

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE
KARARLILIK VE SINIRLILIK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Zozan OKTAN
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN- 2021

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE
KARARLILIK VE SINIRLILIK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Zozan OKTAN

VAN-2021

KABUL ve ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Zozan OKTAN tarafından sunulan “ *Stokastik Diferansiyel Denklemlerde Kararlılık ve Sınırlılık*” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 14/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

İmza:

Üye: Dr. Öğr. Ü. Hatice TAŞKESEN

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../2012 tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Suat ŞENSOY

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atf yapıldığını bildiririm.

Zozan OKTAN



ÖZET

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK VE SINIRLILIK

OKTAN, Zozan
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Şubat 2021, 84 sayfa

Bu tez, on bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilk olarak stokastik diferansiyel denklemlerin ortaya çıkış süreci, uygulamadaki yeri ve önemi belirtildi. Daha sonradan ise, stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık vb. davranışlarıyla ilgili literatürde yapılmış olan bazı çalışmalar özetlendi. İkinci bölümde ise, bu tezde kullanılacak olan materyal ve yöntem belirtildi. Benzer biçimde üçüncü bölümde ise, ele alınan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin stokastik kararlılığı, sınırlılığı vb. davranışları incelemek için kullanılacak yöntem, bazı temel tanımlar, teoremler, lemmalar, vb. verildi. Tezin beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerinde, literatürde yer alan farklı biçimdeki lineer olmayan ikinci mertebeden gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık vb. bazı çalışmalar verildi. Bu çalışmadaki sonuçlar uygun Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelleri yardımıyla ispatlanmıştır. Tezin sekiz, dokuzuncu ve onuncu bölümlerinde, yine literatürde yer alan farklı biçimdeki lineer olmayan üçüncü mertebeden gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık vb. bazı çalışmalar verildi. Bu çalışmadaki sonuçlar uygun Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelleri yardımıyla ispatlanmıştır. Son bölümünde ise, bu tezde yaptığımız çalışmalara ilişkin tartışma ve sonuç kısmını içermektedir. Bu tez orijinal bir sonuç içermemektedir.

Anahtar kelimeler: Gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler, Ito formülü, Kararlılık ve sınırlılık, Lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemler, Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli.



ABSTRACT

STABILITY AND BOUNDEDNESS IN STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

OKTAN, Zozan
M.Sc, Thesis, Department of Mathematic
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
February 2021, 84 pages

This thesis includes ten chapters. In the first chapter, at the beginning some historical information about stochastic differential equations, roles of that equations in scientific applications and their importance are given. Afterwards, we summarized some works on the stability, boundedness, etc., behaviors of solutions of certain stochastic differential equations, which are available in the literature. In the second chapter, the material and method to be used in this thesis were presented. Similarly, in the third chapter of this thesis, some basic definitions, theorems, lemmas, etc., are given such that they are used to investigate the stability, boundedness, etc., of solutions of stochastic differential equations considered in the thesis. In the fifth, sixth and seventh chapters of this thesis, we gave some result on the stability, boundedness and so on of solutions of various non-linear stochastic differential equations of second order with delay, which can be available in the literature are given. The stability, boundedness, etc., results of this thesis have been proved by using Lyapunov-Krasovskii functionals. In the eighth, ninth and tenth chapters of this thesis, we gave some result on the stability, boundedness and so on of solutions of various non-linear stochastic differential equations of third order with delay, which can be available in the literature are given. The stability, boundedness, etc., results of this thesis have been proved by using Lyapunov-Krasovskii functionals. In the last chapter, which is the final chapter of the thesis, a short conclusion related to the subject of the thesis is given. This thesis does not contain an original result.

Keywords: Delayed stochastic differential equations, Ito formula, Stability and boundedness, Non-linear stochastic differential equations, Lyapunov-Krasovskii functional.



ÖN SÖZ

Bu çalışmada Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelleri ve Ito formülünden faydalanılarak belli formda lineer olmayan ikinci ve üçüncü mertebeden gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerin kararlılığı ve sınırlılığı incelenmektedir. Literatürde tez konusu ile ilgili yapılan bazı çalışmalar detaylarıyla birlikte verilmiştir.

Tez çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen daima yanımda olan, tez çalışmam boyunca beni motive eden aileme ve manevi desteklerinden dolayı değerli hocalarıma teşekkür ederim.

2021

Zozan OKTAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	7
4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	9
5. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT GECİKMELİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜMLERİN ASİMPOTOTİK KARARLILIĞI.....	17
5.1. $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)f(x(t-r)) + g(t,x)\omega'(t) = 0$ Diferansiyel Denkleminin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı.....	17
6. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT ÇOKLU GECİKMELİ STOKASTİK BİR LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPOTOTİK KARARLILIĞI	25
6.1. $\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} + b_0(t)g_0(x) + \sum_{j=1}^m b_j(t)g_j\left(x(t-\tau_j)\right)$ $+g(t,x)\omega'(t) = 0$ Diferansiyel Denkleminin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı.....	25
7. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN SABİT GECİKMELİ STOKASTİK BİR DİFERANSİYEL DENKLEMDE ÇÖZÜMLERİN SINIRLILIK VE KARARLILIĞI	33
7.1. $x''(t) + \psi(t)f(x(t), x'(t))x'(t) + g(x(t-\tau)) + \sigma x(t)\omega'(t)$ $= p(t, x(t), x'(t), x(t-\tau))$ Denkleminin Çözümlerinin Sınırlılık ve Kararlılık Analizi	33

8. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN SABİT GECİKMELİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN ASİMPOTİK KARARLILIĞI.....	47
8.1. $x'''(t) + f(x'(t))x''(t) + g(x'(t - \tau)) + h(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) = 0$	
Denkleminin Çözümlerinin Kararlılık Analizi	47
9. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN SABİT VE DEĞİŞKEN GECİKMELİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN ASİMPOTİK KARARLILIĞI	57
9.1. $x'''(t) + ax''(t) + \phi(x'(t - r(t))) + \psi(x(t - r(t))) + \sigma x(t - h)\omega'(t) = 0$	
Denkleminin Sıfır Çözümünün Kararlılık Analizi	57
10. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ STOKASTİK BİR DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÇÖZÜMLERİN STOKASTİK ÜSTEL KARARLILIK VE SINIRLILIĞI	65
10.1. $x'''(t) + \Phi(x, x')x'' + G(x'(t - r)) + F(x(t - r)) + \sigma x(t - h(t))\omega'(t) = P(t, x, x', x'')$	
Denklemin Çözümlerinin Üstel Kararlılık ve Sınırlılık Analizi.....	65
11. TARTIŞMA VE SONUÇ	77
KAYNAKLAR.....	79
ÖZ GEÇMİŞ.....	83

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
R	Reel sayılar
R^+	Negatif olmayan reel sayılar
β	Beta
φ	Phi
ϕ	Phi
ν	Nü
μ	Mü
ρ	Ro
ψ	Psi
γ	Gama
η	Eta
θ	Teta
δ	Delta
∂	Kısmi türev
Ω	Örnek uzayı
$P(X)$	Olasılık ölçüsü
(Ω, \mathcal{F}, P)	Tam olasılık uzayı
$X(t)$	Stokastik süreç
$X(t_i)$	X sürecinin t_i anındaki değeri
$\omega(t)$	Wiener süreci ya da Brownian hareketi
$E(X)$	X rassal değişkeninin beklenen değeri

1.GİRİŞ

Birçok bilim alanında sistemleri modellerken adi diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak bu modellerde dış etkenlerin rassallığı veya parametrelerin değişkenliği çoğu zaman göz ardı edilmektedir. Eğer adi diferansiyel denklemlere rassallığa karşılık gelen bir ifade eklenirse stokastik diferansiyel denkleminin elde edildiği görülür. Bu rassallık ilk olarak 1827 yılında Robert Brown tarafından, su üzerinde yüzen polenlerin rasgele hareketlerinin gözlemlenmesiyle ortaya çıkmıştır. Bu sebeple bu ifadeye Brown hareketi denilmiştir. Bugün bu hareket birçok bilim dalında kullanılmaktadır. Örneğin, bu hareketler ısı transferinde, borsa hareketlerinde karşımıza çıkmaktadır. Brown hareketi tanım gereği diferansiyellenemez olduğu için stokastik diferansiyel denklemlerin integral formu çalışılmıştır. Stokastik diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri normal analiz yöntemleriyle bulunamamaktadır. Japon matematikçi Kyoshi Ito 1951 yılında 'Ito lemmasını tanımlayarak stokastik analize büyük bir katkı sağlamıştır. Bu lemma yardımı ile birçok stokastik diferansiyel denklemin analitik çözümü bulunabilmektedir.

Günlük hayatımızda gecikme her zaman karşımıza çıkmaktadır. Örneğin şekerin veya tuzun suda erimesi her zaman aynı hızla olmaz. Başlangıçta şeker veya tuz suda daha hızlı erir. Doyuma ulaşma evresinde erime hızı başlangıca göre daha yavaşlar. Bu tür bir fiziksel olay gecikmeli diferansiyel denklem olarak modellenmektedir (Driver, 1977). Ayrıca, fiziksel bir sisteme dışarıdan etkide bulunduğu tepkinin oluşması için kısa da olsa bir süreye ihtiyaç vardır. Yine bir hastanın ilacı alır almaz iyileşmediği, tedaviye bir süre sonra cevap vermesi gecikmeye örnektir. Gerçekçi bir model kurmak için sistemdeki gecikmelerin modele yansıtılması gerekmektedir. Fakat bazı durumlarda modeli kurarken stokastik diferansiyel denklemlerin de yetersiz kaldığı görülmektedir. Örneğin finans sektörü ele alınırsa, piyasadaki parametreler rastgele davrandığı için tüccarlar piyasa hareketlerini öngörmek ve yatırımlarını yapmadan önce riskleri tahmin etmek ister. Bu sebeple, mevcut geçmiş pazar bilgilerini kullanırlar ve bazı istatistiksel çıkarımlar yaparlar. Bu geçmiş veriler, gelecekteki piyasa hareketlerini anlamak için kullanılan stokastik diferansiyel denklem modellerine eklenerek gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin elde edildiği görülür (Orucova Büyüköz, 2018).

Son yıllarda gecikmeli ve gecikmesiz stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel özellikleri birçok bilim adamı tarafından incelenmiş olup halen incelemeler yaygın bir biçimde sürdürmektedir. Bu çalışmalar sırasında çözümlerin niteliksel davranışlarını belirlemek için Lyapunov fonksiyonları, Lyapunov-Krasovskii fonksiyonları, Ito formülü, vb. birer temel araç olarak kullanılmaktadır. Ancak lineer olmayan diferansiyel denklemler ve gecikmeli diferansiyel denklemler için uygun fonksiyon veya fonksiyonların inşası halen ilgili literatürde açık bir problem olarak kalmaktadır. Bu husus mevcut tezde ele alınmaktadır.



2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

İlgili matematik literatürüne yapılan incelemelerde ikinci ve üçüncü mertebeden lineer olmayan belli formdaki gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı, kararlılığı, düzgün kararlılığı, asimptotik kararlılığı, sınırlılığıyla ilgili çalışmalardan bir kısmı aşağıdaki şekilde özetlenebilir. Ogundare ve Afuwape (2014) ve Tunç (2014), sırasıyla aşağıdaki lineer olmayan ikinci mertebeden

$$x'' + f(x)x' + g(x) = p(t, x, x')$$

ve

$$x'' + c(t, x, x') + q(t)b(x) = f(t)$$

diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sınırlılık ve kararlılık özellikleri hakkında bazı sonuçları Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla elde ettiler.

Ademola (2015), ikinci mertebeden lineer olmayan

$$\begin{aligned} [\phi(x(t))x'(t)]' + g(t, x(t), x'(t))x'(t) + \varphi(t)\square(x(t)) \\ = p(t, x(t), x'(t)) \end{aligned}$$

diferansiyel denklemini ele aldı. Verilen denklemde $p(t, x(t), x'(t)) = 0$ olması durumunda çözümlerin kararlılığını ve $p(t, x(t), x'(t)) \neq 0$ için ise, çözümlerin sınırlılığı için yeter şartlar elde etti. Söz konusu sonuçların ispatlanmasında uygun bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanarak ispatlar yapıldı.

Abou-El-Ela ve ark. (2015), aşağıdaki üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) + \sigma x(t)\omega'(t) = p(t, x(t), x'(t), x''(t))$$

stokastik diferansiyel denklemin çözümlerinin düzgün stokastik sınırlığını ve sıfır çözümünün stokastik asimptotik kararlılığını inceledi.

Abou-El-Ela ve ark. (2015), sırasıyla aşağıdaki ikinci mertebeden sabit gecikmeli

$$\begin{aligned} x''(t) + ax'(t) + bx(t - \square) + \sigma x(t)\omega'(t) = 0, \\ x''(t) + ax'(t) + f(x(t - \square)) + \sigma x(t - \tau)\omega'(t) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x''(t) + g(x'(t)) + bx(t - \square) + \sigma x(t)\omega'(t) \\ = p(t, x(t), x'(t), x(t - \square)) \end{aligned}$$

Stokastik diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin kararlı ve sınırlı olması için yeter şartlar oluşturdu.

Abou-El-Ela ve ark. (2015), üçüncü mertebeden sabit gecikmeli

$$x'''(t) + a_1x''(t) + g_1(x'(t - r_1(t))) + f_1(x(t)) + \sigma_1x(t)\omega'(t) = 0,$$

$$x'''(t) + a_2x''(t) + f_2(x(t))x'(t) + f_3(x(t - r_2(t))) + \sigma_2x(t - h(t))\omega'(t) = 0$$

stokastik diferansiyel denklemlerin sıfır çözümlerinin asimptotik kararlılığını inceledi.

Ademola ve ark. (2016), aşağıda verilen ikinci mertebeden lineer olmayan değişken gecikmeli

$$\begin{aligned} x''(t) + \phi(t)f(x(t), x(t - \tau(t)), x'(t), x'(t - \tau(t))) + g(x(t - \tau(t))) \\ = p(t, x(t), x'(t)) \end{aligned}$$

diferansiyel denklemin çözümlerinin düzgün stokastik kararlılığını ve niteliksel davranışlara ait yeni sonuçlar verdi.

Ademola ve ark. (2016), lineer olmayan ikinci mertebeden

$$\begin{aligned} x''(t) + g(x(t), x'(t))x'(t) + f(x(t)) + \sigma x(t)\omega'(t) \\ = p(t, x(t), x'(t)) \end{aligned}$$

stokastik diferansiyel denklemin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılıkları üzerinde bazı şartlar içeren birtakım çalışmalar yaptı.

Abou-El-Ela ve ark. (2017), aşağıda verilen ikinci mertebeden sabit gecikmeli

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)f(x(t - r)) + g(t, x)\omega'(t) = 0$$

stokastik diferansiyel denklemini ele aldı. Burada uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli oluşturarak bu denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olmasını sağlayan yeter şartlar oluşturdu ve konu ile ilgili bir örnek verdi.

Ademola (2017), aşağıdaki üçüncü mertebeden gecikmeli

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + \square(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) = p(t, x(t), x'(t), x''(t))$$

stokastik diferansiyel denklemin çözümlerinin sınırlılık ve kararlılığını inceledi.

Mahmoud ve Tunç (2018), aşağıda verilen üçüncü mertebeden sabit gecikmeli

$$x'''(t) + f(x'(t))x''(t) + g(x'(t - \tau)) + \square(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) = 0$$

stokastik diferansiyel denklemin iele aldı. Uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli yardımıyla bu denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığıyla ilgili bir teorem ispatladı ve ispatlanan sonucun doğrulanmasıyla ilgili olarak bir örnek verdi.

Ademola ve ark. (2019), lineer olmayan ikinci mertebeden gecikmeli

$$\begin{aligned} x''(t) + \psi(t)f(x(t), x'(t))x'(t) + g(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) \\ = p(t, x(t), x'(t), x(t - \tau)) \end{aligned}$$

stokastik diferansiyel denklemini ele aldı. Bu denklemin çözümlerinin asimptotik kararlılık ve sınırlılık sonuçlarının ispatları uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli tanımlanarak yapıldı. Ayrıca konuyla ilgili iki örnek verildi.

Tunç (2019), ikinci mertebeden sabit gecikmeli lineer olmayan

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + a(t)f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + b_0(t)g_0(x) \\ + \sum_{j=1}^m b_j(t)g_j(x(t - \tau_j)) + g(t, x)\omega'(t) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

stokastik diferansiyel denklemini ele alıp, bu denklemin sıfır çözümünün stokastik asimptotik kararlılığını uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli oluşturarak bu denklemin çözümlerinin niteliksel davranışıyla ilgili verilen sonuçları ele aldı ve bu konuyla ilgili bir örnek verdi.

Mahmoud ve Tunç (2019), aşağıda verilen lineer olmayan üçüncü mertebeden sabit ve değişken gecikmeli

$$x'''(t) + ax''(t) + \phi(x'(t - r(t))) + \psi(x(t - r(t))) + \sigma x(t - h)\omega'(t) = 0$$

stokastik diferansiyel denklemini ele aldı. Burada uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli oluşturarak bu denklemin sıfır çözümünün stokastik asimptotik kararlı olmasını sağlayan yeter koşullar oluşturdu ve konu ile ilgili bir örnek verdi.

Mahmoud ve Tunç (2020), üçüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli

$$\begin{aligned} x'''(t) + \Phi(x, x')x'' + G(x'(t - r)) + F(x(t - r)) + \sigma x(t - \square(t))\omega'(t) \\ = p(t, x(t), x'(t), x''(t)) \end{aligned}$$

stokastik bir diferansiyel denklem için çözümlerin stokastik üstel kararlılık ve sınırlılığını inceledi. Söz konusu sonuçların ispatlanmasında uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli tanımlanarak ispatı yapıldı ve konuyla ilgili bir örnek verildi.

Tez konusuyla ilgili literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar için Arnold (1974), Oksendal (2000), Jedrzejewski (2000), Ivanov ve ark. (2003), Cahlon ve Schmidt(2004),Yeniçerioğlu (2007), Ogundare ve Okecha (2007), Raffoul (2007), Yeniçerioğlu (2008), Kolarova (2008), Liu ve Raffoul (2009), Rezaeyan ve Farnoosh (2010), Mao (2011), Tunç (2013), Xianfeng ve Wei (2013), Tunç (2014), Craballo ve ark. (2014), Domoshnitsky (2014), Zhu ve ark. (2014), Caraballo ve ark. (2014), Ogundare ve Afuwape (2014), Ademola (2015), Abou-El-Ela ve ark. (2015), Tunç ve Ayman (2016), Tunç (2016), Ademola ve ark. (2016), Ogundare ve ark. (2016), Ademola ve ark. (2016), gibi kaynaklara başvurulabilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

‘Giriş’ ve ‘Kaynak Bildirişleri’ bölümlerindeki bilgilere göre ilgili literatürde lineer olmayan ikinci ve üçüncü mertebeden gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin niteliksel davranışlarıyla ilgili kayda değer birçok çalışmanın olduğu görülmektedir. Bu tezde materyal olarak, tezin kaynaklar kısmında geçen ikinci ve üçüncü mertebeden stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarıyla ilgili bilimsel makaleler, tez konusu ile ilgili temel bilgiler, gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerinin niteliksel davranışlarına ait temel tanım, teorem, lemmalar vb. sonuçları içeren kitaplar göz önüne alınmaktadır. Bu tezde Xuerong Mao (2011), Abou-El-Ela ve ark. (2017), Mahmoud ve Tunç (2018), Ademola ve ark. (2018), Tunç (2019), Ademola ve ark. (2019), Mahmoud ve Tunç (2019), Mahmoud ve Tunç (2020) gibi tez konusuyla ilgili kaynaklar dikkate alınıp, Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelleri, Ito formülü kullanarak, vb., değişik formdaki stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı, sınırlılığı, düzgün kararlılığı, asimptotik kararlılığı ile ilgili sonuçları incelemede materyal (temel araç) olarak kullanılmaktadır.

4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez konusu ile ilgili, daha sonraki bölümlerde kullanılacak ve temel bilgi niteliğinde olan bazı tanımlar, teoremler ve lemmalar verilmektedir.

Tanım 4.1 (Çapar, 2013)

Olasılık, bir olayın gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesinin matematiksel değeridir. Kuramın tarihsel gelişimi içinde hangi olasılık tanımını ele alırsak alalım olasılık,

$$P: \{\text{Olaylar kümesi}\} \Rightarrow [0, 1]$$

biçiminde bir küme fonksiyonudur. Bu fonksiyonun tanım kümesi, deneyin bütün olaylarından oluşan küme, değer kümesi ise $[0, 1]$ aralığıdır.

Tanım 4.2 (Allen, 2007)

(Ω, \mathcal{F}, P) , bir tam olasılık uzayı olsun.

$$X: \Omega \times T \rightarrow R$$

dönüşüme stokastik veya rassal süreç denir. Burada Ω örnek uzayı, \mathcal{F} ailesi Ω 'nın alt cümlelerinin bir ailesi ve P olasılık ölçüsüdür. Stokastik süreçler $X(t, \omega)$, ($\omega \in \Omega, t \in T$) biçiminde iki değişkenli reel değerli bir fonksiyondur. T genelde zaman olarak yorumlanan parametre kümesidir. Olasılık uzayları genelde zaman bağlantısı olmayan soyut rassal deneylere karşı gelmektedir. Gerçekte doğa ve toplumdaki sistemler zamana bağlı olarak rassal bir şekilde değişmekte ve bu sistemler üzerindeki ölçümler de zaman indeksli rassal değişkenler almaktadır.

