manifoldudur.

İspat: Öncelikle Ricci D-konformal yarı simetrik manifold tanımını verelim. Eğer M üzerinde D-konformal eğrilik tensörü B

$$B(Y,Z) \cdot S(U,V) = 0 \tag{3.56}$$

şartını sağlıyorsa M ye Ricci D-konformal yarı simetrik manifold adı verilir $(n \geq 2)$ (Taleshian vd. 2011). Yani, tensör tanımından

$$0 = S(B(Y,Z)U,V) + S(U,B(Y,Z)V) \tag{3.57}$$

formunda yazılır. (3.57) eşitliğinde $Y = V = \xi$ alınırsa

$$0 = S(B(\xi,Z)U,\xi) + S(U,B(\xi,Z)\xi) \tag{3.58}$$

haline dönüşür. Bundan başka, (3.50) denklemi yardımıyla

$$B(Y,Z)U = A\left[Zg(Y,U) - Yg(Z,U)\right] \tag{3.59}$$

$$B(\xi,Z)U = A\left[\varepsilon\eta(U)Z - \xi g(Z,U)\right] \tag{3.60}$$

$$B(\xi,Z)\xi = A\left[Z - \varepsilon\eta(Z)\xi\right] \tag{3.61}$$

bulunur. (3.60) ve (3.61) denklemleri (3.58) denkleminde yerine konulursa

$$S(Z,U) = -2n\alpha^2\varepsilon g(Z,U)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4 HEMEN HEMEN ALFA KENMOTSU PSEUDO RIEMANN YAPILARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapılar üzerinde bazı özellikler ele alınacaktır. İlk olarak, hemen hemen değme pseudo Riemann yapının bir deformasyonu incelenecektir. Daha sonra null dağılımı olarak da bilinen (k, μ)-uzaylarıyla ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir.

Şimdi, hemen hemen değme pseudo Riemann yapısıyla verilen farklı işaretli pseudo Riemann metrikleri arasındaki ilişkileri araştıralım. Bunu yapabilmek için değme pseudo metrik manifoldlarda tanımlanan benzer bir deformasyonu kullanalım (Calvaruso ve Perrone 2010).

M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann yapının g pseudo Riemann metriği $g(\xi,\xi)=\varepsilon$ ile tanımlanır. Aşağıda verilen farklı g^* pseudo Riemann metriği (deformasyonu),

$$g^*(X,Y) = \alpha g(X,Y) - 2\varepsilon\eta(X)\eta(Y) \tag{4.1}$$

sıfırdan farklı reel pozitif bir sabit ve keyfi vektör alanları için aynı (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısıyla birlikte verilen uyumlu bir metriktir. Yani, hala aynı (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısıyla bir pseudo Riemann metriğidir.

Sonuç 4.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu (4.1) denklemi ile birlikte verilsin. Bu durumda

$$\varepsilon^* = \varepsilon(\alpha - 2) \tag{4.2}$$

dır.

İspat: Gerçekten, (4.1) deformasyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} g^*(\xi,\xi) &= \alpha g(\xi,\xi) - 2\varepsilon\eta(\xi)\eta(\xi) \\ \varepsilon^* &= \alpha\varepsilon - 2\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. O zaman (4.1) deformasyonu ile verilen $(M, \phi, \xi, \eta, g^*)$ da bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldudur.

İspat: M üzerinde (ϕ, ξ, η, g^*) yapısına göre temel 2-form $\Phi^*(Y,Z) = g^*(Y, \phi Z)$ ile tanımlıdır. Bu durumda (4.1) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} \Phi^*(Y,Z) &= \alpha g(Y,\phi Z) - 2\varepsilon\eta(Y)\eta(\phi Z) \\ &= \alpha g(Y,\phi Z) \\ &= \alpha\Phi(Y,Z) \end{aligned}$$

bulunur. Başka bir ifadeyle, keyfi vektör alanları için $\Phi^* = \alpha\Phi$ dır. Ayrıca, bu Φ^* ın dış türevi $d\Phi^*$

$$\begin{aligned} d\Phi^* &= 2(\eta \wedge \Phi^*) \\ &= 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $d\eta = 0$ olduğunu da hatırlatalım. Böylece $(M, \phi, \xi, \eta, g^*)$ da bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu olur.

