

**T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONSUZ UZUN ÇİZGİSEL KAYNAKLA UYARILMIŞ YÜKSEK
FREKANSLI ELEKTROMANYETİK DALGALARIN
MÜKEMMEL İLETKEN ARDIŞIK BASAMAK TİPİ
SÜREKSİZLİKLERDEN SAÇILIMI**

**MURAT DOĞAN
DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**GEBZE
2021**

**T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONSUZ UZUN ÇİZGİSEL KAYNAKLA
UYARILMIŞ YÜKSEK FREKANSLI
ELEKTROMANYETİK DALGALARIN
MÜKEMMEL İLETKEN ARDIŞIK BASAMAK
TİPİ SÜREKSİZLİKLERDEN SAÇILIMI**

**MURAT DOĞAN
DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMANI
PROF. DR. ALİ ALKUMRU**

**GEBZE
2021**

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**LINE SOURCE DIFFRACTION BY
PERFECTLY CONDUCTING SUCCESSIVE
STEPS**

MURAT DOĞAN

**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
DEPARTMENT OF ELECTRONIC ENGINEERING**

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. ALİ ALKUMRU

GEBZE

2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında Fourier dönüşüm tekniği ve mod eşleştirme yöntemi kullanılarak mükemmel iletken ardışık basamak tipi süreksizliklerden yüksek frekanslı silindirik dalgaların saçılımı detaylı bir şekilde incelenmiştir. İlgili sınır değer problemi, ilk önce üçüncü türden modifiye skalar bir Wiener-Hopf denkleminin çözümüne indirgenmiştir. Daha sonra ise söz konusu modifiye Wiener-Hopf denklemini çözmek için gayet iyi bilinen klasik tekniğin uygulanması ile ikinci türden bir çift Fredholm integral denklem elde edilmiştir. Beş adet sonsuz lineer cebirsel denklem sistemini sağlayan beş sonsuz bilinmeyenli sabit ve iki tip kesim çizgisi (branch cut) integrallerini içeren bu kuple Fredholm integral denklemleri Jones tarafından önerilen yaklaşık iteratif yöntemler ile çözülmüştür. Yukarıda bahsi geçen kesim çizgisi integralleri, yapılarına bağlı olarak ya analitik ya da sayısal olarak değerlendirilmiştir. Fredholm integral denklemleri çiftinde görünen sonsuz bilinmeyenli sabitlerin tahmini kesme sayısı kavramıyla sonlu sayıda oldukları dikkate alınmış ve çözümleri ilgili doğrusal cebirsel denklem sistemlerinden elde edilmiştir. Ardışık basamakların genişliği ve yüksekliği gibi geometrinin karakteristik parametrelerine ilişkin farklı değerlerin, kırınım olayı üzerindeki etkileri ayrıca incelenmiş ve şekillerle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yüksek frekans yaklaşımı, çizgisel kaynak, dal kesim integralleri, Wiener-Hopf denklemi, eyer noktası tekniği, kırınımlı alan.

SUMMARY

In this work a rigorous investigation for the high frequency diffraction of the cylindrical waves by the perfectly conducting successive step discontinuities is considered by using the Fourier transform technique in conjunction with the mode-matching method. The corresponding boundary value problem is first reduced into the solution of a modified scalar Wiener-Hopf equation of the third kind. Then the application of the classical well-known technique to solve this mentioned modified Wiener-Hopf equation yield a pair of Fredholm integral equations of the second kind. These coupled Fredholm integral equations which contain five sets of infinite number of unknown constants satisfying five infinite systems of linear algebraic equations and two types of branch cut integrals are solved approximately by Jones' iterative techniques. The branch cut integrals mentioned above are also evaluated either analytically or numerically due to their types. By the use of estimated truncation number the infinite number of unknown constants appearing in the pair of Fredholm integral equations are considered as they are finite and their solution are obtained by systems of linear algebraic equations. The effects of the different values related to the characteristic parameters of the geometry such as width and height of the successive steps on the diffraction phenomenon are also investigated and shown graphically.

Key Words: High frequency approximation, line source, branch-cut integrals, Wiener-Hopf equation, saddle-point technique, diffracted field.

TEŞEKKÜR

BaŐta, doktora eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalıŐmanın oluŐmasının yolunu ačan danıŐmanım Prof. Dr. Ali ALKUMRU'ya,

Bütün çalıŐmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaŐan değerli jüri hocam Doç. Dr. Fatih DİK MEN'e,

ve göstermiş olduğu sabır ve desteklerinden dolayı sevgili eŐim Nilüfer Akman DOĞAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği	3
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	4
3. MODİFİYE WIENER-HOPF DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	22
4. TOPLAM ALANIN ANALİZİ	35
4.1. $u_1(x, y)$ 'nin Açık İfadesi	35
4.2. $u_2(x, y)$ 'nin Açık İfadesi	41
4.3. $u_4(x, y)$ 'nin Açık İfadesi	43
5. SAYISAL ÖRNEK VE SONUÇLAR	48
6. SAYISAL ÖRNEK VE SONUÇLAR	53
7. SONUÇ	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	64
EKLER	65

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler ve</u> <u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklamalar</u>
∇	: Nabla operatörü
ϕ	: Gözlem açısı
l	: Şerit genişliği
c	: Şerit uzunluğu
N	: Kesme sayısı
α, ξ	: Kompleks parametre veya düzlem
Γ_s	: En dik iniş çizgisi
k	: Ortama ilişkin dalga sayısı
ω	: Açısal frekans
I	: Uyarıcı akım kaynağının genliği
\mathbf{J}_v	: Kompleks akım yoğunluğu
$\delta(\cdot)$: Delta Dirak dağılım fonksiyonu
Z	: Ortama ilişkin karakteristik empedans
Δ	: Laplasyen
F	: Fourier dönüşümü
H	: Helmholtz denklemi
\mathcal{G}	: Green fonksiyonu
$H(\cdot)$: Heaviside birim basamak fonksiyonu
$F(\cdot)$: Fresnel integrali
Γ	: Euler sabiti
RKA	: Radar Kesit Alanı
KGT	: Kırınım Geometrik Teorisi
MWHD	: Modifiye Wiener-Hopf Denklemi
GTÜ	: Gebze Teknik Üniversitesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>	
2.1:	Kırınım probleminin geometrisi ve elektrik alana ilişkin bölgeler.	4
2.2:	Kompleks α ve ξ düzlemlerinde integrasyon ve kesim çizgileri.	8
4.1:	u_1 'nin uzak alan ifadesine ilişkin uzaklık ve açı değerleri.	37
4.2:	Yansıyan dalgalar için bölgeler ve sınırlar.	38
5.1:	N 'nin kesme sayısının farklı değerleri için ϕ gözlem açısına göre $ u_{11}^{kir} $ değişimi.	50
5.2:	N 'nin kesme sayısının farklı değerleri için ϕ gözlem açısına göre $ u_{12}^{kir} $ değişimi.	50
5.3:	1 şerit genişliğinin farklı değerleri için ϕ gözlem açısına göre $ u_{11}^{kir} $ değişimi.	51
5.4:	1 şerit genişliğinin farklı değerleri için ϕ gözlem açısına göre $ u_{12}^{kir} $ değişimi.	52
5.5:	c şerit uzunluğunun farklı değerleri için ϕ gözlem açısına göre $ u_{11}^{kir} $ değişimi.	53
5.6:	c şerit uzunluğunun farklı değerleri için ϕ gözlem açısına göre $ u_{12}^{kir} $ değişimi.	53
5.7:	N kesme sayısının farklı değerleri için ϕ gözlem açısına göre $ u_4^{kir} $ değişimi.	54
5.8:	c şerit uzunluğunun farklı değerleri için $1 = d/2$ şerit genişliğine göre $ u_4^{kir} $ değişimi.	55
5.9:	c şerit uzunluğunun farklı değerleri için $1 = d$ şerit genişliğine göre $ u_4^{kir} $ değişimi.	55
B1.1:	Γ_s en dik iniş çizgisi ve η_s semer noktası	62

1. GİRİŞ

Elektromanyetik dalgaların basamaklı yapılardan oluşmuş olan süreksizliklerden kınınması problemi, başta Radar Kesit Alanı (RKA) olmak üzere, özellikle haberleşme, açık dalga kılavuzları ve anten sentezi gibi birçok mikrodalga mühendisliği uygulamasında büyük önem arz etmektedir. Örneğin, bir çizgisel kaynağa ilişkin alanın sert rüzgarların neden olduğu deniz dalgaları veya büyük gemiler gibi karmaşık yapılardan kınınmasını bilmek, hatasız RKA verilerini elde etmek bakımından oldukça önemlidir. Kompakt aralıklı aynalı reflektörler üzerinde yer alan metalik şeritlerden gerçekleşen kınınım olayının Kınınımın Geometrik Teorisi (KGT) yöntemi ile analizi [1] bu tür basamak tipi süreksizliklerden kınınım problemlerine iyi bir örnek olarak verilebilir.

Bu tür bir problem ilk olarak iki reaktif yarı düzlemin birleşmesinden oluşmuş bir reaktif basamak tipi süreksizlikten yüzeysel dalganın kınınım problemi şeklinde Johansen [2] tarafından ortaya konmuştur. Bu tür basamak tipi süreksizliğe haiz geometriler üzerine yapılmış çalışmaların çoğu düzlemsel dalga ile etkileşim üzerinedir. Bunlar arasında Büyükaksoy-Birbir [3-4] ve Volakis-Ricoy [5]'un çalışmaları en ilgi çekici olanlar olarak gösterilebilir. [3] ve [4]'teki çalışmalarda iki aynı empedans tipi yarı düzlemin sırasıyla, farklı empedans ve reaktif yüzeyler ile karakterize edilen basamaklarla birleştirilmesinden oluşmuş olan tek basamaklı geometrilerden meydana gelen kınınım olayı incelenmiştir. Her iki çalışmada da ele alınan kınınım problemi ilk olarak, çözümü sonsuz bir lineer cebirsel denklem sistemini sağlayan sabitler içeren ikinci türden modifiye Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir. Ardından, her iki probleme ilişkin sistemlerin sayısal çözümleri, yüzey empedanslarının çeşitli değerleri ve farklı basamak yükseklikleri için yapılmıştır. [5]'de ise [3]'teki geometriye benzer bir problem, alt yarı düzlemin mükemmel iletken olduğu durumda hem KGT hem de açısız spektrum yöntemi ile ayrı ayrı incelenmiştir.

Hiç şüphesiz, saçıcılardan sonlu uzaklıklara yerleştirilmiş çizgisel kaynaklar, düzlemsel dalgalardan daha gerçekçi bir kaynak dağılımı yarattıklarından bunlar tarafından aydınlatılmış geometrilerden kınınım problemleri araştırmaya değer bir grup oluşturmaktadır. Bu tür çalışmalar arasından Ayub [6] ve Ahmed [7] tarafından yapılanlar en güncel ve dikkat çekici olanları olarak gösterilebilir. [6]'da iki aynı empedans yarı düzlemlerin söz konusu yarı düzlemlerden farklı türden empedans

özelliğine sahip bir basamak ile birleştirmesinden oluşmuş bir geometriden sonsuz uzun çizgisel bir kaynağın yüksek frekanslı kırınımı başarılı ile incelenmiştir. Benzer şekilde [7]'de de aynı tür bir çizgisel kaynak tarafından uyarılmış silindirik dalgaların mükemmel iletken tek basamaklı geometriden kırınımı problemi etraflıca çözülmüştür.

Yukarıda belirtilen tüm çalışmalarda açıkça görüldüğü üzere geometriler, iki asimetric paralel yarı düzlemin uçlarının birbirlerine dik bir şekilde birleşimleri dikkate alınarak oluşturulmuştur (tek basamaklı süreksizlik). İki asimetric yarı düzlemin kendilerine paralel olacak şekilde aralarında yer alan bir şerit ile uç uca dikey olarak birleştirilmeleri ile oluşan (iki basamaklı süreksizlik) bir saçıcıya ilişkin geometri ardışık basamak tipi süreksizlik olarak isimlendirilir (bkz. Şekil 2.1). Bilinen kadarıyla, [8] haricinde bu tür ardışık basamak süreksizlikleriyle ilgili kırınım problemini çözme girişimi mevcut değildir. Bu tezin amacı, [8]'de bahsedilen çalışmayı genişleterek kesin çözümünü elde edecek şekilde tamamlamaktır. Bu bağlamda, Şekil 2.1'de mükemmel iletken özelliğe sahip yüzeylerden oluşmuş geometri göz önüne alınmış ve z-eksenine paralel sonsuz uzun bir monokromatik S çizgisel kaynağı ile aydınlatılmıştır.

Bu tip bir sınır değer problemini çözmek için, ilk olarak indirgenmiş dalga denklemine basamaklara dik olan eksen boyunca (şekil 2.1'deki x eksenini) Fourier dönüşümü tekniğini uygulanır. Daha sonra mükemmel elektrik iletken yüzeylere ilişkin sınır koşullarının ilgili Fourier uzayında dikkate alınması neticesinde problem üçüncü türden bir modifiye Wiener-Hopf denkleminin (MWHD3) çözümüne indirgenir. Söz konusu MWHD3, ilk önce ikinci türden kuple Fredholm integral denklem çiftine indirgenir ve iterasyonla yaklaşık olarak çözülür. Elde edilen iteratif çözümler, iki tür kesim çizgisi integrallerini ve beş adet sonsuz lineer cebirsel denklem sistemini sağlayan beş farklı sonsuz sabit içermektedir. Bu problemin dikkat çekici bir özelliği ise kesim çizgisi üzerindeki birinci tür integraller $kl \gg 1$ için yaklaşık olarak analitik yapıda değerlendirilebilirken, kesim çizgisi üzerindeki diğer türden integraller ise yapıları gereği ancak sayısal olarak hesaplanabilmektedir. ω , kaynağına ilişkin açılal frekans olmak üzere, bu tez esnasında ortaya çıkan tüm alan büyüklüklerinin zamana bağıllıklarının $e^{-i\omega t}$ çarpanlı monokromatik bir yapıda oldukları dikkate alınmış ve söz konusu bu zaman çarpanı ilgili alan büyüklüklerinden kaldırılarak sadece konuma bağlı ifadeleri ile çalışılmıştır.

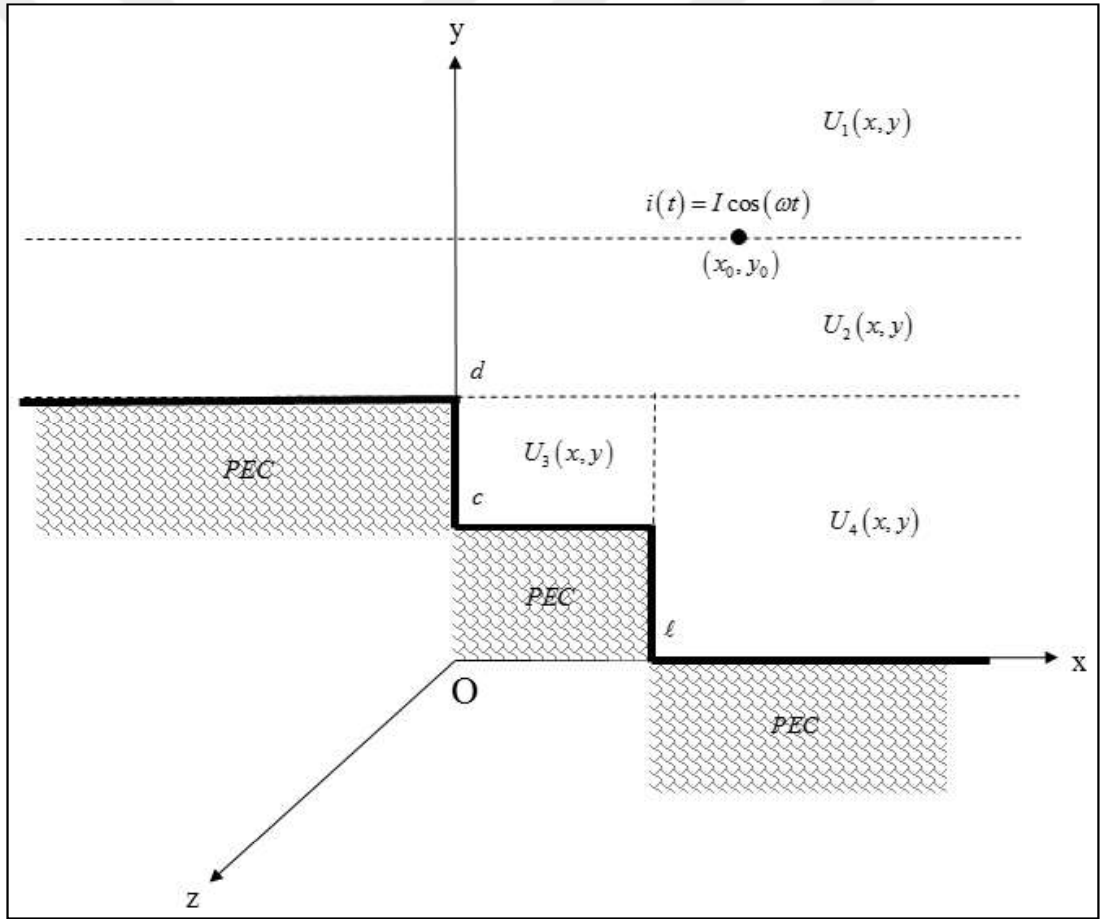
Giriş bölümüne ek olarak bu tezde bölüm 2 ve 3'te problem yukarıda açıklanan şekilde sırasıyla formüle edilmiş ve en genel halinde çözülmüştür. Bölüm 4'te ise alan büyüklüklerinin tüm uzaya ilişkin bölgelerdeki kapsamlı bir analizi ve yorumu yapılmıştır. Bölüm 5'te farklı bölgelerdeki alan büyüklüklerinin basamak süreksizliklerinin çeşitli geometrik değerlerine ilişkin bazı sayısal sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur. Son olarak, elde edilen sonuçlar üzerine birtakım yorumlar ve bunlara ek olarak da gelecek araştırmalara ilişkin bazı dikkat çekici açıklamalar bölüm 6'da yapılmıştır.

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Bu tezin amacı, [3,6,7] çalışmalarında göz önüne alınan tek basamaklı geometrilere farklı olarak [8]'de bahsedilen çalışma genişletilerek kesin çözüm elde edecek şekilde tamamlamaktır. Bu bağlamda, sonsuz uzun bir çizgisel kaynak tarafından uyarılmış elektromanyetik dalgaların mükemmel iletken ardışık basamak tipi süreksizliklerden saçılması, analitik ve nümerik olarak detaylıca incelenmiştir. Bu çalışmada ele alınan basamak sayısı iki olup 5 ayrı kümeden oluşmuş sonsuz bilinmeyenli sabit içeren ve bilinmeyen bir tam fonksiyondan oluşmuş üçüncü türden bir modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümüne gereksinim duyan iki ardışık basamaklı bir kırınım problemi olarak adlandırılır. Söz konusu bu çözüm gayet iyi bilinen klasik Wiener-Hopf tekniği kullanılarak ikinci türden kuple Fredholm integral denklemine indirgenmiş ve bu denklemler iteratif yöntemle yaklaşık olarak çözülmüştür. Bu incelenen problemde kesim çizgisi üzerindeki birinci tür integraller için yaklaşık olarak analitik yapıda değerlendirilebilirken, kesim çizgisi üzerindeki diğer türden integraller ise yapıları gereği ancak sayısal olarak hesaplanabilmektedir. Bu tez esnasında ortaya çıkan tüm alan büyüklüklerinin zamana bağlılıklarının $e^{-i\omega t}$ çarpanlı monokromatik bir yapıda oldukları dikkate alınmış ve söz konusu bu zaman çarpanı ilgili alan büyüklüklerinden kaldırılarak sadece konuma bağlı ifadeleri ile çalışılmıştır. Genel olarak, basamak sayısı ≥ 1 ile gösterilecek olursa ortaya çıkacak Wiener-Hopf denklemi $(i-1)$ sayıda bilinmeyen tam fonksiyon ve bunun yanında $(4i-3)$ adet ayrı kümeden oluşmuş sonsuz bilinmeyenli sabit içeren bir probleme dönüşür ve "i ardışık basamaklı kırınım problemi" olarak adlandırılabilir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Geometrisi, (x, y, z) parametreleriyle tanımlanmış olan bir Kartezyen koordinat sisteminde $z \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $\{y = d, x \in (-\infty, 0)\} \cup \{y \in (c, d), x = 0\} \cup \{y = c, x \in (0, 1)\} \cup \{y \in (0, c), x = 1\} \cup \{y = 0, x \in (1, \infty)\}$ bağıntısı ile verilmiş ve mükemmel iletken bir malzemeden oluşmuş ardışık basamak tipi bir süreksizlikten, $y = y_0, x = x_0$ konumunda bulunan ve üzerinden negatif z yönünde $i(t) = I \cos(\omega t)$ şeklinde monokromatik akım akan sonsuz uzun bir çizgisel kaynağın yarattığı alanının kırınımı problemini göz önüne alalım (Bkn Şekil 2.1):



Şekil 2.1: Kırınım probleminin geometrisi ve elektrik alana ilişkin bölgeler.

Bu durumda söz konusu çizgisel kaynağa ilişkin kompleks akım yoğunluğu vektörü, $\mathbf{J}_v = -I \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \mathbf{z}$ şeklinde gösterilir. Burada, I uyarıcı akım kaynağının genliğini, \mathbf{z} , z ekseninin birim vektörünü, $\delta(\cdot)$ sembolü de delta Dirak

dağılım fonksiyonunu gösterir. Problemin geometrisinden ötürü oluşacak olan toplam monokromatik elektrik alanın kompleks ifadesi iki boyutlu olup, $u^T(x, y)$ skaler fonksiyonu aracılığı ile $\mathbf{E}(x, y) = u^T(x, y)\mathbf{z}$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda ortaya çıkacak olan kompleks Maxwell denklemlerinin eliminasyonu neticesinde

$$(\Delta + k^2)u^T(x, y) = ikZI\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad (2.1)$$

ile verilen Helmholtz denklemi kolayca elde edilir. Bu eşitlikte $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ iki boyutlu Laplasyeni, $Z = 120\pi\Omega$, boş uzayın karakteristik empedansını, k ise boş uzaya ilişkin dalga sayısını gösterir. İleride bahsedileceği üzere problemin çözümüne ilişkin bir regülerlik bölgesi elde etmek için yukarıda bahsi geçen dalga sayısının çok küçük bir imajiner kısmı olduğu varsayılacak ve sonuçta elde edilen büyüklüklerde bu imajiner kısım sıfıra götürülerek esas probleme ilişkin geçerli analitik ifadeler elde edilecektir.

