T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

R_2^4 MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE HELİSLER VE BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Asya KEÇECİ

Danışman
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

MANİSA–2021

Asya KEÇECİ

R_2^4 MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE HELİSLER VE BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

2021

TEZ ONAYI

Asya KEÇECİ tarafından hazırlanan **"R_2^4 MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE HELİSLER VE BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI"** adlı tez çalışması …/…/2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman: **Prof. Dr. Mustafa KAZAZ**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi: **…………………………….**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi: **………………………………**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Asya KEÇECİ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\square^n$	n-boyutlu Reel Öklid Uzayı
$\square^3$	3-boyutlu Öklid Uzayı
$\square^3_1$	3-boyutlu Minkowski Uzayı
$\square^4_1$	4-boyutlu Minkowski Uzayı
$\square^4_2$	4-boyutlu yarı-Öklid Uzayı
$k_1(s)$	1.Eğrilik fonksiyonu
$k_2(s)$	2. Eğrilik fonksiyonu
$k_3(s)$	3. Eğrilik fonksiyonu
$\langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle$	Öklid İç Çarpımı
$\langle u, u \rangle_L$	Lorentz İç Çarpımı
Ccr-eğrisi	Sabit Eğrilik Oranlı Eğri

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip bana vakit ayıran, çalışmamın her aşamasında bana destek olan ve bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa KAZAZ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenimim süresince değerli bilgilerini benimle paylaşan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Asya KEÇECİ
Manisa,2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Asya KEÇECİ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

R_2^4 MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE HELİSLER VE BAZI ÖZEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu çalışmada, $\mathbb{R}_2^4$de bir Spacelike helis ve slant helis eğrileri için $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısı kullanılarak bu eğrilere ait bazı tanımlar, teoremler, integral karakterizasyonlar ve eğrinin eğriliklerine ait diferansiyel denklem karakterizasyonları verildi. Ayrıca bu spacelike eğriler için teğet birim vektörüne göre diferansiyel denklem verilerek, bazı özel eğriler incelendi.

Anahtar Kelimeler: Helis **(**Eğilim Çizgileri), B_2-Slant Helis, B_1-Slant Helis, Frenet Çatısı, Yarı Öklidyen Uzay

2021, 60 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Asya KEÇECİ
Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

CHARACTERİZATİONS OF SPACELİKE HELİCES AND SOME SPECİAL CURVES İN MİNKOWSKİ SPACE $\square^4_2$

In this thesis, by using Frenet frame $\{T, N, B_1, B_2\}$ for spacelike helices and slant helices in $\square^4_2$, some definitions, theorems, integral characterizations, and differential equations characterizations belonging to curvature of the curve are given. Moreover, by giving differential equations according to unit tangent vector fort he spacelike curves, some special curves are investigated.

Keywords: Helix (inclined curve), B_2-slant helix, B_1-slant helix, Frenet frame, Semi Euclidean space

2021, 60 pages

1. GİRİŞ

$\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklidyen uzayında A. Magden, bir $x(s)$ eğrisinin bir eğilim çizgisi olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right\}^2 = sabit$$

eşitliğinin sağlanması gerektiğini göstermiştir. Burada k_1, k_2 ve k_3 değerleri $x(s)$ eğrisinin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleridir ve hiçbir yerde sıfır değillerdir **[2].** $\mathbb{R}^4_1$ Minkowski 4-uzayında H. Kocayiğit ve M. Önder tarafından timelike eğilim çizgileri için benzer tanımlar verilmiştir **[6].** $\mathbb{R}^4_1$ Minkowski $4-$uzayında space-like ve timelike eğrileri için gerek ve yeter koşullar verilmiştir **[10]**. A. T. Ali ve R. Lopez Minkowski 4-uzayında timelike eğilim çizgilerini inceleyerek bu eğriler için bazı tanımlar sunmuşlardır **[3].** M. Önder, H. Kocayiğit ve M. Kazaz space-like eğilim çizgileri için diferansiyel denklemler ve integral karakterizasyonlar tanımlamışlardır**[7].**

Bu tez çalışmasında M. Aykut ve A.İ. Sivridağ makalesi incelenerek, $\mathbb{R}^4_2$de bir space-like eğrinin eğilim çizgisi olabilmesi için gerek ve yeter şartlar, integral karakterizasyonlar ve diferansiyel denklem karakterizasyonları detaylı bir şekilde incelenmiştir**[12].** Ayrıca T.Ağırman ve H. Kocayiğit makalesi incelenerek, $\mathbb{R}^4_2$de bir space-like eğrinin birim teğet vektöre göre diferansiyel denklem incelenerek, buna bağlı bazı özel eğriler verildi**[24].**

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. E^3 Öklid 3- Uzayında Frenet Çatısına Göre Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Boş olmayan bir cümle A ve bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki üç önermeye uyan bir $f : A \times A \to V$ fonksiyonu varsa A ya V ile eşlenen bir Afin uzay denir [17].

i. $\forall P,Q \in A$ nokta çifti için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $\alpha \in V$ vektörü vardır.

ii. A da belli bir nokta seçildiğinde A daki geri kalan her noktaya V deki bir vektör karşılık gelir.

iii. $\forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$.

$F = \mathbb{R}$ reel sayılar cismi olarak alınması halinde afin uzayı reeldir.

Tanım2.1.2 (Öklid Uzayı): $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayında iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{2.1.1}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir.

Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı $\mathbb{R}^n$ afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [15, 16].

Tanım 2.1.3 (Vektörel Çarpım): $\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$ ortonormal baz vektörleri olsun. Bu durumda

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1,$$

ve

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0,$$

ya da kısaca,

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,\ \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$$

olmak üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin **vektörel çarpım;**

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \quad (2.1.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörel çarpımı aşağıdaki gibi bir sembolik determinant ile gösterilebilir:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Eğer $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri lineer bağımsız, aksi durumda lineer bağımlıdır[17].

Tanım 2.1.4: $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı üzerinde, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\|\ \|: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \to \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

(2.1.3)

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^3$ bir normdur [17].

Tanım 2.1.5: *3*-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen Öklid uzayı E^3 olsun.

$$\mathrm{d}: E^3 \times E^3 \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{d}(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2},\ \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

olarak tanımlanan fonksiyona E^3 Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $x, y \in E^3$ için $\mathrm{d}(x, y)$ değerine de *x* ile *y* noktaları arasındaki uzaklık denir [17].

Tanım 2.1.6: $I, \mathbb{R}$ reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere, diferansiyellenebilir bir

$$\begin{aligned}&\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3, \\ &s \to \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))\end{aligned}$$

fonksiyonuna E^3, $3-$boyutlu Öklid uzayında diferansiyellenebilir bir parametrik eğri denir. Bu durumda $\gamma(s) \subset E^3$ alt kümesine γ eğrisinin grafiği veya izi denir. $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığına, γ eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\gamma(s)$ eğrisinin parametresi denir [17]. Buradaki γ_i , $1 \leq i \leq 3$, ler $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$, $t \to \gamma_i(t), 1 \leq i \leq 3$, şeklinde fonksiyonlar olup, γ nın koordinat fonksiyonları (bileşenleri) olarak isimlendirilirler.

Tanım 2.1.7: $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$, $s \to \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ bir eğri olsun. γ_i , $i = 1, 2, 3,$ koordinat fonksiyonlarının t noktasındaki birinci türevleri $\gamma'_i(t)$ ler olmak üzere,

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) \in \mathbb{R}^3$$

vektörüne γ eğrisinin t noktasındaki teğet vektörü veya hız vektörü denir.

Ayrıca,

$$\|\gamma'\| : \mathrm{I} \to R,\ s \to \|\gamma'\|(s) = \|\gamma'(s)\| = \sqrt{(\gamma'_1(s))^2 + (\gamma'_2(s))^2 + (\gamma'_3(s))^2} \tag{2.1.5}$$

şeklinde tanımlı $\|\gamma'\|$ fonksiyonuna γ eğrisinin hız fonksiyonu ve $\|\gamma'(s)\|$ reel sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki skaler hızı denir. Eğer $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise, γ eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in \mathrm{I}$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir

[17].

Tanım 2.1.8: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{T}(s) = \gamma'(s)$$

(2.1.6)

eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir $[15]$.

Tanım 2.1.9: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : \mathrm{I} \to R, \; s \to \kappa(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\|,$$

(2.1.7)

fonksiyonuna, γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir $[15]$.

Eğrilik, teğet doğrudan sapma miktarını ölçer. Bu anlamda eğrilik değeri küçüldükçe eğri doğruya yaklaşır, büyüdükçe kapalı bir görünüme sahip olur.

$\left\| \vec{T}(s) \right\| = 1$ olduğundan $\left\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \right\rangle = 1$ dir. Bu eşitliğinin her iki tarafın türevi alınır ve düzenleme yapılırsa $\left\langle \vec{T}'(s), \vec{T}(s) \right\rangle = 0$ elde edilir. Yani $\vec{T}'(s)$ vektörü $\vec{T}(s)$ vektörüne diktir. Şimdi $\vec{T}'(s)$ vektörünü normuna bölersek, $\vec{T}(s)$ vektörüne dik yeni bir birim vektör elde ederiz.

Tanım 2.1.10: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için,

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s),$$

(2.1.8)

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **asli normali** denir [15].

Tanım 2.1.11: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için,

$$\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\times\vec{N}(s), \tag{2.1.9}$$

eşitliği ile belirli $\vec{B}(s)$ vektörüne, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki binormali denir [15].

Tanım 2.1.12 (Öklid 3-uzayında Frenet çatısı): $\vec{T}(s),\vec{B}(s),\vec{N}(s)$ vektörlerine, $\gamma:\mathrm{I}\rightarrow E^3$ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir. $\{\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s)\}$ kümesine de γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir $[15]$.

Tanım 2.1.13: $\gamma:\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\rightarrow E^3$ bir eğri ve $\{\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s)\}$ Frenet çatısı olsun. $s\in I$ için $\{\vec{T}(s),\vec{N}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlemi** veya **dokunum düzlemi,** $\{\vec{N}(s),\vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **normal düzlemi** ve
$\{\vec{T}(s),\vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme ise γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlemi** veya **doğrultman düzlemi** denir [15].

Tanım 2.1.14: Bir $\gamma:\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ olmak üzere,

$$\tau=\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R},$$

$$s\rightarrow\tau(s)=-\langle\vec{B}'(s),\vec{N}(s)\rangle, \tag{2.1.10}$$

fonksiyonuna γ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **burulması** denir [15].
Burulma, eğrinin oskülatör düzlemden sapma miktarını ölçer.

Teorem 2.1.1 (Öklid 3-uzayında Frenet türev formülleri): Birim hızlı bir $\gamma:\mathrm{I}\rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s)$ ise

$$\vec{T}'(s) = \kappa \vec{N}(s),$$
$$\vec{N}'(s) = -\kappa \vec{T}(s) + \tau \vec{B}(s),$$
$$\vec{B}' = -\tau \vec{N}(s), \quad (2.1.11)$$

şeklindedir [15].

2.2.Semi-Öklidyen Uzaylar

Tanım 2.2.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

dönüşümü $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ için

i) $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \langle \vec{v},\vec{u} \rangle$

ii) $\langle a\,\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u},\vec{w} \rangle + \mathrm{b}\langle \vec{\mathrm{v}},\vec{w} \rangle$

iii) $\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u},\vec{\mathrm{v}} \rangle + \mathrm{b}\langle \vec{u},\vec{w} \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle , \rangle$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir [13].

Tanım 2.2.2: V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle , \rangle$ olsun.

i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘pozitif tanımlı’ ,

ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘negatif tanımlı’ ,

iii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘yarı pozitif tanımlı’ ,

iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘yarı negatif tanımlı’,

v) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{v} = 0$ olmak zorunda ise $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formuna ‘non-dejenere’ aksi halde ‘dejeneredir’ denir [13].

Tanım 2.2.3: V bir reel vektör uzayı ve

$\langle \vec{v},\vec{v} \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

bir simetrik bilineer form olsun.

$\langle \vec{v},\vec{v} \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayıının boyutuna $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formun ‘indeksi’ denir ve $'\upsilon'$ ile gösterilir [13].

Teorem 2.2.4: V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ olsun.

Bu durumda,

i) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, $i \neq j$,

ii) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 1$, $1 \leq i \leq \gamma$,

iii) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1$, $\gamma + 1 \leq i \leq \gamma + \upsilon$,

iv) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, $\gamma + \upsilon \leq i \leq n = \gamma + \upsilon + \mu$,

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ bazı vardır [14].

Teorem 2.2.5: Bir $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ simetrik bilineer formun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$nin herhangi bir baza göre ters matrisinin olmasıdır [13].

Tanım 2.2.6: Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $\langle \vec{v},\vec{v} \rangle$ ise $(V; \langle \vec{v},\vec{v} \rangle)$ ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir [13].

Tanım 2.2.7: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq 0$ ve $\vec{w} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri diktir denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir. V reel vektör uzayının bir altuzayı W ise

$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V : \vec{v} \perp W\}$ olsun. $W^{\perp}$ altuzayına V nin dik altuzayı denir. $W \oplus W^{\perp}$ genellikle V nin tamamı olmadığından $W^{\perp}$ altuzayına W nın ortogonal komplemanı denilemez [13].

Teorem 2.2.8: W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman

i) $boyW + boyW^{\perp} = boyV$

ii) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$ özellikleri vardır [13].

Tanım 2.2.9: V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$, W üzerinde non-dejenere ise W ya 'non-dejenere altuzay', non-dejenere değil ise 'dejenere altuzaydır' denir [13].

Teorem 2.2.10: V bir skalar çarpım uzayı ve W , V nin bir altuzayı olsun. W nın non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^{\perp}$ olmasıdır [13].

Tanım 2.2.11: Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ olsun. Bir $\vec{v} \in V$ vektörünün normu

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektöre 'birim vektör' ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de 'ortonormal sistem' denir [13].

Teorem 2.2.12: V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = \langle \vec{e_i}, \vec{e_i} \rangle$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir [13].

Tanım 2.2.13: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi υ olmak üzere $\upsilon = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir 'Lorentz uzayı' denir [13].

Tanım 2.2.14: V bir Lorentz uzayı olsun. $\vec{v} \in V$ olmak üzere

i) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne 'space-like vektör',

ii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne 'timelike vektör',

iii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, $\vec{v} \neq 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne 'lightlike (null) vektör' denir [13, 14].

2.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 2.3.1: $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $\forall \vec{u} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}), \vec{v} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) \in \mathbb{R}^3$ için Lorentz anlamında iç çarpım,

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = \overrightarrow{u_1 v_1} + \overrightarrow{u_2 v_2} - \overrightarrow{u_3 v_3}$

ile tanımlanır. Bu durumda $\left(\mathbb{R}^3_1, \langle , \rangle_L\right)$ ikilisine 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.3.2: $u \in \mathbb{R}^3_1$ olmak üzere, $\mathbb{R}^3_1$ uzayının tüm lightlike vektörlerinin kümesi,

$C_1 = \{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \in \mathbb{R}^3_1 : \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 - \vec{u}_3^2 = 0\} - \{(0,0,0)\}$

şeklindedir [8].

Önerme 2.3.3: $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3_1$ vektörleri için,

i) Her ikisi de lightlike vektör ise, bu vektörlerin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = 0$ olmasıdır.

ii) $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3_1$ vektörlerinin her ikisi de timelike vektör ise $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \neq 0$ dır [8].

Tanım 2.3.4. Bir $\vec{u} \in \mathbb{R}^3_1$ vektörünün Lorentz anlamında normu,

$\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L|}$

olarak tanımlanır [8].

Tanım 2.3.5. $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3_1$ vektörleri için Lorentz anlamında vektörel çarpım,

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$ ile verilir $[8]$.

Teorem 2.3.6. $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}_1^3$ timelike iki vektör olsun. Bu durumda

$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cosh\varphi$

olacak şekilde bir tek $\varphi>0$ sayısı vardır ve bu sayıya u ile v arasındaki 'hiperbolik açı' denir $[8]$.

