

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Mehmet Emin ATEŞ
DANIŞMAN : Prof. Dr. Musa ÇAKIR

VAN-2021

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet Emin ATEŞ

VAN-2021

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Musa ÇAKIR danışmanlığında, Mehmet Emin ATEŞ tarafından sunulan” **LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLER**” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 08/ 07 / 2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:Prof. Dr. Musa ÇAKIR	İmza:
Üye	:Prof. Dr. İlhame AMİRALİ	İmza:
Üye	:Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR	İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20 tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

...../...../20

Prof. Dr. Harun AKKUŞ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet Emin ATEŞ

ÖZET

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLER

ATEŞ, Mehmet Emin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Musa ÇAKIR
Temmuz 2021, 61 sayfa

Bu tez lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri ile ilgilidir. Tez 9 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konu ile ilgili olarak tarihsel gelişim süreci anlatılmıştır. İkinci bölümde konu ile ilgili literatür de yapılmış olan çalışmalara değinilmiştir. Üçüncü bölümde tezde kullanılacak olan materyal ve yöntemler belirtilmiştir. Dördüncü bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılmak üzere temel tanım ve teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde integral denklemlerin sınıflandırılması gösterilmiştir. Altıncı bölümde integral ve integro-diferansiyel denklemlerin uygulama alanlarına örnekler verilmiştir. Yedinci bölümde lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için birleştirilmiş Laplace dönüşümü-Adomian ayrıştırma yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi sunulmuştur. Sekizinci bölümde birinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemi için düzgün bir şebekede, kalan terimi interpolasyon kuadratür formülleri ve üstel baz fonksiyonu içeren integral özdeşliklerden meydana gelen bir yeni sonlu fark şeması verilmiştir. Metodun yakınsaklığı ayrık maksimum normda ispatlanmıştır. Ayrıca oluşturulan metodu destekleyen örnekler verilmiş ve nümerik sonuçlar tablolar halinde sunulmuştur. Son bölüm ise tez çalışmasının değerlendirildiği tartışma ve sonuç kısmından oluşmaktadır.

Anahtar kelimeler: Başlangıç değer problemi, Birleştirilmiş Laplace dönüşümü-Adomian ayrıştırma yöntemi, Hata değerlendirmesi, Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem, Sonlu fark şeması, Varyasyonel iterasyon yöntemi.

ABSTRACT

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS FOR NONLINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

ATEŞ, Mehmet Emin
M.Sc. Thesis, Department of Mathematic
Supervisor : Prof. Dr. Musa ÇAKIR
July 2021, 61 pages

This thesis deals with analytical and numerical solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations. The thesis consists of 9 chapters.

In the first chapter, the historical development process is explained in relation to the subject. In the second chapter, the studies on the subject in the literature are mentioned. In the third chapter, the materials and methods to be used in the thesis are specified. In the fourth chapter, basic definitions and theorems are given to be used in the following parts of the thesis. In the fifth chapter, classification of integral equations is shown. In the sixth chapter, examples of application areas of integral and integro-differential equations are given. In the seventh chapter, the combined Laplace transform-Adomian decomposition method and variational iteration method for analytical solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations are presented. In the eighth chapter, a new finite difference scheme consisting of integral identities containing the residual term interpolation quadrature formulas and exponential base function is given for the initial value problem containing the first order nonlinear Volterra integro-differential equation. The convergence of the method is proven at the discrete maximum norm. In addition, examples supporting the created method are given and numerical results are presented in tables. The last chapter consists of the discussion and conclusion part where the thesis work is evaluated.

Keywords: Error estimate, Finite difference scheme, Initial value problem, Nonlinear Volterra integro-differential equation, The combined Laplace transform-Adomian decomposition method, Variational iteration method.



ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, pandemi sürecinin o zor zamanlarında dahi, hastalık demeden, tatil demeden, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Musa ÇAKIR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca tez süresi boyunca göstermiş oldukları manevi desteklerinden ve yardımlarından dolayı lisans ve yüksek lisans hocalarım başta Sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ' a , Sayın Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN' e ve diğer değerli hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım.

2021

Mehmet Emin ATEŞ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
EKLER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	11
4.1. Lipschitz Şartı.....	11
4.2. İntegral Denklemlerin Varlığı ve Tekliği	11
4.3. Leibnitz Kuralı	12
4.4. Çok Katlı İntegrallerin Tek katlı İntegrallere Dönüştürülmesi	12
4.5. Türevli Fonksiyonların İntegrali	12
4.6. Laplace Dönüşümü	13
4.7. Ters Laplace Dönüşümü	13
4.8. Türevli Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri	14
4.9. Konvolüsyon Teoremi	14
4.10. Gronwall İntegral Eşitsizliği	14
4.11. Kuadratür Formulleri	15
4.12. Dikdörtgen Metodu.....	15
4.13. Maksimum Prensibi	16
5. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	17
5.1. Yapılarına Göre	17
5.1.1. I . Çeşit integral denklemler	17
5.1.2. II. Çeşit integral denklemler	17
5.1.3. III. Çeşit integral denklemler	18
5.2. İntegrasyon Limitlerine Göre	18

	Sayfa
5.2.1. Fredholm integral denklemleri	18
5.2.2. Volterra integral denklemleri	18
5.2.3. Singüler integral denklemler	18
5.3. Volterra – Fredholm İntegral Denklemleri	19
5.4. Lineer İntegral Denklemler	19
5.5. Homojen İntegral Denklemler.....	19
5.6. İntegro-Diferansiyel Denklemler.....	20
6. İNTEGRAL DENKLEMLERİN BAZI UYGULAMA ALANLARI	21
6.1. Volterra’ nın Nüfus Değişimi Modeli.....	21
6.2. Karaciğer Bölgelerinin Kendi Kendini Tamamlaması Modeli	22
6.3. Elektrik Devreleri Modeli	24
6.4. Reaktör Dinamiği Modeli	25
6.5. Birlikte Yaşayan Biyolojik Türleri Tanımlayan Model.....	26
6.6. Bir Telin Burulması Modeli	26
7. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK YÖNTEMLER.....	27
7.1. Birleştirilmiş Laplace Dönüşümü - Adomian Ayrıştırma Yöntemi	27
7.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi	34
8. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BİR DÜZGÜN NÜMERİK YAKLAŞIM	41
8.1. Giriş	41
8.2. Kesin Çözümün Özellikleri.....	41
8.3. Fark Şemasının Kurulması.....	43
8.4. Kararlılık Sınırı ve Yakınsama.....	46
8.5. Algoritma ve Nümerik Sonuçlar	48
9. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	53
KAYNAKLAR.....	55
EKLER.....	59
ÖZ GEÇMİŞ.....	61

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 8.1. Örnek 8.5.1 için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları.....	49
Çizelge 8.2. Örnek 8.5.2' nin N=128 için hesaplama sonuçları.....	51
Çizelge 8.3. Örnek 8.5.2 için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları.....	52





ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 8.1. Örnek 8.5.1' in $N=128$ için hata yaklaşımları.....	50
Şekil 8.2. Örnek 8.5.2 için u_i ve y_i değerlerinin karşılaştırması.	51
Şekil 8.3. Örnek 8.5.2' nin $N=32$ için hata yaklaşımları.....	52





SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

$$\frac{dy}{dx}$$

y' nin x' e göre birinci mertebeden türevi

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

y' nin x' e n. mertebeden türevi

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

y' nin x' e göre kısmi türevi

$$\int$$

İntegral

$$\omega$$

Şebeke

$$\Sigma$$

Toplam sembolü

$$\|A\|$$

A' nin normu

$$\|A\|_{\infty}$$

A' nin maksimum normu

$$K(x,t)$$

Çekirdek

$$e^N$$

Hata yaklaşımı

$$p^N$$

Yakınsama oranı

$$L^{-1}(\cdot)$$

İntegral operatörü

$$\lambda$$

Lagrange çarpanı



EKLER DİZİNİ

	Sayfa
Ek 1. Örnek 8.5.1 ve Örnek 8.5.2 için MATLAB Programı.....	59





1. GİRİŞ

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha fazla integral işaretinin altında görülebildiği denklemlerdir (Kanwal, 1997). Genel bir integral denklem formunu

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt,$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Burada $g(x)$, $h(x)$ integrasyon limitleri; λ sabit bir parametre, $\varphi(x)$, $f(x)$ bilinen fonksiyonlar; $K(x,t)$ ' de bilinen bir fonksiyon ayrıca çekirdekte denilmektedir; $u(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur.

İntegral denklemler konusunda ilk çalışmalar 18. yüzyılın sonları ile 19. yüzyılın başlarında rastlanmaktadır. Başlarda düzensiz ve gelişigüzel çalışmalar olmuşsa da sonraları konu üzerine disiplinli ve ciddi bir şekilde uğraşılmaya başlanmıştır ve bu da integral denklemlerin birçok uygulama alanına yol açmıştır. J. Fourier (1768-1830) integral denklemler teorisinin başlatıcısıdır. Laplace, Poisson, Liouville gibi bilim insanları da bazı özel tip integral denklemleri incelemişlerse de, integral denklemler ilk olarak Abel' in çalışmalarında görülmektedir. Fakat integral denklem ifadesine Du Bois Reymond' un 1888' de yaptığı bir çalışmada rastlanmaktadır. Devam eden yıllarda Volterra, Fredholm, Hilbert çalışmalarını sunmuşlar ve ilerleyen süreçte Levi Civita, Lalescu, Myler, Tonelli, Tamarkina ve bunlar gibi bilim adamları da integral denklemler üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır (Bocher, 1909; Kanar, 2008).

İntegral denklemler fen ve mühendislik bilimlerinin yanı sıra teknik alanlardaki uygulamalarda yaygın olarak ortaya çıkmaktadır. Özellikle elastik teorisi, biomekanik, elektromagnetik, akışkanlar dinamiği, ısı transferi, popülasyon dinamiği, enfeksiyon hastalıklarının yayılması gibi fizik ve biyoloji alanlarındaki modellerine sıkça rastlanmaktadır. Bloom (1980), elektrik devreleri; Bass ve ark. (1986), tıp; Forbes ve ark. (1997), manyetik rezonanslar; Jerri (1999), popülasyon dinamiği; Rahman (2007), salınım hareketi gibi alanlarda çalışmaları bulunmaktadır (Çimen, 2020).

İtalyan bilim adamı Vito Volterra 1896 yılında integral denklemler üzerine ciddi çalışmalar yapmaya başladıktan sonra 1930 yılında nüfus değişimlerini gözlemlerken

integro-diferansiyel denklem diye adlandırdığı yeni bir denklem kurmuştur. Bu denklemde hem diferansiyel hem de integral operatör bir arada ortaya çıkmıştır. Bilim adamları ve mühendisler integro-diferansiyel denklemlerle ısı ve kütle difüzyon süreçlerinde araştırma çalışmaları, elektrik devre problemleri, nötron difüzyonu, biyolojik türlerde artan ve azalan üretim oranları, elektromanyetik teori ve dağınık dalgaları, okyanus sirkülasyonları gibi alanlarda çalışmalar sunmuşlardır (Rahman, 2007; Wazwaz, 2011).

Lubich (1983), Brunner (1984), Ford ve ark. (1998), Zhang ve ark. (2000), Edwards (2003), Zhang ve Vandelwalle (2006), Huang (2007) gibi birçok bilim adamı da integro-diferansiyel denklemlerle ilgilenmişlerdir.

Genel integral denkleminde integral içerisinde bulunan fonksiyonun derecesi 1 veya lineer durumda ise lineer, 1' den büyük veya lineer durumda değilse lineer olmayan integral denklemler olarak adlandırılmaktadır. Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler Volterra tarafından sonraları ortaya atılmıştır. Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin popülasyon dinamikleri, salgın hastalıkların yayılması, yarı iletkenlik gibi birçok bilim alanında ortaya çıktığı görülmektedir (Wazwaz, 2011).

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde genellikle analitik yöntemler kullanılmakla birlikte bu yöntemler bazı matematik modellerde yeterli olmamakta, çözüme ulaştırmamaktadır. Tam çözüme ulaşılmadığı durumlarda ise değişik nümerik yöntemlerle hata payı en az yaklaşık çözümlerle ilgilenilmeye başlanmıştır. Babolin ve ark. (2009), Direkt metodu ile; Marzban ve Hoseini (2012), Hiybrid metodu ile; Berenguer ve ark. (2010), Sabit nokta metodu ile ve bunlar gibi birçok bilim insanı da lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerde çalışmalarda bulunmuşlardır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Matematik literatüründe gerek lineer gerekse de lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri ile ilgili çalışmalardan bir kısmını aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Arqub ve ark. (2012),

$$u'(x) + f(x)N(x, u(x)) + \int_a^b k_1(x, t)G_1(u(t))dt + \int_a^x k_2(x, t)G_2(u(t))dt = g(x)$$

$$u(a) = \alpha, \quad a \leq x, \quad t \leq b.$$

Lineer olmayan Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denkleminin nümerik çözümü için Hilbert uzayı yöntemini kullandılar.

Çimen ve Yatar (2020),

$$Lu := u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t-r) = f(t) + \int_{t-r}^t K(t, s)u(s)ds, \quad t \in I$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0$$

Gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için yeni bir nümerik metod sunmuşlardır. Yöntem sonlu fark şemasına, kalan terimlerde integral formda kuadratur formüllere dayanmaktadır.

Zhang ve ark. (1998),

$$y'(t) = f(t, y(t)) + \int_0^t K(t, s, y(s))ds \quad t \in I = [0, T],$$

$$y(t) = 0.$$

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemleri için Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemini hızlandırmak için iki hata düzeltme şeması sunuyorlar.

Brunner (1989),

$$y'(t) = f(t, y(t)) + \int_{-\infty}^t K(t, s, y(t), y(s))ds \quad t \in I = [0, T],$$

$$y'(t) = \theta(t), \quad -\infty < t \leq 0.$$

Lineer olmayan sonsuz gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemler için Eşdizim yöntemini sunmuştur.

