

**T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK VE  
SONLU ELEMANLAR (GALERKİN METODU) İLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**EZGİ ARKUT  
1800000596**

**ANA BİLİM DALI: MATEMATİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ  
PROGRAMI: MATEMATİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ**

**TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET FATİH UÇAR**

**TEMMUZ 2021**

**T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK VE  
SONLU ELEMANLAR (GALERKİN METODU) İLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**EZGİ ARKUT  
1800000596**

**ANA BİLİM DALI: MATEMATİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ  
PROGRAMI: MATEMATİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ**

**TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET FATİH UÇAR  
JÜRİ ÜYELERİ: DOÇ. DR. SÜLEYMAN HİKMET ÇAĞLAR  
DR. ÖĞR. ÜYESİ İŞİM GENÇ DEMİRİZ (YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ)**

**TEMMUZ 2021**

# ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasın da başından sonuna kadar, bir çok kişi tarafından desteklendim ve yol gösterildim. Bütün bu kişilere şükranlarımı sunuyorum. Öncelikle en derin ve en içten şükranlarımı çalışmanın her aşamasında emeği olan, bana yol gösteren, rehberlik eden danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Fatih Uçar'a sunuyorum. Onun desteği ve önerileri bu tezin tamamlanmasında çok değerli olmuştur. Onun misyonu, gelişmemde ve düşüncelerimi genişletmemde çok yardımcı olacaktır.

Bir üyesi olmaktan övündüğüm İstanbul Kültür Üniversitesi'nde üzerimde emeği olan hocalarıma ve lisans eğitim hayatım boyunca bilgileri ve deneyimleri ile her zaman yanımda olan Karabük Üniversitesi Matematik Bölümü değerli hocalarıma çok teşekkür ediyorum. Son olarak, hayatımın her anında yanımda olan annem Birgül Arkut, babam Muharrem Arkut ve ağabeyim Egemen Arkut'a desteklerini ve sevgilerini bir an bile esirgemedikleri için çok ama çok teşekkür ederim. Sizlere en derin sevgi ve şükranlarımı sunuyorum. İyi ki varsınız...

Temmuz 2021

EZGİ ARKUT

# İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ . . . . .	iv
TABLO LİSTESİ . . . . .	v
ÖZET . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	vii
<b>1 GİRİŞ . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2 TEMEL KAVRAMLAR . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1 İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler . . . . .	4
2.1.1 Eliptik Denklemler . . . . .	4
2.1.2 Parabolik Denklemler . . . . .	5
2.1.3 Hiperbolik Denklemler . . . . .	6
2.2 Tanımlar ve Teoremler . . . . .	7
<b>3 SONLU FARK METODU VE İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜ- REVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK METODU İLE ÇÖZÜMÜ . . . . .</b>	<b>9</b>
3.1 $f(x)$ in Türevleri İçin Sonlu Fark Yaklaşımlarının Türetilmesi . . . . .	10
3.2 Merkezi Fark Yaklaşımları . . . . .	11
3.3 1. Merkezi Olmayan Sonlu Fark Yaklaşımları . . . . .	12
3.4 2. Merkezi Olmayan Fark Yaklaşımları . . . . .	13
3.5 Lineer Problemler İçin Sonlu Fark Methodu . . . . .	15
3.6 Lineer Olmayan Problemler İçin Sonlu Fark Denklemleri . . . . .	17
3.7 Sonlu Farkların Özellikleri . . . . .	19
3.8 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler İçin Sonlu Fark . . . . .	20
3.9 Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemler Sonlu Farkı . . . . .	22
3.10 Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemler Sonlu Farkı . . . . .	26
3.11 Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemler Sonlu Farkı . . . . .	30
<b>4 GALERKİN METODU VE İKİNCİ DERECEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ . . . . .</b>	<b>33</b>
4.1 Galerkin Kimdir? . . . . .	33

4.2	Galerkin Metodu Nedir? . . . . .	35
4.3	Sonlu Eleman Metodu Nedir? . . . . .	39
<b>5</b>	<b>SONLU FARK VE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERE ÖRNEKLER . . . . .</b>	<b>47</b>
5.1	Eliptik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri . . . . .	47
5.1.1	Örnek 1 . . . . .	47
5.1.2	Örnek 2 . . . . .	50
5.2	Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri . . . . .	52
5.2.1	Örnek 1 . . . . .	52
5.2.2	Örnek 2 . . . . .	55
5.2.3	Örnek 3 . . . . .	58
5.2.4	Örnek 4 . . . . .	60
5.3	Hiperbolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri . . . . .	61
5.3.1	Örnek 1 . . . . .	61
5.3.2	Örnek 2 . . . . .	64
5.4	Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Poisson ve Laplace Denklemlerinin Çözümü . . . . .	66
5.4.1	Örnek . . . . .	66
5.4.2	Örnek 2 . . . . .	68
<b>6</b>	<b>SONUÇ . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>KAYNAKÇA . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>7</b>	<b>EKLER . . . . .</b>	<b>75</b>
7.1	Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinde Kullanılan Bazı Matlab Kodları . . . . .	75
7.1.1	Örnek 5.1.1 Matlab Kodu . . . . .	75
7.1.2	Örnek 5.1.2 Matlab Kodu . . . . .	76
7.1.3	Örnek 5.2.1 Matlab Kodu . . . . .	77
7.1.4	Örnek 5.2.2 Matlab Kodu . . . . .	78
7.1.5	Örnek 5.3.1 Matlab Kodu . . . . .	79
7.1.6	Örnek 5.3.2 Matlab Kodu . . . . .	80

# ŞEKİL LİSTESİ

2.1	$l$ uzunluğundaki çubuk . . . . .	5
3.1	$[a, b]$ aralığının $h$ adım uzunluğu ile $n$ ve $[c, d]$ aralığının $k$ adım uzunluğu ile $m$ eşit parçaya bölünüşü . . . . .	23
3.2	$(x_{i-1}, y_j)$ , $(x_i, y_j)$ , $(x_{i+1}, y_j)$ , $(x_i, y_{j-1})$ ve $(x_i, y_{j+1})$ noktalarında ızgara bölümlerinin yeniden oluşturulması . . . . .	25
3.3	$(n-1)(m-1)x(n-1)(m-1)$ lineer sisteminin $n = 4$ ve $m = 5$ ile yeniden etiketlenmiş hali . . . . .	25
3.4	İleri Fark metodu . . . . .	28
3.5	Geri Fark metodu . . . . .	29
3.6	$(j+1)$ zaman adımının $(j)$ ve $(j-1)$ zaman adımları . . . . .	32
4.1	Temel üçgen . . . . .	40
5.1	$n = m = 4$ kullanarak $0.5 \times 0.5m$ boyutlarına sahip ince bir kare metal plaka . . . . .	48
5.2	Üçgenleştirme . . . . .	66
5.3	Laplace sınırları . . . . .	68
5.4	Laplace üçgenleştirme . . . . .	69

# TABLO LİSTESİ

3.1	Sonlu farklar tablosu . . . . .	10
3.2	$O(h^2)$ mertebesinde merkezi sonlu fark yaklaşımlarının katsayıları . .	12
3.3	$O(h)$ mertebesinde İleri Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları . . .	13
3.4	$O(h)$ mertebesinde Geriye Doğru Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları . . . . .	13
3.5	$O(h^2)$ mertebesinde İleri Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları . . .	14
3.6	$O(h^2)$ mertebesinde Geriye Doğru Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları . . . . .	15
5.1	5.1.1 de elde edilen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9$ değerleri . . . . .	50
5.2	5.1.2 de elde edilen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ değerleri . . . . .	51
5.3	5.2.1 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması .	54
5.4	5.2.2 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması .	57
5.5	5.2.3 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması .	59
5.6	5.2.4 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması .	61
5.7	5.3.1 de elde edilen yaklaşımlar . . . . .	63
5.8	5.3.2 de elde edilen yaklaşımlar . . . . .	65
5.9	5.4.2 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması .	70

**Üniversitesi** : İstanbul Kültür Üniveritesi  
**Enstitüsü** : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü  
**Anabilim Dalı** : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri  
**Programı** : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Tezli Yüksek Lisans  
**Tez Danışmanı** : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Fatih Uçar  
**Tez Türü ve Tarihi** : Yüksek Lisans - Temmuz 2021

## ÖZET

### **Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Fark ve Sonlu Elemanlar(Galerkin Metodu) İle Çözümü**

Bu çalışmada, kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümleri ele alınmıştır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünde sonlu fark yöntemleri ile Galerkin sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Eliptik kısmi diferansiyel denklemler için Poisson denklemi, Parabolik kısmi diferansiyel denklemler için difüzyon denklemi, Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler için dalga denklemlerinin nümerik çözümleri sonlu fark yöntemleriyle bulunmuştur. Galerkin metodu ile Dirichlet problemi ve Sonlu eleman metodu ile Poisson denkleminin nümerik çözümleri yapılmıştır. Çözülen tüm problemlerde elde edilen nümerik sonuçların analitik çözümüne yakınsadığı görülmüştür. Bu yöntemlerin bu problemler üzerinde uygulanabilirliği ispatlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler** : Kısmi türevli diferansiyel denklem, Sonlu Fark, Sonlu Elemanlar, Galerkin Metodu

**University** : İstanbul Kültür University  
**Institute** : Institute of Graduate Studies  
**Science Programme** : Mathematics and Computer Science  
**Programme** : Mathematics and Computer Science Masters with Thesis  
**Supervisor** : Asist. Prof. Dr Mehmet Fatih Uçar  
**Degree Awarded and Date** : Master's Degree - July 2021

## ABSTRACT

### **Solution of partial differential equations using finite difference and finite element (Galerkin) Method**

In this study, numerical solutions of partial differential equations are discussed. In the solution of these differential equations, finite difference methods and Galerkin finite element method are applied. We select and solve, Poisson equation for elliptic partial differential equations, diffusion equation for parabolic partial differential equations, numerical solutions of wave equations for hyperbolic partial differential equations using finite difference methods. The numerical solutions of the Dirichlet problem are computed with the Galerkin method and the Poisson equation we select and solve the finite element method. It is observed that the numerical results obtained in all the problems solved are close to the analytical solution. The applicability of these methods on these problems has been proven.

**Keywords :** Partial Differential Equation, Finite Difference, Finite Element, Galerkin Method

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Bu çalışmada inceleyeceğimiz sonlu farklar ve sonlu elemanlar metodları geçmişten günümüze bir çok bilim insanının katkıları ile gelişmiştir. Bu metodların tarihsel gelişimini ele alalım.

Sonlu fark yöntemiyle kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözenin bazı öncüleri Lewis Fry Richardson, Richard Southwell, Richard Courant, Kurt Friedrichs, Hans Lewy, Peter Lax ve John von Neumann'dır. Alterman ve Karal, 1968'de elastik dalga yayılımı ile ilgili ilk uygulamayı yapmışlardır. Boore 1970'de Aşk dalgalarını simüle etmiş ve sismik dalga alanlarının ilk anlık görüntülerini göstermiştir. Madariaga 1976'da ve Virieux ile Madariaga 1982'de yırtılma yayılımı problemini çözerek kademeli ızgaralar kavramını göstermişlerdir. Frankel ile Vidale 1992'de ve Olsen ile Archuleta 1996'da vb. paralel hesaplamalar nedeniyle üç boyutlu genişletmeyi göstermişlerdir. Küresel geometriye uygulama Igel ile Weber, 1995'de ve Chaljub ile Tarantola, 1997'de ve Igel ile diğerleri tarafından 2002'de üç boyutlu küresel kesitleri göstermişlerdir. İlk tam dalga formunu döndürme şemalarına dahil etme başlangıçta iki boyutlu olarak 1990 yılında Crase ve diğerleri tarafından, ve sonra üç boyutlu olarak 2007 yılında Chen ve diğerleri tarafından gösterilmiştir [1].

Sonlu eleman yöntemiyle kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözenin bazı öncüleri Hrennikoff (1941) ve McHenry (1943) dir. Bunlar gerçel ayrık elemanlar, örneğin çubuklar ve kirişler ile sürekli bir katının karşılıklı gelen kısımları arasında benzerlikler geliştirmiştir. Yüksek hızlı, jet motorlu uçakların geliştirilmesiyle, bu yarı analitik yöntemler kısa sürede yetersiz kaldı ve daha güvenilir bir yaklaşım arayışı başladı. Sanal çalışma ilkesine dayanan doğrudan bir yaklaşım Argyris (1955) tarafından verilmiştir ve bir dizi makalede o ve meslektaşları, hesaplama tekniklerini kullanarak çok karmaşık problemleri çözmek için bu çalışmayı geliştirmiştir (Argyris ve Kelsey 1960). Turner (1956), üçgensel bir eleman için yer değiştirme varsayımlarına dayanan eleman sertlik matrisini, elemanları birleştirmek için

doğrudan sertlik yöntemiyle birlikte sundu. 'Sonlu eleman' terimi, düzlem esnekliğindeki uygulamaları açıklayan bir makalede Clough (1960) tarafından tanıtıldı. Plaka elemanlarının bir uygulama alanı, ince kabukların modellenmesiydi ve bir miktar başarı elde edildi (Clough ve Johnson 1968). 1915 yılında Kısmi diferansiyel denklem sınır değer problemleri olarak ortaya çıkan problemlere ilk olarak Galerkin çözüm geliştirmiştir. Biyomedikal mühendisliği: Zienkiewicz(1977), insan kalça kemiği nakilleri için stres analizi hesaplaması gerçekleştirmiştir. Phillips (2009) bu fikirleri önemli ölçüde genişletti ve sadece kemiği modellemek yerine, kemiğin ve ilişkili kasların tam bir sonlu eleman analizi yaptı. Finans mühendisliği: Sonlu unsurların geliştirilmesinin ilk günlerinde, finansal sistemlerin incelenmesi, yöntemin kapsamı dışında görünüyordu. Bununla birlikte, çeşitli opsiyon fiyatlandırma şemalarını açıklayan Black Scholes modelleri (Wilmott ve diğerleri, 1995), diğerleri arasında, Topper (2005) ve Tao Jiang ve diğerleri tarafından (2009) sonlu bir eleman bağlamında belirlenmiştir. Son olarak, çalışması hem sonlu elemanlar yöntemi hem de sınır elemanı yöntemi için bir temel oluşturan bir kişi varsa, o zaman bu George Green'dir. Green teoremi her iki yöntemin temelini oluşturur ve tabii ki temel çözümler Green fonksiyonlarıdır [2]. Bu matematikçiler çalışmalarını fizik, matematik, mühendislik, finans ve tıp alanlarında başarıyla uygulamıştır. Bu bilgiler doğrultusunda bizim hazırladığımız tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde ikinci mertebeden kısmi türevli denklemler ve sınıfları ile bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmektedir.

Üçüncü bölümde sonlu fark metodları açıklanıp kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır.

Dördüncü bölümde Galerkin Metoduna ismini vermiş ünlü matematikçinin kim olduğu, bu metodun ne olduğu açıklanmış ve sonlu elemanlar yöntemi ile kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır.

Beşinci bölümde ise yapılan orijinal çalışmaya çözülen örneklere yer verilmiştir.

Altıncı bölümde ise sonuç yer almaktadır.

## BÖLÜM 2

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu çalışmada ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonlu fark ve sonlu elemanlar metodları ile çözümlerini inceleyeceğiz. Bunun için bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemler hakkında bazı hatırlatmalar yapacağız. Ele alacağımız denklemler daha çok fizik, kimya, ekonomi ve mühendislik uygulamalarında karşımıza çıkmaktadır.

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısının iki veya daha fazla olması ve denklemin herhangi mertebeden en az bir kısmi türev içermesi durumunda bu denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

Genel olarak bir kısmi türevli diferansiyel denklem;  $x, y, \dots$  ler bağımsız değişkenler ve  $u(x, y)$  bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) olmak üzere,

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $u_x, u_y, u_{xx}, \dots$  bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre kısmi türevleridir ve bunların her biri,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

şeklinde ifade edilir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türev mertebesine, diferansiyel denklemin mertebesi denir. Bilinmeyen  $u$  fonksiyonu ve kısmi türevleri birinci dereceden ise denklem lineerdir denir. Şimdi çalışmamızın temelini oluşturan ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemleri ve sınıflarını inceleyelim [3].

## 2.1 İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemlerin eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemler olarak sınıflandırılmasını inceleyeceğiz. Tüm kısmi diferansiyel denklemler bu sınıflardan birine giremez, ancak pratikte ortaya çıkan birçok önemli denklem bu sınıflara girer. Bu denklem sınıfları farklı türden fenomenleri modeller, farklı davranışlar sergiler ve çözümleri için farklı sayısal teknikler gerektirir. Söz konusu, iki bağımsız değişkenli lineer ikinci dereceden diferansiyel denklem

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

şeklinde tanımlanır. Söz konusu denklem  $\Delta = b^2 - 4ac$  nin işaretine bağlı olarak sınıflandırılır.

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \textit{eliptik} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \textit{parabolik} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \textit{hiperbolik} \end{cases}$$

Sınıf isimleri konik cisim isimlerini alır. En ünlü örnekler; eliptik denklem için Poisson problemi  $u_{xx} + u_{yy} = g$ , parabolik denklem için ısı denklemi  $u_t = Ku_{xx}$  ( $k > 0$  iken) ve hiperbolik denklem için dalga denklemi  $u_{tt} = c^2u_{xx}$  dir. Parabolik ve hiperbolik durumda, bunlar tipik olarak zamana bağlı problemler olduğundan,  $y$  yerine  $t$  kullanılır. Bunların hepsi daha fazla boyuta genişletilebilir. Bu denklemler, farklı fenomen türlerini açıklar ve hem analitik hem de sayısal çözümleri için farklı teknikler gerektirir. Bu nedenle, aynı genel özellikleri sergileyen denklem sınıfları için aynı adlara sahip olmak daha uygundur [4].

### 2.1.1 Eliptik Denklemler

Matematiksel fizik ve mühendislikte en önemli kısmi diferansiyel denklemlerden biri, iki değişkenli aşağıdaki forma sahip olan Laplace denklemdir:

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Poisson denklemi bununla yakından ilgilidir [5]. Göz önünde bulduğumuz eliptik kısmi diferansiyel denklem,  $R = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$  üzerinde

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in S$$

için  $u(x,y) = g(x,y)$  ile Poisson denklemdir. Burada  $S, R$ 'nin sınırını gösterir. Eğer  $f$  ve  $g$  kendi bölgelerinde sürekli ise, o zaman bu denklemin tek türlü bir çözümü vardır [6]. Eliptik denklemler tipik olarak kararlı durum veya denge olaylarını modellemektedir ve bu nedenle geçici bir bağımlılık yoktur. Eliptik denklemler, her zaman yerel dengede olan ve modellenen zaman ölçeğinden çok daha hızlı olan zaman ölçeklerinde dengelenen bazı fenomenlerin modellenmesi durumunda, zamana bağlı problemlerin çözümünde de ortaya çıkabilir. Örneğin, "sıkıştırılmaz" akışta hızlı akustik dalgalar modellenmez ve bunun yerine basınç, bu dalgaların geniş çaplı etkisini modelleyen her zaman adımında bir Poisson problemi çözülerek hesaplanır. Eliptik denklemler, tüm noktadaki çözümün tüm alan etrafındaki sınır koşullarına göre eşzamanlı olarak belirlenmesi gereken sınır değer problemleri verir [7]. Eliptik denklemlerle ilişkili sınır koşulları genellikle parabolik ve hiperbolik denklemlerden farklıdır.

## 2.1.2 Parabolik Denklemler

Parabolik kısmi diferansiyel denklem,  $u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$  ve  $u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq l$  koşullarına tabi olan ısı veya difüzyon denklemdir

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Biz

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

formunun parabolik kısmi diferansiyel denklemini içeren bir problemin sayısal çözümünü ele alacağız. Burada ele alınan fiziksel sorun, her bir enine kesit elemanında eşit bir sıcaklığa sahip olan  $l$  uzunluğundaki bir çubuk boyunca (bkz. Şekil 2.1) ısı akışı ile ilgilidir. Bu, çubuğun yan yüzeyinde mükemmel bir şekilde yalıtılmasını gerektirir. Sabit  $\alpha$ 'nın çubuktaki konumdan bağımsız olduğu varsayılır. Çubuğun oluştuğu malzemenin ısı iletkenlik özelliklerine göre belirlenir.

