T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FOCUSING LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ

Sinem CORUH

TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ
JÜRİ ÜYELERİ
Prof. Dr. Nilüfer TOPSAKAL
Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI

RİZE-2021

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FOCUSING LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ danışmanlığında, Sinem CORUH tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararı ile oluşturulan jüri tarafından 23/08/2021 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		**Unvanı, Adı Soyadı**	**İmza**
Başkan	:	Prof. Dr. Nilüfer TOPSAKAL	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI	

Doç. Dr. Ahmet YANIK
ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, focusing lineer olmayan Schrödinger denklemi ele alınmaktadır. Lineer olmayan Schrödinger denkleminin tam çözümü elde edilmektedir. Bunun için üstel matrislerden faydalanılmaktadır.

Bu çalışmanın bu noktaya gelinceye kadar emeği geçen, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan sabırla destek olan tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ'ye, lisansüstü ders aşamasında yardımlarından dolayı sayın bölüm hocalarıma, sonsuz destek ve güvenlerinden dolayı aileme ve yanımda olan sevgili arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Sinem CORUH

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Focusing Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Tam Çözümü" başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 23/08/2021

Sinem CORUH

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

FOCUSING LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ

Sinem CORUH

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ

Bu tezde focusing lineer olmayan Schrödinger denkleminin (NLS) tam çözümünü elde etmek için bir metot verilmektedir. Tam çözümü üstel matrisler cinsinden kapalı bir formda ifade etmek için bir açık formül sunulmaktadır. Böyle tam çözümler alternatif olarak konumsal ve zamansal koordinatların üstel, trigonometrik ve polinom fonksiyonlarının cebirsel bir kombinasyonu olarak açık bir şekilde yazılabilir.

2021, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tam Çözüm, Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi, Schrödinger Denklemi, NLS Denklemi.

ABSTRACT

EXACT SOLUTIONS TO THE FOCUSING NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Sinem CORUH

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet ÜNLÜ

In this thesis, a method is given to obtain the exact solution of the focusing nonlineer Schrödinger equation (NLS). An explicit formula is presented to express the exact solution in terms of exponential matrices in a closed form. Such exact solutions can alternatively be written explicitly as an algebraic combination of exponential, trigonometric and polynomial functions of spatial and temporal coordinates.

2021, 63 pages

Keywords: Exact Solition, Nonlinear Schrödinger Equation, Schrödinger Equation, NLS Equation.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

IST	Ters Saçılım Dönüşümü
NLS	Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
$u(x,t)$	Potansiyel
q	Kompleks Değerli İntegrallenebilir Potansiyel
λ	Kompleks Değerli Spektral Parametre
$s(\lambda,t)$	Saçılım Verileri
$R(\lambda)$	Yansıma Katsayısı
$T(\lambda)$	İletim Katsayısı
c_{js}	Normalleştirici Sabit
$-$	Kompleks Eşlenik
†	Matris Transpoz ve Kompleks Eşlenik
Ω	Marchenko Denklemi Çekirdeği
I	Birim Matris

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Doğanın temel kanunlarının matematiksel olarak ifade edilebilmesi ve doğa olaylarının anlaşılabilmesi için öne sürülen modeller genel olarak lineer değildir. Bu yüzden oluşturulan bu modellerin birçoğu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Bu denklemlerden biri focusing lineer olmayan Schrödinger denklemidir. Kısaca bu denklemi NLS olarak göstereceğiz. Bu denklemin birçok uygulama alanı vardır. Dalga yayılımı, yeteri kadar derin sulardaki yüzey dalgaları ve fiber optikteki sinyal yayılımı. Bu tezde amacımız NLS denkleminin tam çözümünü bulmak için bir metot oluşturmaktır. Bu metot Korteweg-de Vries denkleminin çözümüne benzer şekilde bir yöntemdir [5]. Burada rasyonel saçılım verisiyle birlikte IST (inverse scattering theorem) yani ters saçılım dönüşümü metotu kullanılmaktadır. IST metotunda rasyonel saçılım verilerinin genel kullanımı için [8] den yararlanılmıştır. NLS denklemi başka metotlarla da çözülebilir ancak bu mototlar Darboux dönüşümü, Bäcklund dönüşümü, Hirota metotu [13] ve Hasimito gibi çeşitli bazı dönüşümleri kullanmayı gerektirir. Ayrıca çözümün tipini tahmin etmeye ve çeşitli parametreleri düzenlemeye dayalı başka teknikleri de kullanmayı gerektirir.

1.2. Tanımlar

Tanım 1.1. u kompleks değerli bir fonksiyon, x ve t sırasıyla konum ve zaman belirten alt indisler ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \tag{1}$$

denklemi focusing lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) olarak adlandırılır. NLS denklemi birçok sebepten dolayı önemli bir denklemdir [1-4, 15, 18].

Tanım 1.2. (Matris Tersi) A bir kare matris olsun. $AB = BA = I$ olacak şekilde bir B matrisi varsa bu B matrisine A matrisinin tersi denir. Bir A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir.

Tanım 1.3. (Matrisin Transpozesi/Devriği) Bir A matrisinin satırlarının aynı numaralı sütun olarak yazılmasıyla elde edilen A^T matrisine A' nın transpozesi/devriği denir. Diğer deyişle satırların sütunla, sütunların satırla yer değiştirilip yazılmasıyla elde edilen matristir [17].

Tanım 1.4. (Köşegen/ Diagonal Matris) Bir kare matrisin asal köşegeni haricinde diğer tüm elemanları sıfır ise bu matrise köşegen/diagonal matris adı verilir.

Tanım 1.5. (Hermisyen Matris) A elemanları kompleks sayılardan oluşan bir kare matris olsun. A matrisinin transpozesinin eşleniği yine kendine eşitse bu matrise hermisyen matris adı verilir. $A = \overline{A^{\dagger}}$ dir.

Tanım 1.6. (Kare Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri) λ bir parametre ve A, nxn boyutlu elemanları kompleks ya da reel sayılardan oluşan bir matris olsun. $X \neq 0$ vektörü için $AX = \lambda X$ eşitliğini sağlayan λ değerlerine A matrisinin özdeğerleri, bunlara karşılık gelen X vektörlerine de özvektör adı verilir [17].

Tanım 1.7. (Matrisin Minörü ve Kofaktörü i satır ve j sütun numaraları olmak üzere n. mertebeden bir determinantın a_{ij} elemanının bulunduğu alt satırın ve sütunun silinmesiyle oluşan $(n-1)$. mertebeden determinanta, a_{ij} elemanının minörü adı verilir. a_{ij} elemanının minörünün $(-1)^{i+j}$ ile çarpılmasıyla oluşan determinanta ise a_{ij} elemanının kofaktörü adı verilir [17].

Tanım 1.8. (Matrisin Adjointi/Ek Matris) A kare matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin determinantının her a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olmak üzere a_{ij}

elemanlarının yerine A_{ij} kofaktörlerinin yazılmasıyla elde edilen matrisin devriğine A matrisinin adjointi ya da ek matris denir. EkA veya Adj$A$ ile gösterilir.

Tanım 1.9. (Matris Rankı) A, $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. A' nın $r \times r$ boyutlu kare alt matrislerinden en az bir tanesinin determinantı sıfırdan farklı lakin $r \times r$' den yüksek boyutlu olan tüm alt matrislerinin determinantları sıfırsa bu r sayısı A matrisinin rankıdır [17].

Tanım 1.10. (Matrisin İzi) A, $n \times n$ boyutlu simetrik bir matris ise A' nın köşegenindeki tüm elemanların toplamına A matrisinin izi denir ve iz(A) yada tr(A) ile gösterilir.

Tanım 1.11. (Alt Üçgensel ve Üst Üçgensel Matrisler) A, $n \times n$ kare matris olsun. A' nın asal köşegeninin altındaki tüm elemanlar sıfır ise bu A matrisine üst üçgensel matris, eğer asal köşegeninin üstündeki tüm elemanlar sıfır ise bu A matrisine alt üçgensel matris denir.

Tanım 1.12. (Analitiklik) Kompleks düzlemin bir z_0 noktasının en az bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilen $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [14].

Tanım 1.13. (Tam Fonksiyon) Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Tanım 1.14. (İntegrallenebilirlik) Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi, ters saçılım methoduyla çözülebilirse bu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere integrallenebilirdir denir [14].

Tanım 1.15. (Düz Saçılım/Ters Saçılım Problemi) Diferansiyel denklemde verilen potansiyele karşılık gelen saçılım verilerini bulma problemine düz saçılım problemi, verilen saçılım verilerine karşılık gelen potansiyeli bulma problemine ise ters saçılım problemi denir [14].

Tanım 1.16. (Başlangıç Değer Problemi)

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

şeklinde bir diferansiyel denklem verilsin. Bu denklem için $f(x, y)$ fonksiyonu xy düzleminin bir D alt bölgesinde tanımlansın ve $(x_0, y_0) \in D$ olsun. (2) denklemi için $y(x_0) = y_0$ olacak şekilde $y = y(x)$ çözümünün bulunması problemine başlangıç değer problemi denir [14].

Tanım 1.17. (Öz değer ve Öz fonksiyon) $L, D(L)$ tanım kümesinde sınırlı lineer bir operatör olsun. $L_y = y'' + q(x)y = \lambda y$ olacak şekilde $y(x) \neq 0$ fonksiyonu varsa λ sayısına L operatörünün öz değeri denir, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna da λ' ya karşılık gelen öz fonksiyon adı verilir [14].

Tanım 1.18. (Normalleştirici Sayılar) L operatörünün öz değerleri $\{\lambda_n\}$ dizisi ve öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ise $y(x, \lambda_n)$' ler olsun. $a_n = \int_a^b y^2(x, \lambda_n)dx$ olacak şekilde yazılan a_n sayıları L operatörünün normalleştirici sayıları olarak adlandırılır [14].

Tanım 1.19. (Spektrum) $L - \lambda\mathrm{I}$ opratörünün sınırlı $(L - \lambda\mathrm{I}\,)^{-1}$ tersinin var olmadığı bu λ lar kümesine L operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(L)$ ile gösterilir.
$\sigma(L) = \{\lambda_i L_y = \lambda_y, y \in D(L)\}$ dir. [14]

Tanım 1.20. (Soliton) İlgili lineer adi diferansiyel denklemdeki yansıma içermeyen potansiyele, integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin bir $u(x, t)$ soliton çözümü denir [14].

Tanım 1.21. (Spektral Karakteristik) L operatörünün, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ öz değerler ve $\{\alpha_n\}$ normalleştirici sayılar dizileri spektral karakteristikler olarak adlandırılır [14].

Tanım 1.22. (Tekil Nokta) $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ şeklinde ikinci mertebeden homojen bir diferansiyel denklem verilsin. $P(x) = 0$ şartını sağlayan $x = x_0$ noktasına bu denklemin tekil noktası adı verilir.

Tanım 1.22. (Kutup Noktası) Ayrık tekil noktası z_0 olan analitik $f(z)$ fonksiyonu için $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ olacak şekilde tanımlı z_0 noktası $f(z)$' nin kutup noktasıdır denir [14].

Tanım 1.23. (Fourier / Ters Fourier Dönüşümü) $f \in L_1(-\infty,\infty)$ olmak üzere

$$F(f)(\lambda) = g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

olacak şekilde tanımlanan $g(\lambda) := F(f)(\lambda)$ fonksiyonu f fonksiyonunun $L_1(-\infty,\infty)$' daki Fourier dönüşümüdür. Diğer taraftan $g \in L_1(-\infty,\infty)$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}dx$$

dönüşümüne f fonksiyonunun $L_1(-\infty,\infty)$' daki ters Fourier dönüşümü adı verilir [14].

Tanım 1.24. (Jost Çözümü) $e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x,t)e^{i\lambda x}dt$, $\mathrm{Im}\lambda \geq 0$ fonksiyonuna

$$Ly = y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x \leq \infty \tag{3}$$

denkleminin Jost çözümü denir [14].

Tanım 1.25. (Jost Fonksiyonu) $e(\lambda) = 1 + \int_0^{\infty} K(0,t)e^{i\lambda x}dt$, $\mathrm{Im}\lambda \geq 0$ fonksiyonuna (3) denkleminin Jost fonksiyonu adı verilir [14].

Tanım 1.26. (Saçılma Fonksiyonu) $s(\lambda) = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ fonksiyonuna (3) denkleminin saçılma fonksiyonu adı verilir [14].

Tanım 1.27. (Saçılma Verileri) $e(\lambda)$ saçılma fonksiyonunun sıfırları ia_k, $k = 1,2,\dots,n$ $(n < \infty)$, $a_k > 0$ ise

$$m_k{}^{-2} = \int_0^{\infty} e^2(x, ia_k)dt$$

olmak üzere

$$\begin{cases} ia_1, ia_2, \dots, ia_n, \;\; a_k > 0, \;\; k = 1,2, \dots, n \\ a_1 < a_2 < \cdots a_n \\ m_1, m_2, \dots, m_n \\ s(\lambda) = \dfrac{e(-\lambda)}{e(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

kümesi (3) denkleminin saçılma verileri olarak adlandırılır [14].

Tanım 1.28. (Büyük O Küçük o) $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ iki dizi verilsin öyle ki tüm n' ler için $b_n \geq a_n$ olsun. O halde $a_n = O(b_n)$ şeklinde yazılabilen notasyona büyük O notasyonu denir. Eğer $M > 0$ olacak şekilde bir sabit varsa öyle ki tüm n' ler için $|a_n| \leq Mb_n$ olsun. O halde $a_n = o(b_n) \quad n \to \infty$ şeklinde yazılabilen notasyona küçük o notasyonu denir.

Tanım 1.29. (Hilbert Uzayı) $(X, (.|.))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bu iç çarpım uzayı $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ normuna göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. [16].

1.3. Ters Saçılım Dönüşümü

İntegrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere (λ parametresine bağlı), bir lineer adi diferansiyel denklem ve ya denklem sistemleri karşılık getirilir. Burada lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü olan $u(x,t)$, lineer adi diferansiyel denklemin potansiyeli olarak adlandırılan bir katsayı fonksiyonudur. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem, sırasıyla konum ve zaman koordinatları x ve t bağımsız değişkenlerine sahiptir. Lineer adi diferansiyel denklemde de x bağımsız değişken, λ ve t parametrelerdir.

Her bir sabit t değeri için x sonsuza giderken $u(x,t)$ sıfıra gider. O halde $s(\lambda,t)$ saçılım verileri ile $u(x,t)$ potansiyelinin bulunduğu lineer adi diferansiyel denklem için bir saçılım dönüşümü bulunabilir. Her x değeri için $u(x,t)$ fonksiyonundan, her λ için $s(\lambda,t)$' yi belirleme problemi, lineer adi diferansiyel denklem için düz saçılım problemi olarak bilinir. $s(\lambda, t)$' den $u(x, t)$' yi belirleme problemine ise lineer adi diferansiyel denklem için ters saçılım problem denir.

İntegrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için ters saçılım dönüşümü aşağıdaki diyagram ile açıklabilir:

$$\begin{array}{ccc} u(x,0) & \xrightarrow{\text{lineer add t=0 da düz saçılım}} & s(\lambda,0) \\ \text{lineer olmayan ktdd çözümü } \downarrow & & \downarrow \text{ bir süre sonra saçılım} \\ u(x,t) & \xleftarrow{\text{lineer add için ters saçılım}} & s(\lambda,t) \end{array}$$

Şekil 1. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için ters saçılım dönüşümü

$t = 0$ anında lineer adi diferansiyel denklemle ilgili düz saçılım problem çözülür. Yani $u(x, 0)$ başlangıç verisinden $s(\lambda, 0)$ saçılım verisi belirlenir. $t = 0$ anındaki $s(\lambda, 0)$ saçılım verisinden herhangi bir t anındaki $s(\lambda, t)$ saçılım değeri elde edilir. Sabitlenmiş t anında, lineer adi diferansiyel denklem için ters saçılım problem çözülür. Yani $s(\lambda, t)$ saçılım verisinden, $u(x, t)$ fonksiyonu elde edilir.