Khanlari ve Paripour (2018),

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt,$$

$$u(a) = \alpha_0, \quad u^{(1)}(a) = \alpha_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}.$$

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemleri adomian polinomları ile birleşik homotopi analizi dönüştürme yöntemini kullanarak çözmüşlerdir.

Ford ve ark. (1998),

$$y'(t) = - \int_0^t K(t-s, s)g(y(s))ds, \quad t \in R^+$$

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerde θ yöntemlerinin kararlılığı ve sayısal kararlılığı üzerine çalışmışlardır.

Vanani ve Aminataei (2011),

$$u'(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [0, b].$$

Volterra integro-diferansiyel denklemleri için nümerik çözümler sunmuşlar, lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için de bu nümerik çözümlerin uygulanabileceğini göstermişlerdir.

Valdes (2001),

$$x'' + a(t)f(t, x, x')x' + g(t, x') + h(x) = \int_0^t C(t, s)x'(s)ds$$

İkinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alıp çözümlerin sınırlılığını ve varlığını incelemişlerdir.

Berenguer ve ark. (2010),

$$y'(t) = f(t, y(t)) + \int_0^t K(t, s, y(s))ds, \quad t \in [0, 1],$$

$$y(0) = y_0.$$

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümü için sabit nokta yaklaşımını izleyerek bir fonksiyonlar dizisi tanımlamışlardır.

Birjandi ve ark. (2018),

$$u'(t) = f(t) + \int_0^t K(t, s)G(u(s))ds, \quad t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için spektral parametrik yineleme yönteminin bir uygulamasını sunmuşlardır.

Hashim (2005),

$$y^{(iv)}(x) = f(x) + \gamma y(x) + \int_0^x [g(x)y(x) + h(x)F(y(x))] dx, \quad x \in (a, b),$$

$$y(a) = \alpha_0, \quad y(b) = \beta_0, \quad y''(a) = \alpha_2, \quad y''(b) = \beta_2.$$

Dördüncü mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için adomian ayrıştırma metodunu sunmuşlardır.

Amiraliyev ve ark. (2018),

$$Lu := \varepsilon u' + a(t)u + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I = (0, T],$$

$$u(t) = \varphi(t).$$

Gecikmeli birinci mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi sonlu fark çözümü ile ilgilenmişlerdir. Yöntem üstel ve integral fonksiyonlara, kalan terimlerde kuadratür formüllere dayanmaktadır.

Çimen (2018),

$$Lu := u'(t) + a(t)u(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds, \quad t \in I = (0, T],$$

$$u(0) = A.$$

Lineer birinci mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemin çözümü için integral özdeşliklerden oluşan sonlu bir fark metodu sunmuştur.

Saeedi ve ark. (2013),

$$Dy(x) + \int_0^x K(x,t,y(t))dt = f(x), \quad x \in [0, b],$$

$$y^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için Tau metodunu sunmuşlardır.

Sakran (2019),

$$y'(x) = g(x, y(x)) + \int_0^x (x-s)^{-\beta} K(x,s,y'(s)) ds, \quad x \in I, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$y(0) = y_0.$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini için Chebyshev polinomlarında bilinmeyen fonksiyonun sonlu bir toplamını temel alan nümerik bir şema sunmuştur.

Nashine ve ark. (2013),

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u^n(t)dt,$$

Şeklinde lineer ve lineer olmayan Volterra integral ve integro-diferansiyel denklemleri için dögüsel (Φ, Ψ, θ) – kontraksiyon yöntemini kullanmışlardır.

Şevgin (2014),

$$Lu := \varepsilon u'(t) + f(t, u(t)) + \int_0^t K(t, s, u(s))ds = 0, \quad t \in I = [0, T],$$

$$u(0) = A.$$

Singüler pertürbe lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin ayrık maksimum normda sonlu fark şemasının yakınsama özelliklerini incelemiştir.

Mbroh ve ark. (2020),

$$L_\varepsilon u(t) = \int_0^t K(t, s)u(s)ds + \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) = f(t), \quad t \in I = (0, T],$$

$$u(0) = \mu.$$

Singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemi için standart olmayan sonlu fark şeması kurmuşlardır.

Angelih (2020),

$$\varphi(x) = g(x) + f(x, \varphi(x)) \int_0^x V(x, t, \varphi(x))dt, \quad x \in I = [0, 1]$$

Lineer ve lineer olmayan ikinci dereceden Volterra integral denklemleri çözmek için ortalama değer teoreminin güçlü bir versiyonuna dayanan azalan ve negatif olmayan kapalı form çözümleri uygulamışlardır.

Çakır (2020),

$$Lu := u'(t) + f(t, u(t)) + \int_0^t K(t, s, u(s))ds = 0, \quad t \in I = (0, T],$$

$$u(0) = A.$$

Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi çözmek için yeni bir sonlu fark metodu vermişlerdir. Yöntem sonlu fark şemasına, kalan terimlerde integral formda kuadratür formüllere dayanmaktadır.

Ayrıca,

Parand ve Delkhosh (2018), lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri için sıralama yöntemi ile denklem sistemini indirgeyerek ulaşmaya çalıştılar.

Tunç (2015), lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığını, düzgün kararlılığını, sınırlılığını, yakınsamasını göstermiştir.

Aziz ve Islam (2012), ikinci tür lineer olmayan Volterra integral denklemlerin nümerik çözümleri için Haar dalgacıklarına dayalı iki yeni algoritma sunmuşlardır.

Horvat-Marc ve Precup (2000), sıralı banach uzayındaki doğrusal olmayan integral denklemlere Krosnoselski' nin sıkıştırma-genişleme sabit nokta teoreminin uygulanabilirliğini göstermişlerdir.

Tahmasbi ve Fard (2008), ikinci türden lineer olmayan Volterra integral denklemlerin kuvvet serisine göre nümerik çözüm sunmuşlardır.

Wazwaz (2011), lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri için laplace dönüşüm metodu, adomian ayrıştırma metodu, varyasyonel iterasyon metodu, seri çözüm metodu gibi metotları uygulamıştır.

Sweilam (2006), He tarafından önerilen varyasyonel iterasyon yöntemini hem lineer hem de lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlere uygulamıştır.

Amin ve ark. (2020), lineer olmayan gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Eşdizim yöntemini kullanmıştır.

Al-Khaled ve Allan (2005), adomian ayrıştırma yönteminin değiştirilmiş formunu lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerine uygulanabilirliğini göstermişlerdir.

Çerdik-Yaslan ve Akyüz-Daşcıoğlu (2006), lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için Chebyshev sıralama yöntemini geliştirip uygulamasını göstermişlerdir.

Tez konusuyla ilgili literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Burada bunların ayrıntısı verilmeyecek olup, konuyla ilgili verilmiş olan kaynaklara bakılabilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tez konusuyla ilgili literatür için MathScinet, Springer, Sciencedirect vb. veri tabanlarında inceleme yapıldığında, lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri ile ilgili çok sayıda bilimsel niteliğe sahip kitap ve makaleye rastlanmaktadır. Bu tezde lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik bazı analitik ve nümerik yöntemlerin gösterilmesi amaçlanmaktadır. Bu tez çalışmasında materyal olarak tezin kaynaklar kısmında belirtilen kitap, dergi ve makaleler dikkate alınmakta, ayrıca yöntem olarak Burton (2005), Rahman (2007), Wazwaz (2011), Amirali (2018) gibi temel kaynaklarda mevcut lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerine yönelik sunulan bazı metodlar kullanılmaktadır.



4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılma gerekliliği olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

4.1. Lipschitz Şartı

$D: |t - t_0| \leq h, |u - u_0| \leq b$ bölgesi verilsin ve $\frac{\partial g}{\partial u}$ bu bölgede sürekli olsun.

Bu takdirde bir K pozitif sabiti vardır. Öyle ki $\forall (t, u_1), (t, u_2) \in D$ için

$$|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2| \text{ olur.}$$

g , fonksiyonu $\forall (t, u_1), (t, u_2) \in D$ için

$$|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa g fonksiyonu D bölgesinde Lipschitz şartını sağlar denir (Aksoy, 2011).

4.2. İntegral Denklemlerin Varlığı ve Tekliği

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^t K(t, s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a], \quad (4.2.1)$$

denklemini ele alalım. Burada $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon $f(t)$ bilinen fonksiyon ve $K(t, s, x(s))$ fonksiyonu da integralin çekirdeği olmak üzere eğer,

1. $f(t)$, $[t_0, t_0 + a]$, $a > 0$ aralığında sürekli bir fonksiyon

2. $K(t, s, x)$, $\Delta: t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + a, |x - f(t)| \leq b, b \geq 0$ aralığında

sürekli bir fonksiyon

3. $K(t, s, x)$, Δ bölgesinde Lipschitz şartını yani

$$|K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq L|x - y|,$$

sağlıyor.

Bu şartlar sağlanıyorsa

$M = \sup |K(t, s, x)|, (t, s, x) \in \Delta$ olmak üzere

$$\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

için tanımlanan (4.2.1) denkleminin bir tek sürekli çözümü vardır (Linz, 1985; Burton, 2005).

4.3. Leibnitz Kuralı

$f(x, t)$ bir $D = \{(x, t) : k \leq x \leq l, m \leq t \leq n\}$ bölgesinde tanımlı ve $g(x, t)$, $h(x, t)$ fonksiyonları da $k \leq x \leq l$ aralığında tanımlanmış olsunlar,

$$T(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t) dt,$$

alalım. Buradan

$$T'(x) = f[x, h(x)]h'(x) - f[x, g(x)]g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt.$$

(Jerri, 1999).

4.4. Çok Katlı İntegrallerin Tek katlı İntegrallere Dönüştürülmesi

$n > 0$, a -sabit ve $x = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ alınmak üzere

$$\int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_n} u(t) dt \dots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt,$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde

$$\int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_n} (x-t) u(t) dt dx_n \dots dx_2 = \frac{1}{(n)!} \int_a^x (x-t)^n u(t) dt,$$

elde edilir (Wazwaz, 2011).

4.5. Türevli Fonksiyonların İntegrali

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0),$$

$$\int_0^x \int_0^{x_1} f''(t) dt dx_1 = f(x) - x \cdot f'(0) - f(0),$$

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f'''(t) dt dx_2 dx_1 = f(x) - \frac{1}{2!} x^2 f''(0) - x f'(0) - f(0),$$

$$\vdots$$

şeklinde devam eder.

4.6. Laplace Dönüşümü

f , $t > 0$ zamanına bağlı olarak değişen bir fonksiyon ve s bir parametre olsun, $f(t)$ ' nin Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

integrali ile tanımlanır. Eğer integral yakınsak ise yani

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-st} f(t) dt,$$

limiti sonlu bir sayı ise Laplace dönüşümü tanımlıdır eğer değilse dönüşüm tanımlı değildir.

Burada L – Laplace dönüşüm operatörü,

s – Laplace dönüşüm değişkeni ve $s > 0$, $s = v + iw$ şeklinde tanımlanır

(Aksoy, 2017; Kuşçu, 2020).

4.7. Ters Laplace Dönüşümü

$F(s)$, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olsun. $F(s)$ ' in ters Laplace dönüşümü $L^{-1}\{F(s)\}$, $f(t)$ fonksiyonunun kendisidir.

$L\{f(t)\} = F(s)$ için $f(t)$ ' ye $F(s)$ ' in ters Laplace dönüşümü denir ve

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ile gösterilir (Aksoy, 2017).

4.8. Türevli Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad \text{için,}$$

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0),$$

$$L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3L\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0),$$

⋮

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

4.9. Konvolüsyon Teoremi

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad , \quad L\{g(t)\} = G(s) \quad \text{için}$$

$$L\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)G(s),$$

yazılır. Başka bir deyişle

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du,$$

şeklinindedir. Konvolüsyon teoremi fark çekirdekli ($K(x, t)$ çekirdeği $x - t$ farkına bağlıdır e^{x-t} , $\cos(x - t)$ gibi) integral denklemleri çözmeye çok kolaylık sağlamaktadır.

4.10. Gronwall İntegral Eşitsizliği

Kullanılan fonksiyonlar sürekli olmak üzere,

$$v(t) \leq C + \int_0^t p(s)v(s)ds, \quad p(t) \geq 0, \quad C = \text{sabit}$$

ise, bu durumda

$$v(t) \leq Ce^{\int_0^t p(s)ds},$$

eşitsizliği doğrudur (Amirali ve Amirali, 2018).

4.11. Kuadratür Formülleri

$p(x)$, $f(x)$ belirli fonksiyonlar ve σ bir reel parametre olmak üzere,

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a) \} \\ + f[a, b] \int_a^b (x - x^{(\sigma)})p(x)dx + R_n(f),$$

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f[a, b] \int_a^b p(x)dx + R_n^*(f)$$

$$R_n(f) = \int_a^b dxp(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x, \xi)d\xi, \quad f \in C^n, n = 1 \text{ veya } n = 2$$

$$R_n^*(f) = - \int_a^b dxp'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x, \xi)d\xi, \quad f \in C^n, n = 1 \text{ veya } n = 2$$

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^s, \quad s = 0, 1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad f[a, b] = (f(b) - f(a))/(b - a),$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s/s!, \quad \lambda \geq 0; \quad T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0$$

(Amirali ve Amirali, 2018).

4.12. Dikdörtgen Metodu

Sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için genelleştirilmiş dikdörtgen formülü

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) + R(f),$$

ve

$$R(f) = \sum_{i=1}^n R_i(f) = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i),$$

şeklinde yazılabilir (Amirali ve Amirali, 2018).

4.13. Maksimum Prensibi

$v(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu $Lv(x) \geq 0, (0 \leq x \leq l), v(0) \geq 0$ şartlarını sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda $v(x) \geq 0, (0 \leq x \leq l)$ olur (Amirali ve Amirali, 2018).



5. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha fazla integral işaretinin altında görülebildiği denklemlerdir (Kanwal, 1997). Genel bir integral denklem formunu

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt,$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Burada $g(x)$, $h(x)$ integrasyon limitleri; λ sabit bir parametre, $\varphi(x)$, $f(x)$ bilinen fonksiyonlar; $K(x,t)$ ' de bilinen bir fonksiyon ayrıca çekirdekte denilmektedir; $u(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur.

Bu bölümde yukarıdaki genel form üzerinden integral denklemler gruplandırılacaktır.

5.1. Yapılarına Göre

5.1.1. I. Çeşit integral denklemler

Bilinmeyen u fonksiyonu integral içindedir.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt.$$

5.1.2. II. Çeşit integral denklemler

Bilinmeyen u fonksiyonu hem integral içinde hem de dışındadır.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt.$$

5.1.3. III. Çeşit integral denklemler

Bilinmeyen u fonksiyonu integral dışında bilinen bir $\varphi(x)$ fonksiyonu ile çarpım halindedir.

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) u(t) dt.$$

5.2. İntegrasyon Limitlerine Göre

5.2.1. Fredholm integral denklemleri

İntegrasyon limitlerinin ikisinin de sabit olduğu denklemlerdir.

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

a, b sabitlerdir.

5.2.2. Volterra integral denklemleri

İntegral limitlerinden en az bir tanesinin değişkene bağlı sabit olmayan denklemlerdir.

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt,$$

$g(x), h(x)$ en az biri sabit değil.

5.2.3. Singüler integral denklemler

İntegrasyon limitlerinden en az biri sonsuz ise ya da $K(x, t)$ çekirdeğini süreksiz yapan değer ya da değerler bulunuyorsa singüler denklem, aksi halde singüler olmayan denklem olur.

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} u(t) dt$$

veya

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

5.3. Volterra – Fredholm İntegral Denklemleri

Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin ikisini de içeren denklemlerdir.

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t) u_1(t) dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t) u_2(t) dt.$$

5.4. Lineer İntegral Denklemler

İntegral içerisinde bulunan bilinmeyen u fonksiyonunun derecesi 1 veya bu bilinmeyen fonksiyon lineerse, lineer integral denklemler; yok eğer derecesi 1' den büyük veya lineer değilse, lineer olmayan integral denklemler olur.

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt,$$

lineer integral denklem,

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u^n(t) dt, \quad n > 1,$$

lineer olmayan denklemdir.

5.5. Homojen İntegral Denklemler

II. çeşit integral denklemlerde $f(x)$ fonksiyonu bulunmuyorsa homojen, yok eğer bulunuyorsa homojen olmayan denklem olur.

$$u(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt,$$

homojen integral denklem,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt,$$

homojen olmayan integral denklemdir.

5.6. İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bu denklemler hem integral hem de diferansiyel denklemleri aynı anda içerirler. Bilinmeyen u fonksiyonu integral altında ve bu u fonksiyonunun türevleri ise integral dışındadır.

$$\varphi(x)u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) u(t) dt, \quad n \geq 1.$$



6. İNTEGRAL DENKLEMLERİN BAZI UYGULAMA ALANLARI

Bu bölümde, integral denklemlere ve integro-diferansiyel denklemlere yol açan bir takım fiziksel süreç örneklerine yer verilmektedir. Örnekler kısa bir şekilde verilmiştir fakat referansları ile birlikte verildiğinden ilgilenenler derinlemesine takip edebilirler.

Bu tip denklemler biyoloji, ekoloji, tıp ve fizik gibi bilimsel alanlarda yaygın olarak ortaya çıkmaktadır. Bu denklem sınıfı, mühendislik ve doğa bilimlerinin çeşitli problemlerinin modellenmesinde önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle nümerik hesaplamalarda ve analizde çok dikkat çekmiştir (Shakeri ve Dehghan, 2007).

6.1. Volterra' nın Nüfus Değişimi Modeli

Volterra integro-diferansiyel denklemler çeşitli fiziksel olaylar, mühendislik ve mühendisliğin matematiksel modellemesinde ortaya çıkmaktadır. Örneğin, kapalı sistemdeki bir türün popülasyon büyümesi biyolojik modellerle yapılır. Bu modeller belirli bir süre boyunca popülasyondaki değişim davranışları gibi farklı faktörleri anlamamıza yardımcı olur.

Volterra, nüfus değişim modelini

$$K \frac{du}{dt} = u - u^2 - u \int_0^t u(x)dx, \quad u(0) = u_0,$$

lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi ile tanıttı. Burada $u = u(t)$ belirli bir t zamanında popülasyonu oluşturan aynı türdeki bireylerin sayısını göstermektedir. K , önceden belirlenmemiş ve zamana bağlı olmayan bir parametredir. $K=c/ab$ ile ifade edilir. Burada $a > 0$ doğum oranı katsayısı, $b > 0$ kalabalıklaşma (nüfus artışı) katsayısı, $c > 0$ toksisite (zehir) katsayısıdır. c katsayısı uzun vadede sıfırlanıncaya kadar popülasyondaki temel davranışları etkiler. Ayrıca K değerindeki artış, $u(t)$ genliğinin azalmasını, daha düzgün hale gelmesini sağlarken çalışılacak nümerik çözümlerde de mutlak hatayı azaltacaktır. Volterra bu modeli zehirden etkilenen ve bu halde çoğalmaya devam eden aynı türlerin popülasyonu $u(t)$ için sunmuştur (Al-Jawary ve ark., 2014; Al-Wesabi ve ark., 2014).

6.2. Karaciğer Bölgelerinin Kendi Kendini Tamamlaması Modeli

Farklı enzimler içeren ve karaciğer sinüzoid duvarlarındaki alanlar için rekabet eden iki tip hücrenin karaciğer kılcal damarları boyunca bu alanlar için aktive olmaya çalışmalarını gösteren bir model geliştirilmiştir.

Karaciğerde dakikada yaklaşık 1450 mililitre kan akışı olmakta ve bu kanın içindeki oksijen iki hücre tipinin bölünme ve ölüm oranlarını etkilemektedir. Sürec zaman ve konum fonksiyonları olarak hücre yoğunlukları için bir çift lineer olmayan integro-diferansiyel denklem ile modellenmiştir.

Karaciğeri oluşturan birçok kılcal damar benzer ve esasen paralel olarak hareket ettiklerinden iki tür hücrelerle kaplı temsili bir kılcal damar modeli kullanılmıştır. x - eksen; giriş $x = 0$, çıkış $x = L$ olacak şekilde kan akışı boyunca yerleştirilmiştir. t zamanında, x konumunda birinci türdeki hücrelerin yoğunluğu $p_1(t, x)$ ve hücre sayısı da sürekli olarak tanımlanmaktadır. İkinci türdeki hücrelerin yoğunluğu da $p_2(t, x)$ benzer olarak tanımlanmıştır. Ayrıca toplam hücre yoğunluğu $p_1 + p_2$ belli bir sabit değeri aşamaz.

Birinci tür hücrelerin yoğunluğunun yerel değişim hızı $\frac{\partial p_1}{\partial t}$, p_1 (kendi kendine oluşum) ile orantılı bir büyüme oranı teriminden oluştuğu varsayılır ve mevcut sitelerin yoğunluğuna $\sigma - p_1 - p_2$ göre; c kontrol edici kan kaynaklı bir maddenin p_1 yerel konsantrasyonuna bağlı ölüm oranı katsayısı $\beta_1(c) > 0$ dır. Bu madde ise oksijen olarak alınır. Öyle ki,

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = k_1 p_1 (\sigma - p_1 - p_2) - \beta_1(c) p_1, \quad (6.2.1)$$

$k_1 > 0$ sabit sayıdır. Burada (6.2.1)' de, p_2 için benzer denklem yazılabilir. f kılcal damar içinden kan akışının sabit hızı olsun ve $A(x)$ ' de x konumunda kılcal damarın enine kesit alanı olsun. x yönünde oksijen taşıyorsa, iki türün kanla konveksiyon ile oksijen tüketim oranı da $k_1 p_1$ ve $k_2 p_2$ (k_1, k_2 pozitif sabitler) için gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A \frac{\partial c}{\partial t} + f \frac{\partial c}{\partial x} = -k_1 - k_2. \quad (6.2.2)$$

Bir rahatsızlıktan sonra, sabit bir oksijen konsantrasyonu profili oluşturulur. Karaciğerde kanın konveksiyon geçiş zaman ölçeği 10 saniyedir. En hızlı karaciğer büyümesi bile 10 saatlik zaman ölçeğinde gerçekleşir. Dolayısıyla p_1 ve p_2 'deki değişikliklerin neden olduğu $c(t, x)$ değişikliği neredeyse sabittir. Bu nedenle $A \frac{\partial c}{\partial t}$ ihmal edilip, (6.2.2)'nin integrali alındığında,

$$c(t, x) = c_0 - \frac{1}{f} \int_0^x (k_1 p_1(t, \xi) + k_2 p_2(t, \xi)) d\xi, \quad (6.2.3)$$

elde edilmektedir. Burada c_0 karaciğere giden kandaki sabit oksijen konsantrasyonudur. Oksijen konsantrasyonu düştükçe hücrelerin ölüm oranlarının arttığı varsayılır ($\frac{d\beta_1}{dc} \leq 0, \frac{d\beta_2}{dc} \leq 0$) ancak her iki tür için eşit olmak zorunda değildir.

$$\begin{aligned} &\beta_1(c) \text{ ve } \beta_2(c) \text{ formları hakkında ayrıntıya girmeden } c = c_0 \text{ için} \\ &\beta_1(c) \approx \mu_1 + v_1(c_0 - c), \\ &\mu_1 = \beta_1(c_0) \geq 0, \quad v_1 = -\left. \frac{d\beta_1}{dc} \right|_{c_0} \geq 0, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

benzer şekilde $\beta_2(c)$ içinde yazılır.

Her hücre tipi için (6.2.3) ve (6.2.4), (6.2.1)'de yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= p_1 \left[k_1(\sigma - p_1 - p_2) - \mu_1 - \frac{v_1}{f} \int_0^x (k_1 p_1 + k_2 p_2) d\xi \right], \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} &= p_2 \left[k_2(\sigma - p_1 - p_2) - \mu_2 - \frac{v_2}{f} \int_0^x (k_1 p_1 + k_2 p_2) d\xi \right], \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

elde edilir.

İlk hücre tipi kaçınılmaz olarak yok olmadıkça, bunun mümkün olan en büyük spesifik büyüme oranı $k_1\sigma$, en az spesifik ölüm oranı μ_1 'i aşmalıdır. Aksine $k_1\sigma \leq \mu_1$ olursa, (6.2.5)'in negatif olmayan (p_1, p_2) çözümleri için her yerde $p_1 = 0$ olacaktır. Benzer nedenlerden dolayı v_1 ve v_2 den en az biri pozitif alınmalıdır. Bu ifadeler ikinci tür içinde geçerlidir. Bundan dolayı en baştan

$$k_1\sigma > \mu_1, \quad k_2\sigma > \mu_2$$

olarak alınmaktadır.

Modellerinde bölgelerin oluşumu hakkında bazı ön fikirler elde etmek için Bass ve arkadaşları (6.2.5)'in tüm sonlu zamanlarda her yerde pozitif ve tatmin edici olan $(p_1 + p_2) < \sigma$ çözümleri kabul ettiğini varsaydılar. Bu tür de çözümler için (6.2.5)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \ln p_1 &= k_1(\sigma - p_1 - p_2) - \mu_1 - \frac{v_1}{f} \int_0^x (k_1 p_1 + k_2 p_2) d\xi, \\ \frac{d}{dt} \ln p_2 &= k_2(\sigma - p_1 - p_2) - \mu_2 - \frac{v_2}{f} \int_0^x (k_1 p_1 + k_2 p_2) d\xi,\end{aligned}\quad (6.2.6)$$

şeklinde yazılabilir. (6.2.6) da ilk denklem k_2 ile ikinci denklem k_1 ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \ln p_1^{k_2} &= k_1 k_2 (\sigma - p_1 - p_2) - \mu_1 k_2 - \frac{v_1 k_2}{f} \int_0^x (k_1 p_1 + k_2 p_2) d\xi, \\ \frac{d}{dt} \ln p_2^{k_1} &= k_1 k_2 (\sigma - p_1 - p_2) - \mu_2 k_1 - \frac{v_2 k_1}{f} \int_0^x (k_1 p_1 + k_2 p_2) d\xi,\end{aligned}\quad (6.2.7)$$

elde edilir.

Bu tür çözümler için (6.2.7) de verilmiş olan iki denklem birleştirilebilir. Öyle ki,

$$\frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{p_1^{k_2}}{p_2^{k_1}} \right) \right] = A - \frac{B}{f} \int_0^x (k_1 p_1 + k_2 p_2) d\xi,\quad (6.2.8)$$

$$A = \mu_2 k_1 + \mu_1 k_2, \quad B = v_1 k_2 + v_2 k_1,$$

A ve B pozitif sabitler olarak kabul edilir (Ebaid, 2013; Bass ve ark., 1986).

6.3. Elektrik Devreleri Modeli

Bir iletkenin iki ucu arasındaki potansiyel farka gerilim ya da voltaj, bir noktadan birim zamanda geçen yük miktarına akım, elektrik akımına karşı gösterilen zorluğa da direnç denir. Kondansatörlerin elektrik depolama yeteneğine kapasitans adı verilirken, bobinlerin enerji depolama kapasitesine endüktans denilmektedir. Bu bilgiler ışığında $E(t)$ voltajlı, bir kapalı LRC elektrik devresinden akan akım aşağıdaki integro-diferansiyel denklemi şeklinde verilir,

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau = E(t), \quad I(0) = I_0.$$

Burada $I(t)$ akım, $E(t)$ voltaj, L endüktans, R direnç, C devrenin kapasitansdır. L , R , C hepsi sabittir ve $I(0) = I_0$ başlangıç koşulunda sabit bir akımdır.