Problemi basitçe formüle edebilmek için, (2.1) denkleminde gözükten $u^T(x, y)$ büyüklüğü, problemin geometrisine bağlı olarak

$$u^T(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y); y > y_0 & ; x \in (-\infty, \infty) \\ u_2(x, y); d < y < y_0 & ; x \in (-\infty, \infty) \\ u_3(x, y); c < y < d & ; x \in (0, 1) \\ u_4(x, y); 0 < y < d & ; x \in (1, \infty) \end{cases} \quad (2.2)$$

olacak şekilde dikkate alınır. Burada gözükten $u_j(x, y)$, $j = 1, \dots, 4$ alanlarının (2.1)'den hareketle aşağıdaki homojen Helmholtz denklemini sağladıkları kolayca görülür:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right] u_j(x, y) = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.3)$$

Şekil 2.1'in yanı sıra (2.1) ve (2.2) de dikkate alındığında $u_j(x, y)$, $j = 1, \dots, 4$ alanlarının

$$u_1(x, y_0) = u_2(x, y_0), \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y_0) = ikZI \delta(x - x_0), \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (2.5)$$

$$u_2(x, d) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (2.6)$$

$$u_2(x, d) = u_3(x, d), \quad 0 < x < 1 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2(x, d) = \frac{\partial}{\partial y} u_3(x, d), \quad 0 < x < 1 \quad (2.8)$$

$$u_2(x, d) = u_4(x, d), \quad 1 < x < \infty \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2(x, d) = \frac{\partial}{\partial y} u_4(x, d), \quad 1 < x < \infty \quad (2.10)$$

$$u_3(x, c) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (2.11)$$

$$u_4(x, 0) = 0, \quad 1 < x < \infty \quad (2.12)$$

$$u_3(0, y) = 0, \quad c < y < d \quad (2.13)$$

$$u_4(1, y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < y < c \\ u_3(1, y) & , \quad c < y < d \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_3(1, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_4(1, y), \quad c < y < d \quad (2.15)$$

ile verilen sınır ve süreklilik koşullarını sağladığı kolayca görülür.

Yukarıda (2.3) ve (2.4-2.15) bağlantıları ile tanımlı sınır değer problemini

çözmek için ilk olarak $y > y_0$ bölgesinde $x \in (-\infty, \infty)$ 'e aralığında (2.3)'deki eşitliğin $u_1(x, y)$ alanına ilişkin ifadesinin, α kompleks bir parametre olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial y^2} + k^2 u_1(x, y) \right] e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (2.16)$$

şeklinde x değişkenine göre Fourier dönüşümü alınacak olursa

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k^2 - \alpha^2) \right] [F_-(\alpha, y) + F_1(\alpha, y) + e^{i\alpha l} F_+(\alpha, y)] = 0 \quad (2.17)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$F_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 u_1(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (2.18)$$

$$F_+(\alpha, y) = \int_1^{\infty} u_1(x, y) e^{i\alpha(x-1)} dx \quad (2.19)$$

$$F_1(\alpha, y) = \int_0^1 u_1(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (2.20)$$

ile tanımlı skaler kompleks fonksiyonlardır. Açıkça görüleceği üzere (2.20) ile tanımlı $F_1(\alpha, y)$ büyüklüğü α parametresine göre kompleks α düzleminin tamamında (muhtemelen sonsuz hariç) regüler olan bir tam fonksiyondur. $x \rightarrow \pm\infty$ için $u_1(x, y)$ 'in $u_1(x, y) = O(e^{ik|x|})$ şeklindeki asimptotik davranışı dikkate alınarak (2.19) ve (2.20)'deki $F_+(\alpha, y)$ ve $F_-(\alpha, y)$ büyüklüklerinin de sırasıyla, (Şekil 2.2)'de gösterilen $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı düzleminde ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ alt yarı düzleminde α 'nın regüler birer fonksiyonu olduğu kolayca belirlenir.

dikkate alınacak olursa $A_1(\alpha) = 0$ eşitliği kolayca elde edilir. Sonuç olarak (2.21) ifadesinin

$$F_-(\alpha, y) + F_1(\alpha, y) + e^{i\alpha l} F_+(\alpha, y) = A(\alpha) e^{iK(\alpha)y} \quad (2.22)$$

bağıntısına dönüştüğü görülür.

İkinci olarak $d < y < y_0$ bölgesine ilişkin $u_2(x, y)$ alanı göz önüne alınıp, (2.3) bağıntısında $u_2(x, y)$ 'e karşılık gelen Helmholtz denkleminin Fourier dönüşümü $x \in (-\infty, \infty)$ için göz önüne alınacak olursa,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + K^2(\alpha) \right] [G_-(\alpha, y) + G_1(\alpha, y) + e^{i\alpha l} G_+(\alpha, y)] = 0 \quad (2.23)$$

denklemini elde edilir. Burada (2.18-2.20)'ye benzer olarak

$$G_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 u_2(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (2.24)$$

$$G_+(\alpha, y) = \int_1^{\infty} u_2(x, y) e^{i\alpha(x-1)} dx \quad (2.25)$$

$$G_1(\alpha, y) = \int_0^1 u_2(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (2.26)$$

ile tanımlı birer skaler kompleks fonksiyondur. Açıkça görüleceği üzere (2.24-2.26) ile verilen $G_-(\alpha, y)$, $G_+(\alpha, y)$ ve $G_1(\alpha, y)$ fonksiyonları sırasıyla, yukarıda tanımlı $F_-(\alpha, y)$, $F_+(\alpha, y)$ ve $F_1(\alpha, y)$ fonksiyonları ile aynı analitik özelliklere sahiptir.

(2.23)'deki diferansiyel denkleme tekrar dönülecek olursa buna ilişkin genel çözüm için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$G_-(\alpha, y) + G_1(\alpha, y) + e^{i\alpha l} G_+(\alpha, y) = B(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-d)} + C(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y-d)} \quad (2.27)$$

Burada gözükten $B(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ büyüklükleri, ilgili sınır ve süreklilik koşulları dikkate alınarak belirlenecek olan henüz bilinmeyen spektral katsayılardır.

Bu amaçla öncelikle, (2.4,2.5) ile verilen bağıntıların Fourier dönüşümleri göz önüne alınıp sonra da (2.22) ve (2.27) denklemlerinde yazılacak olursa

$$A(\alpha) e^{iK(\alpha)(y_0)} - B(\alpha) e^{iK(\alpha)(y_0-d)} = C(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y_0-d)} \quad (2.28)$$

$$A(\alpha) e^{iK(\alpha)(y_0)} - B(\alpha) e^{iK(\alpha)(y_0-d)} = \frac{kZI}{K(\alpha)} e^{i\alpha x_0} - C(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y_0-d)} \quad (2.29)$$

eşitlikleri elde edilir. Bunlardan ise açıkça görüleceği üzere

$$C(\alpha) = \frac{kZI}{2K(\alpha)} e^{i\alpha x_0} e^{iK(\alpha)(y_0-d)} \quad (2.30)$$

ifadesi ortaya çıkar. (2.28), (2.29) ve (2.30) elde edilirken (2.18-2.20) ve (2.24-2.26)'nin yanı sıra $\delta(x-x_0)$ delta Dirak fonksiyonunun Fourier dönüşümünün $e^{i\alpha x_0}$ olduğu da dikkate alınmıştır. (2.27) denkleminin kendisinin ve y 'ye göre türevinin $y=d$ 'deki değerleri, (2.6) sınır koşulunun (2.24)'de yerine konması ile edilen $G_-(\alpha, d)=0$ ile birlikte değerlendirilip, ortaya çıkan eşitliklerden $B(\alpha)$ spektral katsayısı ortadan kaldırılacak olursa

$$\mathcal{G}_-(\alpha, d) + \mathcal{G}_1(\alpha, d) + e^{i\alpha l} \mathcal{G}_+(\alpha, d) = iK(\alpha) [G_1(\alpha, d) + e^{i\alpha l} G_+(\alpha, d) - 2C(\alpha)] \quad (2.31)$$

bağıntısı elde edilir. Burada, (.) ile y 'ye göre türev ifade edilmektedir.

$c < y < d$, $x \in (0,1)$ bölgesinde tanımlı $u_3(x, y)$ alanının sağladığı (2.3)'teki Helmholtz denkleminin

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2 u_3(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3(x, y)}{\partial y^2} + k^2 u_3(x, y) \right] e^{i\alpha x} dx = \int_0^1 0 e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (2.32)$$

şeklindeki sonlu Fourier dönüşümü (2.13) ile verilen sınır koşulu ile beraber dikkate alınacak olursa

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + K^2(\alpha) \right] H_1(\alpha, y) = f(y) - e^{i\alpha} [g(y) - i\alpha h(y)] \quad (2.33)$$

eşitliği elde edilir. Burada $H_1(\alpha, y)$, (2.20) denkleminde $u_1(x, y)$ yerine $u_3(x, y)$ yerleştirilerek elde edilmiş olan ve $F_1(\alpha, y)$ ile aynı analitik özelliklere sahip bir tam fonksiyondur. Ayrıca (2.33)'de gözükten $f(y)$, $g(y)$ ve $h(y)$ büyüklükleri de

$$f(y) = \frac{\partial u_3(0, y)}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$g(y) = \frac{\partial u_3(1, y)}{\partial x} \quad (2.35)$$

$$h(y) = u_3(1, y) \quad (2.36)$$

ile tanımlı, $x=0$ ve $x=1$ düzlemleri üzerinde ilgili magnetik ve elektrik alanların bileşenlerini ifade eden y 'ye göre sürekli bilinmeyen birer fonksiyondur.

Burada (2.33) ile verilen diferansiyel denklemin çözümünün Green fonksiyonu yöntemi ile nasıl elde edildiğini detayları ile incelemek yerinde olacaktır. Bu bağlamda $\mathcal{G}_1(\alpha, y, t)$, $y; t \in (c, d)$ olmak üzere

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K^2(\alpha) \right] \mathcal{G}_1(\alpha, y, t) = \delta(y - t) \quad (2.37)$$

diferansiyel denklemini

$$\mathcal{G}_1(\alpha, d, t) = Y(\alpha, t) \quad (2.38)$$

$$\mathcal{G}_1(\alpha, c, t) = 0 \quad (2.39)$$

sınır koşulları altında sağlayan Green fonksiyonu olsun. (2.37)'nin kendisinden yazılan

$$\mathcal{G}_1(\alpha, t+0, t) = \mathcal{G}_1(\alpha, t-0, t) \quad (2.40)$$

ve

$$\frac{d}{dy} \mathcal{G}_1(\alpha, t+0, t) - \frac{d}{dy} \mathcal{G}_1(\alpha, t-0, t) = 1 \quad (2.41)$$

koşullarının ve $\mathcal{G}_1(\alpha, y, t) = \mathcal{G}_1(\alpha, t, y)$ simetri özelliğinin de dikkate alınması neticesinde (2.37-2.39) ile verilen sınır değer probleminin çözümü olan Green fonksiyonunun açık ifadesi için

$$T_1(\alpha, y, t) = \frac{1}{K(\alpha)} \begin{cases} \sin[K(\alpha)(t-c)] \sin[K(\alpha)(y-d)] , & c \leq t < y \leq d \\ \sin[K(\alpha)(t-d)] \sin[K(\alpha)(y-c)] , & c \leq y < t \leq d \end{cases} \quad (2.42)$$

olmak üzere

$$\mathcal{G}_1(\alpha, y, t) = \frac{T_1(\alpha, y, t)}{\sin[K(\alpha)(d-c)]} \quad (2.43)$$

yazılır. Bu son ifade elde edilirken simetri özelliğinden ortaya çıkan $Y(\alpha, t) = 0$ bağıntısı da göz önünde bulundurulmuştur.

(2.33) ve (2.37) ile verilen eşitliklerin her iki yanının sırasıyla $\mathcal{G}_1(\alpha, y, t)$ ve $H_1(\alpha, y)$ çarpılıp birbirinden çıkartılması neticesinde elde edilen yeni bağıntı $y \in (c, d)$ aralığında integre edilecek olursa

$$\begin{aligned}
H_1(\alpha, d) \mathcal{G}_1(\alpha, d, t) - H_1(\alpha, c) \mathcal{G}_1(\alpha, c, t) - \mathcal{G}_1(\alpha, d, t) H_1(\alpha, d) + \mathcal{G}_1(\alpha, c, t) H_1(\alpha, c) \\
= H_1(\alpha, y) - \int_c^d \mathcal{G}_1(\alpha, y, t) \{f(y) - e^{i\alpha t} [g(y) - i\alpha h(y)]\} dy \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Eşitliğin elde edileceği kolayca görülür. Burada daha evvelce de belirtildiği gibi gene $(.)$ ile y 'ye göre türev ifade edilmektedir. $Y(\alpha, t) = 0$ için yazılan (2.37), (2.38) ve (2.11) sınır koşulu göz önünde bulundurularak yazılan $H_1(\alpha, c) = \int_0^1 u_3(x, c) e^{i\alpha x} dx = 0$ bağıntıları (2.44)'te dikkate alınacak olursa

$$\begin{aligned}
H_1(\alpha, t) = H_1(\alpha, d) \mathcal{G}_1(\alpha, d, t) \\
+ \int_c^d \mathcal{G}_1(\alpha, y, t) \{f(y) - e^{i\alpha t} [g(y) - i\alpha h(y)]\} dy \quad (2.45)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu son eşitlikte, (2.43) ve bunun y 'ye göre türevinden elde edilen

$$\mathcal{G}_1(\alpha, d, t) = \frac{\sin[K(\alpha)(t-c)]}{\sin[K(\alpha)(d-c)]} \quad (2.46)$$

bağıntılarının yanı sıra $t \Leftrightarrow y$ dönüşümü ve Green fonksiyonunun yukarıda bahsi geçen simetriklik özelliği de kullanılarak (2.33) ile verilen homojen olmayan adi diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$H_1(\alpha, y) = \frac{[H_1(\alpha, d) \sin(K(\alpha)(y-c)) + T(\alpha, y)]}{\sin(K(\alpha)(d-c))} \quad (2.47)$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan $T(\alpha, y)$ fonksiyonu $T_1(\alpha, y, t)$ (2.42) ile verilen büyüklük olmak üzere

$$T(\alpha, y) = \int_c^d \left\{ f(t) - e^{i\alpha t} [g(t) - i\alpha h(t)] \right\} T_1(\alpha, y, t) dt \quad (2.48)$$

integral bağıntısı ile tanımlıdır.

(2.47) denkleminin solunda yer alan $H_1(\alpha, y)$, daha önce belirtildiği üzere, kompleks α düzlemi içerisinde bir tam fonksiyon olduğundan aynı denklemin sağ tarafı da gene aynı α düzlemi içerisinde tam fonksiyon olmak zorundadır. (2.47) denkleminin sağ tarafında görünen ve tekillik ihtiva edebilecek noktalar,

$$\alpha_n = k \sqrt{1 - \left[\frac{n\pi}{k(d-c)} \right]^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{Im}(\alpha_n) > \text{Im}(k) \quad (2.49)$$

olmak üzere $\sin[K(\alpha)(d-c)]$ fonksiyonunun sıfırlarından ibaret olan $\alpha = \pm\alpha_n$ basit kutuplardır (Bkn. Şekil 2.2). Dolayısıyla, bu kutuplara ilişkin rezidülerin sıfır olması hali dikkate alınarak söz konusu tekillikler ortadan kaldırılmalıdır. Bu bağlamda,

$$H_1(\pm\alpha_n, d) \sin(K(\pm\alpha_n)(y-c)) + T(\pm\alpha_n, y) = 0 \quad (2.50)$$

eşitliği ile beraber (2.42) ve (2.48) de göz önünde bulundurularak bazı basit hesaplamalar neticesinde

$$H_1(\pm\alpha_n, d) = \frac{(-1)^{n+1} (d-c)}{K_n} \left\{ f_n - e^{\pm i\alpha_n d} [g_n - i(\pm\alpha_n)h_n] \right\} \quad (2.51)$$

bağıntısının sağlanması gerektiği kolayca görülür. Bu son eşitlikte yer alan K_n , f_n , g_n ve h_n

$$K_n = K(\pm\alpha_n) = \frac{n\pi}{(d-c)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.52)$$

$$f_n = \frac{2}{d-c} \int_c^d f(t) \sin[K_n(t-c)] dt, \quad n=1,2,3... \quad (2.53)$$

$$g_n = \frac{2}{d-c} \int_c^d g(t) \sin[K_n(t-c)] dt, \quad n=1,2,3... \quad (2.54)$$

$$h_n = \frac{2}{d-c} \int_c^d h(t) \sin[K_n(t-c)] dt, \quad n=1,2,3... \quad (2.55)$$

ile tanımlı büyüklüklerdir. Burada gözükten f_n , g_n ve h_n büyüklükleri, sırasıyla (2.34, 2.35, 2.36) ile tanımlı $f(y)$, $g(y)$ ve $h(y)$ fonksiyonlarının

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin[K_n(y-c)] \quad (2.56)$$

$$g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin[K_n(y-c)] \quad (2.57)$$

$$h(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin[K_n(y-c)] \quad (2.58)$$

şeklindeki Fourier sinüs seri açılımlarına ilişkin henüz bilinmeyen katsayılardır [9].

(2.7) ile verilen sınır koşulunun her iki yanını $e^{i\alpha x}$ ile çarpılıp $x \in (0,1)$ aralığında integre edilecek olursa

$$G_1(\alpha, d) = H_1(\alpha, d) \quad (2.59)$$

$$G_1(\pm\alpha_n, d) = H_1(\pm\alpha_n, d) \quad (2.60)$$

elde edilir. Bu son eşitlikler elde edilirken (2.26) ile birlikte (2.20)'nin $u_1(x, y)$ yerine $u_3(x, y)$ yazılmış hali de dikkate alınmış ve (2.59)'da $\alpha = \pm\alpha_n$ konmuştur.

Benzer olarak (2.8) sınır koşulunun her iki yanı $e^{i\alpha x}$ ile çarpılıp $x \in (0,1)$ aralığında integre edilecek olursa, (.) y 'ye göre türevi göstermek üzere

$$\mathcal{G}_1(\alpha, d) = \mathcal{H}_1(\alpha, d) \quad (2.61)$$

eşitliği elde edilir. (2.47)'nin y 'ye göre türevinin $y = d$ 'deki değeri ile (2.59) bağıntısı (2.61)'nin sağ tarafında (2.42) ve (2.48) de dikkate alınarak değerlendirilecek olursa,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(\alpha, d) &= \frac{K(\alpha)G_1(\alpha, d)}{\tan[K(\alpha)(d-c)]} \\ &+ \int_0^{d-c} \frac{\sin[K(\alpha)\tau]}{\sin[K(\alpha)(d-c)]} \left\{ f(\tau+c) - e^{i\alpha l} [g(\tau+c) - i\alpha h(\tau+c)] \right\} d\tau \end{aligned} \quad (2.62)$$

bağıntısı elde edilir. (2.62)'de gözüken ve bilinmeyen birer fonksiyon olan $f(\tau+c)$, $g(\tau+c)$ ve $h(\tau+c)$ yerine bunların (2.56, 2.57, 2.58) ile verilmiş seri ifadeleri konup ortaya çıkan integral büyüklükler değerlendirilecek olursa

$$\mathcal{G}_1(\alpha, d) = \frac{K(\alpha)G_1(\alpha, d)}{\tan[K(\alpha)(d-c)]} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_n \frac{f_n - e^{i\alpha l} [g_n - i\alpha h_n]}{\alpha^2 - \alpha_n^2} \quad (2.63)$$

eşitliğine erişilir.

Son olarak, $0 < y < d$ ve $x > 1$ bölgesinde tanımlı $u_4(x, y)$ alanının (2.3)'de sağladığı Helmholtz denkleminin

$$\int_1^{\infty} \left[\frac{\partial^2 u_4(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4(x, y)}{\partial y^2} + k^2 u_4(x, y) \right] e^{i\alpha x} dx = \int_1^{\infty} 0 e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (2.64)$$

şeklindeki yarı sonsuz Fourier dönüşümü alınacak olursa

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + K^2(\alpha) \right] H_+(\alpha, y) = m(y) - i\alpha n(y) \quad (2.65)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $H_+(\alpha, y)$, $u_1(x, y)$ yerine $u_4(x, y)$ koyarak (2.19) denkleminde elde edilen ve α parametresi için $F_+(\alpha, y)$ ile aynı analitik özelliklere sahip bir fonksiyondur. Ayrıca (2.65)'de gözükten $m(y)$ ve $n(y)$ büyüklükleri de

$$m(y) = \frac{\partial u_4(1, y)}{\partial x} \quad (2.66)$$

$$n(y) = u_4(1, y) \quad (2.67)$$

ile tanımlı, sırasıyla $x=1$ düzlemi üzerindeki magnetik ve elektrik alanların bileşenlerini ifade eden y 'ye göre sürekli bilinmeyen birer fonksiyondur.

Yukarıda (2.33) diferansiyel denkleminin çözümü yapılırken detayları ile açıklanan yöntemin aynısı, bu sefer $y; t \in (0, d)$ olmak üzere

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K^2(\alpha) \right] \mathcal{G}_2(\alpha, y, t) = \delta(y-t) \quad (2.68)$$

denklemini

$$\mathcal{G}_2(\alpha, d, t) = Z_2(\alpha, t) \quad (2.69)$$

$$\mathcal{G}_2(\alpha, 0, t) = 0 \quad (2.70)$$

$$\mathcal{G}_2(\alpha, t+0, t) = \mathcal{G}_2(\alpha, t-0, t) \quad (2.71)$$

$$\mathcal{G}_2(\alpha, t+0, t) - \mathcal{G}_2(\alpha, t-0, t) = 1 \quad (2.72)$$

sınır koşulları altında sağlayan $\mathcal{G}_2(\alpha, y, t)$ Green fonksiyonu aracılığıyla, (2.65)'nin (2.12) sınır koşulu altındaki genel çözümünü için uygulanacak olursa

$$H_+(\alpha, y) = \frac{[H_+(\alpha, d)\sin(K(\alpha)y) + \mathcal{P}(\alpha, y)]}{\sin(K(\alpha)d)} \quad (2.73)$$

ifadesi elde edilir. Burada gözüken $\mathcal{P}(\alpha, y)$ fonksiyonu

$$T_2(\alpha, y, t) = \frac{1}{K(\alpha)} \begin{cases} \sin[K(\alpha)t]\sin[K(\alpha)(y-d)], & 0 \leq t < y \leq d \\ \sin[K(\alpha)(t-d)]\sin[K(\alpha)y], & 0 \leq y < t \leq d \end{cases} \quad (2.74)$$

olmak üzere

$$\mathcal{P}(\alpha, y) = \int_0^d [m(t) - i\alpha n(t)] T_2(\alpha, y, t) dt \quad (2.75)$$

ile tanımlıdır. (2.73) yazılırken gene Green fonksiyonlarının temel özelliği olan simetriklikten faydalanılarak elde edilen $Z_2(\alpha, t) = 0$ bağıntısı da dikkate alınmıştır.

$H_+(\alpha, y)$, $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ üst yarı kompleks α düzleminde regüler olduğundan (2.73)'ün sağ yanı da aynı yarı düzlemde α 'nın regüler bir fonksiyonu olmalıdır. Bu nedenden ötürü, $\sin[K(\alpha)d] = 0$ denkleminin kökleri olan ve (2.73) denkleminin sağ tarafının biricik tekil noktalarını oluşturan

$$\alpha = \beta_n = k \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kd}\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{Im}(\beta_n) > \text{Im}(k) \quad (2.76)$$

basit kutuplarına ilişkin rezidülerin sıfır olması gerekliliğinden hareketle

$$H_+(\beta_n, d) = \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_n} \frac{d}{2} (m_n - i\beta_n n_n) \quad (2.77)$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede

$$\gamma_n = K(\beta_n) = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.78)$$

m_n ve n_n büyüklükleri de (2.66, 2.67) fonksiyonlarının

$$m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sin(\gamma_n y) \quad (2.79)$$

$$n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n_n \sin(\gamma_n y) \quad (2.80)$$

şeklindeki Fourier-Sinüs serilerinin katsayıları olup

$$m_n = \frac{2}{d} \int_0^d m(t) \sin(\gamma_n t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.81)$$

$$n_n = \frac{2}{d} \int_0^d n(t) \sin(\gamma_n t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.82)$$

bağıntıları ile tanımlıdır.