2.4. E^4 Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 2.4.1: E^4 de k_1,k_2,k_3 eğrilikleri sabit olan bir genel eğri E^4 de $W-$eğrisi olarak adlandırılır **[21]**.

Tanım 2.4.2: α ve β sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, E^4 de bir eğrinin $k_1\neq 0$, k_2 ve k_3 eğrilikleri için $\frac{k_2}{k_1}=\alpha$ ve $\frac{k_3}{k_1}=\beta$ ise bu eğriye bir slope eğrisi denir**[19]**.

Tanım 2.4.3: $\gamma: I\to E^4$eğrisi, tüm $\frac{k_{i+1}}{k_i}$ bölümleri sabit ise bu eğri ccr-eğrisi olarak adlandırılır. E^4 de regüler bir eğri için $\frac{k_2}{k_1}$ ve $\frac{k_3}{k_2}$ sabit fonksiyonlar ise bu eğri bir ccr-eğrisidir**[22]**.

Tanım 2.4.4: Bir eğrinin T teğet vektörü, E^4ün sabit doğrultulu bir U birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri genel helis olarak adlandırılır**[23]**.

Tanım 2.4.5: Birim hızlı $\gamma: I\to E^4$ eğrisinin N birim asli normal vektörü, sabit doğrultulu bir U birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri slant helis olarak adlandırılır**[18]**.

Tanım 2.4.6: Birim hızlı $\gamma : I \to E^4$ eğrisinin B_1 birim binormal vektörü, sabit doğrultulu bir U birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri B_1 slant helis olarak adlandırılır**[18]**.

Tanım 2.4.7: Birim hızlı $\gamma : I \to E^4$ eğrisinin B_2 birim binormal vektörü, sabit doğrultulu bir U birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri B_2 slant helis olarak adlandırılır**[18]**.

3. $\mathbb{R}_2^4$ MİNKOWSKİ UZAYIN BAZI ÖZELLİKLERİ

$\mathbb{R}_2^4$ Minkowski uzayı, aşağıdaki metrik ile verilen

$$\langle , \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 \tag{3.1}$$

standart vektör uzayıdır. Burada (x_1, x_2, x_3, x_4), $\mathbb{R}_2^4$ ün koordinat sistemidir. $\mathbb{R}_2^4$ de bir $\vec{v}$ vektörü için, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ şartını sağlıyorsa $\vec{v}$ vektörü space-like, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ şartını sağlıyorsa $\vec{v}$ vektörü timelike yada $\vec{v} \neq \vec{0} = (0,0,0,0)$ şartını sağlıyor ise $\vec{v}$ vektörü null(lightlike) vektörüdür, denir. Bir $\vec{v}$ vektörünün normu ;

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}$$

ile verilir. Keyfi $\vec{v}, \vec{w}$ vektörleri için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ eşitliği sağlanıyor ise $\vec{v}$ vektörü ile $\vec{w}$ vektörü ortogonaldir(diktir), denir.

Keyfi bir $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_2^4$ eğrisi space-like, timelike yada null olabilir, aynı zamanda α eğrisinin tüm hız vektörleri $\alpha'(s)$ vektörü de space-like, timelike yada null vektörü olabilir.

$\mathbb{R}_2^4$ de $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki space-like vektör olsun. O zaman, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasında $0 < \delta < \pi$ tek bir açı vardır, öyle ki $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.cos\delta$ sağlanır.

$\mathbb{R}_2^4$ de $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $\{\mathrm{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)}\}$ *Frenet çatısı* olsun. Burada T teğet vektör alanı, N asli normal vektör alanı, B_1 birinci binormal vektör alanı, B_2 ikinci binormal vektör alanıdır ve $\nabla_T T$ (T nin birinci kovaryant türevi) space-like vektördür.

$\mathbb{R}_2^4$ de s parametresine bağlı bir space-like eğri α eğrisi olsun. Bu α space-like eğrisi için aşağıdaki durumlar oluşmaktadır. N vektörü space-like, B_1 ve B_2 vektörleri timelike vektörler ve $\alpha(s)$ space-like eğrisinin $\{\mathrm{T, N, B_1, B_2}\}$ Frenet çatısı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\nabla_T T = k_1 N$$

$$\nabla_T N = -k_1 T + k_2 B_1$$

$$\nabla_T B_1 = k_2 N + k_3 B_2$$

$$\nabla_T B_2 = -k_3 B_1$$

(3.2)

Burada T, N, B_1 ve B_2 vektör alanları,

$$\langle N, N \rangle = \langle T, T \rangle = 1 \text{ , } \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = -1, \tag{3.3}$$

karşılıklı olarak ortogonal vektörlerdir ve $\alpha(s)$ eğrisinin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eğrilik fonksiyonları $k_1 = k_1(s),\ k_2 = k_2(s)$ ve $k_3 = k_3(s)$ fonksiyonlarıdır. Bu çalışma boyunca $k_i(s) \neq 0,\ 1 \le i \le 3$ kabul edilecektir[12].

Tanım 3.1: $\mathbb{R}_2^4$ de k_1, k_2, k_3 eğrilikleri sabit olan bir genel eğri $W-$eğrisi olarak adlandırılır**[24]**.

Tanım 3.2: α ve β sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, $\mathbb{R}^4_2$ de bir eğrinin $k_1 \neq 0$, k_2 ve k_3 eğrilikleri için $\frac{k_2}{k_1} = \alpha$ ve $\frac{k_3}{k_1} = \beta$ ise bu eğriye bir slope eğrisi denir**[24]**.

Tanım 3.3: $\gamma : I \to \mathbb{R}^4_2$ regüler bir eğrisi için $\frac{k_2}{k_1}$ ve $\frac{k_3}{k_2}$ sabit fonksiyonlar ise bu eğri bir ccr-eğrisi olarak adlandırılır**[24]**.

Tanım 3.4: Bir eğrinin $\vec{T}$ teğet vektörü, $\mathbb{R}^4_2$ ün sabit doğrultulu bir $\vec{U}$ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri $\mathbb{R}^4_2$ de genel helis olarak adlandırılır**[24]**.

Tanım 3.5: Bir eğrinin $\vec{N}$ birim asli normal vektörü, sabit doğrultulu bir $\vec{U}$ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri slant helis olarak adlandırılır**[24]**.

Tanım 3.6: Bir eğrinin $\vec{B}_1$ birim binormal vektörü, sabit doğrultulu bir $\vec{U}$ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri B_1 slant helis olarak adlandırılır**[24]**.

Tanım 3.7: Bir eğrinin $\vec{B}_2$ birim binormal vektörü, sabit doğrultulu bir $\vec{U}$ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğri $\vec{B}_2$ slant helis olarak adlandırılır**[24]**.

Tanım 3.8: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, $\mathbb{R}^4_2$ de iki spacelike vektör olsun. Bu taktirde $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$ olacak şekilde $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı olarak adlandırılan bir tek $0 < \theta < 2\pi$ reel sayısı vardır **[24]**.

Tanım 3.9: $\mathbb{R}^4_2$ de $\vec{a}$ spacelike ve $\vec{b}$ timelike vektör olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sinh\theta$ olacak şekilde $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı olarak adlandırılan bir tek $0 < \theta < 2\pi$ reel sayısı vardır **[24]**.

4. $\mathbb{R}_2^4$ DE SPACE-LIKE ÖZEL EĞRİLER İÇİN İNTEGRAL KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde $\mathbb{R}_2^4$ de spacelike eğrilere ait, helis ve B_2–slant helisler için integral karakterizasyonlar verilecektir.

4.1 $\mathbb{R}_2^4$ 'de Spacelike Helis Eğriler İçin İntegral Karakterizasyonları

Teorem 4.1.1: $\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ s parametreli spacelike bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\{\vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{N}}(s), \vec{\mathrm{B}}_1(s), \vec{\mathrm{B}}_2(s)\}$, eğrilikleri k_1, k_2, k_3 ve $k_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 3$ olmak üzere ; α eğrisinin bir spacelike helis eğrisi olması için gerek ve yeter şart;

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right\}^2 = \text{sabit},$$

eşitliğinin sağlanmasıdır[12].

İspat : $\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ s paremetreli spacelike bir helis eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisinin tanjant vektörü $\vec{\mathrm{T}}$, sabit doğrultulu ve spacelike sabit birim vektör $\vec{U}$ ile sabit açı yapar. O halde ;

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\mathrm{T}}, \vec{U} \right\rangle &= \left\|\vec{\mathrm{T}}\right\| . \left\|\vec{U}\right\| . \cos\theta \\ &= 1.1.\cos\theta \\ &= \cos\theta = \text{sabit}. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Bu eşitliğin her iki tarafının s 'ye göre türevi alınırsa;

$$\left\langle \vec{\mathrm{T}}', \vec{U} \right\rangle + \left\langle \vec{\mathrm{T}}, \vec{U}' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_1(s)\vec{\mathrm{N}}, \vec{U} \right\rangle + \left\langle \vec{\mathrm{T}}, \vec{0} \right\rangle = 0$$

$$k_1(s)\left\langle \mathrm{N},\vec{U}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}},\vec{U}\right\rangle = 0$$

(4.1.2)

elde edilir. (4.1.2) eşitliği bize $\vec{\mathrm{N}} \perp \vec{U}$ olduğu bilgisini verir. Bu bilgiye dayanarak $\vec{U}$ vektörünü;

$$\vec{U} = u_1\vec{\mathrm{T}} + u_2\vec{\mathrm{B}_1} + u_3\vec{\mathrm{B}_1}$$

(4.1.3)

biçiminde yazılabilir. (4.1.3) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınıp, Frenet türev formüller kullanılırsa;

$$\vec{0} = u_1'\vec{\mathrm{T}} + u_1\vec{\mathrm{T}'} + u_2'\vec{\mathrm{B}_1} + u_2\vec{\mathrm{B}_1'} + u_3'\vec{\mathrm{B}_2} + u_3\vec{\mathrm{B}_2'},$$

(4.1.4) $$\vec{0} = u_1'\vec{\mathrm{T}} + u_1\left(k_1(s)\vec{\mathrm{N}}\right) + u_2'\vec{\mathrm{B}_1} + u_2\left(k_2(s)\vec{\mathrm{N}} + k_3(s)\vec{\mathrm{B}_2}\right) + u_3'\vec{\mathrm{B}_2} + u_3\left(-k_3(s)\vec{\mathrm{B}_1}\right),$$

(4.1.5)

$$\vec{0} = u_1'\vec{\mathrm{T}} + \vec{\mathrm{N}}\left(u_1k_1(s) + u_2k_2(s)\right) + \vec{\mathrm{B}_1}\left(u_2' - u_3k_3(s)\right) + \vec{\mathrm{B}_2}\left(u_2k_3(s) + u_3'\right),$$

(4.1.6)

elde edilir. (4.1.6) eşitliğinde $\vec{\mathrm{T}} \neq \vec{0}$, $\vec{\mathrm{N}} \neq \vec{0}$, $\vec{\mathrm{B}_1} \neq \vec{0}$ ve $\vec{\mathrm{B}_2} \neq \vec{0}$ olduğundan, bu eşitliğin sağlanması için ;

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = 0 \\ u_1k_1(s) + u_2k_2(s) = 0 \\ u_2' - u_3k_3(s) = 0 \\ u_2k_3(s) + u_3' = 0 \end{array}\right\}$$

(4.1.7)

denklem sistemini sağlanması gerekir. (4.1.7) eşitliklerinin 1. denkleminden;

$$u_1' = 0 \Rightarrow u_1 = c = \text{sabit}$$

(4.1.8)

olur. (4.1.7) eşitliklerindeki 2.denklemden ve (4.1.8) den;

$$u_2 = -\frac{k_1(s)}{k_2(s)} u_1 = -c\frac{k_1(s)}{k_2(s)},$$

(4.1.9)

elde edilir. (4.1.7) eşitliklerindeki 4.denklemden;

$$u_2 = -\frac{1}{k_3(s)} u_3' = -\frac{1}{k_3(s)}\frac{du_3}{ds}$$

(4.1.10)

bulunur. (4.1.9) ve (4.1.10) eşitliklerinden;

$$u_2 = -\frac{k_1(s)}{k_2(s)} c = -\frac{1}{k_3(s)}\frac{du_3}{ds} \tag{4.1.11}$$

yazılabilir. (4.1.7) eşitliklerindeki 3. denklemden ve (4.1.9) eşitliğinden;

$$u_3 = \frac{1}{k_3(s)} \cdot u_2' = -\frac{c}{k_3(s)} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) \tag{4.1.12}$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.7) eşitliklerindeki 3. denklemden;

$$u_2' = u_3 k_3(s)$$

$$\frac{du_2}{ds} = u_3 k_3(s)$$

(4.1.13)

bulunur. (4.1.11) eşitliği (4.1.13) de yazılırsa;

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{k_3(s)} \cdot \frac{du_3}{ds}\right) = u_3 k_3(s),$$

(4.1.14)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{du_3}{ds}\right) + k_3(s) u_3 = 0,$$

(4.1.15)

biçiminde u_3 'e göre ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir. Burada $t = \int_0^s k_3(s)\,ds$ dönüşümü yapılırsa;

$dt = k_3(s)ds \Rightarrow k_3(s) = \frac{dt}{ds}$ ve $\frac{1}{k_3(s)} = \frac{ds}{dt}$ eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.1.15) de yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\cancel{ds}}{dt}\frac{du_3}{\cancel{ds}}\right) + \frac{dt}{ds}u_3 = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{du_3}{dt}\right) + \frac{dt}{ds}u_3 = 0.$$

(4.1.16)

(4.1.16) denkleminin her iki tarafı $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{d^2u_3}{dt^2} + u_3 = 0$$

(4.1.17)

biçiminde u_3'e göre ikinci merteben, sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir.

(4.1.17) diferansiyel denklemin çözümü;

$$u_3 = \mu_1 \cos t + \mu_2 \sin t, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

(4.1.18)

biçimindedir. Bu eşitlikte $t = \int_0^s k_3(s)ds$ yerine yazılırsa;

$$u_3 = \mu_1 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \mu_2 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$$

(4.1.19)

bulunur. (4.1.12) ve (4.1.19) dan;

$$u_3 = -\frac{c}{k_3(s)} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = \mu_1 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \mu_2 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right), \tag{4.1.20}$$

elde edilir. (4.1.19) eşitliğinden;

$$\frac{du_3}{ds} = -\mu_1 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)k_3(s) + \mu_2 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)k_3(s),$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem (4.1.11) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$u_2 = \frac{-1}{k_3(s)}\left\{-\mu_1 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)k_3(s) + \mu_2 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)k_3(s)\right\},$$

$$u_2 = -c\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \mu_1 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) - \mu_2 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

(4.1.21)

bulunur. Şimdi elde edilen (4.1.20) ve (4.1.21) denklemlerini göz önüne alalım. Bu denklemlerden $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ sayılarını bulalım.