Hopkinson (1877), iletken olmayan bir materyalde elektromanyetik alanı, elektrik alanı $E = (E_1, E_2, E_3)$ ve elektriksel yer değiştirmeyi de $D = (D_1, D_2, D_3)$ şeklinde ele almıştır ve Maxwell denklemlerini şu şekilde yazar,

$$D(t) = \varepsilon E(t) + \int_{-\infty}^t \phi(t-s)E(s)ds,$$

burada ε sabit ve ϕ süreklidir.

İlginçtir ki bu problem 1877' de olduğu gibi bugünde güncelliğini korumaktadır. Davis 1975' te ve Bloom 1981' de bu konu üzerine fikirler beyan etmişlerdir.

İntegro-diferansiyel denklemlerin başka bir örneği olan elektrik teorisi, elektron ışını cihazlar için alan-teorik modelinde ortaya çıkmaktadır. Sdney 1975' te tek boyutlu bir iletim-hattı teorisi geliştirmiştir. Şöyle ki,

$$F''(x) + G(x)F(x) = \left[c/h(x) \right] \int_0^x K(x-s)h(s)F(s)ds,$$

integro-diferansiyel denklem şeklinde yazılır (Burton, 2005; Rahman, 2007).

6.4. Reaktör Dinamiği Modeli

Levin ve Nohel 1960' da sürekli-orta nükleer reaktörler için bir model düşündüler.

$$\frac{du}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)T(t,x)dx, \quad (6.4.1)$$

$$aT_t = bT_{xx} + \eta(x)u, \quad (6.4.2)$$

$0 \leq t < \infty$ için ve başlangıç koşullarından

$$u(0) = u_0, \quad T(0,x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Burada $u(t)$ ve $T(t,x)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. α, η, f reel değerli fonksiyonlardır. u_0 reel sabit ve a, b verilen pozitif sabitlerdir. Verileri şu şekilde yazarsak,

t = zaman,

x = reaktör pozisyonu, sonsuz çift çubuk olarak kabul edilir,

$u(t)$ = toplam reaktör gücünün logaritması,

$T(t,x)$ = sıcaklığın dengeden sapması,

$-\alpha(t)$ = nötronların ortalama ömrünün reaktivite sıcaklık katsayısı,

$\eta(x)$ = x de üretilen gücün oranı,

a = ısı kapasitesi,

b = termal iletkenlik (Burton, 2005).

6.5. Birlikte Yaşayan Biyolojik Türleri Tanımlayan Model

Bu çalışmada, biyolojide ortaya çıkan iki lineer olmayan integro-diferansiyel denklem sistemi ele alınmıştır.

Sırasıyla, t zamanında ilk türün arttığı ikinci türün azaldığı iki ayrı $n_1(t)$, $n_2(t)$ türleri düşünelim. İkinci türün birinci türden besleneceği varsayılırsa ve bu türler bir araya getirilirse ikinci türün oranında artış olacaktır. $\frac{dn_2}{dt}$ sadece $n_1(t)$ ' nin mevcut nüfusuna bağlı değil aynı zamanda ilk türün önceki tüm değerlerine de bağlıdır. Bu iki tür arasında bir kararlı durum koşulu veya dengesine ulaştığında aşağıdaki integro-diferansiyel denklem çifti ile tanımlanır;

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= n_1(t) \left[k_1 - \gamma_1 n_2(t) - \int_{t-T_0}^t f_1(t-\tau) n_2(\tau) d\tau \right], \quad k_1 > 0, \\ \frac{dn_2}{dt} &= n_2(t) \left[-k_2 - \gamma_2 n_1(t) + \int_{t-T_0}^t f_2(t-\tau) n_1(\tau) d\tau \right], \quad k_2 > 0,\end{aligned}$$

Burada k_1 ve $-k_2$ sırasıyla birinci ve ikinci türün (ayrı ayrı evrelendirilmiş) artış ve azalış katsayılarıdır. γ_1 ve γ_2 parametreleri ile f_1 ve f_2 verilen fonksiyonları ilgili oldukları türe bağlıdır. T_0 her iki türün sonlu kalıtım süresi olduğu varsayılır (Shakeri ve Dehghan, 2007; Jerri, 1999).

6.6. Bir Telin Burulması Modeli

P burulma ve W burulma açısı arasındaki yaklaşıklık ilişkisi $W = kP$ olarak ilk defa Volterra tarafından ifade edildi. Elastik cisim önceden uygulanmış olan gerginlikten etkilenmektedir. Onun argümanı önceki etkilerin göz önünde bulundurulmasıydı. Bundan dolayı t_0 ' dan t ' ye zaman aralığında oluşan etkilerde, $W = kP$ ' ye etkilemesi sonucunda yaklaşım,

$$W(t) = kP(t) + \int_{t_0}^t K(t,s)P(s)ds,$$

şeklinde yazıldı. $K(t,s)$ önceki etki sayısı olarak adlandırıldı. W ifadesi bir fonksiyonun fonksiyonudur ve Volterra bu tür ifadeleri ‘ ‘ fuctions of lines ‘ ‘ olarak adlandırdı (Burton, 2005).

7. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK YÖNTEMLER

İtalyan bilim adamı Vito Volterra 1884' te integral denklemler üzerine çalışmaya başladı fakat ilk ciddi çalışmaları 1886' da yapmaya başladıktan sonra 1930 yılında nüfus değişikliklerini gözlemlerken integro-diferansiyel denklem diye adlandırdığı yeni bir denklem kurmuştur. Bu denklemde hem diferansiyel hem de integral operatörler bir arada ortaya çıkmıştır. Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler Volterra tarafından sonraları ortaya çıkmıştır. Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler en az bir integrasyon değişkeni ile karakterize edilir ve bu integral içindeki bilinmeyen fonksiyonun derecesi 1' den büyüktür veya lineer durumda değildir.

Genel şekli ile lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt,$$

ile ifade edilir. Burada $u^{(i)} = \frac{d^i u}{dx^i}$ ve $K(x, t)$, $f(x)$ reel değerli fonksiyonlar, $F(u(x))$ ise $u(x)$ ' in lineer olmayan bir fonksiyonudur. $u^2(x)$, $\sin(u(x))$, $e^{u(x)}$ gibi.

Kullanım alanları son zamanlarda oldukça artan lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler birçok fizik uygulamalarında, cam şekillendirmede, ısı transferinde, difüzyon işlemlerinde, biyolojik türlerde artan ve azalan üretim olaylarında ve bunlar gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır (Wazwaz, 2011).

Bu denklemlerin kesin çözümlerinde yaşanan bazı güçlüklerden dolayı kesin çözüme en yakın minimal hatalı çözümler değişik yöntemler kullanarak bulunmaktadır. Bu bölümde lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için Birleştirilmiş Laplace dönüşümü-Adomian ayrıştırma metodu ve varyasyonel iterasyon metodu incelenecektir.

7.1. Birleştirilmiş Laplace Dönüşümü - Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Adomian ayrıştırma modeli 1980 yılında fiziksel sorunları temsil eden bir diferansiyel denklem sisteminin sayısal ve açık çözümünün bulunması için Adomian

tarafından bulunmuş etkili bir yöntemdir. Laplace dönüşüm modeli ise 1814 yılında De Laplace tarafından mühendislik ve uygulamalı matematik alanında kullanılmak üzere oluşturulmuş bir yöntemdir.

Adomian ayrıştırma ve Laplace dönüşümü metotlarının birleştirilmesi Laplace dönüşümü-Adomian ayrıştırma yöntemi olarak bilinen güçlü bir yöntemle yol açmıştır. Laplace dönüşümü-Adomian ayrıştırma yöntemi ilk olarak Suheil A. Khuri tarafından (Khuri, 2001), Airy' nin diferansiyel denklemleri için başarıyla kullanılmıştır (Adomian ve ark., 1987). Bu yöntemin avantajı lineer olmayan denklemlerin kesin çözümleri için iki yöntemi birleştirmesidir. Laplace dönüşümü yardımıyla diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürürken, Adomian ayrıştırma metodu ile de problemi lineerleştirmeden lineer olmayan terimleri Adomian polinomları cinsinden ayrıştırmaktadır (Haq ve ark., 2016).

Bu kısımda

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, \quad (7.1.1)$$

şeklinde $K(x, t)$ çekirdeği bir fark olarak ele alınan yani e^{x-t} , $\cos(x-t)$ gibi $(x-t)$ biçiminde yazılabilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi için birleştirilmiş Laplace dönüşümü-Adomian ayrıştırma metodunu uygulayalım.

Öncelikle lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerde Laplace dönüşümünü uygulamak için

L - Laplace operatörünü ve s - reel bir parametreyi göstermek üzere $t \geq 0$ için $f(t)$ fonksiyonunun

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(s)dt = F(s)$$

olarak tanımlanan Laplace dönüşümünün bazı esasları tekrar verilirse.

i. Laplace dönüşümü $K(x, t)$ çekirdeği $(x-t)$ şeklinde fark olarak yazılabilen konvolüsyon tipi denklemlerde uygulanmaktadır.

Buradan yola çıkarak her biri için Laplace dönüşümü var olan $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları ele alınırsa. f_1 ve f_2 fonksiyonları için Laplace dönüşümleri

$$L\{f_1(t)\} = F_1(s), \quad L\{f_2(t)\} = F_2(s)$$

yazılır.

f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Laplace konvolüsyon çarpımları

$$(f_1 * f_2) = \int_0^x f_1(x-t) f_2(t) dt$$

ya da

$$(f_2 * f_1) = \int_0^x f_2(x-t) f_1(t) dt,$$

şeklinde yazılır. Bu iki çarpım birbirine eşittir,

$$(f_1 * f_2) = (f_2 * f_1).$$

Buradan da

$$L\{(f_1 * f_2)(x)\} = L\left\{\int_0^x f_1(x-t) f_2(t) dt\right\} = F_1(s)F_2(s)$$

yazılır.

ii. Laplace dönüşümünü kullanabilmek için $u(x)$ fonksiyonunun türevlerinin

Laplace dönüşümleri

$$L\{u(x)\} = U(s) \text{ için,}$$

$$L\{u'(x)\} = sL\{u(x)\} - u(0) = sU(s) - u(0),$$

$$L\{u''(x)\} = s^2L\{u(x)\} - su(0) - u'(0) = s^2U(s) - su(0) - u'(0),$$

$$L\{u'''(x)\} = s^3L\{u(x)\} - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) = s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0),$$

⋮

$$L\{u^{(i)}(x)\} = s^iL\{u(x)\} - s^{i-1}u(0) - s^{i-2}u'(0) - \dots - su^{(i-2)}(0) - u^{(i-1)}(0),$$

şeklinde yazılır.

Şimdi (7.1.1) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^iL\{u(x)\} - s^{i-1}u(0) - s^{i-2}u'(0) - \dots - u^{(i-1)}(0) = L\{f(x)\} + L\{K(x-t)L\{F(u(t))\}}, \quad (7.1.2)$$

düzenlenirse,

$$L\{u(x)\} = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L\{f(x)\} + \frac{1}{s^i}L\{K(x-t)L\{F(u(t))\}} \quad (7.1.3)$$

elde edilir.

Bu aşamadan sonra Adomian ayrıştırma metodu (7.1.3) denkleminin sağ tarafındaki lineer olmayan $F(u(x))$ fonksiyonu için kullanılır. Sol taraftaki lineer $u(x)$ fonksiyonu için ayrıştırma serisi

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (7.1.4)$$

olacak şekilde $n \geq 0$ için $u_n(x)$ tekrarlı bir şekilde hesaplanır. Bununla birlikte $F(u(x))$ lineer olmayan fonksiyonun terimleri u^2 , u^3 , u^4 , $\sin u$, e^u gibidir. Burada $F(u(x))$ lineer olmayan fonksiyonlar, A_n şeklinde Adomian polinomlarının sonsuz bir serisi ile ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \quad A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u^i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1.5)$$

A_n , Adomian polinomları $n \geq 0$ için lineer olmayan $F(u(x))$ fonksiyonu için şu şekilde verilebilir.

$$A_0 = F(u_0),$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0),$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0),$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0),$$

$$A_4 = u_4 F'(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(iv)}(u_0)$$

⋮

burada A_0 yalnızca u_0 ' a bağlı; A_1 , u_0 ve u_1 ' e bağlı; A_2 , u_0 , u_1 , u_2 ' ye bağlı bir şekilde devam etmektedir.

Örnek olarak, $F(u) = u^2$ gibi bir fonksiyonun A_n , Adomian polinomları yazılırsa,

$$A_0 = F(u_0) = u_0^2,$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0) = 2u_0 u_1,$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) = 2u_0 u_2 + u_1^2,$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2,$$

şeklinde bulunur.

Oluşturulan (7.1.4) ve (7.1.5) eşitlikleri (7.1.3) denkleminde yerlerine konulursa

$$L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right\} = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L\{f(x)\} \\ + \frac{1}{s^i}L\{K(x-t)\}L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\right\}. \quad (7.1.6)$$

bulunur. (7.1.6) denklemi için öngörülen Adomian ayrıştırma metodu uygulanırsa

$$L\{u_0(x)\} = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L\{f(x)\}, \\ L\{u_{k+1}(x)\} = \frac{1}{s^i}L\{K(x-t)\}L\{A_k(x)\}, \quad k \geq 0. \quad (7.1.7)$$

elde edilir.

(7.1.7) denkleminin ilk bölümüne ters Laplace uygulanırsa $u_0(x)$ ' i verir ve bu da A_0 ' ı tanımlamada kullanılır. $k \geq 0$ değerleri için (7.1.7) denkleminin ikinci bölümündeki u_{k+1} bileşenleri de bu şekilde sırayla bulunur.