Teorem 4.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu ve g^* pseudo Riemann metriği. (4.1) deformasyonu ile verilsin. O halde, keyfi vektör alanları için

$$\nabla^*_Y Z = \nabla_Y Z + \tfrac{2\varepsilon}{\alpha} g(\nabla_Y \xi, Z)\xi \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} R^*(Y,Z)W = R(Y,Z)W + \tfrac{2\varepsilon}{\alpha}\left[g(\nabla_Z\xi, W)\nabla_Y\xi - g(\nabla_Y\xi, W)\nabla_Z\xi\right] \\ -\tfrac{2\varepsilon}{\alpha}\left[g((\nabla_Y\phi h)Z - (\nabla_Z\phi h)Y, W)\xi\right] + 2\varepsilon g((\nabla_Z\phi^2)Y - (\nabla_Y\phi^2)Z, W)\xi \end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada ∇^* ve R^* sırasıyla, M üzerinde pseudo Riemann konneksiyonu ve g^* ın pseudo Riemann eğrilik tensörüdür.

İspat: Öncelikle hesaplamada kullanacağımız Kozsul formülü

$$\begin{aligned} 2g^*(\nabla^*_Y Z, W) = Y(g^*(Z,W)) + Z(g^*(Y,W)) - W(g^*(Y,Z)) \\ +g^*([Y,Z],W) + g^*([W,Y],Z) + g^*([W,Z],Y) \end{aligned} \tag{4.5}$$

ile tanımlıdır. (4.5) denkleminde (4.1) deformasyonu kullanılırsa

$$2g^*(\nabla^*_Y Z, W) = 2\alpha g(\nabla_Y Z, W) - 4\varepsilon\eta(W)g(\nabla_Y \xi, Z)$$

bulunur. Burada $Y(\eta(Z)) = (\nabla_Y \eta)Z = \nabla_Y \eta(Z) - \eta(\nabla_Y Z) = g(\nabla_Y \xi, Z)$ dır. Bu durumda yukarıdaki denklem

$$g^*(\nabla^*_Y Z, W) = \alpha g(\nabla_Y Z, W) - 2\varepsilon\eta(W)Y(\eta(Z)) \tag{4.6}$$

haline dönüşür. Diğer yandan, (4.1) deformasyonu yardımıyla

$$g^*(\nabla^*_Y Z, W) = \alpha g(\nabla^*_Y Z, W) - 2\varepsilon\eta(W)\eta(\nabla^*_Y Z) \tag{4.7}$$

yazılır. (4.6) ve (4.7) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$0 = \alpha g(\nabla^*_Y Z - \nabla_Y Z, W) - 2\varepsilon\eta(W)\left[\eta(\nabla^*_Y Z) - Y(\eta(Z)\right] \tag{4.8}$$

elde edilir. Böylece (4.3) denkleminin ispatı (4.6) ve (4.8) eşitlikleri kullanılarak tamamlanır.

Bundan başka, (4.3) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} R^*(Y,Z)W &= \nabla^*_Y \left(\nabla^*_Z W\right) - \nabla^*_Z \left(\nabla^*_Y W\right) - \nabla^*_{[Y,Z]} W \\ R^*(Y,Z)W &= \nabla^*_Y \left[\nabla_Z W + \tfrac{2\varepsilon}{\alpha} g(\nabla_Z \xi, W)\xi\right] - \nabla^*_Z \left[\nabla_Y W + \tfrac{2\varepsilon}{\alpha} g(\nabla_Y \xi, W)\xi\right] \\ &- \left[\nabla_{[Y,Z]} W + \tfrac{2\varepsilon}{\alpha} g(\nabla_{[Y,Z]}\xi, W)\xi\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. (4.9) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} &R^*(Y,Z)W = R(Y,Z)W \\ &+\tfrac{2\varepsilon}{\alpha}\left[\nabla_Y g(\nabla_Z \xi, W)\xi + \nabla_Y \xi \; g(\nabla_Z \xi, W) + g(\nabla_Y \xi, \nabla_Z W)\xi\right] \\ &-\tfrac{2\varepsilon}{\alpha}\left[\nabla_Z g(\nabla_Y \xi, W)\xi + \nabla_Z \xi \; g(\nabla_Y \xi, W) + g(\nabla_Z \xi, \nabla_Y W)\xi\right] \\ &-\tfrac{2\varepsilon}{\alpha}\left[g(-\alpha\phi^2[Y,Z] - \phi h[Y,Z], W)\right]\xi \end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Yukarıdaki denklem sadeleştirilerek (4.4) denklemini elde edilir.