Otonom olmayan gecikmeli

$$x'(t) = F(t, x), \quad x_t = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $F: [0, \infty) \times C_H \rightarrow R^n$ sürekli bir dönüşüm, $F(t, 0) = 0$, F nin sınırlı cümleleri R^n de sınırlı cümlelere dönüştüğü kabul edilmektedir. $(C, \|\cdot\|)$ ise $\phi: [-r, 0] \rightarrow R^n$ biçiminde tanımlı sürekli fonksiyonların Banach uzayı, $(\|\cdot\|$ supremum norm) ve r, H pozitif sabitler olmak üzere

$$C_H := \{\phi \in (C[-r, 0], R^n): \|\phi\| < H\}$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Burton, 1985).

Tanım 4.3 (Burton,1985)

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $t_1 \geq t_0 \geq 0$ için $\delta > 0$ var öyle ki $[\phi \in C(t_1), \|\phi\| < \delta, t \geq t_1]$ olduğunda $\forall t \geq t_0$ için $|x(t, t_1, \phi)| < \varepsilon$ ise, (4.1) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır denir. Eğer denklemin sıfır çözümü kararlı ve her bir $t_1 \geq t_0 \geq 0$ için $\rho > 0$ var öyle ki $[\phi \in C(t_1), \|\phi\| < \rho]$ iken $t \rightarrow \infty$ için $|x(t, t_0, \phi)| \rightarrow 0$ ise, (4.1) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 4.4 (Çapar, 2013)

Bir sürekli zaman $B = B_t, t \in [0, \infty)$ stokastik sürecine aşağıdaki özelliklere sahipse Brown hareketi süreci veya Wiener süreci denir;

- 1) $B_0 = 0$.
- 2) Süreç durağan ve bağımsız artışıdır.
- 3) Her $t > 0$ da süreç normal $N(0, t)$ dağılımına sahiptir.
- 4) Sürecin yörüngeleri sürekli fonksiyonlardır.

Tanım 4.5 (Mao,2011)

$B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))$ bir d -boyutlu Brownian hareketi olsun. Şimdi d -boyutlu $t \geq t_0$ için

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \quad (4.2)$$

stokastik diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (4. 2) stokastik diferansiyel denkleminin sıfır çözümüne, eğer her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $r > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon, r, t_0) > 0$ sayısı var öyle ki $|x_0| < \delta$ olduğunda her $t \geq t_0$ için

$$P\{|x(t; t_0, x_0)| < r, t \geq t_0\} \geq 1 - \varepsilon$$

oluyorsa, olasılıkla kararlı veya stokastik kararlıdır denir. Aksi halde sıfır çözümüne stokastik kararsızdır denir. Eğer sıfır çözümü stokastik kararlı, her $\varepsilon \in (0, 1)$ için bir $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$ sayısı var öyle ki $|x_0| < \delta_0$ olduğunda

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0\} \geq 1 - \varepsilon$$

oluyorsa, sıfır çözümüne stokastik asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 4.6 (Ademola ve ark., 2019)

$t > 0, \{x(\theta): -\tau \leq \theta \leq 0\}, x_0 \in C([-\tau, 0]; R^n)$ başlangıç verileri olmak üzere aşağıdaki n boyutlu otonom olmayan

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))dt + g(t, x(t), x(t - \tau))dB(t) \quad (4.3)$$

gecikmeli stokastik diferansiyel denklemini alalım. Burada $f: R^+ \times R^{2n} \rightarrow R^n$ ve $g: R^+ \times R^{2n} \rightarrow R^{n \times m}$ ölçülebilir fonksiyonlar, $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t))^T$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı n boyutlu bir Brownian hareketidir. f, g fonksiyonları Lipschitz şartını sağlar. $\tau = 0$ için bu denklem bir adi stokastik diferansiyel denkleme indirgenir.

Teorem 4.7 (Mao, 2011)

$V \in C^{1,2}(R^+ \times R^n; R^+)$ ve $\mu \in \mathcal{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- (i) $V(t, 0) = 0, \mu(|x|) \leq V(t, x);$
- (ii) $LV(t, x) \leq 0, (t, x) \in R^+ \times R^n.$

Bu takdirde (4.2) stokastik diferansiyel denkleminin sıfır çözümü stokastik kararlıdır. Burada \mathcal{K} sembolü $\mu: R^+ \rightarrow R^+, \mu(0) = 0$ ve $r > 0$ için $\mu(r) > 0$ olacak şekilde sürekli ve azalan olmayan tüm fonksiyonların ailesini temsil eder. Ayrıca $C^{1,2}(R^+ \times R^n, R^+)$ ifadesi $R^+ \times R^n$ üzerinde tanımlı, negatif olmayan ve x 'e göre iki kez t 'ye göre bir kez sürekli türevlenebilirdir.

Teorem 4.8 (Mao, 2011)

$V \in C^{1,2}(R^+ \times R^n; R^+)$ ve $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- (i) $\mu_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \mu_2(|x|);$
- (ii) $LV(t, x) \leq -\mu_3(|x|), (t, x) \in R^+ \times R^n.$

Bu takdirde (4.2) stokastik diferansiyel denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

Lemma 4.9 (Ademola ve ark., 2019)

$V \in C^{1,2}(R^+ \times R^n, R^+)$ ve $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- (i) $V(t, 0) = 0, t \geq 0;$
- (ii) $\mu_0(\|x(t)\|) \leq V(t, x) \leq \mu_1(\|x(t)\|), \mu_0(r) \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty;$
- (iii) $LV(t, x) \leq -\mu_2(\|x(t)\|), (t, x) \in R^+ \times R^n.$

Bu takdirde (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin sıfır çözümü düzgün stokastik asimptotik kararlıdır.

Tanım 4.10 (Mao, 2011)

(4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin bir $x(t_0, x_0)$ çözümüne eğer $\forall t \geq t_0$

$$E^{x_0} ||(t, x_0)|| \leq C(t_0, ||x_0||) \quad (4.4)$$

şartı sağlıyorsa olasılıkta sınırlıdır veya stokastik sınırlıdır denir. Burada E^{x_0} ifadesi x_0 ile ilgili olasılık şartına göre beklenti operatörünü belirtir. $C: R^+ \times R^n \rightarrow R^+$ ise, x_0 ve t_0 'a bağlı olarak sabit bir fonksiyondur.

Tanım 4.11 (Ademola ve ark., 2019)

C 'nin (4.4)'de t_0 'dan bağımsız olması halinde (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin bir $x(t_0, x_0)$ çözümüne düzgün stokastik sınırlıdır denir.

Tanım 4.12 (Mao, 2011)

(4.3) stokastik gecikmeli diferansiyel denklemi ile eşleşen operatör

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [g(t, x) g^T(t, x)]_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

dir.

$V(t, x)$ Lyapunov fonksiyonlar ailesini temsil etsin. Ito formülü yardımıyla

$$dV(t, x) = LV(t, x)dt + V_x(t, x)g(t, x)dB(t)$$

olur.

Eğer L operatörü $V(t, x) \in C^{2,1}(S_h \times R_+; R_+)$ fonksiyonu üzerine hareket ederse, bu takdirde

$$LV(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} f(t, x) + \frac{1}{2} \text{trace}[g^T(t, x) V_{xx}(t, x) g(t, x)], \quad (4.5)$$

ve

$$V_{xx}(t, x) = \left(\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

dir. Buradan $V'(t, x) = \frac{d}{dt}V(t, x)$ ifadesi yerine (4.5)'te tanımlanan $LV(t, x)$ operatörü alınmaktadır.

Şimdi, $V \in C^{1,2}(R^+ \times R^n, R^+)$ olsun. (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin herhangi bir $0 \leq t_0 \leq T < \infty$ aralığında herhangi bir $x(t_0, x_0)$ çözümünün olduğunu varsayalım. Burada

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m$$

$$E^{x_0} \left\{ \int_{t_0}^T V_{x_i}^2(t, x_t) g_{ik}^2(t, x_t) dt \right\} < \infty \quad (4.6)$$

elde edilir (Ademola ve ark., 2019).

Buna ilaveten, (4.6) ifadesinin özel bir durumu aşağıdaki gibidir:

Farz edelim ki $\sigma(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$|V_{x_i}(t, x_t) G_{ik}(t, x_t)| < \sigma(t), \quad x \in R^n, \quad (4.7)$$

$$\int_{t_0}^T \sigma^2(t) dt < \infty, \quad 0 \leq t_0 \leq T < \infty \quad (4.8)$$

şartını sağlar (Ademola ve ark., 2019).

Lemma 4.13 (Ademola ve ark., 2019)

Bir $V(t, x_t) \in C^{1,2}(R^+ \times R^n; R^+)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin var olduğunu, bu fonksiyonelinin yukarıdaki şartlara ilave olarak her $(t, x) \in R^+ \times R^n$ için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

$$(i) \|x(t)\|^p \leq V(t, x_t) \leq \|x(t)\|^q;$$

$$(ii) LV(t, x_t) \leq -\alpha(t)\|x(t)\|^r + \beta(t);$$

$$(iii) V(t, x_t) - V^{\frac{r}{q}}(t, x_t) \leq \gamma.$$

O zaman (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin her çözümü $t \geq t_0$ için

$$E^{x_0} \|x(t, x_0)\| \leq \{V(t_0, x_0) e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds} + \int_{t_0}^t (\gamma \alpha(u) + \beta(u)) e^{-\int_u^t \alpha(s) ds} du\}^{1/p} \quad (4.9)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada p, q, r pozitif sabitler, $p \geq 1$ ve γ negatif olmayan sabitlerdir.

Lemma 4.14 (Ademola ve ark., 2019)

$V(t, x_t) \in C^{1,2}(R^+ \times R^n; R^+)$ bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli ve $\alpha, \beta \in C(R^+; R^+)$, p, q pozitif sabitler ve $p \geq 1, \gamma$ negatif olmayan sabitler olmak üzere her $(t, x) \in R^+ \times R^n$ için aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- (i) $\|x(t)\|^p \leq V(t, x_t)$;
- (ii) $LV(t, x_t) \leq -\alpha(t)V^q(t, x_t) + \beta(t)$;
- (iii) $V(t, x_t) - V^q(t, x_t) \leq \gamma$.

O zaman (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin tüm çözümleri $t \geq t_0$ olmak üzere (4.9) ile verilen eşitsizliği sağlar.

Sonuç 4.15 (Ademola ve ark., 2019)

(i) Lemma 4.13'ün (i) ve (iii) şartlarının sağladığını varsayalım. İlave olarak bir pozitif M sabiti için

$$\int_{t_0}^t (\gamma\alpha(u) + \beta(u))e^{-\int_u^t \alpha(s)ds} du \leq M, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (4.10)$$

ise, o zaman (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin tüm çözümleri düzgün stokastik sınırlıdır.

(ii) Lemma 4.14'ün (i) ve (iii) şartlarının sağladığını varsayalım. Eğer (4.10) şartı sağlanır ise, o zaman (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin tüm çözümleri stokastik sınırlıdır.

Tanım 4.16 (Mahmoud ve Tunç, 2020)

$f(0, t) = 0, g(0, t) = 0$ olduğunu varsayalım. Eğer (4.3)'ün herhangi bir $x(t, t_0, x_0)$ çözümü için

$$\int_{t_0}^t v(\rho)d\rho \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty$$

olacak şekilde bir pozitif sürekli $v(t)$ fonksiyonuvar ve $N, C \in R^+$ sürekli olacak şekilde

$$E^{x_0} \|x(t, t_0, x_0)\| \leq C(\|x_0\|, t_0) \left(e^{\int_{t_0}^t v(\phi)d\phi} \right)^N, \quad \forall t \geq t_0$$

ise, o zaman (4.3)'ün sıfır çözümü olasılıkta üstel stokastik kararlıdır. Ayrıca C, t_0 'a bağımsız ise, o zaman (4.3)'ün sıfır çözümüne olasılıkta α – düzgün üstel asimptotik kararlıdır denir.

Lemma 4.17 (Mahmoud ve Tunç, 2020)

Lemma 4.13'ün şartlarının sağladığını varsayalım. İlave olarak bir pozitif M sabiti için

$$\int_{t_0}^t (\mu^* v(\rho) + \eta(\rho)) e^{-\int_{t_0}^{\rho} v(\phi) d\phi} d\rho \leq M, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (4.11)$$

ise, o zaman (4.3) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin tüm çözümleri düzgün stokastik sınırlıdır denir.

Lemma 4.18 (*Mahmoud ve Tunç, 2020*)

$f(0, t) = 0, g(0, t) = 0$ olduğunu varsayalım. İlave olarak bir pozitif M sabiti için

$$\int_{t_0}^t (\mu^* v(\rho) + \eta(\rho)) e^{\int_{t_0}^{\rho} v(\phi) d\phi} d\rho \leq M, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (4.12)$$

ve

$$\int_{t_0}^t v(\phi) d\phi \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

olsun. Eğer *Lemma 4.13*'ün tüm şartları sağlanırsa, o zaman (4.3)'ün sıfır çözümü $N = \frac{1}{q_1}$ olmak kaydıyla α – olasılıkta üstel düzgün stokastik sınırlıdır denir.



5. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT GECİKMELİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜMLERİN ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde Abou-El-Ela ve ark. (2017) tarafından çözümlerin davranışlarıyla ilgili verilen bazı sonuçlar ele alınacaktır. Abou-El-Ela ve ark. (2017) aşağıda verilen ikinci mertebeden sabit gecikmeli stokastik

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)f(x(t-r)) + g(t,x)\omega'(t) = 0 \quad (5.1)$$

diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $a(t)$ ve $b(t)$, $\forall t \in [0, \infty)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, r pozitif bir sabit, $f(x)$, ($f(0) = 0$) ve $g(t,x)$ sürekli fonksiyonlardır. $\omega(t) \in R^m$ standart bir Wiener sürecidir.

Abou-El-Ela ve ark. (2017) uygun bir Lyapunov-Krosovskii fonksiyoneli oluşturarak (5.1) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlılık olmasını sağlayan yeter koşullar oluşturdu.

Abou-El-Ela ve ark. (2017) aşağıdaki kararlılık sonucunu ispatladı.

5.1. $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)f(x(t-r)) + g(t,x)\omega'(t) = 0$

Diferansiyel Denkleminin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı

Teorem 5.1.1 (Abou-El-Ela ve ark., 2017)

İkinci mertebeden sabit gecikmeli (5.1) stokastik diferansiyel denkleminin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

- (i) A, B pozitif sabitler olmak üzere $A \geq a(t) \geq a_0 > \frac{1}{2}$ ve $B \geq b(t) \geq b_0$, $t \in [0, \infty)$;
- (ii) $f(0) = 0$, $\frac{f(x)}{x} \geq f_0 > 0$ ($x \neq 0$), $f'(x) \leq f_1$, $x \in R$;
- (iii) C pozitif bir sabit olmak üzere $g(t,x) \leq Cx$;
- (iv) α, β pozitif sabitler olmak üzere $a'(t) \leq \alpha$ ve $b'(t) \leq \beta$;
- (v) $b_0 f_0 \geq \frac{3}{4}$ ve $2f_1\beta + \alpha + 2C^2 < \frac{3}{2}$.

Bu takdirde

$$r < \min\left\{\frac{2b_0f_0 - 2f_1\beta - \alpha - 2C^2}{2Bf_1}, \frac{2a_0 - 1}{5Bf_1}\right\}$$

olmak kaydıyla, (5.1) denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

İspat (Abou-El-Ela ve ark., 2017)

(5.1) denklemini sistem olarak

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -a(t)y - b(t)f(x) \\ &\quad + b(t) \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds - g(t,x)\dot{\omega}(t)\end{aligned}\quad (5.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$V(t, x, y)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}V(t, x, y) &= 2b(t) \int_0^x f(\xi)d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}a(t)x^2 + xy + y^2 + \lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta)d\theta ds\end{aligned}\quad (5.3)$$

ile tanımlansın. Burada $s \leq 0$ ve λ sonradan belirlenecek olan bir pozitif sabittir.

Ito formülü yardımıyla (5.3) Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin (5.2) sistemi boyunca türevi alınır ise,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(t, x, y) &= 2b'(t) \int_0^x f(\xi)d\xi + \frac{1}{2}a'(t)x^2 + \lambda ry^2 \\ &\quad - \lambda \int_{t-r}^t y^2(s) ds + y^2 - b(t)f(x)x - 2a(t)y^2 \\ &\quad + (x + 2y)b(t) \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds + g^2(t, x)\end{aligned}\quad (5.4)$$

elde edilir. Buradan $b(t) \leq B$, $f'(x) \leq f_1$ şartları ve $2uv \leq u^2 + v^2$ eşitsizliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned}&b(t)x \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds \\ &\leq Bf_1 \int_{t-r}^t x(t)y(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2}Bf_1rx^2 + \frac{1}{2}Bf_1 \int_{t-r}^t y^2(s) ds, \\ &2b(t)y \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds \\ &\leq 2Bf_1 \int_{t-r}^t y(t)y(s)ds \\ &\leq Bf_1ry^2 + Bf_1 \int_{t-r}^t y^2(s) ds\end{aligned}$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak (5.4) ifadesi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(t, x, y) &\leq 2b'(t) \int_0^x f(\xi)d\xi + \frac{1}{2}a'(t)x^2 \\ &\quad + \lambda ry^2 - \lambda \int_{t-r}^t y^2(s) ds + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b(t)f(x)x - 2a(t)y^2 + \frac{1}{2}Bf_1rx^2 \\
& + Bf_1ry^2 + \frac{3}{2}Bf_1 \int_{t-r}^t y^2(s) ds + g^2(t, x)
\end{aligned}$$

olarak düzenlenebilir.

Öte yandan $f'(x) \leq f_1$ ve $f(0) = 0$ olduğundan, integral alındığında

$$f(x) \leq f_1x$$

elde edilir.

Teorem 5.1.1'in (i) ve (iv) şartları yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(t, x, y) & \leq 2\beta \int_0^x f_1 \xi d\xi + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \lambda ry^2 \\
& - \lambda \int_{t-r}^t y^2(s) ds + y^2 - b_0 f_0 x^2 \\
& - 2a_0 y^2 + \frac{1}{2}Bf_1rx^2 + Bf_1ry^2 \\
& + \frac{3}{2}Bf_1 \int_{t-r}^t y^2(s) ds + C^2 x^2 \\
& \leq -(b_0 f_0 - \beta f_1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}Bf_1r - C^2)x^2 \\
& - (2a_0 - 1 - Bf_1r - \lambda r)y^2 \\
& + (\frac{3}{2}Bf_1 - \lambda) \int_{t-r}^t y^2(s) ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\lambda = \frac{3}{2}Bf_1$ seçilirse, o zaman

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(t, x, y) & \leq -(b_0 f_0 - \beta f_1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}Bf_1r - C^2)x^2 \\
& - (2a_0 - 1 - \frac{5}{2}Bf_1r)y^2
\end{aligned}$$

bulunur.

$\mathcal{L}V(t, x, y)$ 'de x^2 ve y^2 terimlerinin katsayılarının negatif olması için

$$r < \min\left\{\frac{2b_0f_0 - 2f_1\beta - \alpha - 2C^2}{2Bf_1}, \frac{2a_0 - 1}{5Bf_1}\right\}$$

olması gerektiği açıktır. Burada

$$D_1 = \min\left\{\frac{2b_0f_0 - 2f_1\beta - \alpha - 2C^2}{2Bf_1}, \frac{2a_0 - 1}{5Bf_1}\right\}$$

alalım. Buna bağlı olarak

$$\mathcal{L}V(t, x, y) \leq -D_1(x^2 + y^2) \quad (5.5)$$

yazılabilir.

$$\int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds$$

integrali negatif olmadığından

$$V(t, x, y) \geq 2b(t) \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{1}{2}a(t)x^2 + xy + y^2$$

olduğu görülür.

$a(t) \geq a_0$, $b(t) \geq b_0$ ve $\frac{f(x)}{x} \geq f_0$ şartları kullanıldığında

$$\begin{aligned} V(t, x, y) &\geq b_0 f_0 x^2 + \frac{1}{2} a_0 x^2 + xy + y^2 \\ &= (b_0 f_0 + \frac{1}{2} a_0) x^2 + (x + \frac{y}{2})^2 \\ &\quad - x^2 - \frac{1}{4} y^2 + y^2 \\ &\geq (b_0 f_0 + \frac{1}{2} a_0 - 1) x^2 + \frac{3}{4} y^2 \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca

$$b_0 f_0 + \frac{1}{2} a_0 > 1$$

olması nedeniyle, $D_2 = \min \{ (b_0 f_0 + \frac{1}{2} a_0 - 1), \frac{3}{4} \}$ olarak alındığında, buna bağlı olarak

$$V(t, x, y) \geq D_2 (x^2 + y^2) \quad (5.6)$$

elde edilir.