(2.9) ve (2.10) sınır koşullarının her iki yanını $e^{i\alpha(x-1)}$ ile çarpılıp $x \in (1, \infty)$ aralığında integre edilecek olursa sırasıyla,

$$G_+(\alpha, d) = H_+(\alpha, d) \quad (2.83)$$

$$G_+(\beta_n, d) = H_+(\beta_n, d) \quad (2.84)$$

ve $(.)_y$ 'ye göre türevi göstermek üzere

$$\mathcal{G}_+(\alpha, d) = \mathcal{H}_+(\alpha, d) \quad (2.84)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.83, 2.84) yazılırken, (2.25) ile birlikte (2.19)'de $u_1(x, y)$ yerine $u_3(x, y)$ konmuş halini ve $\alpha = \beta_n$ değerlerinin göz önüne alındığına dikkat edilmelidir. (2.73) denkleminin y 'ye göre türevinin $y = d$ 'deki değeri ile (2.83) birlikte (2.85)'de yerine konacak olursa

$$\mathcal{G}_+(\alpha, d) = \frac{1}{\sin[K(\alpha)d]} \left\{ K(\alpha)G_+(\alpha, d)\cos[K(\alpha)d] + \int_0^d [m(t) - i\alpha n(t)] \sin[K(\alpha)t] dt \right\} \quad (2.86)$$

elde edilir. (2.86) ortaya çıkarken (2.74, 2.75)'nin de kullanıldığını belirtmek yerinde olur. Yukarıdaki son eşitlikte gözükten $m(t)$ ve $n(t)$ fonksiyonları yerine bunların (2.79, 2.80) ile verilen seri ifadeleri konup ortaya çıkan integraller değerlendirilecek olursa sonuçta

$$\mathcal{G}_+(\alpha, d) = \frac{K(\alpha)G_+(\alpha, d)}{\tan[K(\alpha)d]} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \gamma_n \frac{(m_n - i\alpha n_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} \quad (2.87)$$

bağıntısına ulaşılır.

Yukarıda yer alan $\mathcal{G}_1(\alpha, d)$ ve $\mathcal{G}_+(\alpha, d)$ kompleks değerli fonksiyonların sırasıyla (2.63) ve (2.87) ile verilen değerleri (2.31)'deki eşitlikte yerlerine konacak olursa, bir takım basit matematiksel hesaplamalar ardından $\text{Im}(k) > \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ bandında geçerli olan

$$\frac{G_1(\alpha, d)}{M(\alpha)} + e^{i\alpha l} \frac{G_+(\alpha, d)}{N(\alpha)} + \mathcal{G}_-(\alpha, d) = -2iK(\alpha)C(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} + e^{i\alpha l} \left[\frac{\gamma_n (m_n - i\alpha n_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} - \frac{K_n (g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \right] \right\} \quad (2.88)$$

şeklindeki 3. türden modifiye Wiener-Hopf denkleminde ulaşılır. Bu son ifade de

gözüken $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ çekirdek fonksiyonları

$$M(\alpha) = \frac{1}{K(\alpha)} \sin[K(\alpha)(d-c)] e^{iK(\alpha)(d-c)} \quad (2.89)$$

ve

$$N(\alpha) = \frac{1}{K(\alpha)} \sin[K(\alpha)d] e^{iK(\alpha)d} \quad (2.90)$$

ile tanımlıdır.

3. Modifiye Wiener-Hopf Denkleminin Yaklaşık Çözümü

Yukarıda (2.88) ile verilen 3. türden modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözüme ilişkin ilk ve en önemli adım $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ çekirdek fonksiyonlarının, $M_+(\alpha)$, $N_+(\alpha)$ $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ bölgesinde regüler (+ türden) ve sıfırdan farklı, $M_-(\alpha)$, $N_-(\alpha)$ da $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bölgesinde regüler (- türden) ve sıfırdan farklı birer fonksiyon olmak üzere

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha) \quad (3.1)$$

$$N(\alpha) = N_+(\alpha)N_-(\alpha) \quad (3.2)$$

şeklindeki faktörizasyonlarıdır. Bu faktörizasyon tekniği $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ 'nin (2.89, 2.90)'deki gibi olan ifadeleri için açık literatürde kapsamlıca incelenmiş ve açıklanmıştır [10, 11]. Bu tekniği tekrar detaylıca ele almak yeni bir bilgi kazandırmayacağı için bu tez kapsamında sadece $M_{\pm}(\alpha)$ ve $N_{\pm}(\alpha)$ 'nin

$$M_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\sin(k(d-c))}{k}} e^{\frac{K(\alpha)(d-c)}{\pi} \ln \left[\frac{\alpha+iK(\alpha)}{k} \right]} e^{\frac{i\alpha(d-c)}{\pi} \left[1-\Gamma+\ln \left(\frac{2\pi}{k(d-c)} \right) + i\frac{\pi}{2} \right]} \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) e^{\frac{i\alpha(d-c)}{n\pi}} \quad (3.3)$$

$$N_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\sin(kd)}{k}} e^{\frac{K(\alpha)d}{\pi} \ln \left[\frac{\alpha+iK(\alpha)}{k} \right]} e^{\frac{i\alpha d}{\pi} \left[1-\Gamma+\ln \left(\frac{2\pi}{kd} \right) + i\frac{\pi}{2} \right]} \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_n} \right) e^{\frac{i\alpha d}{n\pi}} \quad (3.4)$$

$$M_-(\alpha) = M_+(-\alpha) \quad (3.5)$$

$$N_-(\alpha) = N_+(-\alpha) \quad (3.6)$$

ile elde edilmiş olan açık ifadelerini yazmakla yetinilmiştir [10, 11, 12]. (3.3, 3.4)'te gözüken Γ büyüklüğü ile $\Gamma = 0.5772156649\dots$ Euler sabiti kastedilmektedir.

$M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ (3.1, 3.2) şeklinde tanımlı ifadeleri (2.88) denkleminde yerine konur ve eşitliğin her iki yanını $M_-(\alpha)$ ile çarpılacak olursa

$$\frac{G_+(\alpha, d)}{M_+(\alpha)} + G_-(\alpha, d)M_-(\alpha) + \frac{G_+(\alpha, d)M_-(\alpha)}{N(\alpha)} e^{i\alpha l} = -2iK(\alpha)C(\alpha)M_-(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} M_-(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M_-(\alpha) e^{i\alpha l} \left\{ \frac{\gamma_n [m_n - i\alpha n_n]}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} - \frac{K_n [g_n - i\alpha h_n]}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \right\} \quad (3.7)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden açık görüleceği üzere eşitliğin sol yanında yer alan ilk terim $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ bölgesinde, ikinci terim ise $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bölgesinde regüler olan birer fonksiyondur. Geri kalan tüm terimler ise karışık türden fonksiyonlardır.

$\Psi(\alpha)$ fonksiyonu yukarıda bahsi geçen karışık türden fonksiyonlardan herhangi birini göstermek üzere bunların, detayları [12, 13]'de açıklanan yöntem aracılığı ile

$$\Psi_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{\Psi(\zeta)}{(\zeta - \alpha)} d\zeta \quad (3.8)$$

$$\Psi_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \frac{\Psi(\zeta)}{(\zeta - \alpha)} d\zeta \quad (3.9)$$

sırasıyla, $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ bölgesinde (+ türden) ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bölgesinde (- türden) regüler birer fonksiyon olmak üzere

$$\Psi(\alpha) = \Psi_+(\alpha) + \Psi_-(\alpha) \quad (3.10)$$

şeklindeki dekompozisyonları (ayrıştırılmaları) yapılacak olursa (3.7) için ilk olarak

$$\begin{aligned}
& \frac{G_1(\alpha, d)}{M_+(\alpha)} + \mathfrak{G}_-(\alpha, d)M_-(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{G_+(\zeta, d)M_-(\zeta)}{N(\zeta)} \frac{e^{i\zeta_1}}{(\zeta - \alpha)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{G_+(\zeta, d)M_-(\zeta)}{N(\zeta)} \frac{e^{i\zeta_1}}{(\zeta - \alpha)} d\zeta \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_{L_+} \frac{K(\zeta)C(\zeta)M_-(\zeta)}{(\zeta - \alpha)} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{L_-} \frac{K(\zeta)C(\zeta)M_-(\zeta)}{(\zeta - \alpha)} d\zeta \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{2\alpha_n (\alpha - \alpha_n)} M_-(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{2\alpha_n (\alpha + \alpha_n)} M_-(\alpha) \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{2\alpha_n (\alpha + \alpha_n)} [M_-(\alpha) - M_-(\alpha_n)] \\
& + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \gamma_n \int_{L_+} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta_1} [m_n - i\zeta n_n]}{(\zeta^2 - \beta_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \\
& - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \gamma_n \int_{L_-} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta_1} [m_n - i\zeta n_n]}{(\zeta^2 - \beta_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \\
& - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n K_n \int_{L_+} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta_1} [g_n - i\zeta h_n]}{(\zeta^2 - \alpha_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \\
& + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n K_n \int_{L_-} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta_1} [g_n - i\zeta h_n]}{(\zeta^2 - \alpha_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \tag{3.11}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda yer alan tüm integrallerde gözükten L_+ ve L_- integrasyon çizgileri kompleks ζ düzleminin reel eksenine paralel olan sonsuz uzun doğrulardır (Bkn. Şekil 2.2). (3.11) eşitliğinde (+) ve (-) türden fonksiyonlar eşitliğin her iki yanında toplanacak olursa

$$\begin{aligned}
& \frac{G_1(\alpha, d)}{M_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{G_+(\zeta, d)M_-(\zeta)}{N(\zeta)(\zeta - \alpha)} e^{i\zeta_1} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{L_-} \frac{K(\zeta)C(\zeta)M_-(\zeta)}{(\zeta - \alpha)} d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{2\alpha_n (\alpha + \alpha_n)} M_-(\alpha) \\
& - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \gamma_n \int_{L_+} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta_1} [m_n - i\zeta n_n]}{(\zeta^2 - \beta_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n K_n \int_{L_+} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta_1} [g_n - i\zeta h_n]}{(\zeta^2 - \alpha_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \\
& = -\mathfrak{G}_-(\alpha, d)M_-(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{G_+(\zeta, d)M_-(\zeta)}{N(\zeta)} \frac{e^{i\zeta_1}}{(\zeta - \alpha)} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{L_-} \frac{K(\zeta)C(\zeta)M_-(\zeta)}{(\zeta - \alpha)} d\zeta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{2\alpha_n} \left[\frac{M_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} - \frac{M_-(\alpha)}{(\alpha + \alpha_n)} + \frac{M_-(-\alpha_n)}{(\alpha + \alpha_n)} \right] \\
& - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \gamma_n \int_{L^-} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta} [m_n - i\zeta n_n]}{(\zeta^2 - \beta_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \\
& + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n K_n \int_{L^-} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta} [g_n - i\zeta h_n]}{(\zeta^2 - \alpha_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \tag{3.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa (3.12)'nin sol yanı $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ bölgesinde, sağ yanı ise $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bölgesinde regüler ve sırasıyla (+) ve (-) türden birer fonksiyonu temsil etmektedir. Bu ise Wiener-Hopf denklemlerinin çözüm felsefesini oluşturan analitik devam ilkesi uyarınca $\Omega(\alpha)$ tam fonksiyon olmak üzere

$$\Omega(\alpha) = \begin{cases} \Omega_+(\alpha) ; \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k) \\ \Omega_-(\alpha) ; \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k) \end{cases} \tag{3.13}$$

yazılmasına olanak verir. Burada gözüken $\Omega_+(\alpha)$ ve $\Omega_-(\alpha)$ fonksiyonları sırasıyla (3.12) eşitliğinin sol ve sağ yanlarına temsil etmektedir. Dolayısıyla (3.13) $\text{Im}(k) > \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ bandında $\Omega_+(\alpha) = \Omega_-(\alpha)$ anlamına gelmektedir.

$M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ 'nin (2.89, 2.90) ile verilen açık ifadeleri ile (3.1, 3.2) ve (3.5, 3.6) birlikte değerlendirilecek olursa $|\alpha| \rightarrow \infty$ için

$$M_{\pm}(\alpha) = N_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2}) \tag{3.14}$$

gibi olduğu kolayca gözüktür. Ayrıca $x \rightarrow 0^-$ için $u_2(x, d) = O(|x|^{2/3})$ ve

$\frac{\partial}{\partial y} u_2(x, d) = O(|x|^{-1/3})$ ile verilen dik kama koşulları [14] dikkate alınacak olursa

$|\alpha| \rightarrow \infty$ için

$$G_1(\alpha, d) = O(\alpha^{-5/3}) \quad (3.15)$$

$$\mathcal{G}_-(\alpha, d) = O(\alpha^{-2/3}) \quad (3.16)$$

davranışları elde edilir. (3.14) ve (3.15, 3.16) bağıntıları (3.13)'de gözükten $\Omega_{\pm}(\alpha)$ fonksiyonlarının $|\alpha| \rightarrow \infty$ için olan limit değerlerinde dikkate alınacak olursa, Liouville teoremi [15] uyarınca $\Omega(\alpha) = 0$ sonucu elde edilir. Bu da (3.13)'den hareketle hem $\Omega_+(\alpha)$ 'nın hem de $\Omega_-(\alpha)$ 'nın başka bir deyişle de (3.12)'nin sol ve sağ yanlarının ayrı ayrı sifıra eşit oldukları anlamına gelir. Böylece sağ yandan hareketle

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_-(\alpha, d)M_-(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \frac{G_+(\zeta, d)M_-(\zeta)}{N(\zeta)} \frac{e^{i\zeta}}{(\zeta - \alpha)} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \frac{K(\zeta)C(\zeta)M_-(\zeta)}{(\zeta - \alpha)} d\zeta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{2\alpha_n} \left[\frac{M_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} - \frac{M_-(\alpha)}{(\alpha + \alpha_n)} + \frac{M_+(\alpha_n)}{(\alpha + \alpha_n)} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \gamma_n \int_{L^-} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta} [m_n - i\zeta n_n]}{(\zeta^2 - \beta_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n K_n \int_{L^-} \frac{M_-(\zeta) e^{i\zeta} [g_n - i\zeta h_n]}{(\zeta^2 - \alpha_n^2)(\zeta - \alpha)} d\zeta \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

yazılır. Basit bir takım düzenlemeler neticesinde yukarıdaki eşitliğin

$$\begin{aligned} M_-(\alpha)R(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \frac{M_-(\xi)S(\xi)e^{i\xi}}{(\xi - \alpha)} d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n(\alpha + \alpha_n)} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \frac{M_-(\xi)C(\xi)K(\xi)}{(\xi - \alpha)} d\xi \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklinde çok daha sade bir ifadesi verilebilir. Bu son ifadede gözükten $R(\alpha)$ ve $S(\alpha)$

fonksiyonları

$$L(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[\frac{K_m(g_m - i\alpha h_m)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} - \frac{\gamma_m(m_m - i\alpha n_m)}{(\alpha^2 - \beta_m^2)} \right] \quad (3.19)$$

olmak üzere

$$R(\alpha) = \mathcal{G}_-(\alpha, d) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \quad (3.20)$$

ve

$$S(\alpha) = \frac{G_+(\alpha, d)}{N(\alpha)} + L(\alpha) \quad (3.21)$$

olarak tanımlıdır.

Yukarıda (3.18) ile verilen ifade elde edilirken yapılan tüm işlemlerin aynısı (2.88)'nin her iki yanı bu sefer $N_-(\alpha)M_+(\alpha)e^{-i\alpha l}$ ile çarpılıp tekrar edilecek olursa

$$\begin{aligned} M_+(\alpha)N_-(\alpha)S(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{M_+(\xi)N_-(\xi)R(\xi)e^{-i\xi l}}{(\xi - \alpha)} d\xi \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n(g_n - i\alpha_n h_n)M_+(\alpha_n)N_-(\alpha_n)}{2\alpha_n(\alpha - \alpha_n)} \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{L^+} \frac{M_+(\xi)N_-(\xi)C(\xi)K(\xi)e^{-i\xi l}}{(\xi - \alpha)} d\xi + J(\alpha) \end{aligned} \quad (3.22)$$

denkleminin ortaya çıkacağı kolayca görülür. Bu son eşitlikte

$$J(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{C_2^+} \frac{M_+(\xi)}{N_+(\xi)} \frac{\sin^2(K(\xi)d)}{K(\xi)} \frac{L(\xi)}{(\xi - \alpha)} d\xi \quad (3.23)$$

olmak üzere Şekil 2.2’de yer alan C_2^+ kesim çizgisi üzerinde yazılmış integrali göstermektedir. Gene (3.22)’de yer alan $R(\xi)$ ve $S(\alpha)$ ifadeleri de daha önce sırasıyla (3.20) ve (3.21)’de tanımlanmış olan büyüklüklerdir.

(3.18) ve (3.22) denklemleri beraber dikkate alındığında ikinci türden Fredholm tipi kuple (bağlı) integral denklem sistemi oluşturdukları görülür. Bu tür sistemlerin çözümünü, detayları [16,17] de açıklandığı üzere, k dalga sayısı l de basamak genişliğini gösteren büyüklüklerin $kl \gg 1$ koşulunu sağlamaları durumunda iteratif bir yöntemle elde etmek mümkündür. Bu bağlamda, (3.18)’nin sağ yanının $S(\xi)$ içeren integralin dışında kalan kısmı ile (3.22)’nin sağ yanının $R(\xi)$ içeren integralin dışında kalan kısımları kuple integral denklem sisteminin serbest terimleri olarak adlandırılır ve sırasıyla $R(\alpha)$ ve $S(\alpha)$ için söz konusu iterasyonun başlangıç değerlerini verirler. Daha sonra bu başlangıç değerleri ilgili integrallerde yerlerine konup ortaya çıkan integraller değerlendirilerek iteratif çözüm elde edilmeye çalışılır. Bu yöntem sonuçta $R(\alpha)$ ve $S(\alpha)$ için

$$R(\alpha) = \frac{1}{M_-(\alpha)} \sum_{j=1}^{\infty} P^{(j)}(\alpha) \quad (3.24)$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{M_+(\alpha)N_-(\alpha)} \sum_{j=1}^{\infty} Q^{(j)}(\alpha) \quad (3.25)$$

yazılmasına olanak sağlar. Burada, $j=1,2,\dots$ için $P^{(j)}(\alpha)$ ve $Q^{(j)}(\alpha)$, sırasıyla $R(\alpha)$ ve $S(\alpha)$ fonksiyonlarına ilişkin j ’inci mertebeden iteratif çözümü gösterir. [9]’da açıklandığı üzere, $j \geq 2$ iken $P^{(j)}(\alpha)$ ve $Q^{(j)}(\alpha)$ iteratif çözümlere ilişkin ifadeler, kl basamak genişliğinin büyük değerleri için $O\left[(kl)^{-j+\frac{1}{2}}\right]$ mertebesinde, $k(d-c)$ ve kc basamak yüksekliklerinin küçük değerleri için de $O\left[\left(\max\{k(d-c), kc\}\right)^{j-1}\right]$ mertebesinde dirler. Dolayısıyla $\max\{(d-c), c\} \ll 1$ kriteri altında $j \geq 3$ ’e ilişkin yüksek dereceli çözümler, bu çalışma içerisinde ihmal

edilerek, sonuçta (2.88) ile verilen üçüncü türden modifiye Wiener-Hopf denkleminde

$$G_1(\alpha, d) \approx -2iK(\alpha)C(\alpha)M(\alpha) - e^{i\alpha l} \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \sum_{j=1}^2 Q^{(j)}(\alpha) - M_+(\alpha) \sum_{j=1}^2 P^{(j)}(\alpha) \quad (3.26)$$

yaklaşık çözümü elde edilir. (3.26) elde edilirken (3.24) ve (3.25)'nin $j \leq 2$ için ortaya çıkan ifadelerinin $\mathcal{G}_-(\alpha, d)$ ve $G_+(\alpha, d)$ 'nin yaklaşık ifadelerini bulmak amacıyla sırasıyla (3.20) ve (3.21) de yerine kondukları ve bu yaklaşık ifadelerin de (2.88)'de dikkate alındığını belirtmek yerinde olur. (2.88)'in bir diğer çözümü olan $G_+(\alpha, d)$ için de gene $j \leq 2$ olmak üzere (3.25) ve (3.21)'in birlikte değerlendirilmesi neticesinde

$$G_+(\alpha, d) \approx \frac{N_+(\alpha)}{M_+(\alpha)} \sum_{j=1}^2 Q^{(j)}(\alpha) - N(\alpha)L(\alpha) \quad (3.27)$$

yaklaşık ifadesi ortaya çıkar.

Yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda (3.26) ve (3.27)'de gözükten $P^{(j)}(\alpha)$ ve $Q^{(j)}(\alpha)$ fonksiyonlarının açık ifadeleri $j = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \frac{M_-(\xi)C(\xi)K(\xi)}{(\xi - \alpha)} d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n(\alpha + \alpha_n)} \\ &= \frac{kZI}{4\pi i} \int_{L^-} \frac{[e^{iK(\xi)(y_0+d-2c)} - e^{iK(\xi)(y_0-d)}] e^{i\xi x_0}}{M_+(\xi)K(\xi)(\xi - \alpha)} d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n(\alpha + \alpha_n)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(\alpha) &= -\frac{1}{\pi} \int_{L^+} \frac{M_+(\xi)N_-(\xi)C(\xi)K(\xi)e^{-i\xi l}}{(\xi - \alpha)} d\xi \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n (g_n - i\alpha_n h_n) M_+(\alpha_n) N_-(\alpha_n)}{2\alpha_n(\alpha - \alpha_n)} + J(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{kZI}{4\pi i} \int_{L^+} \frac{M_+(\xi) \sin[K(\xi)d] \left[e^{iK(\xi)(y_0-c)} - e^{iK(\xi)(y_0+c)} \right]}{N_+(\xi) \sin[K(\xi)c] K(\xi)(\xi-\alpha)} e^{i\xi(x_0-1)} d\xi \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n(g_n - i\alpha_n h_n) M_+(\alpha_n) N_-(\alpha_n)}{2\alpha_n(\alpha - \alpha_n)} + J(\alpha) \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(2)}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \frac{M_-(\xi) Q^{(1)}(\xi) e^{i\xi l}}{M_+(\xi) N_-(\xi)(\xi-\alpha)} d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{C_2^+} \frac{N_+(\xi) \sin[K(\xi)(d-c)]}{[M_+(\xi)]^2 \sin[K(\xi)d]} \sin[K(\xi)c] \frac{Q^{(1)}(\xi) e^{i\xi l}}{(\xi-\alpha)} d\xi \\
&\quad + \frac{i\pi}{2d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\beta_n} \frac{Q^{(1)}(\beta_n) N_+(\beta_n) [1 - e^{-2in\pi c/d}]}{[M_+(\beta_n)]^2 (\alpha - \beta_n)} e^{i\beta_n l} \tag{3.30}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Q^{(2)}(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{M_+(\xi) N_-(\xi) P^{(1)}(\xi) e^{-i\xi l}}{M_-(\xi)(\xi-\alpha)} d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{C_1^+} \frac{N_-(\xi) \sin^2[K(\xi)(d-c)]}{[M_-(\xi)]^2 K(\xi)} \frac{P^{(1)}(\xi) e^{-i\xi l}}{(\xi-\alpha)} d\xi \tag{3.31}
\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.30, 3.31)'de gözükten C_2^+ ve C_1^+ kesim çizgisi üzerindeki integraller, L^- ve L^+ 'ye ilişkin integrallerin Jordan Lemması ve rezidü teoremi uyarınca sırasıyla C_2^+ ve C_1^+ kesim çizgileri üzerine ötelenmesi neticesinde ortaya çıkmışlardır (Bkn. Şekil 2.2).