1.4. Ön Bilgiler

Bu bölümde, (4)' te verilen Zakharov-Shabat sistemi için ters saçılma problemini çözmek için Marchenko yöntemi ele alınmaktadır. Ayrıca focusing lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) için ters saçılım dönüşümü (IST) yöntemi özetlenmektedir. λ kompleks değerli spektral parametre, q kompleks değerli integrallenebilir potansiyel olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -i\lambda & q(\lambda) \\ -\overline{q(x)} & i\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Zakharov-Shabat sistemini ele alalım. Burada türev, x' e göredir. Ayrıca bar ifadesi kompleks eşleniği ifade etmektedir. (4) sisteminin $\psi(\lambda, x)$ ve $\phi(\lambda, x)$ ile tanımlanan iki lineer bağımsız vektör çözümü vardır. Bu çözümler Jost ve tekil çözümler olarak adlandırılır ve

$$\psi(\lambda,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{bmatrix} + o(1), \qquad x \to +\infty,$$

$$\phi(\lambda,t) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} \\ 0 \end{bmatrix} + o(1), \qquad x \to -\infty. \tag{5}$$

şeklindedir. Ayrıca T iletim katsayısı, L sol yansıma katsayısı ve R sağ yansıma katsayısı olmak üzere, asimptotlar

$$\psi(\lambda,x) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} L(\lambda)/T(\lambda) \\ e^{i\lambda x}/T(\lambda) \end{bmatrix} + o(1), \qquad x \to -\infty, \tag{6}$$

$$\phi(\lambda,t) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x}/T(\lambda) \\ e^{i\lambda x} R(\lambda)/T(\lambda) \end{bmatrix} + o(1), \qquad x \to +\infty. \tag{7}$$

şeklindedir. (4)' ün saçılım çözümü dışında bağıl durum çözümleri vardır öyle ki bu çözüm integrallenebilir karesel çözümlerdir. Bu çözümler T' nin kutuplarında yani $\mathbb{C}^+$ üst yarım kompleks düzlemdedir. O halde T' nin bağıl durum kutuplarını $j = m + 1, \ldots m + n$, için λ_j ile tanımlayalım ve λ_j de kutupsal çoklukları n_j ile ifade edelim. $j = 1$ yerine $j = m + 1$ kullanmak notasyonel olarak kolaylık sağlar. $[1 - 4, 16, 20]$ den biliyoruz ki $j = m + 1, \ldots m + n$, için $\lambda = \lambda_j$ olduğunda (4)' ün sadece bir tane lineer bağımsız karesel integrallenebilir vektör çözümü vardır. $s = 0, \ldots, n_j - 1$ için n_j vardır ve bağıl durum normalleştirici sabiti c_{js} her λ_j ile ilişkilidir. (4) için ters saçılım problemi $x \in \mathbb{R}$ için saçılım verilerinin bir kümesinden örneğin bağıl durum bilgileri $\left\{\lambda_j, \{c_{js}\}_{s=0}^{n_j-1}\right\}_{j=m+1}^{m+n}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $R(\lambda)$ yansıma katsayısından oluşan, $q(x)$' in elde edilmesiyle oluşur. Bu problem Marchenko metoduyla aşağıdaki gibi çözülebilir:

a. $\left\{R(\lambda), \{\lambda_j\}, \{c_{js}\}\right\}$ saçılım verilerinden, Ω Marchenko çekirdeği formu

$$\Omega(y) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) e^{i\lambda y}\, d\lambda + \sum_{j=m+1}^{m+n} \sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js} \frac{y^s}{s!} e^{i\lambda_j y} \tag{8}$$

b. Marchenko denkleminin çözümü

$$K(x,y) - \overline{\Omega(x+y)} + \int_x^\infty \int_x^\infty K(x,s)\Omega(s+z)\,\overline{\Omega(z+y)}dsdz = 0, \quad y > x \tag{9}$$

c. Marchenko denkleminde $K(x,y)$ çözümünden q potansiyelini elde etmek için

$$q(x) = -2K(x,x) \tag{10}$$

d. $K(x,y)$ tanımından

$$G(x,y) := -\int_x^\infty \overline{K(x,z)\Omega(z+y)}\,dz \tag{11}$$

daha sonra (4) - (5)' den $\psi(\lambda,x)$ Jost çözümü elde edilir.

$$\psi(\lambda,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{bmatrix} + \int_x^\infty \begin{bmatrix} K(x,y) \\ G(x,y) \end{bmatrix} e^{i\lambda y} dy \tag{12}$$

$|q(x)|^2$, (10)' dan yada [18] kullanılarak hesaplanabilir.

$$\int_x^\infty |q(z)|^2 dz = -2G(x,x), \qquad |q(x)|^2 = 2\frac{dG(x,x)}{dx} \tag{13}$$

(1) denklemi için başlangıç değer problemi $u(x,0)$ bilinirse $u(x,t)$' yi elde etmekten oluşur. Eğer $u(x,0) = q(x)$ olursa bu başlangıç değer problemi, IST metoduyla aşağıda verilen diyagramla açıklanabilir [1-4, 15, 18]:

$$u(x,0) \xrightarrow{\text{düz saçılım}} \left\{R(\lambda), \{\lambda_j\}, \{c_{js}\}\right\}$$

NLS denkleminin çözümü $\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ bir süre sonra saçılım

$$u(x,t) \xleftarrow{\text{ters saçılım}} \left\{R(\lambda;t), \{\lambda_j\}, \{c_{js}(t)\}\right\}$$

Şekil 2. Lineer olmayan Schrödinger denkleminin ters saçılım metoduyla çözümü

Ters saçılım metodunun uygulanışı şu şekildedir:

i. Başlangıç potansiyeline karşılık gelen $t = 0$ anındaki saçılım verileri elde edilir. Bu veriler, yansıma katsayısı $R(\lambda)$, $T(\lambda)$ iletim katsayısının λ_j bağıl durum kutupları ve c_{js} normalleştirici sabitleridir.

ii. İlk saçılım verilerinin zamanla değiştiğini kabul edelim. Zamana bağlı yansıma katsayısı $R(\lambda; t)$, yansıma katsayısı $R(\lambda)$'dan

$$R(\lambda; t) = R(\lambda)e^{4i\lambda^2 t} \tag{14}$$

ile elde edilir. $T(\lambda)$ ve bağıl durum kutupları λ_j ise zamanla değişmez ve bağıl durum normalleştirici sabitlerinin zamanla değişimi $s = 0$ olduğunda aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$c_{j0}(t) = c_{j0}e^{4i\lambda^2 t}, \qquad j = n+1, \dots, m+n \tag{15}$$

$c_{js}(t)$' nin hesaplanması $e^{4i\lambda^2 t}$' nın çarpımıyla ifade edilir ve s sırasına göre t' de bir polinomdur. Şöyle elde edilir [7]:

$$\left[c_{j(n_j-1)}(t) \dots c_{j0}(t)\right] = \left[c_{j(n_j-1)} \dots c_{j0}\right] e^{-4iA_j^2 t}. \tag{16}$$

iii. Son olarak zamana bağlı saçılım verileri $\left\{R(\lambda; t), \left\{\lambda_j, \left\{c_{js}(t)\right\}_{s=0}^{n_j-1}\right\}_{j=m+1}^{m+n}\right\}$ kullanılarak zamana bağlı potansiyeli elde etmek için, (4) denklemi için ters saçılım problemi çözülür. Sonuçta ortaya çıkan zamana bağlı potansiyel $u(x, t)$, (1)'in çözümü olur ve $t = 0$ da $q(x)$' e eşit olur. Bu ters problem Marchenko metoduyla çözülebilir. Bu yöntemde, $\Omega(y)$ çekirdeği, zamana bağlı $\Omega(y; t)$ çekirdeği ile yer değiştirilmektedir. Bu ise $R(\lambda)$' nın $R(\lambda; t)$ ile ve c_{js} nin $c_{js}(t)$ ile yer değiştirmesiyle elde edilir.

1.5. Saçılım Verisinin Temsili

Bu bölümde, Zakharov-Shabat sistemiyle ilişkili bazı rasyonel saçılım verilerinden A, B, C matrislerinin nasıl oluşturulduğu gösterilecektir. Burada A sabit kare matris, B sabit sütun vektörü ve C sabit satır vektörüdür.

Rasyonel $R(\lambda)$ ifadesi $\mathbb{C}^+$ deki n_j katlı $(j = 1, \dots, m)$ λ_j de kutuplara sahip ise $\lambda \to \infty$ iken $R(\lambda) \to 0$ olduğundan $R(\lambda)$' nın kesirli açılımı bazı kompleks r_{js} katsayıları için

$$R(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{n_j} \frac{(-i)^s r_{js}}{(\lambda - \lambda_j)^s} \tag{17}$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edelim ki (17)' deki iç toplam $j = 1, \dots, m$ olmak üzere

$$\sum_{s=1}^{n_j} \frac{(-i)^s r_{js}}{(\lambda - \lambda_j)^s} = -iC_j(\lambda - iA_j)^{-1} B_j \tag{18}$$

formunda yazılabilir. O halde

$$A_j := \begin{bmatrix} -i\lambda_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i\lambda_j & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i\lambda_j \end{bmatrix}, \; B_j := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C_j := [r_{jn_j} \quad \cdots \quad r_{j1}] \tag{19}$$

matrisleri tanımlanır. Öyle ki

$$\lambda - iA_j = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_j & i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_j & i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \lambda_j & i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - \lambda_j \end{bmatrix}$$

$$(\lambda - iA_j)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda-\lambda_j} & \frac{-i}{(\lambda-\lambda_j)^2} & \frac{(-i)^2}{(\lambda-\lambda_j)^3} & \cdots & \frac{(-i)^{n_j-2}}{(\lambda-\lambda_j)^{n_j-1}} & \frac{(-i)^{n_j-1}}{(\lambda-\lambda_j)^{n_j}} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-\lambda_j} & \frac{-i}{(\lambda-\lambda_j)^2} & \cdots & \frac{(-i)^{n_j-3}}{(\lambda-\lambda_j)^{n_j-2}} & \frac{(-i)^{n_j-2}}{(\lambda-\lambda_j)^{n_j-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda-\lambda_j} & \cdots & \frac{(-i)^{n_j-4}}{(\lambda-\lambda_j)^{n_j-3}} & \frac{(-i)^{n_j-3}}{(\lambda-\lambda_j)^{n_j-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda-\lambda_j} & \frac{-i}{(\lambda-\lambda_j)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda-\lambda_j} \end{bmatrix}$$

dir. Burada C_j satır vektörü n_j girdilerini, B_j sütun vektörü n_j girdilerini içerir. A_j ise $n_j \times n_j$ lik bir kare matristir. $(-A_j)$ Jordan canonical formdadır ve $(\lambda - iA_j)^{-1}$ bir üst köşegen matristir.

$j = m+1, \ldots, m+n$ için bağıl duruma gelince A_j, B_j, C_j matrislerini tanımlamak için (19)' u kullanalım. C_j aşağıdaki gibi tanımlandığında

$$C_j := [c_{j(n_j-1)} \quad \cdots \quad c_{j0}],$$

öyle ki (8)' deki toplama terimi şu şekilde elde edilir:

$$\sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js} \frac{y^s}{s!} e^{i\lambda_j y} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_j \left(\lambda - iA_j\right)^{-1} B_j e^{i\lambda y} d\lambda \ , \quad y > 0. \tag{20}$$

$p \times p$ lik bir A diagonal matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{m+n} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Burada

$$p := \sum_{j=1}^{m+n} n_j$$

şeklinde tanımlı tamsayıdır. Benzer şekilde p boyutlu B sütun vektörü

$$B := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{m+n} \end{bmatrix} \tag{22}$$

ve p boyutlu C satır vektörü

$$C := [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_{m+n}] \tag{23}$$

şeklinde tanımlanır.

2. LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜ

Bir önceki bölümde Zakharov-Shabat sisteminin bazı rasyonel saçılım verilerinden sırasıyla (21)-(23)' de verilen A, B ve C matrislerinin nasıl oluşturulduğunu gösterdik. Bu bölümde $x \geq 0$ için zamana bağlı Marchenko denklemini

$$K(x,y;t) - \Omega(x+y;t)^{\dagger} + \int_x^{\infty}\int_x^{\infty} K(x,s;t)\Omega(s+z;t)\Omega(z+y;t)^{\dagger} ds dz = 0,$$

$$y > x \tag{24}$$

açık bir şekilde bu A, B, C matrisleri cinsinden çözeceğiz [6]. Bu çözüm, NLS denklemini (35)' te verilen formülle açık bir şekilde çözmemize yardımcı olur. Eğer A' nın öz değerlerinin reel kısmı pozitif ise bu çözümlerin tüm xt düzleminde analitik olduğunu göstereceğiz. Ayrıca tam çözümün elde edilmesi için kullanılan (29)-(31)'deki $Q(x;t)$, $N(x)$ ve $R(x;t)$ matrislerinin birçok özelliğini inceleyeceğiz.

$y \geq 0$ için, (18)-(20) yardımıyla (8)' de tanımlanan $\Omega(y)$ çekirdeği

$$\Omega(y) = Ce^{-Ay}B \qquad y \geq 0 \tag{25}$$

ile hesaplanır. Bu çekirdek, (9)' daki Marchenko integral denklemi için ayrılabilirdir. Bu yüzden (9)' daki Marchenko integral denklemi cebirsel olarak çözülebilirdir.

(14) kullanılarak, zamana bağlı Marchenko çekirdeği

$$\Omega(y;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda)e^{4i\lambda^2 t}e^{i\lambda y}d\lambda + \sum_{j=m+1}^{m+n}\sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js}(t)\frac{y^s}{s!}e^{i\lambda_j y}$$

şeklinde ifade edilebilir [11]. Burada $c_{js}(t)$ (16)' yı sağlamaktadır. (25) denklemindeki C, Ce^{-4iA^2t} ile yer değiştirilirse

$$\Omega(y;t) = Ce^{-Ay-4iA^2t}B, \qquad y \geq 0 \tag{26}$$

elde edilir. Burada dagger işareti matris adjoint (kompleks eşlenik ve transpoz) $\Omega(y;t)$ skaler olduğundan

$$\Omega(y;t)^\dagger = B^\dagger e^{-A^\dagger y + 4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \tag{27}$$

olur. (9) denklemi ile karşılaştırılırsa, zamana bağlı Marchenko integral denklemi

$$K(x,y;t) - \Omega(x+y;t)^\dagger + \int_x^\infty\int_x^\infty K(x,s;t)\Omega(s+z;t)\Omega(z+y;t)^\dagger dsdz = 0,$$
$$y > x \tag{28}$$

şeklinde elde edilir. (26) ve (27), (28)'de kullanılırsa $H(x;t)$ aranan fonksiyon olmak üzere çözümün

$$K(x,y;t) = H(x;t)e^{-A^\dagger y + 4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

formunda olduğu görülür. (32), (28)' de kullanılırsa

$$Q(x;t) := \int_x^\infty e^{-A^\dagger s+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger C e^{-As-4iA^2 t} ds, \tag{29}$$

$$N(x) := \int_x^\infty e^{-Az} BB^\dagger e^{-A^\dagger z} dz \tag{30}$$

olmak üzere

$$\Gamma(x;t) := I + Q(x;t)N(x), \tag{31}$$

yazılır. Γ, $p \times p$' lerden oluşmuş I ile tanımlı birim matrisle Q ve N' lerden oluşur. Eğer A' nın öz değerlerinin reel kısmı pozitif ise bu çözümler tüm xt uzayında analitiktir.

(26) ve (27) denklemleri (28) Marchenko denkleminde yazılırsa

$$K(x,y;t) - B^\dagger e^{-A^\dagger(x+y)+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger$$
$$+ \int_x^\infty \int_x^\infty K(x,s;t) C e^{-A(s+z)-4iA^2 t} BB^\dagger e^{-A^\dagger(z+y)+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger ds dz = 0$$

bulunur. Burada çözüm

$$K(x,y;t) = H(x;t) e^{-A^\dagger y+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger \tag{32}$$

şeklinde aranabilir. Öyleyse (32), (28)' de yerine yazılırsa

$$H(x;t) e^{-A^\dagger y+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger - B^\dagger e^{-A^\dagger(x+y)+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger$$
$$+ \int_x^\infty \int_x^\infty H(x;t) e^{-A^\dagger s+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger C e^{-A(s+z)-4iA^2 t} BB^\dagger e^{-A^\dagger(z+y)+4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger ds dz = 0$$

veya

$$H(x;t)e^{-A^\dagger y+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger - B^\dagger e^{-A^\dagger x}e^{-A^\dagger y}e^{4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$
$$+\int_x^\infty\int_x^\infty H(x;t)e^{-A^\dagger s+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger Ce^{-As}e^{-Az}e^{-4iA^2 t}BB^\dagger e^{-A^\dagger z}e^{-A^\dagger y}e^{4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger dsdz$$
$$=0$$

elde edilir. Buradan

$$H(x;t)\left[I-B^\dagger e^{-A^\dagger x}\right.$$
$$\left.+\int_x^\infty e^{-A^\dagger s+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger Ce^{-As-4iA^2 t}ds\int_x^\infty e^{-Az}BB^\dagger e^{-A^\dagger z}\,dz\right]e^{-A^\dagger y+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger=0$$

bulunur.

$$I+\int_x^\infty e^{-A^\dagger s+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger Ce^{-As-4iA^2 t}ds\int_x^\infty e^{-Az}BB^\dagger e^{-A^\dagger z}dz$$

ifadesi Γ olarak alınırsa ki bunu da $I+QN$ şeklinde gösterelim. Denklem

$$H(x;t)\Gamma - B^\dagger e^{-A^\dagger x}=0$$

şekline dönüşür. Böylece

$$H(x;t)=B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1} \tag{33}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$K(x,y;t)=B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma(x;t)^{-1}e^{-A^\dagger y+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \tag{34}$$

denklemi bulunmuş olur.