Ayrıca

$$f(x) \leq f_1 x, A \geq a(t) \geq a_0 > \frac{1}{2} \text{ ve } B \geq b(t) \geq b_0 > 0$$

şartları kullanıldığında

$$\begin{aligned} V(t, x, y) &\leq B f_1 x^2 + \frac{1}{2} A x^2 + xy \\ &\quad + y^2 + \lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \end{aligned} \quad (5.7)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} &\int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \\ &= \int_{t-r}^t (\theta - t + r) y^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\leq y^2 \int_{t-r}^t (\theta - t + r) d\theta = \frac{r^2}{2} y^2$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizlik ve $uv \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ eşitsizliği (5.7)'de kullandığımızda

$$\begin{aligned} V(t, x, y) &\leq \left(Bf_1 + \frac{1}{2}A \right) x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ &\quad + y^2 + \lambda \frac{r^2}{2} y^2 \\ &\leq \left(Bf_1 + \frac{1}{2}(A + 1) \right) x^2 + \frac{\lambda r^2 + 3}{2} y^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buna bağlı olarak yeterince küçük bir D_3 pozitif sayısı için

$$V(t, x, y) \leq D_3(x^2 + y^2) \quad (5.8)$$

elde edilir. Yukarıdaki sonuçlar göz önüne alındığında *Teorem 4.8*'in tüm şartlarının sağlandığı görülür. Bu nedenle (5.1)'in sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

Böylece *Teorem 5.1.1* ispatlanmış oldu.

Örnek 5.1.1 (Abou-El-Ela ve ark., 2017)

İkinci mertebeden r sabit gecikmeli lineer olmayan

$$x''(t) + \left(e^{-\frac{t}{2}} + \frac{11}{20} \right) x'(t) + \left(\frac{1}{t+1} + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{x(t-r)}{(x)^2(t-r)+1} + x(t-r) \right) + x \frac{t}{t^2+1} \omega'(t) = 0$$

stokastik diferansiyel denklemini ele alalım. Görüldüğü üzere bu denklem (5.1)

denkleminin bir özel halidir. Bu denklemle (5.1) denklemini karşılaştırıldığında

$$a(t) = e^{-\frac{t}{2}} + \frac{11}{20}, \quad b(t) = \frac{1}{t+1} + \frac{3}{4}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} + x, \quad g(t, x) = x \frac{t}{t^2+1}$$

elde edilir. Buna bağlı olarak her $t \in [0, \infty)$ için

$$\frac{31}{20} \geq a(t) = e^{-\frac{t}{2}} + \frac{11}{20} \geq \frac{11}{20} > \frac{1}{2}$$

olur.

Burada $A = \frac{31}{20}$ ve $a_0 = \frac{11}{20}$ seçilebilir. Ayrıca her $t \in [0, \infty)$,

$$a'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \leq 0 < 0.0010^{-3}$$

olur. Böylece $\alpha = 0.0010^{-3}$ alınabilir. Öte yandan, her $t \in [0, \infty)$ için

$$\frac{7}{4} \geq b(t) = \frac{1}{t+1} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

olduğu açıktır. Burada

$$B = \frac{7}{4} \text{ ve } b_0 = \frac{3}{4}$$

dır. Öte yandan

$$t \in [0, \infty), b'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \leq 0 < 0.001$$

olduğu açıktır. Bu nedenle $\beta = 0.001$ alınabilir. Benzer biçimde

$\forall x \in R$ için

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2+1} + 1 \geq 1, f_0 = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + 1 \leq 2, f_1 = 2$$

ve

$$t \in [0, \infty), g^2(t, x) = x^2 \frac{t^2}{(t^2+1)^2} \leq \frac{1}{4} x^2, C = \frac{1}{2}$$

yazılabilir. Böylece *Teorem 5.1.1*'in tüm şartları sağlanır. Benzer biçimde

$$\frac{2b_0f_0 - 2\beta f_1 - \alpha - 2C^2}{2Bf_1} \cong 0.1423,$$

ve

$$\frac{2a_0 - 1}{5Bf_1} \cong 0.0057 = r$$

olur. Bu nedenle $r = 0.0057$ olmak kaydıyla verilen denklemin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

Örnek 5.1.2 (*Abou-El-Ela ve ark., 2017*)

İkinci mertebeden r sabit gecikmeli lineer olmayan

$$x''(t) + \left(\frac{2}{\sqrt{t+1}} + \frac{3}{5}\right)x'(t) + \left(\frac{1}{t^2+1} + 4\right)\left\{\sin x(t-r) + \frac{3}{5}x(t-r)\right\} \\ + \frac{1}{4}xe^{-\frac{t}{2}}\omega'(t) = 0$$

stokastik diferansiyel denklemini ele alalım. Görüldüğü üzere bu denklem (5.1) denkleminin bir özel halidir. Bu denklemle (5.1) denklemini karşılaştırıldığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$a(t) = \frac{2}{\sqrt{t+1}} + \frac{3}{5}, b(t) = \frac{1}{t^2+1} + 4, f(x) = \sin x + \frac{3x}{5}, g(t, x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{t}{2}}.$$

Buna bağlı olarak her $t \in [0, \infty)$ için

$$\frac{13}{5} \geq a(t) = \frac{2}{\sqrt{t+1}} + \frac{3}{5} \geq \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$$

olduğu görülür.

Burada $A = \frac{13}{5}$ ve $a_0 = \frac{3}{5}$ seçilebilir. Ayrıca her $t \in [0, \infty)$,

$$a'(t) = -\frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} \leq 0$$

olur. Böylece $\alpha = 0.1$ alınabilir. Öte yandan her $t \in [0, \infty)$ için

$$5 \geq b(t) = \frac{1}{t^2+1} + 4 \geq 4$$

olduğu açıktır. Burada

$$B = 5 \text{ ve } b_0 = 4$$

dır. Öte yandan her $t \in [0, \infty)$ için

$$b'(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2} \leq 0$$

olur. Bu nedenle $\beta = 0.01$ alınabilir. Benzer biçimde $\forall x \in R$ için

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} + \frac{3}{5} \geq \frac{1}{5}, f_0 = \frac{1}{5},$$

$$f'(x) = \cos x + \frac{3}{5} \leq \frac{8}{5}, f_1 = \frac{8}{5}$$

ve

$$g^2(t, x) = \frac{1}{16} x^2 e^{-t} \leq \frac{1}{16} x^2, C = \frac{1}{4}, t \in [0, \infty)$$

yazılabilir. Benzer biçimde

$$\frac{2b_0f_0 - 2\beta f_1 - \alpha - 2C^2}{2Bf_1} \cong 0.084$$

ve

$$\frac{2a_0 - 1}{5Bf_1} \cong 0.005 = r$$

olur. Böylece *Teorem 5.1.1*'in tüm şartları sağlanır.



6. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT ÇOKLU GECİKMELİ STOKASTİK BİR LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Tunç (2019) ikinci mertebeden sabit gecikmeli stokastik lineer olmayan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} + b_0(t)g_0(x) + \sum_{j=1}^m b_j(t)g_j(x(t - \tau_j)) + g(t, x)\omega'(t) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (6.1)$$

diferansiyel denklemini ele alıp, bu denklemin sıfır çözümünün stokastik asimptotik kararlılığını inceledi. Bu denklemde $\tau_j > 0$ katlı sabit gecikmeler, $t \in \mathcal{R}^+ = [0, \infty)$ olmak üzere, a, b_j, f, g_j ve g fonksiyonları sırasıyla $\mathcal{R}^+, \mathcal{R}^+, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}, \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}$ 'de sürekli fonksiyonlar, $b'_0(t) = \frac{db_0(t)}{dt}$, $b'_j(t) = \frac{db_j(t)}{dt}$, $\frac{dg_j}{dx} \equiv g'_j(x)$ ve $\frac{\partial f(x, x')}{\partial x'} = f_{x'}(x, x')$ türevlerinin var ve sürekli olduğu kabul edilmektedir. Burada $g(t, 0) = g_j(0) = 0$ ve $\omega(t) \in \mathcal{R}^m$ olasılık uzayında tanımlanmış m boyutlu standart bir Wiener sürecidir.

Şimdi ise Tunç (2019) tarafından çözümlerin niteliksel davranışıyla ilgili verilen sonuç ifade edilecektir.

$$6.1. \frac{d^2x}{dt^2} + a(t)f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} + b_0(t)g_0(x) + \sum_{j=1}^m b_j(t)g_j(x(t - \tau_j)) + g(t, x)\omega'(t) = 0$$

Diferansiyel Denkleminin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı

Kararlılık sonucu vermeden önce aşağıdaki kabuller yapılacaktır.

$\delta_j, \beta_j, \mu_j, a_0, a_1, \alpha, f_0, \alpha_i, \rho_j$ ve C pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki koşulların sağladığını varsayalım:

$$(i) \frac{1}{2} < a_0 \leq a(t) \leq a_1, \quad a'(t) \leq \alpha, \quad \forall t \in \mathcal{R}^+,$$

$$0 < \delta_j \leq b_j(t) \leq \beta_j, \quad b'_0(t) \leq b'_j(t) \leq \mu_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m);$$

$$(ii) 1 \leq f(x, y) \leq f_0, \quad x f_y(x, y) \geq 0, \quad \forall t \in \mathcal{R}^+, \quad \forall x, y \in \mathcal{R};$$

$$(iii) g_j(0) = 0, \quad \frac{g_j(x)}{x} \geq \alpha_j, \quad \forall x \neq 0, \quad x \in \mathcal{R}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m),$$

$$0 < g'_j(x) \leq \rho_j, \quad \forall t \in \mathcal{R}^+, \quad \forall x, y \in \mathcal{R};$$

$$(iv) g(t, 0) = 0, \quad g(t, x) \leq Cx, \quad \forall t \in \mathcal{R}^+, \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

Bu şartlar aşağıdaki teoremi ispatlamamıza yardımcı olur.

Teorem 6.1.1 (Tunç, 2019)

(i) ve (ii) koşulların sağıladığını varsayalım. Bu takdirde

$$\tau_1 < \min\left[\frac{A_0 - 2^{-1} - \alpha f_0 - C^2 - B_0}{C_0}, \frac{2a_0 - 1}{5C_0}\right]$$

ve

$$\begin{aligned} C_0 > 0, \quad 2a_0 - 1 > 0, \quad A_0 - 2^{-1} - \alpha f_0 - C^2 - B_0 > 0, \\ \tau = \max_{1 \leq j \leq m} \tau_j, \quad \sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) + a_0 > 1, \quad A_0 = \sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j), \\ B_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \mu_j), \quad C_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j) \end{aligned}$$

olmak kaydıyla (6.1) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

İspat (Tunç, 2019)

(6.1) denklemini sistem olarak

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -a(t)f(x, y)y - \sum_{j=0}^m b_j(t)g_j(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m b_j(t) \int_{t-\tau_j}^t g_j'(x(s))y(s)ds - g(t, x)\omega'(t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$V(t, x, y)$ Lyapunov –Krasovskii fonksiyoneli olmak üzere, bu fonksiyonel

$$\begin{aligned} V(t, x, y) &= 2 \sum_{j=0}^m b_j \int_0^x g_j(s)ds + y^2 \\ &\quad + a(t) \int_0^x f(s, 0)sds + xy \\ &\quad + \sum_j^m \lambda_j \int_{-\tau_j}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta)d\theta ds \end{aligned} \quad (6.3)$$

ile tanımlansın. Burada $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_m > 0$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ sonradan belirlenecek olan pozitif sabitlerdir.

Teorem 6.1.1'in (ii), (iii) şartları ve (6.3) eşitliğı kullanılır ise,

$$\begin{aligned} &2 \sum_{j=0}^m b_j \int_0^x g_j(s)ds \\ &= 2 \sum_{j=0}^m b_j \int_0^x \frac{g_j(s)}{s} sds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) x^2, \\ a(t) \int_0^x f(s, 0) ds \\ &\geq \frac{1}{2} a_0 x^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler kullanılır ise,

$$\begin{aligned} V(t, x, y) &\geq \sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) x^2 + \frac{1}{2} a_0 x^2 + y^2 + xy \\ &= [\sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) + a_0 - 1] x^2 + \left[x + \frac{1}{2} y \right]^2 + \frac{3}{4} y^2 \\ &\geq [\sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) + a_0 - 1] x^2 + \frac{3}{4} y^2 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) + a_0 > 1$$

olması nedeniyle, böylece

$$D_1 = \min \left[\sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) + a_0 - 1, \frac{3}{4} \right]$$

olarak alındığında, buna bağlı olarak

$$V(t, x, y) \geq D_1 (x^2 + y^2), \quad D_1 > 0, \quad D_1 \in R \quad (6.4)$$

elde edilir. Ayrıca (i), (iii) şartları, $V(t, x, y)$ Lyapunov –Krasovskii fonksiyoneli ve $2|ab| \leq a^2 + b^2$ eşitsizliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} &2 \sum_{j=0}^m b_j \int_0^x g_j(s) ds \\ &= 2 \sum_{j=0}^m b_j \int_0^x \frac{g_j(s)}{s} s ds \\ &\leq \sum_{j=0}^m (\beta_j \rho_j) x^2, \\ xy &\leq \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2, \\ a(t) \int_0^x f(s, 0) ds &\leq \frac{1}{2} (a_1 f_0) x^2, \\ \lambda_j \int_{-\tau_j}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds &= \lambda_j \int_{t-\tau_j}^0 (\theta - t - \tau_j) y^2(\theta) d\theta \\ &\leq \lambda_j y^2 \int_{t-\tau_j}^t (\theta - t - \tau_j) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_j \tau_j) y^2 \end{aligned}$$

olarak düzenlenebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{-\tau_j}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \\ &= \frac{1}{2} y^2 \sum_{j=1}^m (\lambda_j \tau_j) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. O zaman, bu ifadelerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} V(t, x, y) &\leq \sum_{j=0}^m (\beta_j \rho_j) x^2 + y^2 \\ &+ \frac{1}{2} (a_1 f_0) x^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \\ &+ \frac{1}{2} y^2 \sum_{j=1}^m (\lambda_j \tau_j) \end{aligned} \quad (6.5)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$D = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_j \tau_j)$$

olsun.

$$D_2 = \max \left[\sum_{j=0}^m (\beta_j \rho_j) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (a_1 f_0), \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_j \tau_j) + \frac{3}{2} \right]$$

olarak alındığında, buna bağlı olarak

$$V(t, x, y) \leq D_2 (x^2 + y^2) + D y^2, \quad D_2, D > 0, \quad D_2, D \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

elde edilir. Burada (6.4), (6.6) eşitsizlikleri birleştirildiğinde

$$D_1 (x^2 + y^2) \leq V(t, x, y) \leq D_2 (x^2 + y^2) + D y^2 \quad (6.7)$$

elde edilir.

(6.3) Lyapunov–Krasovskii fonksiyonelinin (6.2) sistemi boyunca türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x, y) &= -2a(t)f(x, y)y^2 + a'(t) \int_0^x f(s, 0) ds \\ &+ a(t)f(x, 0)xy + y^2 - a(t)f(x, y)xy \\ &- \sum_{j=0}^m b_j(t) g_j(x)x + g^2(t, x) \\ &+ x \sum_{j=0}^m b_j(t) \int_{t-\tau_j}^t g'_j(x(s))y(s) ds \\ &+ 2y \sum_{j=0}^m b_j(t) \int_{t-\tau_j}^t g'_j(x(s))y(s) ds \\ &+ 2 \sum_{j=0}^m b'_j(t) \int_0^x g_j(s) ds \\ &+ \sum_{j=1}^m (\lambda_j \tau_j) y^2 \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{t-\tau_j}^t y^2(s) ds$$

elde edilir. Burada (i), (iii) şartları ve $2|ab| \leq a^2 + b^2$ eşitsizliği kullanıldığında $\frac{d}{dt} V(t, x, y)$ 'deki bazı terimler için aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$2a(t)f(x, y)y^2 \geq 2a_0y^2,$$

$$a'(t) \int_0^x f(s, 0) s ds \leq \frac{1}{2} (\alpha f_0) x^2,$$

$$a(t)f(x, y)xy - a(t)f(x, 0)xy$$

$$= a(t) \left[\frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} \right] xy^2$$

$$= a(t) x f_y(x, y) y^2 \geq 0,$$

$$g^2(t, x) \leq C^2 x^2,$$

$$\sum_{j=0}^m b_j(t) g_j(x) x$$

$$= \sum_{j=0}^m b_j(t) \frac{g_j(x)}{x} x^2$$

$$\geq \sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) x^2, (x \neq 0)$$

$$x \sum_{j=1}^m b_j(t) \int_{t-\tau_j}^t g'_j(x(s)) y(s) ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) x^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j) \int_{t-\tau_j}^t y^2 ds,$$

$$2y \sum_{j=1}^m b_j(t) \int_{t-\tau_j}^t g'_j(x(s)) y(s) ds$$

$$\leq \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) y^2$$

$$+ \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j) \int_{t-\tau_j}^t y^2 ds,$$

$$b'_0(t) \int_0^x g_0(s) ds \leq 0,$$

$$b'_0(t) \int_0^x g_0(s) ds + \sum_{j=1}^m b'_j(t) \int_0^x g_j(s) ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \mu_j) x^2.$$

Yukarıda elde edilen sonuçlar $\frac{d}{dt} V(t, x, y)$ türev ifadesinde kullanıldığında

$$\frac{d}{dt} V(t, x, y) \leq -\sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) x^2 + \frac{1}{2} (\alpha f_0) x^2$$

$$\begin{aligned}
& + C^2 x^2 - a(t) x f_y(x, y) y^2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m (\rho_j \mu_j) x^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) y^2 \\
& - 2a_0 y^2 + y^2 + \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) y^2 \\
& + \sum_{j=1}^m (\lambda_j \tau_j) y^2 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j) \int_{t-\tau_j}^t y^2(s) ds \\
& - \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{t-\tau_j}^t y^2(s) ds \\
\leq & - \left[\sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) - \frac{1}{2} (\alpha f_0) - C^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m (\rho_j \mu_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) \right] x^2 \\
& - [2a_0 - 1 - \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) - \sum_{j=1}^m (\lambda_j \tau_j)] y^2 \\
& + \sum_{j=1}^m \left\{ \left[\frac{3}{2} (\rho_j \beta_j) - \lambda_j \right] \int_{t-\tau_j}^t y^2(s) ds \right\}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Ayrıca, $\lambda_j = \frac{3}{2} (\rho_j \beta_j)$ seçilirse, o zaman

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t, x, y) \leq & - \left[\sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j) - \frac{1}{2} \alpha f_0 - C^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m (\rho_j \mu_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) \right] x^2 \\
& - \left[2a_0 - 1 - \frac{5}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j \tau_j) \right] y^2
\end{aligned}$$

bulunur. İlave olarak

$$\begin{aligned}
A_0 & = \sum_{j=0}^m (\delta_j \alpha_j), B_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \mu_j), \\
C_0 & = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\rho_j \beta_j), \tau = \max_{1 \leq j \leq m} \tau_j
\end{aligned}$$

alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t, x, y) \leq & - [(A_0 - 2^{-1} - \alpha f_0 - C^2 - B_0) - C_0 \tau] x^2 \\
& - [(2a_0 - 1) - 5C_0 \tau] y^2
\end{aligned}$$

elde edilir. x^2, y^2 terimlerinin katsayılarının negatif olması için

$$\tau < \min \left[\frac{A_0 - 2^{-1} - \alpha f_0 - C^2 - B_0}{C_0}, \frac{2a_0 - 1}{5C_0} \right], \quad \tau > 0$$

olması gerektiği açıktır. Yeterince küçük bir K pozitif sayısı için

$$\frac{d}{dt} V(t, x, y) \leq -K(x^2 + y^2), \quad K > 0, K \in \mathbb{R} \quad (6.8)$$

elde edilir. Yukarıdaki değerlendirmeler dikkate alındığında $V(t, x, y)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin *Teorem 4.8*'in şartlarına uygun olarak alt ve üst sınırlara

sahip olduğu, bu fonksiyonelinin sistem boyunca (6.8)'den türevinin negatif olduğu görülür. Buradan *Teorem 4.8*'in tüm şartlarının sağlandığı görülür. Bu nedenle (6.1) denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır. Böylece *Teorem 6.1.1* ispatlanmış oldu.