(3.28) ve (3.29)'da gözükten sırasıyla L^- ve L^+ eğrilerine ilişkin integrallerin üniform asimptotik ifadeleri gerek [18,19]'da ve gerekse de [Ek-B]'de etraflıca açıklanmış olan en dik iniş çizgisi yöntemi ile

$$\begin{aligned}
P^{(1)}(\alpha) &\approx \frac{kZI}{2} \frac{e^{i[\alpha x_0 + K(\alpha)(y_0-d)]}}{M_+(\alpha) K(\alpha)} H[\text{Im}(\alpha - k \cos \phi_0)] \\
&\quad - \frac{kZI}{2} \frac{e^{i[\alpha x_0 + K(\alpha)(y_0+d-2c)]}}{M_+(\alpha) K(\alpha)} H[\text{Im}(\alpha - k \cos \phi_0^*)] + \mathcal{P}^{(0)}(\alpha) \tag{3.32}
\end{aligned}$$

ve

$$Q^{(1)}(\alpha) \approx \frac{kZI}{2} \frac{M_+(\alpha)}{N_+(\alpha)} \frac{\sin[K(\alpha)d]}{\sin[K(\alpha)c]} \frac{e^{i[\alpha(x_0-1)+K(\alpha)(y_0-c)]}}{K(\alpha)} H[\text{Im}(k \cos \psi_0 - \alpha)]$$

$$- \frac{kZI}{2} \frac{M_+(\alpha)}{N_+(\alpha)} \frac{\sin[K(\alpha)d]}{\sin[K(\alpha)c]} \frac{e^{i[\alpha(x_0-1)+K(\alpha)(y_0+c)]}}{K(\alpha)} H[\text{Im}(k \cos \psi_\phi - \alpha)] + \mathcal{Q}^{(1)}(\alpha) \quad (3.33)$$

olacak şekilde düzgün asimptotik olarak elde edilir. Yukardaki ifadelerde $H(\cdot)$ büyüklüğü, Heaviside birim basamak fonksiyonu olup, $\mathcal{P}^{(1)}(\alpha)$ ve $\mathcal{Q}^{(1)}(\alpha)$ da

$$\mathcal{P}^{(1)}(\alpha) = -e^{i\pi/4} \frac{kZI}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{M_+(k \cos \phi_0)(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{e^{ik\rho_0}}{\sqrt{k\rho_0}} F\left[\frac{1}{2}k\rho_0(\phi_0 - \arccos(\alpha/k))^2\right]$$

$$+ e^{i\pi/4} \frac{kZI}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{M_+(k \cos \phi_0^0)(\alpha - k \cos \phi_0^0)} \frac{e^{ik\rho_\phi^0}}{\sqrt{k\rho_\phi^0}} F\left[\frac{1}{2}k\rho_\phi^0(\phi_0^0 - \arccos(\alpha/k))^2\right]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m K_m f_m M_+(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha + \alpha_m)} \quad (3.34)$$

ve

$$\mathcal{Q}^{(1)}(\alpha) = e^{i\pi/4} \frac{kZI}{2\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(k \cos \psi_0)}{N_+(k \cos \psi_0)} \frac{\sin(kd \sin \psi_0)}{\sin(kc \sin \psi_0)} \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} \frac{F\left[\frac{1}{2}kr_0(\psi_0 - \arccos(\alpha/k))^2\right]}{(\alpha - k \cos \psi_0)}$$

$$- e^{i\pi/4} \frac{kZI}{2\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(k \cos \psi_\phi)}{N_+(k \cos \psi_\phi)} \frac{\sin(kd \sin \psi_\phi)}{\sin(kc \sin \psi_\phi)} \frac{e^{ik\rho_\phi^0}}{\sqrt{k\rho_\phi^0}} \frac{F\left[\frac{1}{2}k\rho_\phi^0(\psi_\phi - \arccos(\alpha/k))^2\right]}{(\alpha - k \cos \psi_\phi)}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m K_m (g_m - i\alpha_m h_m) M_+(\alpha_m) N_-(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha - \alpha_m)} + J(\alpha) \quad (3.35)$$

ile gösterilen kompleks değişkenli fonksiyonlardır.

(3.34, 3.35)'de yer alan $\phi_0, \phi_0^0, \psi_0, \psi_\phi \in (0; \pi)$ ve $\rho_0, \rho_\phi, r_0, \rho_\phi^0$ büyüklükleri

de

$$\phi_0 = \text{atan} \left[\frac{(y_0 - d)}{x_0} \right] \quad (3.36)$$

$$\phi'_0 = \text{atan} \left[\frac{(y_0 + d - 2c)}{x_0} \right] \quad (3.37)$$

$$\psi_0 = \text{atan} \left[\frac{(y_0 - c)}{(x_0 - 1)} \right] \quad (3.38)$$

$$\psi'_0 = \text{atan} \left[\frac{(y_0 + c)}{(x_0 - 1)} \right] \quad (3.39)$$

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - d)^2} \quad (3.40)$$

$$\beta_0 = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + d - 2c)^2} \quad (3.41)$$

$$r_0 = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - c)^2} \quad (3.42)$$

$$\beta'_0 = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 + c)^2} \quad (3.43)$$

bağıntıları ile ifade edilmiş, açısal ve doğrusal değerlerdir. Gene (3.34, 3.35)'de gözüken $F(\cdot)$ büyüklüğü de

$$F(z) = -2i\sqrt{z}e^{-iz} \int_{\sqrt{z}}^{\infty} e^{it^2} dt \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlı Fresnel integralini ifade etmektedir.

Bunun yanısıra (3.30, 3.31)'de gözüken C_2^+ ve C_1^+ integrasyon çizleri üzerindeki integrallerin düzgün asimptotik değenlendirilmeleri de [19,20]'de verilen yöntem uyarınca

$$\begin{aligned}
P^{(2)}(\alpha) \approx & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i(kl-\pi/4)}}{\sqrt{kl}} \frac{c(d-c)}{d} \frac{kQ^{(1)}(k)N_+(k)}{[M_+(k)]^2} \{1-F[kl(1-\alpha/k)]\} \\
& + \frac{i\pi}{2d^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\beta_m} \frac{Q^{(1)}(\beta_m)N_+(\beta_m)}{[M_+(\beta_m)]^2} \frac{[1-e^{-2im\pi c/d}]}{(\alpha-\beta_m)} e^{i\beta_m l}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

ve

$$Q^{(2)}(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i(kl-\pi/4)}}{\sqrt{kl}} \frac{(d-c)^2}{d} \frac{kP^{(1)}(-k)N_+(k)}{[M_+(k)]^2} \{F[kl(1+\alpha/k)]-1\} \tag{3.46}$$

olacak şekilde yapılır.

(3.19) ve (3.23) ifadelerinden açıkça görüleceği üzere, (3.35)'de görünen $J(\alpha)$ integral terimi, ne asimptotik ne de kesin şekilde analitik olarak değerlendirilmeye uygun bir yapıda değildir. Dolayısıyla [Ek-C]'de yakınsak olduğu gösterilen bu integral ancak sayısal olarak hesaplanabilir. Bundan dolayı tezin geri kalan kısmında, söz konusu bu $J(\alpha)$ integrali bilinen bir fonksiyon olarak dikkate alınacaktır.

Yukarıda yapılan işlemler neticesinde sırasıyla (3.32-3.35) ve (3.45, 3.46) bağıntıları ile açık ifadeleri elde edilen $P^{(1)}(\alpha)$, $Q^{(1)}(\alpha)$ ve $P^{(2)}(\alpha)$, $Q^{(2)}(\alpha)$ büyüklükleri (3.26) ve (3.27) de yerlerine konacak olursa (2.88) ile verilen 3. türden modifiye Wiener-Hopf denkleminin birer çözümü olan $G_1(\alpha, d)$ ve $G_+(\alpha, d)$ fonksiyonlarının açık ifadeleri elde edilmiş olur. Söz konusu bu çözümler açıkça görüldüğü gibi $n=1,2,..$ olmak üzere f_n, g_n, h_n, m_n, n_n bilinmeyen sabitlerini de beraberinde içermektedir. Henüz bilinmeyen bu sabitleri belirleyebilmek amacıyla öncelikle (3.26) eşitliğinin her iki yanında $\alpha = \alpha_n$ ve (3.27) eşitliğinin de gene her iki yanında $\alpha = \beta_n$ koyup, (2.51) ile (2.60) ve (2.77) ile (2.84)'ün de birlikte dikkate alınması ve ayrıca [Ek-D]'de detaylıca verilen bazı matematiksel işlemler neticesinde ilk olarak

$$f_n \approx (-1)^n \frac{2n\pi}{(d-c)^2} M_+(\alpha_n) [P^{(1)}(\alpha_n) + P^{(2)}(\alpha_n)], \quad n=1,2,\dots \quad (3.47)$$

$$g_n + i\alpha_n h_n \approx (-1)^{n+1} \frac{2n\pi}{(d-c)^2} \frac{M_+(\alpha_n)}{N_+(\alpha_n)} [Q^{(1)}(-\alpha_n) + Q^{(2)}(-\alpha_n)], \quad n=1,2,\dots \quad (3.48)$$

$$Q^{(1)}(\beta_n) \approx -Q^{(2)}(\beta_n), \quad n=1,2,\dots \quad (3.49)$$

şeklindeki sonsuz adet doğrusal cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bunun yanında sırasıyla (2.35, 2.36) ve (2.66, 2.67) ile verilen büyüklüklerin (2.57, 2.58) ve (2.79, 2.80) şeklinde ifade edilen sinüs serisi açılımları (2.14) ve (2.15)'deki sınır ve süreklilik koşullarında dikkate alınacak olursa gene sonsuz adet

$$n_n = \frac{2 \sin(\gamma_n c)}{d} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m K_m}{(K_m^2 - \gamma_n^2)}, \quad n=1,2,\dots \quad (3.50)$$

$$g_n = \frac{2K_n}{(d-c)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m \sin(\gamma_m c)}{(K_n^2 - \gamma_m^2)}, \quad n=1,2,\dots \quad (3.51)$$

doğrusal cebrik denklem sistemleri de ortaya çıkmış olur (Bkn. Ek-D). Sonuç itibariyle (3.47-3.51) cebirsel denklemleri yardımı ile f_n, g_n, h_n, m_n, n_n sabitleri belirlenmiş olur.

4. TOPLAM ALANIN ANALİZİ

Bu bölümde, tezde ele alınan ardışık basamak süreksizliğinden saçılan alana ilişkin analiz yapılmaya çalışılacaktır. Bu bağlamda, (2.2) denkleminde görünen $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, 3, 4$ alanlarına ilişkin Fourier dönüşümleri, bir önceki bölümde elde edilen $G_1(\alpha, d)$ ve $G_+(\alpha, d)$ büyüklüklerinin, (3.32-3.35) ve (3.45, 3.46) bağıntıları da dikkate alınarak yazılmış olan, sırasıyla (3.26) ve (3.27) ile verilen yaklaşık ifadeleri ve bunlara ek olarak (3.47-3.51) eşitliklerinden elde edilen f_n, g_n, h_n, m_n, n_n katsayıları cinsinden yazılıp, ters Fourier dönüşümleri belirlenecektir.

4.1. $u_1(x, y)$ 'nin Açık İfadesi

Öncelikle $y > y_0$ ve $x \in (-\infty, \infty)$ bölgesinde tanımlı olan $u_1(x, y)$ alanının x değişkenine göre Fourier dönüşümü olan (2.22) denkleminin, L eğrisi üzerinde şekil 2.2'de gösterilen $\text{Im}(k) > \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ şeridi içerisindeki reel eksene paralel sonsuz uzun bir doğru olmak üzere,

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L A(\alpha) e^{iK(\alpha)y} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (4.1)$$

şeklindeki ters dönüşümü dikkate alınsın. Yukarıdaki integralde yer alan $A(\alpha)$ spektral katsayısı (2.28) denkleminin $G_-(\alpha, d) = 0$ olmak üzere (2.27)'nin $y = d$ için yazılan bağıntısı dikkate alınarak ifade edilecek olursa (4.1) için

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L [G_1(\alpha, d) + e^{i\alpha d} G_+(\alpha, d)] e^{i[K(\alpha)(y-d) - \alpha x]} d\alpha \\ + \frac{1}{i\pi} \int_L C(\alpha) \sin[K(\alpha)(y_0 - d)] e^{i[K(\alpha)(y-y_0) - \alpha x]} d\alpha \quad (4.2)$$

yazılır. Yukarıdaki integrandlarda görünen $G_1(\alpha, d)$, $G_+(\alpha, d)$ ve $C(\alpha)$ yerine

sırasıyla (3.26), (3.27) ve (2.30) ile verilen bağıntılar konacak olursa

$$\begin{aligned}
u_1(x, y) = & \frac{kZI}{4\pi} \int_L \frac{e^{i[K(\alpha)(y-y_0)-\alpha(x-x_0)]}}{K(\alpha)} d\alpha - \frac{kZI}{4\pi} \int_L \frac{e^{i[K(\alpha)(y-2c+y_0)-\alpha(x-x_0)]}}{K(\alpha)} d\alpha \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{N_+(\alpha)}{M_+(\alpha)} \left\{ \frac{\sin[K(\alpha)c]}{\sin[K(\alpha)d]} \sum_{j=1}^2 Q^{(j)}(\alpha) \right. \\
& \left. - \frac{N_-(\alpha)}{M_-(\alpha)} \frac{\sin[K(\alpha)(d-c)]}{K(\alpha)} L(\alpha) \right\} e^{i[K(\alpha)(y-c)-\alpha(x-1)]} d\alpha \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_L P^{(j)}(\alpha) M_+(\alpha) e^{i[K(\alpha)(y-d)-\alpha x]} d\alpha
\end{aligned} \tag{4.3}$$

integral ifadesi elde edilir. (4.3)'te gözükten L eğrisi üzerindeki integrallerin [Ek-B]'de detaylıca anlatılan en dik iniş çizgisi yöntemi aracılığıyla değerlendirilmesi neticesinde

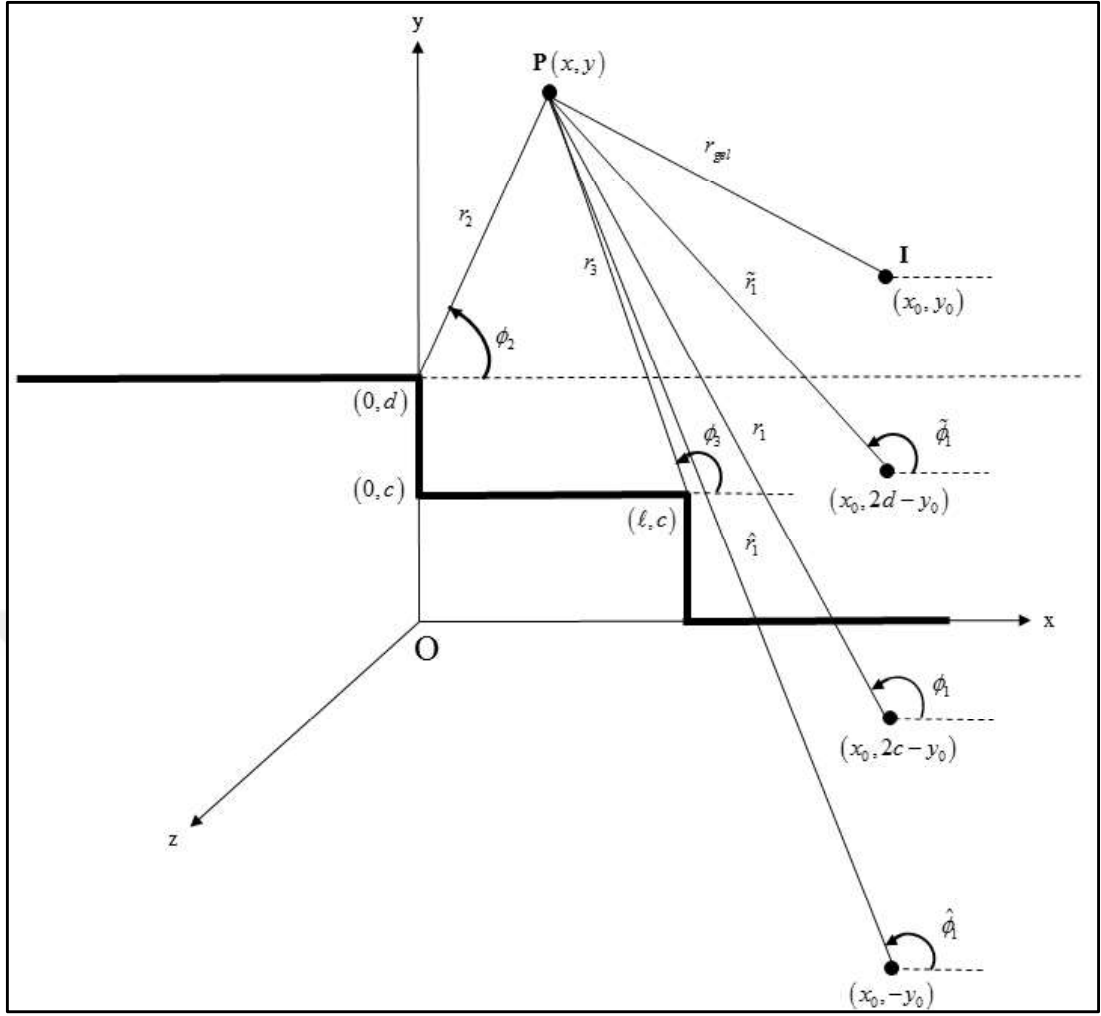
$$u_1 \sim u^{gel} + u_c^{yan} + u_d^{yan} + u_0^{yan} + u_{11}^{kr} + u_{12}^{kr} \tag{4.4}$$

asimptotik büyüklüğü elde edilir.

Yukarıdaki (4.4) bağıntısında gözükten u^{gel} probleme ilişkin çizgisel kaynağın yaymış olduğu elektrik alanın z bileşenine ait uzak alan ifadesi olup

$$u^{gel} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}} kZI \frac{e^{ikr_{gel}}}{\sqrt{kr_{gel}}} \tag{4.5}$$

ile verilir. Burada $r_{gel} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ büyüklüğü kaynak ile $y > y_0$ bölgesinde yer alan bir $P(x, y)$ noktası arasındaki uzaklığı göstermektedir (bkn. Şekil 4.1).



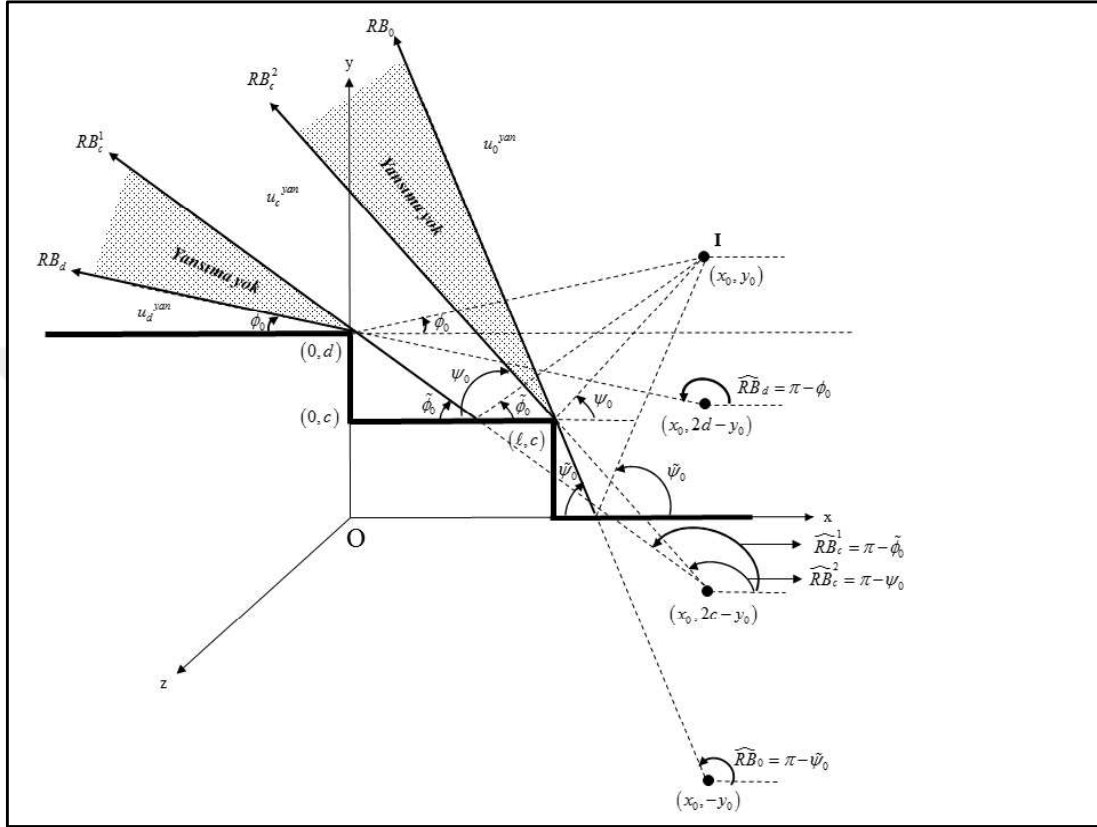
Şekil 4.1: u_1 'nin uzak alan ifadesine ilişkin uzaklık ve açı değerleri.

(4.4)'nin sağ yanının ikinci terim, $H(\cdot)$ daha önce bahsi geçen Heaviside birim basamak fonksiyonu olmak üzere

$$u_c^{yan} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}} kZI \frac{e^{ikr_1}}{\sqrt{kr_1}} \left[H(\phi_1 + \psi_0 - \pi) - H(\phi_1 + \phi_0^0 - \pi) \right] \quad (4.6)$$

ile verilir. Bu son ifadede yer alan r_1 , ϕ_1 , ϕ_0^0 ve ψ_0 büyüklükleri de sırasıyla $r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-2c+y_0)^2}$, $\phi_1 = \text{atan}[(y-2c+y_0)/(x-x_0)]$, (3.37) ve (3.38) ile tanımlı uzaklık ve açı değerleridir. (4.6)'dan açıkça anlaşılacağı üzere u_c^{yan} , çizgisel

kaynak tarafından uyarılan alanın $y=c, x \in (0,1)$ ile tanımlı mükemmel iletken basamak yüzeyinden yansımaları neticesinde ortaya çıkan $P(x,y)$ noktasındaki uzak alan ifadesidir (Bkn. Şekil 4.2).



Şekil 4.2: Yansıyan dalgalar için bölgeler ve sınırlar.