$u(x,t)=-2K(x,x;t)$ olduğundan yerine yazılırsa;

$$u(x,t) = -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x;t)^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger} \tag{35}$$

elde edilir. (35) eşitliği iki determinantın oranı şeklinde yazılabilir [10]

$$u(x,t) = \frac{\det F(x;t)}{\det \Gamma(x;t)}$$

burada $F(x;t)$ matrisi aşağıdaki gibidir.

$$F(x;t) := \begin{bmatrix} 0 & 2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x} \\ e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger} & \Gamma(x;t) \end{bmatrix}$$

Önerme 2.1. Sırasıyla (23) ve (30)' da tanımlanan $Q(x;t)$ ve $N(x)$ matrisleri

$$Q(x;t) = e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2 t}, \quad N(x) = e^{-Ax}N(0)e^{-A^{\dagger}x} \tag{36}$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca A' nın tüm öz değerleri pozitif reel kısma sahip olduğu sürece (29) ve (30)' daki integraller tüm $x,t \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

İspat. Sırasıyla (29) ve (30)' da s yerine $s+x$, z yerine ise $z+x$ yazılırsa;

$$Q(x;t) = \int_0^{\infty} e^{-A^{\dagger}(s+x)+4i(A^{\dagger})^2 t}C^{\dagger}Ce^{-A(s+x)-4iA^2 t}ds$$

$$= e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}\left(\int_0^{\infty} e^{-A^{\dagger}s}C^{\dagger}\,Ce^{-As}ds\right)e^{-Ax-4iA^2 t}$$

$$= e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2 t}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$N(x) = \int_0^{\infty} e^{-A(z+x)}BB^{\dagger}e^{-A^{\dagger}(z+x)}dz$$

$$N(x) = e^{-Ax}\left(\int_0^{\infty} e^{-Az}BB^{\dagger}e^{-A^{\dagger}z}dz\right)e^{-A^{\dagger}x}$$

olur. O halde

$$N(x) = e^{-Ax}N(0)e^{-A^{\dagger}x}$$

elde edilir. Ayrıca (28) ve (29) kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$Q(0;0) = \int_0^{\infty}[Ce^{-As}]^{\dagger}[Ce^{-As}]ds\,, \quad N(0) = \int_0^{\infty}[e^{-Az}B][e^{-Az}B]^{\dagger}\,dz \tag{37}$$

Teorem 2.1. A' nın öz değerlerinin pozitif reel kısımlardan oluştuğunu kabul edelim. Böylece her $x, t \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler sağlanır.

- Sırasıyla (29) ve (30)' da tanımlı $Q(x;t)$ ve $N(x)$ matrisleri pozitif ve self adjointtir. Sonuç olarak pozitif self adjoint $Q(x;t)^{1/2}$ ve $N(x)^{1/2}$ matrisleri vardır. Öyle ki

  $$Q(x;t) = Q(x;t)^{1/2}Q(x;t)^{1/2}$$

  $$N(x) = N(x)^{1/2}\,N(x)^{1/2}$$

  şeklindedir.
- (31)' de tanımlanan $\Gamma(x;t)$ matrisi terslenebilirdir.
- $\Gamma(x;t)$' nin determinantı pozitiftir.

İspat. Kolaylık açısından $Q(x,t)$ ve $N(x)$ matrisleri yerine Q ve N yazalım. (29) ve (30)' daki integrantların, matrislerin ve onların adjointlerinin çarpımı olarak yazılabilmesinin bir sonucu olarak Q ve N matrisleri pozitif ve self adjoint olurlar. Dolayısıyla birinci madde ispatlanmış olur [12]. The Sherman-Marrison-Woodbury formülünden

$$\left[I + Q^{1/2}(Q^{1/2}N)\right]^{-1} = I - Q^{1/2}\left[I + (Q^{1/2}N)Q^{1/2}\right]^{-1} Q^{1/2}N$$

elde edilir [12]. $I + Q^{1/2}NQ^{1/2}$ terslenebilirse ancak ve ancak $(I + QN)$ terslenebilirdir. Diğer taraftan $Q^{1/2}$ ve $N^{1/2}$ nin self adjointliği nedeniyle

$$\left[I + (Q^{1/2}N^{1/2})\left(Q^{1/2}N^{1/2}\right)^{\dagger}\right]$$

yazılabilir. Dolayısıyla terslenebilirdir. Böylece ikinci madde ispatlanmış olur. İki matris özdeşliğinden

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ Q^{1/2}N & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Q^{1/2} \\ -Q^{1/2}N & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -Q^{1/2} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I + Q^{1/2}NQ^{1/2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & -Q^{1/2} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Q^{1/2} \\ -Q^{1/2}N & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ Q^{1/2}N & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + QN & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

olur. Buradan $I + QN$ ve $I + Q^{1/2}NQ^{1/2}$ determinantları aynı olduğu görülür. Böylece

$$\left[I + (Q^{1/2}N^{1/2})\left(Q^{1/2}N^{1/2}\right)^{\dagger}\right]$$

determinantının pozitif olmasından dolayı da üçüncü madde ispatlanmış olur.

Önerme 2.2. A' nın öz değerlerinin pozitif reel kısımlardan oluştuğunu kabul edelim. Böylece her $x, t \in \mathbb{R}$ için (31) ve (30)' da tanımlı $Q(x;t)$, $N(x)$ ve $\Gamma(x;t)$ matrisleri

$$Q_x = -A^{\dagger}Q - QA, \quad N_x = -AN - NA^{\dagger}, \quad Q_t = 4i[(A^{\dagger})^2Q - QA^2], \tag{38}$$

$$\Gamma^{\dagger} = I + NQ, \qquad \Gamma^{-1}Q = Q(\Gamma^{\dagger})^{-1}, \qquad (\Gamma^{\dagger})^{-1}N = N\Gamma^{-1} \tag{39}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. (36) ifadesinin x'e göre türevi alınıp, Q yerine yazılırsa

$$Q_x = -A^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x+4i\left(A^{\dagger}\right)^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2t} + e^{-A^{\dagger}x+4i\left(A^{\dagger}\right)^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2t}(-A)$$
$$+e^{-A^{\dagger}x+4i\left(A^{\dagger}\right)^2 t}Q(0;0)'e^{-Ax-4iA^2t}$$

$$= -A^{\dagger}Q + Q(-A)$$

bulunur. Diğer taraftan (36) ifadesinin x'e göre türevi alınıp, N yerine yazılırsa

$$N_x = -Ae^{-Ax}N(0)e^{-A^{\dagger}x} - e^{-Ax}N(0)e^{-A^{\dagger}x}A^{\dagger} + e^{-Ax}N(0)'e^{-A^{\dagger}x}$$

$$= -AN - NA^{\dagger}$$

bulunur. Ayrıca (36) ifadesinin t' ye göre türevi alınıp, Q yerine yazılırsa

$$Q_t = 4i(A^{\dagger})^2e^{-A^{\dagger}x+4i\left(A^{\dagger}\right)^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2t} - 4ie^{-A^{\dagger}x+4i\left(A^{\dagger}\right)^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2t}A^2$$
$$+(A^{\dagger})^2e^{-A^{\dagger}x+4i\left(A^{\dagger}\right)^2 t}Q(0;0)'e^{-Ax-4iA^2t}$$

$$= 4i[(A^{\dagger})^2Q - QA^2]$$

bulunur. (31) denkleminin her iki tarafının kompleks eşlenik ve transpozu alınıp (bunu dagger işareti ile (†) gösterelim) (36)' dan yararlanılırsa

$$\Gamma^{\dagger} = I + (QN)^{\dagger} \tag{40}$$

$$= I + N^{\dagger}Q^{\dagger}$$

$$= I + NQ \tag{41}$$

elde edilir. (31)' deki eşitliğin her iki tarafının tersi alınıp sağdan Q ile çarpılırsa

$$\Gamma^{-1} = I + N^{-1}Q^{-1} \tag{42}$$

$$\Gamma^{-1}Q = (I + N^{-1}Q^{-1})Q$$

$$= Q + N^{-1} \tag{43}$$

bulunur. (41)' deki eşitliğin her iki tarafının tersi alınıp soldan Q ile çarpılırsa

$$(\Gamma^{\dagger})^{-1} = I + Q^{-1}N^{-1} \tag{44}$$

$$Q(\Gamma^{\dagger})^{-1} = Q(I + Q^{-1}N^{-1})$$

$$= Q + N^{-1} \tag{45}$$

elde edilir. (43) ve (45) eşitliklerinin sağ tarafları birbirine eşit olduğundan

$$\Gamma^{-1}Q = Q(\Gamma^{\dagger})^{-1}$$

sonucu elde edilir. (44) eşitliği sağdan N ile çarpılırsa

$$(\Gamma^{\dagger})^{-1}N = (I + Q^{-1}N^{-1})N$$

$$= N + Q^{-1} \tag{46}$$

bulunur. (42) eşitliği soldan N ile çarpılırsa

$$N\Gamma^{-1} = N(I + N^{-1}Q^{-1})$$

$$= N + Q^{-1} \tag{47}$$

elde edilir. (46) ve (47) eşitliklerinin sağ tarafları birbirine eşit olduğundan

$(\Gamma^{\dagger})^{-1}N = N\Gamma^{-1}$

bulunur.

Teorem 2.2. Her $x, t \in \mathbb{R}$' ler için sırasıyla (29) ve (30)' da tanımlanan $Q(x;t)$ ve $N(x)$ matrisleri tüm $x, t \in \mathbb{R}$ için terslenebilirdir ancak ve ancak A, B, C üçlü matrisi için (25)' deki eşitlik minimaldir ve A' nın öz değerleri pozitif reel kısma sahiptir.

İspat. (36)' dan görüldüğü üzere (37)' de tanımlı $Q(0;0)$ ve $N(0)$ matrislerinin terslenebilir olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. (37)' deki integraller A' nın öz değerlerinin pozitif olması durumunda yakınsaktır. Bazı $g \in \mathbb{C}^p$ vektörleri için $Q(0;0)g = 0$ ise, (37)'den tüm $s \geq 0$' lar için $Ce^{-As}g = 0$ olduğu görülür. Bu tüm $s \in \mathbb{C}$ için $Ce^{-As}g = 0$ olduğu anlamına gelir ve dolayısıyla

$$CA^k g = 0, \qquad k = 0,1,\ldots \tag{48}$$

dır. Benzer şekilde bazı $h \in \mathbb{C}^p$ vektörleri için $N(0)h = 0$ ise (37) kullanılarak

$$B^{\dagger}(A^{\dagger})^k h = 0, \qquad k = 0,1,\ldots \tag{49}$$

elde edilir.

Herhangi bir $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ için (29)' daki integral değişkeni kaydırılırsa, yani $s = p + (x - x_0)$ $\quad (ds = dp, \quad s = x \Longrightarrow p = x_0, \quad s = \infty \Longrightarrow p = \infty)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$Q(x;t) = e^{-A^{\dagger}(x-x_0)+4i\left(A^{\dagger}\right)^2(t-t_0)}Q(x_0;t_0)e^{-A(x-x_0)-4iA^2(t-t_0)} \tag{50}$$

$$= \int_{x_0}^{\infty} e^{-A^{\dagger}(p+(x-x_0))+4i\left(A^{\dagger}\right)^2(t-t_0)}C^{\dagger}C\, e^{-A(p+(x-x_0))-4iA^2(t-t_0)}dp$$

$$= e^{-A^{\dagger}(x-x_0)+4i\left(A^{\dagger}\right)^2(t-t_0)}\left[\int_{x_0}^{\infty}(e^{-A^{\dagger}p}C^{\dagger}Ce^{-Ap})dp\right]e^{-A(x-x_0)-4iA^2(t-t_0)}$$

olur. Böylece köşeli parantez içi $Q(x_0; t_0)$' a eşit olduğundan o halde

$$Q(x;t) = e^{-A^{\dagger}(x-x_0)+4i\left(A^{\dagger}\right)^2(t-t_0)} Q(x_{0;}t_0) e^{-A(x-x_0)-4iA^2(t-t_0)}$$

elde edilir.

Herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için (30)' daki integral değişkeni kaydırılırsa, yani $z = p + (x - x_0)$ $\quad (dz = dp, \;\; z = x \Longrightarrow p = x_0, \;\; z = \infty \Longrightarrow p = \infty)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$N(x) = e^{-A(x-x_0)} N(x_0) e^{-A^{\dagger}(x-x_0)} \tag{51}$$

$$= \int_{x_0}^{\infty} \left[e^{-A(p+(x-x_0))} BB^{\dagger} e^{-A^{\dagger}(p+(x-x_0))} \right] dp$$

$$= e^{-A(x-x_0)} \left[\int_{x_0}^{\infty} \left(e^{-Ap} BB^{\dagger} e^{-A^{\dagger}p} \right) dp \right] e^{-A^{\dagger}(x-x_0)}$$

olur. Böylece köşeli parantez içi $N(x_0)$' a eşit olduğundan o halde

$$N(x) = e^{-A(x-x_0)} N(x_0) e^{-A^{\dagger}(x-x_0)}$$

elde edilir.

Sonuç 2.1. A' nın öz değerlerinin pozitif reel kısımlardan oluştuğunu kabul edelim. Böylece (30)' da tanımlanan $N(x)$ matrisi tüm $(x \in \mathbb{R})$' ler için terslenebilirdir ancak ve ancak x'in bazı değerleri için terslenebilirdir. Benzer şekilde (29)'da tanımlanan $Q(x;t)$, tüm $(x \in \mathbb{R})$' ler için terslenebilirdir ancak ve ancak xt düzlemindeki bazı noktalarda terslenebilirdir.

Önerme 2.3. A' nın öz değerleri pozitif reel kısma sahip ise $x \to \mp\infty$ iken (31)' de tanımlı $\Gamma(x,t)$ matrisi için $\Gamma(x,t) \to I$ dir. Buna ek olarak (37)' deki $Q(0;0)$ ve $N(0)$ lar terslenebilirse, $x \to \infty$ iken $\Gamma(x,t)^{-1}$ üstel olarak 0' a yaklaşır. Burada I ve 0 sırasıyla

$p \times p$ birim ve sıfır matrislerdir.

İspat. Önerme 2.1' de belirtildiği üzere, (29) ve (30)' daki integraller yakınsak olduğundan $x \to \infty$ iken $\Gamma(x,t) \to I$ dır. $x \to -\infty$ iken $\Gamma(x,t)^{-1}$ nin limitini bulmak için

$$Y(x,t) := e^{A^\dagger x}\Gamma(x;t)e^{A^\dagger x} \tag{52}$$

eşitliğini tanımlayalım.