Şekil 2.1:  $l$  uzunluğundaki çubuk



Bu tipteki bir ısı akışı problemi için tipik kısıtlama kümelerinden biri, çubuk  $u(x,0) = f(x)$  deki ilk ısı dağılımını belirlemek ve çubuğun uçlarındaki davranışı

açıklamaktır. Örneğin, uçlar sabit tutulursa sıcaklıklar  $U_1$  ve  $U_2$ , sınır koşulları  $u(0,t) = U_1$  ve  $u(l,t) = U_2$  biçimindedir ve ısı dağılımı sınırlayıcı sıcaklık dağılımı

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x$$

e yaklaşır. Bunun yerine çubuk uçlardan ısı akmayacak şekilde yalıtılırsa sınır koşulları

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

olur. Çubuktan ısı kaçmaz ve sınırlayıcı durumda çubuk üzerindeki sıcaklık sabittir. Parabolik kısmi diferansiyel denklem, gaz difüzyonu çalışmasında da önemlidir; hatta bazı çevrelerde difüzyon denklemi olarak bilinir [8].

### 2.1.3 Hiperbolik Denklemler

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin bir örneği olan dalga denkleminin sayısal çözümünü ele alalım.

$$t > 0 \quad \text{için,} \quad u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$0 \leq x \leq l \quad \text{için,} \quad u(x,0) = f(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

olmak üzere dalga denklemi  $\alpha$  parametresine bağlı olup

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

ile gösterilir [9].

Çözümü yayılan dalgalar açısından görmemizi sağlar ve aslında hiperbolik sistemler tipik olarak dalga hareketi veya olumsuz taşıma sağlayan fiziksel süreçlerden kaynaklanır. Lineer hiperbolik sistemin basit bir örneği olarak, elastikiyet veya gaz dinamiklerinden kaynaklanan lineerleştirilmiş akustik denklemleri, basınç ve hız bozulmaları açısından olduğu gibi bir uzay boyutunda iki denklemin birinci dereceden sistemi olarak yazılabilir [10].

## 2.2 Tanımlar ve Teoremler

**Teorem 1 Ara Değer Teoremi:**  $f \in C[a, b]$  ve  $K$ ,  $f(a)$  ve  $f(b)$  arasında herhangi bir sayı ise,  $f(c) = K$  olacak şekilde bir  $c \in (a, b)$  sayısı vardır [11].

**Teorem 2 Taylor Teoremi:**  $f \in C[a, b]$ ,  $f^{(n+1)}$   $[a, b]$  de mevcut ve  $x_0 \in [a, b]$  olduğunu varsayalım. Her  $x \in [a, b]$  için,  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  olacak şekilde bir  $\zeta(x) \in (x_0, x)$  sayısı vardır. Burada

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

dir [12].

**Örnek :** Taylor serisinin en çok bilinen örnekleri şunlardır:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (|x| < \infty) \quad (2.1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (|x| < \infty) \quad (2.2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (|x| < \infty) \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x| < 1) \quad (2.4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad (|x| < 1) \quad (2.5)$$

Her durum için, dizi verilen fonksiyonu temsil eder ve belirtilen aralıkta birleşir. (2.1) - (2.5) Serileri,  $x = 0$  civarında genişletilmiş birer Taylor serisidir.  $x = 1$  civarındaki bir Taylor serisi,  $0 < x \leq 2$  olduğunda

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

dir. Bu tür seriler genellikle karmaşık fonksiyonların belirli noktadaki yaklaşık değerlerini hesaplamak için kullanılır [13].

**Tanım:(Gauss-Seidel İteratif Metod)** Denklemler form olarak benzer olduğunda, eşit aralıklı sistemleri çözmek için genellikle yinelemeli(iteratif) yöntemler kullanılır. Köşegendeki bilinmeyenleri çözerken,

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + (4 - h^2 f_{i,j})u_{i,j} = -h^2 g_{i,j}$$

den

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4 - h^2 f_{i,j}} \left( u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} - h^2 g_{i,j} \right)$$

tarafından verilen Gauss-Seidel yöntemi veya iterasyonunu elde ederiz. Her ızgara noktasında bilinmeyenlerin yaklaşık değerlerine sahipsek, bu denklem yeni değerler oluşturmak için kullanılabilir [14].

# BÖLÜM 3

## SONLU FARK METODU VE İKİNCİ

### MERTEBEDEN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL

### DENKLEMLERİN SONLU FARK METODU İLE

### ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, çalışmada kullanılan yöntemlerden biri olan sonlu fark metodlarını inceleyeceğiz. Öncelikle sonlu fark hakkında ne olduğu, nasıl türetildiği ve bir önceki bölümde de dile getirdiğimiz ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler için nasıl çözüm sağladığını inceleyeceğiz.

Amacımız, diferansiyel denklemlerin çözümlerini tahmin etmektir, yani, bazı sınır koşullarıyla birlikte bu alanın kenarları boyunca, belirli bir uzay ve / veya zaman bölgesindeki çeşitli türevlerinin arasındaki belirli bir ilişkiyi karşılayan bir fonksiyon (veya bu fonksiyona ait bazı farklı yaklaşımlar) bulmaktır. Genelde bu zor bir problemdir ve çözüm için analitik bir formül ancak nadiren bulunabilir. Sonlu fark yöntemi, diferansiyel denklemlerdeki türevleri sonlu fark yaklaşımları ile değiştirerek ilerler. Bu, büyük ama sonlu bir cebirsel denklem sisteminin diferansiyel denklem yerine çözülmesini sağlayacaktır.

Bu problemi ele almadan önce, bilinen bir fonksiyonun türevlerini, yalnızca fonksiyonun ayrı noktadaki değerlerine dayanan sonlu fark formülleri ile nasıl yaklaşık kestirebileceğimize dair daha temel soruyu ele alacağız. Diferansiyel denklemleri çözmek için sonlu fark yöntemlerinin daha sonra geliştirilmesi için bir temel sağlamanın yanı sıra, bu, mümkün olan en basit ayarda bir yaklaşımın doğruluk sırası gibi bir kaç anahtar kavramı araştırmamıza izin verecektir [15].

**Tanım : (Sonlu Fark)**  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) düğüm noktaları,  $f_i$  ler ise bu noktalardaki fonksiyonun almış olduğu değerleri olsun.  $h$  ye adım uzunluğu denir.

$f_1 - f_0, f_2 - f_1, \dots, f_n - f_{n-1}$  farklarına birinci mertebeden sonlu farklar denir. Literatürde bunlar için değişik gösterimler kullanılmaktadır.

$$f_{i+1} - f_i = \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = f_{i+\frac{1}{2}}^1$$

Yüksek mertebeden sonlu farklar aşağıdaki rekürans kurallarıyla ifade edilebilir:

$$\Delta^m f_i = \Delta^{m-1}(\Delta f_i) = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i,$$

$$\nabla^m f_i = \nabla(\nabla^{m-1} f_i) = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1},$$

$$f_i^m = f_{i+\frac{1}{2}}^{m-1} - f_{i-\frac{1}{2}}^{m-1}$$

Sonlu farklar tablosu (Tablo 3.1) gibi verilebilir [16]:

Tablo 3.1: Sonlu farklar tablosu

x	f	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
$x_0$	$f_0$				
$x_1$	$f_1$	$\Delta f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
$x_2$	$f_2$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
$x_3$	$f_3$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_2$		
$x_4$	$f_4$	$\Delta f_3$			
...					

### 3.1 $f(x)$ in Türevleri İçin Sonlu Fark Yaklaşımlarının Türetilmesi

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^4(x) + \dots \quad (3.1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^4(x) - \dots \quad (3.2)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^4(x) + \dots \quad (3.3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^4(x) - \dots \quad (3.4)$$

gibi  $f(x)$  in  $x$  civarındaki ileri ve geri Taylor açılımına dayanır.

Ayrıca serinin toplamları ve farkları:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.5)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + \dots \quad (3.6)$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{3} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.7)$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3} f'''(x) + \dots \quad (3.8)$$

ile gösterilir.

Toplamların çift türevler içerdiğini, ancak farkların yalnızca tek türevleri koruduğunu görebiliriz. Denklemler,  $f(x)$  in çeşitli türevleri için çözülebilen eş zamanlı denklemler olarak görülebilir. İlgili denklemlerin sayısı ve her denklemden tutulan terimlerin sayısı, türevin sırasına ve istenen doğruluk derecesine bağlıdır.

## 3.2 Merkezi Fark Yaklaşımları

$f'(x)$  için Denklem(3.6) nın çözümü,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \dots$$

veya

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (3.9)$$

dir. Bu ise  $f'(x)$  için 1. merkezi fark yaklaşımı olarak adlandırılır.  $O(h^2)$  terimi bize kesme hatasının  $h^2$  gibi davrandığını gösterir.

Benzer şekilde, Denklem(3.5)  $f''(x)$  için 1. merkezi fark yaklaşımı verir:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

veya

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (3.10)$$

dır. Diğer türevler için merkezi fark yaklaşımları, denklemlerden aynı şekilde elde

edilebilir. Örneğin, Denklem(3.6) ve (3.8) den  $f'(x)$  ler yok edilip,  $f''(x)$  için çözümlerse

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} + O(h^2) \quad (3.11)$$

elde edilir.

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} \quad (3.12)$$

yaklaşımın eşitliği (3.5) ve (3.7) den  $f''(x)$  yok edildikten sonra elde edilir. Tablo(3.2) sonuçları özetlemektedir.

Tablo 3.2:  $O(h^2)$  mertebesinde merkezi sonlu fark yaklaşımlarının katsayıları

	f(x-2h)	f(x-h)	f(x)	f(x+h)	f(x+2h)
$2hf'(x)$		-1	0	1	
$h^2f''(x)$		1	-2	1	
$2h^3f'''(x)$	-1	2	0	-2	1
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

### 3.3 1. Merkezi Olmayan Sonlu Fark Yaklaşımları

Merkezi sonlu fark yaklaşımları her zaman kullanılamaz. Örneğin, fonksiyonun  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  gibi  $n$  farklı noktada verildiği durumu düşünelim. Merkezi farklar  $x$  in her iki tarafındaki fonksiyonun değerlerini kullandığından,  $x_0$  ve  $x_n$  deki türevleri hesaplayamayız. Açık ki, fonksiyonun sadece  $x$  in bir tarafından değerlendirilmesini gerektiren sonlu fark ifadelerine ihtiyaç vardır. Bu ifadeler ileri ve geri sonlu fark yaklaşımları olarak adlandırılır.

Merkezi olmayan sonlu farklar, (3.1)-(3.8) denklemlerinden elde edilebilir.  $f'(x)$  için Denklem(3.1) 'yı çözdüğümüzde

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{6}f'''(x) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(x) - \dots$$

elde ederiz. Sağ taraftaki yalnızca ilk terimi tutmak, ilk ileri fark tahminine yol açar:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h). \quad (3.13)$$

Benzer şekilde, Denklem(3.2) ilk geriye doğru fark yaklaşımını verir:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h). \quad (3.14)$$

Burada kesme hatasının  $O(h)$  olduğuna ve merkezi fark yaklaşımlarında  $O(h^2)$  kadar iyi olmadığına dikkat edelim.

Daha yüksek türevler için yaklaşık değerleri aynı şekilde türetebiliriz. Örneğin, Denklem(3.1) ve (3.3) ten

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h) \quad (3.15)$$

elde edilir.

Üçüncü ve dördüncü türevler benzer bir şekilde türetilebilir. Sonuçlar Tablo(3.3) ve (3.4) de gösterilmektedir.

Tablo 3.3:  $O(h)$  mertebesinden İleri Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları

	f(x)	f(x+h)	f(x+2h)	f(x+3h)	f(x+4h)
$2hf'(x)$	-1	1			
$h^2f''(x)$	1	-2	1		
$2h^3f'''(x)$	-1	3	-3	1	
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Tablo 3.4:  $O(h)$  mertebesinden Geriye Doğru Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları

	f(x-4h)	f(x-3h)	f(x-2h)	f(x-h)	f(x)
$2hf'(x)$		-1	0	-1	1
$h^2f''(x)$				-2	1
$2h^3f'''(x)$	-	-1	3	-3	1
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

### 3.4 2. Merkezi Olmayan Fark Yaklaşımları

$O(h)$  mertebesinden sonlu fark yaklaşımları ve 1. merkezi fark yaklaşımları her zaman kullanılmadığından dolayı popüler değildir. Yaygın uygulama  $O(h^2)$  ifadelerini

kullanmaktadır. Bu merkezi olmayan fark formüllerini elde etmek için Taylor serisinde daha fazla terimi korumalıyız. Örnek olarak,  $f'(x)$  ifadesini üretiyoruz.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \dots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \dots$$

olan Denklem(3.1) ve (3.3) ile başlıyoruz.

İlk denklemi 4 ile çarpıp ikinci denklemden çıkararak  $f''(x)$  i ortadan kaldırıyoruz.

Sonuç ise ,

$$f(x+2h) - 4f(x+h) = -3f(x) - 2hf'(x) + \frac{h^4}{2}f^{(4)}(x) + \dots$$

dir ve dolayısıyla

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + \frac{h^2}{4}f^{(4)}(x) + \dots$$

veya

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2) \quad (3.16)$$

dir.

Denklem(3.16) ya 2. ileri sonlu fark yaklaşımı denir. Daha yüksek türevler için sonlu fark yaklaşımlarının türetilmesi ek Taylor serilerini içerir. Dolayısıyla,  $f''(x)$  için ileri fark yaklaşımı,  $f(x+h)$ ,  $f(x+2h)$  ve  $f(x+3h)$  için seriyi kullanır;  $f'''(x)$  için yaklaşım,  $f(x+h)$ ,  $f(x+2h)$ ,  $f(x+3h)$ ,  $f(x+4h)$  için Taylor açılımlarını içerir ve bu böyle devam eder. Gördüğümüz gibi yüksek mertebeden türevler için hesaplamalar oldukça sıkıcı hale gelebilir. Hem ileri hem de geri sonlu farklar için sonuçlar Tablo(3.5) ve Tablo(3.6) de özetlemiştir [17].

Tablo 3.5:  $O(h^2)$  mertebesinde İleri Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları

	f(x)	f(x+h)	f(x+2h)	f(x+3h)	f(x+4h)	f(x+5h)
$2hf'(x)$	-3	4	-1			
$h^2f''(x)$	2	-5	4	-1		
$2h^3f'''(x)$	-5	18	24	14	-3	
$h^4f^{(4)}(x)$	3	-14	26	-24	11	-2

Tablo 3.6:  $O(h^2)$  mertebesinde Geriye Doğru Sonlu Fark Yaklaşımlarının Katsayıları

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2hf'(x)$				1	-4	3
$h^2f''(x)$				4	-5	2
$2h^3f'''(x)$	3	-14	24	-18	5	
$h^4f^{(4)}(x)$	-2	11	-24	26	-14	3

### 3.5 Lineer Problemler İçin Sonlu Fark Methodu

Bu bölümdeki yöntemler daha iyi kararlılık özelliklerine sahiptir, ancak genellikle belirli bir doğruluğu elde etmek için daha fazla hesaplama gerektirirler.

$a \leq x \leq b$  için  $y(a) = \alpha$  ve  $y(b) = \beta$  lineer ikinci mertebeden sınır değer problemi

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad (3.17)$$

için sonlu farklar yöntemi, hem  $y'$  hem de  $y''$  yi yaklaşık olarak tahmin etmek için fark-bölüm yaklaşımlarının kullanılmasını gerektirir.

İlk olarak,  $N > 0$  tam sayısını seçeriz ve  $[a, b]$  aralığını uç noktaları adım noktaları olan  $(N + 1)$  eşit alt aralığa böleriz,  $i = 0, 1, \dots, N + 1$  için, burada  $h = (b - a)/(N + 1)$  olur. Adım boyutunu  $h$  yi bu şekilde seçmek, bir matris algoritmasının uygulanmasını kolaylaştırır.

İç adım noktalarında,  $x_i, i = 1, 2, \dots, N$  için, yaklaşım denklemi

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \quad (3.18)$$

dir.

$y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$  fonksiyonunun  $x = x_i$  civarındaki 3. Taylor polinomu alınıp  $x$  yerine önce  $x_{i+1}$ , sonra  $x_{i-1}$  konursa  $\zeta_i^+ \in (x_i, x_{i+1})$  ve  $\zeta_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$  olmak üzere

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\zeta_i^+)$$

ve

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\zeta_i^-)$$

elde edilir.

Bu denklemler toplanırrsa,

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + \frac{h^4}{24} [y^4(\zeta_i^+) + y^4(\zeta_i^-)]$$

elde edilir ve buradan  $y''(x_i)$  için çözümlürse

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2} [y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24} [y^4(\zeta_i^+) + y^4(\zeta_i^-)]$$

ve dolayısıyla ara değer teoremi ile  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  için

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2} [y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12} y^4(\zeta_i) \quad (3.19)$$

elde edilir. Buna  $y''(x_i)$  için ortalama fark formülü denir.  $y'(x_i)$  için bir ortalama fark formülü benzer şekilde elde edilir ve  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  de  $\eta_i$  için

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h} [y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i) \quad (3.20)$$

ile sonuçlanır.

Bu ortalama fark formülleri Denklem(3.18) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} \\ &= p(x_i) \left[ \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12} [2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^4(\zeta_i)] \end{aligned}$$

olur.

Her  $i = 1, 2, \dots, N$  için lineer denklemler  $\omega_0 = \alpha$  ,  $\omega_{N+1} = \beta$  ve

$$\left( \frac{-\omega_{i+1} + 2\omega_i - \omega_{i-1}}{h^2} \right) + p(x_i) \left( \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)\omega_i = -r(x_i) \quad (3.21)$$

sistemini tanımlamak için bu denklemi  $y(a) = \alpha$  ve  $y(b) = \beta$  sınır koşulları ile birlikte kullanarak,  $O(h^2)$  mertebeden kesme hatası olan bir sonlu fark yöntemi ortaya koyar.

Ele aldığımız formda, Denklem(3.21)

$$-(1 + \frac{h}{2}p(x_i))\omega_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))\omega_i - (1 - \frac{h}{2}p(x_i))\omega_{i+1} = -h^2r(x_i)$$

olarak yeniden yazılır ve

$$A\omega = b \quad (3.22)$$

formunda bir denklem sistemi elde edilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2q(x_1) & -1 + \frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2}p(x_2) & 2 + h^2q(x_2) & -1 + \frac{h}{2}p(x_2) & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 + \frac{h}{2}p(x_N) \\ 0 & \dots & \dots & -1 + \frac{h}{2}p(x_N) & 2 + h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{N-1} \\ \omega_N \end{bmatrix}$$

ve

$$b = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + (1 + \frac{h}{2}p(x_1))\omega_0 \\ -h^2r(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_N) + (1 - \frac{h}{2}p(x_N))\omega_{N+1} \end{bmatrix}$$

dir.

### 3.6 Lineer Olmayan Problemler İçin Sonlu Fark Denklemleri

En genel lineer olmayan ikinci mertebeden sınır değer problemi  $a \leq x \leq b$  için ,  $y(a) = \alpha$  ve  $y(b) = \beta$  olmak üzere  $y'' = f(x, y, y')$  ile gösterilir. Uygulanacak yöntem benzerdir ancak burada denklem sistemi lineer olmayacaktır, bu nedenle onu çözmek için yinelemeli bir süreç gereklidir.

Prosedürün geliştirilmesi için,  $f$  nin aşağıdaki koşulları sağladığı varsayıyoruz:

- $f, f_y$  ve  $f'_y$  kısmi türevlerinin tümü  $D = \{(x, y, y') | a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty \text{ ve } -\infty < y' < \infty\}$  üzerinde süreklidir;
- $D$  üzerinde bazı  $\delta > 0$  için,  $f_y(x, y, y') \geq \delta$  ;
- $k = \max_{(x, y, y') \in D} |f_y(x, y, y')|$  ve  $L = \max_{x, y, y' \in D} |f'_y(x, y, y')|$  ile birlikte  $k$  ve  $L$  sabitleri mevcuttur.

Lineer durumda olduğu gibi,  $[a, b]$  aralığını  $i = 0, 1, \dots, N + 1$  için uç noktaları  $x_i = a + ih$  olan  $(N+1)$  eşit alt aralığa böleriz. Genel çözümün sınırlı bir dördüncü türevi olduğunu varsayarsak,

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$$

denklemlerinin her birinde  $y''(x_i)$  ve  $y'(x_i)$  için uygun merkezi fark formülleri kullanabiliriz. O halde, her  $i = 1, 2, \dots, N$  için

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\zeta_i)$$

$(x_{i-1}, x_{i+1})$  aralığında  $\zeta_i$  ve  $\eta_i$  vardır.

Lineer durumda olduğu gibi, fark yöntemi hata terimlerinin silinip, her  $i = 1, 2, \dots, N$  için  $\omega_0 = \alpha, \omega_{N+1} = \beta$  sınır koşullarının kullanılmasıyla

$$-\frac{\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, \omega_i, \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

fark denklemi elde edilir. Bu yöntemden elde edilen  $N \times N$  lineer olmayan,

$$\begin{aligned} 2\omega_1 - \omega_2 + h^2 f\left(x_1, \omega_1, \frac{\omega_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha &= 0 \\ -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 + h^2 f\left(x_2, \omega_2, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2h}\right) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \omega_{N-2} + 2\omega_{N-1} - \omega_N + h^2 f\left(x_{N-1}, \omega_{N-1}, \frac{\omega_N - \omega_{N-2}}{2h}\right) &= 0 \\ -\omega_{N-1} + 2\omega_N + h^2 f\left(x_N, \omega_N, \frac{\beta - \omega_{N-1}}{2h}\right) - \beta &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

sistemi,  $h < \frac{2}{L}$  olması koşuluyla tek bir çözüme sahiptir [18].