Gene (4.4)'nin sağ yanında yer alan u_d^{yan} terimi de yukarıdakine benzer olarak, çizgisel kaynak tarafından uyarılan alanın $y=d, x < 0$ ile tanımlı mükemmel iletken yarı sonsuz basamak yüzeyinden yansımaları neticesinde ortaya çıkan $P(x,y)$ noktasındaki uzak alan ifadesidir (Bkn. Şekil 4.2). Buna ilişkin asimptotik değer, $R_{\phi_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-2d+y_0)^2}$, $\phi_0 = \text{atan}[(y-2d+y_0)/(x-x_0)]$, ϕ_0 (3.36) ile verilen geometrik büyüklükler ve $H(\cdot)$ da Heaviside birim basamak fonksiyonu olmak üzere

$$u_d^{yan} = \frac{e^{\frac{i3\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}} kZI \frac{e^{ik\rho'_0}}{\sqrt{k\rho'_0}} H(\phi'_0 + \phi_0 - \pi) \quad (4.7)$$

ile verilir.

(4.4)'de gözükten

$$u_0^{yan} = \frac{e^{\frac{i3\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}} kZI \frac{e^{ik\hat{r}_1}}{\sqrt{k\hat{r}_1}} H(\pi - \psi'_0 - \hat{\phi}_1) \quad (4.8)$$

terimi de $y=0, x>0$ mükemmel iletken yarı sonsuz düzlem yüzeyinden çizgisel kaynağın yansıması neticesinde ortaya çıkan ve gene $P(x, y)$ noktasındaki uzak alanın ifadesidir (Bkn. Şekil 4.2). (4.8)'de yer alan \hat{r}_1 , $\hat{\phi}_1$ ve ψ'_0 geometrik büyüklükleri de sırasıyla $\rho'_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-2d+y_0)^2}$, $\hat{\phi}_1 = \text{atan}\left(\frac{y+y_0}{x-x_0}\right)$ ve (3.39)

şeklinde tanımlıdır. Şekil 4.2'ten de açıkça görüleceği üzere yukarıdaki tüm yansıyan alanlarda gözükten Heaviside birim basamak fonksiyonlarının argümanları da söz konusu bu alanlara ilişkin yansıma sınırlarını ifade etmektedir.

(4.4)'de yer alan u_{11}^{kar} terimi

$$\begin{aligned} u_{11}^{kar(0,d)} &= \frac{e^{\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} k \sin \phi_2 M_-(k \cos \phi_2) \beta^{(0)}(-k \cos \phi_2) \frac{e^{ikr_2}}{\sqrt{kr_2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} u^{gel}(0, d) \frac{M_-(k \cos \phi_2)}{M_+(k \cos \phi_0)} \sin \phi_2 \frac{F\left[\frac{1}{2} k \rho_0 (\phi_2 + \phi_0 - \pi)^2\right]}{(\cos \phi_2 + \cos \phi_0)} \frac{e^{ikr_2}}{\sqrt{kr_2}} \\ &+ \frac{e^{-\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} u_c^{yan}(0, d) \frac{M_-(k \cos \phi_2)}{M_+(k \cos \phi_0^{\hat{0}})} \sin \phi_2 \frac{F\left[\frac{1}{2} k \rho'_0 (\phi_2 + \phi_0^{\hat{0}} - \pi)^2\right]}{(\cos \phi_2 + \cos \phi_0^{\hat{0}})} \frac{e^{ikr_2}}{\sqrt{kr_2}} \\ &+ \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} M_-(k \cos \phi_2) k \sin \phi_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m K_m f_m M_+(\alpha_m)}{2\alpha_m (k \cos \phi_2 - \alpha_m)} \frac{e^{ikr_2}}{\sqrt{kr_2}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{aligned}
u_{11}^{kr(1,c)} &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} k \sin \phi_3 T(-k \cos \phi_3) \mathcal{Q}^{(0)}(-k \cos \phi_3) \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}} \\
&= \frac{e^{-i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} u^{gel}(1,c) \frac{T(-k \cos \phi_3)}{T(k \cos \psi_0)} \sin \phi_3 \frac{F\left[\frac{1}{2} kr_0 (\phi_3 + \psi_0 - \pi)^2\right]}{(\cos \phi_3 + \cos \psi_0)} \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}} \\
&\quad + \frac{e^{-i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} u_0^{yan}(1,c) \frac{T(-k \cos \phi_3)}{T(k \cos \psi'_0)} \sin \phi_3 \frac{F\left[\frac{1}{2} k\rho_0 (\phi_3 + \psi'_0 - \pi)^2\right]}{(\cos \phi_3 + \cos \psi'_0)} \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}} \\
&\quad + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} T(-k \cos \phi_3) k \sin \phi_3 \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} K_m(g_m - i\alpha_m h_m) M_+(\alpha_m) N_-(\alpha_m)}{2\alpha_m (k \cos \phi_3 + \alpha_m)} \right. \\
&\quad \left. + J(-k \cos \phi_3) - \frac{N_+(k \cos \phi_3)}{M_+(k \cos \phi_3)} \frac{\sin[(d-c)k \sin \phi_3] \sin(dk \sin \phi_3)}{k \sin \phi_3 \sin(ck \sin \phi_3)} L(-k \cos \phi_3) \right\} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

olmak üzere $u_{11}^{kr} = u_{11}^{kr(0,d)} + u_{11}^{kr(1,c)}$ şeklinde ifade edilir. (4.9, 4.10)'da gözükten $M_{\pm}(\alpha)$, $N_{\pm}(\alpha)$, $L(\alpha)$, $J(\alpha)$ ve $T(\alpha)$ fonksiyonları sırasıyla (3.3-3.5), (3.4-3.6), (3.19), (3.23) ve

$$T(\alpha) = \frac{N_+(\alpha) \sin[K(\alpha)c]}{M_+(\alpha) \sin[K(\alpha)d]} \quad (4.11)$$

ile tanımlanmıştır. Yukarıdaki bağıntılarda $\phi_2 = \text{atan}\left(\frac{y-d}{x}\right)$, $\phi_3 = \text{atan}\left(\frac{y-c}{x-1}\right)$, $r_2 = \sqrt{x^2 + (y-d)^2}$, $r_3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-c)^2}$ ve ϕ_0 , ϕ'_0 , ψ_0 , ψ'_0 , ρ_0 , ρ'_0 , r_0 , ρ_0/c da sırasıyla (3.36-3.43) ile belirlenmiştir (Bkn. Şekil 4.1-4.2). Bunun yanısıra $u^{gel}(0,d)$ ve $u^{gel}(1,c)$ ile sırasıyla (4.5) ile tanımlı gelen alanın $(0,d)$ ve $(1,c)$ dik ayrıtlarındaki değerleri ifade edilmektedir. $u_c^{yan}(0,d)$ açık ifadesi (4.6)'da verilmiş olan yansıyan alanın $(0,d)$ dik ayrıtlarındaki, $u_0^{yan}(1,c)$ da (4.8)'de tanımlı yansıyan alanın $(1,c)$ ayrıtlarındaki değerlerini ifade etmektedir. Yukarıdaki bu bağıntılar dikkate alındığında

(4.9)'un sağ yanındaki ilk terimin gelen alanın doğrudan $(0, d)$ dik ayrıtından birinci kırınımı, (4.9)'un sağ yanındaki ikinci terimin $y = c$, $x \in (0, 1)$ şeridinden yansıyan alanın gene aynı dik ayrıtından birinci kırınımı ve en son toplam halindeki terim de $(0, d)$ ayrıtından bir kez kırınmış alanların basamak süreksizliğinin yatay yüzeylerinden yansımaları ve gene basamak süreksizliğinin yanal yüzeylerinin birinci mertebeden kırınımı katkıları gibi geri kalan çeşitli etkileri ifade etmektedir. Tüm bu söylenenler sonuç itibariyle (4.9) ile verilen $u_{11}^{kr(0,d)}$ 'nin $(0, d)$ dik ayrıtından bir kez kırınmış (birinci mertebeden kırınan) alanları ifade ettiğini ortaya koyar. Benzer analiz (4.10) için de yapıldığında, $u_{11}^{kr(1,c)}$ 'nin $(1, c)$ dik ayrıtından bir kez kırınmış alanları ifade ettiği meydana çıkar. Dolayısıyla $u_{11}^{kr} = u_{11}^{kr(0,d)} + u_{11}^{kr(1,c)}$ alanı basamak tipi süreksizliğe ilişkin tüm dik ayrıtlarda bir kez (birinci mertebeden) kırınmış toplam alanın asimptotik değerini ifade etmektedir.

(4.4)'nin sağ yanında en son terim olarak görünen u_{12}^{kr} basamak tipi süreksizliğin $(0, d)$ ve $(1, c)$ dik ayrıtlarından ikinci kez (ikinci mertebeden) kırınmış alanların toplamını ifade etmektedir. Söz konusu bu ikinci mertebeden kırınan alanın açık ifadesi

$$u_{12}^{kr} = \frac{e^{\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} k \sin \phi_2 M_+(-k \cos \phi_2) P^{(2)}(-k \cos \phi_2) \frac{e^{ikr_2}}{\sqrt{kr_2}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} k \sin \phi_3 T(-k \cos \phi_3) Q^{(2)}(-k \cos \phi_3) \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}} \quad (4.12)$$

eşitliği ile verilir.

4.2. $u_2(x, y)$ 'nin Açık İfadesi

$d < y < y_0$ ve $x \in (-\infty, \infty)$ bölgesinde tanımlı olan $u_2(x, y)$ alanının x değişkenine göre Fourier dönüşümü olan (2.27) denkleminin ters dönüşümü dikkate alınacak olursa

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[B(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-d)} + C(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y-d)} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (4.13)$$

elde edilir. Burada L , (4.1)'deki integral çizgisinin aynısıdır. Bizzat (2.27) denkleminde $y = d$ konup $G_-(\alpha, d) = 0$ olduğu da göz önünde bulundurulacak olursa (4.13)'deki $B(\alpha)$ spectral katsayısı için

$$B(\alpha) = G_1(\alpha, y) + e^{i\alpha l} G_+(\alpha, y) - C(\alpha) \quad (4.14)$$

bağıntısı ortaya çıkar. $B(\alpha)$ 'nın yukarıdaki ifadesi (4.13)'de yerine konacak olursa basit bazı matematik hesaplamalar sonucunda

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[G_1(\alpha, d) + e^{i\alpha l} G_+(\alpha, d) \right] e^{i[K(\alpha)(y-d) - \alpha x]} d\alpha + \frac{1}{i\pi} \int_L C(\alpha) \sin[K(\alpha)(y-d)] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (4.15)$$

eşitliğinin elde edildiği kolayca görülür. Bu son integralde yer alan $G_1(\alpha, d)$, $G_+(\alpha, d)$ ve $C(\alpha)$ 'nın sırasıyla (3.26), (3.27) ve (2.30) ile verilen ifadeleri (4.15)'de yerine konacak olursa

$$u_2(x, y) = \frac{kZI}{4\pi} \int_L \frac{e^{-i[K(\alpha)(y-y_0) + \alpha(x-x_0)]}}{K(\alpha)} d\alpha - \frac{kZI}{4\pi} \int_L \frac{e^{i[K(\alpha)(y-2c+y_0) - \alpha(x-x_0)]}}{K(\alpha)} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{N_+(\alpha)}{M_+(\alpha)} \left\{ \frac{\sin[K(\alpha)c]}{\sin[K(\alpha)d]} \sum_{j=1}^2 Q^{(j)}(\alpha) - \frac{N_-(\alpha)}{M_-(\alpha)} \frac{\sin[K(\alpha)(d-c)]}{K(\alpha)} L(\alpha) \right\} e^{i[K(\alpha)(y-c) - \alpha(x-1)]} d\alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_L P^{(j)}(\alpha) M_+(\alpha) e^{i[K(\alpha)(y-d) - \alpha x]} d\alpha \quad (4.16)$$

ortaya çıkar. (4.16) ve (4.3)'ün ilk integral terimleri dışında birbirine eşit olduğu açıkça görülür. Söz konusu bu ilk integral terimler çizgisel kaynak tarafından yaratılan ve gelen alan olarak isimlendirilen dalgaların kendi bölgelerindeki ifadelerinden başka birşey değildir. Dolayısıyla, geri kalan terimler birbirinin aynı olduğundan $u_1(x, y)$ için bölüm 4.1'de yapılan analizin aynısı $u_2(x, y)$ için de $d < y < y_0$ ve $x \in (-\infty, \infty)$ bölgesinde geçerli olacaktır.

4.3. $u_4(x, y)$ ' nin Açık İfadesi

Daha önce bölüm 2'de açıklandığı üzere $0 < y < d$ ve $x \in (1, \infty)$ bölgesinde tanımlı olan $u_4(x, y)$ alanının x değişkenine göre yarı sonsuz Fourier dönüşümü olan

$$H_+(\alpha, y) = \int_1^{\infty} u_4(x, y) e^{i\alpha(x-1)} dx = \int_0^{\infty} u_4(x+1, y) e^{i\alpha x} dx, \quad \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k) \quad (4.17)$$

Bağıntısında s kompleks bir parameter olmak üzere $\alpha = is$ konacak olursa

$$H_+(is, y) = \int_0^{\infty} u_4(x+1, y) e^{-sx} dx, \quad \text{Re}(s) > \text{Im}(-k) \quad (4.18)$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifade açıkça görüleceği üzere $u_4(x+1, y)$ fonksiyonunun x 'e göre Laplace dönüşümünden başka bir şey değildir. Bu durumda, L_s söz konusu Laplace dönüşümünün regülerlik bölgesi olan kompleks s düzleminin $\text{Re}(s) > \text{Im}(-k)$ ile tanımlı sağ yarı tarafında imajiner eksene paralel sonsuz uzun bir doğru olmak üzere $H_+(is, y)$ 'nin ters Laplace dönüşümü dikkate alınacak olursa

$$u_4(x+1, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} H_+(is, y) e^{sx} ds, \quad x > 0 \quad (4.19)$$

eşitliği yazılır. (4.19)'de gözükten x yerine $x-1$ ve s yerine de $-i\alpha$ konacak olursa

$u_4(x, y)$ alanını veren

$$u_4(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L H_+(\alpha, y) e^{i\alpha(1-x)} d\alpha \quad , \quad x > 1 \quad (4.20)$$

bağıntısı ortaya çıkar. Bu son ifadede gözüken L integrasyon çizgisi ile $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ yarı düzleminde yer alan ve reel eksene paralel olan sonsuz uzun bir doğru kastedilmektedir. (4.20) integralinde yer alan $H_+(\alpha, y)$ (2.73) ile verilen fonksiyon olup, bu ifadede yer alan ve (2.74, 2.75) ile tanımlı $\mathcal{P}(\alpha, y)$ 'nin açık ifadesi bir takım basit matematiksel hesaplamalar neticesinde

$$\mathcal{P}(\alpha, y) = -\sin[K(\alpha)d] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m_n - i\alpha n_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} \sin(\gamma_n y) \quad (4.21)$$

olarak belirlenir. (4.21)'un (2.73)'de yerine konması neticesinde yukarıda bahsi geçen $H_+(\alpha, y)$ için

$$H_+(\alpha, y) = G_+(\alpha, d) \frac{\sin[K(\alpha)y]}{\sin[K(\alpha)d]} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m_n - i\alpha n_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} \sin(\gamma_n y) \quad (4.22)$$

ifadesi ortaya çıkar. Bu son ifade de yer alan $G_+(\alpha, d)$ 'nin (3.27) ile verilen değeri de göz önünde bulundurularak, (4.22)'un (4.20)'te yerine yazılması ile

$$u_4(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L N(\alpha) \left[\frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \frac{1}{M(\alpha)} \sum_{j=1}^2 Q^{(j)}(\alpha) - L(\alpha) \right] \frac{\sin[K(\alpha)y]}{\sin[K(\alpha)d]} e^{i\alpha(1-x)} d\alpha \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\gamma_n y) \int_L \frac{(m_n - i\alpha n_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} e^{i\alpha(1-x)} d\alpha \quad (4.23)$$

elde edilir. $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ 'nin sırasıyla (2.89) ve (2.90) ile verilen ifadeleri $Q^{(1)}(\alpha)$ 'nin (3.33)'deki ifadesi ile birlikte (4.23)'de yerlerine konup, bazı basit düzenlemeler

neticesinde

$$\begin{aligned}
u_4(x, y) \approx & \frac{kZI}{4\pi} \int_{L^+} \frac{e^{-iK(\alpha)(y-y_0)} e^{-i\alpha(x-x_0)}}{K(\alpha)} d\alpha - \frac{kZI}{4\pi} \int_{L^+} \frac{e^{iK(\alpha)(y+y_0)} e^{-i\alpha(x-x_0)}}{K(\alpha)} d\alpha \\
& + \frac{1}{4\pi i} \int_{L^+} \frac{M_-(\alpha) \left[\mathcal{Q}^{(0)}(\alpha) + \mathcal{Q}^{(2)}(\alpha) \right]}{N_-(\alpha) \sin[K(\alpha)(d-c)]} e^{iK(\alpha)(y+c)} e^{-i\alpha(x-1)} d\alpha \\
& - \frac{1}{4\pi i} \int_{L^+} \frac{M_-(\alpha) \left[\mathcal{Q}^{(0)}(\alpha) + \mathcal{Q}^{(2)}(\alpha) \right]}{N_-(\alpha) \sin[K(\alpha)(d-c)]} e^{-iK(\alpha)(y-c)} e^{-i\alpha(x-1)} d\alpha \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{L^+} \frac{e^{iK(\alpha)d} \sin[K(\alpha)y]}{K(\alpha)} L(\alpha) e^{i\alpha(1-x)} d\alpha \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\gamma_n y) \int_{L^+} \frac{(m_n - i\alpha n_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} e^{i\alpha(1-x)} d\alpha
\end{aligned} \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir. Burada $L(\alpha)$ ve $\mathcal{Q}^{(0)}(\alpha)$ sırasıyla (3.19) ve (3.35) ile tanımlanmış olan büyüklüklerdir. Ayrıca, bu son ifade yazılırken L interasyon çizgisinin L^+ çizgisine ötelenebileceği de göz önünde bulundurulmuştur. (4.24)'nin sağ yanındaki ilk iki integral ifade dikkatlice incelenecek olursa bunlardan ilkinin söz konusu bölgede çizgisel kaynak tarafından uyarılan gelen alandan u^{gel} , ikincisinin ise bu gelen alanın $y=0$ düzleminde yansımından u_0^{yan} ibaret olduğu kolayca görülür. (4.24)'nin sağ yanındaki üçüncü, dördüncü ve beşinci integraller detayları gerek [18,19] da ve gerekse de [Ek-B] de etraflıca açıklanmış olan en dik iniş çizgisi yöntemi ile asimptotik olarak, geri kalan son integral de Jordan Lemması uyarınca kompleks α alt yarı düzlemi üzerinde kapatılması ve ayrıca rezidü katkılarının da göz önünde bulundurulması neticesinde hesap edilecek olursa (4.24) ile verilen $u_4(x, y)$ için

$$\begin{aligned}
u_4(x, y) ; & u^{gel} + u_0^{yan} + \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{M_-(k \cos \phi_3)}{N_-(k \cos \phi_3)} \frac{k \sin \phi_3}{\sin[(d-c)k \sin \phi_3]} \mathcal{Q}^{(0)}(k \cos \phi_3) \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}} \\
& + \frac{e^{-i3\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(k \cos \phi_4)}{N_+(k \cos \phi_4)} \frac{k \sin \phi_4}{\sin[(d-c)k \sin \phi_4]} \mathcal{Q}^{(0)}(-k \cos \phi_4) \frac{e^{ikr_4}}{\sqrt{kr_4}} \\
& + \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{M_-(k \cos \phi_3)}{N_-(k \cos \phi_3)} \frac{k \sin \phi_3}{\sin[(d-c)k \sin \phi_3]} \mathcal{Q}^{(2)}(k \cos \phi_3) \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{-i3\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(k \cos \phi_4)}{N_+(k \cos \phi_4)} \frac{k \sin \phi_4}{\sin[(d-c)k \sin \phi_4]} Q^{(2)}(-k \cos \phi_4) \frac{e^{ikr_4}}{\sqrt{kr_4}} \\
& - \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} L(k \cos \phi_5) \frac{e^{ikr_5}}{\sqrt{kr_5}} - \frac{e^{-i3\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} L(-k \cos \phi_6) \frac{e^{ikr_6}}{\sqrt{kr_6}} \\
& - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{iK_n d} \sin(K_n y) \frac{(g_n + i\alpha_n h_n)}{\alpha_n} e^{i\alpha_n(x-1)} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada, ϕ_3 ve r_3 daha önce (4.10)'da gözüken ve tanımlanmış olan açı ve uzunluk büyüklükleri göstermektedir. (4.25)'da yer alan ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 ve r_4 , r_5 , r_6 büyüklükleri de

$$\phi_4 = \text{atan}\left(\frac{y+c}{x-1}\right), \phi_5 = \text{atan}\left(\frac{y-d}{x-1}\right), \phi_6 = \text{atan}\left(\frac{y+d}{x-1}\right) \quad (4.26)$$

$$r_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+c)^2}, r_5 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-d)^2}, r_6 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+d)^2} \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(4.25)'deki $\mathcal{Q}^{(1)}(k \cos \phi_3) \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}}$ terim gelen alan ile $(1, c)$ dik ayırıtını gören tüm düşey ve yatay yüzeylerden yansımış alanların söz konusu $(1, c)$ dik ayırıtından bir kez kırınmış ifadelerini, $\mathcal{Q}^{(1)}(k \cos \phi_4) \frac{e^{ikr_4}}{\sqrt{kr_4}}$ ise yukarıda açıklanan $(1, c)$ dik ayırıtından bir kez kırınmış alanların $y=0, x>1$ yarım düzleminden yansımalarını göstermektedir. (4.25)'deki $Q^{(2)}(k \cos \phi_3) \frac{e^{ikr_3}}{\sqrt{kr_3}}$ ve $Q^{(2)}(-k \cos \phi_4) \frac{e^{ikr_4}}{\sqrt{kr_4}}$ de benzer olarak sırasıyla, $(0, d)$ dik ayırıtından bir kez kırınmış alanın $(1, c)$ dik ayırıtından tekrar kırınması (ikinci kez kırınmış alan) ve $(1, c)$ dik ayırıtından ikinci kez kırınmış alanların $y=0, x>1$ yarım düzleminden yansımalarını şeklinde yorumlanabilir. (4.25)'de gözüken son üç terim de gerek geometriye ilişkin tüm yüzeylerden ve gerekse de $(0, d)$ dik ayırıtından kırınan toplam (birinci ve ikinci nertebeden) alanların

söz konusu bölgedeki ifadeleri şeklinde değerlendirilir.