Özetle, verilen probleme öncelikle Laplace dönüşümü uygulanır, elde edilen denklem Adomian ayrıştırma metodu ile ayrıştırılmış denklemler şekline getirilir. Ayrık denklemlerin ilk bölümüne ters Laplace dönüşümü uygulayarak $u_0(x)$ bulunur. $u_0(x)$ ' den yararlanarak A_n Adomian polinomları oluşturulur ve bu şekilde devam edilerek ikinci bölümden u_0, u_1, \dots, u_n sıralı çözümleri yazılıp, $u(x)$ tam çözümüne ulaşılır (Wazwaz, 2011).

Örnek 7.1.1.

$$u'(x) = -\frac{2}{3}(2\sin x + \sin(2x)) + \int_0^x \cos(x-t)u^2(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad (7.1.8)$$

lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemini birleştirilmiş Laplace dönüşümü- Adomian ayrıştırma metodu ile çözelim.

Verilmiş olan denklemin çekirdeği $K(x-t) = \cos(x-t)$ şeklindedir. (7.1.8) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L\{u'(x)\} = L\left\{-\frac{2}{3}(2\sin x + \sin(2x))\right\} + L\{\cos(x-t) * u^2(t)\}, \quad (7.1.9)$$

elde edilir. Açılırsa,

$$sU(s) - u(0) = -\frac{4}{3(s^2 + 1)} - \frac{2}{3(s^2 + 4)} + \frac{s}{(s^2 + 1)}L\{u^2(x)\}, \quad (7.1.10)$$

olur. Düzenlenirse,

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{3s(s^2 + 1)} - \frac{2}{3s(s^2 + 4)} + \frac{1}{(s^2 + 1)} L\{u^2(x)\}, \quad (7.1.11)$$

bulunur. Şimdi Adomian ayrıştırma metodu kullanılırsa,

$$U_0(s) = \frac{2}{s} + \frac{9}{4s^2} - \frac{5}{2s^3} - \frac{1}{s^4} - \frac{3}{s(s+1)} - \frac{1}{4s(s+2)},$$

$$L\{u_{k+1}(x)\} = \frac{1}{s^3} L\{A_k(x)\}, \quad k \geq 0, \quad (7.1.12)$$

yazılır. (7.1.12) denkleminin ilk bölümünün her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanıp, Adomian polinomlarını da $F(u) = u^2(x)$, olduğundan

$$A_0 = F(u_0) = u_0^2,$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0) = 2u_0 u_1,$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) = 2u_0 u_2 + u_1^2,$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2,$$

olacak şekilde seçilirse,

$$u_0(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{60}x^6 + \dots,$$

$$u_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{37}{720}x^6 + \dots,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{22}x^4 - \frac{1}{20}x^6 + \dots,$$

$$u_3(x) = \frac{1}{72}x^6 + \dots,$$

sıralı çözümleri elde edilir. (7.1.4) denklemini gereğince seri çözüm,

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots,$$

şeklinde verilir. Buradaki yakınsama ise

$$u(x) = \cos(x),$$

sonucunu verecektir (Wazwaz, 2011).

Örnek 7.1.2.

$$u''(x) = 2 + 2x + x^2 - x^2 e^x - e^{2x} + \int_0^x e^{x-t} u^2(t) dt,$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 2, \quad (7.1.13)$$

lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemini birleştirilmiş Laplace dönüşümü-Adomian ayrıştırma metodu ile çözelim.

Verilmiş olan denklemin çekirdeği $K(x-t) = e^{x-t}$ şeklindedir. (7.1.13) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L\{u''(x)\} = L\{2 + 2x + x^2 - x^2e^x - e^{2x}\} + L\{e^{x-t} * u^2(t)\}, \quad (7.1.14)$$

elde edilir. Açılırsa,

$$s^2U(s) - su(0) - u'(0) = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{(s-1)^3} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-1}L\{u^2(x)\}, \quad (7.1.15)$$

olur. Düzenlenirse,

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^5} - \frac{2}{s^2(s-1)^3} - \frac{1}{s^2(s-2)} + \frac{1}{s^2(s-1)}L\{u^2(x)\}, \quad (7.1.16)$$

bulunur. Şimdi Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak,

$$U_0(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^5} - \frac{2}{s^2(s-1)^3} - \frac{1}{s^2(s-2)},$$

$$L\{u_{k+1}(x)\} = \frac{1}{s^2(s-1)}L\{A_k(x)\}, \quad k \geq 0, \quad (7.1.17)$$

yazılır. (7.1.17) denkleminin ilk bölümünün her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanıp, Adomian polinomlarını da $F(u) = u^2(x)$, olduğundan

$$A_0 = F(u_0) = u_0^2,$$

$$A_1 = u_1F'(u_0) = 2u_0u_1,$$

$$A_2 = u_2F'(u_0) + \frac{1}{2!}u_1^2F''(u_0) = 2u_0u_2 + u_1^2,$$

$$A_3 = u_3F'(u_0) + u_1u_2F''(u_0) + \frac{1}{3!}u_1^3F'''(u_0) = 2u_0u_3 + 2u_1u_2,$$

olacak şekilde seçilirse,

$$u_0(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{60}x^5 - \frac{7}{180}x^6 + \dots,$$

$$u_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{3}{80}x^6 + \dots,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{360}x^6 + \dots,$$

sıralı çözümleri elde edilir. (7.1.4) denklemi gereğince seri çözüm,

$$u(x) = x + (1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots,)$$

şeklinde verilir. Buradaki yakınsama ise

$$u(x) = x + e^x,$$

sonucunu verecektir (Wazwaz, 2011).

7.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Son zamanlarda sıkça kullanılan varyasyonel iterasyon metodu, analitik ve nümerik çözümleri araştırmada güçlü bir yöntemdir. Çinli matematikçi Ji-Huan He tarafından Inokuti, Sekine ve Mura' nın 1978' de lineer olmayan denklemleri çözmek için bulmuş oldukları Lagrange çarpanı yöntemini modifiye ederek oluşturduğu varyasyonel iterasyon metodu, çok çeşitli lineer ve lineer olmayan, homojen ve homojen olmayan denklemler için hızlı bir yakınsama başarısı sağlamıştır (Inokuti ve ark., 1978; He, 2006). Bu yöntem lineer veya lineer olmayan problemler için ihtiyaç duyduğumuz formunu önceden vererek problemleri aynı şekilde ele almaktadır. Yöntem kesin çözüm var ise kapalı form çözümüne yakınsayan bir seri formda çözüm verir eğer kesin çözüm elde edilmezse oluşturulan seriler bu nümerik amaçlar için kullanılır (Wazwaz, 2011).

Varyasyonel iterasyon yöntemi, fizik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında ortaya çıkan problemleri ele almak için kullanılır (Yousefi ve ark., 2009). Varyasyonel iterasyon yöntemi, Fokker-Planck denklemine, reaksiyon difüzyon denklemlerine, Lane-Emden denklemine, Klein-Gordon denklemine, Hiperkotik Rossler sistemine, salgın ve avcı modellerine, biyolojik popülasyon denklemlerine, lineer olmayan sınır değer problemlerine ve bunun gibi birçok probleme uygulanmıştır (Altıntan ve Uğur, 2011).

Temel varyasyonel iterasyon metodunun ana fikrini göstermek için aşağıdaki lineer olmayan denklemi ele alalım. Inokuti ve arkadaşları 1978' de lineer olmayan denklemleri çözmek için Lagrange çarpanı yöntemini ortaya koymuşlardır. Bu yöntem L lineer, N lineer olmayan operatörleri göstermek üzere

$$Lu + Nu = g(x), \quad (7.2.1)$$

şeklindeki lineer olmayan denklemin x_0 noktasındaki değerini düzeltmek için; u_0 , $Lu = 0$ denkleminin çözümü ve λ Lagrange çarpanı olmak üzere,

$$u(x_0) = u_0(x_0) + \int_a^b \lambda(Lu_0(x) + Nu_0(x) - g(x))dx, \quad (7.2.2)$$

şeklinde bir düzeltmeye gidileceğini gösterir (İlhan, 2011).

Ji-Huan He, Inokuti ve arkadaşlarının yöntemini geliştirerek varyasyonel iterasyon metodunu ortaya atmıştır. He, (7.2.2) düzeltme formülünü

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)[Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)]d\xi, \quad (7.2.3)$$

şeklinde genelleştirmiş, bir düzeltme formülü oluşturmuştur. Burada u_n , n . yaklaşık çözüm; \tilde{u}_n ise bir kısıtlanmış varyasyon yani $\delta\tilde{u}_n = 0$, dır (Nadjafi ve Ghassabzade, 2010).

Buradan hareketle (7.2.3) denkleminde u_n ' e göre kısmi integrasyon uygulanırsa λ Lagrange çarpanı;

Birinci mertebeden bir denklem için,

$$u' + f(u(\xi), u'(\xi)) = 0 \text{ için } \lambda = -1.$$

İkinci mertebeden bir denklem için,

$$u'' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi)) = 0 \text{ için } \lambda = \xi - x.$$

Üçüncü mertebeden bir denklem için,

$$u''' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi)) = 0 \text{ için } \lambda = \frac{1}{2!}(\xi - x)^2.$$

⋮

n . mertebeden bir denklem için,

$$u^n + f(u(\xi), u'(\xi), \dots, u^n(\xi)) = 0 \text{ için } \lambda = (-1)^n \frac{1}{(n-1)!}(\xi - x)^{n-1},$$

şeklinde bulunur.

(7.2.3) düzeltme formülü lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için düzenlenirse

i. mertebeden standart lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt, \quad (7.2.4)$$

şeklinde ifade edilirse, $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$ ve $F(u(x))$, $u(x)$ ' in lineer olmayan fonksiyonu, $u(0), u'(0), u''(0), \dots, u^{(i-1)}(0)$ başlangıç şartları olmak üzere, (7.2.4) lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminin düzeltme formülü,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left[u_n^{(i)}(\xi) - f(\xi) - \int_0^\xi K(\xi, r) F(u_n(r)) dr \right] d\xi,$$

şeklinde olacaktır.

Burada $u(x)$ çözümü için u_{n+1} , $n \geq 0$, ardışık yaklaşımlarını $u_0(x)$ sıfırcı yaklaşımını kullanarak kolayca oluşturulur. Yani,

Birinci mertebeden integro-diferansiyel denklem için,

$$u_0(x) = u(0).$$

İkinci mertebeden integro-diferansiyel denklem için,

$$u_0(x) = u(0) + xu'(0).$$

Üçüncü mertebeden integro-diferansiyel denklem için,

$$u_0(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{1}{2!} x^2 u''(0),$$

şeklinde devam edilerek u_{n+1} yaklaşımları oluşturulur (Wazwaz, 2011; Usta, 2015).

Genel bir ifade ile lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşık bir çözümünün bulunmasında, ilk olarak sınırlayıcı bir varyasyon kullanarak ve kısmi integrasyon aracılığı ile en uygun λ Lagrange çarpanının bulunması gerekir sonra $u_0(x)$ sıfırcı yaklaşım aracılığı ile u_{n+1} , $n \geq 0$, yaklaşımlarını belirlenir. Daha sonra bulunan $u_0(x)$ yaklaşımı düzeltme formülünde kullanılarak sırasıyla u_1, u_2, \dots, u_n seri çözümlerine ulaşılır. En sonda bulunan $u_n(x)$ serisinin $n \rightarrow \infty$ için limit değeri lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemin çözümünü verecektir (Wazwaz, 2011).

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x),$$

olacaktır.

Örnek 7.2.1.

$$u'(x) = -x + \sec x \tan x - \tan x + \int_0^x (1 + u^2(t)) dt, \quad u(0) = 1,$$

lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemini varyasyonel iterasyon metodu ile çözelim.

Denklem birinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem olduğu için kullanılacak Lagrange çarpanı $\lambda = -1$ olacaktır.

Verilen denklem için düzeltme formülü,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left[u_n'(\xi) + \xi - \sec \xi \tan \xi + \tan \xi - \int_0^\xi (1 + u_n^2(r)) dr \right] d\xi.$$

Ayrıca başlangıç koşulundan birinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem için sıfırıncı yaklaşım ise

$$u_0(x) = u(0) = 1,$$

seçilir.

Bunlar kullanılarak düzeltme formülünden art arda yaklaşımlar yazılırsa,

$$u_0(x) = 1,$$

$n = 0$ için,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x \left[u_0'(\xi) + \xi - \sec\xi \tan\xi + \tan\xi - \int_0^\xi (1 + u_0^2(r)) dr \right] d\xi, \\ &= 1 - \int_0^x \left[\xi - \sec\xi \tan\xi + \tan\xi - \int_0^\xi 2dr \right] d\xi, \\ &= 1 - \int_0^x [\xi - \sec\xi \tan\xi + \tan\xi - 2\xi] d\xi, \\ &= 1 - \int_0^x [-\xi - \sec\xi \tan\xi + \tan\xi] d\xi, \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \dots, \end{aligned}$$

$n = 1$ için,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x \left[u_1'(\xi) + \xi - \sec\xi \tan\xi + \tan\xi - \int_0^\xi (1 + u_1^2(r)) dr \right] d\xi, \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{19}{240}x^6 + \dots, \end{aligned}$$

$n = 2$ için,

$$\begin{aligned} u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x \left[u_2'(\xi) + \xi - \sec\xi \tan\xi + \tan\xi - \int_0^\xi (1 + u_2^2(r)) dr \right] d\xi, \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots, \end{aligned}$$

aynı şekilde devam edildiğinde varyasyonel iterasyon metodu için $u(x)$ genel ifadesi

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

şeklinde olup, çözüm

$$u(x) = \sec x,$$

olur (Wazwaz, 2011).

Örnek 7.2.2.

$$u''(x) = -\frac{5}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin(2x) + \int_0^x \cos(x-t)u^2(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$

lineer olmayan volterra integro-diferansiyel denklemini varyasyonel iterasyon metodu ile çözelim.

Denklem ikinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem olduğu için kullanılacak Lagrange çarpanı $\lambda = \xi - x$ olacaktır.