Örnek 6.1.1 (Tunç, 2019)

τ_1 ve τ_2 sabit gecikmeler olmak üzere ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli stokastik

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + (4 + \exp(2^{-1}t)) \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{dx}{dt} \\ & + \left(1 + \frac{1}{1+t^4}\right) \left(\frac{x}{1+x^4} + x\right) \\ & + \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) \left(\frac{x(t-\frac{1}{10})}{x^2(t-\frac{1}{10})+1} + x\left(t - \frac{1}{10}\right)\right) \\ & + 2 \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) x \left(1 - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{xt}{t^2+1}\right) \omega'(t) = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

diferansiyel denklemini alalım. Görüldüğü üzere bu denklem (6.1) denkleminin özel bir halidir. Burada (6.9) gecikmeli stokastik diferansiyel denklemi, sistem olarak aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dx}{dt} &= -(4 + \exp(2^{-1}(t))) \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) y \\ & - \left(1 + \frac{1}{1+t^4}\right) \left(\frac{x}{1+x^4} + x\right) \\ & - \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) \left(\frac{x}{1+x^2} + x\right) - 2 \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) x \\ & + \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) \int_{t-\frac{1}{10}}^t \left[\frac{1-x^2(s)}{(x^2(s)+1)^2} + 1\right] y(s) ds \\ & + 2 \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) \int_{t-\frac{1}{100}}^t y(s) ds - \left(\frac{xt}{t^2+1}\right) \omega'(t). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Burada

$$\tau_1 = \frac{1}{10} \text{ ve } \tau_2 = \frac{1}{100}$$

dir. Ayrıca (6.2) ile (6.10) karşılaştırıldığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$a(t) = 4 + \exp(2^{-1}t), t \geq 0,$$

$$a_0 = 4 \leq a(t) = 4 + \exp(-2^{-1}t) \leq 5 = a_1,$$

$$\delta_0 = 1 \leq b_0(t) = 1 + \frac{1}{1+t^4} \leq 2 = \beta_0,$$

$$\delta_1 = 1 \leq b_1(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2} \leq 2 = \beta_1,$$

$$\delta_2 = 1 \leq b_2(t) = 1 + \frac{1}{1+t} \leq 2 = \beta_2.$$

Bu ifadelerin türevleri alındığında

$$a'(t) = -\frac{1}{2} \exp(-2^{-1}t) \leq \frac{1}{1000000}$$

$$b'_0(t) = -\frac{2t^3}{(t^4+1)^2} \leq \frac{1}{1000}, \quad t \geq 0,$$

$$b'_1(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2} \leq \frac{1}{1000}, \quad t \geq 0,$$

$$b'_2(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{1000}, \quad t \geq 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$g_0(x) = \frac{x}{1+x^4} + x, \quad g_0(0) = 0,$$

$$\frac{g_0(x)}{x} = 1 + \frac{1}{1+x^4} \geq 1 = \alpha_0,$$

$$g_1(x) = \frac{x}{1+x^2} + x, \quad g_1(0) = 0,$$

$$\frac{g_1(x)}{x} = 1 + \frac{1}{1+x^2} \geq 1 = \alpha_1,$$

$$g_2(x) = 2x = \alpha_2, \quad g_2(0) = 0$$

İfadelerin türevleri alındığında

$$g'_1(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + 1 \leq 2 = \rho_1,$$

$$g'_2(x) = 2 = \rho_2$$

olduğu görülür.

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{1+x^2}, \quad f_y(x, y) = 0,$$

$$1 \leq f(x, y) = 1 + \frac{1}{1+x^2} \leq 2 = f_0,$$

$$g(t, x) = \frac{tx}{1+t^2}, \quad g^2(t, x) = \frac{x^2 t^2}{(1+t^2)^2},$$

$$g^2(t, x) \leq \frac{x^2}{4}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad t \in R^+$$

yazılabilir. Burada

$$\tau < \min \left[\frac{4-10^{-6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{250}}{4}, \frac{7}{20} \right] = \min \left[\frac{749999}{1000000}, \frac{7}{20} \right] = \frac{7}{20}$$

olduğu görülür. Böylece *Teorem 6.1.1*'in tüm şartları sağlanır. Sonuç olarak (6.9) denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.





7. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN SABİT GECİKMELİ STOKASTİK BİR DİFERANSİYEL DENKLEMDE ÇÖZÜMLERİN SINIRLILIK VE KARARLILIĞI

Ademola ve ark. (2019) lineer olmayan ikinci mertebeden sabit gecikmeli stokastik

$$\begin{aligned} x''(t) + \psi(t)f(x(t), x'(t))x'(t) + g(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) \\ = p(t, x(t), x'(t), x(t - \tau)) \end{aligned} \quad (7.1)$$

diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $t \in R^+$, $R^+ = [0, \infty)$, $x \in R$, $\sigma > 0$ ve τ pozitif sabit gecikme olmak üzere ψ, f, g, p sırasıyla $R^+, R^2, R, R^+ \times R^3$ de sürekli fonksiyonlar ve g fonksiyonu ise türevlenebilirdir. Bu denklemdeki fonksiyonların sürekli olması, verilen (7.1) denklemin çözümlerinin varlığını garanti eder. Ayrıca bu fonksiyonlar t hariç bağlı buldukları değişkenlere göre Lipschitz şartını sağlamaktadır. Bu şart ise, (7.1) denkleminin çözümlerin tekliğini garanti etmektedir.

(7.1) denklemini sistem olarak

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -\psi(t)f(x(t), y(t))y(t) - g(x(t)) \\ &\quad - \sigma x(t)\omega'(t) + p(t, x(t), y(t), x(t - \tau)) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t g'(x(s))y(s)ds \end{aligned} \quad (7.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} 7.1. \quad x''(t) + \psi(t)f(x(t), x'(t))x'(t) + g(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) \\ = p(t, x(t), x'(t), x(t - \tau)) \end{aligned}$$

Denkleminin Çözümlerinin Sınırlılık ve Kararlılık Analizi

Teorem 7.1.1 (Ademola ve ark., 2019)

$a, b, B, G, P, \sigma, \psi_0$ pozitif sabitler olmak üzere (7.2) sistemindeki f, g, ω, ψ ve p fonksiyonlarına ait şartlara ilave olarak aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- (i) $a \leq f(x, y), \psi_0 \leq \psi(t), \forall t \geq 0, \forall x, y \in R$;
- (ii) $bx \leq g(x) \leq Bx, |g'(x)| \leq G, \forall x \neq 0, x \in R$;
- (iii) $\sigma^2(b + 1) < ab, \psi_0^{-1} < b + 1$;
- (iv) $|p(t, x, y, x(t - \tau))| \leq P, 0 \leq P < \infty, \forall t \geq 0, \forall x, y, x(t - \tau) \in R$.

Bu takdirde

$$\tau < \min \left\{ \frac{ab - (b+1)\sigma^2}{aG}, \frac{a((b+1)\psi_0 - 1)}{(a+2(b+1))G} \right\} \quad (7.3)$$

olmak kaydıyla, (7.2) gecikmeli stokastik diferansiyel denklem sisteminin her (x, y) çözümü stokastik sınırlıdır.

Bu teoremi ispatlamak için

$$\begin{aligned} 2V(t, x, y) &= (a^2 + b^2)x^2 + (b + 1)y^2 + xg(x) \\ &+ 2axy + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \lambda y^2(\theta) d\theta ds \end{aligned} \quad (7.4)$$

Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli kullanılacaktır. Buradan a, b pozitif sabitler, $\lambda > 0$ sonradan belirlenecek olan bir sabit ve $\tau > 0$ ise, sabit bir gecikmedir.

Teorem 7.1.1 ispatını vermeden önce ispatta kullanılacak aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 7.1.2 (Ademola ve ark., 2019)

Teorem 7.1.1 in şartlarına bağlı olarak $D_0 = D_0(a, b)$ ve $D_1 = D_1(a, b, B, \lambda, \tau)$ pozitif sabitleri vardır öyle ki her $t \geq 0$ ve x, y için

$$D_0(x^2(t) + y^2(t)) \leq V(t, x, y) \leq D_1(x^2(t) + y^2(t)) \quad (7.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada D_1, D_2 pozitif sabitler olmak üzere ayrıca, (7.4) Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin (7.2) denklem sistemi boyunca türevi alınıp ve (4.5) Ito formülü kullanılır ise *Teorem 7.1.1*'in şartlarına bağlı olarak $D_2 = D_2(a, b, G, \sigma, \psi_0)$ ve $D_3 = D_3(a, b)$ pozitif sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} LV(t, x, y) &\leq -D_2(x^2(t) + y^2(t)) \\ &+ D_3(|x(t)| + |y(t)|) \times |p(t, x, y, x(t - \tau))| \end{aligned} \quad (7.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 6.1.2 (Ademola ve ark., 2019)

(x, y) ifadesi (7.2) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü olsun. (7.4) Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli ele alındığında

$$V(t, 0, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (7.7)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. İlave olarak bu fonksiyonel

$$V(t, x, y) = \frac{1}{2}(b^2 + x^{-1}g(x))x^2 + \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{2}(ax + y)^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\tau}^0\int_{t+s}^t\lambda y^2(\theta)d\theta ds \quad (7.8)$$

olarak düzenlenebilir. Bu fonksiyoneldeki çift katlı integral negatif olmadığından ve $\forall x \neq 0$ için $g(x) \geq bx$ olduğundan,

$$V(t, x, y) \geq \frac{1}{2}(b^2x^2 + bx^2) + \frac{1}{2}by^2$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak bu son eşitsizlikten bir $\delta_0 = \delta_0(a, b)$ pozitif sabiti bulunabilir öyle ki $\forall t \geq 0$ ve $\forall x, y$ için

$$V(t, x, y) \geq \delta_0(x^2 + y^2) \quad (7.9)$$

olur. Burada

$$\delta_0 := \frac{1}{2}\min\{b^2 + b, b\}$$

dir. Yukarıdaki işlemler göz önüne alındığında $V(t, x, y)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin pozitif tanımlı olduğu açıktır. Ayrıca burada (7.9) eşitsizliğinden

$$V(t, x, y) = 0 \text{ olması için gerek ve yeter şart}$$

$$x^2 + y^2 = 0 \quad (7.10)$$

ve

$$V(t, x, y) > 0 \text{ olması için gerek ve yeter şart}$$

$$x^2 + y^2 \neq 0 \quad (7.11)$$

dır. Ayrıca

$$x^2 + y^2 \rightarrow \infty \text{ ise, } V(t, x, y) \rightarrow \infty \quad (7.12)$$

dur.

Öte yandan (7.4) ile verilen Lyapunov- Krasovskii fonksiyoneli göz önüne alındığında, $\forall x \neq 0$ ve $g(x) \leq Bx$ şartı ve $2xy \leq x^2 + y^2$ eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} 2V(t, x, y) &\leq (a^2 + b^2)x^2 + (b + 1)y^2 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{g^2(x)}{2}\right) \\ &\quad + a(x^2 + y^2) + \int_{-\tau}^0\int_{t+s}^t\lambda y^2(\theta)d\theta ds \\ &\leq (a^2 + b^2)x^2 + (b + 1)y^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{B^2}{2}\right)x^2 \\ &\quad + a(x^2 + y^2) + \int_{-\tau}^0\int_{t+s}^t\lambda y^2(\theta)d\theta ds \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\delta_1 = \delta_1(a, b, B, \lambda, \tau)$ pozitif sabiti vardır öyle ki $\forall t \geq 0$ ve $\forall x, y$ için

$$V(t, x, y) \leq \delta_1(x^2 + y^2) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \lambda y^2(\theta) d\theta ds \quad (7.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Buna bağlı olarak da

$$\delta_0(x^2 + y^2) \leq V(t, x, y) \leq \delta_1(x^2 + y^2) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \lambda y^2(\theta) d\theta ds \quad (7.14)$$

olduğu görülür.

Şimdi ise verilen Lyapunov- Krasovskii fonksiyonelinin Ito formülünü kullanarak (7.2) denklem sisteminin çözümleri boyunca türevi alındığında

$$\begin{aligned} LV(t, x, y) = & -ax^{-1}g(x)x^2 - [(b+1)\psi(t)f(x, y) - a]y^2 \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 W_i + (b+1)\sigma^2 x^2 + W_3 \\ & + 2[ax + (b+1)y] \times p(t, x, y, x(t-\tau)) \\ & + \lambda \tau y^2 - \lambda \int_{t-\tau}^t y^2(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (7.15)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} W_1 := & ax^{-1}g(x)x^2 + 4[a\psi(t)f(x, y) - (a^2 + b^2)]xy \\ & + [(b+1)\psi(t)f(x, y) - a]y^2 \\ W_2 := & ax^{-1}g(x)x^2 + 2[(2b+1)x^{-1}g(x) - g'(x)]xy \\ & + [(b+1)\psi(t)f(x, y) - a]y^2 \end{aligned}$$

ve

$$W_3 := 2[ax + (b+1)y] \int_{t-\tau}^t g'(x(\mu))y(\mu) d\mu$$

dir.

Aşağıdaki

$$\begin{aligned} & 4[a\psi(t)f(x, y) - (a^2 + b^2)]^2 \\ & < ax^{-1}g(x)[(b+1)\psi(t)f(x, y) - a] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & [(2b+1)x^{-1}g(x) - g'(x)]^2 \\ & < ax^{-1}g(x)[(b+1)\psi(t)f(x, y) - a] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri göz önüne alındığında, $\forall t \geq 0$ ve $\forall x, y$ için

$$W_1 = W_2 \geq [\sqrt{ax^{-1}g(x)}|x| - \sqrt{[(b+1)\psi(t)f(x,y) - a]|y|}]^2 \quad (7.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\forall x$ için $g'(x) \leq G$ olduğundan $\forall t \geq 0$ ve $\forall x, y$ için

$$\begin{aligned} W_3 &\leq G\tau(ax^2 + (b+1)y^2) \\ &\quad + (a+b+1)G \int_{t-\tau}^t y^2(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (7.17)$$

olduğu açıktır. (7.16) ve (7.17) ile verilen eşitsizlikler (7.15)'de kullanıldığında $\forall t \geq 0$ ve $\forall x, y$ için

$$\begin{aligned} LV(t, x, y) &\leq -ax^{-1}g(x)x^2 - [(b+1)\psi(t)f(x,y) - a]y^2 \\ &\quad - [\lambda - (a+b+1)G] \int_{t-\tau}^t y^2(\mu) d\mu \\ &\quad + (b+1)\sigma^2x^2 + G\tau[ax^2 + (b+1)y^2] + \lambda\tau y^2 \\ &\quad + 2[ax + (b+1)y]p(t, x, y, x(t-\tau)) \end{aligned} \quad (7.18)$$

bulunur. $\lambda := (a+b+1)G > 0$ olarak seçilsin. Buna bağlı olarak (7.18) eşitsizliği *Teorem 7.1.1*'in şartlarıyla birlikte göz önüne alınarak her $t \geq 0$ ve $\forall x, y$ için

$$\begin{aligned} LV(t, x, y) &\leq -\delta_2(x^2 + y^2) \\ &\quad + \delta_3(|x| + |y|)|p(t, x, y, x(t-\tau))| \end{aligned} \quad (7.19)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \delta_2 &:= \min\{[ab - (b+1)\sigma^2] - aG\tau, a[(b+1)\psi_0 - 1] \\ &\quad - [a + 2(b+1)G\tau]\} \end{aligned}$$

ve

$$\delta_3 := 2\max\{a, b+1\}$$

dir. Buna bağlı olarak *Lemma 7.1.2*'nin ispatı tamamlanır.

Teorem 7.1.1'in İspatı (Ademola ve ark., 2019)

(x, y) ifadesi (7.2) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü olsun. *Teorem 7.1.1*'i ispatlamak için

$$\begin{aligned} E^{x_0}||x(t, x_0)|| &\leq \{V(t_0, x_0)e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} \\ &\quad + \int_{t_0}^t (\gamma\alpha(u) + \beta(u))e^{-\int_u^t \alpha(s)ds} du\}^{1/p} \end{aligned} \quad (7.20)$$

ve

$$\int_{t_0}^t (\gamma\alpha(u) + \beta(u))e^{-\int_u^t \alpha(s)ds} du \leq M, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

şartlarının sağlandığının gösterilmesi gerekmektedir. Bunu göstermek için (7.4) Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin (7.2) sistemi boyunca türevi alındığında ve (4.5) Ito formülü kullanıldığında teoremin şartlarına bağlı olarak bir $\delta_4 = \delta_4(a, b, \sigma)$ pozitif sabiti bulunabilir öyle ki $\forall t \in R^+, (x, y) \in R^2$ için

$$|V_{x_i}(t, x, y)G_{ik}(t, x, y)| \leq \delta_4(x^2 + y^2), 1 \leq i \leq 2, 1 \leq k \leq 2 \quad (7.21)$$

olur. Burada

$$\delta_4 := \sigma \max\{2a + b + 1, b + 1\} = (2a + b + 1)\sigma$$

dir. (7.21) eşitsizliği dikkate alındığında, $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$ ve $\sigma(t) = \delta_4(x^2 + y^2)$ olmak üzere

$$|V_{x_i}(t, x, y)G_{ik}(t, x, y)| < \sigma(t), \quad x \in R^n \quad (7.22)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, herhangi bir $0 \leq t_0 \leq T < \infty$ sabiti için

$$\int_{t_0}^T \delta_4^2(x^2 + y^2)^2 dt < \infty \quad (7.23)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$\int_{t_0}^T \sigma^2(t) dt < \infty \quad (7.24)$$

eşitsizliğin sağlandığı görülür. Bu son iki eşitsizlik *Lemma4.13*'ün (i) ve (iii) şartlarının sağlandığını gösterir.

İspatın geri kalan kısmı ve (7.20) eşitsizliğin sağlanması için Ademola ve ark. (2019)'a başvurulabilir.

Teorem 7.1.3 (Ademola ve ark., 2019)

Teorem 7.1.1'in tüm şartlarının ve (7.3) eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde (7.2) stokastik gecikmeli diferansiyel denkleminin tüm çözümleri stokastik sınırlıdır.

İspat 7.1.3 (Ademola ve ark., 2019)

(x, y) ifadesi (7.2) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü olsun. *Teorem 7.1.1*'in ispatından (4.6) ifadesinin sağlandığı kolaylıkla görülür. *Lemma7.1.2* ispatında geçen (7.9) eşitsizliği dikkate alındığında *Lemma4.14*'ün (i) şartının sağlandığı kolaylıkla görülür. Ayrıca

$$V(t, x, y) \leq \delta_1(x^2 + y^2)$$

ve

$$LV(t, x, y) \leq -\delta_5(x^2 + y^2) + \delta_6$$

eşitsizlikleri yardımıyla $\forall t \in R^+$, $(x, y) \in R^2$ için

$$LV(t, x, y) \leq -\delta_1^{-1}\delta_5 V(t, x, y) + \delta_6 \quad (7.25)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik *Lemma4.14*'ün (ii) şartının $\alpha(t) := \delta_1^{-1}\delta_5$, $q = 1$ ve $\beta(t) = \delta_6$ olmak üzere sağlandığını gösterir. $q = 1$ olması nedeniyle *Lemma4.14*'ün (iii) şartı $\gamma = 0$ için elde edilir. Böylece *Lemma4.14*'ün tüm şartlarının sağlandığı sonucuna varılır. Ayrıca $M := \delta_1\delta_5^{-1}\delta_6$ olmak üzere, $\forall t \geq t_0 \in R^+$ için

$$\int_{t_0}^t [(\gamma\alpha(u) + \beta(u)) e^{-\int_{t_0}^u \alpha(s)ds}] du \leq \delta_1\delta_5^{-1}\delta_6 \quad (7.26)$$

olur. Bu ise verilen teoremin ispatını tamamlar. *Sonuç 4.15*'den dolayı (7.2) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin tüm çözümleri stokastik sınırlıdır. Buna bağlı olarak *Teorem 7.1.3*'ün ispatı tamamlanır.

(7.2) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminde bulunan $p(t, x, x', x(t - \tau)) = 0$ alınsın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -\psi(t)f(x(t), y(t))y(t) \\ &\quad -g(x(t)) - \sigma x(t)\omega'(t) \\ &\quad + \int_{t-h}^t g'(x(s))y(s)ds \end{aligned} \quad (7.27)$$

elde edilir.

Teorem 7.1.4 (Ademola ve ark., 2019)

Teorem 7.1.1'in (i) ve (iii) şartlarının sağladığını varsayalım. Bu takdirde

$$\tau < \min \left\{ \frac{ab - (b+1)\sigma^2}{aG}, \frac{a[(b+1)\psi_0 - 1]}{[a+2(b+1)]G} \right\}$$

olmak kaydıyla, (7.27) stokastik gecikmeli diferansiyel denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

Burada bu teoremin ispatı verilmeyecektir. Bu teoremin ispatı için Ademola ve ark. (2019)'a başvurulur.

Teorem 7.1.5 (Ademola ve ark., 2019)

b ve G nin pozitif sabitler olsun. Eğer *Teorem 7.1.1.*'in (i) ve (iii) şartlarına ilaveten $\forall x \neq 0$ için $g(x) \geq bx$ ve $|g'(x)| \leq G$ ise, bu takdirde (7.3) şartı sağlamak kaydıyla (7.27) stokastik gecikmeli diferansiyel denkleminin sıfır çözümü stokastik kararlıdır. Burada bu teoremin ispatı verilmeyecektir. Bu teoremin ispatı için Ademola ve ark. (2019)'a başvurulur.

Örnek 7.1.1 (Ademola ve ark., 2019)

Aşağıda verilen ikinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli stokastik

$$\begin{aligned} x'' + (3 + \cos 4t) \left(\frac{4+x^2+(x')^2}{1+x^2+(x')^2} \right) x' \\ + [2x(t-\tau) + \frac{1}{2} \sin(x(t-\tau))] + \sigma x(t) \omega'(t) \\ = \frac{2+t^2+x^2+(x')^2+|x(t-\tau)|}{1+t^2+x^2+(x')^2|x(t-\tau)|} \end{aligned} \quad (7.28)$$

diferansiyel denklemini alalım. Burada $\sigma > 0$ bir sabit ve $\tau > 0$ ise daha sonra belirlenecek sabit bir gecikmedir.