(4.1.20) eşitliği $\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$ ve (4.21) eşitliği $\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$ ile çarpılıp, taraf tarafa toplanırsa;

$$\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) \Big/ \; u_3 = -\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = \mu_1 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \mu_2 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

$$\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) \Big/ \; u_2 = -c\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \mu_1 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) - \mu_2 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

+

$$\mu_1 \underbrace{\left(\cos^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \sin^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)\right)}_{1} = -\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$$
$$-c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

$$\mu_1 = -\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) - c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right), \tag{4.1.22}$$

bulunur. Benzer biçimde (4.1.20) eşitliğini $\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$ ve (4.1.21) eşitliğini $-\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$ ile çarpıp taraf tarafa toplanırsa;

$$\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) \Big/ u_3 = -\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = \mu_1\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \mu_2\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

$$-\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) \Big/ u_2 = -c\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \mu_1\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) - \mu_2\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

+

$$\mu_2\underbrace{\left(\cos^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \sin^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)\right)}_{1} = -\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$$

$$+c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\cdot\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

$$\mu_2 = c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) - \frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

(4.1.23)

elde edilir. $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan, $\mu_1^2 + \mu_2^2 \in \mathbb{R}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\mu_1^2 = \left[-\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2\cos^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \left[-c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right]^2\sin^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$$

$$+2\frac{c^2}{k_3(s)}\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

$$\mu_2^2 = \left[-\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2\sin^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + \left[c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right]^2\cos^2\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)$$

$$-2\frac{c^2}{k_3(s)}\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

$$\mu_1^2+\mu_2^2=\cos^2\left(\int_0^s k_3(s)\,ds\right)\left\{\left[c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right]^2+\left[-\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2\right\}$$

$$+\sin^2\left(\int_0^s k_3(s)\,ds\right)\left\{\left[c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right]^2+\left[-\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2\right\},$$

$$\mu_1^2+\mu_2^2=\left\{\left[c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right]^2+\left[-\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2\right\}\underbrace{\left\{\sin^2\left(\int_0^s k_3(s)\,ds\right)+\cos^2\left(\int_0^s k_3(s)\,ds\right)\right\}}_{1},$$

$$\mu_1^2+\mu_2^2=c^2\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{c^2}{k_3^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2=\text{sabit},\qquad(4.1.24)$$

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_3^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2=\text{sabit},\qquad(4.1.25)$$

bulunur.

Bulduğumuz u_1,u_2,u_3 eşitlikleri; $\vec{U}=u_1\vec{\mathrm{T}}+u_2\overrightarrow{\mathrm{B}_1}+u_3\overrightarrow{\mathrm{B}_2}$ denkleminde yazılırsa;

$$\vec{U}=c\vec{\mathrm{T}}-c\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\overrightarrow{\mathrm{B}_1}-\frac{c}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\overrightarrow{\mathrm{B}_2},$$

elde edilir. Ayrıca $c=\cos\theta=$ sabit alınırsa,

$$\vec{U}=\left[\vec{\mathrm{T}}-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\overrightarrow{\mathrm{B}_1}-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\overrightarrow{\mathrm{B}_2}\right]\cos\theta,$$

(4.1.26)

bulunur.

$\Leftarrow$ **:** Tersine $\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_3^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2=$ sabit olsun.

Şimdi $\vec{U}=\left[\vec{\mathrm{T}}-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\overrightarrow{\mathrm{B}_1}-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\overrightarrow{\mathrm{B}_2}\right]\cos\theta$ biçiminde bir vektör alalım. Alınan bu vektör için $\left\langle \vec{U},\vec{\mathrm{T}}\right\rangle=\cos\theta=$ sabittir.

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\vec{0}, \tag{4.1.27}$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

(4.1.26) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa;

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\vec{\mathrm{T}}'-\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)'\overrightarrow{\mathrm{B}_1}-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\overrightarrow{\mathrm{B}_1'}-\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]'\overrightarrow{\mathrm{B}_2}-\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]\overrightarrow{\mathrm{B}_2'},$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte Frenet-türev formülleri yerine yazılırsa;

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=k_1(s)\vec{\mathrm{N}}-\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\overrightarrow{\mathrm{B}_1}-\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\left(k_2(s)\vec{\mathrm{N}}\right)-\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\left(k_3(s)\overrightarrow{\mathrm{B}_2}\right)$$

$$-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]\overrightarrow{\mathrm{B}_2}-\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]\left(-k_3(s)\overrightarrow{\mathrm{B}_1}\right),$$

$$=\vec{\mathrm{N}}\underbrace{\left[k_1(s)-\left(\frac{k_1(s)}{\cancel{k_2(s)}}\right)\cancel{k_2(s)}\right]}_{0}+\overrightarrow{\mathrm{B}_1}\underbrace{\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{1}{\cancel{k_3(s)}}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)\left(\cancel{k_3(s)}\right)\right]}_{0}$$

$$+\overrightarrow{\mathrm{B}_2}\left[-\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)k_3(s)-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]\right], \tag{4.1.28}$$

bulunur. (4.1.25) eşitliğinden; $\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_3^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2=$ sabit olduğu kabul edilmişti. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa;

$$2\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+2\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]\frac{d}{ds}\left\{\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]\right\}=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]=-\frac{\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\left[\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)}\right]}{\left(\frac{1}{k_3(s)}\right)\left[\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)}\right]}=-\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)},$$

(4.1.29)

elde edilir. (4.1.29) da bulunan eşitlik (4.1.28) de yerine yazılırsa;

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\vec{0},$$

bulunur. Buradan $\vec{U}$ vektörünün sabit vektör olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla α eğrisi spacelike bir helis eğrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.■

Sonuç 4.1.2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ s paremetreli spacelike bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin spacelike bir helis eğrisi olması için;

$$k_3(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}+\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0,$$

eşitliğinin sağlanması gerekir[12].

İspat : $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ spacelike bir helis eğrisi olsun. O halde Teorem 4.1.1 deki (4.1.25) eşitliği;

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_3^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2=\text{sabit},$$

elde edilmişti. Bu eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa;

$$2\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+2\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)=0,$$

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\left\{\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]\right\}=0,$$

(4.1.30)

olur. Bu denklemi sağlayan iki durum vardır.

$$i)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)=0,$$

olması durumunda, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}=$ sabit olup α eğrisinin spacelike bir helis olduğu görülür.

$$ii)\ \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0, \tag{4.1.31}$$

olması durumunda(4.1.31)eşitliği $k_3(s)$ ile çarpılırsa;

$$k_3(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}+\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0, \tag{4.1.32}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.■

Teorem 4.1.3: $\alpha=\alpha(s):I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^4$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\alpha(s)$ spacelike bir helis eğrisidir ancak ve ancak;

$$f(s)=-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)=m_1\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)-m_2\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

$$f'(s)=\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)},$$

biçiminde diferansiyellenebilir bir $f(s)$ fonksiyonu vardır[12].

İspat : $\Rightarrow$**:** $\alpha=\alpha(s):I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^4$ birim hızlı, bir spacelike helis eğrisi olsun. Bu durumda sonuç 4.1.2' ye göre,

$$k_3(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}+\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0,$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu denklem $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$'e bağlı ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemdir. Burada $t=\int_0^s k_3(s)ds$ değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa,

$$dt = k_3(s)ds \Rightarrow \frac{dt}{ds} = k_3(s) \text{ ve } \frac{1}{k_3(s)} = \frac{ds}{dt}, \tag{4.1.33}$$

elde edilir. (4.1.33) deki eşitlikler (4.1.32) de yerine yazılırsa;

$$\frac{dt}{ds}\frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds}\left[\frac{\cancel{ds}}{dt}\frac{d}{\cancel{ds}}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{dt}{ds}\frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right] = 0,$$

(4.1.34)

bulunur. (4.1.34) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{\cancel{ds}}{\cancel{dt}}\frac{\cancel{dt}}{\cancel{ds}}\frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{\cancel{ds}}{dt}\frac{d}{\cancel{ds}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = 0,$$

(4.1.35)

biçiminde $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ ‘ye göre ikinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden;

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = m_1 \cos t + m_2 \sin t = m_1 \cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right) + m_2 \sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right),$$

(4.1.36)

bulunur, burada $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ dir. (4.1.30) denkleminden,

$$\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right) = -\frac{\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)},$$

(4.1.37)

eşitliği yazılabilir. (4.1.37) eşitliğinden ;

$$f(s)=-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)=\frac{\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)}, \tag{4.1.38}$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlansın. (4.1.36) eşitliği (4.1.38) de yerine yazılırsa;

$$f(s)=-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)=-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left[m_1\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)+m_2\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)\right],$$

$$=-\frac{1}{k_3(s)}\left[-k_3(s)m_1\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)+k_3(s)m_2\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)\right],$$

$$=m_1\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)-m_2\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right), \tag{4.1.39}$$

bulunur.(4.1.38) eşitliği (4.1.29) da yazılarak,

$$\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)\frac{d}{ds}\underbrace{\left(\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right)}_{-f(s)}=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(-f(s)\right)=-\frac{\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)}}{\left(\frac{1}{k_3(s)}\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)}\right)},$$

$$f'(s)=\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}.$$

(4.1.40)

elde edilir.

($\Leftarrow$:)Şimdi;

$$f(s)=-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)=-\frac{1}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left[m_1\cos\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)+m_2\sin\left(\int_0^s k_3(s)ds\right)\right]$$

ve $\quad f'(s)=\dfrac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}\quad$ eşitliklerinde

$$\varphi(s)=\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_3{}^2(s)}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right\}^2\right]=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_3{}^2(s)}\left(f'(s)\right)^2+\left(f(s)\right)^2\right],$$

(4.1.41)

$$\varphi(s)=2f'(s)\,f''(s)\frac{1}{k_3{}^2(s)}-\frac{2k_3'(s)}{k_3{}^3(s)}\left(f'(s)\right)^2+2f(s)\,f'(s),$$

(4.1.42)

olacak şekilde bir $\varphi(s)$ fonksiyonu tanımlansın. (4.1.40) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa;

$$f''(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)k_3(s)+\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(k_3(s)\right),$$

(4.1.43)

elde edilir. (4.1.40) ve (4.1.43) denklemlerinden;

$$f'(s)\,f''(s)=k_3{}^2(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2k_3(s)\frac{d}{ds}\left(k_3(s)\right),$$

(4.1.44)

bulunur. (4.1.38) ve (4.1.40) denklemlerinden;

$$f(s)\,f'(s)=-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right),$$

(4.1.45)

olur. (4.1.38), (4.1.43) ve (4.1.45) eşitlikleri (4.1.42) de yerine yazılırsa;

$$\varphi(s)=\frac{2}{k_3{}^2(s)}\left[k_3{}^2(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2k_3(s)\frac{d}{ds}\left(k_3(s)\right)\right]$$

$$-\frac{2}{k_3{}^3(s)}\frac{d}{ds}\left(k_3(s)\right)\left[\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2k_3{}^2(s)\right]-2\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right),$$

$$\varphi(s)=2\frac{k_1(s)}{\cancel{k_2(s)}}\frac{d}{ds}\left(\frac{\cancel{k_1(s)}}{k_2(s)}\right)+\frac{2}{\cancel{k_3(s)}}\left(\frac{k_1(s)}{\cancel{k_2(s)}}\right)^2\frac{\cancel{d}}{ds}\left(k_3(s)\right)$$

$$\cancel{-\frac{2}{k_3(s)}\frac{d}{ds}\left(k_3(s)\right)\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2} \cancel{-2\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)} = 0,$$

bulunur. Buradan $\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)^2 + \frac{1}{k_3^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2 =$ sabit olduğu bir kez daha ispatlanmış olur.■

4.2. $\mathbb{R}_2^4$ ’de Spacelike B_2-Slant Helis İçin İntegral Karakterizasyonları

Teorem 4.2.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ s parametreli spacelike bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı $\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B_1}(s), \vec{B_2}(s)\right\}$, eğrilikleri k_1, k_2, k_3 ve eğrilikleri sıfırdan farklı olmak üzere, α eğrisinin bir spacelike B_2- slant helis olması için gerek ve yeter şart;

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right\}^2 = \text{sabit},$$

eşitliğinin sağlanmasıdır[12].

İspat :⇒: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ eğrisi s paremetreli B_2- slant helis eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisinin ikinci binormal vektörü $\vec{B_2}$, sabit doğrultulu ve spacelike sabit birim vektör $\vec{U}$ ile sabit açı yapar. O halde ;

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{B_2}, \vec{U} \right\rangle &= \left\|\vec{B_2}\right\| . \left\|\vec{U}\right\| . \sinh\theta, \\ &= 1.1.\sinh\theta, \\ &= \sinh\theta = \text{sabit}, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının s ’ye göre türevi alınırsa;

$$\left\langle \vec{B_2'}, \vec{U} \right\rangle + \left\langle \vec{B_2}, \vec{U'} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle -k_3(s)\overrightarrow{B_1},\vec{U}\right\rangle + \left\langle \overrightarrow{B_2},\vec{0}\right\rangle = 0,$$

$$-k_3(s)\left\langle \overrightarrow{B_1},\vec{U}\right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \overrightarrow{B_1},\vec{U}\right\rangle = 0,$$

(4.2.2)

elde edilir. (4.2.2) eşitliği bize $\overrightarrow{B_1} \perp \vec{U}$ olduğu bilgisini verir. Bu bilgiye dayanarak $\vec{U}$ vektörü;

$$\vec{U} = u_1\vec{T} + u_2\vec{N} + u_3\overrightarrow{B_2},$$

(4.2.3)

biçiminde yazılabilir. (4.2.3) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\vec{0} = u_1'\vec{T} + u_1\vec{T}' + u_2'\vec{N} + u_2\vec{N}' + u_3'\overrightarrow{B_2} + u_3\overrightarrow{B_2'}, \tag{4.2.4}$$

$$\vec{0} = u_1'\vec{T} + u_1\left(k_1(s)\vec{N}\right) + u_2'\vec{N} + u_2\left(-k_1(s)\vec{T} + k_2(s)\overrightarrow{B_1}\right) + u_3'\overrightarrow{B_2} + u_3\left(-k_3(s)\overrightarrow{B_1}\right), \tag{4.2.5}$$

$$\vec{0} = \vec{T}\left(u_1' - u_2k_1(s)\right) + \vec{N}\left(u_1k_1(s) + u_2'\right) + \overrightarrow{B_1}\left(u_2k_2(s) - u_3k_3(s)\right) + \overrightarrow{B_2}u_3'. \tag{4.2.6}$$

Elde edilen (4.2.6) eşitliğinde $\vec{T} \neq \vec{0}$, $\vec{N} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{B_1} \neq \vec{0}$ ve $\overrightarrow{B_2} \neq \vec{0}$ olduğundan, bu eşitliğin sağlanması için;

$$\left.\begin{array}{l} u_1' - u_2k_1(s) = 0, \\ u_1k_1(s) + u_2' = 0, \\ u_2k_2(s) - u_3k_3(s) = 0, \\ u_3' = 0. \end{array}\right\}$$

(4.2.7)

denklem sistemi sağlanmalıdır. (4.2.7) denklemlerinin 4. eşitliğinden,

$u_3' = 0 \Rightarrow u_3 = c =$ sabit. bulunur.(4.2.7) denklemlerinin 3. eşitliğinden ;

$$u_2k_2(s) - u_3k_3(s) = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{k_3(s)}{k_2(s)}u_3,$$

$$\Rightarrow \; u_2 = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} c,$$

(4.2.8)

bulunur. (4.2.7) denklemlerinin 1. eşitliğinden;

$$u_1' - u_2 k_1(s) = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = \frac{1}{k_1(s)} u_1',$$

$$\Rightarrow \; u_2 = \frac{1}{k_1(s)} \frac{du_1}{ds}, \tag{4.2.9}$$

elde edilir. (4.2.8) ve (4.2.9) eşitliklerinden;

$$u_2 = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} c = \frac{1}{k_1(s)} \frac{du_1}{ds}, \tag{4.2.10}$$

yazılabilir. (4.2.7) denklemlerinin 2.eşitliğinden;

$$u_1 k_1(s) + u_2' = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = -\frac{1}{k_1(s)} u_2',$$

$$\Rightarrow u_1 = -\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds} \;, \tag{4.2.11}$$

elde edilir. (4.2.8) eşitliği (4.2.11)'de yazılırsa;

$$u_1 = -\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds} = -\frac{1}{k_1(s)} \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} c \right) = -\frac{c}{k_1(s)} \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \right), \tag{4.2.12}$$

bulunur. (4.2.7) denklemlerinin 1.eşitliğinden,

$$u_1' - u_2 k_1(s) = 0 \;\Rightarrow u_1' = u_2 k_1(s) \;, \quad \frac{du_1}{ds} = u_2 k_1(s),$$

elde edilir. (4.2.11) eşitliği burada yazılırsa;