Verilen denklem için düzeltme formülü,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (\xi - x) \left[u_n''(\xi) + \frac{5}{3}\sin\xi - \frac{1}{3}\sin(2\xi) - \int_0^\xi \cos(\xi - r)u_n^2(r)dr \right] d\xi.$$

Ayrıca başlangıç koşulundan ikinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem için sıfıncı yaklaşım ise

$$u_0(x) = u(0) + xu'(0) = x,$$

seçilir.

Bunları kullanarak düzeltme formülünden art arda yaklaşımlar aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$u_0(x) = x,$$

$n = 0$ için,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x (\xi - x) \left[u_0''(\xi) + \frac{5}{3}\sin\xi - \frac{1}{3}\sin(2\xi) - \int_0^\xi \cos(\xi - r)u_0^2(r)dr \right] d\xi, \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{720}x^7 + \dots, \end{aligned}$$

$n = 1$ için,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x (\xi - x) \left[u_1''(\xi) + \frac{5}{3}\sin\xi - \frac{1}{3}\sin(2\xi) - \int_0^\xi \cos(\xi - r)u_1^2(r)dr \right] d\xi, \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \end{aligned}$$

aynı şekilde devam edildiğinde varyasyon iterasyon metodu için $u(x)$ genel ifadesi

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

şeklinde olup, çözüm

$$u(x) = \sin x,$$

olur (Wazwaz, 2011).





8. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BİR DÜZGÜN NÜMERİK YAKLAŞIM

8.1. Giriş

Bu bölümde aşağıdaki birinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemini ele alınacaktır:

$$Lu := u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t G(t, s, u(s))ds = f(t), \quad t \in I, \quad (8.1.1)$$

$$u(0) = \mu. \quad (8.1.2)$$

Burada $I = (0, T]$ ve μ belirli bir sabit. $a(t), f(t)$ ve $K(t, s, u(s))$ fonksiyonları sırasıyla $\bar{I} = [0, T]$ ve $\bar{I} \times \bar{I} \times R$ üzerinde yeterince düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca $a(t) \geq \alpha > 0$, şeklindedir.

Burada (8.1.1) ve (8.1.2)' ye yaklaşmak için düzgün bir şebekede bir nümerik yaklaşım şeması sunulacaktır.

Notasyon. Bundan böyle C ve C_0 genel bir pozitif sabitleri belirtir. $\vartheta \in C(\bar{I})$ için de

$$\|\vartheta\|_\infty = \max_{t \in \bar{I}} |\vartheta(t)|,$$

maksimum normunu kullanılacaktır.

8.2. Kesin Çözümün Özellikleri

Burada, problemin çözümü için bazı önemli özellikler veriyoruz. Bu özellikler daha sonraki kısımlarda nümerik metodun analizinde ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 8.2.1. $a(t), f(t) \in C(\bar{I})$ ve $K(t, s) \in C(\bar{I} \times \bar{I})$ olsun. O halde (8.1.1) ve (8.1.2) problemin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\|u\|_\infty \leq C_0, \quad (8.2.1)$$

$$\|u'\|_\infty \leq C. \quad (8.2.2)$$

Burada

$$C_0 = (|\mu| + \alpha^{-1}\|f\|_\infty)e^{\alpha^{-1}\bar{K}T},$$

$$C = \|f\|_\infty + C_0(\|a\|_\infty + \bar{K}t),$$

$$\bar{K} = \max_{\bar{I} \times \bar{I}} |K(t, s)|.$$

İspat. İlk önce (8.2.1) eşitsizliğini ispatlayalım.

(8.1.1) denklemindeki $G(t, s, u(s))$ fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygularsak,

$$G(t, s, u(s)) = G(t, s, 0) + \frac{\partial}{\partial u} G(t, s, \bar{u}), \quad \bar{u} = \theta u, \quad 0 < \theta < 1,$$

olur. (8.1.1)' de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t G(t, s, 0)ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} G(t, s, \bar{u})u(t)ds &= f(t), \\ u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} G(t, s, \bar{u})u(t)ds &= f(t) - \int_0^t G(t, s, 0)ds, \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

elde edilir. (8.2.3) denklemini aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz:

$$u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t K(t, s)u(t)ds = F(t), \quad t \in I, \quad (8.2.4)$$

burada

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \frac{\partial}{\partial u} G(t, s, \bar{u}), \\ F(t) &= f(t) - \int_0^t G(t, s, 0)ds. \end{aligned}$$

(8.2.4) denkleminde

$$u(t) = \mu e^{-\int_0^t a(\eta) d\eta} + \int_0^t \left[F(s) + \int_0^s K(s, \xi)u(\xi) d\xi \right] e^{-\int_s^t a(\eta) d\eta} ds,$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |\mu|e^{-\alpha t} + \int_0^t \left[|F(s)| + \int_0^s |K(s, \xi)||u(\xi)| d\xi \right] e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &\leq |\mu|e^{-\alpha t} + \|F\|_\infty \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds + \bar{K} \int_0^t \left[\int_0^s |u(\xi)| d\xi \right] e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &\leq |\mu|e^{-\alpha t} + \alpha^{-1}\|F\|_\infty(1 - e^{-\alpha t}) + \alpha^{-1}\bar{K}(1 - e^{-\alpha t}) \int_0^t |u(\xi)| d\xi \\ &\leq |\mu|e^{-\alpha t} + \alpha^{-1}\|F\|_\infty + \alpha^{-1}\bar{K} \int_0^t |u(\xi)| d\xi, \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

bulunur. (8.2.5) eşitsizliğine Gronwall eşitsizliğini uygularsak,

$$|u(t)| \leq (|\mu| + \alpha^{-1}\|F\|_\infty)e^{\alpha^{-1}\bar{K}T},$$

elde edilir. Buda (8.2.1)' in ispatını tamamlar.

Şimdi ise (8.2.2)' yi ispatlayalım.

(8.2.4)' den

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq |a(t)||u(t)| + |F(t)| + \int_0^t |K(t,s)| |u(s)| ds \\ &\leq \|a\|_\infty C_0 + \|F\|_\infty + \bar{K} C_0 t \\ &\leq \|F\|_\infty + C_0 (\|a\|_\infty + \bar{K} T), \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik de (8.2.2)' nin doğru olduğunu gösterir.

Böylece lemma 8.2.1 ispatlanmış olur.

8.3. Fark Şemasının Kurulması

I aralığı üzerinde t_i düğüm noktaları, h şebeke adımı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \omega_N &= \left\{ t_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad h = \frac{T}{N} \right\}, \\ \bar{\omega}_N &= \omega_N \cup \{0\}, \end{aligned}$$

düzgün şebekesini tanımlayalım.

Notasyonu basitleştirmek için herhangi bir $\vartheta(t)$ fonksiyonu için $\vartheta_i = \vartheta(t_i)$ tanımlıyoruz. Ayrıca y_i ' de t_i noktasındaki $u(t_i)$ ' nin bir yaklaşımını temsil ediyor. ω_N üzerinde tanımlanan herhangi bir ϑ_i şebeke fonksiyon için,

$$\begin{aligned} \vartheta_{\bar{t},i} &= \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i-1}}{h}, \\ \|\vartheta\|_{\infty, \omega_N} &= \max_{1 \leq i \leq N} |\vartheta_i|, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

(8.1.1) denkleminde bir fark yaklaşımı elde etmek için aşağıdaki eşitlikle başlıyoruz:

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t)\varphi_i(t)dt = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\varphi_i(t)dt, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (8.3.1)$$

Burada $\varphi_i(t)$ baz fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\varphi_i(t) = e^{-\int_t^{t_i} a(s) ds}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Bu baz fonksiyonu da aşağıdaki problemin çözümüdür.

$$\begin{aligned} -\varphi_i'(t) + a(t)\varphi_i(t) &= 0, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ \varphi_i(t_i) &= 1. \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

(8.3.1) bağıntısında (8.1.1) denklemini göz önüne alarak aşağıdaki şekilde bir bağıntı yazabiliriz.

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) \varphi_i(t) dt + h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) u(t) \varphi_i(t) dt + h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_0^t G(t, s, u(s)) ds \right] \varphi_i(t) dt = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \varphi_i(t) dt. \quad (8.3.3)$$

Daha sonra (8.3.3)' eşitliğinde her (t_{i-1}, t_i) aralığı üzerinde Amiraliyev ve Mamedov (1995) kaynağındaki (2.1) ve (2.2) interpolasyon kuadratür formüllerini kullanarak ve (8.3.2)' yi de göz önüne alarak,

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) \varphi_i(t) dt = u_{\bar{t},i} \left(h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt \right) + R_i^{(*)}$$

$$R_i^{(*)} = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i'(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi) K_0(t, \xi) d\xi$$

$$= - h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i'(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) [T_0(t - \xi) - h^{-1}(t - t_{i-1})] d\xi. \quad (8.3.4)$$

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) \varphi_i(t) u(t) dt = \left(h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) \varphi_i(t) dt \right) u(t_i)$$

$$+ u_{\bar{t},i} \left(h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) \varphi_i(t) (t - t_{i-1}) dt \right) + R_i^{(**)}$$

$$R_i^{(**)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt a(t) \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi) K_0(t, \xi) d\xi$$

$$= - h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt a(t) \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) [T_0(t - \xi) - h^{-1}(t - t_{i-1})] d\xi. \quad (8.3.5)$$

Burada $\varphi_i(t)$, (8.3.2) denkleminin çözümü olduğundan

$$R_i^{(*)} + R_i^{(**)} = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt (-\varphi_i'(t) + a(t) \varphi_i(t)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi) K_0(t, \xi) d\xi = 0.$$

(8.3.3)' de ki çekirdek fonksiyonunu içeren integral terimi için uygun kuadratür kuralları uygulandıktan sonra

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_0^t G(t, s, u(s)) ds \right] \varphi_i(t) dt$$

$$= h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt \int_0^{t_i} G(t_i, s, u(s)) ds + R_i^{(1)},$$

elde edilir ki bu eşitliğe dikdörtgen kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt \int_0^{t_i} G(t_i, s, u(s)) ds + R_i^{(1)} \\
&= \left[h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt \right] h \sum_{j=1}^i G_{ij}(t_i, t_j, u_j) + R_i^{(1)} + R_i^{(2)}.
\end{aligned}$$

Bağıntısı elde edilir. Burada

$$R_i^{(1)} = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^t G(\xi, s, u(s)) ds \right) d\xi, \quad (8.3.6)$$

$$R_i^{(2)} = \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{j-1}) \frac{d}{dt} G(t_i, \xi, u(\xi)) d\xi, \quad (8.3.7)$$

bulunur.

Böylece $u(t_i)$ yaklaşımı için aşağıdaki fark şeması yazılabilir.

$$lu_i := A_i u_{\bar{t},i} + B_i u_i + h C_i \sum_{j=1}^i G_{ij}(t_i, t_j, u_j) + R_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.3.8)$$

$$u_0 = \mu. \quad (8.3.9)$$

Burada

$$A_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt + h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) a(t) \varphi_i(t) dt, \quad (8.3.10)$$

$$B_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) \varphi_i(t) dt, \quad (8.3.11)$$

$$C_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt, \quad (8.3.12)$$

$$F_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \varphi_i(t) dt, \quad (8.3.13)$$

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}. \quad (8.3.14)$$

(8.3.8) de ki kalan terimi ihmal edersek (8.1.1) ve (8.1.2) yaklaşımı için aşağıdaki fark şemasını sunabiliriz:

$$ly_i := A_i y_{\bar{t},i} + B_i y_i + h C_i \sum_{j=1}^i G_{ij}(t_i, t_j, y_j) = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.3.15)$$

$$y_0 = \mu. \quad (8.3.16)$$

Burada A_i, B_i, C_i ve F_i sırasıyla (8.3.10), (8.3.11), (8.3.12), (8.3.13) bağıntılarıyla tanımlanmıştır.

8.4. Kararlılık Sınırı ve Yakınsama

Metodun yakınsaklığını incelemek için, u_i (8.1.1) – (8.1.2) probleminin çözümü ve y_i (8.3.15) – (8.3.16) probleminin çözümü olsun. Hata fonksiyonu $z_i = y_i - u_i$, ($1 \leq i \leq N$), aşağıdaki problemin çözümüdür.

$$lz_i := A_i z_{\bar{t},i} + B_i z_i + h C_i \sum_{j=1}^i G_{ij}(t_i, t_j, z_j) = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.4.1)$$

$$z_0 = 0. \quad (8.4.2)$$

Burada R_i kalan terimi (8.3.14) bağıntısıyla tanımlanmıştır.

Lemma 8.4.1. $|P_i| \leq \bar{P}_i$ ve \bar{P}_i azalmayan fonksiyon olsun.

$$lv_i := A_i v_{\bar{t},i} + B_i v_i = P_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (8.4.3)$$

$$v_0 = A. \quad (8.4.4)$$

(8.4.3) - (8.4.4) fark probleminin çözümü aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$|v_i| \leq |A| + \alpha^{-1} \bar{P}_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

İspat. İlk olarak maksimum prensibi için lg_i fark operatörünü ele alalım. Herhangi bir şebeke fonksiyonu için $lg_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ ve $g_0 \geq 0$ ise $g_i \geq 0$ $i = 1, 2, \dots, N$ olur.

Maksimum prensibi gereğince her $g(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu için yazılacak $|g(x)| \leq |g(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |lg(s)|$, $0 \leq x \leq l$ değerlendirmesinin doğru olduğunu göstermektedir.

Bu değerlendirmeyi (8.4.3) ve (8.4.4)' e uygularsak

$$\begin{aligned} |v_i| &\leq |A| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |P_i|, \\ &\leq |A| + \alpha^{-1} \bar{P}_i \end{aligned}$$

olur.

Lemma 8.4.2. Lemma 8.2.1 şartları altında R_i kalan terimi için aşağıdaki değerlendirme sağlanır.