Bundan bağımsız olarak (4.24)'deki integrallerin Jordan Lemması ve rezidü teoremi uyarınca hesabı dikkate alınacak olursa, (4.24)'deki birinci, ikinci ve sonuncu integral hariç diğer tüm L^+ eğrisi üzerindeki integraller alt yarı kompleks α düzleminde yer alan C_1^+ kesim çizgisi üzerine ötelenir. Ortaya çıkan bu yeni integrallerin de [19,20]'de açıklanan yöntem uyarınca asimptotik olarak değerlendirilmesi neticesinde

$$u_4^{kir}(x, y) \approx e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{c}{(d-c)} \frac{M_+(k)}{N_+(k)} \left[Q^{(0)}(-k) + Q^{(2)}(-k) \right] y \frac{e^{ik(x-1)}}{(x-1)^{3/2}} - e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} d L(-k) y \frac{e^{ik(x-1)}}{(x-1)^{3/2}} \quad (4.28)$$

olmak üzere

$$u_4(x, y) \approx u^{gel} + u_0^{yan} + u_4^{kir}(x, y) \quad (4.29)$$

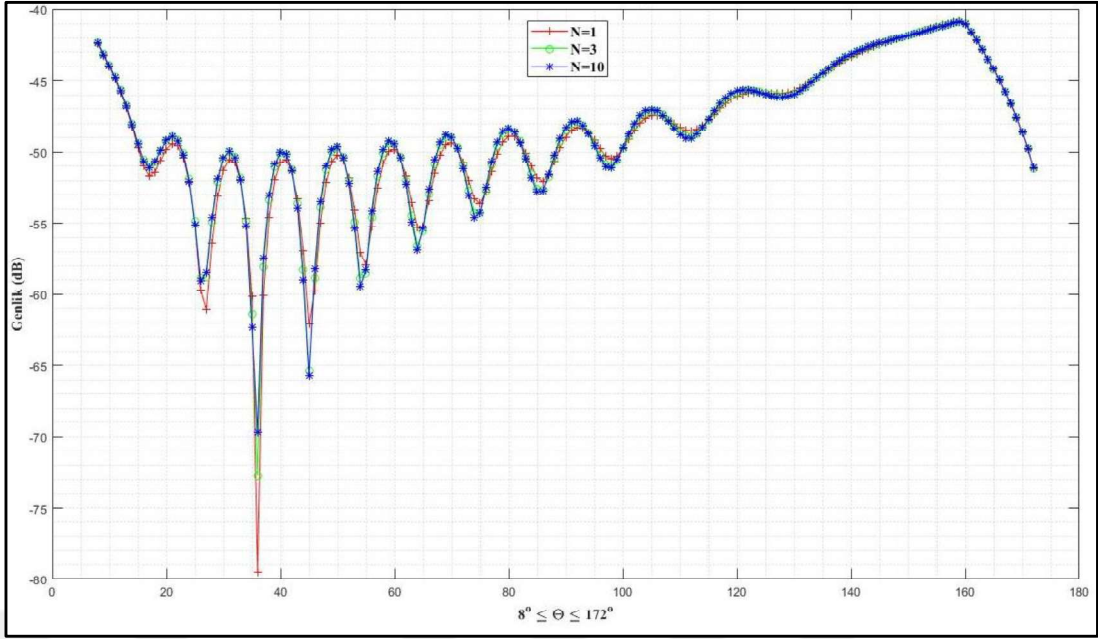
bağıntısı elde edilir. Bu son ifade açıkça görüleceği üzere, yorumdan ziyade özellikle, sayısal hesaplamalar üzerine çalışan araştırmacılar için elverişli olan toplam alanın $0 < y < d$ ve $x \in (1, \infty)$ ile tanımlı ilgili bölgedeki asimptotik ifadesini basitçe vermektedir.

5. SAYISAL ÖRNEK ve SONUÇLAR

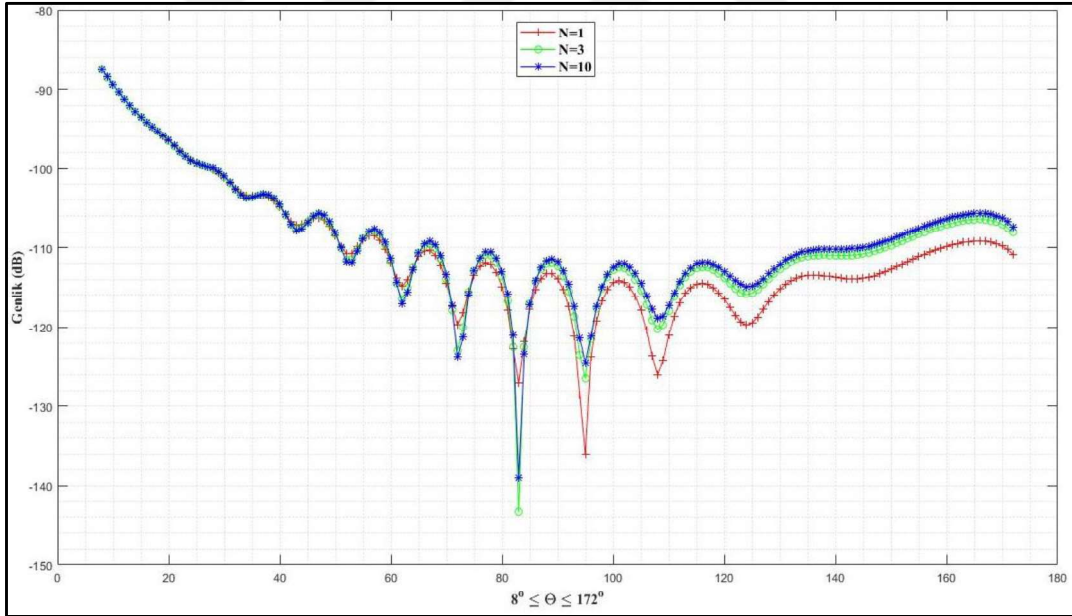
Bu bölümde yukarıda bahsi geçen ve asimptotik analitik hesapları açıkça verilmiş olan kırılan alanlara ilişkin bazı sayısal örnek uygulamalar yapılacaktır. Özellikle kırınım problemlerinde kırınımı yaratan geometriyi toptan gören bölüm 4.1 ve bölüm 4.2’de bahsi geçen bölgeler ölçüm ve gözlem bakımından bölüm 4.3 ve bölüm 4.4’teki diğer bölgelere göre biraz daha fazla önem arz etmektedir. Bunun yanı sıra bölüm 4.3 ve 4.4’teki bölgeler ise sırasıyla sonlu ve yarı sonsuz türde kısıtlı bölgeler olup, daha önce belirtildiği üzere kırınım olayının ne analitik ne de nümerik olarak incelenmediği yerler olduğundan alan değişimlerinin ne şekilde olduğunun gözlenmesi açısından ilginçtirler. Bu bağlamda, yukarıda önemleri nedenleri ile açıklanmış olan söz konusu bölgelerde ardışık basamak türü geometriden oluşmuş süreksizliğe ait basamak kalınlıkları ve şerit genişliği gibi temel parametrelerin farklı değerleri için kırınmış alan eğrileri aşağıda sunulacaktır.

İlk olarak, bölüm 4.2’de detaylıca açıklanıp analitik olarak da gösterildiği üzere söz konusu bu bölümde bahsi geçen bölgede $u_2(x, y)$ ile gösterilen toplam alan bölüm 4.1’de $y > y_0$ ve $x \in (-\infty, \infty)$ ile tanımlı bölgedeki $u_1(x, y)$ toplam alanına eşittir. Bu yüzden sadece $u_1(x, y)$ ’nin açık ifadesinde yer alan ve bölüm 4.1’de tanımlanmış olduğu üzere ardışık basamak süreksizliğinin ayrıtlarından birinci ve ikinci mertebeden kırınmış toplam alanlar olan sırasıyla u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} değerlerinin genliklerine ilişkin eğriler verilecektir. Yukarıda bahsi geçen birinci ve ikinci mertebeden kırınmış toplam alanların genliklerinin $\phi = \text{atan}(y/x) \in [15^\circ, 165^\circ]$ şeklinde tanımlı gözlem açısı ile olan değişimleri basamak tipi geometriye ait genişlik l ve birinci basamak yüksekliği c parametrelerinin farklı değerleri için incelenecektir. Bunun yanısıra bu bölümde u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} kırınmış alan büyüklüklerine ilişkin sunulmuş olan tüm eğriler için u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} ’nin sırasıyla (4.9-10) ve (4.12) ile verilmiş analitik ifadelerinde yer alan diğer fiziksel parametreler, monokromatik akım kaynağına ilişkin λ dalga boyu türünden $\lambda = 1$ iken $k = 2\pi / \lambda$, $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} = 8\lambda$, $x_0 = 2\lambda$, $y_0 = \lambda$ ve $d = \lambda/3$ sabit olacak şekilde seçilmişlerdir. Ayrıca uyarıcı

kaynağa ilişkin akım da $I=1A$ değerinde dikkate alınmıştır. u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} alan büyüklüklerine ilişkin bir takım sayısal sonuçları elde edebilmek için söz konusu bu alan büyüklüklerinin açık ifadeleri olan (4.9-10) ve (4.12) eşitliklerinin işaret ettiği (3.19), (3.34) ve (3.35) bağıntularından açıkça görüleceği üzere $n=1,2,3,..$ olmak üzere f_n, g_n, h_n, m_n ve n_n katsayılarına ihtiyaç vardır. Bu katsayılar ise (3.47-3.51)'den oluşmuş sonsuz adet lineer cebirsel denklem takımının çözümünden elde edilir. Bu durum sayısal anlamda bir sonuç elde edebilmek adına sonsuz adet bilinmeyen bir sonlu değerde kabullenmeye ihtiyaç duymaktadır. Bu sonlu değere denklem takımına ilişkin kesme sayısı adı verilir. N ile gösterilecek olan bu kesme sayısını belirleyebilmek için bilinen kadarıyla açık literatürde herhangi bir kesin analitik hesap yöntemi mevcut değildir. Bu anlamda izlenen en belirgin yöntem birbirinden farklı artan N değerleri için u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} alanlarının genliklerini basamak süreksizliğinin şerit genişliği $l=6\lambda$, basamak kalınlıkları $c=\lambda/6$, $d=\lambda/3$ ve kaynak parametreleri x_0, y_0, I sabit kalacak şekilde aynı gözlem noktalarında ayrı ayrı çizdirip değişimin ihmal edilebilecek kadar az olduğu hali tespit etmeye dayanmaktadır. Bu amaca yönelik olarak şekil 5.1-5.2'da sırasıyla u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} 'in genliklerinin ϕ gözlem açısı ile olan değişimlerine ilişkin eğriler farklı N değerleri için verilmiştir. Bu eğriler incelendiğinde $N=10$ kesme sayısı değerinin yeterli olacağı açıkça görülmektedir. Basamak süreksizliğinin farklı parametrelerinin u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} kırınan alanlarına olan etkilerinin incelendiği diğer tüm sayısal uygulamalarda yukarıda elde edilmiş olan $N=10$ kesme sayısı değeri dikkate alınmıştır.



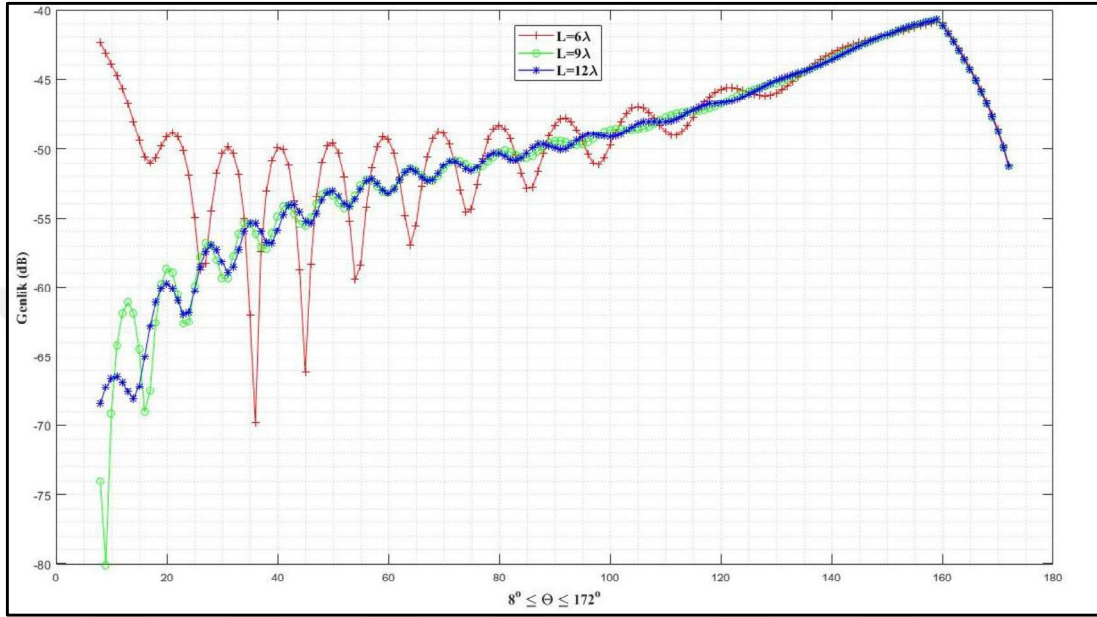
Şekil 5.1: Farklı N kesme sayısı değerleri için $|u_{11}^{kir}|$ büyüklüğünün ϕ gözlem açısı ile değişimi.



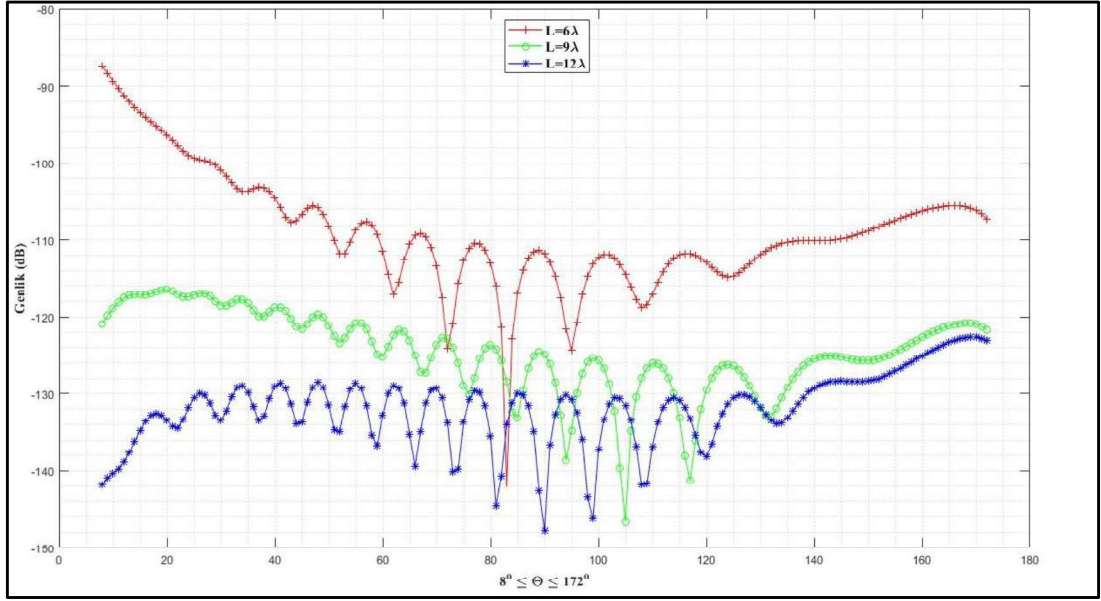
Şekil 5.2: Farklı N kesme sayısı değerleri için $|u_{12}^{kir}|$ büyüklüğünün ϕ gözlem açısı ile değişimi.

Ardışık basamak türü süreksizliğin neden olduğu birinci mertebeden toplam kırınmış alan u_{11}^{kir} ve ikinci mertebeden toplam kırınmış alan u_{12}^{kir} 'ın genliklerinin farklı şerit genişliği 1 değerleri için ϕ gözlem açısı ile olan değişimleri de şekil 5.3 ve 5.4'te

verilmiştir. Bu eğrilerden açıkça görüldüğü üzere basamak kalınlıkları $c = \lambda/6$, $d = \lambda/3$ ve kaynak parametreleri x_0, y_0, I sabit kalacak şekilde l parametresindeki artışa bağlı olarak her iki mertebeden de kırınmış alanların genliklerine ilişkin salınımlar artarken, ikinci mertebeden kırınmış alanın genliği de beklenildiği gibi azalmaktadır.

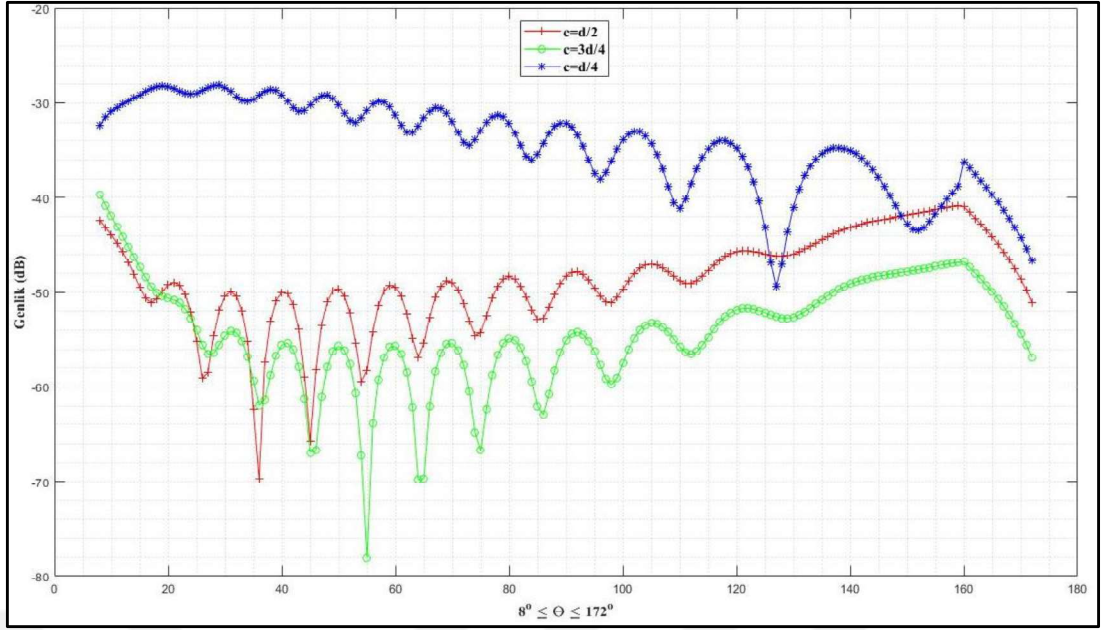


Şekil 5.3: Farklı l şerit genişliği değerleri için $|u_{11}^{kir}|$ büyüklüğünün ϕ gözlem açısı ile değişimi.

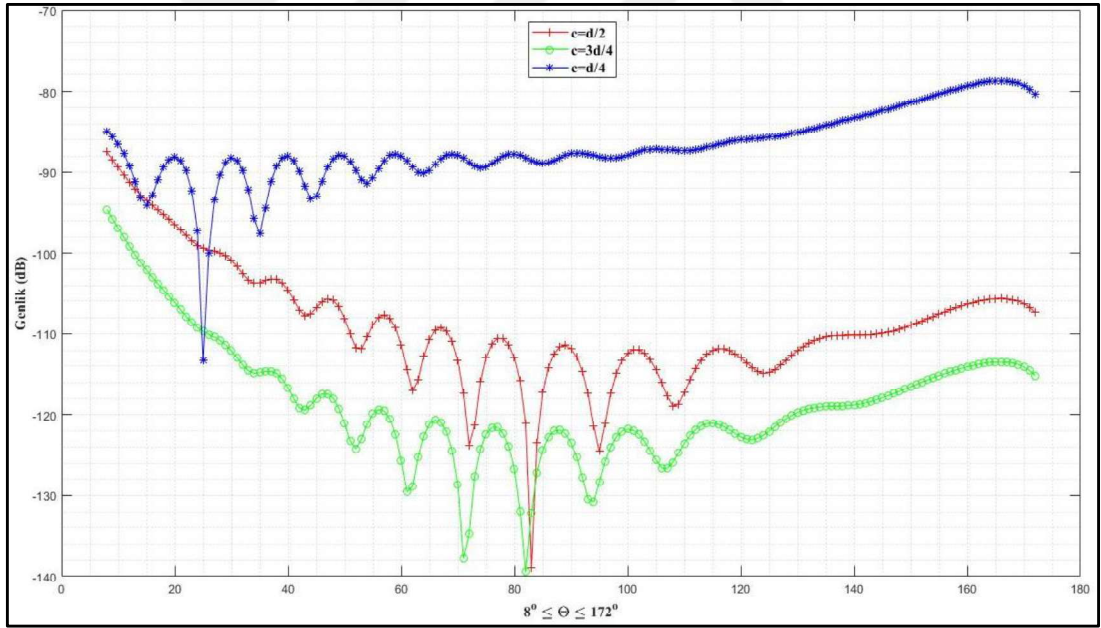


Şekil 5.4: Farklı l şerit genişliği değerleri için $|u_{12}^{kir}|$ büyüklüğünün ϕ gözlem açısı ile değişimi.

u_{11}^{kir} ve u_{12}^{kir} için yapılan alan incelemelerinde son olarak basamak süreksizliğine ilişkin şerit genişliği $l = 6\lambda$ ve basamak kalınlığı $d = \lambda/3$ sabit tutulup c değeri değiştirilerek oluşturulan farklı basamak yüksekliklerinin söz konusu bu alanların genliklerine olan etkileri sırasıyla şekil 5.5 ve şekil 5.6'da verilmiştir. Farklı gözlem noktalarında oluşmuş olan kırınmış alan genliklerini veren söz konusu bu eğriler incelendiğinde her iki mertebeden de kırınmış alanların genliklerinin c parametresinin artan değeri ile birlikte azaldığı gözlenmektedir. Bu durum beklenen bir sonuçtur. Çünkü c arttıkça $d - c$ değeri azalmakta dolayısıyla da ardışık basamak türü süreksizlik $(0, d)$ dik ayırıtının ortadan kalkmaya eğilim göstermesiyle tek basamak tipi bir geometriye doğru yozlaşmakta ve sonuç itibarıyla de birinci mertebeden kırınım toplam alana $(0, d)$ ayırıtından katkı gelmemeye başlamaktadır. Yukarıda bahsi geçen bu durum, ikinci mertebeden kırınım alanlar için ise söz konusu ikinci kırınım neden olacak bir ayırıtın kalmaması sonucunu doğuracağından ikinci mertebeden kırınım toplam alanın genliğindeki azalmanın nedeni gayet açık olarak ortaya çıkmaktadır.



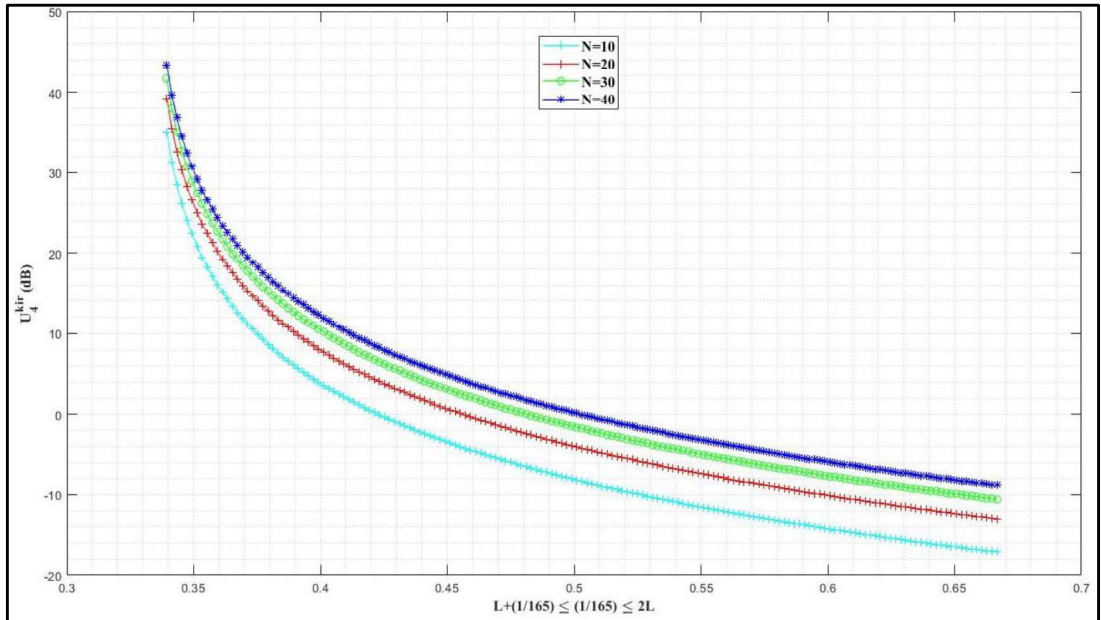
Şekil 5.5: Farklı c şerit uzunluğu değerleri için $|u_{11}^{kir}|$ büyüklüğünün ϕ gözlem açısı ile değişimi.