### 3.7 Sonlu Farkların Özellikleri

i) m. mertebeden sonlu fark

$$\Delta^m f_0 = f_m - \frac{m}{1!} f_{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} f_{m-2} + \dots + (-1)^m f_0 \quad (3.24)$$

formülü ile gösterilir. Bu formül m'ye göre tümevarım metoduyla kolayca ispatlanabilir.

ii)  $x_i = x_0 + ih$  ise, bölünmüş farklarla sonlu farklar arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \frac{\Delta^m f_i}{h^m m!} \quad (3.25)$$

(3.25) formülü de tümevarım metoduyla ispatlanabilir. Gerçekten de,  $m = 1$  için  $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f_i}{h}$  yazılabilir, yani (3.25) doğrudur. (3.25) formülünün  $m \leq 1$  değerlerinde doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l+1}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+l+1}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l+1}]}{x_{i+l+1} - x_i} = \frac{\Delta^l f_{i+1} - \Delta^l f_i}{h^l l! h(l+1)} = \frac{\Delta^{l+1} f_i}{h^{l+1} (l+1)!}$$

olur, yani (3.25) formülü  $m = l + 1$  için de doğrudur. Böylece (3.25) formülü ispatlanmış olur.

Benzer yolla

$$f[x_{i-m}, \dots, x_i] = \frac{\nabla^m f_i}{h^m m!}$$

formülü de ispatlanabilir.

iii)  $f[x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f_\zeta^{n+1}}{(n+1)!}$  formülüne göre

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \frac{f^m(\zeta)}{m!}, \quad x_i \leq \zeta \leq x_{i+m}$$

olur. Bu bağıntı (3.25) ile kıyaslanırsa,

$$\Delta^m f_i = \nabla^m f_{i+m} = \frac{f_{i+m}^m}{2} = h^m f^m(\zeta) \quad (3.26)$$

elde edilir. Buradan n. dereceden polinomun n. sonlu farklarının sabit, daha yüksek farkların ise sıfır olduğu görülebilir [19].

### 3.8 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler İçin Sonlu Fark

Zamanın değişkenlerden biri olmadığı tipik bir kısmi türevli denklem, iki değişkenli

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.27)$$

Laplace denklemdir. Bu denklemde  $u$ ,  $(x, y)$  nin bir fonksiyondur. (3.27) denklemini içeren somut bir fiziksel problem, aynı zamanda çözümün arandığı  $xy$ -düzleminin belirlenmiş bir  $\Omega$  bölgesini de içermelidir ve  $u$  üzerine ( $\Omega$  nın sınırı üzerinde  $u$  nun veya onun normalinin verilmesi gibi) sınır koşulları yerleştirilmelidir.  $R^2$  de bir  $\Omega$  bölgesi ile ilgilenilirken,  $\Omega$  nın açık bir küme olmasını varsayıyoruz.  $\Omega$  nın sınırını  $\partial\Omega$  ile ve kapanışını da  $\bar{\Omega}$  ile gösteriyoruz. Böylece  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  dir.

Fiziğin ısı, elektrik ve diğer birçok branşında görünen bir problem Dirichlet problemidir. İki-boyutlu versiyonunda;  $R^2$  nin bir açık  $\Omega$  bölgesi belirlenmekte ve  $\Omega$  nin sınırı üzerinde tanımlı bir  $g$  fonksiyonu verilmektedir. Daha sonra,  $\bar{\Omega}$  da sürekli olan,  $\Omega$  da Laplace denklemini sağlayan ve sınırdaki  $g$  ye eşit olan bir  $u$  fonksiyonu aranmaktadır.

Bunlar

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \Omega \text{ da} \\ u(x, y) = g(x, y) & \partial\Omega \text{ da} \\ \bar{\Omega} \text{ da } u \text{ sürekli} \end{cases} \quad (3.28)$$

şeklinde özetlenir. Eğer  $\Omega$  üzerindeki kısıtlamalar uygun ise ve  $g$  sürekli ise, bu durumda Dirichlet probleminin tek bir çözüme sahip olduğu ispatlanabilir.

Bazı sayısal teknikleri açıklamak için, Dirichlet problemini bir kare üzerinde göz önüne alacağız.

Açıklayıcı problemde, bölge  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  açık birim diktörtgenidir.

Problem(3.28) in sayısal çözümüne bir yaklaşım türevlere sonlu-farklar yaklaşımları uygulamaktadır. Bunun için

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + O(h^2) \quad (3.29)$$

formülü kullanılabilir. Öncelikle,  $\bar{\Omega}$  da ızgara noktalarının bir

$$(x_i, y_i) = (ih, jh) \quad (0 \leq i, j \leq n+1) \quad h = \frac{1}{n+1} \quad (3.30)$$

ağı oluşturulur. Dikkat edilirse, her iki değişken için de aynı adım uzunluğu kullanılmaktadır. Sonra,  $(x_i, y_i)$  ağ noktalarında (3.27) diferansiyel denklemi, o noktalardaki

$$\frac{1}{h^2}[v_{i-1,j} - 2v_{ij} + v_{i+1,j}] + \frac{1}{h^2}[v_{i,j-1} - 2v_{ij} + v_{i,j+1}] = 0$$

veya

$$4v_{ij} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1} = 0 \quad (3.31)$$

sonlu-fark benzeri ile değiştirilir. Burada,  $v_{ij}$ ,  $u(x_i, y_i)$  ye yaklaşımı göstermektedir. Farklı bir değişken kullanmamızın nedeni, iki farklı problemin çözümlerini ayırt etmek istememizdir; birincisi ayrık problem yani, sonlu-fark denklemi ve ikincisinde sürekli problem yani, orijinal kısmi türevli denklem.

$i = 0$  veya  $i = n + 1$  için ve  $j = 0$  veya  $j = n + 1$  için  $v_{ij}$  değerleri bilinmektedir, çünkü bunlar problemde ( $g$  fonksiyonu ile) önceden belirlenmiş sınır değerlerdir. O halde, Denklem(3.31) de, bazı  $v_{ij}$  değerleri bilinmezken, bazıları da bilinmektedir. Bunun anlamı ise, bilinen tüm değerler sağ tarafa aktarılacağından dolayı, homojen olmayan bir lineer denklem sistemini çözeceğiz demektir. Basit bir durumu görmek için,  $n = 3$  alalım. Her bir iç ızgara noktası için (3.31) tipinde bir denklem vardır.

Bu problemdeki bilinmeyen nicelikler (ızgara noktalarının farklı dizilişlerine karşılık gelmek üzere) değişik şekilde sıralanabilirler. Bunların içinden, doğal sıralama olarak bilinen  $v = [v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, v_{13}, v_{23}, v_{33}]$  sıralamasını seçelim. Benzer şekilde, dokuz lineer denklem de farklı şekillerle sıralanabilir. Bunların sıralamasını, Denklem(3.31) ile onun  $(x_i, y_i)$  merkez noktasını ilişkilendirilip, sonra da denklemleri noktalar ile aynı şekilde sıralayarak yapalım. Tüm bilinen değerler sağ tarafta yazılmak üzere, sonuç şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} 4v_{11} - v_{21} - v_{12} &= v_{10} + v_{01} \\ 4v_{21} - v_{11} - v_{31} - v_{22} &= v_{20} \\ 4v_{31} - v_{21} - v_{32} &= v_{30} + v_{41} \\ 4v_{12} - v_{11} - v_{22} - v_{13} &= v_{02} \\ 4v_{22} - v_{21} - v_{12} - v_{32} - v_{23} &= 0 \\ 4v_{32} - v_{31} - v_{22} - v_{33} &= v_{42} \\ 4v_{13} - v_{12} - v_{23} &= v_{03} + v_{14} \\ 4v_{23} - v_{22} - v_{13} - v_{33} &= v_{24} \end{aligned}$$

$$4v_{33} - v_{32} - v_{23} = v_{43} + v_{34}$$

Bu sistem, A matrisi  $9 \times 9$  olmak üzere,  $Av = b$  formuna sahiptir. 81 elemandan sadece 33 tanesi sıfırdan farklı olup, katsayı matrisi aşağıdadır.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Bu matriste temel blok yapısı belirtilmektedir. Aşık gösterimle

$$A = \begin{bmatrix} T & -I & 0 \\ -I & T & -I \\ 0 & -I & T \end{bmatrix}$$

yazabiliriz.

Bir model olarak yukarıdaki özel durumdan,  $n$  herhangi bir tamsayı olmak üzere, genel duruma geçelim. İç ızgara noktalarının sayısı  $n^2$  olup, bu noktaların her biri ile bir  $u_{ij} = u(x_i, y_i)$  bilinmeyen değeri ilişkilendirmekteyiz.  $u$  fonksiyonu Denklem(3.28) nin bir çözümü olmaktadır. Bu işlemlerden sonra,  $n^2$  tane ( $1 \leq i \leq n$  ve  $1 \leq j \leq n$ ) bilinmeyenli bir lineer denklem sistemine sahip oluruz [20].

### 3.9 Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemler Sonlu Farkı

Göz önünde bulundurduğumuz eliptik kısmi diferansiyel denklem,

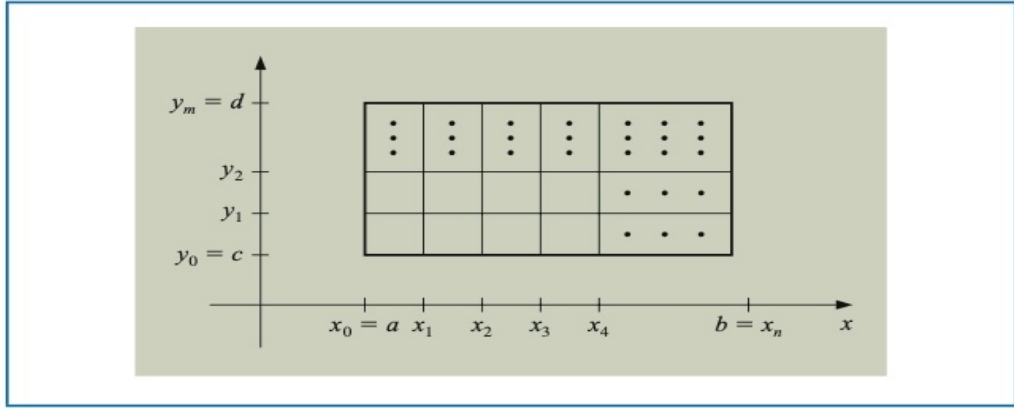
$R = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$  üzerinde

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \quad (3.32)$$

$(x, y) \in S$  için  $u(x, y) = g(x, y)$  ile Poisson denklemdir, burada  $S$ ,  $R$ 'nin sınırını gösterir. Eğer  $f$  ve  $g$  kendi alanlarında sürekli ise, o zaman bu denklemin tek türlü bir çözümü vardır.

Bir ızgara seçme yöntemini kullanalım, bu lineer sınır değer problemleri için Sonlu Fark yönteminin iki boyutlu bir uyarlamasıdır.

İlk adım, adım boyutları  $h = \frac{(b-a)}{n}$  ve  $k = \frac{(d-c)}{m}$  yi tanımlamak için  $n$  ve  $m$  tam sayılarını seçmektir.  $[a, b]$  aralığı  $h$  genişliğinin  $n$  eşit parçasına ve  $[c, d]$  aralığı  $k$  genişliğinin  $m$  eşit parçalarına Şekil(3.1) deki gibi bölünsün.



Şekil 3.1:  $[a, b]$  aralığının  $h$  adım uzunluğu ile  $n$  ve  $[c, d]$  aralığının  $k$  adım uzunluğu ile  $m$  eşit parçaya bölünüşü

$(x_i, y_j)$  koordinatlarına sahip noktalardan dikey ve yatay çizgiler çizerek  $R$  dikdörtgenine bir ızgara yerleştirelim; burada her  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $x_i = a + ih$  ve her  $j = 0, 1, \dots, m$  için  $y_j = c + jk$  dir.

$x = x_i$  ve  $y = y_j$  çizgileri ızgara çizgileridir ve bunların kesişimleri, ızgaranın düğüm noktalarıdır.  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  ve  $j = 1, 2, \dots, m - 1$  için ızgaranın iç kısmındaki her bir düğüm noktası için,  $(x_i, y_j)$ ,  $x$  ile ilgili  $x_i$  değişkenindeki Taylor serisini,  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  olduğu yerde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, y_j) \quad (3.33)$$

ortalama fark formülünü oluşturmak için kullanabiliriz.

Ayrıca,  $y_j$  civarında  $y$  değişkenindeki Taylor serisini,  $\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$  nin olduğu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \zeta_j) \quad (3.34)$$

merkezli fark formülünü oluşturmak için kullanabiliriz.

Denklemler(3.32) de bu formülleri kullanmak, Poisson denklemini  $(x_i, y_j)$

noktalarındaki her  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  ve  $j = 1, 2, \dots, m - 1$  için

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2}$$

$$= f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, y_j) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \zeta_j)$$

olarak ifade etmemizi sağlar. Sınır koşulları her

$$j = 0, 1, 2, \dots, m \quad \text{için} \quad u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j) \quad \text{ve} \quad u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j);$$

$$\text{her} \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad \text{için} \quad u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0) \quad \text{ve} \quad u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m) \text{ dir.}$$

Fark denklem formunda, bu Sonlu Fark metoduyla sonuçlanır:

Her  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  ve  $j = 1, 2, \dots, m - 1$  için

$$2 \left[ \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] \omega_{ij} - (\omega_{i+1, j} + \omega_{i-1, j}) - \left( \frac{h}{k} \right)^2 (\omega_{i, j+1} + \omega_{i, j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j) \quad (3.35)$$

$$\text{ve her bir } j = 0, 1, \dots, m \text{ için} \quad \omega_{0j} = g(x_0, y_j) \quad \text{ve} \quad \omega_{nj} = g(x_n, y_j); \quad (3.36)$$

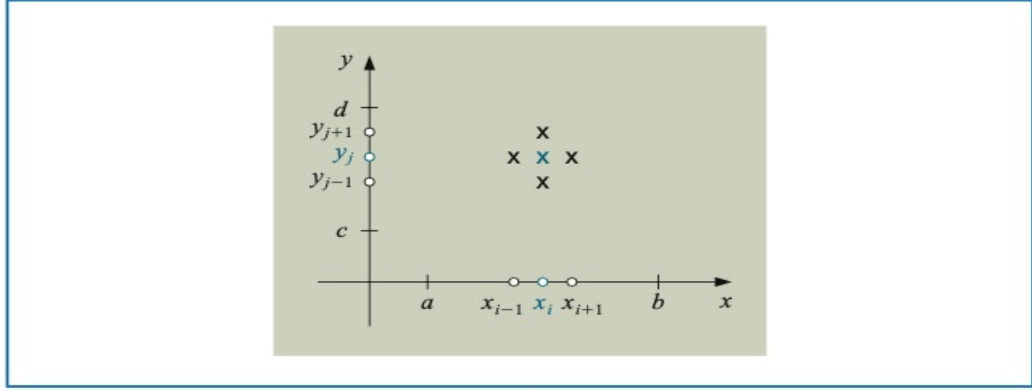
$$\text{her bir } i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ için} \quad \omega_{i0} = g(x_i, y_0) \quad \text{ve} \quad \omega_{im} = g(x_i, y_m)$$

burada  $\omega_{ij}$ ,  $u(x_i, y_j)$  ye yapılan bir yaklaşımdır. Bu yöntemde  $O(h^2 + k^2)$  yerel kesme hatası vardır.

(3.35) deki tipik denklem,  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  ve  $(x_i, y_{j+1})$  noktalarında  $u(x, y)$  ye yaklaşımları içerir. Bu noktaların bulunduğu ızgaranın bölümünü yeniden oluşturmak (bkz. Şekil 3.2), her denklemin  $(x_i, y_j)$  de mavi X etrafında yıldız şeklindeki bir bölgedeki yaklaşımları içerdiğini gösterir.

(3.35) ile verilen sistemde uygun olduğu durumlarda sınır koşullarındaki (3.36) bilgileri kullanırız; yani, bir sınır düğüm noktasına bitişik tüm  $(x_i, y_j)$  noktalarında kullanırız.

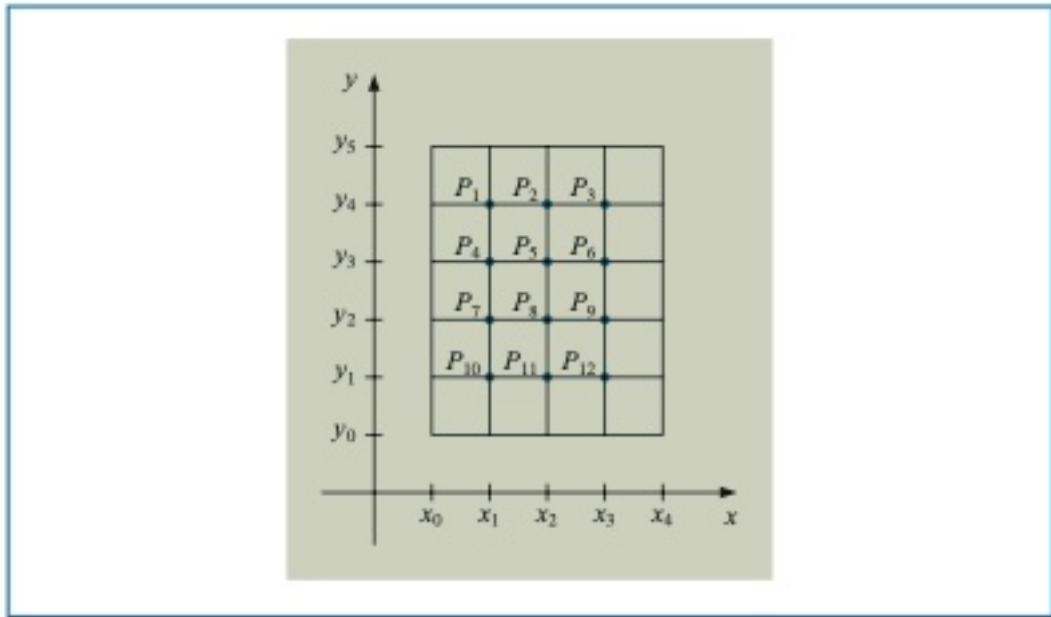
Bu, iç düğüm noktalarında bilinmeyenlerin  $\omega_{i,j}$  den  $u(x_i, y_j)$  ye yaklaştırıldığı bir  $(n - 1)(m - 1) \times (n - 1)(m - 1)$  lineer sistemi üretir. Bu bilinmeyenleri içeren lineer sistem, iç düğüm noktalarının yeniden etiketlenmesi devreye sokulursa, matris hesaplamaları için daha verimli bir şekilde ifade edilir. Bu noktaların tavsiye edilen bir etiketlemesi,  $P_l = (x_i, y_j)$  ve  $\omega_l = \omega_{ij}$ , burada  $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ , her  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  ve  $j = 1, 2, \dots, m - 1$  için izin vermektir. Bu, ızgara noktalarını soldan sağa ve yukarıdan aşağıya ard arda etiketler. Noktaların bu şekilde etiketlenmesi,  $\omega_{ij}$  i belirlemek için gereken sistemin en fazla  $2n - 1$  bant genişliğine sahip bantlı bir



Şekil 3.2:  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  ve  $(x_i, y_{j+1})$  noktalarında ızgara bölümlerinin yeniden oluşturulması

matris olmasını sağlar.

Örneğin,  $n = 4$  ve  $m = 5$  ile yeniden etiketleme, noktaları Şekil(3.3) de gösterilen bir ızgarayla sonuçlanır.



Şekil 3.3:  $(n - 1)(m - 1) \times (n - 1)(m - 1)$  lineer sisteminin  $n = 4$  ve  $m = 5$  ile yeniden etiketlenmiş hali

### 3.10 Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemler Sonlu Farkı

Düşündüğümüz parabolik kısmi diferansiyel denklem,

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{ve}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

koşullarına tabi olan ısı veya difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.37)$$

dir.

Bu sorunun çözümünü yaklaşık olarak tahmin etmek için kullandığımız yaklaşım, sonlu farklar içerir. Önce bir  $m > 0$  tamsayısı seçelim ve x-eksen adım boyutu  $h = l/m$  yi tanımlayalım. Sonra bir zaman adımı boyutu  $k$  seçelim. Bu durum için düğüm noktaları  $(x_i, t_j)$  dir, burada  $i = 0, 1, \dots, m$  için  $x_i = ih$  ve  $j = 0, 1, \dots$  için  $t_j = jk$  dir.