Tanım 4.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen pseudo Riemann manifoldu olsun. Keyfi bir vektör alanı için ξ-kesit eğriliği ve ϕ-kesit eğriliği sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır (Wang ve Liu 2016):

$$K(\xi, Y) = \frac{R(Y,\xi,Y,\xi)}{\varepsilon g(Y,Y) - (\eta(Y))^2} \tag{4.10}$$

$$K(Y,\phi Y)=\frac{R(Y,\phi Y,Y,\phi Y)}{(g(Y,Y))^2-\varepsilon g(Y,Y)(\eta(Y))^2}. \tag{4.11}$$

Teorem 4.3 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu ve g^* pseudo Riemann metriği (4.1) denklemiyle verilsin. Bu durumda, her $Y\in Ker\eta$ için

$$K^*(\xi,Y)=\tfrac{1}{\alpha-2}K(\xi,Y) \tag{4.12}$$

$$K^*(Y,\phi Y)=-\tfrac{1}{\alpha^2}K(Y,\phi Y)+\tfrac{2\varepsilon}{\alpha^3}-\tfrac{4\varepsilon}{\alpha^2}\frac{(g(hY,hY))^2}{(g(Y,Y))^2} \tag{4.13}$$

$$\tfrac{\alpha}{2}\left[S^*(Y,\xi)-S(Y,\xi)\right]=-\dot{I}z(\nabla_Y h\phi)+\dot{I}z\left((\nabla_Y h\phi)Y\right) \tag{4.14}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (4.4) denklemi yardımıyla

$$R^*(Y,\xi)\xi=R(Y,\xi)\xi$$

ve

$$g^*(R(Y,\xi)\xi,Y)=\alpha g(R(Y,\xi)\xi,Y)$$

bulunur. (4.10) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}K^*(\xi,Y)&=\frac{R^*(Y,\xi,Y,\xi)}{\varepsilon^*g^*(Y,Y)-(\eta(Y))^2}\\&=\frac{-\alpha R(Y,\xi,Y,\xi)}{\varepsilon\alpha(\alpha-2)g(Y,Y)-(2\alpha-3)(\eta(Y))^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik $Y\in Ker\eta$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}K^*(\xi,Y)&=\frac{\alpha R(Y,\xi,Y,\xi)}{\varepsilon\alpha(\alpha-2)g(Y,Y)}\\&=\frac{R(Y,\xi,Y,\xi)}{\varepsilon(\alpha-2)g(Y,Y)}\\&=\tfrac{1}{\alpha-2}K(\xi,Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.4) denkleminden $Y\in Ker\eta$ için

$$R^*(Y,\phi Y,Y,\phi Y)=R(\phi Y,Y,Y,\phi Y)+\tfrac{2\varepsilon}{\alpha}\left(g(Y,Y)\right)^2-4\varepsilon\left(g(hY,hY)\right)^2$$

yazılır. Yukarıdaki denklem (4.11) denklemi ile birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} K^*(Y,\phi Y) &= \frac{R^*(Y,\phi Y,Y,\phi Y)}{(g^*(Y,Y))^2-\varepsilon^* g^*(Y,Y)(\eta(Y))^2} \\ &= \frac{R^*(Y,\phi Y,Y,\phi Y)}{(g^*(Y,Y))^2} \\ &= \frac{R^*(Y,\phi Y,Y,\phi Y)}{\alpha^2\,(g(Y,Y))^2} \\ &= \frac{-R(Y,\phi Y,Y,\phi Y)+\frac{2\varepsilon}{\alpha}\,(g(Y,Y))^2-4\varepsilon\,(g(hY,hY))^2}{\alpha^2\,(g(Y,Y))^2} \\ &= \frac{-R(Y,\phi Y,Y,\phi Y)}{\alpha^2\,(g(Y,Y))^2}+\frac{\frac{2\varepsilon}{\alpha}\,(g(Y,Y))^2}{\alpha^2\,(g(Y,Y))^2}-4\varepsilon\frac{(g(hY,hY))^2}{\alpha^2\,(g(Y,Y))^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, $E_i=\{e_1,\cdots,e_i,\phi e_1,\cdots,\phi e_i,\xi\}$ cümlesi bir lokal pseudo ϕ-tabanı olmak üzere, Ricci tensörünün tanımı ve (4.4) denklemi birlikte hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} S^*(Y,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1}\varepsilon_i R^*(E_i,Y,\xi,E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R^*(Y,e_i)e_i,\xi)-2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\eta(R^*(Y,e_i)e_i) \\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R^*(Y,\phi e_i)\phi e_i,\xi)-2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\eta(R^*(Y,\phi e_i)\phi e_i) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} &S^*(Y,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(Y,e_i)e_i,\xi) \\ &+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(Y,\phi e_i)\phi e_i,\xi)-\frac{2}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left[g((\nabla_Y h\phi)e_i-(\nabla_{e_i}h\phi)Y,e_i)\right] \\ &-\frac{2}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g((\nabla_Y h\phi)\phi e_i-(\nabla_{\phi e_i}h\phi)Y,\phi e_i) \end{aligned}$$