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds} \right) = u_2 k_1(s), \tag{4.2.13}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1(s)} \frac{du_2}{ds} \right) + u_2 k_1(s) = 0, \tag{4.2.14}$$

biçiminde u_2 ’ye bağlı ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer homojen diferansiyel denklem elde edilir. Şimdi $t=\int_0^s k_1(s)ds$ değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa $k_1(s)=\frac{dt}{ds}$ ve $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{k_1(s)}$ eşitlikleri elde edilir. Elde edilen eşitlikler (4.2.14) denkleminde yazılırsa;

$$\frac{d}{ds}\left(\cancel{\frac{ds}{dt}}\frac{du_2}{\cancel{ds}}\right)+u_2\frac{dt}{ds}=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{du_2}{dt}\right)+u_2\frac{dt}{ds}=0,$$

elde edilir. Her iki taraf $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{\cancel{ds}}{dt}\frac{d}{\cancel{ds}}\left(\frac{du_2}{dt}\right)+u_2\frac{\cancel{dt}}{\cancel{ds}}\frac{\cancel{ds}}{\cancel{dt}}=0,$$

$$\frac{d^2u_2}{dt^2}+u_2=0,$$

(4.2.15)

biçiminde u_2 ’ye bağlı ikinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir.(4.2.15) denkleminin çözümünden $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$u_2=\omega_1\cos t+\omega_2\sin t, \tag{4.2.16}$$

elde edilir. $t=\int_0^s k_1(s)ds$ ve $u_2=\frac{k_3(s)}{k_2(s)}c$ eşitlikleri (4.2.16)’da yerine yazılırsa,

$$u_2=\omega_1\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+\omega_2\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)=\left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right), \tag{4.2.17}$$

elde edilir. (4.2.17) eşitliği (4.2.11) de yerine yazılırsa;

$$u_1=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{du_2}{ds}\ \Rightarrow\ u_1=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left[\omega_1\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+\omega_2\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\right],$$

$$u_1=-\frac{1}{k_1(s)}\left[-k_1(s)\,\omega_1\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)+k_1(s)\,\omega_2\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)\right],$$

$$u_1=\omega_1\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)-\omega_2\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right), \tag{4.2.18}$$

olur. (4.2.12) ve (4.2.18) eşitliklerinden;

$$u_1=\omega_1\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)-\omega_2\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)=-\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right), \tag{4.2.19}$$

yazılabilir. (4.2.17) ve (4.2.19) denklemlerinden $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R}$ sayılarını bulalım.

$$\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)\Big/\ \omega_1\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)+\omega_2\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)=c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}=u_2$$

$$\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)\Big/\ \omega_1\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)-\omega_2\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)=-\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=u_1$$

$+$

$$\omega_1=c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)-\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right). \tag{4.2.20}$$

Benzer biçimde;

$$\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)\Big/\ \omega_1\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)+\omega_2\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)=c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}=u_2$$

$$-\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)\Big/\ \omega_1\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)-\omega_2\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)=-\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=u_1$$

$+$

$$\omega_2=\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\cos\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right)+c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\sin\left(\int_0^s k_1(s)\,ds\right), \tag{4.2.21}$$

bulunur. $A=\omega_1+\omega_2$, $B=\omega_1-\omega_2$, olsun. $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R}$ olduğundan $A,B\in\mathbb{R}$ dir.

Buradan $A^2+B^2\in\mathbb{R}$ olduğunu gösterelim.

$$A^2+B^2=\left(\omega_1+\omega_2\right)^2+\left(\omega_1-\omega_2\right)^2=2\omega_1^2+2\omega_2^2,$$

$$=2\left[\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\right]^2$$

$$+2\left[c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)-\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\right]^2,$$

$$=2\cos^2\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\left[\left(\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)^2+\left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2\right]$$

$$+2\sin^2\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\left[\left(\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)^2+\left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2\right],$$

$$=2\left[\left(\frac{c}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)^2+\left(c\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2\right]\underbrace{\left[\cos^2\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+\sin^2\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\right]}_{1},$$

$$=2c^2\left[\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)^2+\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2\right]=\text{sabit},$$

(4.2.22)

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_1^2(s)}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)^2=\text{sabit},$$

(4.2.23)

elde edilir.■

$\Leftarrow$: Tersine $\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_1^2(s)}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)^2=$ sabit olsun. $\alpha=\alpha(s)$ spacelike birim hızlı eğrisinin ikinci binormal vektörü $\overrightarrow{B_2}$, sabit doğrultulu, sabit bir spacelike $\vec{U}$ vektör ile sabit açı yaparsa, $\alpha=\alpha(s)$ spacelike eğrisi B_2-Slant helis olur. Şimdi,

$$\vec{U}=\left\{\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\vec{T}-\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\vec{N}-\overrightarrow{B_2}\right\}\sinh\theta,$$

(4.2.24)

biçiminde bir vektör alalım. $\left\langle\vec{U},\overrightarrow{B_2}\right\rangle=\sinh\theta$ =sabittir. $\frac{d\vec{U}}{ds}=\vec{0}$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. (4.2.24) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa;

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\left\{\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)'\vec{T}+\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\vec{T}'\right\}\sinh\theta$$

$$-\left\{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)'\vec{N}+\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\vec{N}'+\overrightarrow{B_2'}\right\}\sinh\theta,$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\left\{\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)'\vec{T}+\left(\frac{1}{\cancel{k_1(s)}}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\left(\cancel{k_1(s)}\vec{N}\right)-\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\vec{N}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\left(-k_1(s)\vec{T}+k_2(s)\overrightarrow{B_1}\right)-\left(-k_3(s)\overrightarrow{B_1}\right)\right\}\sinh\theta,$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\left\{\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)'\vec{T}+\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\vec{N}}-\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\vec{N}}\right.$$

$$\left.+\frac{k_3(s)k_1(s)}{k_2(s)}\vec{T}\cancel{-k_3(s)\overrightarrow{B_1}}+\cancel{k_3(s)\overrightarrow{B_1}}\right\}\sinh\theta,$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\vec{\mathrm{T}}\left\{\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)'+\frac{k_3(s)k_1(s)}{k_2(s)}\right\}\sinh\theta,$$

(4.2.25)

bulunur. $\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_1^2(s)}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)^2=$ sabit olduğunu kabul etmiştik. Eşitliğin iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa;

$$2\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)+2\left[\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\right]\left[\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\right]'=0,$$

$$\left[\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\right]'=-\frac{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}}{\frac{1}{k_1(s)}\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}}=-\frac{k_3(s)k_1(s)}{k_2(s)},$$

(4.2.26)

elde edilir. (4.2.26) eşitliği (4.2.25) eşitliğinde yazılırsa,

$$\frac{d\vec{U}}{ds}=\vec{0},$$

(4.2.27)

bulunur. Dolayısıyla $\alpha=\alpha(s)$ spacelike eğrisinin B_2-Slant helis olduğu ispatlanmış olur.■

Sonuç 4.2.2: $\alpha:\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^4$ s parametreli spacelike eğri olsun. $\alpha=\alpha(s)$ spacelike eğrisinin B_2-Slant helis olması için;

$$k_1(s)\frac{k_3(s)}{k_2(s)}+\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0,$$

(4.2.28)

eşitliğinin sağlanması gerekir[12].

İspat : $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ spacelike B_2-slant helis eğrisi olsun. O halde Teorem 4.1.1 gereği,

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2 = \text{sabit},$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$2\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) + 2\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right) = 0,$$

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) + \left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right) = 0,$$

(4.2.29)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\left\{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) + \frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]\right\} = 0.$$

(4.2.30)

Bu denklemi sağlayan iki durum vardır.

$i)$ $\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) = 0,\ \frac{k_3(s)}{k_2(s)} = c =$ sabit, olduğundan $\alpha = \alpha(s)$

eğrisi spacelike B_2-slant helisdir.

$ii)$ $\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) + \frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right] = 0,$

(4.2.31)

dir.(4.2.31) eşitliği $k_1(s)$ ile çarpılırsa,

$$\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)} + \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right] = 0,$$

(4.2.32)

elde edilir. Bu da spacelike B_2-Slant helisin diferansiyel denklem karakterizasyonudur. Böylece ispat tamamlanmış olur.■

Teorem 4.2.3: $\alpha=\alpha(s):\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^4$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\alpha(s)$ spacelike B_2-Slant helis eğrisidir ancak ve ancak;

$$f(s)=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=\ell_1\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)-\ell_2\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right),$$

$$f'(s)=\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)},$$

biçiminde diferansiyellenebilir bir $f(s)$ fonksiyonu vardır[12].

İspat : $\alpha=\alpha(s):\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^4$ birim hızlı, bir spacelike B_2-slant helis eğrisi olsun. O halde sonuç 4.2.2'ye göre;

$$\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}+\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0,$$

eşitliği vardır. Bu denklem $\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$'e bağlı ikinci mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemdir. Burada $t=\int_0^s k_1(s)ds$ değişken değiştirme uygulanırsa,

$$dt=k_1(s)ds\Rightarrow\frac{dt}{ds}=k_1(s),\ \frac{1}{k_1(s)}=\frac{ds}{dt},$$

(4.2.33)

elde edilir. (4.2.33) deki eşitlikler (4.2.32) de yerine yazılırsa;

$$\frac{dt}{ds}\frac{k_3(s)}{k_2(s)}+\frac{d}{ds}\left[\frac{\cancel{ds}}{dt}\frac{d}{\cancel{ds}}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0,$$

$$\frac{dt}{ds}\frac{k_3(s)}{k_2(s)}+\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0,$$

(4.2.34)

bulunur. (4.2.34) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{ds}{dt}$ ile çarpılırsa;

$$\cancel{\frac{ds}{dt}}\cancel{\frac{dt}{ds}}\frac{k_3(s)}{k_2(s)}+\cancel{\frac{ds}{dt}}\frac{d}{\cancel{ds}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]=0,$$

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)}+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=0,$$

(4.2.35)

biçiminde $\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ 'ye bağlı ikinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözülürse;

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)}=\ell_1\cos t+\ell_2\sin t=\ell_1\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+\ell_2\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right),$$

(4.2.36)

bulunur. Burada $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}$ dir. (4.2.29) denkleminden;

$$\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=-\frac{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)},$$

(4.2.37)

elde edilir. Bu eşitlikte,

$$f(s)=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=\frac{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)},$$

(4.2.38)

fonksiyonu tanımlansın. (4.2.36) eşitliği (4.2.38) denkleminde yerine yazılırsa;

$$f(s)=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left[\ell_1\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+\ell_2\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\right],$$

$$=-\frac{1}{k_1(s)}\left[-k_1(s)\ell_1\sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+k_1(s)\ell_2\cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\right],$$

$$=\ell_1 \sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)-\ell_2 \cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right),$$

(4.2.39)

olur. (4.2.38) eşitliği (4.2.29) eşitliğinde yazılırsa;

$$\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)\frac{d}{ds}\underbrace{\left(\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right)}_{-f(s)}=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(-f(s)\right)=-\frac{\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}}{\left(\frac{1}{k_1(s)}\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}\right)},$$

$$f'(s)=\frac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)},$$

(4.2.40)

elde edilir.($\Leftarrow$:) Şimdi;

$$f(s)=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)=-\frac{1}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left[\ell_1 \cos\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)+\ell_2 \sin\left(\int_0^s k_1(s)ds\right)\right]$$

ve $f'(s)=\dfrac{k_1(s)k_3(s)}{k_2(s)}$ eşitliklerinden;

$$\varphi(s)=\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_1^2(s)}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right\}^2\right],$$

$$=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k_1^2(s)}\left(f'(s)\right)^2+\left(f(s)\right)^2\right],$$

(4.2.41)

biçiminde bir $\varphi(s)$ fonksiyonu tanımlayalım. Buradan;

$$\varphi(s)=2f'(s)\,f''(s)\frac{1}{k_1^2(s)}-\frac{2k_1'(s)}{k_1^3(s)}\left(f'(s)\right)^2+2f(s)\,f'(s),$$

(4.2.42)

olur. (4.1.40) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa;

$$f''(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)k_1(s)+\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(k_1(s)\right),$$

(4.2.43)

elde edilir. (4.2.40) ve (4.2.43) denklemlerinden;

$$f'(s)\,f''(s)=k_1^2(s)\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2 k_1(s)\frac{d}{ds}\left(k_1(s)\right),$$

(4.2.44)

bulunur. (4.2.38) ve (4.2.40) denklemlerinden;

$$f(s)\,f'(s)=-\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right),$$

(4.2.45)

bulunur. (4.2.40), (4.2.44) ve (4.2.45) eşitlikleri (4.2.42) de yerine yazılırsa;

$$\varphi(s)=\frac{2}{k_1^2(s)}\left[k_1^2(s)\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)+\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2 k_1(s)\frac{d}{ds}\left(k_1(s)\right)\right]$$

$$-\frac{2}{k_1^3(s)}\frac{d}{ds}\left(k_1(s)\right)\left[\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2 k_1^2(s)\right]-2\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right),$$

$$\varphi(s)=\cancel{2\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}+\cancel{\frac{2}{k_1(s)}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2\frac{d}{ds}\left(k_1(s)\right)}$$

$$-\cancel{\frac{2}{k_1(s)}\frac{d}{ds}\left(k_1(s)\right)\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2}-\cancel{2\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)}=0,$$

bulunur. Buradan $\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)^2+\frac{1}{k_1^2(s)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)\right]^2=$ sabit, olduğu bir kez daha ispatlanmış olur.■

5. $\mathbb{R}_2^4$ DE SPACELIKE EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde $\mathbb{R}_2^4$ de Frenet-türev formüllerini kullanarak spacelike eğrilerin teğet birim vektörüne göre diferansiyel denklem vererek, buna bağlı bazı özel eğrilerin karakterizasyonlarını vereceğiz.

5.1. $\mathbb{R}_2^4$ DE SPACELIKE EĞRİLER İÇİN TEĞET BİRİM VEKTÖR ALANINA GÖRE KARAKTERİZE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Teorem 5.1.1: $\gamma : I \to \mathbb{R}_2^4$ yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. γ eğrisi spacelike ise bu taktirde,

$$\lambda_0 = k_1k_2k_3\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]' + k_1^{2}k_3^2$$

$$\lambda_1 = k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right]' - \left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)' + \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'\right\} + k_1k_2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + k_1k_3^2\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

$$\lambda_2 = k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'\right]' + \left[\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right\} + k_1k_2\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' + k_1^{2} - k_2^{2} + k_3^2$$

$$\lambda_3 = k_1k_2k_3\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)' + k_1k_2\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)' + k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)' \qquad (5.1.1)$$

olmak üzere;

$$\vec{T}^{(IV)}+\lambda_3\vec{T}'''+\lambda_2\vec{T}''+\lambda_1\vec{T}'+\lambda_0\vec{T}=0 \tag{5.1.2}$$

denklemi sağlanır**[24]**.

İspat: (3.2) denklemlerini kullanarak,

$$\vec{N}=\frac{1}{k_1}\vec{T}'$$
$$\vec{B}_1=\frac{k_1}{k_2}\vec{T}+\frac{1}{k_2}\vec{N}'$$
$$\vec{B}_2=-\frac{k_2}{k_3}\vec{N}+\frac{1}{k_3}\vec{B}_1'$$

(5.1.3)

elde edilir. (5.1.3) denklemlerinin ilkinin türevi alınırsa $\vec{N}'=\frac{1}{k_1}\vec{T}''+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{T}'$ bulunur.