Eğer $x' = y$ dönüşüm yapılır ise, o zaman (7.28) denklemden

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -(3 + \cos 4t) \left(\frac{4+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) y - [2x + \frac{1}{2} \sin x] \\ &\quad - \sigma x(t) \omega'(t) + \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t [4 + \cos x(s)] ds \\ &\quad + \frac{2+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|}{1+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|} \end{aligned} \quad (7.29)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (7.29) sistemi ile (7.2) diferansiyel denklem sistemi karşılaştırıldığında aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 3 + \cos 4t \geq \psi_0 = 2 > 0, \quad \forall t \in R^+; \\ f(x, y) &:= 3 + \frac{1}{1+x^2+y^2} \geq a = 3 > 0, \quad \forall x, y \in R; \\ g(x) &= 2x + \frac{\sin x}{2}, \\ g(0) &= 0, \frac{g(x)}{x} = 2 + \frac{\sin x}{2x}, \quad G(x) = \frac{\sin x}{2x}, \quad \forall x \neq 0; \\ 0 < 2 = b &\leq \frac{g(x)}{x} = 2 + \frac{\sin x}{2x} \leq B = 2.5. \end{aligned}$$

g fonksiyonunun türevi alındığında

$$g'(x) := 2 + \frac{\cos x}{2}$$

olur. $\forall x$ için

$$|g'(x)| \leq G = 2.5$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$p(t, x, y, x(t - \tau)) := 1 + \frac{1}{1+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|}$$

olduğu görülür.

$$|p(t, x, y, x(t - \tau))| \leq 1 + 1 = 2 = P < \infty$$

olur.

Teorem 7.1.1'in (iii) şartındaki a, b, G, ψ_0 sabitlerin bulunmuş olan değerleri kullanarak $\sigma < \sqrt{2}$ olduğu görülür. $\sigma = 1.3$ alalım.

$$(b + 1)\psi_0 > 1$$

dir. (7.3) eşitsizliği tarafından tanımlanan τ 'nin değeri

$$\tau < \min\{1.24, 0.67\} = 0.67 \approx 0.7$$

olarak hesaplanır ve buradan

$$\tau = 0.1$$

alınsın.

Böylece verilen denklem için *Teorem 7.1.1*'in bütün şartlarının sağlandığı görülür. Bu nedenle (7.29) diferansiyel sisteminin tüm çözümleri düzgün stokastik sınırlıdır. Buna bağlı olarak da (7.28) denkleminin tüm çözümleri de düzgün stokastik sınırlı olur. İlave olarak (7.28) denkleminin çözümlerinin düzgün stokastik sınırlı olması aşağıda verilen Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli yardımıyla gösterilebilir:

$$\begin{aligned} 2V(t, x, y) &= 13x^2 + 3y^2 + \left(2 + \frac{\sin x}{2x}\right)x^2 + 6xy \\ &+ 15 \int_{-0.1}^0 \int_{t+s}^t y(\theta) d\theta ds. \end{aligned}$$

Açıkça

$$V(t, 0, 0) = 0 \tag{7.30}$$

dır.

$$\begin{aligned} 2V(t, x, y) &= 13x^2 + 3y^2 + \left(2 + \frac{\sin x}{2x}\right)x^2 + 6xy \\ &+ 15 \int_{-0.1}^0 \int_{t+s}^t y(\theta) d\theta ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 12x^2 + 3y^2 + 6xy \\
&\quad + 15 \int_{-0.1}^0 \int_{t+s}^t y(\theta) d\theta ds \\
&= 3x^2 + 2y^2 + [3x + y]^2 \\
&\quad + 15 \int_{-0.1}^0 \int_{t+s}^t y(\theta) d\theta ds \\
&\geq 3x^2 + 2y^2
\end{aligned} \tag{7.31}$$

elde edilir.

$$\int_{-0.1}^0 \int_{t+s}^t y(\theta) d\theta ds = \frac{600t^2 - 40t + 1}{120000}$$

ifadesindeki çift katlı integraller negatif değildir. Ayrıca $\forall x \neq 0$ için

$$2 + \frac{\sin x}{2x} \geq 2$$

olduğundan

$$\delta_0 := \frac{1}{2} \min\{b^2 + b + \min\{a, 1\}, b + \min\{a, 1\}\}$$

olmak üzere $\forall t \in R^+, X_t = (x, y) \in R^2$ için

$$V(t, x, y) \geq \delta_0(x^2 + y^2) \tag{7.32}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$V(t, x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \tag{7.33}$$

$$V(t, x, y) > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0 \tag{7.34}$$

ve

$$x^2 + y^2 \rightarrow +\infty, V(t, x, y) \rightarrow +\infty \tag{7.35}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\forall x \neq 0$ için

$$2 + \frac{\sin x}{2x} \leq 2.5$$

olduğundan, $\tau = 0.1$, $\lambda = 15$ ve

$$\delta_1 := \frac{1}{2} \max\{a^2 + b^2 + a + B, a + b + \lambda\tau + 1\}$$

ifadesi dikkate alındığında $\delta_1 = 9.3$ olmak üzere $\forall t \in R^+, (x, y) \in R^2$ için

$$1.5(x^2 + y^2) \leq V(t, x, y) \leq 9.3(x^2 + y^2) \tag{7.36}$$

elde edilir. (4.5) Ito formülünü kullanılarak (7.3) Lyapunol-Krasovskii fonksiyonelinin (7.29) diferansiyel denklem sistemi boyunca türevi alınarak

$$\begin{aligned}
LV(t, x, y) = & -6[(3 + \cos 4t)\left(\frac{4+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) - 1]y^2 \\
& -4[3(3 + \cos 4t)\left(\frac{4+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) - 13]xy \\
& -2[3(2 + \frac{\sin x}{2x}) - (2 + \frac{\cos x}{2})]xy \\
& +6(x + y) \int_{t-0.1}^t \left(2 + \frac{\cos x}{2}\right) ds + 5.07 x^2 \\
& +6(x + y) \left(\frac{2+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|}{1+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|}\right) \\
& -6\left(2 + \frac{\sin x}{2x}\right)x^2 + 1.5y^2 \\
& -15 \int_{t-0.1}^t y^2(\mu) d\mu \tag{7.37}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki

$$\begin{aligned}
& 4 \left[3(3 + \cos 4t)\left(\frac{4+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) - 13 \right]^2 \\
& < 9\left(2 + \frac{\sin x}{2x}\right) \left[(3 + \cos 4t)\left(\frac{4+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) - 1 \right], \\
& \left[5\left(2 + \frac{\sin x}{2x}\right)\left(2 + \frac{\cos x}{2}\right) \right]^2 \\
& < 9\left(2 + \frac{\sin x}{2x}\right) \times \left[(3 + \cos 4t)\left(\frac{4+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) - 1 \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\left| 2 + \frac{\cos x}{2} \right| < 2.5$$

olması nedeniyle son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
LV(t, x, y) \leq & -0.15(x^2 + y^2) \\
& +6(|x| + |y|) \times \left| \left(\frac{2+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|}{1+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|}\right) \right| \tag{7.38}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca *İspat 7.1.2*'deki δ_2 ve δ_3 ifadeleri göz önüne alındığında $\forall t \in R^+$ için $\delta_2 = 0.15$, $\delta_3 = 6$ olduğu görülür. (7.29) ve (7.31)'dan

$$|V_{x_i}(t, x, y)G_{ik}(t, x, y)| \leq 11.7(x^2 + y^2) \tag{7.39}$$

yazılabilir. Burada $\delta_4 = 11.7$ 'dir. Herhangi bir $0 \leq t_0 \leq T < \infty$ için

$$\int_{t_0}^T 136.89 (x^2 + y^2)^2 dt < \infty \tag{7.40}$$

olduğu görülür. (7.39) ve (7.40) eşitsizliklerinden (4.6), (4.7) ve (4.8) ifadelerinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Ayrıca (7.36) eşitsizliğinden *Lemma4.13*'ün (i) şartının $p = 2, q = 2$ için sağlandığı görülür.

$$[|x| - \delta_2^{-1}\delta_3P]^2 \geq 0, [|y| - \delta_2^{-1}\delta_3P]^2 \geq 0,$$

$$\delta_5 := \frac{1}{2}\delta_2$$

ve

$$\delta_6 := \delta_2^{-1}\delta_3^2P^2$$

ifadeleri dikkate alındığında, $\forall t \in R^+, (x, y) \in R^2$ için

$$\left| \frac{(2+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|)}{(1+t^2+x^2+y^2+|x(t-\tau)|)} \right| \leq 2 = P < \infty,$$

$$(|x| - 80)^2 \geq 0$$

ve

$$(|y| - 80)^2 \geq 0$$

ifadelerinin sağlandığı görülür. Elde edilen eşitsizliklere bağlı olarak $\forall t \in R^+$ ve $x, y \in R^2$ için (7.38) eşitsizliğinden

$$LV(t, x, y) \leq -0.075(x^2 + y^2) + 960 \quad (7.41)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ile *Lemma4.13* karşılaştırıldığında $\delta_5 = 0.075 = \alpha(t)$ ve $\delta_6 = 960 = \beta(t)$ olarak seçtiğimizde $r = 2 = q$ ve $\gamma = 0$ olduğu görülür. Öte yandan ilgili gerekli işlemler yapıldığında

$$V(t_0, X_0)e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} \leq 9.3(x_0^2 + y_0^2) = 9.3X_0^2, \quad (7.42)$$

$$\int_{t_0}^t [(\gamma\alpha(u) + \beta(u))e^{-\int_u^t \alpha(s)ds}]du \leq 12800, \quad (7.43)$$

$$E^{X_0}|X(t, 0, 0)| \leq (9.3X_0^2 + 12800)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.44)$$

$$0.11V(t, x, y) \leq x^2 + y^2, \quad (7.45)$$

$$LV(t, x, y) \leq -0.008V(t, x, y) + 960, \quad (7.46)$$

$$\int_{t_0}^t [(\gamma\alpha(u) + \beta(u))e^{-\int_u^t \alpha(s)ds}]du \leq 119040 \quad (7.47)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece (7.29) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin sıfır çözümü stokastik sınırlı olur.

Örnek 7.1.1 (Ademola ve ark., 2019)

Aşağıdaki ikinci mertebeden gecikmeli stokastik

$$x'' + (3 + \cos 4t) \left(\frac{4+x^2+(x')^2}{1+x^2+(x')^2} \right) x' + [2x(t-\tau) + \frac{1}{2} \sin(x(t-\tau))] + \sigma x(t) \omega'(t) = 0 \quad (7.48)$$

diferansiyel denklemini alalım. Bu denklem sistem olarak

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(3 + \cos 4t) \left(\frac{4+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) y \\ &\quad - [2x + \frac{1}{2} \sin x] - \sigma x(t) \omega'(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t [4 + \cos(x(s))] ds \end{aligned} \quad (7.49)$$

biçiminde ifade edilebilir. $V(t, x, y)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin türevi alınıp gerekli işlemler yapıldığında $\forall t \in R^+, (x, y) \in R^2$,

$$LV(t, x, y) \leq -0.15(x^2 + y^2) \quad (7.50)$$

kolaylıkla elde edilir. Böylece *Lemma 4.9*'dan dolayı (6.49) denklem sisteminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlı olduğu sonucuna varılır.



8. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN SABİT GECİKMELİ STOKASTİK

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN ASİMPOTOTİK

KARARLILIĞI

Mahmoud ve Tunç (2018), aşağıda verilen üçüncü mertebeden sabit gecikmeli

$$x'''(t) + f(x'(t))x''(t) + g(x'(t - \tau)) + h(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) = 0 \quad (8.1)$$

stokastik diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları her $x \in R$, $R = (-\infty, +\infty)$, sürekli türevlenebilir. Ayrıca σ , τ iki pozitif sabit ve τ sabit gecikme, $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ olmak üzere $\omega(t) \in R^m$ olasılık uzayında tanımlanmış m boyutlu standart bir Brownian hareketidir ya da Wiener sürecidir.

Mahmoud ve Tunç (2018), (8.1) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığıyla ilgili bir teorem ispatladı ve ispatlanan sonucun uygulaması olarak bir örnek verdi.

8.1. $x'''(t) + f(x'(t))x''(t) + g(x'(t - \tau)) + h(x(t - \tau)) + \sigma x(t)\omega'(t) = 0$

Denkleminin Çözümlerinin Kararlılık Analizi

Mahmoud ve Tunç (2018) aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 8.1.1 (Mahmoud ve Tunç, 2018)

$\alpha, \beta, \gamma, a_1, a_2, L$ ve M pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağladığını varsayalım:

(i) $h(0) = 0$, $\frac{h(x)}{x} \geq \alpha > 0$, $h(x)sgnx > 0$, $x \neq 0$ ve $\sup\{|h'(x)|\} = \frac{\gamma}{2}$, $x \in R$;

(ii) $g(0) = 0$, $\frac{g(y)}{y} \geq \beta > 0$, $y \neq 0$, $y \in R$;

(iii) $\forall y \in R$, $0 \leq f(y) - a_1 \leq a_2$;

(iv) $|h'(x)| \leq L$ ve $|g'(y)| \leq M \forall x, y \in R$;

(v) $2\alpha - 2 - a_1 - \beta > \sigma^2$;

(vi) $a_1\beta - \gamma > 2\beta + 6$.

Bu takdirde

$$\tau < \min\left\{\frac{2\alpha - 2 - a_1 - \beta - \sigma^2}{2(L+M)}, \frac{a_1\beta - \gamma - 2\beta - 6}{4\mu(L+M) + 4L(\mu+2)}, \frac{a_1\beta - \gamma - 2\beta}{4\beta(L+M) + 4\beta M(\mu+2)}\right\},$$

$$\mu = \frac{a_1\beta + \gamma}{4\beta}$$

olmak kaydıyla, (8.1) gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

İspat 8.1.1(Mahmoud ve Tunç, 2018)

(8.1) denklemini sistem olarak

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= z, \\ z' &= -f(y)z - g(y) - h(x) + \int_{t-\tau}^t g'(y(s))z(s)ds \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t h'(x(s))y(s)ds - \sigma x(t)\omega'(t) \end{aligned} \quad (8.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &= \mu \int_0^x h(\zeta)d\zeta + h(x)y + \mu \int_0^y f(\eta)\eta d\eta \\ &\quad + \int_0^y g(\eta)d\eta + \mu yz + \frac{1}{2}z^2 + xz \\ &\quad + x^2 + \lambda \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta)d\theta ds \\ &\quad + \delta \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta)d\theta ds \end{aligned} \quad (8.3)$$

ile tanımlansın. Burada $s \leq 0$, $x = x(t + s)$, λ ve δ sonradan belirlenecek olan pozitif sabitlerdir.

Ito formülü yardımıyla (8.3) Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin (8.2) sistemi boyunca türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &= h'(x)y^2 + 2xy + yz + \mu z^2 \\ &\quad - \mu g(y)y - f(y)z^2 - xg(y) - xh(x) \\ &\quad + (\mu y + x + z)\{\int_{t-\tau}^t g'(y(s))z(s)ds \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t h'(x(s))y(s)ds\} + \lambda ry^2 \\ &\quad - \lambda \int_{t-\tau}^t y^2(s)ds + \delta rz^2 \\ &\quad - \delta \int_{t-\tau}^t z^2(s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$h(0) = 0, \frac{h(x)}{x} \geq \alpha > 0 \text{ ve } h(x)sgnx > 0, x \neq 0 \text{ ve } \sup\{|h'(x)|\} = \frac{\gamma}{2}$$

ve

$$\forall y \in R, 0 \leq f(y) - a_1 \leq a$$

şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &\leq \frac{\gamma}{2}y^2 + 2xy + yz + \mu z^2 - \mu\beta y^2 \\ &\quad - a_1 z^2 - a_1 xz - \beta xy - \alpha x^2 \\ &\quad + (\mu y + x + z) \left\{ \int_{t-\tau}^t g'(y(s))z(s)ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-\tau}^t h'(x(s))y(s)ds \right\} + \lambda r y^2 \\ &\quad - \lambda \int_{t-\tau}^t y^2(s)ds + \delta r z^2 \\ &\quad - \delta \int_{t-\tau}^t z^2(s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

elde edilir. Ayrıca $|h'(x)| \leq L$, $|g'(y)| \leq M$ şartları ve $2uv \leq u^2 + v^2$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} &(\mu y + x + z) \int_{t-\tau}^t h'(x(s))y(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2}\mu L \tau y^2 + \frac{1}{2}L \tau x^2 + \frac{1}{2}L \tau z^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\mu + 1\right)L \int_{t-\tau}^t y^2(s)ds, \\ &(\mu y + x + z) \int_{t-\tau}^t g'(y(s))z(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2}\mu M \tau y^2 + \frac{1}{2}M \tau x^2 + \frac{1}{2}M \tau z^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\mu + 1\right)M \int_{t-\tau}^t z^2(s)ds \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak (8.4) ifadesi

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &\leq -\left(\frac{2\alpha - 2 - a_1 - \beta - \sigma^2}{2} - \frac{L+M}{2}\tau\right)x^2 \\ &\quad - \left\{ \mu\beta - \frac{\beta + \lambda + 3}{2} - \frac{\mu(L+M)}{2}\tau - \lambda\tau \right\} y^2 \\ &\quad - \left(-\mu + \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{L+M}{2}\tau - \delta r \right) z^2 \\ &\quad - \left(\lambda + \frac{\mu L}{2} - L \right) \int_{t-\tau}^t y^2(s)ds \end{aligned}$$

$$-\left(\delta - \frac{\mu M}{2} - M\right) \int_{t-\tau}^t z^2(s) ds$$

olarak düzenlenebilir.

Öte yandan $\lambda = \frac{L(\mu+2)}{2} > 0$ ve $\delta = \frac{M(\mu+2)}{2} > 0$ seçilirse, o zaman

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) \leq & -\left(\frac{2\alpha-2-a_1-\beta-\sigma^2}{2} - \frac{L+M}{2}\tau\right)x^2 \\ & -\left\{\frac{a_1\beta-\gamma-2\beta-6}{4} - \frac{\mu(L+M)+L(\mu+2)}{2}\tau\right\}y^2 \\ & -\left(\frac{a_1\beta-\gamma-2\beta}{4\beta} - \frac{(L+M)+M(\mu+2)}{2}\tau\right)z^2 \end{aligned}$$

elde edilir. x^2, y^2, z^2 terimlerinin katsayılarının negatif olması için

$$\tau < \min\left\{\frac{2\alpha-2-a_1-\beta-\sigma^2}{2(L+M)}, \frac{a_1\beta-\gamma-2\beta-6}{4\mu(L+M)+4L(\mu+2)}, \frac{a_1\beta-\gamma-2\beta}{4\beta(L+M)+4\beta M(\mu+2)}\right\}$$

olması gerektiği açıktır. Yeterince küçük bir D_1 pozitif sayısı için

$$LV(t, x, y, z) \leq -D_1(x^2, y^2, z^2) \quad (8.5)$$

yazılabilir.

$$g(0) = 0, \frac{g(y)}{y} \geq \beta > 0, y \neq 0, y \in R$$

ve

$$\forall y \in R, 0 \leq f(y) - \alpha_1 \leq \alpha_2$$

şartlarından dolayı

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) \geq & \mu \int_0^x h(\zeta) d\zeta + h(x)y + \frac{1}{2}\mu a_1 y^2 \\ & + \frac{1}{2}\beta y^2 + \mu yz + \frac{1}{2}z^2 + xz + x^2 \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) \geq & \mu \int_0^x h(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\beta}(\beta y + h(x))^2 - \frac{1}{2\beta}h^2(x) \\ & + \frac{1}{2}\mu a_1 y^2 + \mu yz + \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}z^2 \\ = & \frac{1}{2\beta}(\beta y + h(x))^2 + \left(\mu y + \frac{z}{2}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2}\mu(a_1 - 2\mu)y^2 + \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2\beta y^2} \left[4 \int_0^x h(\zeta) \left\{\int_0^y (\mu\beta - h'(x)\eta d\eta\right\} d\zeta\right], y \neq 0, \quad (8.6) \end{aligned}$$

bulunur.

$$a_1 - 2\mu = a_1 - 2\left(\frac{a_1\beta + \gamma}{4\beta}\right) = \frac{a_1\beta - \gamma}{2\beta} > 0$$

ve

$$\mu\beta - h'(x) \geq \frac{a_1\beta + \gamma}{4\beta} - \frac{\gamma}{2} = \frac{a_1\beta - \gamma}{4\beta} > 0$$

dır.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\beta y^2} [4 \int_0^x h(\zeta) \{ \int_0^y (\mu\beta - h'(x) \eta d\eta) d\zeta] \\ & \geq \frac{1}{2\beta y^2} [4 \int_0^x h(\zeta) \{ \int_0^y \left\{ \frac{a_1\beta - \gamma}{4} \eta d\eta \right\} d\zeta] \\ & = \frac{a_1\beta - \gamma}{4\beta} \int_0^x h(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

olması nedeniyle, bu eşitsizlik ve (8.6) yardımı ile

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) & \geq \frac{1}{2\beta} (\beta y + h(x))^2 + (\mu y + \frac{z}{2})^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{a_1\beta - \gamma}{2\beta} \right) y^2 + (x + \frac{z}{2})^2 \\ & \quad + \frac{a_1\beta - \gamma}{4\beta} \int_0^x h(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

şeklinde yeni bir düzenleme yapılabilir. Buna bağlı olarak yeterince küçük bir D_2 pozitif sayısı için

$$V(t, x, y, z) \geq D_2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (8.7)$$

elde edilir. Ayrıca

$$|h'(x)| \leq L \text{ ve } |g'(x)| \leq M$$

olması nedeniyle

$$h(x) \leq Lx \text{ ve } g(y) \leq My$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler ve $f(y) \leq a_1 + a_2$ şartı yardımıyla

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) & \leq \frac{1}{2} \mu L x^2 + L x y + \frac{1}{2} \mu (a_1 + a_2) y^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} M y^2 + \mu y z + \frac{1}{2} z^2 + x z + x^2 \\ & \quad + \lambda \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \\ & \quad + \delta \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta) d\theta ds \end{aligned} \quad (8.8)$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds &\leq |y|^2 \int_{t-\tau}^t (\theta - t + \tau) d\theta \\ &= \frac{\tau^2}{2} |y|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta) d\theta ds &\leq |z|^2 \int_{t-\tau}^t (\theta - t + \tau) d\theta \\ &= \frac{\tau^2}{2} |z|^2 \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizlikler ve $uv \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ eşitsizliği yardımıyla (8.8)'den

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &\leq \frac{1}{2} \{(\mu + 1)L + 3\} x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \{(a_1 + a_2 + 1)\mu + M + L + \lambda\tau^2\} y^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mu + 2 + \delta\tau^2) z^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerdeki tüm katsayılar pozitif olması nedeniyle D_3 sayısı x^2, y^2 ve z^2 maksimum olmak kaydıyla

$$V(t, x, y, z) \leq D_3(x^2 + y^2 + z^2) \quad (8.9)$$

elde edilir. Yukarıdaki değerlendirmeler dikkate alındığında $V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin *Teorem 4.8*'in şartlarına uygun olarak alt ve üst sınırlara sahip olduğu, bu fonksiyonun sistem boyunca (8.5)'den türevinin negatif olduğu görülür. Buradan *Teorem 4.8*'in tüm şartlarının sağlandığı görülür. Bu nedenle (8.1)'in sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır. Böylece *Teorem 8.1.1* ispatlanmış oldu.