istenen sonuca ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

$h\neq 0$ olmak üzere, Blair vd. (1995), değme manifoldlar üzerinde h tensör alanının η-paralel olması için gerek ve yeter koşulun ξ karakteristik vektör alanının (κ,μ) null dağılımına sahip olması önermesini ispatladılar. Buna göre, bazı κ ve μ sabitleri ve keyfi vektör alanları için Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki şartı sağlar:

$$R(Y,Z)\xi=-\eta(Y)\,(\kappa I+\mu h)\,Z+\eta(Z)\,(\kappa I+\mu h)\,Y. \tag{4.15}$$

Bu çalışmanın ardından Dileo ve Pastore (2009), hemen hemen Kenmotsu manifoldlar üzerinde $(\kappa,\mu)'$ null dağılımı olarak adlandırdıkları

$$R(Y,Z)\xi=-\eta(Y)\,(\kappa I+\mu h')\,Z+\eta(Z)\,(\kappa I+\mu h')\,Y. \tag{4.16}$$

Riemann eğrilik tensörü şartını ortaya koydular. Burada $h' = h \circ \phi$ olarak alınmıştır. Daha sonra Öztürk (2009) yukarıdaki tanımları da genelleyen hemen hemen alfa kosimplektik manifoldlar üzerinde

$$R(Y,Z)\xi = -\eta(Y)\left(\kappa I + \mu h + v\phi h\right)Z + \eta(Z)\left(\kappa I + \mu h + v\phi h\right)Y \tag{4.17}$$

koşulunu verdiler. Burada κ, μ ve v fonksiyonları $M \longrightarrow \mathbb{R}$ ye $d\kappa \wedge \eta = d\mu \wedge \eta = dv \wedge \eta = 0$ ile tanımlıdır.

Şimdi, (4.15) veya (4.16) null şartlarını sağlayan hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edelim. O halde, öncelikle daha sonra kullanacağımız aşağıdaki bazı önermeleri hatırlatalım:

Önerme 4.1 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_Y\phi)Z,W) &= -2g\alpha(\varepsilon g(Y,\phi Z)\xi + \eta(Z)\phi Y, W) \\ &\quad + g(N_\phi(Z,W),\phi Y) \end{aligned} \tag{4.18}$$

dır.

Teorem 4.4 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left[R(\xi,Y,Z,W) - R(\xi,Y,\phi Z,\phi W) + R(\xi,\phi Y,Z,\phi W) + R(\xi,\phi Y,\phi Z,W)\right] = \\ &(\nabla_{hY}\Phi)(Z,W) + \alpha^2\eta(Z)g(Y,W) - \alpha^2\eta(W)g(Y,Z) \\ &-\alpha\eta(Z)g(\phi hY,W) + \alpha\eta(W)g(\phi hY,Z) \end{aligned} \tag{4.19}$$

dır (Esendemir 2019).

Sonuç 4.2 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu olsun. O zaman, M nin alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu olması ancak ve ancak $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır (Esendemir 2019).

Teorem 4.5 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifoldu ve $h = 0$ olsun. Bu durumda M manifoldu $M' \times_g N$ olacak şekilde lokal bir katlı çarpımla gösterilir. Burada N, $(2n)$-boyutlu bir hemen hemen Kaehler manifold M', t koordinatlı bir açık aralıktır. Ayrıca, bazı γ pozitif sabitleri için $g = \gamma e^{\alpha t}$ dir (Esendemir 2019).