Bu değer $\vec{B}_1$ ifadesinde yerine yazılırsa $\vec{B}_1=\frac{k_1}{k_2}\vec{T}+\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\vec{T}''+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{T}'\right)$ bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\vec{B}_1=\frac{1}{k_1k_2}\vec{T}''+\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{T}'+\frac{k_1}{k_2}\vec{T} \tag{5.1.4}$$

elde edilir. (5.1.4) ifadesinin türevi alınırsa,

$$\vec{B}_1'=\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'\vec{T}''+\frac{1}{k_1k_2}\vec{T}'''+\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\vec{T}'++\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{T}''+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\vec{T}+\frac{k_1}{k_2}\vec{T}'$$

elde edilir ve bu ifade düzenlenirse;

$$\vec{B}_1'=\frac{1}{k_1k_2}\vec{T}'''+\left[\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}''+\left\{\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+\frac{k_1}{k_2}\right\}\vec{T}'+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\vec{T}$$

bulunur. Bulunan $\vec{B}_1'$ ifadesi (5.1.3) denklemlerindeki $\vec{B}_2$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\vec{B}_2=-\frac{k_2}{k_3}\vec{N}+\frac{1}{k_3}\left\{\frac{1}{k_1k_2}\vec{T}'''+\left[\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}''+\left\{\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+\frac{k_1}{k_2}\right\}\vec{T}'+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\vec{T}\right\}$$

$$=-\frac{k_2}{k_1k_3}\vec{T}'+\frac{1}{k_1k_2k_3}\vec{T}'''+\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'\vec{T}''+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{T}''+\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\vec{T}'+\frac{k_1}{k_2k_3}\vec{T}'+\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\vec{T}$$

$$=\frac{1}{k_1k_2k_3}\vec{T}'''+\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}''+\left[-\frac{k_2}{k_1k_3}+\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+\frac{k_1}{k_2k_3}\right]\vec{T}'+\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\vec{T}$$

bulunur. Bulunan $\vec{B}_2$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\vec{B}_2'=\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)'\vec{T}'''+\frac{1}{k_1k_2k_3}\vec{T}^{(iv)}+\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\vec{T}''+\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}'''$$

$$+\left[-\frac{k_2}{k_1k_3}+\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+\frac{k_1}{k_2k_3}\right]'\vec{T}'+\left[-\frac{k_2}{k_1k_3}+\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+\frac{k_1}{k_2k_3}\right]\vec{T}''+\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]'\vec{T}+\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]\vec{T}'$$

$$=\frac{1}{k_1k_2k_3}\vec{T}^{(iv)}+\left[\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)'+\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}'''+$$

$$\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1k_2k_3}+\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right\}T''+$$

$$\left\{\left(-\frac{k_2}{k_1k_3}\right)'+\left[\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right]'+\left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'+\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right\}T'+\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]'T$$

elde edilir. Bulunan $\vec{B}_2'$ değeri ve (5.1.4) ifadesinde bulunan $\vec{B}_1$ değeri, $\vec{B}_2'=-k_3\vec{B}_1$ ifadesinde yerine yazılıp ve bu ifade $(k_1k_2k_3)$ ile çarpılırsa;

$$\vec{T}^{(iv)}+(k_1k_2k_3)\left[\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)'+\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}'''+$$

$$(k_1k_2k_3)\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+\frac{k_1^{\,2}-k_2^{\,2}}{k_1k_2k_3}+\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right\}\vec{T}''+$$

$$(k_1k_2k_3)\left\{\left(-\frac{k_2}{k_1k_3}\right)'+\left[\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right]'+\left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'+\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right\}\vec{T}'+(k_1k_2k_3)\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]'\vec{T}$$

$$=-k_3^{\,2}\vec{T}''-k_1k_3^{\,2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{T}'-k_1^{\,2}k_3^{\,2}\vec{T}$$

elde edilir. Son olarak bu denklem düzenlenirse,

$$\vec{T}^{(iv)}+\left[k_1k_2k_3\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)'+k_1k_2\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'+k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}'''$$

$$+\left[k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'\right]'+\left[\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right\}+k_1k_2\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'+k_1^{\,2}-k_2^{\,2}+k_3^2\right]\vec{T}''$$

$$+\left[k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right]'-\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)'+\left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'\right\}+k_1k_2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'+k_1k_3^2\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\vec{T}'+\left[k_1k_2k_3\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]'+k_1^{\,2}k_3^2\right]\vec{T}=0$$

denklemi bulunur.■

Sonuç 5.1.2 : (5.1.2 denklemi $\mathbb{R}_2^4$ de T teğet vektör alanına göre spacelike eğrileri karakterize eden 4. mertebeden, 1. dereceden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemdir.

5.2. $\mathbb{R}^4_2$ DE ÖZEL SPACELIKE EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Teorem 5.2.1: $\gamma = \gamma(s) : I \subset R \to \mathbb{R}^4_2$**,** s yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş regüler spacelike bir eğri olsun. γ, spacelike $W-$eğri ise bu taktirde

$$\vec{T}^{(IV)} + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2)\vec{T}'' + (k_1^2 k_3^2)\vec{T} = 0$$

eşitliği sağlanır**[24]**.

İspat: $\mathbb{R}^4_2$ de yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4_2$ eğrisi (5.1.2) denklemini sağlar. γ eğrisi $W-$eğri olduğundan k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri sabittir. k_1, k_2 ve k_3 sabit olduğundan türevleri sıfır olacaktır. (5.1.2) denklemlerinde bu durum dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= k_1^2 k_3^2 \\
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \\
\lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler (5.1.1) denklemlerinde yazılırsa,

$$\vec{T}^{(IV)} + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2)\vec{T}'' + (k_1^2 k_3^2)T = 0$$

Şekline dönüşür ve ispat tamamlanmış olur.■

Teorem 5.2.2: γ, $\mathbb{R}^4_2$ de yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş regüler spacelike bir eğri olsun. γ spacelike slope eğrisi ise

$$\vec{T}^{(IV)} - \frac{6k_1'}{k_1}\vec{T}''' + \lambda_2\vec{T}'' + \lambda_1\vec{T}' + k_1^2 k_3^2\vec{T} = 0$$

denklemi sağlanır. Burada λ_1 ve λ_2 katsayı fonksiyonları, α ve β sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$\lambda_1 = -\frac{k_1''}{k_1} + \frac{10k_1''k_2'}{k_1k_2} - \frac{15k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} + (\alpha^2 - \beta^2 - 1)k_1k_1'$$

$$\lambda_2 = -\frac{4k_1''}{k_1} + \frac{10k_1'k_2'}{k_1k_2} - (\alpha^2 - \beta^2 - 1)k_1^2$$

şeklindedir**[24]**.

İspat: γ spacelike eğri olduğundan (5.1.2) denklemini sağlar. Ayrıca γ slope eğrisi olduğundan $\frac{k_2}{k_1} = \alpha$ ve $\frac{k_3}{k_1} = \beta$ dır. Buradan $k_2 = \alpha k_1$ ve $k_3 = \beta k_1$ yazılabilir. Bu bilgileri (5.1.2) denkleminin katsayıları olan (5.1.1) denklemlerinde kullanalım. İlk olarak $\vec{T}$ nin katsayısını bulalım. (5.1.1) denklemlerinde λ_0 ile gösterilen $\vec{T}$ nin katsayısında $\frac{k_2}{k_1} = \alpha = sabit$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= k_1k_2k_3\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]' + k_1^2k_3^2 \\ &= k_1^2k_3^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{T}'''$ katsayısını bulalım. (5.1.1) denklemlerinde λ_3 ile gösterilen $\vec{T}'''$ nin katsayısında bulunan türevler alınıp $k_2 = \alpha k_1$ ve $k_3 = \beta k_1$ olduğu kullanılıp denklem düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
\lambda_3 &= k_1k_2k_3\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)' + k_1k_2\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)' + k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)' \\
&= k_1k_2k_3\left(-\frac{k_1'k_2k_3}{k_1^2k_2^2k_3^2}\right) + k_1k_2k_3\left(-\frac{k_1k_2'k_3}{k_1^2k_2^2k_3^2}\right) + k_1k_2k_3\left(-\frac{k_1k_2k_3'}{k_1^2k_2^2k_3^2}\right) \\
&\quad + k_1k_2\left(-\frac{k_1'k_2}{k_1^2k_2^2} - \frac{k_1k_2'}{k_1^2k_2^2}\right) + k_1\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right) \\
&= -\frac{k_1'}{k_1} - \frac{k_2'}{k_2} - \frac{k_3'}{k_3} - \frac{k_1'}{k_1} - \frac{k_2'}{k_2} - \frac{k_1'}{k_1} \\
&= -3\frac{k_1'}{k_1} - 2\frac{k_2'}{k_2} - \frac{k_3'}{k_3} \\
&= -3\frac{k_1'}{k_1} - 2\frac{(\alpha k_1')}{\alpha k_1} - \frac{(\beta k_1')}{\beta k_1} \\
&= -3\frac{k_1'}{k_1} - 2\frac{k_1'}{k_1} - \frac{k_1'}{k_1} \\
&= -6\frac{k_1'}{k_1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $\vec{T}''$ katsayısını bulalım. (5.1.2) denklemlerinde bulunan λ_2 ifadesinde bulunan türevler alınırsa $k_2 = \alpha k_1$ ve $k_3 = \beta k_1$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'\right]' + \left[\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right\} + k_1k_2\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \\
&= k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{-k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_1^2k_2^2}\right)\right]' + \left[\frac{1}{k_2k_3}\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right)\right]'\right\} + k_1k_2\left[\frac{1}{k_2}\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right)\right]' + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \\
&= k_1k_2k_3\left[\frac{-k_3'}{k_3^2}\left(\frac{-k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_1^2k_2^2}\right) - \frac{1}{k_3}\left(\frac{(k_1''k_2 + 2k_1'k_2' + k_1k_2'')k_1^2k_2^2 - 2k_1k_2(k_1'k_2 + k_1k_2')(k_1'k_2 + k_1k_2')}{k_1^4k_2^4}\right)\right] \\
&\quad + k_1k_2k_3\left[\frac{k_1'k_2'k_3 + k_1'k_2k_3'}{k_1^2k_2^2k_3^2} - \frac{k_1''k_2^2 - 2k_1(k_1')^2}{k_1^4k_2k_3}\right] + k_1k_2\left[\frac{(-k_2')}{k_2^2}\frac{(-k_1')}{k_1^2} - \frac{1}{k_2}\left(\frac{k_1''k_1^2 - 2k_1(k_1')^2}{k_1^4}\right)\right] + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2
\end{aligned}
$$

$$=\frac{k_1k_2'k_3'+k_1'k_2k_3'}{k_1k_2k_3}-\frac{k_1''k_2+2k_1'k_2'+k_1k_2''}{k_1k_2}+\frac{2(k_1'k_2+k_1k_2')^2}{k_1^2k_2^2}+\frac{k_1'k_2'k_3+k_1'k_2k_3'}{k_1k_2k_3}-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')}{k_1^2}+\frac{k_1'k_2'}{k_1k_2}$$
$$-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')}{k_1^2}+k_1^2-k_2^2+k_3^2$$
$$=\frac{k_2'k_3'}{k_2k_3}+\frac{k_1'k_3'}{k_1k_3}-\frac{k_1''}{k_1}-\frac{2k_1'k_2'}{k_1k_2}-\frac{k_2''}{k_2}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{4k_1'k_2'}{k_1k_2}+\frac{2(k_2')}{k_2^2}+\frac{k_1'k_2'}{k_1k_2}+\frac{k_1'k_3'}{k_1k_3}-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{k_1'k_2'}{k_1k_2}$$
$$-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+k_1^2-k_2^2+k_3^2$$

bulunur. $k_2=\alpha k_1$ ve $k_3=\beta k_1$ olduğu kullanılırsa

$$\lambda_2=\frac{(\alpha k_1')(\beta k_1')}{(\alpha k_1)(\beta k_1)}+\frac{k_1'(\beta k_1')}{k_1(\beta k_1)}-\frac{k_1''}{k_1}-\frac{2k_1'(\alpha k_1')}{k_1(\alpha k_1)}-\frac{\alpha k_1''}{\alpha k_1}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{4k_1'(\alpha k_1')}{k_1(\alpha k_1)}+\frac{2(\alpha k_1')^2}{(\alpha k_1)^2}+\frac{k_1'(\alpha k_1')}{k_1(\alpha k_1)}+\frac{k_1'(\beta k_1')}{k_1(\beta k_1)}$$
$$-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{k_1'(\alpha k_1')}{k_1(\alpha k_1)}-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')}{k_1^2}+k_1^2-(\alpha k_1)^2+(\beta k_1)^2$$
$$=\frac{(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{(k_1')^2}{k_1^2}-\frac{k_1''}{k_1}-\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{4(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{(k_1')^2}{k_1^2}-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+\frac{(k_1')^2}{k_1^2}$$
$$-\frac{k_1''}{k_1}+\frac{2(k_1')^2}{k_1^2}+k_1^2-(\alpha k_1)^2+(\beta k_1)^2$$
$$=-4\frac{k_1''}{k_1}+15\frac{(k_1')^2}{k_1^2}+k_1^2-(\alpha k_1)^2+(\beta k_1)^2$$
$$=-4\frac{k_1''}{k_1}+15\frac{\alpha k_1'k_1'}{\alpha k_1k_1}-\left(\alpha^2-\beta^2-1\right)k_1^2$$
$$=-4\frac{k_1''}{k_1}+15\frac{k_1'k_2'}{k_1k_2}-\left(\alpha^2-\beta^2-1\right)k_1^2$$

elde edilir. $\vec{T}$ nin katsayısı olan λ_1 ifadesini bulalım. Bunun için (1) denklemlerinde λ_1 ifadesinde bulunan türevler alınırsa

$$\lambda_1 = k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right]' - \left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)' + \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'\right\} + k_1k_2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + k_1k_3^2\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

$$= k_1k_2k_3\left[\frac{1}{k_3}\left[\frac{1}{k_2}\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right)\right]'\right]' - k_1k_2k_3\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{1}{k_3}\right)' + k_1k_2k_3\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{1}{k_3}\right)' + k_1k_3^2\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right)$$

$$= k_1k_2k_3\left[\frac{1}{k_3}\left[\frac{k_1'k_2'}{k_1^2k_2^2} - \frac{k_1''k_1^2}{k_1^4k_2} + \frac{2(k_1')^2}{k_1^3k_2}\right]\right]' - k_1k_2k_3\left[\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\frac{1}{k_3} + \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{1}{k_3}\right)'\right]$$

$$+ k_1k_2k_3\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\frac{1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2}\left(\frac{1}{k_3}\right)'\right] - \frac{k_1'k_3^2}{k_1}$$

$$= k_1k_2k_3\left(-\frac{k_3'}{k_3^2}\right)\left(\frac{k_1'k_2'}{k_1^2k_2^2} - \frac{k_1''k_1^2}{k_1^4k_2} + \frac{2(k_1')^2}{k_2k_1^3}\right) + k_1k_2k_3\frac{1}{k_3}\left(\frac{(k_1''k_2' + k_1'k_2'')k_1^2k_2^2 - 2(k_1k_2)(k_1'k_2 + k_1k_2')k_1'k_2'}{k_1^4k_2^4}\right)$$

$$- k_1k_2k_3\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1'''k_1^2k_2 - k_1''(2k_1k_1'k_2 + k_1^2k_2')}{k_1^4k_2^2}\right) + k_1k_2k_3\frac{1}{k_3}\left(\frac{2\left(2k_1'k_1''k_2k_1^3 - (k_1')^2(3k_1^2k_1'k_2 + k_1^3k_2')\right)}{k_1^6k_2^2}\right)$$

$$+ k_1k_2k_3\left(\frac{-k_3'}{k_3^2}\right)\frac{k_1}{k_2} + k_1k_2k_3\left(\frac{-k_3'}{k_3^2}\right)\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1'k_3^2}{k_1}$$

$$= -\frac{k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} + \frac{k_1''k_3'}{k_1k_3} - \frac{2(k_1')^2k_3'}{k_1^2k_3} + \frac{k_2^2k_1'}{k_3} - \frac{k_1^2k_3'}{k_3} + \frac{k_1''k_2'}{k_1k_2} + \frac{k_1'k_2''}{k_1k_2} - \frac{2(k_1')^2k_2'}{k_1^2k_2} - \frac{2k_1'(k_2')^2}{k_1k_2^2} - \frac{k_1'''}{k_1}$$