(31) ifadesi (52)' de yerine yazılıp, (36)' dan yararlanılırsa

$$\begin{aligned} Y(x,t) &= e^{A^\dagger x}[I + QN]e^{A^\dagger x} \\ &= e^{A^\dagger x}\left[I + e^{-A^\dagger x + 4i(A^\dagger)^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2t}e^{-Ax}N(0)e^{-A^\dagger x}\right]e^{A^\dagger x} \\ &= e^{2A^\dagger x} + e^{4i(A^\dagger)^2 t}Q(0;0)e^{-4iA^2t}e^{-2Ax}N(0) \\ &= e^{2A^\dagger x} + Q(0;t)e^{-2Ax}N(0) \\ &= Q(0;t)e^{-2Ax}N(0)\left[I + N(0)^{-1}e^{2Ax}Q(0;t)^{-1}e^{2A^\dagger x}\right] \end{aligned} \tag{53}$$

elde edilir. Burada Teorem 2.1' den görülüyor ki $N(0)^{-1}$ ve $e^{2Ax}Q(x;0)^{-1}e^{2A^\dagger x}$ ifadeleri pozitif self adjoint matrislerdir. Teorem 2.1' nin ispatında olduğu gibi Sherman-Morrison-Woodbury [12] formulü kullanılırsa (53)' deki köşeli parantezin içindeki matrisin tersinin var olduğu görülür ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$Y(x;t)^{-1} = \left[I + N(0)^{-1}e^{2Ax}Q(0;t)^{-1}e^{2A^\dagger x}\right]^{-1}N(0)^{-1}e^{2Ax}Q(0;t)^{-1} \tag{54}$$

vardır. O halde (54)' ten görülüyor ki $x \to -\infty$ iken $Y(x;t)^{-1} \to 0$ dır. Ayrıca A ve $A^\dagger$' nın öz değerleri pozitif reel kısma sahip olduklarından, her sabit $t \in \mathbb{R}$ için, Önerme 2.1' in ispatında olduğu gibi $\epsilon > 0$ için

$$\|e^{Ax}\| = O(e^{\epsilon x}) \quad ve \quad \left\|e^{A^\dagger x}\right\| = O(e^{\epsilon x}), \quad x \to -\infty$$

dır. Böylece $x \to -\infty$ iken $Y(x;t)^{-1}$ üstel olarak sıfıra yaklaştığı görülür ve (52) eşitliği sağdan ve soldan $e^{-A^\dagger x}$ ile çarpılırsa

$$e^{-A^\dagger x} Y(x;t) e^{-A^\dagger x} = e^{-A^\dagger x}\, e^{A^\dagger x} \Gamma(x;t) e^{A^\dagger x} e^{-A^\dagger x}$$

$$= \Gamma(x;t)$$

bulunur. Her iki tarafın tersi alınırsa

$$\Gamma(x;t)^{-1} = e^{A^\dagger x} Y(x;t)^{-1} e^{A^\dagger x} \tag{55}$$

elde edilir. O halde $x \to -\infty$ iken $\Gamma(x;t)^{-1}$ üstel olarak sıfıra yaklaştığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.1. Tam Çözümün Bazı Özellikleri

Bu bölümde, (31)' de tanımlı $\Gamma(x;t)$ matrisi terslenebilir olduğu sürece A, B, C matrisleri nasıl seçilirse seçilsin (35) denkleminin, (1) için bir çözüm olduğunu göstereceğiz. Örneğin Teorem 2.1' de gösterildiği gibi A' nın öz değerleri pozitif reel kısımlardan oluşuyorsa; tüm xt-düzleminde $\Gamma(x;t)^{-1}$ vardır ve böylece (35) denklemi, (1) için bir çözümdür.

Bu bölüm üç aşamadan oluşmaktadır. Önce (35)' deki $u(x,t)$' ye karşılık gelen $|u(x,t)|^2$ için bazı kullanışlı sonuçlar gösterilecektir. Ardından $\Gamma(x;t)^{-1}$ var olduğu sürece (35)' in, (1)' in çözümü olduğunu ispatlanacaktır. En son bu çözümlerin bazı özellikleri incelenecektir.

Teorem 2.3. (31)' de tanımlı $\Gamma(x;t)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$(\Gamma^{-1})_x = -\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1}, \quad (\Gamma^{-1})_t = -\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1} \tag{56}$$

İspat. $I = \Gamma\Gamma^{-1}$ eşitliğinin her iki tarafının x' e göre türevi alınıp ardından soldan Γ^{-1} ile çarpılırsa

$$0 = \Gamma_x\Gamma^{-1} + \Gamma(\Gamma^{-1})_x$$

$$= \Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}\Gamma(\Gamma^{-1})_x$$

$$= \Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1} + (\Gamma^{-1})_x$$

olur. O halde

$$(\Gamma^{-1})_x = -\Gamma^{-1}\Gamma_x\Gamma^{-1}$$

bulunur. Benzer şekilde $(\Gamma^{-1})_t = -\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1}$ olduğu da gösterilebilir.

$|u(x,t)|^2$ ifadesi direkt (35)' ten hesaplanabilir. Alternatif olarak $|u(x,t)|^2$ ifadesi (13)' deki eşitliklerinde zaman evolüsyonu dikkate alınarak da elde edilebilir. Şöyle ki;

$$\int_x^\infty |u(z,t)|^2 dz = -2G(x,x;t), \qquad |u(x,t)|^2 = 2\frac{\partial G(x,x;t)}{\partial x} \tag{57}$$

Bunu gösterelim (11) denkleminden

$$G(x,y;t) := -\int_x^\infty \Omega(y+z;t)^\dagger K(x,z;t)^\dagger dz \tag{58}$$

ve (34) denkleminden

$$K(x,y;t)^\dagger = Ce^{-Az-4i(A)^2 t}[\Gamma(x;t)^{-1}]^\dagger e^{-Ax}B \tag{59}$$

olur. (58) denkleminde (27) ve (59) yerine yazılırsa

$$G(x,y;t) = -\int_x^\infty B^\dagger e^{-A^\dagger(y+z)+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger Ce^{-Az-4i(A)^2 t}[\Gamma(x;t)^{-1}]^\dagger e^{-Ax}Bdz$$

$$G(x,y;t) = -B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}y}\int_{x}^{\infty} e^{-A^{\dagger}z+4i(A^{\dagger})^{2}t}C^{\dagger}Ce^{-Az-4i(A)^{2}t}[\Gamma(x;t)^{-1}]^{\dagger}e^{-Ax}Bdz$$

bulunur. Son eşitlikte (29) ifadesi yerine yazılırsa

$$G(x,y;t) = -B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}y}Q(x;t)[\Gamma(x;t)^{-1}]^{\dagger}e^{-Ax}B$$

elde edilir. (39)’ dan faydalanılırsa

$$G(x,y;t) = -B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}y}\Gamma(x;t)^{-1}Q(x;t)e^{-Ax}B \tag{60}$$

bulunur. (57)’ deki ikinci eşitlikte (60) yerine yazılırsa

$$|u(x;t)|^{2} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left[-B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x;t)^{-1}Q(x;t)e^{-Ax}B\right]$$

$$= -2B^{\dagger}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}Qe^{-Ax}\right]B$$

$$= -2B^{\dagger}[(-A^{\dagger})e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}Qe^{-Ax} + e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}Q(-A)e^{-Ax} + e^{-A^{\dagger}x}({\Gamma^{-1}}_{x}Q$$
$$+\Gamma^{-1}Q_{x})e^{-Ax}]B$$

$$= -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[-A^{\dagger}\Gamma^{-1}Q + \Gamma^{-1}Q(-A) + {\Gamma^{-1}}_{x}Q + \Gamma^{-1}Q_{x}]e^{-Ax}B \tag{61}$$

$$= -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[-A^{\dagger}\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}QA - \Gamma^{-1}\Gamma_{x}\Gamma^{-1}Q + \Gamma^{-1}(-A^{\dagger}Q$$
$$-QA)]e^{-Ax}B$$

$$= -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[-A^{\dagger}\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}QA - \Gamma^{-1}(Q_{x}N + QN_{x})\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^{\dagger}Q$$
$$-\Gamma^{-1}QA]e^{-Ax}B$$

$$= -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[-A^{\dagger}\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}QA - \Gamma^{-1}((-A^{\dagger}Q - QA)N$$
$$+Q(-AN - NA^{\dagger}))\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^{\dagger}Q - \Gamma^{-1}QA]e^{-Ax}B$$

$$|u(x;t)|^2 = -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[-A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}QA + \Gamma^{-1}A^\dagger QN\Gamma^{-1}Q + \Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}Q$$
$$+\Gamma^{-1}QNA\Gamma^{-1}Q + \Gamma^{-1}QNA^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^\dagger Q - \Gamma^{-1}QA]e^{-Ax}B$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[-A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}QA + \Gamma^{-1}A^\dagger(\Gamma - I)\Gamma^{-1}Q$$
$$+2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}Q + \Gamma^{-1}(\Gamma - I)A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^\dagger Q - \Gamma^{-1}QA]e^{-Ax}B$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[-A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}QA + \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}Q$$
$$+2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}Q + \Gamma\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^\dagger Q$$
$$-\Gamma^{-1}QA]e^{-Ax}B$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[-A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}QA + \Gamma^{-1}A^\dagger Q - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}Q$$
$$+2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}Q + A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}Q - \Gamma^{-1}A^\dagger Q$$
$$-\Gamma^{-1}QA]e^{-Ax}B$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[-2\Gamma^{-1}QA + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}Q - 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}Q]e^{-Ax}B$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}[\Gamma^{-1}QA - \Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}Q + \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}Q]e^{-Ax}B$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[QA - QAN\Gamma^{-1}Q + A^\dagger\Gamma^{-1}Q]e^{-Ax}B$$

bulunur. Burada (39)’ dan

$$|u(x;t)|^2 = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[QA - QANQ(\Gamma^\dagger)^{-1} + A^\dagger Q(\Gamma^\dagger)^{-1}]e^{-Ax}B$$

elde edilir. Bu ifade $\Gamma^\dagger$ ile sağdan çarpılırsa

$$|u(x;t)|^2 = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[QA\,\Gamma^\dagger - QANQ + A^\dagger Q](\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[QA(I + NQ) - QANQ + A^\dagger Q](\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[QA + QANQ - QANQ + A^\dagger Q](\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B$$

$$|u(x;t)|^2 = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[QA + A^\dagger Q](\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[A^\dagger Q + QA](\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma(x;t)^{-1}[A^\dagger Q(x;t) + Q(x;t)A](\Gamma(x;t)^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B \tag{62}$$

bulunur.

Teorem 2.4. NLS denkleminin çözümünün $|u(x,t)|^2$ ifadesi, (31)' de tanımlı $\Gamma(x;t)$ matrisinin determinantı cinsinden yazılabilir.

$$|u(x,t)|^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \det\Gamma(x;t)/\partial x}{\det\Gamma(x;t)}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\log(\det\Gamma(x;t))] \tag{63}$$

İspat. (57) ve (60) eşitliklerinden

$$|u(x,t)|^2 = -2\left[B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}Qe^{-Ax}B\right]_x = 2\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QN_x]_x \tag{64}$$

olur. (38)' den faydalanılırsa

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QN_x] = \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}Q(-AN - NA^\dagger)]$$

$$= -\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QAN + \Gamma^{-1}QNA^\dagger]$$

$$= -\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QAN] - \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QNA^\dagger] \tag{65}$$

(39) ifadesi (65)' te yerine yazılırsa

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QN_x] = -\mathrm{tr}[Q(\Gamma^\dagger)^{-1}AN] - \mathrm{tr}[Q(\Gamma^\dagger)^{-1}NA^\dagger]$$

$$= -\mathrm{tr}[NQ(\Gamma^\dagger)^{-1}A] - \mathrm{tr}[QN\Gamma^{-1}A^\dagger]$$

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QN_x] = -\mathrm{tr}[(\Gamma^{\dagger} - I)(\Gamma^{\dagger})^{-1}A] - \mathrm{tr}[(\Gamma - I)\Gamma^{-1}A^{\dagger}]$$

$$= -\mathrm{tr}[A - (\Gamma^{\dagger})^{-1}A] - \mathrm{tr}[A^{\dagger} - \Gamma^{-1}A^{\dagger}]$$

$$= \mathrm{tr}[-A - A^{\dagger} + (\Gamma^{\dagger})^{-1}A + \Gamma^{-1}A^{\dagger}] \tag{66}$$

bulunur. Diğer taraftan (38)' den faydalanılırsa

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}Q_xN] = \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}(-A^{\dagger}Q - QA)N]$$

$$= -\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}A^{\dagger}QN + \Gamma^{-1}QAN]$$

$$= -\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}A^{\dagger}QN] - \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QAN] \tag{67}$$

ve (39) ifadesi (67)' de yerine yazılırsa

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}Q_xN] = -\mathrm{tr}[QN\Gamma^{-1}A^{\dagger}] - \mathrm{tr}[Q(\Gamma^{\dagger})^{-1}AN]$$

$$= -\mathrm{tr}[(\Gamma - I)\Gamma^{-1}A^{\dagger}] - \mathrm{tr}[NQ(\Gamma^{\dagger})^{-1}A]$$

$$= -\mathrm{tr}[A^{\dagger} - \Gamma^{-1}A^{\dagger}] - \mathrm{tr}[(\Gamma^{\dagger} - I)(\Gamma^{\dagger})^{-1}A]$$

$$= -\mathrm{tr}[A^{\dagger} - \Gamma^{-1}A^{\dagger}] - \mathrm{tr}[A - (\Gamma^{\dagger})^{-1}A]$$

$$= \mathrm{tr}[-A - A^{\dagger} + (\Gamma^{\dagger})^{-1}A + \Gamma^{-1}A^{\dagger}] \tag{68}$$

elde edilir. (66) ve (68) eşitliklerinin sağ tarafları aynı olduğundan

$$2\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QN_x] = \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}Q_xN] + \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}QN_x] = \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}(Q_xN + QN_x)]$$

$$= \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x] \tag{69}$$

olur. (64)’ ten

$$|u(x,t)|^2 = \text{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]_x$$

elde edilir. O halde (63)’ deki gibi yazılabilir [9].

Önerme 2.4. A’ nın öz değerleri pozitif reel kısımlardan oluşuyorsa, (35)’ te verilen $u(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki formülü sağlar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 dx = \text{tr}\,[A + A^\dagger] = 2\sum_{j=1}^{m+n} n_j \text{Im}\,[\lambda_j] \tag{70}$$

Burada λ_j ve n_j’ ler (19)’ da olduğu gibi $\mathbb{C}^+$ daki kutuplar ve sırasıyla karşılık gelen katlarıdır.

İspat. (64) ve (66)’ dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 dx = \text{tr}[-A - A^\dagger + (\Gamma^\dagger)^{-1}A + \Gamma^{-1}A^\dagger]|_{-\infty}^{+\infty}$$

olduğu görülür. Önerme 2.3’ de belirtildiği gibi $x \to \infty$ iken $\Gamma(x;t) \to I$ ve $x \to -\infty$ iken $\Gamma(x;t)^{-1} \to I$ dır. Böylece (70)’ deki ilk eşitlik elde edilir. (19) ve (21) kullanılarak, (70)’ deki ikinci eşitlikte belirtildiği gibi $A + A^\dagger$ nın izi, λ_j’ nin imajiner kısımları ve katları cinsinden yazılabilir.

Teorem 2.5. (31)’ de verilen $\Gamma(x;t)$ matrisi terslenebilir olmak şartıyla, $p \times p$ A matrisi, B sütun vektörü ve C satır vektörü ile birlikte (35)’ te verilen $u(x;t)$ fonksiyonu (1) ifadesini sağlar. Özel olarak A’ nın tüm öz değerleri pozitif reel kısımlardan oluşuyor ise (35)’ te verilen $u(x,t)$ fonksiyonu tüm xt-düzleminde (1) ifadesini sağlar.