İleri Fark Yönteminden yararlanalım. Bazı  $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \quad (3.38)$$

fark katsayısını oluşturmak  $t$  deki Taylor serisini ve  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  deki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \quad (3.39)$$

fark katsayısını oluşturmak  $x$  teki Taylor serisini kullanarak fark yöntemini elde ederiz.

Parabolik kısmi diferansiyel denklem (3.37),  $(x_i, t_j)$  iç düğüm noktalarında, her bir  $i = 1, 2, \dots, m-1$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

eşitliğine sahip olduğumuz anlamına gelir, bu nedenle (3.38) ve (3.39) fark katsayılarını kullanan fark yöntemi,  $\omega_{i,j}$  nin  $u(x_i, t_j)$  ye yaklaştığı

$$\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (3.40)$$

dır.

Bu fark denklemi için yerel kesme hatası

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \quad (3.41)$$

dir.

$\omega_{i,j+1}$  için Denklem(3.40) ı çözmek, her  $i = 1, 2, \dots, m$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$\omega_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) \omega_{i,j} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}) \quad (3.42)$$

eşitliğini verir.

Yani  $\omega_{0,0} = f(x_0)$ ,  $\omega_{1,0} = f(x_1)$ , ...,  $\omega_{m,0} = f(x_m)$  dir.

$$\begin{aligned} \omega_{0,1} &= u(0, t_1) = 0; \\ \omega_{1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) \omega_{1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (\omega_{2,0} + \omega_{0,0}); \\ \omega_{2,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) \omega_{2,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (\omega_{3,0} + \omega_{1,0}); \\ &\vdots \\ \omega_{m-1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) \omega_{m-1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (\omega_{m,0} + \omega_{m-2,0}); \\ \omega_{m-1} &= u(m, t_1) = 0 \end{aligned}$$

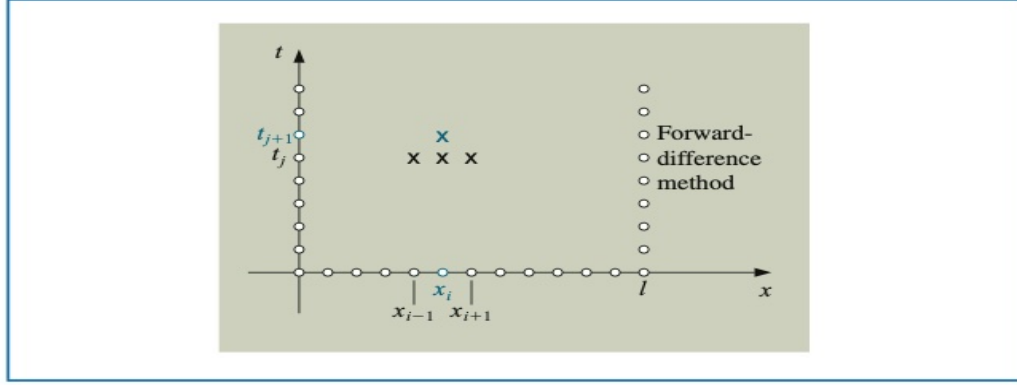
eşitliğine göre bir sonraki t satırını oluşturuyoruz.

Artık tüm  $\omega_{i,2}$  değerlerini vb. oluşturmak için  $\omega_{i,1}$  değerlerini kullanabiliriz. Fark yönteminin açık doğası gereği, bu sistemle ilişkili  $(m-1) \times (m-1)$  matrisinin,  $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$  olduğu yerde köşegen şeklinde

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

yazılabileceğini belirtir.

$\omega^{(j)} = (\omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \dots, \omega_{m-1,j})^t$ , her  $j = 1, 2, \dots$  için, dolayısıyla  $\omega^{(j)}$ ,  $\omega^{(j-1)}$  den basit bir matris çarpımı ile elde edilir. Bu, İleri Fark yöntemi olarak bilinir ve Şekil(3.4) de gösterilen camgöbeği noktasındaki yaklaşım, o şekilde işaretlenen diğer noktalardan gelen bilgileri kullanır. Kısmi diferansiyel denklemin çözümü  $x$  de dört ve  $t$  de iki tane sürekli kısmi türevi varsa, Denklem(3.41), yöntemin  $O(k + h^2)$  mertebesinde olduğunu gösterir.



Şekil 3.4: İleri Fark metodu

Geri fark yöntemi için ise koşulsuz olarak kararlı olan bir yöntem elde etmek için,  $\mu_j$  nin  $(t_{j-1}, t_j)$  de olduğu

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

eşitlik de  $(\partial u / \partial t)(x_i, t_j)$  için geriye doğru fark katsayısının kullanılmasından kaynaklanan bir fark yöntemini dikkate alıyoruz.

Bu denklemi,  $\partial^2 u / \partial x^2$  için Denklem(3.39) da yerine koyarsak bu kısmi diferansiyel denklem, bazı  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  için

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ = -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \end{aligned}$$

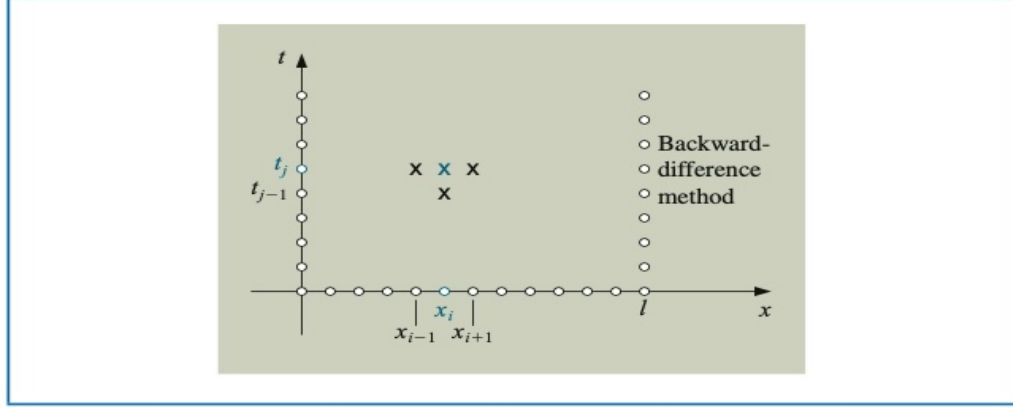
eşitliğini verir.

Her bir  $i = 1, 2, \dots, m-1$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için ortaya çıkan Geriye Fark yöntemi

$$\frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (3.43)$$

dır.

Geriye Doğru Fark yöntemi, Şekil(3.5)de gösterildiği gibi  $(x_i, t_j)$  deki değere yaklaşmak için  $(x_i, t_{j-1})$ ,  $(x_{i-1}, t_j)$  ve  $(x_{i+1}, t_j)$  düğüm noktalarını içerir.



Şekil 3.5: Geri Fark metodu

Problemlerle ilişkili sınır ve başlangıç koşulları daire içine alınmış düğüm noktalarında bilgi verdiği için, şekil Denklem(3.43) ü çözmek için açık prosedürlerin kullanılmayacağını göstermektedir. Geri fark yönteminde (bkz. Şekil 3.4),  $(x_i, t_j)$  teki yaklaşımı bulmak için  $(x_{i-1}, t_{j-1})$ ,  $(x_i, t_{j-1})$  ve  $(x_{i+1}, t_{j-1})$  teki yaklaşımların kullanıldığını hatırlayın. Bu nedenle, başlangıç ve sınır koşullarından gelen bilgilere dayalı olarak yaklaşımları bulmak için açık bir yöntem kullanılabilir.

Yine  $\lambda$  nın  $\alpha^2(k/h^2)$  miktarını gösterdiği varsayımıyla Geri Fark yöntemi  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$(1 + 2\lambda)\omega_{i,j} - \lambda\omega_{i+1,j} - \lambda\omega_{i-1,j} = \omega_{i,j-1}$$

olur. Her bir  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  için  $\omega_{i,0} = f(x_i)$  için, her  $j = 1, 2, \dots$  için  $\omega_{m,j} = \omega_{0,j} = 0$  in matris gösterimine sahip olduğu bilgisini kullanarak, bu fark yöntemi matris gösterimine sahiptir:

Her bir  $i = 1, 2, \dots$  için  $A\omega^{(j)} = \omega^{(j-1)}$  veya

$$A\omega = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{1,j-1} \\ \omega_{2,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Bu nedenle,  $\omega^{(j-1)}$  den  $\omega^{(j)}$  i elde etmek için şimdi lineer bir sistem çözmeliyiz, ancak  $\lambda > 0$ , dolayısıyla A matrisi pozitif tanımlı ve kesinlikle köşegen olarak baskın ve aynı zamanda üçgenseldir.

### 3.11 Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemler Sonlu Farkı

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin bir örneği olan dalga denkleminin sayısal çözümünü ele alalım. Dalga denklemi,  $\alpha$  nın problemin fiziksel koşullarına bağlı bir sabit olduğu  $t > 0$  için  $u(0,t) = u(l,t) = 0$ ,

$$0 \leq x \leq l \text{ için } u(x,0) = f(x) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

koşullarına tabi olan diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.45)$$

tarafından verilir.  $h = l/m$  kullanarak x eksenini düğüm noktalarını tanımlamak için bir  $m > 0$  tamsayısı seçilir. Bir  $k > 0$  zaman adımı boyutu seçilir.  $(x_i, t_j)$  düğüm noktaları, her  $i = 0, 1, \dots, m$  ve  $j = 0, 1, \dots$  için  $x_i = ih$  ve  $t_j = jk$  tarafından tanımlanır.

Herhangi bir iç düğüm noktasında  $(x_i, t_j)$  dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0 \quad (3.46)$$

olur. Fark yöntemi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j)$$

tarafından verilen ikinci kısmi türevler için ortalananmış fark katsayısı kullanılarak elde edilir, burada  $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$  ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j)$$

burada  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  dir. Bunları Denklem(3.46) da yerine yazarsak

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

$$= \frac{1}{12} \left[ k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \right]$$

elde edilir.

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{12} \left[ k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \right] \quad (3.47)$$

hata teriminin ihmal edilmesi ile

$$\frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

fark denklemi elde edilebilir.  $\lambda = \alpha k/h$  olarak tanımlansın. Daha sonra fark denklemini

$$\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1} - \lambda^2 \omega_{i+1,j} + 2\lambda^2 \omega_{i,j} - \lambda^2 \omega_{i-1,j} = 0$$

olarak yazıp en gelişmiş zaman adım yaklaşımı olan  $\omega_{i,j+1}$  yi çözürek

$$\omega_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2) \omega_{i,j} + \lambda^2 (\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}) - \omega_{i,j-1} \quad (3.48)$$

elde edilir. Sınır koşulları

$$\text{her } j = 1, 2, 3, \dots \text{ için } \omega_{0,j} = \omega_{m,j} = 0, \quad (3.49)$$

ve başlangıç koşulu

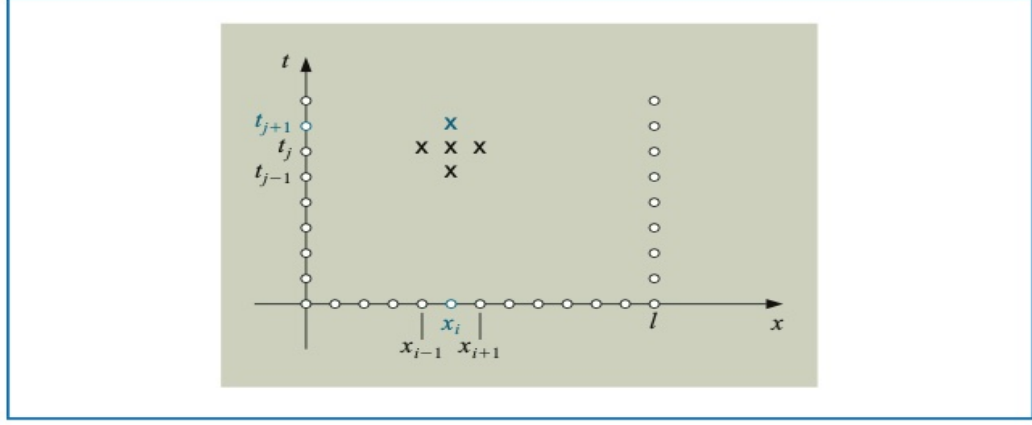
$$\text{her } i = 1, 2, \dots, m-1 \text{ için } \omega_{i,0} = f(x_i) \quad (3.50)$$

dir. Bu denklem kümesi matris biçiminde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \omega_{1,j+1} \\ \omega_{2,j+1} \\ \vdots \\ \omega_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda^2 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \vdots \\ \omega_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{1,j-1} \\ \omega_{2,j-1} \\ \vdots \\ \omega_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

sistemi elde edilir. Denklemler(3.47) ve (3.48),  $(j+1)$  zaman adımının  $(j)$  ve  $(j-1)$  zaman adımlarından değerler gerektirdiğini belirtir. (Bkz. Şekil 3.6) Bu küçük bir başlangıç problemi yaratır çünkü  $j=0$  değerleri Denklem(3.49) ile verilir, ancak  $\omega_{i,2}$  yi hesaplamak için Denklem(3.47) de gerekli olan  $j=1$  değerleri

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$



Şekil 3.6:  $(j+1)$  zaman adımının  $(j)$  ve  $(j-1)$  zaman adımları

başlangıç hız koşulundan elde edilmelidir. Bir yaklaşım,  $(0, t_1)$ deki bazı  $\tilde{\mu}_i$  için  $\frac{\partial u}{\partial t}$  yi ileri fark yaklaşımı

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \quad (3.52)$$

ile değiştirmektir. Denklemden  $u(x_i, t_1)$ 'i bulmak

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \\ &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \end{aligned}$$

verir. Kısaltma teriminin silinmesi, her  $i = 1, \dots, m-1$  için  $\omega_{i,1} = \omega_{i,0} + kg(x_i)$  yaklaşık değerini verir. Bununla birlikte, bu yaklaşımın kesme hatası sadece  $O(k)$  iken, Denklem(3.48)deki kesme hatası  $O(k^2)$  dir [21].

# **BÖLÜM 4**

## **GALERKİN METODU VE İKİNCİ DERECEDEKİ**

### **KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL**

#### **DENKLEMLERİN SONLU ELEMANLAR METODU**

#### **İLE ÇÖZÜMÜ**

#### **4.1 Galerkin Kimdir?**

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonlu elemanlar ile çözümünü incelemek istediğimizde kullanacağımız metodun sahibi olan Boris Grigoryevich Galerkin'in kim olduğunu ve hayatı boyunca hangi bilimsel çalışmalar üzerinde durduğu hakkında bilgi sahibi olmamız hem kendini bilime adanmış bilim insanına daha yakın olmamızı hem de yaptığı çalışmalarla aslında matematiğini uyguladığı alanları daha iyi analiz etmemize yardımcı olacaktır.

Boris Grigoryevich Galerkin, 20 Şubat(4 Mart) 1871'de Polotsk'ta doğdu. Polotsk'ta okulu bitirdi 1893'te Minsk'te eğitimine devam etti. Aynı yıl St. Petersburg Teknoloji Enstitüsü mekanik bölümüne girdi. Mezun olduktan ilk üç yıl sonra Boris Grigoryevich Harkov'daki Rus Mekanik ve Buharlı Lokomotif Birliği Fabrikasında bir mühendisti ve aynı zamanda işçilere özel kurslarda ders veriyordu. 1903 yılının sonundan itibaren Doğu-Çin Demiryolunun yapımında mühendis olarak görev yaptı, 6 ay sonra Kuzey Mekanik ve Kazan Fabrikası teknik departman başkanı oldu. Petersburg'da Mühendisler Birliği'nin örgütlenmesine katıldı. Çalışma kitabında Boris Grigoryevich'in 1907'den beri kazan elektrik santralinin tasarım ve yapımında mühendis olarak çalıştığı yazıyor. St.Petersburg Politeknik Enstitüsü'nde öğretmen oldu. Aynı yıl ilk bilimsel çalışması Transactions Enstitüsü'nde yayınlandı. Bu, "Bir boylamsal eğri teorisine çok katlı çerçevelere, sert bağlantılara sahip çerçevelere ve

çerçeve sistemlerine boylamsal eğri teorisi uygulaması deneyimi” idi. Bu kadar uzun isimli eserin kendisinde uzundu(130 sayfa). Boris Grigoryevcih Galerkin, mekanik bölümü yapısal mekaniği öğrencilere öğretti, yeni araştırmalar ve tasarımlar yaptı. 1911 sonbaharından bu Boris Grigoryevcih Galerkin, Kadınlar Politeknik Enstitüsü’nde de çalışıyordu. 1913’te, Rusya’da büyük yükler altında metal çerçeveli ilk bina olan St.Petersbur’daki bir kazan elektrik santrali için metalik çerçeve tasarımı üzerinde çalıştı. Avrupa mühendislik nesnelere biri olarak kabul edildi. Boris Grigoryevcih Galerkin çalışmalarını düzenli olarak Transactions ve Engineering News de yayımlandı. 1915 de plakaları araştırmaya başladı. 1915 yılında Boris Grigoryevcih Galerkin, diferansiyel denklemler sınır problemleri yaklaşık çözüm yöntemi hakkında bir fikir ileri sürdüğü bir makale yayınladı. I.G.Bubnov, varyasyonel problemlerin çözümü için benzer bir yaklaşım geliştirmeden bir süre önce, bunu Ritz metodu algoritmasının bir varyantı olarak yorumladı. Galerkin’in yönteminin ayırt edici özellikleri şöyleydi: Kendisi tarafından geliştirilen yöntemi varyasyonel problemlerin doğrudan çözümüyle ilişkilendirmenin, ancak diferansiyel denklemleri çözmek için ortak olduğunu düşündü ve olası yer değiştirmeler ilkesini kullanarak yorumladı. Bu fikirler sadece yapısal mekanikte değil, tüm matematiksel fizikte çok üretken oldu. Galerkin metodu ile Galerkin diferansiyel problem cümle formu tüm dünyada bilinmektedir. Günümüzde matematiksel fizik çözüm algoritmalarının mekanik, termodinamik, elektromanyetizma, hidrodinamik ve diğer alanlarında sayısız probleminin temelini oluşturmaktadır. Birçok yazılım ürünü Galerkin’in yöntem algoritmasına dayanmaktadır. Ocak 1919’da Boris Grigoryevcih Galerkin, 2. Politeknik Enstitüsü’nde profesör oldu ve 1. Politeknik Enstitüsü’nde mekanik bölümünde yapısal mekanik öğretmeni olarak kaldı. Mart 1920’de bu bölümde yapısal mekanik alanında bir profesör kürsüsü kuruldu. 1922’nin başında, bilim ve mühendislik faaliyetlerinde kendisine daha yakın olan inşaat mühendisliği için makine fakültesini bıraktı. 1917-1919’da Boris Grigoryevcih Galerkin, yukarıda bahsedilen bilimsel dergilerde ve Russian Academy of Sciences Transactions da kıvrımlı dikdörtgen ve üçgen plakalar üzerine bir dizi çalışma yayınladı. Daha sonra ara verdi ve ancak 1922’de tekrar çıktı, ancak Yabancı dergilerde. Aralık 1923’de Boris Grigoryevcih Galerkin, Politeknik Enstitüsü inşaat mühendisliği fakültesinin dekanlığına seçildi. 1924-1929’da Boris Grigoryevcih Galerkin aynı zamanda Demiryolu Mühendisleri Enstitüsü’nde ve üniversitede profesördü. Ekim 1929’da dekanlık görevinden ayrıldı ve Enstitüde profesör olarak devam etti. 1934’te Boris Grigoryevcih Galerkin, teknik ve matematik alanlarında iki doktora derecesi aldı ve Rusya Federasyonu Bilim ve Teknik, işçi unvanıyla onurlandırıldı. 1936’nın başında SSCB Bilimler Akademisi üyeliğine seçildi. 1939’da İnşaat ve Endüstri Mühendisliği Enstitüsü temelinde askeri inşaat okulu kurulduğunda, yapısal mekanik bölüm başkanı oldu. Büyük Zafer’den kursa bir süre sonra, 12 Temmuz 1945’te Boris

Grigoryevcih Galerkin Moskova'da ölmüştür [22].

## 4.2 Galerkin Metodu Nedir?

Bir önceki bölümde hayatı ve yaptığı çalışmaları hakkında bilgi edindiğimiz Boris Grigoryevcih Galerkin'in kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne de katkısı olmuştur. Özellikle bizim inceleyeceğimiz kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu elemanlar ile çözümünde Galerkin'in kendi ismini alan Galerkin Metodu'ndan yararlanarak çözüme ulaşmaya çalışacağız.