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq Ch.$$

İspat. $0 < \varphi_i(t) \leq 1$ olduğu için ilk önce (8.3.6)' da

$$|R_i^{(1)}| \leq h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left[\frac{d}{d\xi} \left(\int_0^t G(\xi, s, u(s)) ds \right) \right] d\xi,$$

olur ve Leibnitz kuralı uyguladıktan sonra aşağıdaki eşitsizliği elde ediyoruz. Burada $\|u\|_\infty \leq C_0$ ve $\bar{K} = \max_{I \times I} |K(t, s)|$ olduğu için

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left[|G(\xi, \xi, u(\xi))| + \int_0^\xi \left| \frac{\partial}{\partial \xi} G(\xi, s, u(s)) \right| ds \right] d\xi \\ &\leq Ch. \end{aligned}$$

Sonra (8.3.7) için ve $\|u'\|_\infty \leq C$, $\bar{K} = \max_{I \times I} |K(t, s)|$ göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{j-1}) \left| \frac{d}{d\xi} G(t_i, \xi, u(\xi)) \right| d\xi \\ &\leq \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{j-1}) \left[\left| \frac{d}{d\xi} G(t_i, \xi, u(\xi)) \right| + \left| \frac{d}{du} G(t_i, \xi, u(\xi)) \right| |u'(s)| \right] d\xi \\ &\leq Ch, \end{aligned}$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} \leq Ch$ olur ki lemma 8.4.2 doğruluğu ortaya çıkar.

Lemma 8.4.3. (8.4.1) ve (8.4.2)' nin çözümü z olsun. O halde aşağıdaki değerlendirme sağlanır.

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \|R\|_{\infty, \omega_N} \quad (8.4.5)$$

İspat. (8.4.1) - (8.4.2)' nin çözümünden aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$lz_i := A_i z_{\bar{t}, i} + B_i z_i = h C_i \sum_{j=1}^i [G_{ij}(t_i, t_j, y_j) - G_{ij}(t_i, t_j, u_j)] + R_i. \quad (8.4.6)$$

(8.4.6)' nin sağ tarafına ortalama değer teoremini uygularsak,

$$\frac{G_{ij}(t_i, t_j, y_j) - G_{ij}(t_i, t_j, u_j)}{y_j - u_j} = \frac{\partial G}{\partial u}(t_i, \bar{y}_j), \quad \bar{y}_j = \gamma y_j, \quad 0 < \gamma < 1,$$

olur.

$$G_{ij}(t_i, t_j, y_j) - G_{ij}(t_i, t_j, u_j) = \frac{\partial G}{\partial u}(t_i, \bar{y}_j)(y_j - u_j),$$

burada

$$\frac{\partial G}{\partial u}(t_i, \bar{y}_j) = \bar{G}, \quad (y_j - u_j) = z_j,$$

alınarak

$$G_{ij}(t_i, t_j, y_j) - G_{ij}(t_i, t_j, u_j) = \bar{G}z_j.$$

(8.4.6)'yı düzenleyelim,

$$A_i z_{\bar{t},i} + B_i z_i = hC_i \sum_{j=1}^i \bar{G}z_j + R_i.$$

$$z_0 = 0.$$

Burada lemma 8.4.1 göz önüne alınarak,

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + \alpha^{-1} \bar{G}h \sum_{j=1}^i |z_j|, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliğinin fark benzerini kullanarak

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} e^{\alpha^{-1} \bar{G}t_i}$$

elde edilir ve bu da (8.4.5)'in doğruluğunu gösterir.

Sonuç olarak aşağıdaki temel yakınsaklık sonucunu veriyoruz.

Teorem 8.4.1. u , (8.1.1) - (8.1.2) ve y' de (8.3.8) - (8.3.9)'un çözümü olsun. O zaman aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq Ch.$$

İspat. Lemma 8.4.2 ve lemma 8.4.3' den

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq C \|R\|_{\infty, \omega_N} \\ &\leq CCh \\ &\leq Ch. \end{aligned}$$

8.5. Algoritma ve Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde belirli bir probleme, (8.3.15) - (8.3.16) uygulayarak elde edilen nümerik sonuçları sunuyoruz.

(8.3.15) fark şemasını aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} y_i^{(n)} &= \frac{A_i}{A_i + hB_i} y_{i-1}^{(n)} + \frac{hF_i}{A_i + hB_i} + \frac{h^2 C_i}{A_i + hB_i} \sum_{j=1}^i G_{ij}(t_i, t_j, y_j^{(n-1)}), \\ y_0^{(n)} &= \mu, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Örnek 8.5.1. Şimdi aşağıdaki problemi ele alalım.

$$u'(t) + 2u(t) + \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s) ds = \sinh t, \quad t \in (0, 1],$$

$$u(0) = 1.$$

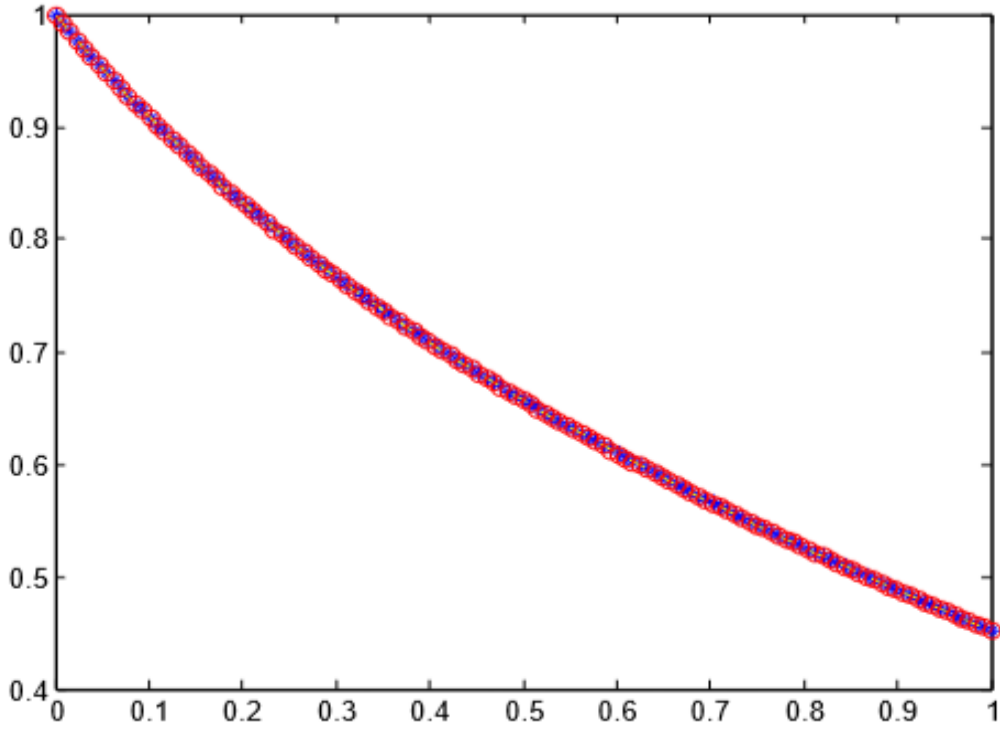
Verilmiş olan bu problemin kesin çözümü bilinmemektedir ve $\lambda = 1/2$ olarak verilmiştir. Hata yaklaşımları e^N ve yakınsama oranları p^N sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$e^N = \max_i |y_i^N - y_i^{2N}|, \quad p^N = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(e^N / e^{2N} \right).$$

Örnek 8.5.1' in mevcut yöntemle elde edilen nümerik sonuçları aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Çizelge 8.1. Örnek 8.5.1 için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları

N	e^N	e^{2N}	p
8	0.00355355	0.00191229	0.89396223
16	0.00192993	0.00099857	0.95060970
32	0.00100548	0.00051015	0.97887840
64	0.00051316	0.00025794	0.99237173
128	0.00025922	0.00012966	0.99939898
256	0.00013027	0.00006501	1.00292411
512	0.00006530	0.00003255	1.00468882
1024	0.00003269	0.00001628	1.00558105



Şekil 8.1. Örnek 8.5.1' in $N=128$ için hata yaklaşımları.

Örnek 8.5.2. Şimdi aşağıdaki problemi ele alalım.

$$u'(t) + tu(t) + \int_0^t u^3(s)ds = e^{-\frac{t}{2}} \left(t - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} e^{-\frac{3t}{2}} + \frac{2}{3}, \quad t \in (0, 1],$$

$$u(0) = 1.$$

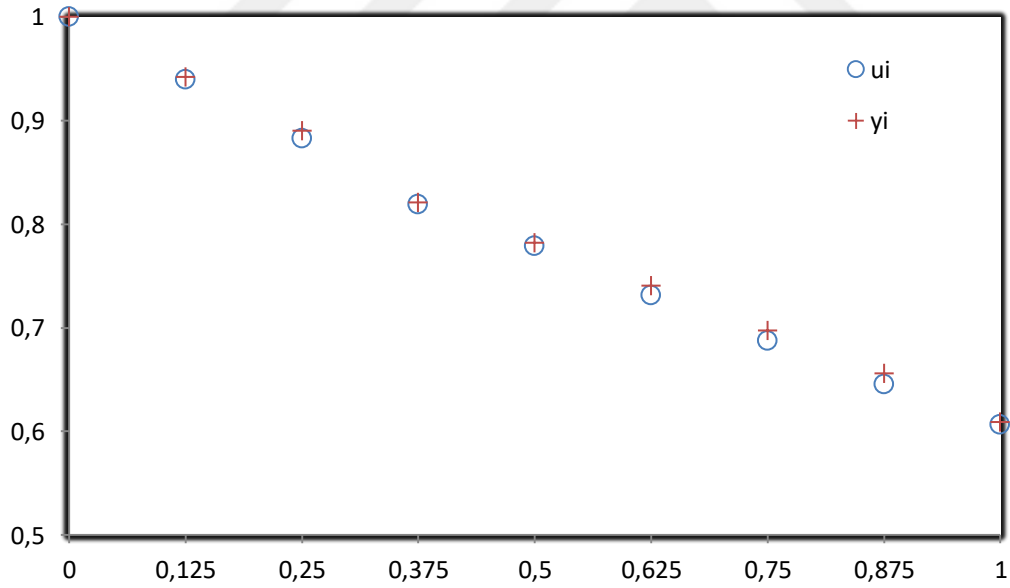
Yukarıdaki problemin kesin çözümü

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2}}.$$

Şeklinde verilmektedir ve $\lambda = 1$ olarak seçilmiştir. Örnek 8.5.2' nin kesin çözümün (u) ve mevcut yöntemle elde edilen nümerik çözümünün (y) sonuçları ve karşılaştırmaları aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

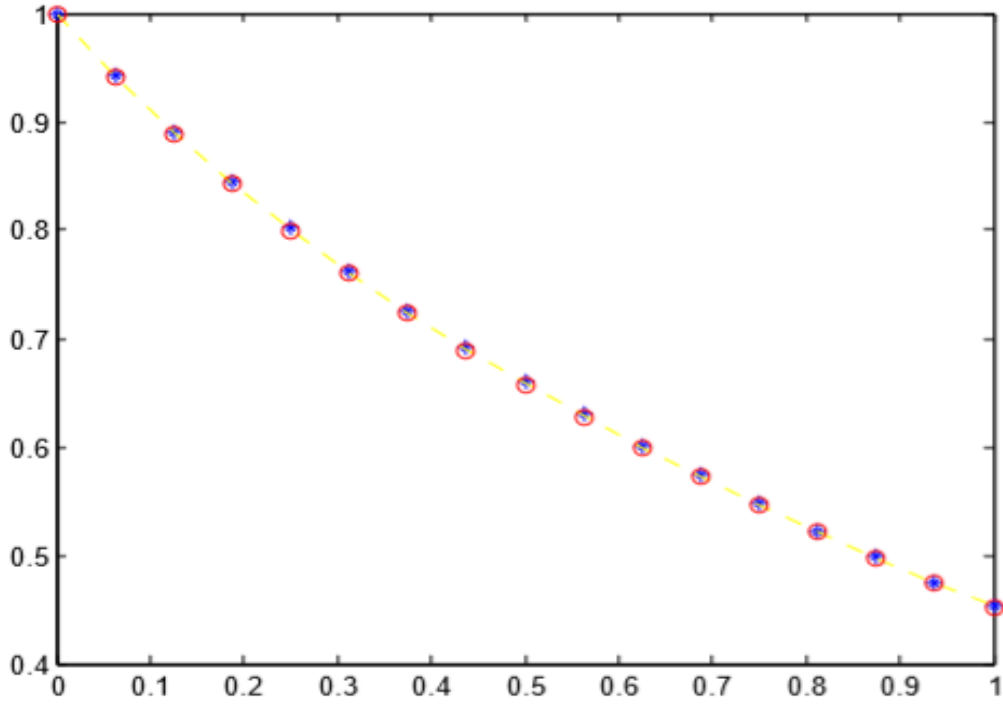
Çizelge 8.2. Örnek 8.5.2' nin N=128 için hesaplama sonuçları

t_i	u_i	y_i	$ y_i - u_i $
0.000	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.125	0.939413062813476	0.941919365207422	0.002506302393946
0.250	0.882496902584595	0.889869582916589	0.007372680331994
0.375	0.819029118180400	0.820636640376986	0.001607522196586
0.500	0.778800783071405	0.782288733631169	0.003487950559764
0.625	0.731615628946642	0.740859303711084	0.009243674764442
0.750	0.687289278790972	0.697620168323178	0.010330889532206
0.875	0.645648526427892	0.655935028974954	0.010286502547062
1.000	0.606530659712633	0.608813887706058	0.002283227993425

Şekil 8.2. Örnek 8.5.2 için u_i ve y_i değerlerinin karşılaştırması.