İspat. (35) denkleminin (1)’ i sağladığını gösterebilmek için, önce (1) denklemindeki her bir terimi ayrı ayrı hesaplayalım. (35) denkleminde t’ ye göre türev alınıp, (56)’ dan faydalanılırsa

$$u_t = -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\left[\Gamma^{-1}{}_t e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t} + \Gamma^{-1}4i(A^\dagger)^2 e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}\right]C^\dagger$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[\Gamma^{-1}{}_t + \Gamma^{-1}4i(A^\dagger)^2]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[-\Gamma^{-1}\Gamma_t\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}4i(A^\dagger)^2]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[\Gamma_t\Gamma^{-1} - 4i(A^\dagger)^2]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

bulunur. Burada (38)' deki eşitliklerden Q_t yerine yazılırsa

$$u_t = 2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[4i((A^\dagger)^2 Q - QA^2)N]\Gamma^{-1} - 4i(A^\dagger)^2]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[4i(A^\dagger)^2 QN - 4iQA^2N]\Gamma^{-1} - 4i(A^\dagger)^2]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[4i(A^\dagger)^2(\Gamma - I)\Gamma^{-1} - 4iQA^2N\Gamma^{-1} - 4i(A^\dagger)^2]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[-4i(A^\dagger)^2 - 4iQA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 2B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}(-4i)[(A^\dagger)^2 + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

olur. Bu son eşitliğin her iki tarafı i ile çarpılırsa

$$iu_t = 8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger)^2 + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \tag{71}$$

bulunur. Şimdi de (1) denklemindeki ikinci terimi yani u_{xx}' i hesaplayalım. (31) eşitliğinde x' e göre türev alınırsa

$$\Gamma_x = Q_xN + QN_x$$

bulunur. (38) denkleminden Q_x ve N_x yerine yazılırsa

$$\Gamma_x = (-A^\dagger Q - QA)N + Q(-AN - NA^\dagger)$$

$$= (-A^\dagger QN - QAN - QAN - QNA^\dagger)$$

$$= -A^\dagger(\Gamma - I) - 2QAN - (\Gamma - I)A^\dagger$$

$$= -A^\dagger\Gamma + A^\dagger - 2QAN - \Gamma A^\dagger + A^\dagger$$

$$= -A^\dagger\Gamma - \Gamma A^\dagger + 2A^\dagger - 2QAN \qquad (72)$$

elde edilir. Burada $QN = \Gamma - I$ dır. (56) ifadesinde (72) yerine yazılırsa

$$\Gamma^{-1}{}_x = -\Gamma^{-1}[-A^\dagger\Gamma - \Gamma A^\dagger + 2A^\dagger - 2QAN]\Gamma^{-1} \qquad (73)$$

elde edilir. (35) denkleminin x'e göre türevi alınırsa

$$u_x = -2B^\dagger[(-A^\dagger)e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t} + e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}(-A^\dagger)e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}$$
$$+e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}{}_x e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}]C^\dagger$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(-A^\dagger)\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}(-A^\dagger) + \Gamma^{-1}{}_x]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

bulunur. Bu son eşitlikte (73) yerine yazılırsa

$$u_x = -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(-A^\dagger)\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}(-A^\dagger) + \Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}$$
$$+2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}[-2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}[\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$u_x = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma^{-1} [A^\dagger - QAN] \Gamma^{-1} e^{-A^\dagger x + 4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger \tag{74}$$

elde edilir. u_x denkleminin x' e göre tekrar türevi alınırsa ve (38)' den yararlanılırsa

$$\begin{aligned} u_{xx} = 4B^\dagger[& e^{-A^\dagger x}(-A^\dagger)\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t} + e^{-A^\dagger x}(\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} \\ & -2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1})(A^\dagger - QAN)\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t} \\ & +e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}(-(-A^\dagger Q - QA)AN - QA(-AN - NA^\dagger))\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t} \\ & +e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}(A^\dagger - QAN)(\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} \\ & +2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1})e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t} + e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}(A^\dagger \\ & -QAN)\Gamma^{-1}(-A^\dagger)e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}]C^\dagger \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} u_{xx} = 4B^\dagger e^{-A^\dagger x}[& -A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} + A^\dagger\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}(A^\dagger)^2\Gamma^{-1} + A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} \\ & -2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^\dagger QAN\Gamma^{-1} \\ & -A^\dagger\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} \\ & +\Gamma^{-1}A^\dagger QAN\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}QA^2N\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}QA^2N\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}QANA^\dagger\Gamma^{-1} \\ & +\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + \Gamma^{-1}(A^\dagger)^2\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} \\ & +2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger - \Gamma^{-1}QANA^\dagger\Gamma^{-1} \\ & +2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1} - 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger \\ & +\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger]e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} u_{xx} = 8B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[& (A^\dagger)^2 - 2QAN\Gamma^{-1}QAN + 2A^\dagger\Gamma^{-1}QAN - 2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger \\ & +2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger \end{aligned} \tag{75}$$

elde edilir. Son olarak $2|u|^2u$ ifadesini hesaplayalım. (35) denkleminin kompleks eşlenik ve transpozu alınırsa

$$u^{\dagger}(x,t) = -2Ce^{-Ax-4iA^2t}(\Gamma^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}B \tag{76}$$

bulunur. (76) ifadesi soldan $2u$ ile sağdan u ile çarpılırsa

$$2uu^{\dagger}u = 8[-2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}Ce^{-Ax-4iA^2t}(\Gamma^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}B\,B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}$$
$$\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}]$$

$$= -16B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}\left[e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}Ce^{-Ax-4iA^2t}(\Gamma^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}B\,B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\right]$$
$$\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$

olur. Bu son eşitlikte (29) ve (30)' dan faydalanılırsa

$$2uu^{\dagger}u = -16B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[Q_x(\Gamma^{\dagger})^{-1}N_x]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$

elde edilir. (38) eşitliklerindeki Q_x ve N_x ifadeleri yerine yazılırsa

$$2uu^{\dagger}u = -16B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(-A^{\dagger}Q-QA)(\Gamma^{\dagger})^{-1}(-AN-NA^{\dagger})]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$

$$= -16B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(A^{\dagger}Q+QA)(\Gamma^{\dagger})^{-1}$$
$$(AN+NA^{\dagger})]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger} \tag{77}$$

bulunur. Sonuç olarak (71), (75) ve (77) denklemlerini toplarsak

$$iu_t + u_{xx} + 2uu^{\dagger}u = 8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(A^{\dagger})^2 + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$
$$+8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(A^{\dagger})^2 - 2QAN\Gamma^{-1}QAN + 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN$$
$$-2A^{\dagger}\Gamma^{-1}A^{\dagger} + 2QAN\Gamma^{-1}A^{\dagger} + QA^2N]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$
$$-16B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}[(A^{\dagger}Q+QA)(\Gamma^{\dagger})^{-1}(AN$$
$$+NA^{\dagger})]\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}$$

$$= 8B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}[2(A^{\dagger})^2 + 2QA^2N - 2QAN\Gamma^{-1}QAN + 2A^{\dagger}\Gamma^{-1}QAN$$

$$-2A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + 2QAN\Gamma^{-1}A^\dagger]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$
$$-16B^\dagger e^{-A^\dagger x}\Gamma^{-1}[(A^\dagger Q + QA)(\Gamma^\dagger)^{-1}(AN$$
$$+NA^\dagger)]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 16B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(A^\dagger)^2 + QA^2N - QANQ(\Gamma^\dagger)^{-1}AN$$
$$+A^\dagger Q(\Gamma^\dagger)^{-1}AN - A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger + QA(\Gamma^\dagger)^{-1}NA^\dagger$$
$$-A^\dagger Q(\Gamma^\dagger)^{-1}AN - A^\dagger Q(\Gamma^\dagger)^{-1}NA^\dagger - QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN$$
$$-QA(\Gamma^\dagger)^{-1}NA^\dagger]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 16B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(A^\dagger)^2 + QA^2N - QA(\Gamma^\dagger - I)(\Gamma^\dagger)^{-1}AN$$
$$-A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger - A^\dagger Q(\Gamma^\dagger)^{-1}NA^\dagger$$
$$-QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

Son eşitlikte (38)’ den yararlanılırsa ve $\Gamma - I = QN$ olduğundan

$$iu_t + u_{xx} + 2uu^\dagger u = 16B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(A^\dagger)^2 + QA^2N - QA^2N + QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN$$
$$-A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger - A^\dagger QN\Gamma^{-1}A^\dagger$$
$$-QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 16B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(A^\dagger)^2 + QA^2N - QA^2N + QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN$$
$$-A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger - A^\dagger(\Gamma - I)\Gamma^{-1}A^\dagger$$
$$-QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 16B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(A^\dagger)^2 + QA^2N - QA^2N + QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN$$
$$-A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger - A^\dagger A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger$$
$$-QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= 16B^\dagger e^{-A^\dagger x}[(A^\dagger)^2 + QA^2N - QA^2N + QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN$$
$$-A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger - (A^\dagger)^2 + A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger$$
$$-QA(\Gamma^\dagger)^{-1}AN]\Gamma^{-1}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$iu_t + u_{xx} + 2uu^\dagger u = 0$$

elde edilir. Böylece (1) denkleminin sağlandığı gösterilmiş olur.

Teorem 2.6. A' nın öz değerlerinin pozitif reel kısımlardan oluştuğunu ve (37)' de verilen $Q(0;0)$ ve $N(0)$ matrislerinin terslenebilir olduğunu kabul edelim. Böylece $x \to \pm\infty$ iken (35)' te verilen $u(x,t)$ çözümü her sabit $t \in \mathbb{R}$ için üstel olarak sıfıra yaklaşır.

İspat. (35)' ten $x \to \infty$ iken $\Gamma(x;t) \to I$ dır. Böylece her sabit $t \in \mathbb{R}$ için $x \to +\infty$ iken $u(x,t)$' nin üstel olarak sıfıra yaklaştığı görülür. Öyleyse (35) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(x,t) = -2B^\dagger Y(x;t)^{-1} e^{4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger. \tag{78}$$

Burada $Y(x;t)$, (52)' de tanımlanan matristir. Önerme 2.3' ün ispatında $x \to -\infty$ iken $Y(x;t)^{-1}$ üstel olarak sıfıra yaklaştığı gösterildi. Dolayısıyla (78)' den her sabit $t \in \mathbb{R}$ için $x \to -\infty$ iken $u(x,t)$' nin üstel olarak sıfıra yaklaştığı bulunmuş olur.

2.2. Yöntemin Genelleştirilmesi

(19)' da ve (21)' de verilen A matrisindeki λ_j değerlerinin, $\mathbb{C}^+$ da yer aldığını kabul ettik [6]. Bu bölümde ise bu kısıtlamayı gevşeterek λ_j nin bir kısmının veya tamamının $\mathbb{C}^-$ düzleminde bulunabileceğini kabul edelim. Tek kısıtlamamız, hiçbir λ_j' nin reel olmayacağı ve iki farklı λ_j' nin kompleks düzlemde reel eksene göre simetrik olarak konumlanmayacak olmasıdır. Bu kısıtlama, matematiksel olarak $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m+n}$ ve $\{\overline{\lambda_j}\}_{j=1}^{m+n}$ kümelerinin ayrık olmasıyla aynıdır. Bu kısıtlama altında, (31)' de tanımlanan $\Gamma(x;t)$ matrisinin terslenebilir olduğu xt-düzlemindeki herhangi bir bölgede, (35)' de verilen $u(x,t)$' nin (1) denkleminin bir çözümü olduğunu göstereceğiz. Bunun için yapılması gereken tek şey $Q(x;t)$ ve $N(x)$ matrislerinin artık (29) ve (30)' daki gibi değil (36)' daki gibi tanımlanmasıdır. O halde

$$Q(0;0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} (\lambda + iA^{\dagger})^{-1}C^{\dagger}C(\lambda - iA)^{-1}d\lambda \tag{79}$$

$$N(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} (\lambda - iA)^{-1}BB^{\dagger}(\lambda + iA^{\dagger})^{-1}d\lambda \tag{80}$$

yazılabilir. Burada γ, tüm $\overline{\lambda_j}$' leri γ' nın dışında kalacak şekilde çevreleyen herhangi bir pozitif yönlü basit kapalı kontürdür.

Aşağıdaki önermenin gösterdiği gibi (79) ve (80)' deki eşitlikler ilgili Lyapunov denklemlerinin tekil (self adjoint) çözümleridir.

$$Q(0;0)A + A^{\dagger}Q(0;0) = C^{\dagger}C \tag{81}$$

$$AN(0) + N(0)A^{\dagger} = BB^{\dagger} \tag{82}$$

Ayrıca (36) kullanılarak, (81) ve (82) denklemleri

$$Q(x;t)A + A^{\dagger}Q(x;t) = e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}Ce^{-Ax-4iA^2t} \tag{83}$$

$$AN(x) + N(x)A^{\dagger} = e^{-Ax}BB^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x} \tag{84}$$

biçiminde yazılabilir.

Önerme 2.5. A matrisinin öz değerlerinden hiçbirinin tamamen imajiner olmadığını ve A' nın hiçbir iki öz değerinin imajiner eksene göre simetrik olarak yerleştirilmediğini varsayalım. Benzer olarak, farz edelim ki λ_j ler (19) ve (21)' deki kompleks sabitler olmak üzere $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m+n}$ ve $\{\overline{\lambda_j}\}_{j=1}^{m+n}$ ayrık olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. (81) ve (82)' de verilen matris denklemlerinin her biri tekil çözülebilir.

ii. $Q(0;0)$ ve $N(0)$ tekil çözümleri self adjoint matrislerdir.

iii. Sırasıyla (79) ve (80)' de verilen $Q(0;0)$ ve $N(0)$ çözümleri tekil çözümlerdir.

İspat. i. ve ii. maddelerin ispatı direkt olarak elde edilebilir. (81) veya (82)' nin herhangi bir çözümünün adjointi ayrıca aynı denklemin de bir çözümüdür. Bu yüzden $Q(0;0)$ ve $N(0)$ tekil çözümleri self adjoint olmak zorundadır.

Şimdi, (21)' deki tüm λ_j lerin $\mathbb{C}^+$ da olması zorunluluğu olmadan (31)' de tanımlı olan $\Gamma(x;t)$ matrisinin terslenebilir olduğu sürece (35)' de verilen $u(x,t)$ matrisinin (1) için bir çözüm olduğunu göstereceğiz. $u(x,t)$' yi biraz farklı ancak eşit formda şöyle ifade edebiliriz:

$$\Lambda(x;t) := I + P(x;t)^\dagger Q(0;0)P(x;t)N(0), \qquad P(x;t) := e^{-2Ax-4iA^2t} \tag{85}$$

Dikkat edilmelidir ki, $\Gamma(x;t)$ terslenebilirdir ancak ve ancak $\Lambda(x;t)$ terslenebilir.

Önerme 2.6. (31)' de tanımlı $\Gamma(x;t)$ ile (35)' de tanımlı $u(x,t)$ fonksiyonları, (85)' de tanımlı $\Lambda(x;t)$ fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Gamma(x;t) = e^{A^\dagger x}\Lambda(x;t)e^{-A^\dagger x} \tag{86}$$

$$u(x,t) = -2B^\dagger \Lambda(x;t)^{-1}P(x;t)^\dagger C^\dagger \tag{87}$$

İspat. Önce (86) eşitliğini gösterelim. Bunun için (85) denkleminin dagger (kompleks eşlenik ve transpozu) alınırsa

$$P(x;t)^\dagger = e^{-2A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t} \tag{88}$$

olur. (85)' deki $\Lambda(x;t)$ fonksiyonunda $P(x;t)$ ve $P(x;t)^\dagger$ yerine yazılırsa

$$\Lambda(x;t) = I + e^{-2A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}Q(0;0)e^{-2Ax-4iA^2t}N(0) \tag{89}$$

olur. (89) denkleminin her iki tarafı soldan $e^{A^\dagger x}$ ile sağdan $e^{-A^\dagger x}$ ile çarpılırsa

$$= e^{A^\dagger x}\left(I + e^{-2A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}Q(0;0)e^{-2Ax-4iA^2t}N(0)\right)e^{-A^\dagger x}$$

$$e^{A^\dagger x}\Lambda(x;t)e^{-A^\dagger x} = e^{A^\dagger x}e^{-A^\dagger x} + e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2 t}e^{-Ax}N(0)e^{-A^\dagger x}$$

$$= I + e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}Q(0;0)e^{-Ax-4iA^2 t}e^{-Ax}N(0)e^{-A^\dagger x}$$

$$= I + QN$$

$$= \Gamma(x;t)$$

bulunur. Şimdi de, (87) eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. (86) denkleminden

$$\Gamma^{-1} = e^{A^\dagger x}\Lambda(x;t)^{-1}e^{-A^\dagger x} \tag{90}$$

elde edilir. (35) denkleminde (90) yerine yazılıp, (88) eşitliğinden faydalanılırsa

$$u(x,t) = -2B^\dagger e^{-A^\dagger x}e^{A^\dagger x}\Lambda(x;t)^{-1}e^{-A^\dagger x}e^{-A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= -2B^\dagger\Lambda(x;t)^{-1}e^{-2A^\dagger x+4i(A^\dagger)^2 t}C^\dagger$$

$$= -2B^\dagger\Lambda(x;t)^{-1}P(x;t)^\dagger C^\dagger$$

elde edilir.