Galerkin metodu, geniş çapta bir bilinmeyen fonksiyonunun belirlenmesini gerektiren problemlerde kullanılır. Kuşkusuz, diferansiyel denklemler ve integral denklemler bu kategoridedir. Herhangi bir lineer probleme uygulanacak çok soyut temel sözlerle başlayıp, daha sonra bunları bir dikdörtgende Dirichlet problemini çözeceğimiz bir sayısal örnekte gösterelim.

$L$  bir lineer operatör,  $f$  verilen bir fonksiyon ve  $u$  da denklemden belirlenecek bir fonksiyon olmak üzere

$$Lu = f \quad (4.1)$$

formunda bir problemle karşı karşıya olduğumuzu varsayalım. Galerkin metodunda bir  $u_1, u_2, \dots, u_n$  temel fonksiyonları veya test fonksiyonları kümesi seçiyoruz. Daha sonra bu temel fonksiyonların uygun bir lineer birleşimi ile (4.1) denklemini çözmeyi deniyoruz

$$u = \sum_{j=1}^n c_j u_j$$

alıp,  $L$  nin lineerliğini kullanarak

$$\sum_{j=1}^n c_j Lu_j = f \quad (4.2)$$

elde ederiz. Bu denklem tutarsızdır, çünkü  $f$  genellikle  $Lu_j$  fonksiyonlarının gerdiği vektör uzayda bulunmaz. Bu nedenle, (4.2) denklemini yaklaşık olarak çözüp, ve böylece (4.1) denkleminin yaklaşık bir çözümünü elde ederiz. (4.2) denklemini yaklaşık olarak çözmek, her biri farklı bir  $u$  yaklaşık çözümüne götüren, çok farklı kriterlere göre yapılabilir. En doğal yaklaşım, belli bir normu minimum yapacak şekilde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  katsayılarını seçmektir:

$$\min \left\| \sum_{j=1}^n c_j Lu_j - f \right\|. \quad (4.3)$$

Bu bir en iyi yaklaşım problemidir.  $f$  ye  $Lu_j$  fonksiyonlarının doğurduğu altuzaydaki en yakın elemanla yaklaşıyoruz. Bu işlem, dik iz düşüm tekniğinin mevcut olmasından dolayı bağıl olarak bir iç-çarpım uzayında daha kolaydır.

(4.2) denkleminin bir yaklaşık çözümünü elde etmenin en genel bir yolu,

$$\phi_i \left( \sum_{j=1}^n c_j Lu_j - f \right) = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4.4)$$

koşulunu sağlayan bir  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  lineer fonksiyonlar kümesi seçmektir. Fonksiyonların lineerliğinden dolayı, bu eşitlik

$$\sum_{j=1}^n \phi(Lu_j) c_j = \phi_i(f) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4.5)$$

formunu alır. (4.5) eşitliği,  $n$  denklemlilik  $n$  tane  $c_1, c_2, \dots, c_n$  bilinmeyenli, bir lineer denklem sistemidir. Eğer fonksiyonlar

$$\phi(v) = v(x_i) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4.6)$$

ile tanımlı nokta - hesaplamalı ise, bu durumda yukarıda bahsedilen yöntem bir eşkonumlama olur. Yukarıda anlatılan stratejilerin tümüne Galerkin metodları olarak atıfta bulunacağız. Klasik Galerkin metodu,

$$\phi_i(v) = \langle u_i, v \rangle$$

olmak üzere, bir Hilbert uzayında denklem (4.5) in özel bir durumudur. Böylece, çözülecek denklemler

$$\sum_{j=1}^n c_j \langle u_i, Lu_j \rangle = \langle u_i, f \rangle \quad (1 \leq i \leq n)$$

olur. Galerkin metodunu Dirichlet problemi için örnekleyeceğiz.

Düzlemde,

$$\Omega = \left\{ (x, y) : |x| < 1, |y| < 2 \right\} \quad (4.7)$$

ile verilen açık dikdörtgeni göz önüne alalım.  $\bar{\Omega}$  da

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \Omega \text{ da} \\ u(x, y) = x^2 + y^2 & \partial\Omega \text{ da} \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanan sürekli bir  $u$  fonksiyonu arıyoruz.  $L$  ve  $f$  yi basitçe

$$Lu = \begin{bmatrix} \nabla^2 u \\ u|_{\partial\Omega} \end{bmatrix} \quad f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

eşitlikleri ile tanımlayarak, bu problemi  $Lu = f$  formunda düşünebiliriz. Burada  $u|_S$  gösterimi  $u$  fonksiyonunun bir kümesine kısıtlamasını belirtmektedir.

$$(\alpha u + \beta v)|_S = \alpha(u|_S) + \beta(v|_S)$$

olduğundan bu bir lineer işlemdir.

Galerkin yöntemini kullanmak için, uygun bir temel fonksiyon kümesi seçmek gereklidir. İncelemekte olduğumuz problem için, problemin homojen kısmını sağlayan  $u_1, u_2, \dots, u_n$  fonksiyonlarını seçelim. Yani,  $\Omega$  da  $\nabla^2 u_i = 0$  olacak şekilde  $u_i$  leri seçelim. Bu tip fonksiyonlara  $\Omega$  da harmoniktir denir. Bu tipten fonksiyonlar, kompleks değişkenli herhangi bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımlarının harmonik olması özelliğinden dolayı zengin bir kaynağa sahiptir. Örneğin  $z^k$  kuvvet fonksiyonlarının ilk birkaçı elverişli bir harmonik polinomlar kümesi oluşturur:

$$z^0 = 1$$

$$z^1 = x + i$$

$$z^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$z^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$$

$$z^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)i$$

$$z^5 = (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) + (5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)i$$

$$z^6 = (x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + (6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5)i$$

Problemimizin koordinat eksenlerine ve orijine göre simetri sağlamasından dolayı,  $z^k$  nin aynı simetrisine sahip olan reel ve sanal kısımlarını seçelim. Bu bizi çift  $k$  lar için  $z^k$  nin reel kısımlarına sınırlar. Böylece,  $n = 4$  alırsak, temel fonksiyonlar olarak

$$u_1(x,y) = 1$$

$$u_2(x,y) = x^2 - y^2$$

$$u_3(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

$$u_4(x,y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$$

kullanabiliriz. Bu temel fonksiyonlar seçimiyle, açıkca  $u = \sum_{j=1}^4 c_j u_j$  fonksiyonu  $\nabla^2 u = 0$  ı otomatik olarak gerçekleyecektir, ve  $c_j$  katsayıları sınır koşulları yaklaşık olarak sağlanacak şekilde seçilmelidir. Yaklaşık olarak çözülmek zorunda olan denklem

$$\partial\Omega \quad da \quad \sum_{j=1}^4 c_j u_j(x,y) = x^2 + y^2 \quad (4.10)$$

dir. Simetri nedeniyle,  $\partial\Omega$  nin sadece ilk çeyrek düzlemde bulunan kısmını göz önüne almak yeterlidir.

Eşkonumlama yöntemini açıklamak için,  $\partial\Omega$  da dört nokta; (0,2), (1,0), (1,1) ve (1,2) seçelim. (4.11) denkleminin bu dört noktada geçerli olmasını isteyelim. Bu durumda aşağıdaki lineer denklem sistemine ulaşırız:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 16 & -64 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -7 & 117 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin yaklaşık çözümü

$$c = (1.8261, -0.7870, -0.04348, 0.004348)^T$$

dir. Dikdörtgenin sınırı üzerinden  $\sum_{j=1}^4 c_j u_j$  ile  $x^2 + y^2$  arasındaki en büyük fark, bu durumda 0.074 olur.

Yukarıdaki örnekte, temel fonksiyonları aynı turalım, fakat denklem (4.10) u "çözmenin" bir başka yolunu takip edelim.  $\Omega$  nin sınırında  $m$  tane  $(x_i, y_i)$  nokta kümesini seçelim ve

$$\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 c_j u_j(x_i, y_i) - (x_i^2 + y_i^2) \right]^2 \quad (4.11)$$

ifadesini  $c_j$ lere göre minimum yapmayı deneyelim. Bu yöntem eşkonumlamayı bir özel durum olarak içermektedir, çünkü  $m = 4$  kullanabiliriz. Fakat daha fazla nokta alarak,

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \sum_{j=1}^4 c_j u_j(x,y) - (x^2 + y^2) \right]^2 dx dy \quad (4.12)$$

$l^2$  – kare normunun minimumlaştırılmasına benzetebiliriz.

Bu yaklaşımın pratik bir testi için,  $\partial\Omega$  nin ilk çeyrek bölgesinde 76 eşit uzaklıklı

nokta seçtik. (4.11) ifadesinin minimumlaştırılması, 76 denklem ve 4 bilinmeyenden oluşan bir en küçük kareler matris problemine dönüşür. Bu hesaplamanın sonucu,  $c = (1.8261, -0.7811, -0.04458, 0.004052)^T$  olup, 76 nokta boyunca maksimum sapma 0.049 bulunur. Burada kullanılmış olan 76 nokta  $0 \leq i \leq 50$  için  $(1, i/25)$  ve  $0 \leq i \leq 24$  için  $(i/25, 2)$  noktalarıdır.

Sonuç olarak,

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^4 c_j u_j(x_i, y_i) - (x_i^2 + y_i^2) \right| \quad (4.13)$$

değerini minimum yapmak denilebilir. Bu m denklemlilik dört bilinmeyenli bir fazla verili sistemin minimums (en küçük en büyük) çözümünü çağırıştır. Büyük m ler için bu yöntem

$$\max_{(x,y) \in \partial\Omega} \left| \sum_{j=1}^4 c_j u_j(x, y) - (x^2 + y^2) \right| \quad (4.14)$$

düzgün normunun minimumlaştırılmasına benzer. (4.13) ifadesi, en küçük kareler çözümündeki aynı 76 nokta kümesi kullanılarak minimumlaştırılırsa, c nin değeri  $c = (1.8072, -0.7950, -0.0400, 0.003692)^T$  olup, 76 nokta boyunca maksimum sapma 0.033 bulunur. Bu daha ayrıntılı yöntemle çözüm elde etmede sarfedilen ilave çabanın karşılığı duyarlılıktaki çok küçük bir gelişmedir. Bu nedenle, temel fonksiyonların sayısını artırmak daha iyi olacaktır [23].

### 4.3 Sonlu Eleman Metodu Nedir?

Sonlu elemanlar metodu, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan metotlardır. Bu metod sıkça kullanılır. Sonlu elemanlar metodları uygun klasik varyasyonel metotlara göre pratik açıdan daha kullanışlıdır, çünkü sonlu elemanlar metodunda baz fonksiyonları sonlu özelliğe sahiptir, bir başka deyişle bunlar tanım bölgesinin sadece küçük bir kısmında sıfırdan farklı olurlar. Bu da işlem algoritmasındaki matrislerin daha basit (daha çok sıfır eleman içeren) olması, dolayısıyla realizasyon algoritmasının daha çok ekonomik olması demektir [24]. Galerkin yönteminde temel fonksiyonlar olarak parçalı polinomları kullanılması durumunda, yöntem sonlu-eleman yöntemi adını alır. Sonlu eleman yöntemi, kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için ana stratejilerden biri haline gelmiştir. Sonlu fark yöntemlerine bir alternatif sağlar. Örnek olarak, Poisson'un  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = r$  denklemi için r nin sabit bir fonksiyon olduğu sonlu elemanlar yönteminin bir versiyonunu geliştiriyoruz. Kısmi diferansiyel denklem, iki boyutlu bir düzlemde belirli bir R bölgesi üzerinde tutulur. Poisson denklemini

çözmek,

$$J(u) = \iint_R \left[ \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) + ru \right] dx dy$$

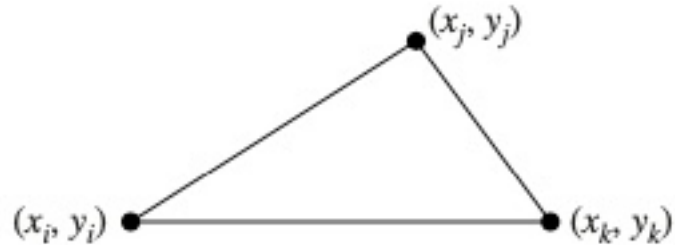
ifadesini en sade hale getirmeye eş değerdir.

$u$  fonksiyonu yukarıdaki ifadeyi en sade hale getirirse,  $u$  nun Poisson denkleminde olduğu anlamına gelir. Bölgenin gerektiği gibi tahminler kullanılarak üçgenlere bölündüğünü varsayalım.  $u$  fonksiyonuna, her bir üçgen elemanların bir birleşimi olan bir  $\phi$  fonksiyonu ile yaklaşılır. Ardından, aşağıda açıklandığı gibi, toplamdaki her bir terimin kendi temel üçgeni  $T$  üzerinden değerlendirildiği  $\sum_e J_e(\phi^e)$  yi en aza indirme problemini düşünelim. Bu teoriyi kabul ederek, sonlu elemanlar yönteminin genel fikrini kavrayabiliriz.

Bir temel üçgenin  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$  ve  $(x_k, y_k)$  köşelerine sahip olduğunu varsayalım. Çözüm üçgeninin üzerindeki yüzey,  $\phi^e(x, y)$  olarak gösterilen bir düzlem üçgen elemanı ile yaklaştırılır. Düğüm adı verilen üçgen köşelerinde düzleme kadar olan mesafeler  $z_i$ ,  $z_j$  ve  $z_k$  olsun.  $L_i^e$ ,  $i$  düğümünde bir ve  $j$  ve  $k$  noktalarında sıfır olsun. Benzer şekilde,  $L_j^e$   $j$  düğümünde bir  $i$  ve  $k$  noktalarında sıfır,  $L_k^e$  düğümünde  $k$  da bir ve  $i$  ve  $j$  düğümlerinde sıfır olsun. Şekil(4.1) de gösterildiği gibi,  $\Delta_e$  ile gösterilen temel üçgeninin alanı

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - x_j y_i - x_i y_k - x_k y_j$$

ile verilmiştir.



Şekil 4.1: Temel üçgen

Sonuç olarak

$$L_i^e = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y]$$

$$= \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y)$$

elde ederiz.  $a_i^e$ ,  $b_i^e$  ve  $c_i^e$  katsayılarını tanımladık. Benzer şekilde

$$L_j^e = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y]$$

$$= \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y)$$

ve

$$L_k^e = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y]$$

$$= \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} (a_k^e + b_k^e x + c_k^e y)$$

buluruz. Son olarak

$$\phi^e = L_i^e z_i + L_j^e z_j + L_k^e z_k$$

elde ederiz.

$$J_e(\phi^e) = \iint_T \left[ \frac{1}{2} ((\phi_x^e)^2 + (\phi_y^e)^2) + r \phi^e \right] dx dy(z_i, z_j, z_k) \equiv F(z_i, z_j, z_k)$$

sahibiz. Minimizasyon problemini çözmek için, bileşenlerin türevlerini gerektiren uygun türevlerini sıfıra ayarlıyoruz.

$$\phi_x^e = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} (b_i^e z_i + b_j^e z_j + b_k^e z_k)$$

ve

$$\phi_y^e = \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} (c_i^e z_i + c_j^e z_j + c_k^e z_k)$$

dikkat edilirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial z_i} &= \iint_T \left( \phi_x^e \phi_{xz_i}^e + \phi_y^e \phi_{yz_i}^e + r \phi_{z_i}^e \right) dx dy \\
&= \iint_T \left( \phi_x^e \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} b_i^e + \phi_y^e \frac{1}{2} \Delta_e^{-1} c_i^e + r L_i^e \right) dx dy \\
&= \frac{1}{4} \Delta_e^{-1} \left[ \left( (b_i^e)^2 + (c_i^e)^2 \right) z_i + (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e) z_j + (b_i^e b_k^e + c_i^e c_k^e) z_k \right] + r \frac{1}{3} \Delta_e
\end{aligned}$$

gerçekleştiriyoruz. Burada, integrasyonlar temel hesaplama ile basittir. Dahası,

$$\iint_T L_i^e dx dy = \iint_T L_j^e dx dy = \iint_T L_k^e dx dy = \frac{1}{3} \Delta_e$$

$\Delta_e$  her üçgenin  $T$  alanı olduğu da gösterilebilir. Benzer sonuçlar  $\frac{\partial F}{\partial z_j}$  ve  $\frac{\partial F}{\partial z_k}$  için elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_i} \\ \frac{\partial F}{\partial z_j} \\ \frac{\partial F}{\partial z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} (b_i^{(e)})^2 + (c_i^{(e)})^2 & b_i^{(e)} b_j^{(e)} + c_i^{(e)} c_j^{(e)} & b_i^{(e)} b_k^{(e)} + c_i^{(e)} c_k^{(e)} \\ b_i^{(e)} b_j^{(e)} + c_i^{(e)} c_j^{(e)} & (b_j^{(e)})^2 + (c_j^{(e)})^2 & b_j^{(e)} b_k^{(e)} + c_j^{(e)} c_k^{(e)} \\ b_i^{(e)} b_k^{(e)} + c_i^{(e)} c_k^{(e)} & b_j^{(e)} b_k^{(e)} + c_j^{(e)} c_k^{(e)} & (b_k^{(e)})^2 + (c_k^{(e)})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = -\frac{4}{3} r \Delta_e^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matris denklemi, kısmi türevleri bir araya getirmek için ihtiyacımız olan tüm bileşenleri içerir. Belirli bir uygulamada, uygun yerleştirmeyi yapmamız gerekir. Her bir  $\phi^e$  elemanı için, düğümler  $i$ ,  $j$  ve  $k$  sıfır olmayan değerlere katkıda bulunanlardır. Bu katkılar türevler için  $z_i, z_j, z_k$  ve benzerleri arasındaki karşılık gelen değişkenlere göre kaydedilir.

Şimdiye kadar konuya çok genel bir yaklaşım uyguladık. İlk başta, lineer bir  $A$  dönüşümümüz olduğunu ve  $b$  verildiğinde  $u$  için  $Au = b$  denklemini çözmek istediğimizi varsayarak bu konuya çok genel bir yaklaşım getiriyoruz. Bu,  $A$ 'nın bir  $m \times n$  matrisi ve  $b$ 'nin  $m$  bileşenlerinin bir vektörü olduğu durumu içerir. Ancak aynı kalıba uyan birçok karmaşık problem var.