$$+ \frac{2k_1''k_1'}{k_1^2} + \frac{k_1''k_2'}{k_1k_2} + \frac{4k_1''k_1'}{k_1^2} - \frac{6(k_1')^3}{k_1^3} - \frac{2(k_1')^2k_2'}{k_1^2k_2} - \frac{k_1'k_3^2}{k_1}$$

elde edilir. Diğer taraftan γ bir slope eğrisi olduğundan $k_2 = \alpha k_1$, $k_3 = \beta k_1$ ve $k_2 = \dfrac{\alpha}{\beta}k_3$ dır. Bu ifadelerin türevleri alınırsa $k_2' = \alpha k_1', k_3' = \beta k_1'$ ve $k_2' = \dfrac{\alpha}{\beta}k_3'$ elde edilir. Bu ifadeler son bulunan ifadede kullanılırsa,

$$\lambda_1 = -\frac{k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} + \frac{k_1''k_2'}{k_1k_2} - \frac{2k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} + \alpha^2k_1k_1' - k_1k_1' + \frac{k_1''k_2'}{k_1k_2} + \frac{k_1''k_2'}{k_1k_2} - \frac{2k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3}$$

$$- \frac{2k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} - \frac{k_1'''}{k_1} + \frac{2k_1''k_2'}{k_1k_2} + \frac{k_1''k_2'}{k_1k_2} + \frac{4k_1''k_2'}{k_1k_2} - \frac{6k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} - \frac{2k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} - \beta^2k_1k_1'$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$\lambda_1 = -\frac{k_1'''}{k_1} + \frac{10k_1''k_2'}{k_1k_2} - \frac{15k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} + (\alpha^2 - \beta^2 - 1)k_1k_1'$$

bulunur. ■

Teorem 5.2.3: $\gamma = \gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ birim hızlı spacelike ccr-eğrisi ise bu taktirde,

$$\lambda_1 = -\frac{k_1'''}{k_1} + \frac{10k_1''k_2'}{k_1k_2} - \frac{15k_1'k_2'k_3'}{k_1k_2k_3} - \left(k_1k_1' - k_2k_2' + k_3k_3'\right)$$

$$\lambda_2 = -\frac{4k_1''}{k_1} + \frac{15k_1'k_2'}{k_1k_2} + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2$$

olmak üzere;

$$\vec{T}^{(iv)} - \frac{6k_1'}{k_1}\vec{T}''' + \lambda_2\vec{T}'' + \lambda_1\vec{T}' + k_1^2k_3^2\vec{T} = 0$$

denklemi sağlanır**[24]**.

İspat: γ eğrisi spacelike bir eğri olduğundan (5.1.2) denklemini sağlar. (5.1.2) denkleminin katsayıları olan (3.1) denklemleri yardımıyla $\vec{T}''', \vec{T}'', \vec{T}'\, ve\, \vec{T}$ nin katsayılarını bulalım. γ bir ccr-eğrisi olduğundan $\dfrac{k_2}{k_1}$ ve $\dfrac{k_3}{k_2}$ sabit fonksiyonlardır. (5.1.1) denklemlerindeki λ_3 yardımıyla $\vec{T}'''$ nün katsayısını hesaplayalım. (5.1.1) denklemlerinde

$$\lambda_3 = k_1k_2k_3\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)' + k_1k_2\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)' + k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

şeklindeydi. Buradaki türevleri alırsak ve sonra γ spacelike ccr-eğrisi olduğundan

$$\frac{k_2}{k_1} = \alpha \Rightarrow k_2 = \alpha k_1 \Rightarrow k_2' = \alpha k_1' \Rightarrow \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1}$$

$$\frac{k_3}{k_2} = \beta \Rightarrow k_3 = \alpha k_2 \Rightarrow k_3' = \alpha k_2' \Rightarrow \frac{k_3'}{k_3} = \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1}$$

ifadelerini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\lambda_3 &= k_1k_2k_3\left(\frac{1}{k_1k_2k_3}\right)' + k_1k_2\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)' + k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)' \\
&= k_1k_2k_3\left(-\frac{k_1'k_2k_3 + k_1k_2'k_3 + k_1k_2k_3'}{k_1^2k_2^2k_3^2}\right) + k_1k_2\left(-\frac{k_1'k_2 + k_1k_2'}{k_1^2k_2^2}\right) + k_1\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right) \\
&= -\frac{k_1'}{k_1} - \frac{k_2'}{k_2} - \frac{k_3'}{k_3} - \frac{k_1'}{k_1} - \frac{k_2'}{k_2} - \frac{k_1'}{k_1} \\
&= -\frac{6k_1'}{k_1}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\vec{T}''$ katsayısını bulalım. Bunun (5.1.1) denklemlerinde bulunan λ_2 ifadesindeki türevleri alırsak,

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_1k_2}\right)'\right]' + \left[\frac{1}{k_2k_3}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right\} + k_1k_2\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \\
&= k_1k_2k_3\left\{\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{-k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_1^2k_2^2}\right)\right]' + \left[\frac{1}{k_2k_3}\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right)\right]'\right\} + k_1k_2\left[\frac{1}{k_2}\left(-\frac{k_1'}{k_1^2}\right)\right]' + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \\
&= k_1k_2k_3\left[\frac{-k_3'}{k_3^2}\left(\frac{-k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_1^2k_2^2}\right) - \frac{1}{k_3}\left(\frac{(k_1''k_2 + 2k_1'k_2' + k_1k_2'')k_1^2k_2^2 - 2k_1k_2(k_1'k_2 + k_1k_2')(k_1'k_2 + k_1k_2')}{k_1^4k_2^4}\right)\right] \\
&\quad + k_1k_2k_3\left[\frac{k_1'k_2'k_3 + k_1'k_2k_3'}{k_1^2k_2^2k_3^2} - \frac{k_1''k_2^2 - 2k_1(k_1')^2}{k_1^4k_2k_3}\right] + k_1k_2\left[\frac{(-k_2')}{k_2^2}\frac{(-k_1')}{k_1^2} - \frac{1}{k_2}\left(\frac{k_1''k_1^2 - 2k_1(k_1')^2}{k_1^4}\right)\right] + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \\
&= \frac{k_1k_2'k_3' + k_1'k_2k_3'}{k_1k_2k_3} - \frac{k_1''k_2 + 2k_1'k_2' + k_1k_2''}{k_1k_2} + \frac{2(k_1'k_2 + k_1k_2')^2}{k_1^2k_2^2} + \frac{k_1'k_2'k_3 + k_1'k_2k_3'}{k_1k_2k_3} - \frac{k_1''}{k_1} + \frac{2(k_1')}{k_1^2} + \frac{k_1'k_2'}{k_1k_2} - \frac{k_1''}{k_1} + \frac{2(k_1')}{k_1^2} \\
&\quad + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \\
&= \frac{k_2'k_3'}{k_2k_3} + \frac{k_1'k_3'}{k_1k_3} - \frac{k_1''}{k_1} - \frac{2k_1'k_2'}{k_1k_2} - \frac{k_2''}{k_2} + \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} + \frac{4k_1'k_2'}{k_1k_2} + \frac{2(k_2')}{k_2^2} + \frac{k_1'k_2'}{k_1k_2} + \frac{k_1'k_3'}{k_1k_3} - \frac{k_1''}{k_1} + \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} + \frac{k_1'k_2'}{k_1k_2} - \frac{k_1''}{k_1} + \frac{2(k_1')^2}{k_1^2} \\
&\quad + k_1^2 - k_2^2 + k_3^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Son bulunan ifadede

$$
\frac{k_2}{k_1} = \alpha \Rightarrow k_2 = \alpha k_1 \Rightarrow k_2' = \alpha k_1' \Rightarrow \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1}
$$

$$
\frac{k_3}{k_2} = \beta \Rightarrow k_3 = \alpha k_2 \Rightarrow k_3' = \alpha k_2' \Rightarrow \frac{k_3'}{k_3} = \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1}
$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\lambda_2 = \frac{\alpha k_1' \beta k_2'}{\alpha k_1 \beta k_2} + \frac{k_1' \beta k_2'}{k_1 \beta k_2} - \frac{k_1''}{k_1} - \frac{2k_1' k_2'}{k_1 k_2} - \frac{\alpha k_1''}{\alpha k_1} + \frac{2k_1' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{4k_1' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{2\dfrac{k_2'}{\alpha} k_2'}{\dfrac{k_2}{\alpha} k_2}$$

$$+ \frac{k_1' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{k_1' \beta k_2'}{k_1 \beta k_2} - \frac{k_1''}{k_1} + \frac{2k_1' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{k_1' k_2'}{k_1 k_2} - \frac{k_1''}{k_1} + \frac{2k_1' k_2'}{k_1 k_2} + k_1^{\,2} - k_2^{\,2} + k_3^2$$

$$= -\frac{4k_1''}{k_1} + \frac{15 k_1' k_2'}{k_1 k_2} + k_1^{\,2} - k_2^{\,2} + k_3^2$$

elde edilir. $\vec{T}'$ katsayısını bulmak için Teorem 5.2.2 nin ispatında yapıldığı gibi (5.1.1) denklemlerinde bulunan λ_1 ifadesindeki türevler alınıp düzenlenirse

$$\lambda_1 = -\frac{k_1' k_2' k_3'}{k_1 k_2 k_3} + \frac{k_1'' k_3'}{k_1 k_3} - \frac{2(k_1')^2 k_3'}{k_1^2 k_3} + \frac{k_2^2 k_1'}{k_3} - \frac{k_1^2 k_3'}{k_3} + \frac{k_1'' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{k_1' k_2''}{k_1 k_2} - \frac{2(k_1')^2 k_2'}{k_1^2 k_2}$$

$$- \frac{2k_1'(k_2')^2}{k_1 k_2^2} - \frac{k_1'''}{k_1} + \frac{2k_1'' k_1'}{k_1^2} + \frac{k_1'' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{4k_1'' k_1'}{k_1^2} - \frac{6(k_1')^3}{k_1^3} - \frac{2(k_1')^2 k_2'}{k_1^2 k_2} - \frac{k_1' k_3^2}{k_1}$$

elde edilir. Bu ifadede

$$\frac{k_2}{k_1} = \alpha \Rightarrow k_2 = \alpha k_1 \Rightarrow k_2' = \alpha k_1' \Rightarrow \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1}$$

$$\frac{k_3}{k_2} = \beta \Rightarrow k_3 = \alpha k_2 \Rightarrow k_3' = \alpha k_2' \Rightarrow \frac{k_3'}{k_3} = \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\lambda_1 = -\frac{k_1' k_2' k_3'}{k_1 k_2 k_3} + \frac{k_1'' \beta k_2'}{k_1 \beta k_2} - \frac{2k_1' \overset{k_2'}{\alpha k_1'} \overset{k_3'}{\beta k_2'}}{k_1 \underset{k_2}{\alpha k_1} \underset{k_3}{\beta k_2}} + \frac{\overset{k_2'}{\alpha k_1'} k_2^2}{\underset{k_2}{\alpha k_1}} - \frac{k_1^2 k_1'}{k_1} + \frac{k_1'' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{k_1' \overset{k_2'}{\alpha k_1''}}{k_1 \underset{k_2}{\alpha k_2}} - \frac{2k_1' \overset{k_2'}{\alpha k_1'} \overset{k_3'}{\beta k_2'}}{k_1 \underset{k_2}{\alpha k_1} \underset{k_3}{\beta k_2}}$$

$$- \frac{2k_1' k_2' \overset{k_3'}{\beta k_2'}}{k_1 k_2 \underset{k_3}{\beta k_2}} - \frac{k_1'''}{k_1} + \frac{2k_1'' \overset{k_2'}{\alpha k_1'}}{k_1 \underbrace{\alpha k_1}_{k_2}} + \frac{k_1'' k_2'}{k_1 k_2} + \frac{4k_1'' \overbrace{\alpha k_1}^{k_2'}}{k_1 \underbrace{\alpha k_1}_{k_2}} - \frac{6k_1' \overbrace{\alpha k_1'}^{k_2'} \overbrace{\beta k_2'}^{k_3'}}{k_1 \underbrace{\alpha k_1}_{k_2} \underbrace{\beta k_2}_{k_3}} - \frac{2k_1' \overbrace{\alpha k_1'}^{k_2'} \overbrace{\beta k_2'}^{k_3'}}{k_1 \underbrace{\alpha k_1}_{k_2} \underbrace{\beta k_2}_{k_3}} - \frac{k_3' k_3^2}{k_3}$$

$$= -\frac{k_1'''}{k_1} - \frac{15 k_1' k_2' k_3'}{k_1 k_2 k_3} + \frac{10 k_1'' k_2'}{k_1 k_2} - (k_1 k_1' - k_2 k_2' + k_3 k_3')$$

bulunur. $\vec{T}$ nin katsayısını bulmak için (5.1.1) denklemlerindeki λ_0 kullanalım.

$$\lambda_0 = k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right]'_0 + k_1{}^2 k_3^2$$
$$= k_1{}^2 k_3^2$$

elde edilir.■

6. $\mathbb{R}_2^4$ DE SPACELIKE SLANT VE B_1-SLANT HELİSLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Teorem 6.1: $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ s yay uzunluğu ile verilen regüler spacelike bir eğri olsun ve $\left\{\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}_1(s),\vec{B}_2(s)\right\}$, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı olsun. Eğer γ spacelike slant helis ise bu taktirde γ nın konum vektörü

$$\left(\frac{k_2{}^2-k_1{}^2}{k_1k_2k_3}\right)\mu_1'' + \left[\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)' - \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' - \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'\right]\mu_1' + \left[\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1k_3}{k_2}\right]\mu_1 = 0 \tag{6.1}$$

denklemini sağlar. Burada μ_1, sabit doğrultulu alınan spacelike sabit vektörünün teğetinin katsayı fonksiyonudur**[24]**.