Önerme 2.7. (99), (100) denklemlerindeki P, $P^\dagger$ ve Λ ifadeleri için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$QPN = (P^\dagger)^{-1}(\Lambda - I) \tag{91}$$

$$(\Lambda^\dagger)^{-1}N = N\Lambda^{-1} \tag{92}$$

$$NP^\dagger Q = (\Lambda^\dagger - I)P^{-1} \tag{93}$$

İspat. $\Lambda - I = P^\dagger QPN$ ifadesinin her iki tarafı soldan $(P^\dagger)^{-1}$ ile çarpılırsa

$$(P^{\dagger})^{-1}(\Lambda - I) = (P^{\dagger})^{-1}P^{\dagger}QPN = QPN$$

bulunur. (92) eşitliğinin sol tarafı için (99) denkleminin tersi alınırsa

$$\Lambda^{-1} = I + N^{-1}P^{-1}Q^{-1}(P^{\dagger})^{-1} \tag{94}$$

elde edilir. (94) denkleminin kompleks eşlenik ve transpozu alınırsa

$$(\Lambda^{\dagger})^{-1} = I + P^{-1}Q^{-1}(P^{\dagger})^{-1}N^{-1} \tag{95}$$

bulunur. (95) denkleminde her iki taraf sağdan N ile çarpılırsa

$$(\Lambda^{\dagger})^{-1}N = (I + P^{-1}Q^{-1}(P^{\dagger})^{-1}N^{-1})N = N + P^{-1}Q^{-1}(P^{\dagger})^{-1} \tag{96}$$

olur. (92) eşitliğinin sağ tarafı için (94) denklemi soldan N ile çarpılırsa

$$N\Lambda^{-1} = N(I + N^{-1}P^{-1}Q^{-1}(P^{\dagger})^{-1}) = N + P^{-1}Q^{-1}(P^{\dagger})^{-1} \tag{97}$$

elde edilir. O halde (96) ve (97) denklemlerinin eşit olduğu açıktır. Yani

$$(\Lambda^{\dagger})^{-1}N = N\Lambda^{-1}$$

olur. (99) denkleminin kompleks eşlenik ve transpozu alınırsa

$$\Lambda^{\dagger} = I + NP^{\dagger}QP \tag{98}$$

elde edilir. (98) ifadesi (93) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$NP^{\dagger}Q = (I + NP^{\dagger}QP - I)P^{-1} = NP^{\dagger}Q$$

elde edilir.

Teorem 2.7. A matrisinin öz değerlerinden hiçbirinin tamamen imajiner olmadığını ve A' nın hiçbir iki öz değerinin imajiner eksene göre simetrik olarak yerleştirilmediğini varsayalım. Benzer olarak, farz edelim ki λ_j' ler (19) ve (21)' deki kompleks sabitler olmak üzere $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m+n}$ ve $\{\overline{\lambda_j}\}_{j=1}^{m+n}$ ayrık olsun. O halde (35)' deki veya bununla aynı (78) ve (87) denklemlerinden herhangi birindeki $u(x,t)$ ifadesi, (31)' deki $\Gamma(x;t)$ veya (85)' deki $\Lambda(x;t)$ matrislerinin terslenebilir olduğu xt- düzleminin herhangi bir bölgesinde (1) için bir çözümdür.

İspat. (35) denkleminin (1) denklemini sağladığını gösterebilmek için önce (1)' deki her bir terimi ayrı ayrı hesaplayalım. Sırasıyla $u(x,t)$**,** $\Lambda(x;t)$, $P(x;t)$, $Q(0,0)$, $N(0)$ yerine u, Λ, P, Q, N kullanalım. Burada $Q^\dagger = Q$ ve $N^\dagger = N$' dir ve P terslenebilirdir. O halde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\Lambda = I + P^\dagger QPN, \qquad (\Lambda^{-1})_t = -\Lambda^{-1}\Lambda_t\Lambda^{-1}, \qquad P_t = -4iA^2P, \qquad AP = PA \tag{99}$$

$$P_x = -2AP, \qquad {P_x}^\dagger = -2A^\dagger P^\dagger, \qquad (\Lambda^{-1})_x = -\Lambda^{-1}\Lambda_x\Lambda^{-1}, \qquad {P_t}^\dagger = 4i(A^\dagger)^2P^\dagger, \tag{100}$$

$$\Lambda_t = {P_t}^\dagger QPN + P^\dagger Q\, P_tN, \quad \Lambda^{-1} = N^{-1}(\Lambda^\dagger)^{-1}N, \;\; (\Lambda^\dagger)^{-1} = N\Lambda^{-1}N^{-1}$$

(87) denkleminde t' ye göre türev alınırsa

$$u_t = -2B^\dagger[\,{\Lambda_t}^{-1}P^\dagger + \Lambda^{-1}\,{P_t}^\dagger]C^\dagger$$

bulunur.

$$(\Lambda_x)^{-1} = -\Lambda^{-1}(-2A^\dagger P^\dagger QPN - 2P^\dagger QAPN)\Lambda^{-1}$$

$$= 2\Lambda^{-1}A^\dagger P^\dagger QPN\Lambda^{-1} + 2\Lambda^{-1}P^\dagger QAPN\Lambda^{-1} \tag{101}$$

olduğundan (99) ve (101)' den

$$u_t = -2B^\dagger[-\Lambda^{-1}\,\Lambda_t\Lambda^{-1}P^\dagger + \Lambda^{-1}4i(A^\dagger)^2P^\dagger]C^\dagger$$

elde edilir.

$$u_t = -2B^\dagger[-\Lambda^{-1}({P_t}^\dagger QPN + P^\dagger Q\, P_t N)\Lambda^{-1}P^\dagger + \Lambda^{-1}4i(A^\dagger)^2P^\dagger]C^\dagger$$

$$= -2B^\dagger[-\Lambda^{-1}(4i(A^\dagger)^2P^\dagger QPN - P^\dagger Q4iA^2PN)\Lambda^{-1} + \Lambda^{-1}4i(A^\dagger)^2]P^\dagger C^\dagger$$

$$= -8iB^\dagger\Lambda^{-1}[-(A^\dagger)^2P^\dagger QPN + P^\dagger QA^2PN + (A^\dagger)^2\Lambda]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger$$

$$= -8iB^\dagger\Lambda^{-1}[-(A^\dagger)^2(\Lambda - I) + P^\dagger QA^2PN + (A^\dagger)^2\Lambda]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger$$

$$= -8iB^\dagger\Lambda^{-1}[-(A^\dagger)^2\Lambda + (A^\dagger)^2 + P^\dagger QA^2PN + (A^\dagger)^2\Lambda]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafı i ile çarpılırsa

$$iu_t = 8B^\dagger\Lambda^{-1}[(A^\dagger)^2 + P^\dagger QA^2PN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger \tag{102}$$

elde edilir. Şimdi de u_{xx} terimini hesaplayalım. (87) denkleminde x' e göre türev alınırsa (100)' den

$$u_x = 2B^\dagger\Lambda^{-1}[\Lambda_x\Lambda^{-1} + 2A^\dagger]P^\dagger C^\dagger$$

$$= 2B^\dagger\Lambda^{-1}[\Lambda_x + 2A^\dagger\Lambda]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger$$

elde edilir.

$$\Lambda_x = {P_x}^\dagger QPN + P^\dagger QP_xN = -2A^\dagger P^\dagger QPN - 2P^\dagger QAPN \tag{103}$$

olduğundan

$$u_x = 2B^\dagger\Lambda^{-1}[-2A^\dagger P^\dagger QPN - 2P^\dagger QAPN \ + 2A^\dagger\Lambda]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger$$

$$= 4B^\dagger\Lambda^{-1}[-A^\dagger P^\dagger QPN - P^\dagger QAPN \ + A^\dagger(I + P^\dagger QPN)]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger$$

$$u_x = 4B^{\dagger}\Lambda^{-1}[A^{\dagger} - P^{\dagger}QAPN\,]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \tag{104}$$

bulunur. (104) denkleminde tekrar x' e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} u_{xx} = {} & 4B^{\dagger}\,{\Lambda_x}^{-1}[A^{\dagger} - P^{\dagger}QAPN\,]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \\ & +4B^{\dagger}\Lambda^{-1}\left[-{P_x}^{\dagger}QAPN - P^{\dagger}QAP_xN\right]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \\ & +4B^{\dagger}\Lambda^{-1}[A^{\dagger} - P^{\dagger}QAPN\,]\,{\Lambda_x}^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \\ & +4B^{\dagger}\Lambda^{-1}[A^{\dagger} - P^{\dagger}QAPN\,]\Lambda^{-1}{P_x}^{\dagger}C^{\dagger} \end{aligned}$$

olur. (101)' den faydalanılırsa

$$\begin{aligned} u_{xx} = {} & 4B^{\dagger}(2\Lambda^{-1}A^{\dagger}P^{\dagger}QPN\Lambda^{-1} + 2\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}\,)(A^{\dagger} - P^{\dagger}QAPN\,)\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \\ & +4B^{\dagger}\Lambda^{-1}(2A^{\dagger}P^{\dagger}QAPN + 2P^{\dagger}QA^2PN)\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} + 4B^{\dagger}\Lambda^{-1}(A^{\dagger} \\ & -P^{\dagger}QAPN)(2\Lambda^{-1}A^{\dagger}P^{\dagger}QPN\Lambda^{-1} + 2\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1})P^{\dagger}C^{\dagger} + 4B^{\dagger}\Lambda^{-1}(A^{\dagger} \\ & -P^{\dagger}QAPN)\Lambda^{-1}(-2A^{\dagger})P^{\dagger}C^{\dagger} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} u_{xx} = {} & 8B^{\dagger}\Lambda^{-1}(A^{\dagger}P^{\dagger}QPN\Lambda^{-1}A^{\dagger} - A^{\dagger}P^{\dagger}QPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN + P^{\dagger}QAPN\,\Lambda^{-1}A^{\dagger} \\ & -P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN)\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} + 8B^{\dagger}\Lambda^{-1}(A^{\dagger}P^{\dagger}QAPN \\ & +P^{\dagger}QA^2PN)\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} + 8B^{\dagger}\Lambda^{-1}(A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}P^{\dagger}QPN + A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN \\ & -P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}P^{\dagger}QPN - P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN)\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \\ & +8B^{\dagger}\Lambda^{-1}(-A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}\Lambda + P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}\Lambda)\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \end{aligned}$$

elde edilir. $\Lambda - I = P^{\dagger}QPN$ olduğundan

$$\begin{aligned} u_{xx} = {} & 8B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2 - A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger} - A^{\dagger}P^{\dagger}QAPN + A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN + P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger} \\ & -P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN + A^{\dagger}P^{\dagger}QAPN + P^{\dagger}QA^2PN + A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}\Lambda - A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger} \\ & +A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN - P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}\Lambda + P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger} \\ & -P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN - A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}\Lambda + P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}\Lambda]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \end{aligned}$$

$$= 8B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2 - 2A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger} + P^{\dagger}QA^2PN + 2A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN$$

$$+2P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger} - 2P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} \qquad (105)$$

elde edilir. Şimdi de $2|u|^2$u ifadesini hesaplayalım. Bunun için (87) denkleminin kompleks eşlenik ve transpozu alınırsa

$$u(x,t)^{\dagger} = -2CP(x;t)(\Lambda(x;t)^{-1})^{\dagger}B \qquad (106)$$

elde edilir. (106) ve (87) ifadeleri yerine yazılırsa

$$2uu^{\dagger}u = 2[-2B^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}][-2CP(\Lambda^{-1})^{\dagger}B][-2B^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}]$$

$$= -16[B^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}CP(\Lambda^{-1})^{\dagger}BB^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}]$$

bulunur. (29), (30) ve (38) kullanılarak

$$2uu^{\dagger}u = -16[B^{\dagger}\Lambda^{-1}(QA + A^{\dagger}Q)P(\Lambda^{-1})^{\dagger}(AN + NA^{\dagger})\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}]$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}2uu^{\dagger}u = -16[&B^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAP(\Lambda^{-1})^{\dagger}AN\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\\ &+B^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAP(\Lambda^{-1})^{\dagger}NA^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} + B^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{-1})^{\dagger}AN\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\\ &+B^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{-1})^{\dagger}NA^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= -16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[&P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN + P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger} + P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN\\ &+P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\end{aligned} \qquad (107)$$

olur. Sonuç olarak, (102), (105) ve (107) ifadeleri toplanırsa

$$\begin{aligned}iu_t + u_{xx} + 2uu^{\dagger}u = \; &8B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2 + P^{\dagger}QA^2PN]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger} + 8B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2\\ &-2A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger} + P^{\dagger}QA^2PN + 2A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN + 2P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}\\ &-2P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\\ &-16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN + P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}\end{aligned}$$

$$+P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN+P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}$$

$$\begin{aligned}iu_t+u_{xx}+2uu^{\dagger}u=\;&8B^{\dagger}\Lambda^{-1}[2(A^{\dagger})^2+2P^{\dagger}QA^2PN-2A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}\\&+2A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN+2P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}\\&-2P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\\&-16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN+P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}\\&+P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN+P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte (91) , (92), (93), (100)’ den faydalanılırsa

$$\begin{aligned}iu_t+u_{xx}+2uu^{\dagger}u=\;&16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2+P^{\dagger}QA^2PN-A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}+A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN\\&+P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}-P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN-P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN\\&-P^{\dagger}QAP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}-P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN\\&-P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\;&16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2+P^{\dagger}QA^2PN-A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}+A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN\\&-P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN-P^{\dagger}QAPN(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN\\&-P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN-P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\;&16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2+P^{\dagger}QA^2PN-A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}+A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN\\&-P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN-P^{\dagger}QAPN(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN\\&-P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN-P^{\dagger}A^{\dagger}QPN\Lambda^{-1}A^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\;&16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2+P^{\dagger}QA^2PN-A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}+A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN\\&-P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN-P^{\dagger}QAPN(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN\\&-P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN-P^{\dagger}A^{\dagger}(P^{\dagger})^{-1}(\Lambda-I)\Lambda^{-1}A^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\;&16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[(A^{\dagger})^2+P^{\dagger}QA^2PN-A^{\dagger}\Lambda^{-1}A^{\dagger}+A^{\dagger}\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN\\&-P^{\dagger}QAPN\Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN-P^{\dagger}QAPN(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN\\&-P^{\dagger}A^{\dagger}QP(\Lambda^{\dagger})^{-1}AN-P^{\dagger}A^{\dagger}(P^{\dagger})^{-1}A^{\dagger}\\&+P^{\dagger}A^{\dagger}(P^{\dagger})^{-1}\Lambda^{-1}A^{\dagger}]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
iu_t + u_{xx} + 2uu^\dagger u = {}& 16B^\dagger \Lambda^{-1}[(A^\dagger)^2 + P^\dagger QA^2PN - A^\dagger \Lambda^{-1}A^\dagger + A^\dagger \Lambda^{-1}P^\dagger QAPN \\
& -P^\dagger QAPN\Lambda^{-1}P^\dagger QAPN - P^\dagger QAPN(\Lambda^\dagger)^{-1}AN \\
& -P^\dagger A^\dagger QP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN - (A^\dagger)^2 + A^\dagger \Lambda^{-1}A^\dagger]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[& P^\dagger QA^2PN + A^\dagger \Lambda^{-1}P^\dagger QAPN \\
& -P^\dagger QAPN\Lambda^{-1}P^\dagger QAPN - P^\dagger QAP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN \\
& -P^\dagger A^\dagger QP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[& P^\dagger QA^2PN + A^\dagger \Lambda^{-1}P^\dagger QAPN \\
& -P^\dagger QAP(\Lambda^\dagger)^{-1}NP^\dagger QAPN - P^\dagger QAP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN \\
& -P^\dagger A^\dagger QP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[& P^\dagger QA^2PN + A^\dagger \Lambda^{-1}P^\dagger QAPN \\
& -P^\dagger QAP(\Lambda^\dagger)^{-1}(\Lambda^\dagger - I)P^{-1}PAN - P^\dagger QAP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN \\
& -P^\dagger A^\dagger QP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[& P^\dagger QA^2PN + A^\dagger \Lambda^{-1}P^\dagger QAPN \\
& -P^\dagger QA^2PN + P^\dagger QAP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN - P^\dagger QAP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN \\
& -P^\dagger A^\dagger QP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[A^\dagger \Lambda^{-1}P^\dagger QPAN - A^\dagger P^\dagger QP(\Lambda^\dagger)^{-1}AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
$$

$$
\begin{aligned}
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[& A^\dagger N^{-1}(\Lambda^\dagger)^{-1}NP^\dagger QPAN \\
& -A^\dagger P^\dagger QPN\Lambda^{-1}N^{-1}\, AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[& A^\dagger N^{-1}(\Lambda^\dagger)^{-1}(\Lambda^\dagger - I)P^{-1}PAN \\
& -A^\dagger(\Lambda - I)\Lambda^{-1}N^{-1}\, AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[& A^\dagger N^{-1}AN - A^\dagger N^{-1}(\Lambda^\dagger)^{-1}AN \\
& -A^\dagger N^{-1}\, AN + A^\dagger \Lambda^{-1}N^{-1}\, AN]\Lambda^{-1}P^\dagger C^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
= 16B^\dagger \Lambda^{-1}[A^\dagger N^{-1}AN - A^\dagger N^{-1}N\, \Lambda^{-1}N^{-1}AN
$$

$$-A^{\dagger}N^{-1}AN + A^{\dagger}\Lambda^{-1}N^{-1}AN]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}$$

$$= 16B^{\dagger}\Lambda^{-1}[A^{\dagger}N^{-1}AN - A^{\dagger}\Lambda^{-1}N^{-1}AN$$
$$-A^{\dagger}N^{-1}AN + A^{\dagger}\Lambda^{-1}N^{-1}AN]\Lambda^{-1}P^{\dagger}C^{\dagger}$$

$$iu_t + u_{xx} + 2uu^{\dagger}u = 0$$

elde edilir. Böylece (1) denkleminin sağlandığı gösterilmiş olur.