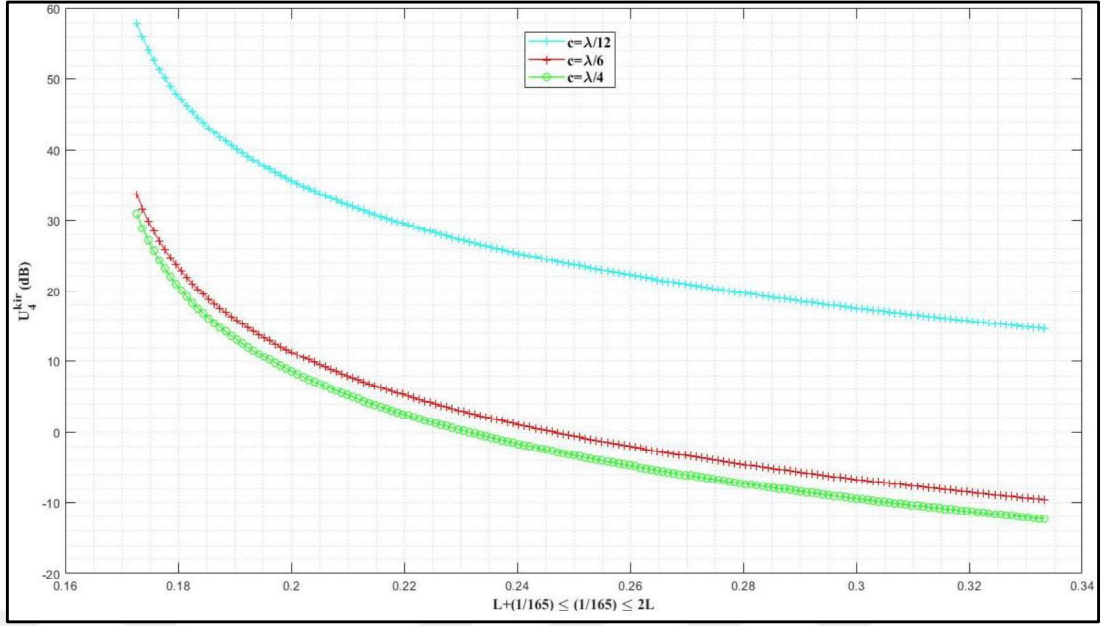
Şekil 5.6: Farklı c şerit uzunluğu değerleri için $|u_{12}^{kir}|$ büyüklüğünün ϕ gözlem açısı ile değişimi.

Son olarak bu bölümün başında bahsi geçen bölüm 4.3 ve 4.4'teki bölgelere ilişkin alanların problem geometrisinin parametrelerine ne şekilde bağlı olduklarını incelemek amacıyla bölüm 4.4'te tanımlı yarı sonsuz bölge içindeki kırınmış alanı gösteren ve açık ifadesi (4.28) ile verilmiş olan u_4^{kir} alanı dikkate alınmıştır. İlk olarak

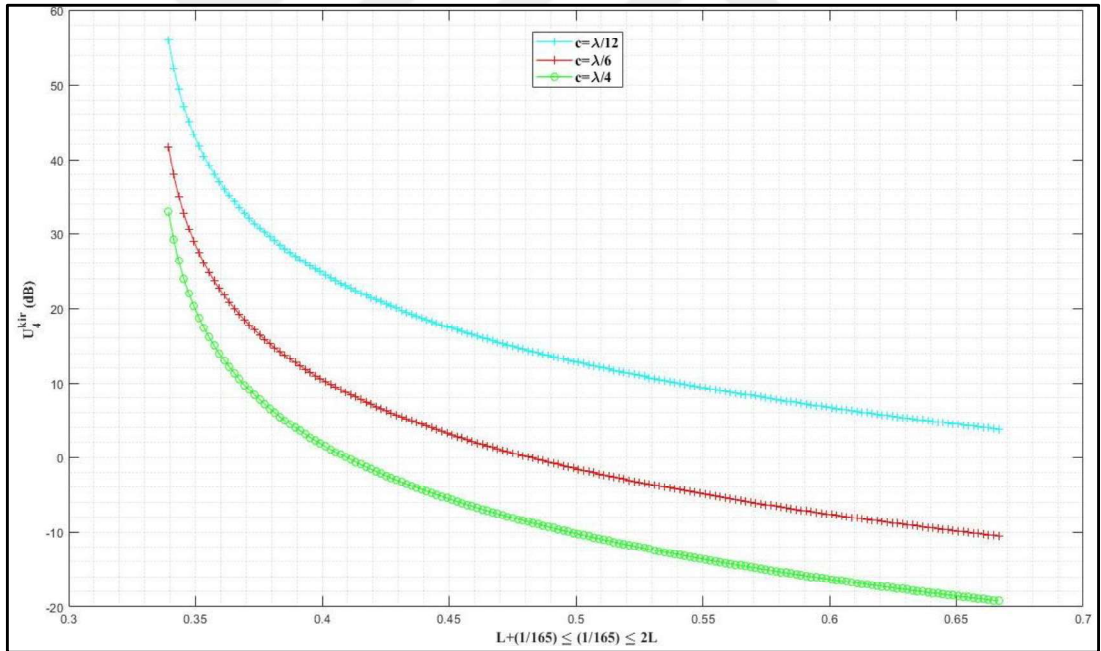
burada da N kesme sayısını belirlemek amacıyla, $I = 1A$, $k = 2\pi / \lambda$, $x_0 = 2\lambda$, $y_0 = \lambda$, $d = \lambda/3$, $c = \lambda/6$, $l = \lambda/3$ olmak üzere farklı N değerleri için $|u_4^{kr}|$ genlik değeri çizdirilmiştir. Şekil 5.7'den de anlaşılacağı üzere $N = 30$ değerinde bir kesme sayısının yeterli olacağı gözlenmiş ve şekil 5.8 ile şekil 5.9'te sunulan eğrilerde bu N değeri dikkate alınmıştır. Söz konusu bu şekiller I , k , x_0 , y_0 ve d yukarıdaki değerler olmak üzere sırasıyla $l = \lambda/6$ ve $l = \lambda/3$ şerit genişlikleri için $c = \lambda/12$, $c = \lambda/6$ ve $c = \lambda/4$ şeklindeki farklı basamak kalınlıklarına ilişkin $|u_4^{kr}|$ genlik değerinin $y = 2\lambda$, $1 < x \leq 2l$ çizgisi boyunca olan değişimlerini göstermektedir. Şekil 5.8 ve şekil 5.9'ten de açıkça gözlenebileceği gibi artan c basamak kalınlığı ile beraber alanın genliği beklendiği üzere azalmaktadır. Bunun sebebi c arttıkça $(1, c)$ ayrıtının ölçüm yapılan çizgiden uzaklaşması ve bu ayrıttan gelen kırınan alan katkısının azalmasından kaynaklanmaktadır. Gene şekil 5.8 ve şekil 5.9'teki alan genliklerinin (dB) türünden verilen değerleri incelendiğinde, artan l değeri ile birlikte $(0, d)$ ayrıtı ölçüm yapılan çizgiye uzaklaşmakta ve bu ayrıttan kırınan alanın katkısının zayıflamasından ötürü $|u_4^{kr}|$ genlik değeri de beklendiği gibi azalmaktadır.



Şekil 5.7: Farklı N kesme sayısı değerleri için $|u_4^{kr}|$ büyüklüğünün ϕ gözlem açısı ile değişimi.



Şekil 5.8: Farklı c şerit uzunluğu değerleri için $|u_4^{kr}|$ büyüklüğünün $1 = d/2$ şerit genişliği ile değişimi.



Şekil 5.9: Farklı c şerit uzunluğu değerleri için $|u_4^{kr}|$ büyüklüğünün $1 = d$ şerit genişliği ile değişimi.

6. SONUÇ

Bu tezde, sonsuz uzun bir çizgisel kaynak tarafından uyarılmış elektromanyetik dalgaların mükemmel iletken ardışık basamak tipi süreksizliklerden saçılması, analitik ve nümerik olarak detaylıca incelenmiştir. Bu bağlamda Fourier dönüşümünün saçılan alana ve bu alanın problemin geometrisinine bağlı olarak sağladığı sınır ve süreklilik koşullarına uygulanması neticesinde saçılan alanı bulma işlemi üçüncü türden bir modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümüne indirgenmiştir. Söz konusu bu çözüm gayet iyi bilinen klasik Wiener-Hopf tekniği kullanılarak ikinci türden kuple Fredholm integral denklemine indirgenmiş ve bu denklemler iteratif yöntemle yaklaşık olarak çözülmüştür. Bu aşamalarda ortaya çıkan integraller biri hariç asimptotik (yüksek frekans veya uzak alan) analitik olarak değerlendirilmiştir. Analitik olarak değerlendirilemeyen integral ise yakınsaklığı gösterilerek nümerik olarak hesaplanmıştır. Çözümlerde alanların ilgili bölgelerdeki bazı sınır ve süreklilik koşullarındaki bilinmeyen ifadelerinin Fourier-Sinüs serilerine açılması neticesinde ortaya çıkan ve her biri sonsuz adet olmak üzere 5 farklı bilinmeyen katsayı gözükmektedir. Bu katsayıları belirlemek amacıyla ilgili süreklilik ve sınır koşulları dikkate alınarak sonsuz bilinmeyen 5 adet lineer cebirsel denklem sistemi ortaya çıkarılmıştır. Böyle bir sistemin yaklaşık çözümü ise sonlu bir N kesim sayısı belirlenerek yapılmış ve tüm bölgelerdeki alanların Fourier dönüşümlerinin açık ifadeleri elde edilmiştir.

Yukarıda açıklandığı biçimde ortaya çıkan alanların ters Fourier dönüşümleri ilgili bölgelerinde dikkate alınarak en dik iniş çizgisi yöntemi ve kutup katkıları aracılığı ile alanların analizlerinin yapılabilmesi mümkün kılınmıştır. Daha sonra ise elde edilen analitik sonuçların geometriye ilişkin basamak kalınlığı ve şerit genişliği gibi farklı parametreler için nümerik değerleri çizdirilmiş ve elde edilen sonuçların geometrinin fiziksel yapısı ile uygunluğu gözlenmiştir.

Bu çalışmada tercih edilen yöntemin doğruluğunu göstermek amacıyla [3,6,7]'deki geometrilerin $\eta_1 = \eta_2 = 0$ yüzey empedanslarına sahip olması ile bu tezde dikkate alınan geometrinin alt şerit yüksekliği olan c 'nin sıfıra gitmesi halinde ortaya çıkan yapıların birebir özdeş olduğundan hareketle her iki limit durum için ortaya çıkan Wiener-Hopf denklemleri ayrı ayrı elde edilmiş ve bunların birbirlerine denk oldukları gözlenmiştir.

Buna ek olarak [3,6,7] çalışmalarında göz önüne alınan geometriler sadece tek basamak içermekte olup bu nedenle, "tek basamaklı kırınım problemi" olarak adlandırılabilir ve neticede tek kümeli sonsuz bilinmeyen sabit içeren ikinci türden modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümüne ihtiyaç duyar. Bu çalışmada ise ele alınan basamak sayısı iki olup 5 ayrı kümeden oluşmuş sonsuz bilinmeyenli sabit içeren ve bilinmeyen bir tam fonksiyondan oluşmuş üçüncü türden bir modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümüne gereksinim duyan iki ardışık basamaklı bir kırınım problemi olarak adlandırılır. Genel olarak, basamak sayısı $i \geq 1$ ile gösterilecek olursa ortaya çıkacak Wiener-Hopf denklemi $(i-1)$ sayıda bilinmeyen tam fonksiyon ve bunun yanında $(4i-3)$ adet ayrı kümeden oluşmuş sonsuz bilinmeyenli sabit içeren bir probleme dönüşür ve " i ardışık basamaklı kırınım problemi" olarak adlandırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Sommers G. A., Pathak P. H., (1992), "GTD solution for the diffraction by metallic tapes on paneled compact range reflectors", Proc. Inst. Elec. Eng. 139 (3), 297–305.
- [2] Johansen E., (1967), "Surface wave scattering by a step, IEEE Trans. Antennas and Propagation", 15 (3), 442-448.
- [3] Büyükaksoy A., Birbir F., (1993), "Plane wave diffraction by an impedance step", IEEE Trans. Antennas and Propagation 41 (8) 1160-1164. Erratum: "Correction to Plane wave diffraction by an impedance step", (1996), IEEE Trans. Antennas and Propagation 44 (3), 442.
- [4] Büyükaksoy A., Birbir F., (1997), "Plane wave diffraction by a reactive step", Int. J. Eng. Sci. 35 (4), 311-319.
- [5] Volakis J. L., Ricoy M., (1985), "Diffraction by a thick impedance edge and impedance step protrusion", Dept. Elect.Eng. Comp. Sci., Univ. Michigan, Ann Arbor, Tech. Rep. 388967-1-F=RL-2555.
- [6] Ayub M., Ramzan M., Mann A. B., (2009), "Magnetic line source diffraction by an impedance step", IEEE Trans. Antennas and Propagation 57 (4), 1289-1293.
- [7] Ahmed S., (2015), "Magnetic line source diffraction by a perfect electromagnetic conductor (PEMC) step", Journal of Modern Optics 62 (3), 175-178.
- [8] Türetken B., Alkumru A., Büyükaksoy A., and Kuştepelı A., (2006), "High frequency diffraction of cylindrical waves by perfectly conducting successive step discontinuities", Proc. MMET*06, 523–525.
- [9] Büyükaksoy A., Birbir F., Erdoğan E., (1995), "Scattering characteristics of a rectangular groove in a reactive surface", IEEE Trans. Antennas and Propagation 43 (12), 1450-1458.
- [10] Noble B., (1958), "Methods based on the Wiener-Hopf Technique", Pergamon Press, Chapter 3.
- [11] Mittra R., Lee S. W., (1971), "Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves", Mac Millan, New York, Chapter 3.
- [12] Büyükaksoy A., Uzgören G., Alkumru A., (2011), "Dalga Kırınımında Analitik Yöntemler", İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul, Cilt I, Bölüm 2,6.
- [13] Birbir F., Büyükaksoy A., (1994), "Plane wave diffraction by double impedance steps on a perfectly ground plane", Int. J. Electron. Commun. (AEÜ), 48, 108-114.

- [14] İdemen M., (2011), “Discontinuities in the Electromagnetic Field”, IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, Vol. 40, Wiley, Singapore, (Chapter 6).
- [15] İdemen M., (2008), “Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi”, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul, Bölüm V.
- [16] Wickham G. R., (1980), “Short wave radiation from a rigid strip in a smooth contact with a semi infinite elastic solid”, Q. J. Mech. Appl. Math.33 4.
- [17] Jones D.S., (1989), “Acoustic and Electromagnetic Waves”, Oxford University Press, London, Chapter 9.
- [18] Alkumru A., Polat B., (1998), “Multiple diffraction of a line source field by a three part thin transmissive slab”, Zeitsch. Für Ang. Math. Mech. (ZAMM) 78 (3), 183-195.
- [19] Büyükaksoy A., Alkumru A., (1995), “Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip”, J. Eng. Math. 29, 105-120.
- [20] Büyükaksoy A., Alkumru A., (1994), “Multiple diffraction of plane waves by an acoustically penetrable strip located between two soft/hard half-planes”, Int. J. Eng. Sci. 32 (5), 779-789.
- [21] Brand L., (1960), “Advanced Calculus: An Introduction to Classical Analysis”, 3rd edition, Wiley, New York, Chapter 7.

EKLER

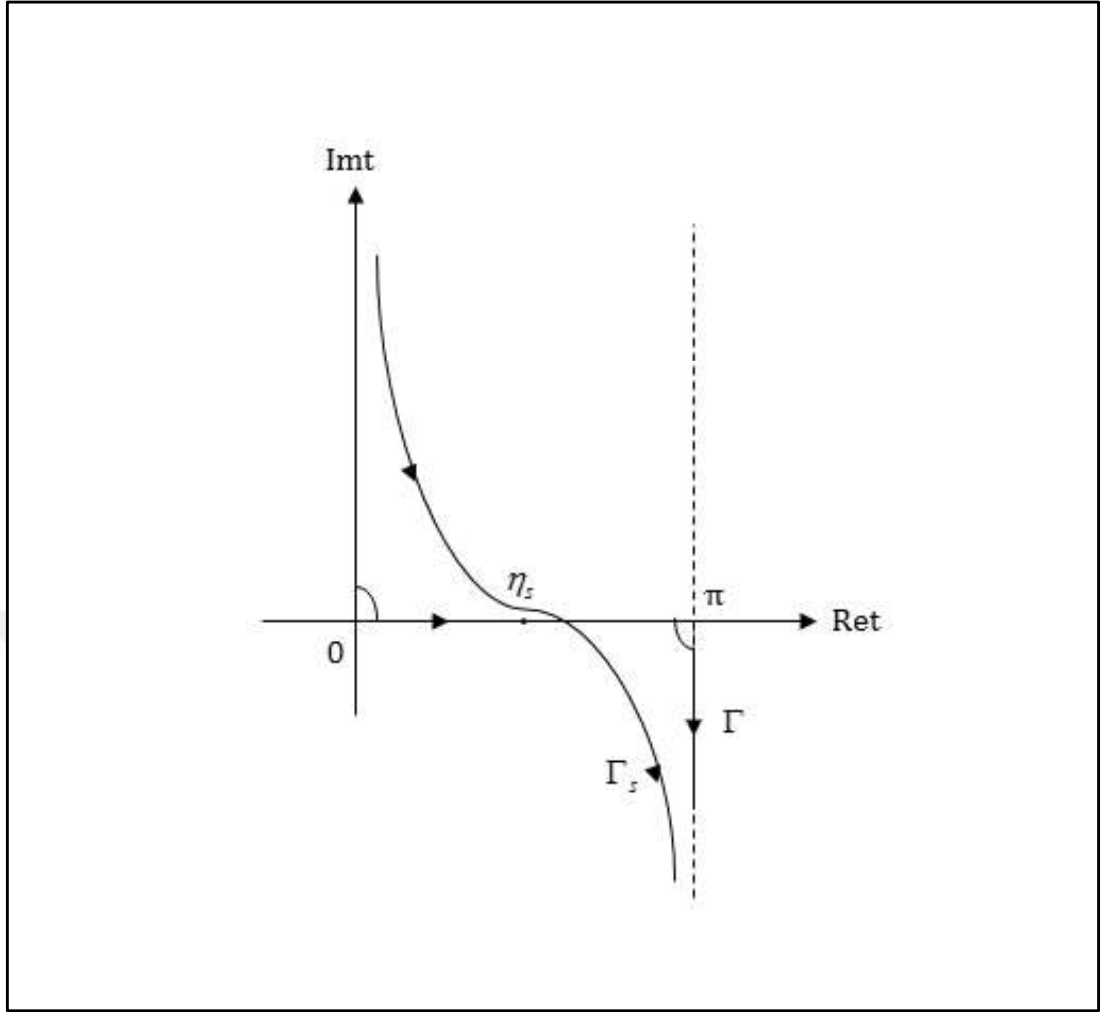
Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Yayınlar

Murat Doğan, Fatih Dikmen, Ali Alkumru, (2017), “Line source diffraction by perfectly conducting successive steps”, Wave Motion 68 (2017) 253–271.

Ek-B:

Bu tez kapsamında bölüm 3 ve bölüm 4'te bahsi geçen L^- ve L^+ eğrilerine ilişkin integrallerin üniform asimptotik ifadeleri hesaplanırken $\xi = -k \cos \eta$, $x - y_0 = \rho \cos \theta'$ ve $y - y_0 = \rho \sin \theta'$ dönüşümleri yapılacak olursa söz konusu bu integraller

$$y_0 = \int_{\Gamma} \frac{f(\eta)}{\cos \eta + \alpha/k} e^{-ik\rho \cos(\eta + \theta')} d\eta \quad (\text{B.1})$$



Şekil B1.1: Γ_s en dik iniş çizgisi ve η_s semer noktası.

şekline dönüştürler. Burada Γ , şekil B1.1’de gösterilen eğri, $f(\eta)$ kompleks düzlemde regüler bir fonksiyondur. Γ integrasyon çizgisinin $\eta_s = \pi - \theta$ semer noktasından geçen Γ_s en dik iniş çizgisine ötelenmesi neticesinde (B.1)’deki integrandın kutbu olan $\eta_p = \arccos(-\alpha/k)$ noktasının katkısı da dikkate alınarak (Bkn şekil B1.1)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y} &= \int_{\Gamma_s} \frac{f(\eta)}{\cos \eta + \alpha/k} e^{-ik\beta \cos(\eta+\theta)} d\eta + 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{f(\eta)}{\cos \eta + \alpha/k} e^{-ik\beta \cos(\eta+\theta)} \right]_{\eta=\eta_p} H(\eta_s - \eta_p) \\
 &= \int_{\Gamma_s} \frac{f(\eta) e^{-ik\beta \cos(\eta+\theta)}}{\cos \eta + \alpha/k} d\eta - \frac{2\pi i k f(\arccos(-\alpha/k))}{K(\alpha)} e^{i\beta[\alpha \cos \theta + K(\alpha) \sin K(\alpha)]} H(k \cos \theta - \alpha)
 \end{aligned}$$

(B.2)

ifadesi elde edilir. Burada yer alan $H(.)$ Heaviside birim basamak fonksiyonunu göstermektedir. (B.2)'de yer alan şekil 2.2'deki Γ_s en dik iniş çizgisi üzerindeki integrali hesap etmek için önce

$$\mathcal{Y}_s^0 = \int_{\Gamma_s} \frac{f(\eta)}{\cos \eta + \alpha/k} e^{-ik\beta \cos(\eta+\theta)} d\eta = \int_{\Gamma_s} \frac{f(\eta)(\eta-\eta_p)}{(\cos \eta + \alpha/k)(\eta-\eta_p)} e^{-ik\beta \cos(\eta+\theta)} d\eta \quad (B.3)$$

yazılır. Daha sonra yukarıdaki integralde üstel terimde gözükten trigonometrik fonsiyonun $\eta_s = \pi - \theta$ semer noktası civarında seriye açılmış yaklaşık ifadesi olan

$\cos(\eta + \theta) \approx -1 + \frac{1}{2}(\eta - \eta_s)^2$ (B.3)'de yerine konup, söz konusu integrale en büyük katkının $\frac{f(\eta)(\eta-\eta_p)}{(\cos \eta + \alpha/k)}$ fonksiyonun semer noktası civarındaki değerinden geleceği de

dikkate alınarak, (B.3) için $k\beta \ll 1$ olmak üzere

$$\mathcal{Y}_s^0 \approx \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta} \int_{\Gamma_s} \frac{e^{-\frac{i}{2}k\beta(\eta-\eta_s)^2}}{(\eta-\eta_p)} d\eta \quad (B.4)$$

asimptotik ifadesi yazılır. Bu son ifadedeki Γ_s en dik iniş çizgisi üzerindeki integrali değerlendirebilmek için önce semer noktası civarında $\eta - \eta_s : re^{i\theta}$ dönüşümü yapılır.