İspat: Bir γ eğrisinin $\vec{N}$ asli normali sabit doğrultulu bir vektör ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisi slant helis olarak adlandırılır. Slant helisin bu tanımından

$$\left\langle \vec{N},\vec{U}\right\rangle = \left\|\vec{N}\right\|\left\|\vec{U}\right\|\cos\theta \tag{6.2}$$

yazabiliriz. Burada $\vec{U}$ spacelike sabit vektör olduğundan

$$\vec{U} = \mu_1\vec{T} + \mu_2\vec{N} + \mu_3\vec{B}_1 + \mu_4\vec{B}_2 \tag{6.3}$$

şeklinde $\vec{T},\vec{N},\vec{B}_1,\vec{B}_2$ nin lineer birleşimi olarak yazılabilir. (6.3) ifadesini $\vec{T}$ ile iç çarparsak

$$\left\langle \vec{T},\vec{U}\right\rangle = \mu_1\underbrace{\left\langle \vec{T},\vec{T}\right\rangle}_{1} + \mu_2\underbrace{\left\langle \vec{T},\vec{N}\right\rangle}_{0} + \mu_3\underbrace{\left\langle \vec{T},\vec{B}_1\right\rangle}_{0} + \mu_4\underbrace{\left\langle \vec{T},\vec{B}_2\right\rangle}_{0}$$

$\mu_1 = \left\langle \vec{T},\vec{U}\right\rangle$ elde edilir. (6.3) ifadesini $\vec{N}$ ile iç çarparsak

$$\left\langle \vec{N},\vec{U}\right\rangle = \mu_1 \underbrace{\left\langle \vec{N},\vec{T}\right\rangle}_{0} + \mu_2 \underbrace{\left\langle \vec{N},\vec{N}\right\rangle}_{1} + \mu_3 \underbrace{\left\langle \vec{N},\vec{B}_1\right\rangle}_{0} + \mu_4 \underbrace{\left\langle \vec{N},\vec{B}_2\right\rangle}_{0}$$

$\mu_2 = \left\langle \vec{N},\vec{U}\right\rangle = \cos\theta = sabit$ elde edilir. Aynı şekilde (6.3) ifadesini $\vec{B}_1$ ile iç çarparsak

$$\left\langle \vec{B}_1,\vec{U}\right\rangle = \mu_1 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1,\vec{T}\right\rangle}_{0} + \mu_2 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1,\vec{N}\right\rangle}_{0} + \mu_3 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1,\vec{B}_1\right\rangle}_{-1} + \mu_4 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1,\vec{B}_2\right\rangle}_{0}$$

$\mu_3 = -\left\langle \vec{B}_1,\vec{U}\right\rangle$ elde edilir. Benzer şekilde (6.3) ifadesini $\vec{B}_2$ ile iç çarparsak

$$\left\langle B_2,U\right\rangle = \mu_1 \underbrace{\left\langle B_2,T\right\rangle}_{0} + \mu_2 \underbrace{\left\langle B_2,N\right\rangle}_{0} + \mu_3 \underbrace{\left\langle B_2,B_1\right\rangle}_{0} + \mu_4 \underbrace{\left\langle B_2,B_2\right\rangle}_{-1}$$

$\mu_4 = -\left\langle \vec{B}_2,\vec{U}\right\rangle$ elde edilir. (6.3) ifadesinin türevi alınırsa $\vec{U}$ sabit vektör olduğundan

$$\vec{0} = \mu_1'\vec{T} + \mu_1\vec{T}' + \mu_2'\vec{N} + \mu_2\vec{N}' + \mu_3'\vec{B}_1 + \mu_3\vec{B}_1' + \mu_4'\vec{B}_2 + \mu_4\vec{B}_2'$$

denkleminde Frenet türev formülleri kullanılırsa,

$$\vec{0} = \mu_1'\vec{T} + \mu_1\left(k_1\vec{N}\right) + \mu_2'\vec{N} + \mu_2\left(-k_1\vec{T} + k_2\vec{B}_1\right) + \mu_3'\vec{B}_1 + \mu_3\left(k_2\vec{N} + k_3\vec{B}_2\right) + \mu_4'\vec{B}_2 + \mu_4\left(-k_3\vec{B}_1\right)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\left(\mu_1' - k_1\mu_2\right)\vec{T} + \left(k_1\mu_1 + \mu_2' + k_2\mu_3\right)\vec{N} + \left(k_2\mu_2 + \mu_3' - k_3\mu_4\right)\vec{B}_1 + \left(k_3\mu_3 + \mu_4'\right)\vec{B}_2 = 0 \qquad (6.4)$$

bulunur. Burada $\vec{T},\vec{N},\vec{B}_1,\vec{B}_2$ sıfırdan farklı olduklarından

$$\begin{aligned} &\mu_1' - k_1\mu_2 = 0 \\ &k_1\mu_1 + \mu_2' + k_2\mu_3 = 0 \\ &k_2\mu_2 + \mu_3' - k_3\mu_4 = 0 \\ &k_3\mu_3 + \mu_4' = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mu_2 = \left\langle \vec{N},\vec{U}\right\rangle = \cos\theta = sabit$ olduğundan dolayı $\mu_2' = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\mu_1' - k_1\mu_2 = 0$$
$$k_1\mu_1 + k_2\mu_3 = 0$$
$$k_2\mu_2 + \mu_3' - k_3\mu_4 = 0$$
$$k_3\mu_3 + \mu_4' = 0$$

(6.5)

bulunur. (6.5) denklem sisteminin üçüncü denkleminden $\mu_4 = \frac{k_2}{k_3}\mu_2 + \frac{1}{k_3}\mu_3'$ elde ederiz. Bu ifade dördüncü denklemde yazılırsa

$$\left[\frac{k_2}{k_3}\mu_2 + \frac{1}{k_3}\mu_3'\right]' = -k_3\mu_3 \tag{6.6}$$

elde edilir. Birinci denklemden $\mu_2 = \frac{1}{k_1}\mu_1'$, ikinci denklemden $\mu_3 = -\frac{k_1}{k_2}\mu_1$ ifadeleri elde bulunur. Bunlar (6.6) denkleminde yazılırsa,

$$\left[\frac{k_2}{k_3}\frac{1}{k_1}\mu_1' + \frac{1}{k_3}\left(-\frac{k_1}{k_2}\mu_1\right)'\right]' = -k_3\left(-\frac{k_1}{k_2}\mu_1\right)$$

$$\left[\left(\frac{k_2}{k_3k_1}\right)\mu_1' - \frac{1}{k_3}\left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\mu_1 + \frac{k_1}{k_2}\mu_1'\right)\right]' = \frac{k_1k_3}{k_2}\mu_1$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikteki türev alma işlemi yapılırsa,

$$\left(\frac{k_2}{k_3k_1}\right)'\mu_1' + \left(\frac{k_2}{k_3k_1}\right)\mu_1'' - \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]'\mu_1 - \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\mu_1' - \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'\mu_1' - \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)\mu_1'' = \frac{k_1k_3}{k_2}\mu_1$$

bulunur ve bu denklem düzenlenirse,

$$\left(\frac{k_2}{k_3k_1} - \frac{k_1}{k_2k_3}\right)\mu_1'' + \left[\left(\frac{k_2}{k_3k_1}\right)' - \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' - \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'\right]\mu_1' - \left[\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' - \frac{k_1k_3}{k_2}\right]\mu_1 = 0$$

$$\frac{k_2^{\,2} - k_1^{\,2}}{k_1k_2k_3}\mu_1'' + \left[\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)' - \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' - \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)'\right]\mu_1' + \left[\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1k_3}{k_2}\right]\mu_1 = 0$$

denklemi elde edilir. ■

Sonuç 6.2: (6.1) denklemi $\mathbb{R}^4_2$ de μ_1 katsayı fonksiyonuna göre spacelike slant helisi karakterize eden 2. mertebeden, 1. dereceden, homojen, değişken katsayılı, lineer diferansiyel denklemdir. Spacelike slant helis μ_3 ve μ_4 katsayı fonksiyonlarına göre de karakterize edilebilir. Fakat μ_2 sabit olduğundan μ_2 ye göre bir karakterizasyon verilemez.

Teorem 6.3 : $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4_2$, s yay uzunluğu ile verilen regüler spacelike bir eğri olsun ve $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı olsun. Eğer γ spacelikeslant helis ise bu taktirde γ nın konum vektörü

$$\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2k_3}\mu_3'' + \left[\left(\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\right)' + \frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' - \left(\frac{1}{k_3}\right)'\right]\mu_3' + \left\{\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\right]' - k_3\right\}\mu_3 = 0,$$
$$\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2k_3^2}\mu_4'' + \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_3}\right)' - \frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)'\right]\mu_4' + \mu_4 = 0 \tag{6.7}$$

denklemlerini sağlar. Burada μ_3 ve μ_4, sabit doğrultulu alınan spacelike sabit vektörünün sırasıyla $\vec{B}_1$ birinci binormal vektörünün ve $\vec{B}_2$ ikinci binormal vektörünün katsayı fonksiyonlarıdır**[24]**.

İspat: Teorem 6.1 in ispatına benzer olarak ilerlendiğinde yine

$$\begin{aligned}
&\mu_1' - k_1\mu_2 = 0\\
&k_1\mu_1 + k_2\mu_3 = 0\\
&k_2\mu_2 + \mu_3' - k_3\mu_4 = 0\\
&k_3\mu_3 + \mu_4' = 0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin ikinci denkleminden $\mu_1 = -\frac{k_2}{k_1}\mu_3$ bulunur. Birinci denklemden $\mu_1' = k_1\mu_2$ bulunur. Bulunan μ_1 değeri yerine yazılıp türevi alınırsa,

$$k_1\mu_2 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\mu_3\right)'$$

$$k_1\mu_2 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3 + \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mu_3'$$

$$\mu_2 = \frac{1}{k_1}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3 + \frac{1}{k_1}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mu_3'$$

elde edilir. Üçüncü denklemden $\mu_4 = \frac{k_2}{k_3}\mu_2 + \frac{1}{k_3}\mu_3'$ bulunur. Yukarıda bulunan μ_2 değeri yerine yazılırsa,

$$\mu_4 = \frac{k_2}{k_3}\left[\frac{1}{k_1}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3 + \frac{1}{k_1}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mu_3'\right] + \frac{1}{k_3}\mu_3'$$

$$= \frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3 - \frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\mu_3' + \frac{1}{k_3}\mu_3'$$

bulunur. Bulunan μ_4 ifadesinin türevi alınırsa,

$$\mu_4' = \left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3 - \frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\mu_3' + \frac{1}{k_3}\mu_3'\right]'$$

$$= \left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\right]'\mu_3 + \frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3' - \left(\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\right)'\mu_3' - \frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\mu_3'' + \left(\frac{1}{k_3}\right)'\mu_3' + \left(\frac{1}{k_3}\right)\mu_3$$

elde edilir. Bulunan bu μ_4' değeri (6.8) in dördüncü denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\right]'\mu_3+\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3'-\left(\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\right)'\mu_3'-\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\mu_3''+\left(\frac{1}{k_3}\right)'\mu_3'+\left(\frac{1}{k_3}\right)\mu_3''+k_3\mu_3=0$$

bulunur. Bu denklem μ_3 e ve türevlerine göre düzenlenirse,

$$\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\right]'\mu_3+\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\mu_3'-\left(\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\right)'\mu_3'-\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\mu_3''+\left(\frac{1}{k_3}\right)'\mu_3'+\left(\frac{1}{k_3}\right)\mu_3''+k_3\mu_3=0$$

$$\left[\frac{1}{k_3}-\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\right]\mu_3''+\left[-\left(\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\right)'+\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'+\left(\frac{1}{k_3}\right)'\right]\mu_3'+\left[\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)'\right]'+k_3\right]\mu_3=0$$

$$\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2k_3}\mu_3''+\left[\left(\frac{k_2^2}{k_1^2k_3}\right)'+\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'-\left(\frac{1}{k_3}\right)'\right]\mu_3'+\left\{\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\right]'-k_3\right\}\mu_3=0$$

elde edilir. Bu ise bize μ_3 e göre 2.mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemi verir.

Şimdi μ_4 göre diferansiyel denklemi bulalım. Bunun için teorem 6.1 ispatında uygulanan yol aynı şekilde uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\mu_1'-k_1\mu_2=0\\&k_1\mu_1+k_2\mu_3=0\\&k_2\mu_2+\mu_3'-k_3\mu_4=0\\&k_3\mu_3+\mu_4'=0\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Dördüncü denklemden $\mu_3=-\frac{1}{k_3}\mu_4'$, birinci denklemden $\mu_2=\frac{1}{k_1}\mu_1'$, ikinci denklemden $\mu_1=-\frac{k_2}{k_1}\mu_3$ buradan da

$\mu_1 = -\frac{k_2}{k_1}\mu_3 = -\frac{k_2}{k_1}\left(-\frac{1}{k_3}\mu_4'\right) = \frac{k_2}{k_1 k_3}\mu_4'$ elde edilir. Son bulunan μ_1 ifadesinin türevi alınırsa

$$\mu_1' = \left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\mu_4' + \frac{k_2}{k_1 k_3}\mu_4''$$

bulunur. Bu değer $\mu_2 = \frac{1}{k_1}\mu_1'$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\mu_2 = \frac{1}{k_1}\left(\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\mu_4' + \frac{k_2}{k_1 k_3}\mu_4''\right)$$

$$= \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\mu_4' + \frac{k_2}{k_1^2 k_3}\mu_4''$$

elde edilir. Bulunan tüm değerler üçüncü denklemde yerine yazılırsa

$$k_2\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\mu_4' + \frac{k_2}{k_1^2 k_3}\mu_4''\right) + \left(-\frac{1}{k_3}\mu_4'\right)' - k_3\mu_4 = 0$$

bu ifadede düzenlenirse

$$k_2\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\mu_4' + \frac{k_2}{k_1^2 k_3}\mu_4''\right) + \left(-\frac{1}{k_3}\right)'\mu_4' + \left(-\frac{1}{k_3}\right)\mu_4'' - k_3\mu_4 = 0$$

$$\left(\frac{k_2^2}{k_1^2 k_3} - \frac{1}{k_3}\right)\mu_4'' + \left[\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' - \left(\frac{1}{k_3}\right)'\right]\mu_4' - k_3\mu_4 = 0$$

$$\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 k_3}\mu_4'' + \left[\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' - \left(\frac{1}{k_3}\right)'\right]\mu_4' - k_3\mu_4 = 0$$

elde edilir. Son bulunan denklem $-\frac{1}{k_3}$ ile çarpılırsa

$$\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 k_3^2}\mu_4'' + \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_3}\right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\right]\mu_4' + \mu_4 = 0$$

denklemi bulunur ki bu ise bize μ_4 göre 2. mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklemi verir. ■

Teorem 6.4 : $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ s yay uzunluğu ile verilen regüler spacelike bir eğri olsun ve $\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\right\}$, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı olsun. Eğer γ spacelike B_1 slant helis ise bu taktirde γ nın konum vektörü

$$\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_1^2 k_3^2}\mu_1'' + \left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)' - \frac{k_2}{k_1 k_3}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)'\right]\mu_1' + \mu_1 = 0$$

(6.9)

denklemini sağlar. Burada μ_1, sabit doğrultulu alınan spacelike sabit vektörün teğetinin katsayı fonksiyonudur**[24]**.

İspat: γ eğrisinin $\vec{B}_1$ birinci binormal vektörü sabit doğrultu ile sabit açı yapıyorsa, γ eğrisi B_1 slant helis olarak adlandırılır. B_1 slant helis tanımından, $\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\right\}$ $\vec{U}$ sabit doğrultulu sabit bir spacelike vektör olmak üzere

$$\left\langle \vec{B}_1, \vec{U} \right\rangle = \left\|\vec{B}_1\right\| \left\|\vec{U}\right\| \sinh\theta = \sinh\theta = sabit$$

(6.10)

yazılabilir. Ayrıca $\vec{U}$ spacelike sabit vektörü

$$\vec{U} = \mu_1 \vec{T} + \mu_2 \vec{N} + \mu_3 \vec{B}_1 + \mu_4 \vec{B}_2$$

(6.11)

şeklinde $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2$ nin lineer birleşimi olarak yazılabilir. (6.11) ifadesini $\vec{T}$ ile iç çarparsak

$$\left\langle \vec{T}, \vec{U} \right\rangle = \mu_1 \underbrace{\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle}_{1} + \mu_2 \underbrace{\left\langle \vec{T}, \vec{N} \right\rangle}_{0} + \mu_3 \underbrace{\left\langle \vec{T}, \vec{B}_1 \right\rangle}_{0} + \mu_4 \underbrace{\left\langle \vec{T}, \vec{B}_2 \right\rangle}_{0}$$

$\mu_1 = \left\langle \vec{T}, \vec{U} \right\rangle$ elde edilir. (7.3) ifadesini $\vec{N}$ ile iç çarparsak

$$\left\langle \vec{N}, \vec{U} \right\rangle = \mu_1 \underbrace{\left\langle \vec{N}, \vec{T} \right\rangle}_{0} + \mu_2 \underbrace{\left\langle \vec{N}, \vec{N} \right\rangle}_{1} + \mu_3 \underbrace{\left\langle \vec{N}, \vec{B}_1 \right\rangle}_{0} + \mu_4 \underbrace{\left\langle \vec{N}, \vec{B}_2 \right\rangle}_{0}$$

$\mu_2 = \left\langle \vec{N}, \vec{U} \right\rangle$ elde edilir. Aynı şekilde (6.11) ifadesini $\vec{B}_1$ ile iç çarparsak

$$\left\langle \vec{B}_1, \vec{U} \right\rangle = \mu_1 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1, \vec{T} \right\rangle}_{0} + \mu_2 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1, \vec{N} \right\rangle}_{0} + \mu_3 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1, \vec{B}_1 \right\rangle}_{-1} + \mu_4 \underbrace{\left\langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \right\rangle}_{0}$$