Teorem 2.8. A matrisinin öz değerlerinden hiçbirinin tamamen imajiner olmadığını ve A nın hiçbir iki öz değerinin imajiner eksene göre simetrik olarak yerleştirilmediğini varsayalım. Benzer olarak, farz edelim ki λ_j ler (19) ve (21)' deki kompleks sabitler olmak üzere $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m+n}$ ve $\{\overline{\lambda_j}\}_{j=1}^{m+n}$ ayrık olsun. O halde, (85)' deki $\Lambda(x;t)$ matrisi veya buna eş olan (31)' deki $\Gamma(x;t)$ matrisinin terslenebilir olduğu xt- düzleminin herhangi bir bölgesinde (35)' de verilen $u(x,t)$ çözümü (63)' ü sağlar ve

$$|u(x,t)|^2 = \mathrm{tr}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma(x,t)^{-1}\frac{\partial \Gamma(x;t)}{\partial x})\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathrm{det}\Gamma(x;t)/\partial x}{\mathrm{det}\Gamma(x;t)}\right], \tag{108}$$

$$|u(x,t)|^2 = \mathrm{tr}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda(x,t)^{-1}\frac{\partial \Lambda(x;t)}{\partial x})\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathrm{det}\Lambda(x;t)/\partial x}{\mathrm{det}\Lambda(x;t)}\right] \tag{109}$$

yazılabilir.

İspat. Sırasıyla $u(x,t)$**,** $\Lambda(x;t)$, $P(x;t)$, $Q(0,0)$, $N(0)$' lar yerine u, Λ, P, Q, N kullanalım. (66) ifadesinden yararlanılırsa

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x] = 2\mathrm{tr}[-A - A^{\dagger} + (\Gamma^{\dagger})^{-1}A + \Gamma^{-1}A^{\dagger}] \tag{110}$$

elde edilir. (103) ve (100) eşitliklerinden

$$\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}\Lambda_x] = \mathrm{tr}\left[\Lambda^{-1}({P_x}^{\dagger}QPN + P^{\dagger}QP_xN)\right]$$

$$\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}\Lambda_x] = \mathrm{tr}[\Lambda^{-1}(-2A^{\dagger}P^{\dagger}QPN + P^{\dagger}Q(-2A)PN]$$

$$= -2\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}A^{\dagger}P^{\dagger}QPN + \Lambda^{-1}P^{\dagger}QAPN]$$

bulunur. $\Lambda - I = P^{\dagger}QPN$ eşitliği ve trace özelliği kullanılarak

$$\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}\Lambda_x] = -2\left[\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}A^{\dagger}(\Lambda - I)] + \mathrm{tr}[N\Lambda^{-1}P^{\dagger}QPA]\right]$$

$$= -2\left[\mathrm{tr}[A^{\dagger}(\Lambda - I)\Lambda^{-1}] + \mathrm{tr}[(\Lambda^{\dagger})^{-1}NP^{\dagger}QPA]\right]$$

elde edilir. (93) eşitliğinden faydalanılarak

$$\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}\Lambda_x] = -2[\mathrm{tr}[A^{\dagger} - A^{\dagger}\Lambda^{-1}] + \mathrm{tr}[(\Lambda^{\dagger})^{-1}(\Lambda^{\dagger} - I)P^{-1}PA]]$$

$$= 2\mathrm{tr}[-A - A^{\dagger} + (\Lambda^{\dagger})^{-1}A + \Lambda^{-1}A^{\dagger}]$$

veya

$$\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}\Lambda_x] = 2\left[\mathrm{tr}[-A - A^{\dagger}] + \mathrm{tr}[\Lambda^{-1}A^{\dagger}] + \mathrm{tr}[(\Lambda^{\dagger})^{-1}A]\right]$$

elde edilir. (86) eşitliğinden

$$\mathrm{tr}[\Gamma] = \mathrm{tr}\left[e^{A^{\dagger}x}\Lambda e^{-A^{\dagger}x}\right] = \mathrm{tr}\left[\Lambda e^{-A^{\dagger}x}e^{A^{\dagger}x}\right] = \mathrm{tr}[\Lambda]$$

olduğu açıktır. O halde

$$\mathrm{tr}[\Gamma] = \mathrm{tr}[\Lambda]$$

elde edilir. Öyleyse

$$\mathrm{tr}[\Lambda^{-1}] = \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}] = \mathrm{tr}[\Lambda^{-1}A^{\dagger}] = \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}A^{\dagger}]$$

bulunur.

$$2\left[\mathrm{tr}[-A - A^{\dagger}] + \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}A^{\dagger}] + \mathrm{tr}[(\Gamma^{\dagger})^{-1}A]\right] = \mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]$$

ve böylece

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x] = \mathrm{tr}[\Lambda^{-1}\Lambda_x] \tag{111}$$

elde edilir. (66) ve (69)' dan yararlanılarak $\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]$ için x' e göre türev alınırsa

$$\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]_x = 2\mathrm{tr}\left[(\Gamma^{\dagger})^{-1}{}_x A + \Gamma^{-1}{}_x A^{\dagger}\right]$$

yazılır. (56) eşitliği ve ${\Gamma_x}^{\dagger} = N_x Q + N Q_x$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\Gamma^{\dagger})^{-1}{}_x &= -(\Gamma^{\dagger})^{-1}{\Gamma_x}^{\dagger}(\Gamma^{\dagger})^{-1}\\ &= -(\Gamma^{\dagger})^{-1}(N_x Q + N Q_x)(\Gamma^{\dagger})^{-1}\\ &= -(\Gamma^{\dagger})^{-1}(-ANQ - 2NA^{\dagger}Q - NQA)(\Gamma^{\dagger})^{-1}\end{aligned}$$

veya

$$(\Gamma^{\dagger})^{-1}{}_x = (\Gamma^{\dagger})^{-1}ANQ(\Gamma^{\dagger})^{-1} + 2(\Gamma^{\dagger})^{-1}NA^{\dagger}Q(\Gamma^{\dagger})^{-1} + (\Gamma^{\dagger})^{-1}NQA(\Gamma^{\dagger})^{-1} \tag{112}$$

elde edilir. Aynı şekilde (56) ve $\Gamma_x = Q_x N + Q N_x$ eşitliği kullanılarak

$$\Gamma^{-1}{}_x = -\Gamma^{-1}(Q_x N + Q N_x)\Gamma^{-1}$$

bulunur. Burada (38) eşitliklerinden

$$\Gamma^{-1}{}_x = -\Gamma^{-1}(-A^{\dagger}QN - 2QAN - QNA^{\dagger})\Gamma^{-1}$$

veya

$$\Gamma^{-1}{}_x = \Gamma^{-1}A^\dagger QN\Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}QNA^\dagger\Gamma^{-1} \qquad (113)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]_x = 2\mathrm{tr}[&(\Gamma^\dagger)^{-1}ANQ(\Gamma^\dagger)^{-1}A + 2(\Gamma^\dagger)^{-1}NA^\dagger Q(\Gamma^\dagger)^{-1}A \\ &+(\Gamma^\dagger)^{-1}NQA(\Gamma^\dagger)^{-1}A + \Gamma^{-1}A^\dagger QN\Gamma^{-1}A^\dagger + 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger \\ &+\Gamma^{-1}QNA^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger]\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\Gamma^\dagger - I = NQ$ ve $\Gamma - I = QN$ dir.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]_x = 2\mathrm{tr}[&(\Gamma^\dagger)^{-1}A^2 - (\Gamma^\dagger)^{-1}A(\Gamma^\dagger)^{-1}A + 2(\Gamma^\dagger)^{-1}NA^\dagger Q(\Gamma^\dagger)^{-1}A \\ &+A(\Gamma^\dagger)^{-1}A - (\Gamma^\dagger)^{-1}A(\Gamma^\dagger)^{-1}A + \Gamma^{-1}A^\dagger A^\dagger - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger \\ &+2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger + A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger]\end{aligned}$$

(39) eşitlikleri ve matrisin izi özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]_x = 2\mathrm{tr}[&2(\Gamma^\dagger)^{-1}A^2 - 2(\Gamma^\dagger)^{-1}A(\Gamma^\dagger)^{-1}A + 2\Gamma^{-1}A^\dagger A^\dagger - 2\Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger \\ &+4\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger]\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\Gamma^{-1}\Gamma_x]_x = 4\mathrm{tr}[&\Gamma^{-1}(A^\dagger)^2 + (\Gamma^\dagger)^{-1}A^2 - \Gamma^{-1}A^\dagger\Gamma^{-1}A^\dagger - (\Gamma^\dagger)^{-1}A(\Gamma^\dagger)^{-1}A \\ &+ 2\Gamma^{-1}QAN\Gamma^{-1}A^\dagger] \qquad (114)\end{aligned}$$

elde edilir. (35) denkleminin kompleks eşlenik ve transpozu alınırsa

$$u^\dagger(x;t) = -2Ce^{-Ax-4i(A)^2t}(\Gamma^\dagger)^{-1}e^{-Ax}B$$

bulunur.

$$uu^{\dagger} = 4B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}Ce^{-Ax-4i(A)^2t}(\Gamma^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}B$$

$$= 4\mathrm{tr}\left[B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}Ce^{-Ax-4i(A)^2t}(\Gamma^{\dagger})^{-1}e^{-Ax}B\right]$$

$$= 4\mathrm{tr}\left[e^{-Ax}BB^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}C^{\dagger}Ce^{-Ax-4i(A)^2t}(\Gamma^{\dagger})^{-1}\right]$$

(38) eşitliklerinden

$$uu^{\dagger} = 4\mathrm{tr}[(-AN - NA^{\dagger})\Gamma^{-1}(-A^{\dagger}Q - QA)(\Gamma^{\dagger})^{-1}]$$

veya

$$uu^{\dagger} = |u|^2 = 4\mathrm{tr}[(AN + NA^{\dagger})\Gamma^{-1}(QA + A^{\dagger}Q)(\Gamma^{\dagger})^{-1}] \tag{115}$$

elde edilir.

Örnek 1.

A, B, C üçlü matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1]$$

şeklinde seçelim. O halde

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{\dagger} = [1 \quad 1], \quad C^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$P = e^{-Ax-4iA^2t} = \begin{bmatrix} e^{-16it-4x} & 0 \\ 0 & e^{-4it+2x} \end{bmatrix}$$

$$P^{\dagger} = e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t} = \begin{bmatrix} e^{16it-4x} & 0 \\ 0 & e^{4it+2x} \end{bmatrix}$$

ve (81) ve (82) eşitliklerinden

$$Q(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad N(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. (85) eşitliği kullanılarak

$$\Lambda(x;t) = I + P(x;t)^{\dagger}Q(0;0)P(x;t)N(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{16} & \dfrac{1}{2}e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{4} \\ -\dfrac{1}{4}e^{-12it-2x} - \dfrac{e^{4x}}{2} & 1 - e^{-12it-2x} + \dfrac{e^{4x}}{4} \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$a_{11} = \frac{1 - e^{-12it-2x} + \dfrac{e^{4x}}{4}}{1 - e^{-12it-2x} - e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{16} + \dfrac{81e^{-4x}}{64} + \dfrac{e^{4x}}{4}}$$

$$a_{12} = \frac{-\dfrac{1}{2}e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{4}}{1 - e^{-12it-2x} - e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{16} + \dfrac{81e^{-4x}}{64} + \dfrac{e^{4x}}{4}}$$

$$a_{21} = \frac{\dfrac{1}{4}e^{-12it-2x} + \dfrac{e^{4x}}{2}}{1 - e^{-12it-2x} - e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{16} + \dfrac{81e^{-4x}}{64} + \dfrac{e^{4x}}{4}}$$

$$a_{22} = \frac{1 - e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{16}}{1 - e^{-12it-2x} - e^{12it-2x} + \dfrac{e^{-8x}}{16} + \dfrac{81e^{-4x}}{64} + \dfrac{e^{4x}}{4}}$$

olmak üzere

$$\Lambda^{-1}(x;t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde (1) denkleminin açık çözümü

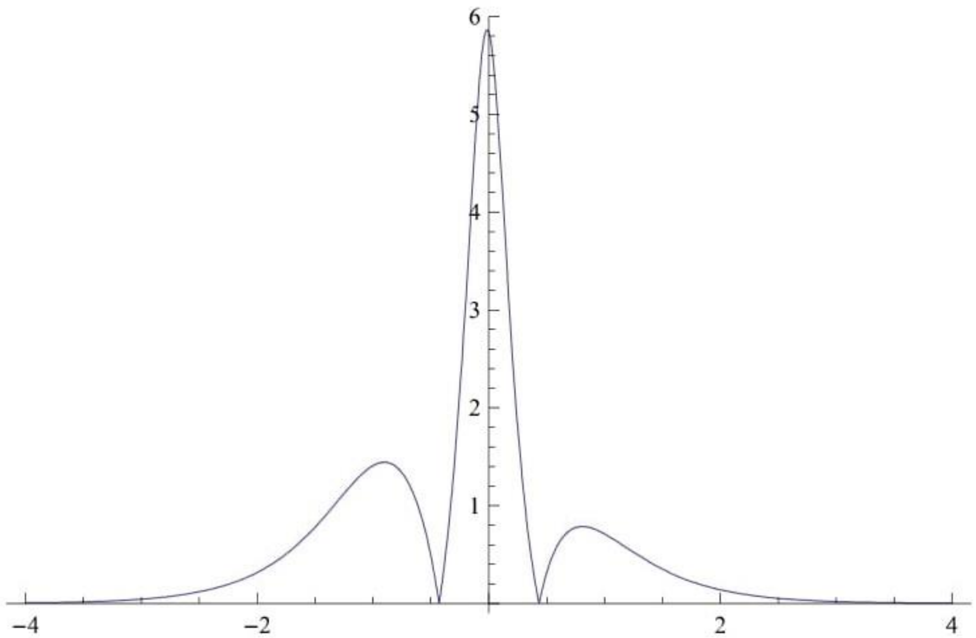
$$u(x,t) = -2B^{\dagger}\Lambda^{-1}(x;t)P^{\dagger}C^{\dagger}$$

$$= \frac{8e^{2(8it+x)}(9+16e^{8x}-36e^{6(2it+x)}-16e^{2(6it+x)})}{4e^{12it}-64e^{6x}+16e^{12(it+x)}+81e^{4(3it+x)}-64e^{6(4it+x)}+64e^{12it+8x}}$$

elde edilir. $t = 0$ için

$$u(x,0) = \frac{8e^{2x}(9-16e^{2x}-36e^{6x}+16e^{8x})}{4+81e^{4x}-128e^{6x}+64e^{8x}+16e^{12x}}$$

bulunur. Grafiği Şekil 3. te gösterilmiştir.