Örneğin,  $A$  bir lineer diferansiyel operatör olabilir ve

$$\begin{cases} u''(t) + 2u(t) = t^2 & (0 \leq t \leq 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

gibi onu içeren iki noktalı bir sınır değer problemini çözmek isteyebiliriz. Burada  $A$ , fonksiyonlar üzerinde çalışır ve  $Au = u'' + 2u$  denklemi ile tanımlanır.  $Au = b$  denklemini çözmek için sonlu elemanlar yönteminin temel stratejisi, temel fonksiyonları  $v_1, v_2, \dots, v_n$  seçmek ve denklemi bu temel fonksiyonların lineer bir kombinasyonu ile çözmeye çalışmaktır.  $A$ 'nın lineer bir dönüşüm olduğu varsayıldığından,

$$Au = A \sum_{j=1}^n c_j v_j = \sum_{j=1}^n c_j (Av_j) = b$$

elde edilir. Şimdi problemdeki bilinmeyenler  $c_j$  katsayılarıdır. Tipik olarak, gösterilen denklem tutarsızdır çünkü  $b, \{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$  fonksiyonlarının lineer açıklığında değildir. Probleme yaklaşık bir çözüm bulmak için birçok farklı yöntem kullanılabilir. Örneğin, ilgili lineer uzay bir iç çarpım  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a sahipse en küçük kareler yaklaşımı kullanılabilir. Daha sonra  $c_j$  katsayıları, ortogonallik koşulunun yerine getirilmesi koşuluyla seçilecektir; yani,

$$\sum_{j=1}^n c_j Av_j - b \perp \text{Span}\{v_1, v_1, \dots, v_n\}.$$

Bu,

$$\sum_{j=1}^n \langle Av_j, v_i \rangle c_j = \langle b, v_i \rangle \quad (1 \leq i \leq n)$$

normal denklemlerine yol açar. Bilinmeyen katsayılar  $c_j$  için bu denklemler (bu bağlamda) Galerkin denklemleri olarak da bilinir.  $n$  adet bilinmeyen içinde  $n$  lineer denklem sistemi oluştururlar. Bu süreci iki noktaya sahip bir sınır değer problemi ile gösterelim. ikinci dereceden adi diferansiyel denklem:

$$\begin{cases} u''(t) + g(t)u(t) = f(t) \\ u(0) = a \quad u(1) = b \end{cases}$$

Sonlu eleman yöntemi, temel fonksiyonlar olarak genellikle kısmi fonksiyonları kullanır. Bu, kısa bir aralık dışında her temel fonksiyonun sıfır olması gerektiği anlamına gelir. B spline'lar bu özelliğe sahiptir ve bu nedenle sıklıkla sonlu eleman yönteminde kullanılır. Mevcut problemde, ikinci mertebeden sürekli türevi olan B spline'larını kullanmak isteyeceğiz çünkü  $A$  operatörü

$$Au = u'' + gu$$

tarafından tanımlanacaktır. Bu nedenle, kübik spline'lar kendilerini önerecektir.  $t_i = ih$  düğümlerini tanımlayın, burada  $h$  seçilen bir adım boyutudur. (Bu örnekte karşılığı bir tamsayı olmalıdır).  $B_j^3$ , verilen düğümlere karşılık gelen kübik B eğrileri olsun. Bu, sonsuz bir B spline listesidir.  $[0, 1]$  aralığında sonlu bir sayı dışında hepsi sıfırdır.  $Av_j$  aralığında sıfır olmayanlar  $v_1, v_2, \dots, v_n$  olarak yeniden etiketlenebilir. Bunlar bizim test fonksiyonlarımızdır. Daha önce olduğu gibi ilerlediğimizde,  $n$  bilinmeyenli  $n$  lineer denklem kümesine ulaşıyoruz. Bu sıkıcıdır ve çok da öğretici değildir. Belirli bir alanda Laplace denklemine benzer hususlar uygulanabilir. Örnek olarak,  $0 \leq x, y \leq 2$  olduğu alanı  $2$ 'nin bir karesi olarak alıyoruz. Karenin sınırında  $u(x, y) = \sin(xy)$  ye ihtiyacımız var. Böyle bir soruna Dirichlet problemi denir. Temel fonksiyonlar için, problemin homojen kısmını zaten sağlayan  $v_j$  fonksiyonlarını kullanıyoruz. Yani, her  $v_j$ 'nin Laplace denklemini kare alan içinde karşılamaını istiyoruz. Laplace denklemini karşılayan fonksiyonların harmonik olduğu söylenir. Bir analitik fonksiyonun gerçek ve sanal(imajiner) kısımlarının harmonik olduğu gerçeğinden faydalanabiliriz. Böylece,  $z = x + iy$  ve  $z^k$  i hesaplırsak, polinom olan harmonik fonksiyonları çıkarabileceğiz. Birkaç harmonik polinom,  $0 \leq j \leq 6$  için  $v_j$ :

$$\begin{array}{lll}
 z = 1 & v_0(x, y) = 1 & \\
 z = x + iy & v_1(x, y) = x & v_2(x, y) = y \\
 z^2 = (x + iy)^2 & v_3(x, y) = x^2 - y^2 & v_4(x, y) = 2xy \\
 z^3 = (x + iy)^3 & v_5(x, y) = x^3 - 3xy^2 & v_6(x, y) = 3x^2y - y^3
 \end{array}$$

dir. Bu yedi fonksiyonu kullanarak  $u = \sum_{j=0}^6 c_j v_j$  yi oluştururuz. Bu, Laplace denklemini karşılar ve  $u$  yu karenin çevresi üzerinde belirtilen  $x^3 - y^2$  sınır değerine yaklaştırmaya odaklanabiliriz. Devam etmenin birçok yolu vardır ve ilk önce eşdizim adı verilen bir yöntemi kullanmayı seçeriz. Bu süreçte, sınırda bir dizi nokta seçiyoruz ve her noktada  $\sum_{j=0}^6 c_j v_j$  değerinin belirtilen değere eşit olduğunu söyleyen bir denklem yazıyoruz. Nokta sayısı temel fonksiyonların sayısına eşitse, klasik sıralama yöntemine sahibiz. Burada sekiz nokta aldık, oysa sadece yedi fonksiyon ve yedi katsayı var. Bu nedenle, en küçük kareler çözümü istiyoruz. Sözde eşdizim noktalarını  $(0,2), (1,2), (2,2), (2,1), (2,0), (1,0), (0,0)$  ve  $(0,1)$  olarak alalım. Bu,

aşağıdaki sekiz denklem sistemine yol açtı:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 & -11 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 8 & -16 & 16 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 2 \\ \sin 4 \\ \sin 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En küçük kareler çözümü,

$$c = [0.3219, -0.8585, -0.8585, 0, 1.1931, 0.2146, -0.2146]^T$$

bileşenlerine sahip bir  $c$  vektörüdür. Artık fonksiyon  $\sum_{j=0}^6 c_j v_j - b$ , burada  $b_i(x, y) = \sin(xy)$  dir. Sekiz sıralama noktasının her birinde mutlak değeri 0.3219'dur. Doğruluğu artırmak için, daha temel fonksiyonlar ve daha fazla sıralama noktası kullanılmalıdır. Sonlu eleman yönteminde sıklıkla kullanılan bir başka teknik, diferansiyel denklemin bir optimizasyon problemi ile değiştirilmesidir. Bu,

$$\begin{cases} h(u)' - gu = f \\ u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta \end{cases}$$

gibi iki noktalı bir sınır değer problemi ile gösterilebilir. Burada,  $u$  bilinmeyen fonksiyondur,  $h$ ,  $g$  ve  $f$  ise hepsi  $[a, b]$  aralığında tanımlanan önceden belirlenmiş fonksiyonlardır. Bu soruna Sturm-Liouville problemi denir.

$$\Phi(u) = \int_a^b [(u')^2 h + u^2 g + 2uf] dx$$

ile tanımlanan bir fonksiyon vardır.

Fonksiyon ve iki noktalı sınır değer problemi birkaç teoremle ilişkilidir. Bunlardan biri kabaca,  $u(a) = \alpha$  ve  $u(b) = \beta$  yan koşullarına bağlı olarak  $\Phi(u)$  fonksiyonu en aza indiren  $u$  fonksiyonunu bulursak, sınır değer probleminin çözümüne sahip olacağımızı belirtir.  $u$  nun bir türevi olduğu sürece  $\Phi(u)$  nun tanımlandığı gerçeğinden yararlanmak mümkündür, oysa diferansiyel denklemde iki türevi olan bir fonksiyona ihtiyacımız var. Aslında, fonksiyon için, sadece  $u$ 'nun parçalı türevlenebilir olmasını istiyoruz, bu özellik 0 ve 1 dereceli eğri fonksiyonların sahip olduğu bir özelliktir.

Bu fikirler, iki veya daha fazla değişkenli fonksiyonlara uzanır ve çözümünü diferansiyel bir denkleme yaklaştırmak için iki veya daha fazla değişkende düşük dereceli spline fonksiyonlarının kullanılmasına izin verir. Bunlar, sonlu elemanlar yönteminin temel özellikleridir [25] .



# BÖLÜM 5

## SONLU FARK VE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERE ÖRNEKLER

### 5.1 Eliptik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

#### 5.1.1 Örnek 1

$n = m = 4$  kullanarak  $0.5m \times 0.5m$  boyutlarına sahip ince bir kare metal plakada kararlı hal ısı dağılımını belirleyin. İki bitişik sınır  $0^\circ$ 'da tutulur ve diğer sınırlardaki ısı, bir köşede  $0^\circ$ 'dan kenarların buluştuğu  $100^\circ$ 'ya doğru doğrusal olarak artacaktır [26].

**Çözüm**  $R = \{(x,y) | 0 < x < 0.5, 0 < y < 0.5\}$  kümesindeki  $(x,y)$  için denklem

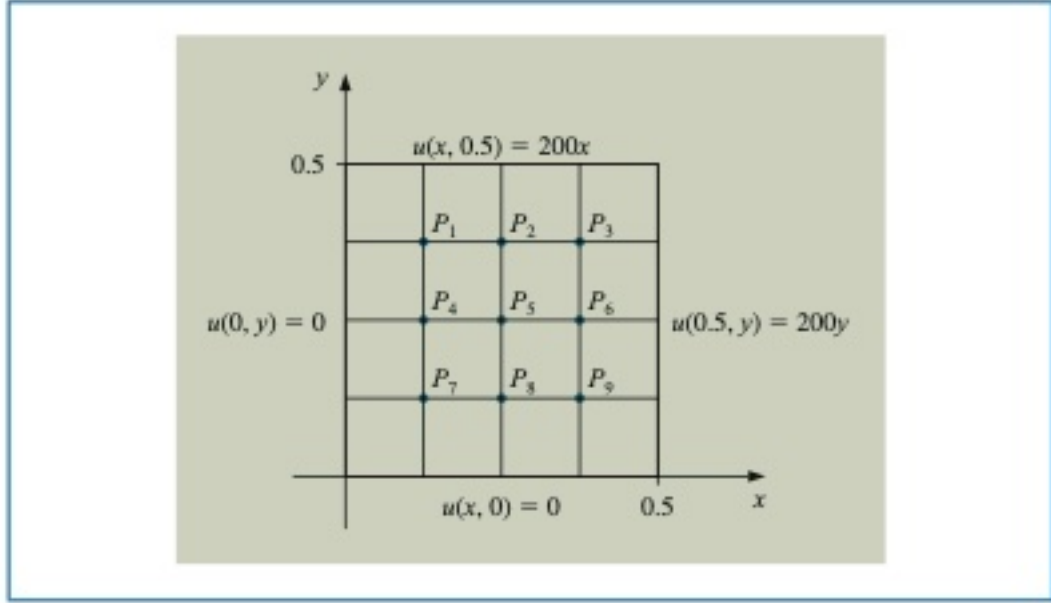
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

olarak ifade edilebilir. Sınır koşulları  $u(0,y) = 0$ ,  $u(x,0) = 0$ ,  $u(x,0.5) = 200x$  ve  $u(0.5,y) = 200y$  dir.

$$2 \left[ \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] \omega_{i,j} - (\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}) - \left( \frac{k}{h} \right)^2 (\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

fark denklemi her  $i = j = 1, 2, 3$  için

$$h = \frac{b-a}{n} = 0.125 \quad k = \frac{d-c}{m} = 0.125$$



Şekil 5.1:  $n = m = 4$  kullanarak  $0.5 \times 0.5m$  boyutlarına sahip ince bir kare metal plaka dir. Buradan

$$4\omega_{i,j} - \omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j} - \omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1} = -h^2 f(x_i, y_j)$$

elde edilir.

$$P_l = (x_i, y_j), \quad \omega_l = \omega_{i,j}, \quad l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$$

$l$  eşitliği kullanılarak  $i = 1, j = 1$  ve  $m = n = 4$  iken

$$l = 1 + (4 - 1 - 1) \cdot (4 - 1) = 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7, \text{ ise } \omega_7$$

$$l = 2 + (4 - 1 - 1) \cdot (4 - 1) = 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8, \text{ ise } \omega_8$$

$$l = 0 + (4 - 1 - 1) \cdot (4 - 1) = 0 + 2 \cdot 3 = 0 + 6 = 6, \text{ ise } \omega_{0,1}$$

$$l = 1 + (4 - 1 - 2) \cdot (4 - 1) = 1 + 1 \cdot 3 = 1 + 3 = 4, \text{ ise } \omega_4$$

$$l = 1 + (4 - 1 - 0) \cdot (4 - 1) = 1 + 3 \cdot 3 = 1 + 9 = 10, \text{ ise } \omega_{1,0}$$

Yukarıdaki eşitliklerden

$i = 1$  ve  $j = 1$  için  $P_7$  :  $4\omega_7 - \omega_8 - \omega_4 = \omega_{0,1} + \omega_{1,0}$ ; elde ederiz.

Benzer şekilde;

$i = 1$  ve  $j = 2$  için  $P_4$  :  $4\omega_4 - \omega_5 - \omega_1 - \omega_7 = \omega_{0,2}$  ;

$$i = 1 \text{ ve } j = 3 \text{ için } P_1 : 4\omega_1 - \omega_2 - \omega_4 = \omega_{0,3} + \omega_{1,4};$$

$$i = 2 \text{ ve } j = 1 \text{ için } P_8 : 4\omega_8 - \omega_9 - \omega_7 - \omega_5 = \omega_{2,0};$$

$$i = 2 \text{ ve } j = 2 \text{ için } P_5 : 4\omega_5 - \omega_6 - \omega_4 - \omega_2 - \omega_8 = 0;$$

$$i = 2 \text{ ve } j = 3 \text{ için } P_2 : 4\omega_2 - \omega_3 - \omega_1 - \omega_5 = \omega_{2,4};$$

$$i = 3 \text{ ve } j = 1 \text{ için } P_9 : 4\omega_9 - \omega_8 - \omega_6 = \omega_{4,1} + \omega_{3,0};$$

$$i = 3 \text{ ve } j = 2 \text{ için } P_6 : 4\omega_6 - \omega_5 - \omega_3 - \omega_9 = \omega_{4,2};$$

$$i = 3 \text{ ve } j = 3 \text{ için } P_3 : 4\omega_3 - \omega_2 - \omega_6 = \omega_{4,3} + \omega_{3,4}$$

sonuçlarını elde ederiz. Bunlar yeniden etiketlenmiş iç düğüm noktalarıdır.

Düzenleyecek olursak

$$P_1 : 4\omega_1 - \omega_2 - \omega_4 = \omega_{0,3} + \omega_{1,4}$$

$$P_2 : 4\omega_2 - \omega_3 - \omega_1 - \omega_5 = \omega_{2,4}$$

$$P_3 : 4\omega_3 - \omega_2 - \omega_6 = \omega_{4,3} + \omega_{3,4}$$

$$P_4 : 4\omega_4 - \omega_5 - \omega_1 - \omega_7 = \omega_{0,2}$$

$$P_5 : 4\omega_5 - \omega_6 - \omega_4 - \omega_2 - \omega_8 = 0$$

$$P_6 : 4\omega_6 - \omega_5 - \omega_3 - \omega_9 = \omega_{4,2}$$

$$P_7 : 4\omega_7 - \omega_8 - \omega_4 = \omega_{0,1} + \omega_{1,0}$$

$$P_8 : 4\omega_8 - \omega_9 - \omega_7 - \omega_5 = \omega_{2,0}$$

$$P_9 : 4\omega_9 - \omega_8 - \omega_6 = \omega_{3,0} + \omega_{4,1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin sağ taraflarının sınır koşullarından elde edildiği  $\omega_{1,0} = \omega_{2,0} = \omega_{2,0} = \omega_{0,1} = \omega_{0,2} = \omega_{0,3} = 0$ ,  $\omega_{1,4} = \omega_{4,1} = 25$ ,  $\omega_{2,4} = \omega_{4,2} = 50$  ve  $\omega_{3,4} = \omega_{4,3} = 75$  değerleri olduğunu görüyoruz. Bu problemle ilgili lineer sistem ise

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \\ \omega_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

formundadır. Bu matrise Gauss-Seidel yöntemi uygulanarak bulunan  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9$  değerleri Tablo 5.1'de verilmiştir.

Tablo 5.1: 5.1.1 de elde edilen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9$  değerleri

$i$	$\omega_i$
1	18.75
2	37.50
3	56.25
4	12.50
5	25.00
6	37.50
7	6.25
8	12.50
9	18.75

### 5.1.2 Örnek 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 :$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 2) = (x - 2)^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = (y - 1)^2, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümünü yaklaşık olarak hesaplayın.  $h = k = \frac{1}{2}$  değerlerini kullanın ve sonuçları analitik çözüm  $u(x, y) = (x - y^2)$  ile karşılaştırın [27].

**Çözüm**

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad n = 2$$

$$k = \frac{d - c}{m} = \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad m = 4$$

$h$  ve  $k$  değerleri aşağıdaki eşitlik de yerine yazılırsa

$$2 \left[ \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] \omega_{i,j} - (\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}) - \left( \frac{k}{h} \right)^2 (\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

fark denklemini  $i = 1$  ve  $j = 3$  için

$$4\omega_{1,3} - \omega_{2,3} - \omega_{0,3} - \omega_{1,4} - \omega_{1,2} = -1$$

şeklinde elde edilir.

$$P_l = (x_i, y_j), \quad \omega_l = \omega_{i,j}, \quad l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$$

$l$  eşitliği kullanılarak  $i = 1, j = 1$  ve  $n = 2, m = 4$  iken

$$l = 1 + (4 - 1 - 1) \cdot (2 - 1) = 1 + (2) \cdot (1) = 1 + 2 = 3, \text{ ise } \omega_3$$

$$l = 2 + (4 - 1 - 1) \cdot (2 - 1) = 2 + (2) \cdot (1) = 2 + 2 = 4, \text{ ise } \omega_{2,1}$$

$$l = 0 + (4 - 1 - 1) \cdot (2 - 1) = 0 + (2) \cdot (1) = 0 + 2 = 2, \text{ ise } \omega_{0,1}$$

$$l = 1 + (4 - 1 - 2) \cdot (2 - 1) = 1 + (1) \cdot (1) = 1 + 1 = 2, \text{ ise } \omega_2$$

$$l = 1 + (4 - 1 - 0) \cdot (2 - 1) = 1 + (3) \cdot (1) = 1 + 3 = 4, \text{ ise } \omega_{1,0}$$

dır. Yukarıdaki eşitliklerden

$i = 1$  ve  $j = 1$  için  $P_3 : 4\omega_3 - \omega_2 = -1 + \omega_{2,1} + \omega_{0,1} + \omega_{1,0}$ ; elde ederiz.

Benzer şekilde;

$i = 1$  ve  $j = 2$  için  $P_2 : 4\omega_2 - \omega_1 - \omega_3 = -1 + \omega_{2,2} + \omega_{0,2}$ ;

$i = 1$  ve  $j = 3$  için  $P_1 : 4\omega_1 - \omega_2 = -1 + \omega_{2,3} + \omega_{0,3} + \omega_{1,4}$ ; sonuçlarını elde ederiz.

Bunlar yeniden etiketlenmiş iç düğüm noktalarıdır. Düzenleyecek olursak

$$P_1 : 4\omega_1 - \omega_2 = -1 + \omega_{2,3} + \omega_{0,3} + \omega_{1,4}$$

$$P_2 : 4\omega_2 - \omega_1 - \omega_3 = -1 + \omega_{2,2} + \omega_{0,2}$$

$$P_3 : 4\omega_3 - \omega_2 = -1 + \omega_{2,1} + \omega_{0,1} + \omega_{1,0}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin sağ taraflarının sınır koşullarından elde edildiği  $\omega_{0,3} = \omega_{1,4} = 9$ ,  $\omega_{2,3} = 13$ ,  $\omega_{0,2} = 4$ ,  $\omega_{2,2} = 0$ ,  $\omega_{0,1} = \omega_{1,0} = 1$  ve  $\omega_{2,1} = 5$  değerleri olduğunu görüyoruz. Bu problemle ilgili lineer sistem ise

$$A\omega = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

formundadır. Bu matrise Gauss-Seidel yöntemi uygulanarak bulunan  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  değerleri Tablo 5.2'de verilmiştir.

Tablo 5.2: 5.1.2 de elde edilen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  değerleri

$i$	$\omega_i$
1	8.3571
2	3.4286
3	2.3571

## 5.2 Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

### 5.2.1 Örnek 1

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t$$

1S1 denkleminin çözümünü;

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t \quad \text{sınır koşulları ve}$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{başlangıç koşulları}$$

ve  $h = 0.1$  ile  $k = 0.0005$  kullanarak yaklaşık çözümü belirleyiniz ve  $t = 0.5$  deki sonuçları  $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$  analitik çözüm ile karşılaştırınız [28].

**Çözüm**

$$h = \frac{l}{m} = \frac{1}{10} \quad \text{ise} \quad m = 10 > 0$$

ve  $k = 0.0005$  olduğundan  $i = 0, 1, \dots, 10$  için  $x_i = ih$  ve  $j = 0, 1, \dots$  için  $t_j = jk$  dir ve  $(x_i, t_j)$  iç düğüm noktalarıdır.

Bazı  $\mu_j \in (t_j, t_j + 1)$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + 0.0005) - u(x_i, t_j)}{0.0005} - \frac{0.0005}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \quad (5.1)$$

Bazı  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + 0.1, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - 0.1, t_j)}{(0.1)^2} - \frac{(0.1)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \quad (5.2)$$

dir ve

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

denkleminin iç düğüm noktalarından, her bir  $i = 1, 2, \dots, 9$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

olur. Bu nedenle (5.1) ve (5.2) fark kat sayılarını kullanan fark yöntemi  $\omega_{i,j}$  nin  $u(x_i, t_j)$  ye yaklaştığı

$$\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{0.0005} - \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{0.1} = 0 \quad (5.3)$$

dır. Bu fark denklemi için yerel kesme hatası

$$\tau_{i,j} = \frac{0.0005}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \frac{(0.1)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

dir.  $\omega_{i,j+1}$  için (5.3) denklemini çözmek, her  $i = 1, 2, \dots, 10$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$\omega_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2(0.0005)}{(0.1)^2}\right) \omega_{i,j} + \frac{0.0005}{(0.1)^2} (\omega_{i+1,j} \omega_{i-1,j})$$

eşitliğini verir. Yani  $\omega_{0,0} = f(x_0)$ ,  $\omega_{1,0} = f(x_1)$ , ...,  $\omega_{10,0} = f(x_{10})$  dir.

$$\omega_{0,1} = u(0, t_1) = 0;$$

$$\omega_{1,1} = \left(1 - \frac{2(0.0005)}{(0.1)^2}\right) \omega_{1,0} + \frac{0.0005}{(0.1)^2} (\omega_{2,0} + \omega_{0,0});$$

$$\omega_{2,1} = \left(1 - \frac{2(0.0005)}{(0.1)^2}\right) \omega_{2,0} + \frac{0.0005}{(0.1)^2} (\omega_{3,0} + \omega_{1,0});$$

.