Örnek 8.1.1 (Mahmoud ve Tunç., 2018)

Üçüncü mertebeden τ sabit gecikmeli lineer olmayan

$$\begin{aligned} x''' + \left(8 + \frac{1}{1+x'^2}\right)x'' + 8x'(t - \tau) + \sin(x'(t - \tau)) \\ + 12x(t - \tau) + \frac{x(t-\tau)}{1+x^2(t-\tau)} + 2x(t)\omega'(t) = 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

gecikmeli stokastik diferansiyel denklemini alalım. Görüldüğü üzere bu denklem (8.1) denkleminin özel bir halidir. Burada (8.10) gecikmeli stokastik diferansiyel denklemi sistem olarak aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= z, \\ z' &= -\left(8 + \frac{1}{1+y^2}\right)z - (8y + \sin y) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t \{8 + \cos y(s)\} z(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(12x + \frac{x}{1+x^2}\right) + \int_{(t-\tau)}^t \left\{12 + \frac{1-x^2(s)}{1+x^2(s)^2}\right\} y(s) ds \\
& -2x(t)\omega'(t).
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Burada (8.2) ile (8.11) karşılaştırıldığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$f(y) = 8 + \frac{1}{1+y^2}, \quad 0 \leq \frac{1}{1+y^2} \leq 1,$$

$a_1 = 8$ ve $a_2 = 1$ olduğu görülür. Ayrıca

$$g(y) = 8y + \sin y, \quad g(0) = 0$$

$$\frac{g(y)}{y} = 8 + \frac{\sin y}{y} \geq 7 = \beta$$

dir.

$$g'(y) = 8 + \cos y, \quad |8 + \cos y| \leq 9, \quad M = 9$$

olduğu açıktır.

$$h(x) = 12x + \frac{x}{x^2+1},$$

$$\frac{h(x)}{x} \geq 12, \quad \alpha = 12$$

dir. Ayrıca türev alındığında,

$$h'(x) = 12 + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad |h'(x)| \leq 13, \quad |h'(x) - 12| \leq 1$$

yazılabilir. Burada $L = 13$ alınabilir. $\text{Sup}\{|h'(x)|\} = 13$ alırsak, o zaman $\gamma = 26$ olarak elde edilir.

$$\mu = \frac{a_1\beta + \gamma}{4\beta} \cong 2.93, \quad a_1\beta - \gamma - 2\beta - 6 = 10$$

ve

$$2\alpha - 2 - a_1 - \beta = 7 > \sigma^2 = 4$$

olduğu görülür. Böylece *Teorem 8.1.1*'in tüm şartları sağlanır. Sonuç olarak (8.10) denkleminin sıfır çözümü $\tau = 0.008$ olmak şartıyla, stokastik asimptotik kararlıdır.



9. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN SABİT VE DEĞİŞKEN GECİKMELİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN ASİMPOTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölüm Mahmoud ve Tunç (2019) tarafından verilen bazı sonuçlar ele alınacaktır. Mahmoud ve Tunç (2019) aşağıda verilen lineer olmayan üçüncü mertebeden sabit ve değişken gecikmeli stokastik

$$x'''(t) + ax''(t) + \phi(x'(t - r(t))) + \psi(x(t - r(t))) + \sigma x(t - h)\omega'(t) = 0 \quad (9.1)$$

diferansiyel denklemini ele aldı. Burada a , σ ve h pozitif sürekli, $r(t)$, $0 \leq r(t) \leq \gamma_1$ olmak üzere, sürekli türevlenebilir bir değişken gecikme, $\phi(0) = \psi(0) = 0$ olmak üzere, ϕ, ψ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_m(t)) \in R^m$ olasılık uzayında tanımlanmış m boyutlu standart bir Brownian hareketidir ya da Wiener sürecidir.

9.1. $x'''(t) + ax''(t) + \phi(x'(t - r(t))) + \psi(x(t - r(t))) + \sigma x(t - h)\omega'(t) = 0$

Denkleminin Sıfır Çözümünün Kararlılık Analizi

Teorem 9.1.1 (Mahmoud ve Tunç., 2019)

(9.1) diferansiyel denkleminle ilgili verilen temel kabullere ilave olarak, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, c_1, L$ ve M pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağladığını varsayalım:

(i) $\alpha_1 \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \alpha_2$ ve $\psi(x) \operatorname{sgn} x > 0, x \neq 0, x \in R;$

(ii) $\sup\{|\psi'(x)|\} = \frac{c_1}{2}, |\psi'(x)| \leq L, x \in R;$

(iii) $\beta_1 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq \beta_2, y \neq 0, |\phi'(y)| \leq M, y \in R;$

(iv) $0 \leq r(t) \leq \gamma_1$ ve $r'(t) \leq \gamma_2, 0 < \gamma_2 < 1;$

(v) $a\beta_1 - c_1 > 2\beta_1 + 6;$

(vi) $\sigma^2 < 2\alpha_1 - a - \beta_1 - 2.$

Bu takdirde

$$\gamma_1 < \min\left\{\frac{2\alpha_1 - \sigma^2 - a - \beta_1 - 2}{2(L+M)}, \frac{(a\beta_1 - c_1 - 2\beta_1 - 6)(1 - \gamma_2)}{4\lambda(L+M)(1 - \gamma_2) + 4L(\lambda + 2)}, \frac{(a\beta_1 - c_1 - 2\beta_1)(1 - \gamma_2)}{4\beta_1(L+M)(1 - \gamma_2) + 4\beta_1(\lambda + 2)M}\right\},$$

$$\lambda = \frac{a\beta_1 + c_1}{4\beta_1}$$

olmak kaydıyla (9.1) denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

İspat 9.1.1 (Mahmoud ve Tunç., 2019)

(9.1) denklemini sistem olarak

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= z, \\ z' &= -az - \phi(y) - \psi(x) + \int_{t-r(t)}^t \phi'(y(s))z(s)ds \\ &\quad + \int_{t-r(t)}^t \psi'(x(s))y(s)ds - \sigma x(t-h)\omega'(t) \end{aligned} \quad (9.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &= \lambda \int_0^x \psi(\zeta) d\zeta + \psi(x)y + \frac{1}{2} \lambda ay^2 \\ &\quad + \int_0^y \phi(\eta) d\eta + \lambda yz + \frac{1}{2} z^2 + xz \\ &\quad + x^2 + \mu \int_{-r(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(v) dv ds \\ &\quad + v \int_{-r(t)}^0 \int_{t+s}^t z^2(v) dv ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_{t-h}^t x^2(s) ds \end{aligned} \quad (9.3)$$

ile tanımlansın. Burada v ve μ sonra belirlenecek olan pozitif sabitlerdir. Buradaki amaç, $V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin *Teorem 4.8*'in koşullarını sağladığını göstermektir.

Ito formülü yardımıyla (9.3) Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin (9.2) sistemi boyunca türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &= \psi'(x)y^2 + \lambda z^2 - \lambda \phi'(y)y - az^2 + yz - axz \\ &\quad - x\phi(y) - x\psi(x) + 2xy \\ &\quad + (x + \lambda y + z) \left(\int_{t-r(t)}^t \phi'(y(s))z(s)ds \right) \\ &\quad + \int_{t-r(t)}^t \psi'(x(s))y(s)ds + \mu r(t)y^2 \\ &\quad - \mu(1 - r'(t)) \int_{t-r(t)}^t y^2(v)dv + vr(t)z^2 \end{aligned}$$

$$-v(1 - r'(t)) \int_{t-r(t)}^t z^2(v)dv + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2$$

elde edilir. Burada

$$\alpha_1 \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \alpha_2 \text{ ve } \psi(x) \text{sgn} x > 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$$

ve

$$0 \leq r(t) \leq \gamma_1 \text{ ve } r'(t) \leq \gamma_2, 0 < \gamma_2 < 1$$

şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &\leq \frac{c_1}{2} y^2 + \lambda z^2 - \lambda \beta_1 y^2 - a z^2 \\ &+ yz - a x z - \beta_1 x y - \alpha_1 x^2 + 2xy + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \\ &+ (x + \lambda y + z) (M \int_{t-r(t)}^t z(s) ds + L \int_{t-r(t)}^t y(s) ds) \\ &+ \mu \gamma_1 y^2 + v \gamma_1 z^2 - (1 - \gamma_2) (\mu \int_{t-r(t)}^t y^2(v) dv \\ &+ v \int_{t-r(t)}^t z^2(v) dv), \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $r(t) \leq \gamma_1$ şartı ve $2uv \leq u^2 + v^2$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &\leq -\{\alpha_1 - \frac{1}{2}(\sigma^2 + a + \beta_1 + 2) - \frac{1}{2}(L + M) \gamma_1\} x^2 \\ &- \{\lambda \beta_1 - \frac{1}{2}(c_1 + \beta_1 + 3) - \frac{1}{2} \lambda (L + M) \gamma_1 - \mu \gamma_1\} y^2 \\ &- \{\frac{1}{2}(a - 1) - \frac{1}{2}(L + M) \gamma_1 - \lambda - v \gamma_1\} z^2 \\ &+ \{L + \frac{\lambda L}{2} - \mu(1 - \gamma_2)\} \int_{t-r(t)}^t y^2(v) dv \\ &+ \{M + \frac{\lambda M}{2} - v(1 - \gamma_2)\} \int_{t-r(t)}^t z^2(v) dv, \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Eğer $\mu = \frac{L(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)} > 0$ ve $v = \frac{M(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)} > 0$ seçilir ise, o zaman

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &\leq -\{\alpha_1 - \frac{1}{2}(\sigma^2 + a + \beta_1 + 2) - \frac{1}{2}(L + M) \gamma_1\} x^2 \\ &- \{\lambda \beta_1 - \frac{1}{2}(c_1 + \beta_1 + 3) - \frac{1}{2} \lambda (L + M) \gamma_1 - \frac{L(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)} \gamma_1\} y^2 \\ &- \{\frac{1}{2}(a - 1) - \frac{1}{2}(L + M) \gamma_1 - \lambda - \frac{M(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)} \gamma_1\} z^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna bağlı olarak

$$\lambda \beta_1 - \frac{1}{2} c_1 = \frac{a \beta_1 - c_1}{4} > 0 \text{ ve } \frac{a}{2} - \lambda = \frac{a \beta_1 - c_1}{4 \beta_1} > 0$$

seçilir ise, o zaman

$$\begin{aligned}
LV(t, x, y, z) \leq & -\left\{\alpha_1 - \frac{1}{2}(\sigma^2 + a + \beta_1 + 2) - \frac{1}{2}(L + M)\gamma_1\right\}x^2 \\
& - \left\{\frac{1}{4}(a\beta_1 - c_1 - 2\beta_1 - 6) - \frac{\lambda(L+M)(1-\gamma_2)+L(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)}\right\}y^2 \\
& - \left\{\frac{a\beta_1 - c_1 - 2\beta_1}{4\beta_1} - \frac{(L+M)(1-\gamma_2)+M(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)}\gamma_1\right\}z^2
\end{aligned} \tag{9.4}$$

elde edilir. x^2, y^2, z^2 terimlerinin katsayılarının negatif olması için

$$\gamma_1 < \min\left\{\frac{2\alpha_1 - \sigma^2 - a - \beta_1 - 2}{2(L+M)}, \frac{(a\beta_1 - c_1 - 2\beta_1 - 6)(1-\gamma_2)}{4\lambda(L+M)(1-\gamma_2) + 4L(\lambda+2)}, \frac{(a\beta_1 - c_1 - 2\beta_1)(1-\gamma_2)}{4\beta_1(L+M)(1-\gamma_2) + 4\beta_1(\lambda+2)M}\right\}$$

olması gerektiği açıktır. Yeterince küçük bir D_1 pozitif sayısı için

$$LV(t, x, y, z) \leq -D_1(x^2 + y^2 + z^2) \tag{9.5}$$

yazılabilir. Böylece *Teorem 4.8*'in (ii) şartı sağlandığı görülür.

Şimdi ise *Teorem 4.8*'in (i) şartının sağlandığını gösterelim. Burada

$$\int_{-r(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(v) dv ds \quad \text{ve} \quad \int_{-r(t)}^0 \int_{t+s}^t z^2(v) dv ds$$

integralleri negatif değildir. *Teorem 9.1.1*'in (iii) şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned}
V(t, x, y, z) & \geq \lambda \int_0^x \psi(\zeta) d\zeta + \psi(x)y + \frac{1}{2}\lambda ay^2 \\
& + \frac{1}{2}\beta_1 y^2 + \lambda yz + \frac{1}{2}z^2 + xz + x^2 \\
& = \frac{1}{2\beta_1}(\beta_1 y + \psi(x))^2 + (\lambda y + \frac{z}{2})^2 \\
& + (x + \frac{z}{2})^2 + \frac{1}{2}\lambda(a - 2\lambda)y^2 \\
& + \frac{2}{\beta_1 y^2} \int_0^x \phi'(\zeta) \left\{ \int_0^y \lambda\beta_1 - \psi'(\zeta) \eta d\eta \right\} d\zeta; y \neq 0
\end{aligned} \tag{9.6}$$

olduğu açıktır.

Teorem 9.1.1'in (ii) şartından dolayı

$$a - 2\lambda = \frac{a\beta_1 - c_1}{2\beta_1} > 0$$

ve

$$\lambda\beta_1 - \psi'(\zeta) \geq \frac{a\beta_1 - c_1}{4} - \frac{c_1}{2} = \frac{a\beta_1 - c_1}{4} > 0$$

olduğunu hatırlayalım. Bu şartlar ve (9.6) eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$\frac{2}{\beta_1 y^2} \int_0^x \psi(\zeta) \left\{ \int_0^y \lambda\beta_1 - \psi'(\zeta) \zeta d\eta \right\} d\zeta$$

$$\geq \frac{a\beta_1 - c_1}{4\beta_1} \int_0^y \psi(\zeta) d\zeta$$

olması nedeniyle

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &\geq \frac{1}{2\beta_1} (\beta_1 y + \psi(x))^2 \\ &\quad + (x + \frac{z}{2})^2 + \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{a\beta_1 - c_1}{2\beta_1} \right) y^2 \\ &\quad + (\lambda y + \frac{z}{2})^2 + \frac{a\beta_1 - c_1}{4\beta_1} \int_0^y \psi(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

şeklinde yeni bir düzenleme yapılabilir. Buna bağlı olarak bu eşitsizlikteki tüm terimler pozitif olduğundan yeterince küçük bir D_2 pozitif sayısı için

$$V(t, x, y, z) \geq D_2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (9.7)$$

elde edilir. Buradan *Teorem 9.1.1*'in sırasıyla (i) ve (iii) şartlarındaki $\frac{\psi(x)}{x} \leq \beta_2$, $\psi(x) \leq \alpha_2 x$ varsayımları ve $2uv \leq u^2 + v^2$ eşitsizliği kullanıldığında (9.3) Lyapunov-Krosovskii fonksiyoneliinden

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &\leq \lambda \int_0^x \alpha_1 \zeta d\zeta + \frac{\alpha_2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \lambda a y^2 \\ &\quad + \int_0^y \beta_2 \eta d\eta + \frac{\lambda}{2} (x^2 + y^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} (x^2 + z^2) + x^2 \\ &\quad + \mu \int_{t-r(t)}^t (v - t + r(t)) y^2(v) dv \\ &\quad + v \int_{t-r(t)}^t (v - t + r(t)) z^2(v) dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_{t-h}^t x^2(s) ds, \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer yandan $r(t) \leq \gamma_1$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &\leq \frac{1}{2} \{(\lambda + 1)\alpha_2 + 3 + \sigma^2 h\} x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \{\alpha_2 + \beta_2 + \lambda(a + 1) + \mu\gamma_1^2\} y^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \{\lambda + 2 + v\gamma_1^2\} z^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikteki tüm katsayılar pozitif olması nedeniyle D_3 pozitif sabiti bu katsayıların maksimum olmak kaydıyla

$$V(t, x, y, z) \leq D_3(x^2 + y^2 + z^2) \quad (9.8)$$

yazılabilir. Yukarıdaki değerlendirmeler dikkate alındığında $V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krosovski fonksiyonelinin *Teorem 4.8*'in tüm şartlarını sağladığı görülür. Böylece (9.1)'in sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır. Böylece *Teorem 9.1.1* ispatlanmış olur.

Örnek 9.1.1 (Mahmoud ve Tunç., 2019)

Üçüncü mertebeden değişken gecikmeli lineer olmayan stokastik

$$\begin{aligned} x'''(t) + 12x''(t) + 8x'(t - r(t)) + \sin(x'(t - r(t))) \\ + 24x(t - r(t)) + \frac{x(t-r(t))}{1+x^2(t-r(t))} + 3x(t)\omega'(t) = 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

diferansiyel denklemini alalım. (9.9) stokastik gecikmeli diferansiyel denklemini sistem olarak aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= z, \\ z' &= -12z - (8y + \sin y) - \left(24x + \frac{x}{1+x^2}\right) \\ &\quad + \int_{t-r(t)}^t \{8 + \cos y(s)\} z(s) ds \\ &\quad + \int_{t-r(t)}^t \left\{24 + \frac{1-x^2(s)}{1+x^2(s)^2}\right\} y(s) ds \\ &\quad - 2x(t)\omega'(t). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Bu diferansiyel denklem sistemi (9.2) sistemi ile karşılaştırıldığında ve *Teorem 9.1.1*'in şartları dikkate alındığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{aligned} a &= 12, \quad \phi(y) = 8y + \sin y, \\ \frac{\phi(y)}{y} - 8 &= \frac{\sin y}{y}, \quad -1 \leq \frac{\phi(y)}{y} - 8 \leq 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 7, \beta_2 = 9, \\ |\phi'(y)| &= |8 + \cos y| \leq 9 = M \end{aligned}$$

dır. İlave olarak

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 24x + \frac{x}{x^2+1}, \quad \frac{\psi(x)}{x} - 24 = \frac{1}{x^2+1}, \\ 0 &\leq \frac{\psi(x)}{x} - 24 \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha_1 = 24, \alpha_2 = 25 \text{ ve } \psi'(x) = 24 + \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\left| \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \right| \leq 1 \text{ ve } |\psi'(x)| \leq 25 = L$$

dir. Buradan

$$\sup\{|\psi'(x)|\} = 25$$

dir. Bunların yanı sıra

$$c_1 = 50 \text{ ve } \lambda = \frac{a\beta_1+c_1}{4\beta_1} = \frac{67}{14}$$

ifadeleri yazılabilir. Ayrıca

$$a\beta_1 - c_1 = 34 \text{ ve } 2\beta_1 + 6 = 20$$

olduğu açıktır.

Ayrıca ilave olarak $\sigma = 3$ alınır ise,

$$a\beta_1 - c_1 > 2\beta_1 + 6 \text{ ve } 2\alpha_1 - a - \beta_1 - 2 = 27 > \sigma^2 = 9,$$

$$\mu = \frac{85}{(1-\gamma_1)} > 0 \text{ ve } v = \frac{85}{(1-\gamma_1)} > 0, \quad 0 < \gamma_1 < 1$$

olduğu görülür. Böylece yukarıdaki bağıntılar *Teorem 9.1.1'* in bütün şartlarını sağlandığını gösterir.