Şekil 3. $|u(x,0)|$ gösterimi

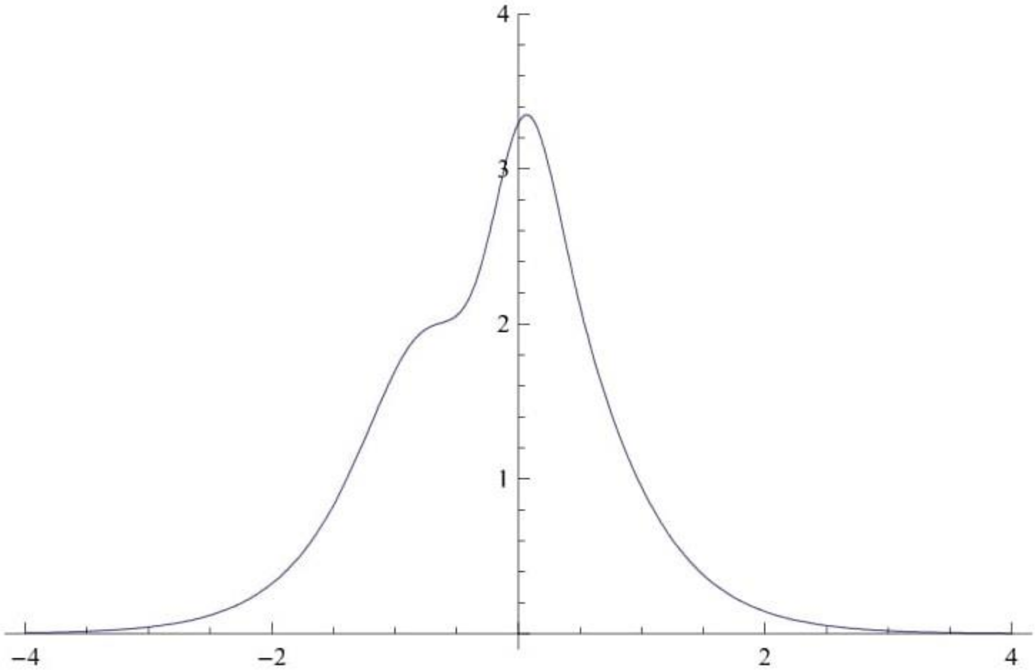
$t = 0.1$ için

Pay $= \ 8e^{2((0.1+0.8i)+x)}\left(9 + 16e^{8x} - 36e^{6((0.1+0.2i)+x)} - 16e^{2((0.1+0.6i)+x)}\right)$

Payda $= (1.44943 + 3.72816i) - 64e^{6x} + 16e^{12((0.1+0.1i)+x)} + 81e^{4((0.1+0.3i)+x)}$
$-64e^{6((0.1+0.4i)+x)} + 64e^{(0.1+1.2i)+8x})$

olmak üzere

$u(x, 0.1) =$ Pay/Payda bulunur. Grafiği Şekil 4. te gösterilmiştir.



Şekil 4. $|u(x, 0.1)|$ gösterimi

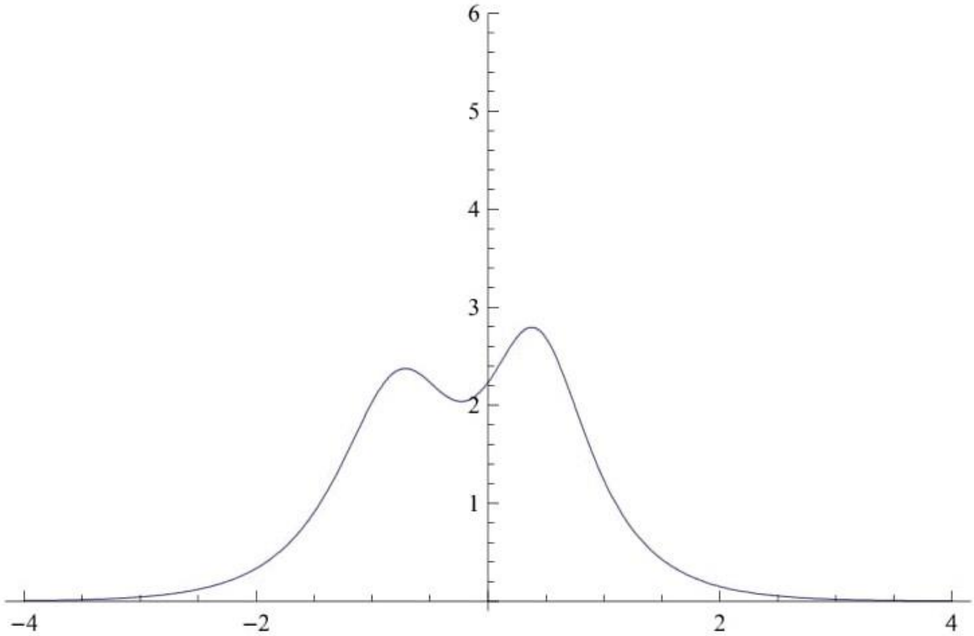
$t = 0.2$ için

Pay $= \ 8e^{2((0.1+1.6i)+x)}\left(9 + 16e^{8x} - 36e^{6((0.1+0.4i)+x)} - 16e^{2((0.1+1.2i)+x)}\right)$

Payda $= (-2.94957 + 2.70185i) - 64e^{6x} + 16e^{12((0.1+0.2i)+x)} + 81e^{4((0.1+0.6i)+x)}$
$-64e^{6((0.1+0.8i)+x)} + 64e^{(0.1+2.4i)+8x})$

olmak üzere

$u(x, 0.2) =$ Pay/Payda bulunur. Grafiği Şekil 5. te gösterilmiştir.



Şekil 5. $|u(x, 0.2)|$ gösterimi

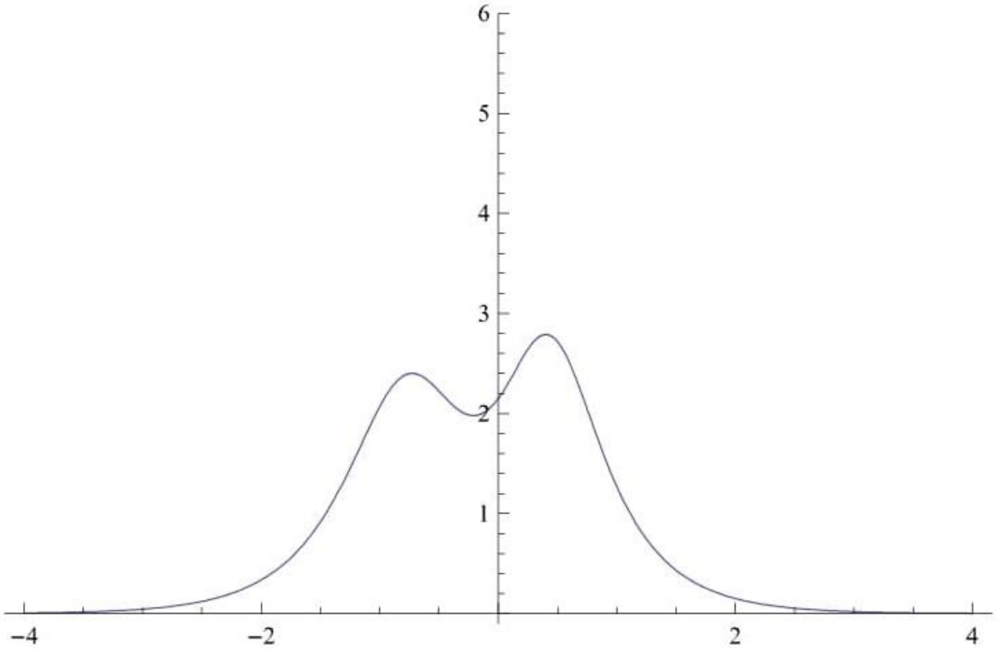
$t = 0.3$ için

$$\text{Pay} = 8e^{2((0.1+2.4i)+x)}\left(9 + 16e^{8x} - 36e^{6((0.1+0.6i)+x)} - 16e^{2((0.1+1.8i)+x)}\right)$$

$$\text{Payda} = (-3.58703 - 1.77008i) - 64e^{6x} + 16e^{12((0.1+0.3i)+x)} + 81e^{4((0.1+0.9i)+x)}$$
$$-64e^{6((0.1+1.2i)+x)} + 64e^{(0.1+3.6i)+8x})$$

olmak üzere

$u(x, 0.3) =$ Pay/Payda bulunur. Grafiği Şekil 6. da gösterilmiştir.



Şekil 6. $|u(x, 0.3)|$ gösterimi

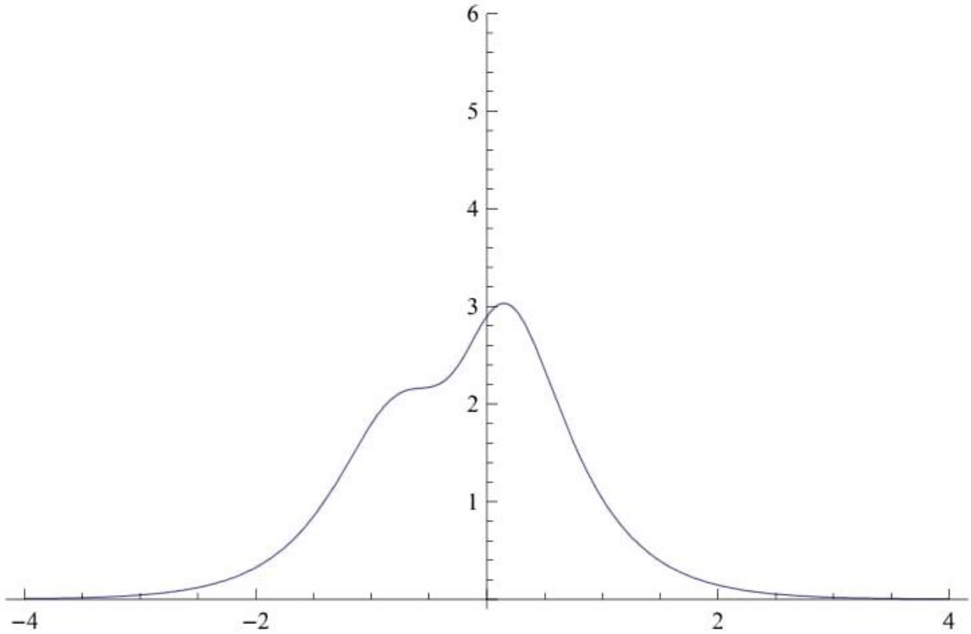
$t = 0.4$ için

Pay $= \ 8e^{2((0.1+3.2i)+x)}\left(9 + 16e^{8x} - 36e^{6((0.1+0.8i)+x)} - 16e^{2((0.1+2.4i)+x)}\right)$

Payda $= (0.349996 - 3.98466i) - 64e^{6x} + 16e^{12((0.1+0.4i)+x)} + 81e^{4((0.1+1.2i)+x)}$
$\quad -64e^{6((0.1+1.6i)+x)} + 64e^{(0.1+4.8i)+8x})$

olmak üzere

$u(x, 0.4) =$ Pay/Payda bulunur. Grafiği Şekil 7. de gösterilmiştir.



Şekil 7. $|u(x, 0.4)|$ gösterimi

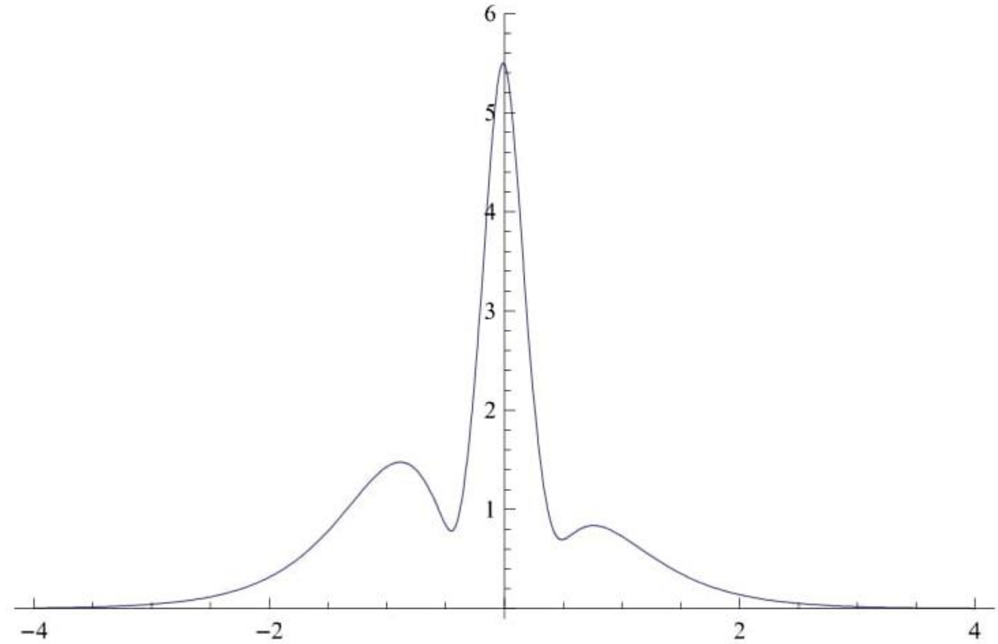
$t = 0.5$ için

$$\text{Pay} = 8e^{2((0.1+0.4i)+x)}\left(9 + 16e^{8x} - 36e^{6((0.1+0.1i)+x)} - 16e^{2((0.1+0.3i)+x)}\right)$$

$$\text{Payda} = (3.84068 - 1.117766i) - 64e^{6x} + 16e^{12((0.1+0.5i)+x)} + 81e^{4((0.1+1.5i)+x)} \\ -64e^{6((0.1+0.2i)+x)} + 64e^{(0.1+0.6i)+8x})$$

olmak üzere

$u(x, 0.5) = \text{Pay}/\text{Payda}$ bulunur. Grafiği Şekil 8. de gösterilmiştir.



Şekil 8. $|u(x, 0.5)|$ gösterimi

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında sırasıyla

1. Lineer olmayan Schrödinger denkleminin kesin çözümü elde edilmiştir. Bunun için üstel matrislerden faydalanılmıştır.
2. Kullanılan yöntem genelleştirilmiştir.

4. ÖNERİLER

Bu çalışmada kullanılan yöntem bazı diğer lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere de uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A. (1991). Solition Nonlinear Evolution Equations And Inverse Scattering. Cambridge, Cambridge University Press.

[2] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A.C. and Segur, H. (1974). The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.,* 53, 249-315.

[3] Ablowitz, M. J., Prinari, B. and Trubatch, A. D. (2004). Discrete And Continuous Nonlinear Schrödinger Systems. Cambridge, Cambridge University Press.

[4] Ablowitz, M. J. and Segur, H. (1981). Solitons And The Inverse Scattering Transform. Philadelphia, SIAM.

[5] Aktosun, T. and van der Mee, C. (2006). Explicit solutions to the Korteweg-de Vries equation on the half-line. *İnverse Problem.* 22, 2165-74.

[6] Aktosun, T. (2007). Exact solutions to the focusing nonlinear Schrödinger equation. *İnverse Problem.* 23, 2171-2195.

[7] Busse, T. (2008). Generalized inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger equation. Doktora Tezi. Teksas Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Fakültesi, Arlington, ABD,76 s.

[8] Chadan, K. and Sabatier, P. C. (1989). Invers Problems In Quantum Scattering Theory. New York, Springer, 2. Baskı.

[9] Coddington, E. A. and Levinson, N. (1955). Theory Of Ordinary Differential Equaitons. New York, McGraw-Hill.

[10] Courant, R. and Hilbert, D. (1989). Methods of mathematical physics vol 1. New York, Interscience.

[11] Demontis, F. (2007). Direct and inverse scattering of the matrix Zakharov-Shabat system. Doktora Tezi. Cagliari Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Fakültesi, İtalya.

[12] Golub, G. and Van Loan, C. (1996). Matrix Computations. Baltimore, MD Johns Hopkins University Press, 3. Baskı.

[13] Hirota, R. (2004). The Direct Method In Soliton Theory. Cambridge, Cambridge University Press.

[14] Kurt, M. (2015). Ters saçılım dönüşümü (TDS) ve soliton teorisi. Yüksek Lisans Tezi. Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas, Türkiye, 34 s.

[15] Nokinov, S., Manakov, S. V., Pitaevskii, L. P. and Zakharov, V. E. (1984). Theory Of Solitons. New York, Consultans Bureau.

[16] Ökten, S. (2010). 2-normlu uzaylar. Yüksek Lisans Tezi. Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, Türkiye, 68 s.

[17] Soysüren, H. ve Zor, A. (2000). Lineer Cebir. Beta Yayınları, Yayın No:1011, 3. Baskı, ISBN: 975-486-912-8, 224s., 41-42-80-85-87-90-97-117-121.

[18] Zakharov, V. E. and Shabat, A. B. (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. 3*4, 62-9.