.

.

$$\omega_{9,1} = \left(1 - \frac{2(0.0005)}{(0.1)^2}\right) \omega_{9,0} + \frac{0.0005}{(0.1)^2} (\omega_{10,0} + \omega_{8,0});$$

$$\omega_{10,1} = u(10, t_1) = 0$$

ve

$$\lambda = \frac{0.0005}{(0.1)^2}$$

olmak üzere

$$\omega_{0,1} = u(0, t_1) = 0$$

$$\omega_{1,1} = (1 - 2\lambda) \omega_{1,0} + \lambda \omega_{2,0} + \lambda \omega_{0,0}$$

$$\omega_{2,1} = \lambda \omega_{1,0} + (1 - 2\lambda) \omega_{2,0} + \lambda \omega_{3,0}$$

.

.

.

$$\omega_{9,1} = \lambda \omega_{8,0} + (1 - 2\lambda)\omega_{9,0} + \lambda \omega_{10,0}$$

dır.

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki gibi 9x9 bir kare matris şeklinde ifade edebiliriz ve

$\omega_o = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_9))^t$  ve her  $j = 1, 2, \dots$  için  $\omega_j = (\omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \dots, \omega_{9,j})^t$  dir.

Burada  $\omega_j = A\omega_{j-1}$  dir. Bu sistemin çözümü aşağıdaki tabloyu verecektir.  $h = 0.1$ ,

$k = 0.0005$  ve  $\lambda = (1)^2(0.0005/(0.1)^2) = 0.05$  ile İleri Fark yöntemi, sonuçları

Tablo(5.3) ün üçüncü sütununda verir. Dördüncü sütundan görülebileceği gibi, bu

sonuçlar oldukça doğrudur.

Tablo 5.3: 5.2.1 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması

$x_i$	$u(x_i, 0.5)$	$\omega_{i,1000}$	$ u(x_i, 0.5) - \omega_{i,1000} $
0.0	0	0	1
0.1	0.00222241	0.00228652	$6.411 \times 10^{-5}$
0.2	0.00422728	0.00434922	$1.219 \times 10^{-4}$
0.3	0.00581836	0.00598619	$1.678 \times 10^{-4}$
0.4	0.00683989	0.00703719	$1.973 \times 10^{-4}$
0.5	0.00719188	0.00739934	$2.075 \times 10^{-4}$
0.6	0.00683989	0.00703719	$1.973 \times 10^{-4}$
0.7	0.00581836	0.00598619	$1.678 \times 10^{-4}$
0.8	0.00422728	0.00434922	$1.219 \times 10^{-4}$
0.9	0.00222241	0.00228652	$6.511 \times 10^{-5}$
1.0	0	0	

## 5.2.2 Örnek 2

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0, \quad 0 < t \quad \text{sınır koşulları}$$

$$u(x,0) = \sin \frac{\pi}{4} x \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{4} x\right), \quad 0 \leq x \leq 4 \quad \text{başlangıç koşulları}$$

ve  $h = 0.2$  ve  $k = 0.04$  kullanarak yaklaşık çözümü belirleyiniz ve  $t = 0.4$  deki sonuçları  $u(x,t) = e^{-t} \sin \frac{\pi}{2} x + e^{-\frac{t}{4}} \sin \frac{\pi}{4} x$  analitik çözüm ile karşılaştırınız [29].

### Çözüm

$$h = \frac{l}{m} = \frac{4}{20} \quad \text{ise} \quad m = 20 > 0$$

ve  $k = 0.04$  olduğundan  $i = 0, 1, \dots, 20$  için  $x_i = ih$  ve  $j = 0, 1, \dots$  için  $t_j = jk$  dir ve  $(x_i, t_j)$  iç düğüm noktalarıdır.

Bazı  $\mu_j \in (t_j, t_j + 1)$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + 0.04) - u(x_i, t_j)}{0.04} - \frac{0.04}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \quad (5.4)$$

Bazı  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + 0.2, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - 0.2, t_j)}{(0.2)^2} - \frac{(0.2)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \quad (5.5)$$

dir ve

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

denkleminin iç düğüm noktalarından, her bir  $i = 1, 2, \dots, 19$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

olur. Bu nedenle (8.4) ve (8.5) fark kat sayılarını kullanan fark yöntemi  $\omega_{i,j}$  nin  $u(x_i, t_j)$  ye yaklaştığı

$$\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{0.04} - \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{0.2} = 0 \quad (5.6)$$

dır. Bu fark denklemi için yerel kesme hatası

$$\tau_{i,j} = \frac{0.04}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \frac{(0.2)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j)$$

dir.  $\omega_{i,j+1}$  için (8.6) denklemini çözmek, her  $i = 1, 2, \dots, 20$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$\omega_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.2)^2}\right)\omega_{i,j} + \frac{\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.2)^2}(\omega_{i+1,j}\omega_{i-1,j})$$

eşitliğini verir. Yani  $\omega_{0,0} = f(x_0)$ ,  $\omega_{1,0} = f(x_1)$ , ...,  $\omega_{20,0} = f(x_{20})$  dir.

$$\omega_{0,1} = u(0, t_1) = 0;$$

$$\omega_{1,1} = \left(1 - \frac{2\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.2)^2}\right)\omega_{1,0} + \frac{\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.2)^2}(\omega_{2,0} + \omega_{0,0});$$

$$\omega_{2,1} = \left(1 - \frac{2\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.2)^2}\right)\omega_{2,0} + \frac{\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.1)^2}(\omega_{3,0} + \omega_{1,0});$$

.

.

.

$$\omega_{19,1} = \left(1 - \frac{2\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.2)^2}\right)\omega_{19,0} + \frac{\left(\frac{4}{\pi^2}\right)(0.04)}{(0.2)^2}(\omega_{20,0} + \omega_{18,0});$$

$$\omega_{19} = u(20, t_1) = 0$$

ve

$$\lambda = \frac{0.04}{(0.2)^2}$$

olmak üzere

$$\omega_{0,1} = u(0, t_1) = 0$$

$$\omega_{1,1} = (1 - 2\lambda)\omega_{1,0} + \lambda\omega_{2,0} + \lambda\omega_{0,0}$$

$$\omega_{2,1} = \lambda\omega_{1,0} + (1 - 2\lambda)\omega_{2,0} + \lambda\omega_{3,0}$$

.

.

.

$$\omega_{19,1} = \lambda \omega_{18,0} + (1 - 2\lambda)\omega_{19,0} + \lambda \omega_{20,0}.$$

dır.

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki gibi 19x19 bir kare matris şeklinde ifade edebiliriz ve

$\omega_o = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{19}))^t$  ve her  $j = 1, 2, \dots$  için  $\omega_j = (\omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \dots, \omega_{19,j})^t$  dir.

Burada  $\omega_j = A\omega_{j-1}$  dir. Bu sistemin çözümü aşağıdaki tabloyu verecektir.  $h = 0.2$ ,  $k = 0.04$  ve  $\lambda$  ile İleri Fark yöntemi, sonuçları Tablo(5.4) de verilmiştir.

Tablo 5.4: 5.2.2 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması

$x_i$	$u(x_i, 0.4)$	$\omega_{i,10}$	$ u(x_i, 0.4) - \omega_{i,10} $
0.0	0	0	0
0.2	0.3414213	0.2620273	$7.9394 \times 10^{-2}$
0.4	0.6828427	0.5240546	$1.5878 \times 10^{-1}$
0.6	1.0242640	0.7860820	$2.381 \times 10^{-1}$
0.8	1.3656854	1.0481093	$3.175 \times 10^{-1}$
1.0	1.7071067	1.3101367	$3.969 \times 10^{-1}$
1.2	2.0485281	1.5721640	$9.131 \times 10^{-1}$
1.4	2.3899494	1.8341914	$4.557 \times 10^{-1}$
1.6	2.7313708	2.0962187	$6.351 \times 10^{-1}$
1.8	3.0727922	2.3582460	$6.511 \times 10^{-1}$
2.0	3.4142135	2.6202734	$7.939 \times 10^{-1}$
2.2	3.7544465	2.8823007	$8.721 \times 10^{-1}$
2.4	4.0896603	3.1443281	$9.453 \times 10^{-1}$
2.6	4.4058957	3.4063554	$9.995 \times 10^{-1}$
2.8	4.6763964	3.6683828	$10.080 \times 10^{-1}$
3.0	4.8498581	3.9304101	$9.194 \times 10^{-1}$
3.2	4.8645400	4.1924375	$6.574 \times 10^{-1}$
3.4	4.6519250	4.4544648	$1.974 \times 10^{-1}$
3.6	4.1788292	4.7164921	$5.237 \times 10^{-1}$
3.8	3.4561602	4.9785195	$15.223 \times 10^{-1}$
4.0	0	0	

### 5.2.3 Örnek 3

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

ısı denkleminin çözümünü

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

kısıtlarına uyarak  $h = 0.1$  ve  $k = 0.01$  için geri fark yöntemini kullanarak bulunuz ve  $t = 0.5$  deki sonuçları  $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$  analitik çözüm ile karşılaştırınız. [30].

**Çözüm**

$$h = \frac{l}{m} = \frac{1}{10}, \quad \text{ise} \quad m = 10$$

dir.  $\mu_j \in (t_{j-1}, t_j)$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{0.01} + \frac{0.01}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

biçimin  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$  nin geriye doğru fark katsayısının kullanılmasından kaynaklanan fark yöntemini,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + 0.1, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - 0.1, t_j)}{(0.1)^2} - \frac{(0.1)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j)$$

denklemleriyle

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_{j-1})}{0.01} - 1^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{(0.1)^2}$$

$$= -\frac{0.01}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - 1^2 \frac{(0.1)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j)$$

elde edilir. Her  $i = 1, 2, \dots, 9$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için ortaya çıkan geri fark yöntemi

$$\frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{0.01} - 1^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{(0.1)^2} = 0$$

dir.  $\lambda = \alpha \left( \frac{k}{h^2} \right)$  ile ifade edilsin. Bu durumda  $i = 1, 2, \dots, 9$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$(1 + 2\lambda)\omega_{i,j} - \lambda\omega_{i+1,j} - \lambda\omega_{i-1,j} = \omega_{i,j-1}$$

eşitliğinden  $\omega_{i,0} = f(x_i)$  ve  $\omega_{m,j} = \omega_{0,j} = 0$  olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{9,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{1,j-1} \\ \omega_{2,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{9,j-1} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

olacak şekilde  $A\omega_j = \omega_{j-1}$  elde edilir. Bu lineer sistem çözülerek elde edilir.

Tablo 5.5: 5.2.3 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması

$x_i$	$\omega_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$ \omega_{i,50} - u(x_i, 0.5) $
0.0	0	0	
0.1	0.00289802	0.00222241	$6.756x10^{-4}$
0.2	0.00551236	0.00422728	$1.285x10^{-3}$
0.3	0.00758711	0.00581836	$1.769x10^{-3}$
0.4	0.00891918	0.00683989	$1.079x10^{-3}$
0.5	0.00937818	0.00719188	$2.186x10^{-3}$
0.6	0.00891918	0.00683989	$2.079x10^{-3}$
0.7	0.00758711	0.00581836	$1.769x10^{-3}$
0.8	0.00551236	0.00422728	$1.285x10^{-3}$
0.9	0.00289802	0.00222241	$6.756x10^{-4}$
1.0	0	0	

## 5.2.4 Örnek 4

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t$$

denkleminin çözümünü

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,t) = \sin \frac{\pi}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

kısıtlarına uyararak ve  $m = 4$ ,  $T = 0.1$  ve  $N = 2$  kullanarak bulun. uz ve

$u(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi^2}{4}\right)t} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)x$  analitik çözüm ile karşılaştırınız [31].

**Çözüm**

$$h = \frac{l}{m} = 0.5 \quad k = \frac{T}{N} = 0.05$$

dir.  $\mu_j \in (t_{j-1}, t_j)$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{0.05} + \frac{0.05}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

biçiminde  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$  nin geri fark katsayısının kullanılmasından kaynaklanan fark yöntemini,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + 0.5, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - 0.5, t_j)}{(0.5)^2} - \frac{(0.5)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j)$$

denklemiyle

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{0.05} - 1^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{(0.5)^2} \\ & = -\frac{0.05}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - 1^2 \frac{(0.5)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Her  $i = 1, 2, 3$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için ortaya çıkan geri fark yöntemi

$$\frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{0.05} - 1^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{(0.5)^2} = 0$$

dir.  $\lambda = \alpha^2 \left(\frac{k}{h^2}\right)$  ile ifade edilsin. Bu durumda  $i = 1, 2, 3$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için

$$(1 + 2\lambda)\omega_{i,j} - \lambda\omega_{i+1,j} - \lambda\omega_{i-1,j} = \omega_{i,j-1}$$

eşitliğinden  $\omega_{i,0} = f(x_i)$  ve  $\omega_{4,j} = \omega_{0,j} = 0$  olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda \\ 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \omega_{3,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{1,j-1} \\ \omega_{2,j-2} \\ \omega_{3,j-3} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

olacak şekilde  $A\omega_j = \omega_{j-1}$  elde edilir. Bu lineer sistemin çözümü Tablo(5.6) da verilmiştir.

Tablo 5.6: 5.2.4 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması

$x_i$	$\omega_{i,2}$	$u(x_i, 0.1)$	$ \omega_{i,2} - u(x_i, 0.1) $
0.0	0	0	
0.5	0.566574	0.552493	$1.4081 \times 10^{-2}$
1.0	0.801256	0.781344	$1.9912 \times 10^{-2}$
1.5	0.566574	0.552493	$1.4081 \times 10^{-2}$
2.0	0	0	

## 5.3 Hiperbolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

### 5.3.1 Örnek 1

$h = 0.1$  ve  $k = 0.05$  kullanarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

hiperbolik probleminin çözümünü sınır koşulları

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile yaklaşık olarak hesaplayınız ve sonuçları  $u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$  analitik çözüm ile karşılaştırınız [32].

## Çözüm

$$h = \frac{l}{m} = 0.1, \quad \text{ise} \quad m = 10$$

ve  $k = 0.05 > 0$  ile  $(x_i, t_j)$  düğüm noktaları, her  $i = 1, 2, \dots, 10$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için  $x_i = ih$  ve  $t_j = jk$  tarafından tanımlansın. Herhangi bir iç düğüm noktasında  $(x_i, t_j)$  dalga denkleminiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

dir. Fark yöntemiyle  $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{(0.05)^2} - \frac{(0.05)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, \mu_j)$$

$\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{(0.1)^2} - \frac{(0.1)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{(0.05)^2} - 4 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{(0.1)^2} \\ &= \frac{1}{12} \left[ (0.05)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - 4(0.1)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \right] \end{aligned}$$

olur.

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{12} \left[ (0.05)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - 4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \right]$$

hata terimini ihmal edersek

$$\frac{\omega_{i,j+1} - 2(\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}))}{(0.05)^2} - 4 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{(0.1)^2} = 0$$

olur.  $\lambda = \frac{\alpha k}{h^2}$  ile ifade edilsin.

$$\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1} - \lambda^2 \omega_{i+1,j} + 2\lambda^2 \omega_{i,j} - \lambda^2 \omega_{i-1,j} = 0$$

fark denklemini  $\omega_{i,j+1}$  için çözersek

$$\omega_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)\omega_{i,j} + \lambda^2(\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}) - \omega_{i,j-1}$$

olur. Her  $j = 1, 2, \dots$  için  $\omega_{0,j} = \omega_{10,j} = 0$  sınır koşullarını ve  $i = 1, 2, \dots, 9$  için  $\omega_{i,0} = f(x_i)$  olur. Bu bir denklem sistemidir ve matris olarak ifade edecek olursak

$$\begin{bmatrix} \omega_{1,j+1} \\ \omega_{2,j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{9,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda^2 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{9,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_{1,j-1} \\ \omega_{2,j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{9,j-1} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

formunda olacaktır. Bu matris sisteminin çözülmesi sonucunda Tablo(5.7) yi elde edileceğiz.

Tablo 5.7: 5.3.1 de elde edilen yaklaşımlar

$x_i$	$\omega_{i,20}$
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000

### 5.3.2 Örnek 2

$m = 4$ ,  $N = 4$  ve  $T = 0.1$  kullanarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t;$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

koşullarına uyarak dalga denkleminin çözümüne yaklaşınız ve sonuçları  $t = 0.1$  de  $u(x, t) = \cos \pi t \sin \pi x$  analitik çözüm ile karşılaştırınız [33].

**Çözüm**

$$h = \frac{l}{m} = 0.25 \quad k = \frac{T}{N} = 0.025$$

olup  $(x_i, t_j)$  düğüm noktaları, her  $i = 1, 2, 3, 4$  ve  $j = 1, 2, \dots$  için  $x_i = ih$  ve  $t_j = jk$  tarafından tanımlansın. Herhangi bir iç düğüm noktasında denkleminiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

dir. Fark yöntemiyle  $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{(0.025)^2} - \frac{(0.025)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, \mu_j)$$

ve  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{(0.25)^2} - \frac{((0.25)^2)}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{(0.025)^2} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{(0.25)^2} \\ &= \frac{1}{12} \left[ (0.025)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - (0.25)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \right] \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{12} \left[ (0.025)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - (0.25)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\zeta_i, t_j) \right]$$

hata terimini ihmal edersek

$$\frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{(0.025)^2} - \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}}{(0.025)^2} - \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{(0.25)^2} = 0$$

olur.  $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$  şeklinde ifade edilsin.

$$\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1} - \lambda^2 \omega_{i+1,j} + 2\lambda^2 \omega_{i,j} - \lambda^2 \omega_{i-1,j} = 0$$

fark denklemini  $\omega_{i,j+1}$  için çözersek

$$\omega_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)\omega_{i,j} + \lambda^2(\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} - \omega_{i,j-1})$$

olur. Her  $j = 1, 2, \dots$  için  $\omega_{0,j} = \omega_{4,j} = 0$  sınır koşullarını ve  $i = 1, 2, 3$  için  $\omega_{i,0} = f(x_i)$  olur. Bu bir denklem sistemidir ve matris olarak ifade edecek olursak

$$\begin{bmatrix} \omega_{1,j+1} \\ \omega_{2,j+1} \\ \omega_{3,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1 - \lambda^2) & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 2(1 - \lambda^2) & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 2(1 - \lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \omega_{3,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{1,j-1} \\ \omega_{2,j-1} \\ \omega_{3,j-1} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

formunda olacaktır. Bu matris sisteminin çözülmesi sonucunda Tablo(5.8) i elde edileceğiz.

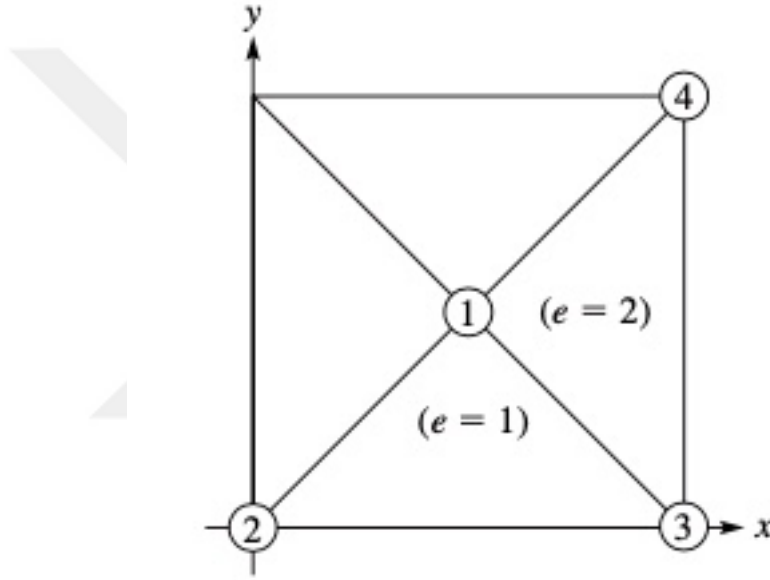
Tablo 5.8: 5.3.2 de elde edilen yaklaşımlar

$x_i$	$\omega_{i,20}$
0.0	0.0000000
0.25	-0.7071068
0.50	-1.0000000
0.75	-0.7071068
1.0	0.0000000

## 5.4 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Poisson ve Laplace Denklemlerinin Çözümü

### 5.4.1 Örnek

Poisson'un  $u_{xx} + u_{yy} = 4$  denklemini Şekil(5.2) de gösterilen üçgenleştirmelerle birim kare üzerinde çözmek için sonlu elemanlar yöntemini uygulayınız ve  $u(x,y) = x^2 + y^2$  analitik çözümüne karşılık gelen sınır değerlerini kullanınız [34].