Bu durumda (B.4)'deki integranta ait üstel terim

$$e^{-\frac{i}{2}k\beta(\eta-\eta_s)^2} = e^{\frac{k\beta}{2}r^2 e^{i(2\theta-\pi/2)}} = e^{\frac{k\beta}{2}r^2 \cos(2\theta-\pi/2)} e^{i\frac{k\beta}{2}r^2 \sin(2\theta-\pi/2)} \quad (B.5)$$

şeklini alır. Bu da en dik iniş yönünde $\cos(2\theta - \pi/2) = -1$ 'den hareketle $\theta = (\pm\pi + \pi/2)/2$ değerlerini vermektedir. Bu değerler de şekil B1.1'den açıkça görüleceği üzere, en dik iniş çizgisinin reel- η ekseninin üst kısmında ve alt kısmında

yer alan yarı sonsuz parçaları için sırasıyla $\theta = 3\pi/4$ ve $\theta = -\pi/4$ 'dür. Yukarıda detaylıca açıklanan dönüşüm ve parametreler (B.4) ifadesinde dikkate alınacak olursa

$$\mathcal{Y}'_s: \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(r e^{i\frac{3\pi}{4}} + (\eta_s - \eta_p) \right)} dr + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\left(r e^{-i\frac{\pi}{4}} + (\eta_s - \eta_p) \right)} dr \right] \quad (\text{B.6})$$

yazılır. (B.6)'daki ikinci integralde $r \rightarrow -r$ dönüşümü yapılacak olursa yukarıdaki ifadenin

$$\mathcal{Y}'_s: -\frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(r e^{i\frac{3\pi}{4}} + (\eta_s - \eta_p) \right)} dr + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(r e^{i\frac{3\pi}{4}} + (\eta_s - \eta_p) \right)} dr \right]$$

$$\mathcal{Y}'_s: -\frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2}}{\left(r + (\eta_s - \eta_p) e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right)} dr \quad (\text{B.7})$$

şeklini alacağı kolayca görülür. (B.7)'deki sonsuz integrale ilişkin integrant gene bir sonsuz integral türünden yazılacak olursa

$$\mathcal{Y}'_s: -\frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2} \left\{ \int_0^{\infty} i e^{-\left[r + (\eta_s - \eta_p) e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right] \tau} d\tau \right\} dr \quad \Im \left\{ (\eta_s - \eta_p) e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right\} < 0 \quad (\text{B.8})$$

veya

$$\mathcal{Y}'_s: -\frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2} \left\{ \int_0^{\infty} -i e^{-\left[r + (\eta_s - \eta_p) e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right] \tau} d\tau \right\} dr \quad \Im \left\{ (\eta_s - \eta_p) e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right\} > 0 \quad (\text{B.9})$$

ifadeleri elde edilir. (B.8) ve (B.9) bağıntıları beraber göz önüne alınıp, bunlara ait τ ve r 'ye göre integrallerin sırası değiştirilerek, bir takım basit hesaplamalar neticesinde

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_s^0: & \text{mi} \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \int_0^\infty e^{m(\eta_s - \eta_p)e^{-\frac{3\pi}{4}\tau}} \left[\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}k\beta_0^2 m\tau r} dr \right] d\tau \\
\mathcal{Y}_s^0: & \text{mi} \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \int_0^\infty e^{m(\eta_s - \eta_p)e^{-\frac{3\pi}{4}\tau}} e^{-\frac{\tau^2}{2k\beta_0}} \left[\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{1-k\beta_0} \pm \frac{i\tau}{\sqrt{2k\beta_0}}\right)^2} dr \right] d\tau \\
\mathcal{Y}_s^0: & \text{mi} \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} \int_0^\infty e^{m(\eta_s - \eta_p)e^{-\frac{3\pi}{4}\tau - \frac{\tau^2}{2k\beta_0}}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k\beta_0}} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta \right) d\tau \\
\mathcal{Y}_s^0: & \text{mi} \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k\beta_0}} e^{ik\beta_0} \int_0^\infty e^{m(\eta_s - \eta_p)e^{-\frac{3\pi}{4}\tau - \frac{\tau^2}{2k\beta_0}}} d\tau \\
\mathcal{Y}_s^0: & \text{mi} \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k\beta_0}} e^{ik\beta_0} e^{-\frac{k\beta_0}{2}(\eta_s - \eta_p)^2} \int_0^\infty e^{-\left[\frac{\tau}{\sqrt{2k\beta_0}} \pm i\frac{\sqrt{k\beta_0}}{\sqrt{2}}(\eta_s - \eta_p)e^{-\frac{3\pi}{4}\tau}\right]^2} d\tau \\
\mathcal{Y}_s^0: & \text{mi} 2\sqrt{\pi} \frac{f(\eta_s)(\eta_s - \eta_p)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} e^{ik\beta_0} e^{-\frac{k\beta_0}{2}(\eta_s - \eta_p)^2} \int_{\pm i\frac{\sqrt{k\beta_0}}{\sqrt{2}}(\eta_s - \eta_p)e^{-\frac{3\pi}{4}}}^\infty e^{-\sigma^2} d\sigma \quad (B.10)
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Burada gözüken son integral büyüklükse çok iyi bilinen ve

$$F(\chi) = -2i\sqrt{\chi} e^{-i\chi} \int_{\sqrt{\chi}}^\infty e^{-i\xi^2} d\xi \quad (B.11)$$

şeklinde tanımlı Fresnel integrali türünden

$$\int_{\pm i\frac{\sqrt{k\beta_0}}{\sqrt{2}}(\eta_s - \eta_p)e^{-\frac{3\pi}{4}}}^\infty e^{-\sigma^2} d\sigma = \text{mi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{e^{\frac{k\beta_0}{2}(\eta_s - \eta_p)^2}}{\sqrt{k\beta_0}(\eta_s - \eta_p)} F\left(\frac{k\beta_0}{2}(\eta_s - \eta_p)^2\right) \quad (B.12)$$

olarak yazılır. Bu son eşitliğin de (B.10)'da yerine konması neticesinde yukarıda (B.3)'de tanımlı \mathcal{Y}_s^0 integrali için

$$I_s^{\alpha}: -\sqrt{2} \pi e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{f(\eta_s)}{(\cos \eta_s + \alpha/k)} \frac{e^{ik\beta_0}}{\sqrt{k\beta_0}} F\left(\frac{k\beta_0}{2}(\eta_s - \eta_p)^2\right) \quad (\text{B.13})$$

asimptotik değeri elde edilmiş olur. (B.13)'ün bu değeri (B.2)'de dikkate alınacak olursa (B.1) ile tanımlı bir integralin $k\beta_0 > 1$ haline ilişkin analitik sonucu elde edilmiş olur.

Ek-C:

Burada, açık ifadesi (3.23) ile verilen ve daha önce Bölüm 3'te açıklandığı üzere sadece sayısal olarak değerlendirilebilen $J(\alpha)$ integralinin yakınsaklığı etrafında gösterilmeye çalışılacaktır. Bu amaçla, önce şekil 2.2'de verilen ve $J(\alpha)$ büyüklüğünün integrasyon çizgisini oluşturan C_2^+ eğrisini $\tau \in (0, \infty)$ reel aralığında yazmaya olanak veren $\xi = i\tau + k$ değişken dönüşümü dikkate alınacak olursa (3.23) nin

$$J(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{M_+(i\tau + k)}{N_+(i\tau + k)} \frac{\sin^2(K(i\tau + k)d)}{K(i\tau + k)} \frac{L(i\tau + k)}{(\tau + i(\alpha - k))} d\tau \quad (\text{C.1})$$

şeklinde bir belirsiz integrale dönüştüğü kolayca görülür. $L(i\tau + k)$ 'nin (3.19)'den elde edilebilen açık ifadesinin yanısıra $M_+(i\tau + k)$ ve $N_+(i\tau + k)$ 'nin $\text{Im}(\xi) > -k$ üst yarı düzlemde regüler oldukları da göz önünde bulundurularak (C.1)'e ilişkin integrandın, $\tau \geq 0$ için her yerde regüler olduğu açıkça ortaya çıkar. Bu durumda, yukarıda (C.1) ile verilen eşitliğin her iki yanının mutlak değerini alarak kolayca

$$|J(\alpha)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{M_+(i\tau + k)}{N_+(i\tau + k)} \frac{\sin^2(K(i\tau + k)d)}{K(i\tau + k)} \frac{L(i\tau + k)}{(\tau + i(\alpha - k))} \right| d\tau \quad (\text{C.2})$$

bağıntısı yazılır.

$1 < \mu < 2$ ve $\zeta \neq 0$ şeklinde verilmiş iki reel parametre olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (\tau + \zeta)^{-\mu} d\tau &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (\tau + \zeta)^{-\mu} d\tau = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{(\delta + \zeta)^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{\zeta^{1-\mu}}{1-\mu} \\ &= \frac{1}{(1-\mu)} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta^{\mu-1}} + \frac{\zeta^{1-\mu}}{\mu-1} = \frac{\zeta^{1-\mu}}{\mu-1} < \infty \end{aligned} \quad (C.3)$$

ve

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[(\tau + \zeta)^{\mu} \left| \frac{M_+(i\tau + k)}{N_+(i\tau + k)} \frac{\sin^2(K(i\tau + k)d)}{K(i\tau + k)} \frac{L(i\tau + k)}{(\tau + i(\alpha - k))} \right| \right] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{\mu-2} = 0 \quad (C.4)$$

olduğundan detayları [21]'de verilmiş olan limit mukayese testi uyarınca (C.2) eşitsizliğinin sağ yanında gözüken belirsiz integralin yakınsak ve gene (C.2) den hareketle de açık ifadesi (C.1) veya (35b) ile verilen $J(\alpha)$ integral teriminin mutlak yakınsak oldukları gösterilmiş olur.

Ek-D:

Burada, bu çalışmanın ana noktalarından birini oluşturan bölüm 2'de (2.53-2.55) ve (2.81, 2.82) ile tanımlı $n=1,2,\dots, 2$ olmak üzere sırasıyla $f_n, g_n, h_n, m_n, \bar{u}_n$ sonsuz adet bilinmeyen sabiti belirlemeye yönelik olarak bölüm 3'te (3.47-3.51) ile yazılmış eşitliklerin nasıl elde edildiği detaylıca açıklanacaktır.

Bu bağlamda ilk olarak $G_1(\alpha, d)$ tam fonksiyonunun bölüm 3'te (3.26) ile verilmiş yaklaşık ifadesinde yer alan α parametresi yerine α_n yazılacak olursa

$$\begin{aligned} G_1(\alpha_n, d) &\approx -ikZIM(\alpha_n) e^{i\alpha_n x_0} e^{iK(\alpha_n)(y_0-d)} - e^{i\alpha_n d} \frac{M_-(\alpha_n)}{N_-(\alpha_n)} \left[Q^{(1)}(\alpha_n) + Q^{(2)}(\alpha_n) \right] \\ &\quad - M_+(\alpha_n) \left[P^{(1)}(\alpha_n) + P^{(2)}(\alpha_n) \right] \end{aligned} \quad (D.1)$$

elde edilir. Bu son bağıntı elde edilirken $C(\alpha)$ 'nın (2.30) ile verilen açık ifadesi (3.26)'da yerine konmuştur. (2.49)'un (2.89)'da dikkate alınması neticesinde açıkça

görüreceği üzere $M(\alpha_n) = M_+(\alpha_n)M_-(\alpha_n) = 0$ yazılır. Bu da $M_+(\alpha_n) \neq 0$ olduğundan aynı zamanda $M_-(\alpha_n) = 0$ sonucunu da ortaya koyar. Bu son bağıntılar (D.1)'de $Q^{(1)}(\alpha)$ 'ya ilişkin (3.33, 3.35) ve $Q^{(2)}(\alpha)$ 'ye ilişkin (3.46) ifadeleriyle beraber dikkate alınacak olursa

$$M_-(\alpha_n)Q^{(2)}(\alpha_n) = 0 \quad (\text{D.2})$$

ve

$$\begin{aligned} M_-(\alpha_n)Q^{(1)}(\alpha_n) &= M_-(\alpha_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m K_m(g_m - i\alpha_m h_m) M_+(\alpha_m) N_-(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha_n - \alpha_m)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_n} \frac{M(\alpha)(-1)^n K_n(g_n - i\alpha_n h_n) M_+(\alpha_n) N_-(\alpha_n)}{M_+(\alpha) 2\alpha_n(\alpha - \alpha_n)} \\ &= \frac{(-1)^n K_n(g_n - i\alpha_n h_n) N_-(\alpha_n)}{2\alpha_n} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_n} \frac{\sin[K(\alpha)(d-c)]}{K(\alpha)(\alpha - \alpha_n)} e^{iK(\alpha)(d-c)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(d-c)}{2K_n} N_-(\alpha_n)(g_n - i\alpha_n h_n) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

bağıntıları elde edilir. Bu son iki eşitlik $M(\alpha_n) = 0$ olduğu da göz önünde bulundurularak (D.1)'de yerine konacak olursa

$$G_1(\alpha_n, d) \approx \frac{(-1)^n (d-c)}{2K_n} (g_n - i\alpha_n h_n) e^{i\alpha_n d} - M_+(\alpha_n) [P^{(1)}(\alpha_n) + P^{(2)}(\alpha_n)] \quad (\text{D.4})$$

elde edilir. Bölüm 2'de yer alan (2.51) ve (2.60) bağıntılarından hareketle yukarıdaki yaklaşık eşitliğin sol tarafı için

$$G_1(\alpha_n, d) = -\frac{(-1)^n (d-c)}{2K_n} [f_n - (g_n - i\alpha_n h_n) e^{i\alpha_n d}] \quad (\text{D.5})$$

yazılır. Bu son eşitlik (D.4)'de yerine konup, K_n 'in (2.52) ile verilen ifadesi de dikkate alınacak olursa

$$f_n \approx (-1)^n \frac{2n\pi}{(d-c)^2} M_+(\alpha_n) \left[P^{(1)}(\alpha_n) + P^{(2)}(\alpha_n) \right] \quad n=1,2,\dots \quad (D.6)$$

olacak şekilde (3.47) ile verilen eşitliğin aynısının elde edildiği kolayca görülür.

İkinci olarak gene $G_1(\alpha, d)$ tam fonksiyonunun bölüm 3'te (3.26) ile verilmiş yaklaşık ifadesindeki α parametresi yerine bu sefer $-\alpha_n$ yazılacak olursa

$$G_1(-\alpha_n, d) \approx -ikZIM(\alpha_n) e^{-i\alpha_n x_0} e^{iK(\alpha_n)(y_0-d)} - e^{-i\alpha_n l} \frac{M_+(\alpha_n)}{N_+(\alpha_n)} \left[Q^{(1)}(-\alpha_n) + Q^{(2)}(-\alpha_n) \right] - M_-(\alpha_n) \left[P^{(1)}(-\alpha_n) + P^{(2)}(-\alpha_n) \right] \quad (D.7)$$

elde edilir. Bu son eşitlik yazılırken (3.5) ve (3.6) da dikkate alınmıştır. Yukarıda (D.2) ve (D.3) elde edilirken göz önünde bulundurulmuş hususlar (D.7)'ye uygulanacak olursa

$$M_-(\alpha_n) P^{(2)}(-\alpha_n) = 0 \quad (D.8)$$

ve

$$\begin{aligned} M_-(\alpha_n) P^{(1)}(-\alpha_n) &= -M_-(\alpha_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m K_m f_m M_+(\alpha_m)}{2\alpha_m (\alpha_n - \alpha_m)} \\ &= -\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_n} \frac{M(\alpha)}{M_+(\alpha)} \frac{(-1)^n K_n f_n M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n (\alpha - \alpha_n)} = -\frac{(-1)^n K_n f_n}{2\alpha_n} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_n} \frac{\sin[K(\alpha)(d-c)]}{K(\alpha)(\alpha - \alpha_n)} e^{iK(\alpha)(d-c)} \\ &= (-1)^n \frac{f_n (d-c)}{2K_n} \end{aligned} \quad (D.9)$$

elde edilir. Yukarıda yapılanlara benzer olarak gene bölüm 2'de yer alan (2.51) ve (2.60) bağıntılarından hareketle (D.7) yaklaşık eşitliğinin sol tarafı için yazılan

$$G_1(-\alpha_n, d) = -\frac{(-1)^n (d-c)}{2K_n} \left[f_n - (g_n + i\alpha_n h_n) e^{-i\alpha_n} \right] \quad (D.10)$$

ifadesinin yanısıra (D.8), (D.9) ve $M(\alpha_n) = 0$ bağıntıları da (D.7) de dikkate alınacak olursa basit hesaplamalar sonucunda (3.48)'in aynısı olan

$$g_n + i\alpha_n h_n \approx (-1)^{n+1} \frac{2n\pi}{(d-c)^2} \frac{M_+(\alpha_n)}{N_+(\alpha_n)} \left[Q^{(1)}(-\alpha_n) + Q^{(2)}(-\alpha_n) \right] \quad n = 1, 2, \dots \quad (D.11)$$

elde edilir. Bu son eşitlik elde edilirken K_n 'in (2.52) ile verilen ifadesinin de dikkate alındığını belirtmek gerekir.

(3.49) ile verilen bağıntıyı elde etmek içinse ilk olarak gene bölüm 3'te yer alan (3.21) denkleminde hareketle

$$G_+(\alpha, d) = N(\alpha) [S(\alpha) - L(\alpha)] \quad (D.12)$$

eşitliği yazılır. Bu son ifadede $L(\alpha)$ ve $S(\alpha)$ 'nın sırasıyla (3.19) ve (3.25) verilen ifadeleri yerlerine konacak olursa $G_+(\alpha, d)$ için

$$G_+(\alpha, d) \approx \frac{N_+(\alpha)}{M_+(\alpha)} \left[Q^{(1)}(\alpha) + Q^{(2)}(\alpha) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{K_m N(\alpha) (g_m - i\alpha h_m)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\gamma_m N(\alpha) (m_m - i\alpha n_m)}{(\alpha^2 - \beta_m^2)} \quad (D.13)$$

yaklaşık ifadesi elde edilir. Daha sonra (D.13) bağıntısında α yerine $n = 1, 2, 3, \dots$ için (2.76) ile tanımlı β_n büyüklüğü konup $N(\beta_n) = 0$, $N_+(\beta_n) \neq 0$ ve $\alpha_n \neq \beta_n$ özellikleri de dikkate alınacak olursa

$$G_+(\beta_n, d) \approx \frac{N_+(\beta_n)}{M_+(\beta_n)} \left[Q^{(1)}(\beta_n) + Q^{(2)}(\beta_n) \right]$$

$$+ \frac{(-1)^n \gamma_n (m_n - i\beta_n n_n)}{2\beta_n} \lim_{\alpha \rightarrow \beta_n} \frac{N(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} \quad (D.14)$$

bağıntısı elde edilir. (D.14)'teki limit değeri $N(\alpha)$ 'nın (2.90) ile verilen açık ifadesi göz önünde bulundurularak hesaplanacak olursa

$$G_+(\beta_n, d) \approx \frac{N_+(\beta_n)}{M_+(\beta_n)} [Q^{(1)}(\beta_n) + Q^{(2)}(\beta_n)] + (-1)^{n+1} \frac{d(m_n - i\beta_n n_n)}{2\gamma_n} \quad (D.15)$$

bağıntısı ortaya çıkar. Son olarak (2.77) ve (2.84) eşitliklerinden açıkça yazılan

$$G_+(\beta_n, d) = (-1)^{n+1} \frac{d(m_n - i\beta_n n_n)}{2\gamma_n} \quad (D.16)$$

ifadesi (D.15)'in sol yanında yerine konacak olursa $Q^{(1)}(\beta_n) + Q^{(2)}(\beta_n) \approx 0$ ve dolayısıyla da (3.49) ile verilen $Q^{(1)}(\beta_n) \approx -Q^{(2)}(\beta_n)$ $n=1,2,\dots$ bağıntısının elde edileceği kolayca görülür.

Son olarak bölüm 3'te bahsi geçen birbirine benzer olan (3.50) ve (3.51) bağıntılarını elde etmek için önce (2.14), (2.36), (2.58), (2.67) ve (2.80) eşitliklerinden hareketle $n=1,2,\dots$ olmak üzere

$$\int_0^d n(y) \sin(\gamma_n y) dy = \int_c^d h(y) \sin(\gamma_n y) dy \quad (D.17)$$

dolayısıyla da

$$\int_0^d \sum_{m=1}^{\infty} n_m \sin(\gamma_m y) \sin(\gamma_n y) dy = \int_c^d \sum_{m=1}^{\infty} h_m \sin[K_m(y-c)] \sin(\gamma_n y) dy \quad (D.18)$$

yazılır. Bu son eşitliğin her iki yanında yer alan integral ile toplama işlemlerinin sırası değiştirilip soldaki integral için ortogonalite özelliği sağdaki için ise $y-c=t$ değişken dönüşümü dikkate alınarak hesaplamalar yapılacak olursa (3.50)'nin aynısı olan

$$\begin{aligned}
n_n &= \frac{1}{d} \sum_{m=1}^{\infty} h_m \left\{ \frac{\sin [K_m (d-c) - \gamma_n d]}{(K_m - \gamma_n)} - \frac{\sin [K_m (d-c) + \gamma_n d]}{(K_m + \gamma_n)} + \frac{2K_m \sin(\gamma_n c)}{(K_m^2 - \gamma_n^2)} \right\} \\
&= \frac{1}{d} \sum_{m=1}^{\infty} h_m \left\{ \frac{\sin(m\pi - n\pi)}{(K_m - \gamma_n)} - \frac{\sin(m\pi + n\pi)}{(K_m + \gamma_n)} + \frac{2K_m \sin(\gamma_n c)}{(K_m^2 - \gamma_n^2)} \right\} \\
&= \frac{2 \sin(\gamma_n c)}{d} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m K_m}{(K_m^2 - \gamma_n^2)} \tag{D.19}
\end{aligned}$$

bağıntısının elde edileceği kolayca görülür. Bu son eşitlik elde edilirken K_m ve γ_n 'in de sırasıyla (2.52) ve (2.78) ile verilen ifadeleri dikkate alınmıştır. Yukarıda yapılan işlemlerin birebir aynısı bu sefer (2.15), (2.35), (2.57), (2.66) ve (2.79) için tekrar edilecek olursa (3.51)'den başka bir şey olmayan

$$g_n = \frac{2K_n}{(d-c)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_m \sin(\gamma_m c)}{(K_n^2 - \gamma_m^2)} \tag{D.20}$$

elde edileceği basitçe görülür.