Ayrıca (9.3)'de verilen Lyapunov-Krosovskii fonksiyoneli (9.10) sistemi için yeniden düzenlendiğinde, bu fonksiyonelin verilen sistemin bir $(x(t), y(t), z(t))$ çözümü boyunca türevi alınır ve yukarıda elde edilen bağıntıları kullanıldığında,

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, z) &\leq -(9 + 17\gamma_1)x^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{14}{4} - \frac{1}{2}(163 + 2\mu)\gamma_1 \right\} y^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{10}{14} - (17 + v)\gamma_1 \right\} z^2 \\ &\quad + \{85 - \mu(1 - \gamma_1)\} \int_{t-r(t)}^t y^2(v) dv \\ &\quad + \{30.5 - v(1 - \gamma_2)\} \int_{t-r(t)}^t z^2(v) dv \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan yeterince küçük sürekli bir D_1 pozitif sayısı için

$$\gamma_1 < \min\left\{\frac{9}{34}, \frac{7(1-\gamma_2)}{326(1-\gamma_2)+340}, \frac{5(1-\gamma_2)}{14(1-\gamma_2)+30.5}\right\}$$

olmak şartıyla

$$LV(t, x, y, z) \leq -D_1(x^2 + y^2 + z^2) \quad (9.11)$$

yazılabilir. İlave olarak kolaylıkla

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &\geq \frac{1}{14}(7y + \psi(x))^2 + \left(\frac{67}{14}y + \frac{z}{2}\right)^2 \\ &\quad + \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + 5.8y^2 + \frac{17}{14} \int_0^y \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman yeterince küçük bir D_2 pozitif sayısı vardır öyle ki

$$V(t, x, y, z) \geq D_2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (9.12)$$

olur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} V(t, x, y, z) &\leq \frac{157}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left\{96 + \frac{25(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)}\gamma_1^2\right\}y^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{95}{14} + \frac{9(\lambda+2)}{2(1-\gamma_2)}\gamma_1^2\right\}z^2 \end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Yeterince küçük bir D_3 pozitif sayısı için

$$V(t, x, y, z) \leq D_3(x^2 + y^2 + z^2) \quad (9.13)$$

yazılabilir. Yukarıdaki değerlendirmeler dikkate alındığında $V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin *Teorem 4.8*'in şartlarına uygun olarak alt ve üst sınırlara sahip olduğu, bu fonksiyonun sistem boyunca (9.11)'den türevinin negatif olduğu görülür. Buradan *Teorem 4.8*'in tüm şartlarının sağlandığı görülür. Bu nedenle (9.9)'un sıfır çözümü stokastik asimptotik karardır. Böylece *Teorem 9.1.1* ispatlanmış oldu.

10. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ STOKASTİK BİR DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÇÖZÜMLERİN STOKASTİK ÜSTEL KARARLILIK VE SINIRLILIĞI

Bu bölüm Mahmoud ve Tunç (2020) tarafından verilen bazı sonuçlar ele alınacaktır. Mahmoud ve Tunç (2020), aşağıda verilen üçüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli stokastik

$$x'''(t) + \Phi(x, x')x'' + G(x'(t-r)) + F(x(t-r)) + \sigma x(t-h(t))\omega'(t) = P(t, x, x', x'') \quad (10.1)$$

diferansiyel denklemini ele aldı. Burada σ ve r pozitif sürekli, $h(t): [0, \infty) \rightarrow [0, r]$ olmak üzere sürekli bir fonksiyon, Φ, G, F, P sürekli fonksiyonlar, $F(0) = G(0) = 0$ olmak üzere G, F sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_m(t)) \in R^m$ olasılık uzayında tanımlanmış m boyutlu standart bir Brownian hareketi ya da Wiener sürecidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{10.1.} \quad & x'''(t) + \Phi(x, x')x'' + G(x'(t-r)) + F(x(t-r)) + \sigma x(t-h(t))\omega'(t) \\ & = P(t, x, x', x'') \end{aligned}$$

Denklemin Çözümlerinin Üstel Kararlılık ve Sınırlılık Analizi

Teorem 10.1.1 (Mahmoud ve Tunç., 2020)

(10.1) diferansiyel denkleminle ilgili verilen temel kabullere ilave olarak, $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, A, B$ ve σ pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağladığını varsayalım:

- (i) $a_1 b_1 - c_1 > 2b_1 + 6$;
- (ii) $0 \leq \Phi(x, y) - a_1 \leq a_0, y \Phi_x(x, y) \leq 0, \forall x, y \in R$;
- (iii) $b_1 \leq \frac{G(y)}{y} \leq b_2, y \neq 0, |G'(y)| \leq B, \forall y \in R$;
- (iv) $a_2 \leq \frac{F(x)}{x} \leq a_3, F(x) \operatorname{sgn} x > 0, x \neq 0, \sup \{|F'(x)|\} = \frac{c_1}{2}, |F'(x)| \leq A, \forall x \in R$;
- (v) $0 \leq h(t) \leq r, h'(t) \leq \frac{1}{2}$;
- (vi) $|P(t, x, x', x'')| \leq m, m > 0$;

$$(vii) \sigma^2 < \frac{2a_2(a_1b_1-c_1+1)-(a_1+b_1+2)}{2(a_1+1)}.$$

Bu takdirde

$$r < \min \left\{ \frac{2a_2(a_1b_1-c_1+1)-(a_1+b_1+2)-2(a_1+1)\sigma^2}{2(A+B)(a_1b_1-c_1+1)}, \frac{a_1b_1-c_1-2b_1-6+2a_1c_1}{4(A+B)(\mu+a_1^2)+4A(2+\mu+a_1b_1-c_1+a_1^2+a_1)}, \right. \\ \left. \frac{a_1b_1-c_1-2b_1}{4b_1(a_1+1)(A+B)+4b_1B(2+\mu+a_1b_1-c_1+a_1^2+a_1)} \right\}, \\ \mu = \frac{a_1b_1+c_1}{4b_1}$$

olmak kaydıyla (10.1) denkleminin sıfır çözümü stokastik asimptotik kararlıdır.

İspat 10.1.1 (Mahmoud ve Tunç., 2020)

(10.1) denklemi sistem olarak

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= z, \\ z' &= -\Phi(x, y)z - G(y) - F(x) \\ &\quad + \int_{t-r}^t \{F'(x(\phi))y(\phi) + G'(y(\phi))z(\phi)\} d\phi \\ &\quad - \sigma x(t-h(t))\omega'(t) + P(t, x, x', x'') \end{aligned} \quad (10.2)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$V(x, y, z) = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) \quad (10.3)$$

Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli verilsin. Burada

$$\begin{aligned} V_1(x, y, z) &= \mu \int_0^x F(\eta) d\eta + \mu \int_0^y \Phi(x, \zeta) \zeta d\zeta \\ &\quad + \int_0^y G(\zeta) d\zeta + F(x)y + \mu yz + \frac{1}{2}z^2 \\ &\quad + xz + x^2 + \sigma^2 \int_{t-h(t)}^t x^2(s) ds \\ &\quad + \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t (\lambda y^2(v) + \delta z^2(v)) dv ds \end{aligned} \quad (10.4)$$

ile tanımlanmaktadır. λ ve δ sonra belirlenecek olan pozitif sabitlerdir. Ayrıca

$$\begin{aligned} V_2(x, y, z) &= a_1^2 \int_0^x F(\eta) d\eta + a_1^2 \int_0^y \Phi(x, \zeta) \zeta d\zeta \\ &\quad + a_1 F(x)y + \frac{b_1}{2} (a_1b_1 - c_1)x^2 \\ &\quad + (a_1b_1 - c_1)x(z + a_1y) + \frac{c_1}{2}y^2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{a_1}{2} z^2 + a_1^2 yz + a_1 \sigma^2 \int_{t-h(t)}^t x^2(s) ds \quad (10.5)$$

ile tanımlansın. Buradaki amaç, $V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin *Teorem 10.1.1*'in şartlarının sağladığını göstermektir.

Ito formülü yardımıyla $V_1(x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin (10.2) sistemi boyunca türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} LV_1(x, y, z) &= F'(x)y^2 + 2xy + yz + \mu z^2 - \mu yG(y) \\ &\quad - \Phi(x, y)z^2 - \Phi(x, y)xz - xG(y) \\ &\quad - xF(x) + \sigma^2 x^2(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2(t-h(t))(1-h'(t)) \\ &\quad + (x + \mu y + z)\{P(t, x, x', x'')\} \\ &\quad + \int_{t-r}^t G'(y(\phi))z(\phi) d\phi \\ &\quad + \int_{t-r}^t F'(x(\phi))y(\phi) d\phi \\ &\quad + \lambda r y^2 - \lambda \int_{t-r}^t y^2(v) dv + \delta r z^2 \\ &\quad - \delta \int_{t-r}^t z^2(v) dv + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2(t-h(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$a_1 b_1 - c_1 > 2b_1 + 6,$$

$$|P(t, x, x', x'')| \leq m, m > 0$$

şartları ve

$$2pq \leq p^2 + q^2$$

eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} LV_1(x, y, z) &\leq - \left\{ \frac{2a_2 - a_1 - b_1 - 2 - 2\sigma^2}{2} - \frac{(A+B)}{2} r \right\} x^2 \\ &\quad - \left\{ \mu b_1 - \frac{(c_1 + b_1 + 3)}{2} - \mu \frac{(A+B)}{2} r - \lambda r \right\} y^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{a_1}{2} - \mu - \frac{1}{2} - \frac{(A+B)}{2} r - \delta r \right\} z^2 + (|x| + \mu|y| + |z|)m \\ &\quad - \left\{ \lambda - \left(A + \frac{\mu A}{2} \right) \right\} \int_{t-r}^t y^2(\phi) d\phi \\ &\quad - \left\{ \delta - \left(B + \frac{\mu B}{2} \right) \right\} \int_{t-r}^t z^2(\phi) d\phi \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Öte yandan $\mu b_1 - \frac{c_1}{2} = \frac{a_1 b_1 - c_1}{4} > 0$ ve $\frac{a_1}{2} - \mu = \frac{a_1 b_1 - c_1}{4b_1} > 0$ seçilir ise, o zaman

$$\begin{aligned}
LV_1(x, y, z) \leq & - \left\{ \frac{2a_2 - a_1 - b_1 - 2 - 2\sigma^2}{2} - \frac{(A+B)}{2} r \right\} x^2 \\
& - \left\{ \frac{a_1 b_1 - c_1 - 2b_1 - 6}{4} - \mu \frac{(A+B)}{2} r - \lambda r \right\} y^2 \\
& - \left\{ \frac{a_1 b_1 - c_1 - b_1}{4b_1} - \frac{(A+B)}{2} r - \delta r \right\} z^2 + (|x| + \mu|y| + |z|)m \\
& + \left\{ A + \frac{\mu A}{2} - \lambda \right\} \int_{t-r}^t y^2(\phi) d\phi \\
& + \left\{ A + \frac{\mu B}{2} - \delta \right\} \int_{t-r}^t z^2(\phi) d\phi
\end{aligned} \tag{10.6}$$

elde edilir.

Ito formülü yardımıyla $V_2(x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin (10.2) sistemi boyunca türevi alınır ise,

$$\begin{aligned}
LV_2(x, y, z) \leq & -a_2(a_1 b_1 - c_1)x^2 - \frac{a_1 c_1}{2}y^2 \\
& + a_1 \sigma^2 x^2 + (a_1 b_1 - c_1)m|x| \\
& + a_1^2 m|y| + a_1 m|z| \\
& + \{a_1(z + a_1 y) - (a_1 b_1 - c_1)x \\
& (A \int_{t-r}^r y(\phi) d\phi + B \int_{t-r}^r z(\phi) d\phi)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $2pq \leq p^2 + q^2$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
LV_2(x, y, z) \leq & - \left\{ \frac{2a_2(a_1 b_1 - c_1) - 2a_1 \sigma^2}{2} - \frac{(a_1 b_1 - c_1)(A+B)}{2} r \right\} x^2 \\
& - \left\{ \frac{a_1 c_1}{2} - \frac{a_1^2(A+B)}{2} r \right\} y^2 + \frac{a_1(A+B)}{2} r z^2 \\
& + \frac{A}{2} \{(a_1 b_1 - c_1) + a_1(a_1 + 1)\} \int_{t-r}^t y^2(\phi) d\phi \\
& + \frac{B}{2} \{(a_1 b_1 - c_1) + a_1(a_1 + 1)\} \int_{t-r}^t z^2(\phi) d\phi \\
& + (a_1 b_1 - c_1)m|x| + a_1^2 m|y| + a_1 m|z|
\end{aligned} \tag{10.7}$$

olduğu açıktır. Öte yandan (10.6) ve (10.7) eşitsizlikleri birleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
LV(x, y, z) \leq & - \left\{ \frac{2a_2(a_1 b_1 - c_1 + 1) - (a_1 + b_1 + 2) - 2(a_1 + 1)\sigma^2}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(a_1 b_1 - c_1 + 1)(A+B)}{2} r \right\} x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{a_1 b_1 - c_1 - 2 b_1 - 6 + 2 a_1 c_1}{4} - \frac{(\mu + a_1^2)(A+B)}{2} r - \lambda r \right\} y^2 \\
& - \left\{ \frac{a_1 b_1 - c_1 - 2 b_1}{4 b_1} - \frac{(a_1 + 1)(A+B)}{2} r - \delta r \right\} z^2 \\
& - \left\{ \lambda - \frac{(2 + \mu + a_1 b_1 - c_1 + a_1^2 + a_1)A}{2} \right\} \int_{t-r}^r y^2(\phi) d\phi \\
& - \left\{ \delta - \frac{(2 + \mu + a_1 b_1 - c_1 + a_1^2 + a_1)B}{2} \right\} \int_{t-r}^r z^2(\phi) d\phi \\
& + (a_1 b_1 - c_1 + 1)m|x| + (a_1^2 + \mu)m|y| \\
& + (a_1 + 1)m|z|
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eğer

$$\lambda = \frac{A(2 + \mu + a_1 b_1 - c_1 + a_1^2 + a_1)}{2} > 0$$

ve

$$\delta = \frac{B(2 + \mu + a_1 b_1 - c_1 + a_1^2 + a_1)}{2} > 0$$

seçilir ise, o zaman

$$\begin{aligned}
LV(x, y, z) & \leq - \left\{ \frac{2a_2(a_1 b_1 - c_1 + 1) - (a_1 + b_1 + 2) - 2(a_1 + 1)\sigma^2}{2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(a_1 b_1 - c_1 + 1)(A+B)}{2} r \right\} x^2 \\
& \quad - \left\{ \frac{a_1 b_1 - c_1 - 2 b_1 - 6 + 2 a_1 c_1}{4} - \frac{(\mu + a_1^2)(A+B)}{2} r - \frac{A(2 + \mu + a_1 b_1 - c_1 + a_1^2 + a_1)}{2} r \right\} y^2 \\
& \quad - \left\{ \frac{a_1 b_1 - c_1 - 2 b_1}{4 b_1} - \frac{(a_1 + 1)(A+B)}{2} r - \frac{B(2 + \mu + a_1 b_1 - c_1 + a_1^2 + a_1)}{2} r \right\} z^2 \\
& \quad + (a_1 b_1 - c_1 + 1)m|x| + (a_1^2 + \mu)m|y| + (a_1 + 1)m|z|
\end{aligned}$$

olduğu açıkça yazılabilir. Buna bağlı olarak

$$K = m \max\{a_1 b_1 - c_1 + 1, a_1^2 + \mu, a_1 + 1\}$$

seçilir ise, o zaman

$$\begin{aligned}
LV(x, y, z) & \leq -\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + K\alpha(|x| + |y| + |z|) \\
& = -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\
& \quad - \frac{\alpha}{2}\{(|x| - K)^2 + (|y| - K)^2 + (|z| - K)^2\} + \frac{3\alpha}{2}K^2 \\
& \leq -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3\alpha}{2}K^2, \alpha, K > 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$v(t) = \frac{\alpha}{2}, \quad \eta(t) = \frac{3\alpha}{2}K^2, \quad n = 2$$

dir. Böylece *Lemma 4.13*'ün (ii) şartı sağlandığı görülür. Öte yandan

$$\int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(v) dv ds, \quad \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t z^2(v) dv ds \quad \text{ve} \quad \int_{t-h(t)}^t x^2(s) ds$$

integralleri negatif olmadığı için *Teorem 10.1.1*'in şartlarından dolayı

$$\begin{aligned} V_1(x, y, z) &\geq \mu \int_0^x F(\eta) d\eta + F(x)y + \frac{1}{2}a_1y^2 + \frac{1}{2}b_1y^2 \\ &\quad + \mu yz + \frac{1}{2}z^2 + xz + x^2 \\ &= \frac{1}{2b_1} (b_1y + F(x))^2 \\ &\quad + \mu \int_0^x F(\eta) d\eta + \frac{1}{2}\mu a_1y^2 \\ &\quad - \frac{1}{2b_1}F^2(x) + \mu yz + \frac{z^2}{4} + (x + \frac{z}{2})^2 \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Burada

$$\begin{aligned} V_1(x, y, z) &\geq \frac{1}{2b_1} (b_1y + F(x))^2 + (\mu y + \frac{z}{2})^2 \\ &\quad + (x + \frac{z}{2})^2 + \frac{1}{2}\mu(a_1 - 2\mu)y^2 \\ &\quad + \frac{1}{2b_1y^2} [4 \int_0^y F(\eta) \{ \int_0^y (\mu b_1 - F'(x)) \zeta d\zeta \} d\eta]; \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 10.1.1'in (iv) şartından dolayı

$$a_1 - 2\mu = \frac{a_1b_1 - c_1}{2b_1} > 0$$

ve

$$\mu b_1 - F'(x) = \frac{a_1b_1 - c_1}{4} > 0$$

olduğunu hatırlayalım. Bu şartlar göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2b_1y^2} [4 \int_0^y F(\eta) \{ \int_0^y (\mu b_1 - F'(x)) \zeta d\zeta \} d\eta] \\ &\geq \frac{a_1b_1 - c_1}{4b_1} \int_0^x F(\eta) d\eta \end{aligned}$$

olması nedeniyle

$$\begin{aligned}
V_1(x, y, z) &\geq \frac{1}{2b_1} (b_1 y + F(x))^2 + (\mu y + \frac{z}{2})^2 \\
&\quad + (x + \frac{z}{2})^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{a_1 b_1 - c_1}{2b_1} \right) y^2 \\
&\quad + \frac{a_1 b_1 - c_1}{4b_1} \int_0^x F(\eta) d\eta
\end{aligned} \tag{10.8}$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\int_{t-h(t)}^t x^2(s) ds$$

integrali negatif olmadığından dolayı (10.5)'deki $V_2(x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli,

$$\begin{aligned}
V_2(x, y, z) &\geq \frac{a_1^2}{2c_1 y^2} \{ 2c_1 y^2 \int_0^x F(\eta) d\eta - F^2(x) y^2 \} \\
&\quad + \frac{1}{2c_1} (c_1 y + a_1 F(x))^2 \\
&\quad + \frac{a_1 b_1 - c_1}{2b_1} (b_1 x + (z + a_1 y))^2 \\
&\quad + \frac{c_1}{2b_1} (z + a_1 y) \\
&= \frac{a_1^2}{2c_1 y^2} [\{ 4 \int_0^x F(\eta) \{ \int_0^y (c_1 - F'(x)) \zeta d\zeta \} d\eta \}] \\
&\quad + \frac{1}{2c_1} (c_1 y + a_1 F(x))^2 \\
&\quad + \frac{1}{2c_1} (c_1 y + a_1 F(x))^2 \\
&\quad + \frac{a_1 b_1 - c_1}{2b_1} (b_1 x + (z + a_1 y))^2 \\
&\quad + \frac{c_1}{2b_1} (z + a_1 y)^2
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Teorem 10.1.1'in (iv) şartından ve bu varsayımlardan dolayı

$$\begin{aligned}
V_2(x, y, z) &\geq \frac{a_1^2}{2} \int_0^x F(\eta) d\eta + \frac{1}{2c_1} (c_1 y + a_1 F(x))^2 \\
&\quad + \frac{c_1}{2b_1} (z + a_1 y)^2 \\
&\quad + \frac{a_1 b_1 - c_1}{2b_1} \{ b_1 x + (z + a_1 y) \}^2
\end{aligned} \tag{10.9}$$

olduğu açıktır. Burada (10.8) ve (10.9) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\begin{aligned}
V(x, y, z) &\geq \frac{1}{2b_1} (b_1 y + F(x))^2 + (\mu y + \frac{z}{2})^2 \\
&\quad + (x + \frac{z}{2})^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{a_1 b_1 - c_1}{2b_1} \right) y^2 \\
&\quad + \left\{ \frac{a_1 b_1 - c_1}{4b_1} - \frac{a_1^2}{2} \right\} \int_0^x F(\eta) d\eta \\
&\quad + \frac{1}{2c_1} (c_1 y + a_1 F(x))^2 \\
&\quad + \frac{a_1 b_1 - c_1}{2b_1} \{b_1 x + (z + a_1 y)\}^2 \\
&\quad + \frac{c_1}{2b_1} (z + a_1 y)^2, \quad y \neq 0
\end{aligned}$$