Teorem 4.6 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer ξ karakteristik vektör alanı (4.15) denklemi ile verilen (κ, μ) null dağılımına sahipse o zaman $\kappa = -\varepsilon\alpha^2$ ve $h = 0$ dır. Dolayısıyla Teorem 4.5 ifadesi geçerlidir.

İspat: Öncelikle $Y \in Ker\eta$ ve $Z = \xi$ olsun. (4.15) denkleminden

$$R(Y,\xi)\xi = \varepsilon(\kappa Y + \mu hY) \tag{4.20}$$

bulunur. (4.20) eşitliği (2.43) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$l\phi Y = \varepsilon(\kappa\phi Y + \mu h\phi Y)$$

ve

$$\phi l\phi Y = \varepsilon(-\kappa Y + \mu hY)$$

olmak üzere,

$$lY - \phi l\phi Y = 2\varepsilon\kappa Y = -2\alpha^2 Y - 2h^2 Y$$

olduğundan

$$h^2 Y = -(\varepsilon\kappa + \alpha^2)Y \tag{4.21}$$

elde edilir. Y, h tensör alanının ρ özdeğerli bir özvektörü ($hY = \rho Y \in Ker\eta$) olmak üzere, (2.41) denkleminden

$$lY = -\alpha^2 Y + 2\alpha\phi hY - h^2 Y - (\nabla_\xi h\phi)Y \tag{4.22}$$

yazılır.(4.20), (4.21) ve (4.22) denklemleri birlikte ele alınırsa

$$0 = \varepsilon\mu\rho Y - 2\alpha\rho\phi Y + (\nabla_\xi h\phi)Y \tag{4.23}$$

denklemine ulaşılır. Yukarıdaki denklemin her iki tarafı ϕY ile iç çarpılırsa

$$\rho = 0 \tag{4.24}$$

bulunur. Bu nedenle, (4.24) önermesi $h = 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca, (4.21) denkleminden (4.24) denklemi yardımıyla

$$\varepsilon\kappa + \alpha^2 = 0 \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.25) denkleminden

$$\kappa = -\varepsilon\alpha^2$$

olduğu görülür. Böylece teoremin geri kalanının ispatı Teorem 4.5 den açıktır.

Teorem 4.7 M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen alfa Kenmotsu pseudo Riemann manifold olsun. Eğer ξ karakteristik vektör alanı (4.16) denklemi ile verilen $(\kappa,\mu)'$ null dağılımına sahip ve $\phi h \neq 0$ ise o zaman $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral manifoldları Kaehler yapıdadır.

İspat: $Y, Z \in Ker\eta$ olmak üzere, (4.16) eşitliğinden

$$R(Y,Z)\xi = 0 \tag{4.26}$$

olur. Yine $Y, Z, W \in Ker\eta$ için (4.19) eşitliği yardımıyla

$$(\nabla_{hY}\Phi)(Z,W) = 0 \tag{4.27}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$(\nabla_Y\Phi)(Z,W) = -g(W,(\nabla_Y\phi)Z)$$

olduğundan (4.18) eşitliği kullanılarak

$$0 = 2(\nabla_{hY}\Phi)(Z,W) + g(N_\phi(Z,W),\phi hY) \tag{4.28}$$

bulunur. Burada $Y, Z, W \in Ker\eta$ için $g(N_\phi(Z,W),\phi hY) = 0$ olduğu aşikardır. ξ karakteristik vektör alanı (4.16) denklemi ile verildiğinden(2.43) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$(h\phi)^2 = -(\varepsilon\kappa + \alpha^2)Y \tag{4.29}$$

elde edilir. Burada $h^2 = (h\phi)\circ(h\phi) = (h\phi)^2$ dır. Ayrıca, hipotezden dolayı $\phi h \neq 0$ olduğundan $\varepsilon\kappa + \alpha^2 \neq 0$ olur. Dolayısıyla (4.16) eşitliği yardımıyla $Y, Z, W \in Ker\eta$ için $g(N_\phi(Z,W), Y) = 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle, $N_\phi(Z,W) = 0$ dır. Yani bu son önerme Nijenhuis tensör alanının özdeş olarak sıfır olmasını gerektirir. Sonuç 2.2.1 ve Sonuç 4.2 den dolayı ispat tamamlanır.

5 KAYNAKLAR

Blair D E, 2002, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics, Birkhâuser Series, 343p, Berlin.