Şekil 5.2: Üçgenleştirme

#### Çözüm 1

Simetriye göre, karenin yalnızca iki üçgene bölünmüş sağ alt kısmını dikkate almamız gerekir. Giriş bileşenleri, koordinatların  $(x,y)$  aşağıdaki gibi olduğu 1'den 4'e kadar olan düğümlerdir: düğüm 1:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , düğüm 2:  $(0,0)$ , düğüm 3:  $(1,0)$  ve düğüm 4:  $(1,1)$ . Ögeler, düğüm numaraları belirtilen iki üçgendir; e=1: 1,2,3 ve e=2: 1,3,4. z koordinatlarının yalnızca düğüm 1 için belirlenmesi gerektiğini fark ederiz, çünkü bunlar 2,3,4 düğümleri için sınır değerleridir. Ancak, sonlu eleman yönteminde yerleştirme sürecini göstermek için bu gerçeği şimdilik görmezden geleceğiz. Üçgen elemanlarının alanlarının  $\Delta_1 = \Delta_2 + \frac{1}{4}$  ve  $r=4$  olduğuna dikkat edelim. İlk olarak, bu temel bilgidен  $a^e, b^e, c^e$  katsayılarını hesaplıyoruz. Aşağıdaki tabloda, her sütun bir  $(i, j, k)$  düğümüne karşılık gelir.

$$\left( \begin{array}{c|cc|cc} & & e=1 & & e=2 & \\ \hline a^e & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ b^e & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ c^e & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \right)$$

Sütunların istenen  $L_i^e$ ,  $L_j^e$  ve  $L_k^e$  fonksiyonlarını ürettiği doğrulanabilir. Örneğin, ilk sütun

$$L_i^1 = \frac{1}{2} \Delta_1^{-1} [0 + 0.x + 1.y] = 2y$$

yi verir. Benzer şekilde, diğer sütunlar da istenen sonuçları verir. Sonra,  $e = 1$  elemanı için matris denklemi elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ve  $e=2$  elemanı için matris denklemi :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Sonra bu iki matrisi bir araya getirip

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Elemanları birleştirme sürecini resmettiğimize göre sınır değerleri oldukları için  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$  ve  $z_4 = 2$  olduğu gerçeğini kullanarak çözümü hızlıca bulabiliriz.

Yukarıdaki son matris denkleminde bu değerleri kullanarak, hemen  $z_1 = \frac{3}{3}$  olduğunu buluruz. Gerçek değer  $\frac{1}{2}$  olduğu için bu kaba bir yaklaşımdır.  $u(x, y) = x^2 + y^2$  nin tam çözüm olduğunu unutmamak gerekir.

## 5.4.2 Örnek 2

İki boyutlu bir  $D$  bölgesindeki sıcaklık,  $u(x,y)$ , Laplace'ın  $D$  deki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

denklemini karşılar. Şekil(5.3) de gösterilen  $D$  bölgesini sınır koşulları ile birlikte düşünelim [35]:

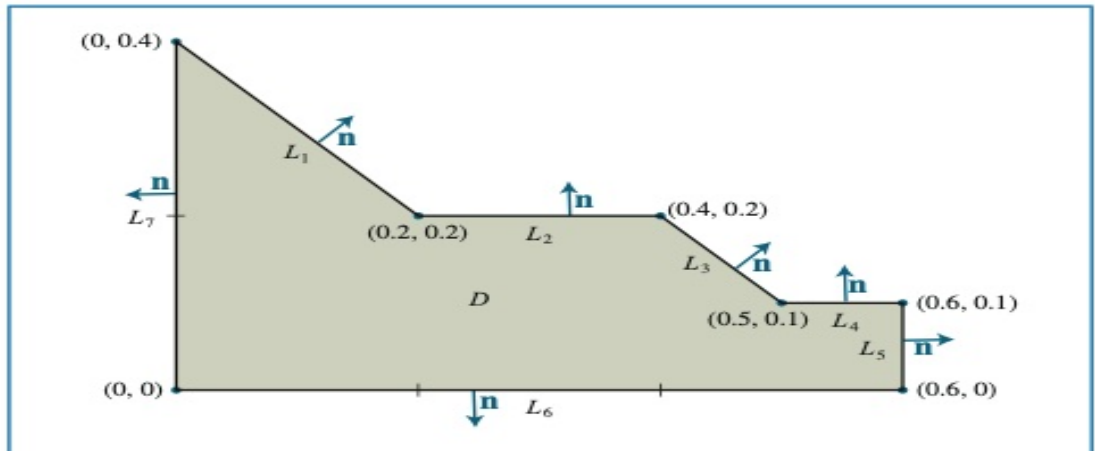
$$(x,y) \in L_6 \quad \text{ve} \quad (x,y) \in L_7 \quad , \text{ için} \quad u(x,y) = 4;$$

$$(x,y) \in L_2 \quad \text{ve} \quad (x,y) \in L_4 \quad , \text{ için} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = x;$$

$$(x,y) \in L_5 \quad , \text{ için} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = y;$$

$$(x,y) \in L_1 \quad \text{ve} \quad (x,y) \in L_3 \quad , \text{ için} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}};$$

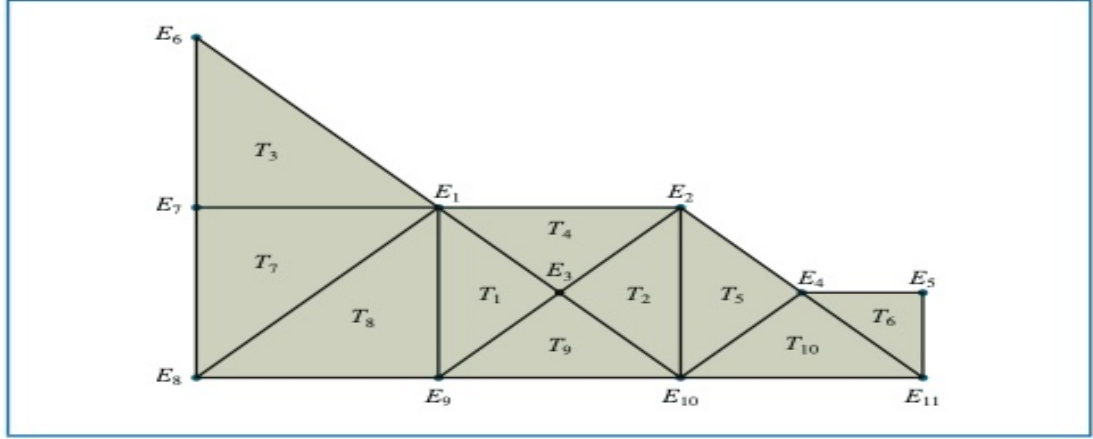
burada  $\partial u/\partial n$ ,  $(x,y)$  noktasında  $D$  bölgesinin sınırına normal  $n$  yönündeki yönlü türevi gösterir.



Şekil 5.3: Laplace sınırları

İlk olarak,  $D$  yi üçgenlere ayırıyoruz. Bu örnek için,  $S_1 = L_6 \cup L_7$  ve  $S_2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$ . Üçgenlerin etiketlemesi Şekil(5.4) de gösterilmiştir.

$L_6$  ve  $L_7$  üzerindeki  $u(x,y) = 4$  sınır koşulu,  $t = 6, 7, \dots, 11$  olduğunda, yani  $E_6, E_7, \dots, E_{11}$  düğümlerinde olduğu anlamına gelir.  $l = 1, 2, \dots, 5$  için  $\gamma_l$  değerlerini



Şekil 5.4: Laplace üçgenleştirme

belirlemek için,

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini ve

$$b = \begin{bmatrix} 6.0666 \\ 0.0633 \\ 8.0000 \\ 6.0566 \\ 2.0316 \end{bmatrix}$$

vektörünü oluştururuz.  $Ac = b$  denkleminin çözümü

$$c = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0383 \\ 4.0782 \\ 4.0291 \\ 4.0496 \\ 4.0565 \end{bmatrix}$$

dir.

Bu sistemi çözmek, Laplace denkleminin çözümüne ve ilgili üçgenler üzerindeki sınır koşullarına aşağıdaki yaklaşımı verir:

$$T_1 : \phi(x,y) = 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0291(-2 + 10x) + 4(2 - 5x - 5y),$$

$$T_2 : \phi(x,y) = 4.0782(-2 - 5x + 5y) + 4.0291(4 - 10x) + 4(-1 + 5x - 5y),$$

$$T_3 : \phi(x,y) = 4(1 + 5y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4.0383(5x),$$

$$T_4 : \phi(x,y) = 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0782(-2 + 5x + 5y) + 4.0291(2 - 10y),$$

$$T_5 : \phi(x,y) = 4.0782(2 - 5x + 5y) + 4.0496(-4 + 10x) + 4(3 - 5x - 5y),$$

$$T_6 : \phi(x,y) = 4.0496(6 - 10x) + 4.0565(-6 + 10x + 10y) + 4(1 - 10y),$$

$$T_7 : \phi(x,y) = 4(-5x + 5y) + 4.0383(5x) + 4(1 - 5y),$$

$$T_8 : \phi(x,y) = 4.0383(5y) + 4(1 - 5x) + 4(5x - 5y),$$

$$T_9 : \phi(x,y) = 4.0291(10y) + 4(-2 - 5x - 5y) + 4(-1 + 5x - 5y),$$

$$T_{10} : \phi(x,y) = 4.0496(10y) + 4(3 - 5x - 5y) + 4(2 + 5x - 5y).$$

Sınır değeri probleminin asıl çözümü  $u(x,y) = xy + 4$  dür. Tablo(5.9), her  $i = 1, \dots, 5$  için  $u$  değerini  $E_i$  deki  $\phi$  değeriyle karşılaştırmaktadır.

Tablo 5.9: 5.4.2 de elde edilen yaklaşımlarla gerçek sonuçların karşılaştırılması

$x$	$y$	$\phi(x,y)$	$u(x,y)$	$ \phi(x,y) - u(x,y) $
0.2	0.2	4.0383	4.04	0.0017
0.4	0.2	4.0782	4.08	0.0018
0.3	0.1	4.0291	4.03	0.0009
0.5	0.1	4.0496	4.05	0.0004
0.6	0.1	4.0565	4.06	0.0035

## BÖLÜM 6

### SONUÇ

Tez çalışmasında ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri nümerik olarak çözüldü. Bu denklemlerin çözümünde sonlu farklar ve Galerkin metodu kullanıldı. Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için özellikle sonlu fark yaklaşımlarını elde etmek için Taylor açılımı kullanıldı. Bulunan nümerik sonuçlar ile analitik çözümler karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda kısmi türevler yerine sonlu farklar ve sonlu eleman yöntemleri ile çözümün sağlanabileceği görüldü.

## KAYNAKÇA

- [1] Igel Heiner, Computational Seismology, Kasım 2016, Department of Earth and Environmental Sciences Ludwig-Maximilians-University Munich, Mart 2021 < [https://www.geophysik.uni-muenchen.de/igel/Lectures/CS2015/03\\_finite\\_difference\\_A.pdf](https://www.geophysik.uni-muenchen.de/igel/Lectures/CS2015/03_finite_difference_A.pdf) >.
- [2] A.J. Davies, *The Finite Element Method: An Introduction with Partial Differential Equations*.(New York: Oxford University Press, 2021) 1-6.
- [3] Mehmet Aydın, Beno Kuryel, Gönül Gündüz ve Galip Oturanç, *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*. (İzmir: Barış Yayınları, 2019) 496.
- [4] Randall J. LeVeque, *Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations*. (Washington: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007) 311-312.
- [5] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*.(Texas: Bob Pirtle, 2008) 605.
- [6] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 716.
- [7] Randall J. LeVeque, *Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations*. (Washington: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007) 312.
- [8] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 714-715.
- [9] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 715.
- [10] Randall J. LeVeque, *Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations*. (Washington: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007) 313-314.

- [11] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 8.
- [12] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 10.
- [13] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*. (Texas: Bob Pirtle, 2008) 20.
- [14] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*. (Texas: Bob Pirtle, 2008) 610.
- [15] Randall J. LeVeque, *Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations*. (Washington: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007) 3.
- [16] Gabil Amirali ve İlhame Amirali, *Nümerik Analiz*. (Ankara: Seçkin Yayıncılık, 2018) 93.
- [17] Jaan Kiusalaas, *Numerical Methods in Engineering With Python 3*. (New York: Cambridge University Press, 2013) 183-187.
- [18] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 684-692.
- [19] Gabil Amirali ve İlhame Amirali, *Nümerik Analiz*. (Ankara: Seçkin Yayıncılık, 2018) 93-94.
- [20] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, çev. Nuri Özalp ve Elif Demirci. (Ankara: Gazi Kitabevi, 2012) 629-632.
- [21] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 716-742.
- [22] Structural Mechanics and Theory of Elasticity Department, Boris Grigoryevich Galerkin. 17 May 2006, Saint-Petersburg State Polytechnical University, March 2021 < [https://web.archive.org/web/20060517215854/http://smitu.csf.spbstu.ru/galerkin\\_n.htm](https://web.archive.org/web/20060517215854/http://smitu.csf.spbstu.ru/galerkin_n.htm) >
- [23] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, çev. Nuri Özalp ve Elif Demirci. (Ankara: Gazi Kitabevi, 2012) 635-638.
- [24] Gabil Amirali ve İlhame Amirali, *Nümerik Analiz*. (Ankara: Seçkin Yayıncılık, 2018) 381.

- [25] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*.(Texas: Bob Pirtle, 2008) 613-619.
- [26] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 718.
- [27] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 723.
- [28] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 727.
- [29] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 737.
- [30] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 731.
- [31] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 736.
- [32] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 743.
- [33] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 744.
- [34] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*.(Texas: Bob Pirtle, 2008) 615-616.
- [35] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*. (Boston: Richard Stratton, 2011) 755-758.

## BÖLÜM 7

### EKLER

#### 7.1 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinde Kullanılan Bazı Matlab Kodları

##### 7.1.1 Örnek 5.1.1 Matlab Kodu

```
function x = GaussSeidel(A,b,es,maxit)
if nargin<2, error('at least 2 input arguments required'); end
if nargin<10,isempty(maxit), maxit=100;end
if nargin<9,isempty(es), es=0.00001;end
m,n=size(A);
if m ~=n, error('Matrix A must be square'); end
C=A;
for i=1:n
C(i,i)=0;
x(i)=0;
end
x=x';
for i=1:n
C(i,1:n)=C(i,1:n)/A(i,i);
end
iter=0;
while(1)
xold=x;
for i=1:n
x(i)=d(i)-C(i,:)*x;
```

```

if x(i) = 0
ea(i)=abs((x(i)-xold(i))/x(i))*100;
end
end
iter=iter+1;
if max(ea)<=es | iter>=maxit,break,end
end

```

## 7.1.2 Örnek 5.1.2 Matlab Kodu

```

function x = GaussSeidelA(A,b,es,maxit)
if nargin<2,error('at least 2 input arguments required');end
if nargin<4|isempty(maxit),maxit=100;end
if nargin<3|isempty(es),es=0.00001;end
m,n= size(A);
if m =n, error('Matrix A must be square'); end
C = A;
for i = 1:n
C(i,i) = 0;
x(i) = 0;
end
x = x';
for i = 1:n
C(i,1:n) = C(i,1:n)/A(i,i); end
for i = 1:n
d(i) = b(i)/A(i,i);
end
iter = 0;
while (1)
xold = x;
for i = 1:n
x(i) = d(i)-C(i,:)*x;
if x(i) = 0
ea(i) = abs((x(i) - xold(i))/x(i)) * 100;
end
end
iter = iter+1;
if max(ea)<=es | iter >= maxit, break, end

```

end

### 7.1.3 Örnek 5.2.1 Matlab Kodu

```
clear all ;
xl=0; xr=1;
J=10;
dx=(xr-xl)/J;
tf=0.5;
Nt=1000;
dt= tf/Nt;

mu = dt/(dx)2;
if mu > 0.5
error('mu should < 0.5!')
end
x= xl : dx : xr;
f= sin(pi*x);
u=zeros(J+1,Nt);
t=n*dt;
gl=sin(pi*xl)*exp(-pi*pi*t);
gr= sin(pi*xr)*exp(-pi*pi*t);
if n==1
for j=2:J
u(j,n)=f(j)+mu*(f(j+1)-2*f(j)+f(j-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
else
for j=2:J
u(j,n)=u(j,n-1)+mu*(u(j+1,n-1)-2*u(j,n-1)+u(j-1,n-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
end
for j=1:J+1
xj = xl + (j-1)*dx;
uex(j,n)=sin(pi*xj)*exp(-pi*pi*t);
```

```
end
end
```

### 7.1.4 Örnek 5.2.2 Matlab Kodu

```
clear all ;
xl=0; xr=4;
J=20;
dx=(xr-xl)/J;
tf=0.4;
Nt=10;
dt= tf/Nt;

mu = (4/pi^2) * dt / (dx)^2;
x= xl : dx : xr;
f = sin(pi/4)* x +2*sin(pi/4)* cos(pi/4)* x;
u=zeros(J+1,Nt);
for n=1:Nt
t=n*dt;
gl=exp(-t)*sin((pi/2)*xl)+exp(-t/4)*sin(pi/4)*xl;
gr=exp(-t)*sin((pi/2)*xr)+exp(-t/4)*sin(pi/4)*xr;
if n==1
for j=2:J
u(j,n)=f(j)+mu*(f(j+1)-2*f(j)+f(j-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
else
for j=2:J
u(j,n)=u(j,n-1)+mu*(u(j+1,n-1)-2*u(j,n-1)+u(j-1,n-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
end
for j=1:J+1
xj = xl + (j-1)*dx;
uex(j,n) = exp(-t) * sin(pi/2) * xj + exp(-t/4) * sin(pi/4) * xj;
end
```

```

end
for j=2:J
u(j,n)=u(j,n-1)+mu*(u(j+1,n-1)-2*u(j,n-1)+u(j-1,n-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
end
for j=1:J+1
xj = x1 + (j-1)*dx;
uex(j,n) = sin(pi*xj) * exp(-pi*pi*t);
end
end

```

### 7.1.5 Örnek 5.3.1 Matlab Kodu

```

clear all;
xl=0; xr=1;
J=10;
dx=(xr-xl)/J;
tf=1;
Nt=20;
dt=tf/Nt;
mu=dt/dx;
x=xl : dx : xr;
f=sin(pi*x);
for n=1:Nt
t=n*dt;
gl=sin(pi*xl)*cos(2*pi)*t;
gr=sin(pi*xr)*cos(2*pi)*t;
if n==1
for j=2:J
u(j,n)=f(j)-0.5*mu*(f(j+1)-f(j-1))+0.5*(mu2)*(f(j+1)-2*f(j)+f(j-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
else
for j=2:J
u(j,n)=u(j,n-1)-0.5*mu*(u(j+1,n-1)-u(j-1,n-1))+0.5*mu2*(u(j+1,n-1)-2*u(j,n-1)+u(j-

```

```

1,n-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
end
for j=1:J+1
xj=xl+(j-1)*dx;
uex(j,n)=sin(pi*xj)*cos(2*pi)*t;
end

```

### 7.1.6 Örnek 5.3.2 Matlab Kodu

```

clear all;
xl=0; xr=1;
J=10;
dx=(xr-xl)/J;
tf=1;
Nt=4;
dt=tf/Nt;
mu=2*dt/dx;
x=xl : dx : xr;
f=sin(pi*x);
for n=1:Nt
t=n*dt;
gl=cos(pi)*t*sin(pi)*xl;
gr=cos(pi)*t*sin(pi)*xr;
if n==1
for j=2:J
u(j,n)=f(j)-0.5*mu*(f(j+1)-f(j-1))+0.5*(mu2)*(f(j+1)-2*f(j)+f(j-1));
end
u(1,n)=gl;
u(J+1,n)=gr;
else
for j=2:J
u(j,n)=u(j,n-1)-0.5*mu*(u(j+1,n-1)-u(j-1,n-1))+0.5*mu2*(u(j+1,n-1)-2*u(j,n-1)+u(j-1,n-1));
end
u(1,n)=gl;

```

```
u(J+1,n)=gr;  
end  
for j=1:J+1  
xj=xl+(j-1)*dx;  
 $u_{ex}(j,n)=\cos(\pi)*t*\sin(\pi)*xj$ ;  
end  
end
```