şeklinde yeni bir düzenleme yapılabilir. Buna bağlı olarak bu eşitsizlikteki tüm terimler pozitif olduğundan yeterince küçük bir K_1 pozitif sayısı için

$$V(t, x, y, z) \geq K_1(x^2 + y^2 + z^2) \quad (10.10)$$

elde edilir. Buradan $\Phi(x, y) \leq a_0 + a$, $F(x) \leq a_3 x$, $G(y) \leq b_2(y)$, $\psi(x) \leq a_2 x$ şartları ve $2pq \leq p^2 + q^2$ eşitsizliği kullanıldığında (10.4) Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneliinden

$$\begin{aligned}
V_1(x, y, z) &\leq \mu \int_0^x a_3 \eta d\eta + \mu \int_0^y (a_0 + a_1) \zeta d\zeta \\
&\quad + \int_0^y b_2 \zeta d\zeta + \frac{a_3}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu}{2} (y^2 + z^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} (x^2 + z^2) + x^2 \\
&\quad + \sigma^2 \int_{t-h(t)}^t x^2(s) ds \\
&\quad + \lambda \int_{t-h(t)}^t (v - t + r) y^2(v) dv \\
&\quad + \delta \int_{t-r}^t (v - t + r) z^2(v) dv
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Öte yandan *Teorem 10.1.1*'in (v) şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned}
V_1(x, y, z) &\leq \frac{1}{2} \{ \mu a_3 + a_3 + 3 + 2\sigma^2 r \} x^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ \mu (a_0 + a_1) + a_3 + b_2 + \mu + \lambda r^2 \} y^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ \mu + 2 + \delta r^2 \} z^2 \quad (10.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde *Teorem 10.1.1*'in şartları kullanıldığında

$$V_2(x, y, z) \leq \frac{1}{2} \{ a_1^2 a_3 + a_1 a_3 + (a_1 + b_1 + 1)(a_1 b_1 - c_1) + 2a_1 \sigma^2 r \} x^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \{a_1^2(a_0 + a_1) + a_1 a_3 + a_1(a_1 b_1 - c_1) + c_1 + a_1^2\} y^2 \\
& + \frac{1}{2} \{(a_1 b_1 - c_1) + a_1^2 + a_1\} z^2
\end{aligned} \tag{10.12}$$

olduğu açıkça görülür. (10.11) ve (10.12) eşitsizlikleri birleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
V(x, y, z) & \leq \frac{1}{2} \{(\mu + a_1 + a_1^2 + 1)a_3 \\
& + (a_1 + b_1 + 2)(a_1 b_1 - c_1) \\
& + 3 + 2(a_1 + 1)\sigma^2 r\} x^2 \\
& + \frac{1}{2} \{(\mu + a_1^2)(a_0 + a_1) + (a_1 + 1)a_3 \\
& + \mu + b_2 + a_1(a_1 b_1 - c_1) \\
& + c_1 + a_1^2 + \lambda r^2\} y^2 \\
& + \frac{1}{2} \{\mu + 2 + a_1 b_1 - c_1 \\
& + a_1^2 + a_1 + \delta r^2\} z^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikteki tüm katsayılar pozitif olması nedeniyle K_2 pozitif sabiti bu katsayıların maksimumu olmak kaydıyla

$$V(t, x, y, z) \leq K_2(x^2 + y^2 + z^2) \tag{10.13}$$

yazılabilir. Böylece (10.10), (10.13) eşitsizliklerinden *Lemma 4.13*'ün (i) şartı sağlandığı görülür. Ayrıca $q_1 = q_2 = n = 2$, $\mu^* = 0$ olması durumunda *Lemma 4.13*'ün (iii) şartı sağlanır. Böylece yukarıdaki değerlendirmeler dikkate alındığında $V(t, x, y, z)$ Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin *Lemma 4.13*'ün tüm şartlarını sağladığı görülür. Öte yandan $v(t) = \frac{\alpha}{2}$, $\eta(t) = \frac{3\alpha}{2} K^2$ ve $\mu^* = 0$, ifadelerini *Sonuç 4.15*'in (i) şartında kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \{\mu^* v(\rho) + \eta(\rho)\} e^{-\int_p^t v(\phi) d\phi} d\rho \\
& = \frac{3\alpha}{2} K^2 \int_{t_0}^t e^{-\frac{\alpha}{2} \int_p^t d\phi} d\phi \leq 3K^2, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
g^T & = (0 \quad 0 \quad -\sigma x(t - h(t))), \\
V_x(t, x, y, z) & = V_1(t, x, y, z)_x + V_2(t, x, y, z)_x \\
& = \mu F(x) + F'(x)y + z + 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_1^2 + F(x) + a_1F'(x)y \\
& +b_1(a_1b_1 - c_1)x \\
& +(a_1b_1 - c_1)(z + a_1y), \\
V_y(t, x, y, z) &= V_1(t, x, y, z)_y + V_2(t, x, y, z)_y \\
&= F(x) + \mu\Phi(x, y)y + G(y) + \mu z \\
& +a_1^2\Phi(x, y)y + a_1F(x) \\
& +a_1(a_1b_1 - c_1)x + a_1^2z, \\
V_z(t, x, y, z) &= V_1(t, x, y, z)_z + V_2(t, x, y, z)_z \\
&= \mu y + z + x + (a_1b_1 - c_1)x \\
& +a_1 + (a_1b_1 - c_1)x + a_1(z + a_1y)
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
|V_{x_i}(t, x, y, z)g_{x_i}(t, x, y, z)| &\leq \sigma \left[\frac{a_1b_1 - c_1 + 1}{2} x^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1^2 + \mu}{2} y^2 + \frac{a_1 + 1}{2} z^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\mu + 2 + a_1b_1 - c_1 + a_1 + a_1^2) \right. \\
& \left. x^2 (x - h(t)) \right] := \Gamma(t)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece (4.6) ifadesinin sağlandığı görülür. İlave olarak *Lemma 4.17* yardımıyla (10.1) gecikmeli stokastik diferansiyel denklemin tüm çözümleri

$$E^{x_0} |x(t, t_0, x_0)| \leq \{Cx_0^2 + 3K^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

olmak kaydıyla düzgün stokastik sınırlı olur. Böylece *Teorem 10.1.1*'in ispatı tamamlanmış olur.

Öte yandan $\forall t \geq t_0 \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \{\mu^* v(\rho) + \eta(\rho)\} e^{\int_{t_0}^t v(\phi) d\phi} d\rho \\
&= \frac{3\alpha}{2} K^2 \int_{t_0}^t e^{\frac{\alpha}{2} \int_{t_0}^t d\phi} d\rho \\
&\leq 3K^2 \left(e^{\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} \right) \leq M
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir M pozitif sabiti vardır. Böylece (4.12) ve (4.13) şartları sağlanmış olur. Sonuç olarak *Lemma 4.18*'e göre (10.1)'in sıfır çözümü $N = \frac{1}{2}$ olmak kaydıyla α –düzgün stokastik sınırlıdır.

Örnek 10.1.1(Mahmoud ve Tunç, 2020)

$h(t) = r$ gecikme terimi olmak üzere üçüncü mertebeden

$$x''' + \left(11 + \frac{1}{1+x^2+x'^2}\right)x'' + 8x'(t-r) + \sin(x'(t-r)) + 24x(t-r) \\ \frac{x(t-r)}{1+x^2(t-r)} + 5x(t-r)\omega'(t) = P(t, x, x', x'') \quad (10.14)$$

stokastik diferansiyel denklemini alalım. (10.14) stokastik gecikmeli diferansiyel denklemi sistem olarak aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$x' = y,$$

$$y' = z,$$

$$z' = -\left(11 + \frac{1}{1+x^2+x'^2}\right)z - (8y + \sin y) - \left(24x + \frac{x}{1+x^2}\right) \\ + \int_{t-r}^t \{8 + \cos y(\phi)\}z(\phi) d\phi + \int_{t-r}^t \left\{24 + \frac{1-x^2}{(1+x^2(\phi))^2}\right\}y(\phi) d\phi \\ - 5x(t-r)\omega'(t) + P(t, x, x', x'').$$

Bu diferansiyel denklem sistemi (10.2) sistemi ile karşılaştırıldığında ve *Teorem 10.1.1*'in şartları dikkate alındığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2+y^2} \leq 1, \quad \Phi(x, y) = 11 + \frac{1}{1+x^2+y^2}, \\ -1 \leq \Phi(x, y) - 11 \leq 1.$$

Ayrıca

$$a_1 = 11, \quad a_0 = 1$$

dir. İlave olarak

$$-1 \leq \frac{\sin y}{y} \leq 1,$$

$$G(y) = 8y + \sin y, \quad -1 \leq \frac{G(y)}{y} - 8 \leq 1$$

olduğu görülür. Burada

$$b_1 = 7, \quad b_2 = 9$$

dur. Türev alındığında

$$|G'(y)| = |8 + \cos y| \leq 9 = M$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$F(x) = 24x + \frac{x}{1+x^2}, \quad 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1,$$

$$0 \leq \frac{F(x)}{x} - 24 \leq 1$$

olduğu açıkça görülür. Burada

$$a_2 = 24, a_3 = 25$$

dir. Türev alındığında

$$F'(x) = 24 + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 1, \quad |F'(x)| \leq 25 = L$$

olduğu görülür. Ayrıca *Teorem 10.1.1*'in (iv) şartından dolayı

$$\sup \{|F'(x)|\} \leq 25 \text{ ve } c_1 = 50$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mu = \frac{a_1 b_1 + c_1}{4b_1} \cong 4.5$$

olur.

$$\frac{2a_1(a_1 b_1 - c_1 + 1) - (a_1 + b_1 + 2)}{2(a_1 + 1)} \cong 55.2 > 25 = \sigma^2$$

olduğu açıktır.

$$m = 0.02$$

olarak seçilsin. Burada

$$\begin{aligned} LV(x, y, z) \leq & -(362 - 476r)x^2 - (276.75 - 4202.25r)y^2 \\ & -(0.46 - 948.75r)z^2 + 0.56|x| + 2.51|y| + 0.24|z| \end{aligned} \quad (10.15)$$

olduğu açıkça görülür. Ayrıca

$$\lambda \cong 2068.75 > 0, \delta \cong 744.75 > 0$$

olduğundan dolayı

$$r \leq \min\{0.38, 0.033, 0.00024\}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Ayrıca

$$\alpha = 0.23 \text{ ve } K = 0.02 \max\{28, 125.5, 12\} \cong 2.51$$

olması durumunda

$$\begin{aligned} LV(x, y, z) \leq & -361.89x^2 - 275.74y^2 - 0.23z^2 \\ & + 0.56|x| + 2.51|y| + 0.24|z| \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece

$$v(t) = 0.115, \quad \eta(t) = 2.174, \quad n = 2$$

olması durumunda, *Lemma 4.13*'ün (ii) şartının sağlandığı görülür. Ayrıca

$$q_1 = q_2 = n = 2 \text{ ve } \mu^* = 0$$

olması durumunda, *Lemma 4.13*'ün tüm şartları sağlandığı görülür. İlave olarak

$$\int_{t_0}^t \{\mu^* v(\rho) + \eta(\rho)\} e^{\int_{t_0}^t v(\phi) d\phi} d\rho \leq 19, \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

$$|V_{x_i}(t, x_t) g_{x_i}(t, x_t)| \leq 5\{14x^2 + 62.75y^2 + 6.z^2 + 82.75(t - r)\} := \Gamma(t)$$

olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla (4.6) ifadesinin sağlandığı görülür. *Lemma 4.17*'den

$$|P| \leq 0.02$$

olduğundan (10.14)'ün tüm çözümleri düzgün stokastik sınırlı olur. Ayrıca bir pozitif

M sabiti için

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \{\mu^* v(\rho) + \eta(\rho)\} e^{-\int_{t_0}^t v(\phi) d\phi} d\rho \\ &= \frac{3\alpha}{2} K^2 \int_{t_0}^t e^{\frac{\alpha}{2} \int_{t_0}^t d\phi} d\rho \\ &= 3K^2 \left(e^{\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} - 1 \right) \\ &= 19(e^{0.115(t-t_0)} - 1) \leq M \end{aligned}$$

olduğundan

$$E^{x_0} \| |x(t, t_0, x_0)| \| \leq \{x_0^2 + 19\}^{\frac{1}{2}}, \forall t \geq t_0 \geq 0$$

olduğu açıktır. Burada (4.12) ve (4.13) şartlarının sağlandığı görülür. Böylece *Lemma 4.18*'den $N = \frac{1}{2}$ olması durumunda (10.14)'ün sıfır çözümü α -düzgün stokastik sınırlıdır.



10. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde literatürde mevcut bulunan bazı ikinci ve üçüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli stokastik diferansiyel denklemleri ele alınmıştır. Bu diferansiyel denklemlerin daha önceden çözümlerinin kararlılığı, sınırlılığı, asimptotik kararlılığı ve düzgün sınırlılığı araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Söz konusu incelemeler Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelleri, Ito formülü ve temel eşitsizlikler yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu tezde bu çalışmalar örnekler ile birlikte araştırmacıların dikkatine sunulması amaçlanmıştır. Bu çalışmaların ileride konu ile ilgili yapılabilecek olan çalışmalara öncelik edebilecek potansiyele sahip olabileceği düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Abou-El-Ela, A. M. A., Sadek, A. I., Mahmoud, A. M., Farghaly, E. S., 2015. Stability of solutions for certain third-order nonlinear stochastic delay differential equations. *Ann. Appl. Math*, **31**(3): 253–261.
- Abou-El-Ela, A.M.A, Mahmoud A.M., 2017. Asymptotic stability of solutions for a certain non-autonomous second-order stochastic delay differential equation. *Turkish Journal of Mathematics*, **41**: 576-584.
- Abou-El-Ela, A.M.A., Sadek, A.I., Mahmoud A.M., Taie, R.O.A., 2015. On the stochastic stability and boundedness of solutions for stochastic delay differential equation of the second order, *Chinese Journal of Mathematics*, **358936**: 8.
- Abou-El-Ela, A.M.A., Sadek, A.I., Mahmoud, A.M., 2015. On the stability of solutions for certain second-order stochastic delay differential equations, *Differential Equations and Control Processes*, **2**.
- Ademola, A. T., 2017. Stability, boundedness and uniqueness of solution to certain third order stochastic delay differential equations. *Differ. Uravn. Protsessy Upr*, **2**:24–50.
- Ademola, A. T., Ogundiran, M.O., 2007. On the existence and uniqueness of solutions of a generalized Lipschitz ordinary differential equations, *Ife Journal of Science*, **9**(2):241-246.
- Ademola, A.T., 2015. Boundedness and stability of solutions to certain second order equations, *Differential Equations and Control Processes*, **3**: 38-50.
- Ademola, A.T., Moyo, S., Ogundare, B.S., Ogundiran, M.O., Adesina, O.A., 2016. Stability boundedness of solutions to a certain second order nonautonomous stochastic differential equation, *International Journal of Analysis*, **2012315**:11.
- Ademola, A.T., Ogundare, B.S., Ogundiran, M.O., Adesina, O.A., 2016. Periodicity, stability and boundedness of solutions to certain second order delay differential, *International Journal of Differential Equations*, **2843709**:10.
- Allen, E., 2007. *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations*, (22), Springer Science & Business Media, USA.
- Arnold, L., 1974. *Stochastic Differential equations: Theory and Applications*, John Wiley & Sons,
- Burton, T.A., 1985. *Stability and Periodic Solutions Of Ordinary and Functional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, 178 Academic Press. Inc., Orlando FL.
- Cahlon, C., Schmidt, D., 2004. Stability criteria for certain second order delay differential equations with mixed coefficients, *J. Comput. Appl. Math*, **170**:79-102.
- Caraballo, T., Diop, M.A., Ndoye, A.S., 2014. Fixed points and exponential stability for stochastic partial integro-differential equations with delays, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, **9**(2): 133-147.
- Çapar, U., 2013. *Ölçü Kuramsal Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş*, ODTÜ Geliştirme Vakfı, Ankara, 410.
- Domoshnitsky, A., 2014. Non oscillation, maximum principles and exponential stability of second order delay differential equations without damping term, *Journal of Inequality and Applications*, (361).1-26.

- Driver, R.D., 1977. *Ordinary and Delay Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 20. Springer-Verlag New York, Heidelberg Berlin.
- Hale, J.K., 1965. Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. *J. Differential Equations* **1**:452-482.
- Hale, J.K., 1977. *Theory Of Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 3. Springer-Verlag New York.
- Ivanov, A.F., Kazmerchuk, Y.I., Swishchuk, A.V., 2013. Theory, stochastic stability and applications of stochastic delay differential equations: a survey of recent results, *Differential Equations and Dynamical Systems*, **11**(1), Jan.
- Kolarova, E., 2008. An application of stochastic integral equation stoelectrical Networks, *Acta Electrotechnica et Informatica*, **8**:(3), 14-17.
- Kolmanovskii, V.B., Shaikhet, L.E., 2002. A Construction of Lyapunov functionals for stochastic Hereditary systems: A survey of some recent results, *Mathematical and Computer Modelling*, **36**: 691-716.
- Liu, R., Raffoul, Y., 2009. Boundedness and exponential stability of highly non-linear stochastic differential equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, **143**:1-10.
- Mahmoud, A.M, Tunç, C., 2020. Boundedness and exponential stability for a certain third-order stochastic delay differential equation. *Dynam. System Appl.* **29**:2.228-302.
- Mahmoud, A.M. Tunç, C., 2019. Asymptotic stability of solutions for a kind of third-order stochastic differential equations with delays. *Miscolc Math. Notes*, **20**:1.381-393.
- Mahmoud, A.M., Tunç, C., 2018. A new result on the stability of a stochastic differential equation of third-order with a time- lag. *J. Egyptian Math.* **26**:1: 212-220.
- Mao, X., 2001. Some contribution stostochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Lyapunov functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **260**: 325-340.
- Mao, X., 2001. *Stochastic Differential Equations and Applications*, Second edition, Woodhead Publishing, UK.
- Ogundare, B.S., Ademola, A.T., Ogundiran, M.O., Adesina, A.O., 2016. On the qualitative behaviour of solutions to certain second order nonlinear differential equation with delay, *Ann Univ Ferrara*, **1**-21.
- Ogundare, B.S., Okecha, G.E., 2007. Boundedness periodicity and stability of solution $x'' + a(t)g(x') + b(t)h(x) = p(t; x, x')$ *Math. Sci. Res. J.*, **11** (5): 432-443.
- Oksendal, B., 2000. *Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications*, Springer-Verlage.
- Orucova Büyüköz, G., 2018. *Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri*, Doktora tezi, İstanbul.
- Raffoul, Y.N., 2007. Boundedness and exponential asymptotic stability in dynamical systems with applications to nonlinear differential equations with unbounded terms, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, **2**(1):107-121.
- Rezaeyan, R., Farnoosh, R., 2010. Stochastic differential equations and application of the Kalman-Bucy filter in the modeling of RC circuit, *Applied Mathematical Sciences*, **4**:(23):1119-1127.

- Tunç, C., 2014. A note on the stability and boundedness of non-ouonomous differential equations of second order with a variable deviating argument, *Afr. Math.*, **25**(2), 417-425.
- Tunç, C., 2019. On the asymptotic stability of solutions of stochastic differential delay equations of second order. *Journal of Taibah University for Science*, **13**:1, 875-882.
- Tunç, C., Ayhan, T., 2016. Global existence and boundedness of solutions of a certain onlinear integro-differential equation of second order with multiple deviating arguments, *Journal of Inequalities and Applications*, (**46**) DIO 10.1186/s13660-016-0987-2.
- Xianfeng, Z., Wei, J., 2013. Stability and boundedness of a retarded Lienard-type equation, *Chin. Q.J. Math.*, **18**. (1): 7-12.
- Yeniçeriöglu, A.F., 2008. Stability properties of second order delay integro-differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, **56**. 3109-3117.
- Yeniçeriöglu, A.F., 2017. The behavior of solutions of second order delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **332**.1278-1290.
- Yoshizawa, T., 1966. *Stability the ory by Lyapunov's second method*. Publish of the Mathematical Society of Japan, No.9 The Mathematical Society of Japan, Tokyo
- Zhu, W., Huang, J., Ruan, X., Zhao, Z., 2014. Exponential stability of stochastic differential equation with mixed delay, *Journal of Applied Mathematics*, **187037**:11



ÖZ GEÇMİŞ

Muş'ta doğdu. İlk ve orta öğretimi Muş'un Malazgirt ilçesinde tamamladı. 2011 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2015 yılında mezun olup 2017 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başlayarak 2021 yılında mezun oldu.



T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 14/01/2021

Tez Başlığı / Konusu: STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE
KARARLILIK VE SINIRLILIK

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam ... sayfalık kısmına ilişkin, 14/01/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNİTİN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8 (yüzde sekiz) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza
14/01/2021

Adı Soyadı: Zozan OKTAN
Öğrenci No: 17910002134
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik
Statüsü: Y. Lisans Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Cemil TUNÇ

Prof. Dr. Suat ŞENSOY