Blair D E, Koufogiorgos T, Papantoniou B J, 1995, Contact Metric Manifolds Satisfying a Nullity Condition, Israel J. Math., 91, 189–214.

Boeckx E, Cho J T, 2005, η-Parallel Contact Metric Spaces, Differential Geometry and its Applications, 22, 275–285.

Calvaruso G, 2011, Contact Lorentzian Manifolds, Differential Geometry and its Applications, 29, 41–51.

Calvaruso G, Perrone D, 2010, Contact Pseudo-Metric Manifolds, Differential Geometry and its Applications, 28, 615–634.

Chinea D, Gonzalez C, 1990, A Classification of Almost Contact Metric Manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 156, 15–36.

De U C, Yıldız A, Yalınız A F, 2009, On ϕ-Recurrent Kenmotsu Manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 33, 17–25.

Dileo G, 2011, A Classification of Certain Almost α-Kenmotsu Manifolds, Kodai Mathematical Journal, 34, 426–445.

Dileo G, Pastore M, 2007, Almost Kenmotsu Manifolds and Local Symmetry, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 14, 343–354.

Dileo G, Pastore M, 2009, Almost Kenmotsu Manifolds with a Condition of η-Parallelism, Differential Geometry and its Applications, 27, 671–679.

Dileo G, Pastore M, 2009, Almost Kenmotsu Manifolds and Nullity Distributions, Journal of Geometry, 93, 46–61.

Duggal K L, 1990, Space Time Manifolds and Contact Structures, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 13, 545–553.

Duggal K L, Bejancu A, 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifold and Applications, Springer, 303p, Netherlands.

Esendemir M, 2019, Hemen Hemen Alfa-Kosimplektik Psödo-Metrik Manifoldlar, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 56s, Afyonkarahisar.

Janssens D, Vanhecke L, 1981, Almost Contact Structures and Curvature Tensors, Kodai Mathematical Journal, 4, 1–27.

Jun J, De U C, Pathak G, 2005, On Kenmotsu Manifolds, Journal of the Korean Mathematical Society, 42, 435–445.

Kenmotsu K, 1972, A Class of Contact Riemannian Manifold, Tôhoku Mathematical Journal, 24, 93–103.

Kim T W, Pak H K, 2005, Canonical Foliations of Certain Classes of Almost Contact Metric Structures, Acta Mathematica Sinica, 21, 841–846.

Naik D M, Venkatesha V, Prakasha D G, 2019, Certain Results on Kenmotsu Pseudo-Metric Manifolds, Miskolc Math. Notes, 20, 1083–1099.

Naik D M, Venkatesha V, Kumara H A, 2020, Some Results on Almost Kenmotsu Manifolds, Note Math., 40, 87–100.

O'neill B, 1983, Semi Riemannian Geometry, Academic Press, 488p, London.

Öztürk H, 2009, Hemen Hemen α-Kosimplektik (κ, μ, ν)-Uzayları, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 131s, Afyonkarahisar.

Öztürk H, Aktan N, Murathan C, 2010, On α-Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Conditions, Applied Sciences, 12, 115–126.

Öztürk H, Aktan N, Murathan C, Vanlı A T, 2014, Almost α-Cosymplectic f-Manifolds, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Math., 60, 211–226.

Öztürk H, 2016, Some Notes on Almost α-Cosymplectic Manifolds, International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra, 25, 1–12.

Öztürk H, 2016, On Almost α-Kenmotsu Manifolds with Some Tensor Fields, AKU J. Sci. Eng., 16, 256–264.

Öztürk H, 2018, On Almost α-Cosymplectic Manifolds with a Condition of η-Parallelism, Comptes rendus de l'Acad´emie bulgare des Sciences 71, 597–605.

Öztürk S, Öztürk H, 2020, On Alpha Kenmotsu Pseudo Metric Manifolds, AKU J. Sci. Eng., 20, 975–982.

Takahashi T, 1969, Sasakian Manifold with Pseudo-Riemannian Metric, Tôhoku Mathematical Journal, 21, 271–290.

Venkatesha V, Naik D M, Tripathi M M, 2019, Certain Results on Almost Contact Pseudo Metric Manifolds, Journal of Geometry, 110, Article number 41.

Wang Y, Liu X, 2016, Almost Kenmotsu Pseudo-Metric Manifolds, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Math., 62, 241–256.

Yano K, Kon M, 1984, Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corporation, 520p, Singapore.