$\mu_3 = -\left\langle \vec{B}_1, \vec{U} \right\rangle = \sinh\theta = sbt$ elde edilir. Benzer şekilde (6.11) ifadesini $\vec{B}_2$ ile iç çarparsak

$$\left\langle \vec{B}_2, \vec{U} \right\rangle = \mu_1 \underbrace{\left\langle \vec{B}_2, \vec{T} \right\rangle}_{0} + \mu_2 \underbrace{\left\langle \vec{B}_2, \vec{N} \right\rangle}_{0} + \mu_3 \underbrace{\left\langle \vec{B}_2, \vec{B}_1 \right\rangle}_{0} + \mu_4 \underbrace{\left\langle \vec{B}_2, \vec{B}_2 \right\rangle}_{-1}$$

$\mu_4 = -\left\langle \vec{B}_2, \vec{U} \right\rangle$ elde edilir. (6.11) ifadesinin türevi alınırsa $\vec{U}$ sabit vektör olduğundan,

$$\vec{0} = \mu_1'\vec{T} + \mu_1\vec{T}' + \mu_2'\vec{N} + \mu_2\vec{N}' + \mu_3'\vec{B}_1 + \mu_3\vec{B}_1' + \mu_4'\vec{B}_2 + \mu_4\vec{B}_2'$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu denklemde Frenet türev formülleri kullanılırsa,

$$\vec{0} = \mu_1'\vec{T} + \mu_1\left(k_1\vec{N}\right) + \mu_2'\vec{N} + \mu_2\left(-k_1\vec{T} + k_2\vec{B}_1\right) + \mu_3'\vec{B}_1 + \mu_3\left(k_2\vec{N} + k_3\vec{B}_2\right) + \mu_4'\vec{B}_2 + \mu_4\left(-k_3\vec{B}_1\right)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$\left(\mu_1' - k_1\mu_2\right)\vec{T} + \left(k_1\mu_1 + \mu_2' + k_2\mu_3\right)\vec{N} + \left(k_2\mu_2 + \mu_3' - k_3\mu_4\right)\vec{B}_1 + \left(k_3\mu_3 + \mu_4'\right)\vec{B}_2 = 0 \qquad (6.12)$$

bulunur. Burada $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}_1, \vec{B}_2$ sıfırdan farklı olduklarından

$$\begin{aligned}
&\mu_1' - k_1\mu_2 = 0 \\
&k_1\mu_1 + \mu_2' + k_2\mu_3 = 0 \\
&k_2\mu_2 + \mu_3' - k_3\mu_4 = 0 \\
&k_3\mu_3 + \mu_4' = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. μ_3, (6.10) eşitliğinden dolayı sabit olduğundan $\mu_3' = 0$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki denklem sistemi

$$\mu_1' - k_1\mu_2 = 0$$
$$k_1\mu_1 + \mu_2' + k_2\mu_3 = 0$$
$$k_2\mu_2 - k_3\mu_4 = 0$$
$$k_3\mu_3 + \mu_4' = 0$$

(6.13)

halini alır. Bu denklem sistemindeki birinci denklemden,

$$\mu_2 = \frac{1}{k_1}\mu_1' \Rightarrow \mu_2' = \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \frac{1}{k_1}\mu_1'' , \tag{6.14}$$

üçüncü denklemden,

$$\mu_4 = \frac{k_2}{k_3}\mu_2 \Rightarrow \mu_4 = \frac{k_2}{k_1 k_3}\mu_1' ,$$

(6.15)

dördüncü denklemden,

$$\mu_3 = -\frac{1}{k_3}\mu_4' \Rightarrow \mu_3 = -\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \mu_1' - \frac{k_2}{k_1 k_3^2}\mu_1''$$

(6.16)

elde edilir. (6.14), (6.15) ve (6.16) ifadeleri (6.13) denklem sisteminin ikinci denkleminde yazılırsa,

$$k_1\mu_1 + \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \frac{1}{k_1}\mu_1'' + k_2\left(-\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \mu_1' - \frac{k_2}{k_1 k_3^2}\mu_1''\right) = 0$$

$$k_1\mu_1 + \left(\frac{1}{k_1}\right)' \mu_1' + \frac{1}{k_1}\mu_1'' - \frac{k_2}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' \mu_1' - \frac{k_2^2}{k_1 k_3^2}\mu_1'' = 0$$

$$\left(\frac{1}{k_1} - \frac{k_2^2}{k_1 k_3^2}\right)\mu_1'' + \left[-\frac{k_2}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1 k_3}\right)' + \left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\mu_1' + k_1\mu_1 = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem $\frac{1}{k_1}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{1}{k_1^2}-\frac{k_2^2}{k_1^2k_3^2}\right)\mu_1''+\left[-\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)'+\frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\mu_1'+\mu_1=0$$

$$\left(\frac{k_3^2-k_2^2}{k_1^2k_3^2}\right)\mu_1''+\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)'-\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)'\right]\mu_1'+\mu_1=0$$

bulunur.■

Sonuç 6.5 : (6.4) denklemi $\mathbb{R}_2^4$ de μ_1 katsayı fonksiyonuna göre spacelike B_1 slant helisi karakterize eden 2. mertebeden, 1. dereceden, homojen, değişken katsayılı, lineer diferansiyel denklemdir. Spacelike B_1 slant helis μ_2 ve μ_4 katsayı fonksiyonlarına göre de karakterize edilebilir. Fakat μ_3 sabit olduğundan μ_3 ye göre bir karakterizasyon verilemez.

Teorem 6.6 : $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ s yay uzunluğu ile verilen regüler spacelike bir eğri olsun ve $\{\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}_1(s),\vec{B}_2(s)\}$, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki hareketli Frenet çatısı olsun. Eğer γ spacelike B_1 slant helis ise bu taktirde γ nın konum vektörü

$$\frac{k_2^2-k_3^2}{k_1k_3^2}\mu_2''+\left[\left(\frac{k_2^2}{k_1k_3^2}\right)'+\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]\mu_2'+\left\{\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\right]'-k_1\right\}\mu_2=0$$

$$\frac{k_2^2-k_3^2}{k_1k_2k_3}\mu_4''+\left[\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)'-\left(\frac{k_3}{k_1k_2}\right)'-\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]\mu_4'+\left\{\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]'+\frac{k_1k_3}{k_2}\right\}\mu_4=0$$

denklemini sağlar. Burada μ_2 ve μ_4, sabit doğrultulu alınan spacelike sabit vektörünün sırasıyla $\vec{N}$ asli normal vektörünün ve $\vec{B}_2$ ikinci binormal vektörünün katsayı fonksiyonlarıdır**[24]**.

İspat: Teorem 6.4 in ispatında izlenen yol ile

$$\mu_1' - k_1\mu_2 = 0$$
$$k_1\mu_1 + \mu_2' + k_2\mu_3 = 0$$
$$k_2\mu_2 - k_3\mu_4 = 0$$
$$k_3\mu_3 + \mu_4' = 0$$

aynı denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin;

üçüncü denkleminden $\mu_4 = \frac{k_2}{k_3}\mu_2 \Rightarrow \mu_4' = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\mu_2 + \frac{k_2}{k_3}\mu_2'$,

dördüncü denklemden $\mu_3 = -\frac{1}{k_3}\mu_4' \Rightarrow \mu_3 = -\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\mu_2 - \frac{k_2}{k_3^2}\mu_2'$,

ikinci denklemden

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= -\frac{1}{k_1}\mu_2' - \frac{k_2}{k_1}\mu_3 \\
&= -\frac{1}{k_1}\mu_2' - \frac{k_2}{k_1}\left[-\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\mu_2 - \frac{k_2}{k_3^2}\mu_2'\right] \\
&= -\frac{1}{k_1}\mu_2' + \frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\mu_2 + \frac{k_2^2}{k_1k_3^2}\mu_2'
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler birinci denklemde yazılırsa,

$$\left[-\frac{1}{k_1}\mu_2' + \frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\mu_2 + \frac{k_2^2}{k_1k_3^2}\mu_2'\right]' - k_1\mu_2 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{k_1}\right)'\mu_2' - \frac{1}{k_1}\mu_2'' + \left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\right]'\mu_2 + \frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\mu_2' + \left(\frac{k_2^2}{k_1k_3^2}\right)'\mu_2' + \frac{k_2^2}{k_1k_3^2}\mu_2'' - k_1\mu_2 = 0$$

$$\left(\frac{k_2^2}{k_1k_3^2} - \frac{1}{k_1}\right)\mu_2'' + \left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' - \left(\frac{1}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_2^2}{k_1k_3^2}\right)'\right]\mu_2' + \left\{\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\right]' - k_1\right\}\mu_2 = 0$$

$$\left(\frac{k_2^2 - k_3^2}{k_1k_3^2}\right)\mu_2'' + \left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' - \left(\frac{1}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_2^2}{k_1k_3^2}\right)'\right]\mu_2' + \left\{\left[\frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_2}{k_3}\right)'\right]' - k_1\right\}\mu_2 = 0$$

bulunur. bu ise bize μ_2 ye göre diferansiyel denklemi verir. Şimdi μ_4 e göre diferansiyel denklemi bulalım. Teorem 6.4 in ispatındaki yol ile

$$\begin{aligned}
&\mu_1' - k_1\mu_2 = 0 \\
&k_1\mu_1 + \mu_2' + k_2\mu_3 = 0 \\
&k_2\mu_2 - k_3\mu_4 = 0 \\
&k_3\mu_3 + \mu_4' = 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin;

dördüncü denkleminden $\mu_3 = -\dfrac{1}{k_3}\mu_4'$,

üçüncü denkleminden $\mu_2 = \dfrac{k_3}{k_2}\mu_4 \Rightarrow \mu_2' = \left(\dfrac{k_3}{k_2}\right)'\mu_4 + \dfrac{k_3}{k_2}\mu_4'$,

ikinci denkleminden

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= -\frac{1}{k_1}\mu_2' - \frac{k_2}{k_1}\mu_3 \\
&= -\frac{1}{k_1}\left[\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\mu_4 + \frac{k_3}{k_2}\mu_4'\right] - \frac{k_2}{k_1}\left[-\frac{1}{k_3}\mu_4'\right] \\
&= -\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\mu_4 - \frac{k_3}{k_1k_2}\mu_4' + \frac{k_2}{k_1k_3}\mu_4' \\
&= \left(\frac{k_2}{k_1k_3} - \frac{k_3}{k_1k_2}\right)\mu_4' - \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\mu_4
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler birinci denklemde yerine yazılırsa

$$\left[\left(\frac{k_2}{k_1k_3} - \frac{k_3}{k_1k_2}\right)\mu_4' - \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\mu_4\right]' - \frac{k_1k_3}{k_2}\mu_4 = 0$$

$$\left(\frac{k_2}{k_1k_3} - \frac{k_3}{k_1k_2}\right)\mu_4'' + \left[\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)' - \left(\frac{k_3}{k_1k_2}\right)' - \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]\mu_4' - \left\{\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]' + \frac{k_1k_3}{k_2}\right\}\mu_4 = 0$$

$$\left(\frac{k_2^2 - k_3^2}{k_1k_2k_3}\right)\mu_4'' + \left[\left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)' - \left(\frac{k_3}{k_1k_2}\right)' - \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]\mu_4' - \left\{\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]' + \frac{k_1k_3}{k_2}\right\}\mu_4 = 0$$

elde edilir. ■

8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada $\mathbb{R}_2^4$ Minkowski 4-uzayında space-like helis eğrileri ve B_2-Slant helis eğrileri için diferansiyel denklem ve integral karakterizasyonları incelenmiştir. Ayrıca teğet birim vektör alanına göre diferansiyel denklem verilerek, bazı özel eğrilerin karakterizasyonları verilmiştir. Son olarak slant ve B_1- slant helislerin alınan spacelike sabit doğrultulu birim vektörünün katsayıları cinsinden diferansiyel denklem karakterizasyonları verilmiştir. Bu çalışma boyunca elde edilen sonuçlar göz önüne alınarak söz konusu helis, B_1- slant, B_2-Slant, bazı özel eğriler, farklı uzaylar üzerinde de incelenebilir ve geometrik yapısı ortaya konabilir.

KAYNAKLAR

[1].Fernandez, A., Gimenez, A. and Lucaz, P., Null helices in Lorentzian space forms, Int. J. Mod. Phys. A. 2001, 16, 4845-4863.

[2]. Magden, A., On the Curves of Constant Slope, YTU Fen Bilimleri Dergisi. 1993, 4, 103-109.

[3]. Ali, A. T. and Lopez, R., Timelike B_2- slant Helices in Minkowski space E_1^4. Archivum Mathematicum (BRNO). 2010,Tomus 46, 39-46.

[4].Pei D. and Sano T., The Focal Developable and The Binormal Indicatrix of a Nonlightlike curve in Minkowski 3-Space, (English Summary) Tokyo J. Math.,2000, 23, 211-225.

[5]. Camci, C., Ilarslan, K., Kula, L. and Hacisalihoğlu, H.H., Harmonic Curvatures and Generalized Helices in E^n , Chaos, Solitions and Fractals, 2009, 40, 2590-2596.

[6]. Kocayigit, H. and Onder, M.,Timelike Curves of Constant Slope in Minkowski Space E_1^4, BU/JST. 2007, 1, 311-318.

[7]. Kocayigit, H., Onder, M. and Kazaz, M., Spacelike Helices in Minkowski 4- Space E_1^4, Anna Del Universita Di Ferrera. 2010, 56(2), 335-343.

[8].Lopez R., Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. İnternational Electronic Journal of Geometry. 2014, 7(1), 44-107.

[9]. Izumiya S., Takeuchi N., Generic properties of helices and Bertrand Curves, J.geom., 2002, 97-109.

[10]. Yilmaz, S. and Turgut, M., On the Characterizations of Inclined Curves in Minkowski Spacetime E_1^4, Int. Math. Forum. 2008, 16(3), 783-792.

[11]. Keles, S., Perktas S.Y. and Kilic, E., Biharmonic Curves in LP-Sasakian Manifolds , Bulletin of the Malasyian Mathematical Society. 2010, 33(2), 325-344.

[12]. Akgun M. A., Some Characterizations For Spacelike Inclined Curves, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 2019, 68(2), 1576-1585.

[13]. O'neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, Revised 2nd Edition, Newyork. 1996.

[14]. Duggal, K.L.Space time manifolds and cotact structures. Internat. J. Math. Math. Sci. 1990,13; 545-554

[15]. Sabuncuoğlu, A. Diferensiyel Geometri, Ankara, 2004.

[16]. Kreyzig, E. Differantial Geometry, Univ. of Toronto Press,Toronto,1959.

[17].Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, 1998.

[18] T.A. Ahmad, R. Lopez, Slant helices in Euclidean 4-space E^4, arXiv:0901-3324, (2009).

[19] Y. Aminov, Thegeometry of submanifolds, Gordon and Breach Science Publishers, 2001.

[20] K. Arslan, B. Bulca, G. Ozturk, A Characterization of Involutes and Evolutes of a Given Curve in E^n;KYUNGPOOK Math. J. 58 (2018) 117-135.

[21] F. Klein, S. Lie, Uber diejenigen ebenenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vartauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, Math. Ann. 4 (1871) 50-84.

[22] J. Monterde, Curves With Constant Curvature Ratios, Bol. Soc. Mat. Mex.13 (2007), 177-186.

[23] G. Ozturk, K. Arslan, H.H. Hacisalihoglu, A characterization of ccr-curves in $\square^m$, 240 , Proc. Estonian Acad. Sci. 57(4) (2008) 217-224.

[24] T. Ağırman, H. Kocayiğit, Some Special Spacelike Curves in $\square^4_2$, Facta universitatis series math. and inform.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Asya KEÇECİ
Doğum Yeri ve Yılı	:
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	:

Eğitim Durumu

Lise	: Şehit Kaya Aldoğan Lisesi, 2009
Lisans	: Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013
Yüksek Lisans	: Manisa Celal Bayar Üniversitesi, 2017

Mesleki Deneyim

Kurum bilgisi	Çağdaş Bilim Akademi	2018-2019
Kurum bilgisi	Kuşadası Belediyesi	2019-…….. (halen)