Çizelge 8.3. Örnek 8.5.2 için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları

N	e^N	e^{2N}	p
8	0.00236105	0.00133777	0.81960001
16	0.00133929	0.00071199	0.91153603
32	0.00071219	0.00036708	0.95616984
64	0.00036743	0.00018651	0.97822665
128	0.00018656	0.00009398	0.98919112
256	0.00009400	0.00004718	0.99464857
512	0.00004718	0.00002363	0.99738109
1024	0.00002364	0.00001183	0.99875856



Şekil 8.3. Örnek 8.5.2' nin N=32 için hata yaklaşımları.

9. TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematik ve doğa ile alakalı tüm bilimlerde integral denklemler göze çarpmaktadır. Bu da uğraşı alanının çok olduğu bir ortam doğurmaktadır.

İntegral denklemler için çözüm yolları değişik metotlar uygulanarak bulunabilmektedir. Fakat bu yöntemlerin hangisinin nümerik çözümlerde her daim daha iyi sonuçlar verdiğini söylemek mümkün değildir. Hatta hali hazırdaki bu metotların birçok problemi tam çözüme ulaştırmada yetersiz kaldıkları görülmektedir.

Bu tezde, integral denklemler ve uygulama alanlarına örnekler verilerek lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin, Birleştirilmiş Laplace Dönüşümü-Adomian Ayrıştırma Metodu ve Varyasyonel İterasyon Metodu ile çözüm yolları gösterilmiştir. Ayrıca birinci mertebeden lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi içeren başlangıç değer probleminin çözümünü tahmin etmek için yeni bir fark şeması sunulmuştur. Yöntem, düzgün bir şebeke üzerindeki üstel bir fark şemasına dayanmaktadır. Yöntemden elde edilen sonuçlar olarak, ayrık maksimum normda birinci dereceden yakınsama elde edilmiştir. Kurulmuş olan fark şeması ile elde edilen nümerik sonuçlar verilmiş olan örneklerle desteklenmiştir. Bu sonuçlar yöntemimizin etkinliğini ve kesinliğini göstermekte başarılıdır. Teorik sonuçlar gösterdi ki elde edilen fark şemasının daha ileride konu ile ilgili yapılacak olan çalışmalara bir ışık tutması beklenmektedir.



KAYNAKLAR

- Adomian, G., Elrod, M., Rach, R., 1987. A Nev Approach to Boundary Value Equations and Application to a Generalition of Airy's Equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **140**(2): 554-568.
- Aksoy, Y., 2011. *Diferansiyel Denklemler*. 1. Cilt. 3. Baskı. Yıldız Teknik Üniversitesi Basım Yayım Merkezi, Yayın No: 04.0714, İstanbul. 343.
- Aksoy, Y., 2017. *Diferansiyel Denklemler*. 2. Cilt. Yıldız Teknik Üniversitesi Basım Yayım Merkezi, Yayın No: 0905, İstanbul. 226.
- Al-Jawary, A., Ahmed, F. S., Fadhel, S. F., 2014. Analytic Approximate Solutions of Volterra's Population and Some Scientific Models by Power Series Method. *Mathematical Theory and Modeling*, **4** (11): 1-13.
- Al-Khaled, K., Allan, F., 2005. Decomposition Method for Solving Nonlinear Integro-Differential Equations. *J. Appl. Math. Computing Vol.*, **19** (1-2): 415-425.
- Al-Wesabi, Y., Dahawi, A., Daniel, Y., Murid, A., 2014. Analytical Solution of Volterra's Population Model Using Variation Iteration Method. *IRICT*, 413-423.
- Altıntan, D., Uğur, Ö., 2011. Generalisation of the Lagrange Multipliers for Variational Iterations Applied to Systems of Differential Equations. *Math. Comput. Modelling*, **54**: 2040-2050.
- Amin, R., Nazir, S., Garcia-Magarino, I., 2020. A Colocation Method for Numerical Solution of Nonlinear Delay Integro-Differential Equations for Wireless Sensor Network and Internet of Things. *Sensors*, **20**: 1962-1973.
- Amirali, G., Amirali, I., 2018. *Nümerik Analiz*. Birinci Baskı. Seçkin Yayıncılık, Yayın No: 12416, Ankara. 496.
- Amiraliyev, G., Yapman, Ö., Kudu, M., 2018. A fitted approximate method for a Volterra delay-integro-differential equation with initial layer. *Hacet. J. Math. Stat.*, **48** (5): 1417-1429.
- Amiraliyev, G., Mamedov, D., 1995. Difference Schemes On The Uniform Mesh For Singular Perturbed Pseudo-Parabolic Equations. *Tr. J. of Math.*, **19**: 207-222.
- Angelis, P., Marchis, R., Martire, A., 2020. A new numerical method for a class of Volterra and Fredholm integral equations. *J. Comput. Appl. Math.*, **379**: 1-13.
- Arqub, O. A., Al-Samadi, M., Momani, S., 2012. Application of Reproducing Kernel Method for Solving Nonlinear Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations. *Abstr. Appl. Anal.*, **16**: 1-16.
- Aziz, I., Islam, S., 2012. New algorithms fort he numerical solution of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations using Haar wavelets. *J. Comput. Appl. Math.*, **239**: 333-345.
- Babolian, E., Masouri, Z., Hatamzadeh-Varmazyar, S., 2009. Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations via direct method using triangular functions. *Comput. Math. Appl.*, **58**: 239-247.
- Bass, L., Brajken, A. J., Holmaker, K., Jefferies, B., 1986. Integro-Differential Equations For The Self-Organisation of Liver Zones By Competitive Exclusion Of Cell-Types. *J. Austral Mat. Soc. Ser.*, **29**: 156-194.
- Berenguer, M. I., Garralda-Guillem, A. I., Galan, M., 2010. Biorthogonal Systems Approximating the Solution of the Nonlinear Volterra Integro-Differential Equation. *Fixed Point Theory Appl.*, **9**: 1-9.

- Birjandi, M., Nadjafi, J., Ghorbani, A., 2018. An Efficient Numerical Method for a Class of Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations. *J. Appl. Math.*, **7**: 1-7.
- Bloom, F., 1980. Asymptotic Bounds for Solutions to a System of Damped Integro-Differential Equations of Electromagnetic Theory. *J. Math. Anal. Appl.*, **73**: 524-542.
- Bocher, M., 1909. *An Introduction to the Study of Integral Equations*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No: 10, Cambridge University Press, 1909.
- Brunner, H., 1984. Implicit Runge-Kutta Methods of Optimal Order for Volterra Integro-Differential Equations. *Math. Comput.*, **42** (165): 95-109.
- Burton, T. A., 2005. *Volterra Integral and Differential Equations*. Second Edition. Mathematics in Science and Engineering, 202. Elsevier B. V., Amsterdam. 353.
- Çakır, M., Gunes, B., Duru, H., 2021. A novel computational method for solving nonlinear Volterra integro-differential equation. *Kuwait J. Sci.*, **48** (1): 1-9.
- Çerdik-Yaslan, H., Akyüz-Daşcıoğlu, A., 2006. Chebyshev Polynomial Solution of Nonlinear Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations. *J. Arts. Sci.*, **5**: 89-101.
- Çimen, E., 2018. A Computational Method for Volterra Integro-Differential Equation. *Erzincan University J. Sci. Technology*, **11** (3): 347-352.
- Çimen, E., Enterili, K., 2020. Fredholm İntegro Diferansiyel Denklemi Sayısal Çözümü İçin Alternatif Bir Yöntem. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **13** (1): 46-53.
- Çimen, E., Yatar, S., 2020. Numerical solution of Volterra integro-differential equation with delay. *J. Math. Computer Sci.*, **20**: 255-263.
- Ebaid, A., 2013. Analytical Solutions for the Mathematical Model Describing the Formation of Liver Zones via Adomian's Method. *Comput. Math. Methods in Medicine*. Article ID 547954, 8 pages.
- Edwards, J., Ford, N., Roberts, J., 2003. Bifurcations in Numerical Methods for Volterra Integro-Differential Equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13** (11): 3255-3271.
- Forbes, K., Crozier, S., Doddrell, D., 1997. Calculating Current Densities and Fields Produced by Shielded Magnetic Resonance Imaging Probes. *SIAM J. Appl. Math.*, **57** (2): 401-425.
- Ford, N., Baker, C., Roberts, J., 1998. Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations Stability and Numerical Stability θ –Methods. *J. Integral Equ. Appl.*, **10** (4): 397-416.
- Haq, F., Shah, K., Rahman, G., Shahzad, M., 2017. Numerical solution of Fractional Order Smoking Model Via Laplace Adomian Decomposition Method. *Alex. Eng. J.*, **57** (2): 1061-1069.
- Hashim, I., 2005. Adomian decomposition method for solving BVPs for fourth-order integro-differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, **193**: 658-664.
- He, J., 2006. Variational Iteration Method-Some Recent Result and New Interpretations. *J. Comput. Appl. Math.*, **207**: 3-17.
- Horvat-Marc, A., Precup, R., 2000. Nonnegative Solutions of Nonlinear Integral Equations in Ordered Banach Spaces. *Fixed Point Theory*, **5** (1): 65-70.
- Huang, C., 2007. Stability of linear methods for delay integro-differential equations. *Comput. Math. Appl.*, **55**: 2830-2838.

- İlhan, E., 2011. *Diferensiyel Denklemlerin Varyasyonel İterasyon Metodu İle Yaklaşık Analitik Çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir.
- Inokuti, M., Sekine, H., Mura, T., 1978. General Use of the Lagrange Multiplier in Nonlinear Mathematical Physics. *Variational Method in the Mechanics of Solids*. Pergamon Press, New York. 156-162.
- Jerri, A., 1999. *Introduction to Integral Equations with Applications*. Copyright by John Wiley, Sons, New York.
- Kanar, S., 2008. *İntegral Denklemler ve Çözüm Yöntemleri* (Yüksek Lisans Tezi). Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Şanlıurfa.
- Kanwal, R., 1997. *Linear Integral Equations*. Academic Press, London. 296.
- Khanlari, N., Paripour, M., 2018. Solving Nonlinear Integro-Differential Equations Using the Combined Homotopy Analysis Transform Method with Adomian Polynomials. *Communications in Math. Appl.*, **9** (4): 637-650.
- Khuri, S., 2001. A Laplace Decomposition Algorithm Applied to a Class of Nonlinear Differential Equations. *J. Math. Annl. Appl.*, **4**: 141-155.
- Kuşçu, H., 2020. Otomatik kontrol (Laplace ve Ters Laplace Dönüşümü.) http://hilmi.trakya.edu.tr/ders_notlari/otomatik_kontrol.5a.laplace.pdf. Trakya Üniversitesi, Edirne. Erişim tarihi: 21.07.2020.
- Linz, P., 1985. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia. 242.
- Lubich, C., 1983. On the Stability of Linear Multistep Methods for Volterra Convolution Equations. *IMA J. Numer. Anal.*, **3**(4): 439-465.
- Marzban, H. R., Hoseini, S. M., 2012. Solution of Nonlinear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations via Hybrid of Block-Pulse Functions and Lagrange Interpolating Polynomials. *Adv. Numer. Anal.*, **868** (279): 1-14.
- Mbroh, N. A., Noutchie, S., Massoukou, R., 2020. A second order finite difference scheme for singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *Alex. Eng. J.* (2020): 1-7.
- Nadjafi, J., Ghassabzade, F., 2010. Variational Iteration Method for Solving Nonlinear Differential-Difference Equations. *Aust. J. Basic, Appl. Sci.*, **4** (10): 4971-4975.
- Nashine, K., Pathak, R., Somvanshi, P., Pantelic, S., Kumam, P., 2013. Solutions for a class of nonlinear Volterra integral and integro-differential equation using cyclic (φ, Ψ, θ) -contraction. *Adv. Differ. Equ.*, **106**: 1-19.
- Parand, K., Delkhosh, M., 2018. System of Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations of Arbitrary Order. *Bol. Soc. Paran Mat.*, **36** (4): 33-54.
- Rahman, M., 2007. *Integral Equations and their Applications*. WIT Press, Southampton, Boston. 385.
- Saeedi, L., Tari, A., Masuleh, S. H., 2013. Numerical Solution of a Class of the Nonlinear Volterra Integro-Differential Equation. *J. Appl. Math. and Informatics*, **31** (1-2): 65-77.
- Sakran, M. R. A., 2019. Numerical Solutions of Integral and Integro-Differential Equations Using Chebyshev Polynomials of the Third Kind. *Appl. Math. Comput.*, **351**: 66-82.
- Shakeri, F., Dehghan, M., 2007. Solution of a Model Describing Biological Species Living Together Using the Variational Iteration Method. *Math. Comput. Modeling*, **48**: 685-689.

- Sweilam, N. H., 2006. Fourth order integro-differential equations using variational iteration method. *Comput. Math. Appl.*, **54**: 1086-1091.
- Şevgin, S., 2014. Numerical solution of a singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *Adv. Differ. Equ.*, **171**: 1-15.
- Tahmasbi, A., Fard, O. S., 2008. Numerical Solution of Nonlinear Volterra Integral Equations of the Second Kind by Power Series. *J. Inform. Comput. Sci.* **3** (1): 57-61.
- Tunç, C., 2015. Qualitative properties in nonlinear Volterra integro-differential equations with delay. *J. Taibah Univ. Sci.*, **11** (2): 309-314.
- Usta, F., 2015. *Lineer Olmayan İntegral Denklemler ve Uygulamaları* (Yüksek Lisans Tezi). Osman Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Valdes, J., 2001. A Note on the Boundedness of an Integro-Differential Equation. *Quaest. Math.*, **24** (2): 213-216.
- Vanani, S. K., Aminataei, A., 2011. Numerical solution of Volterra integro-differential Equations. *J. Comput. Anal. Appl.*, **13** (4): 654-662.
- Wazwaz, A. M., 2011. *Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications*. Higher Education Press, Saint Xavier University, Chiago. 639.
- Yousefi, S. A., Lotfi, A., Dehghan, M., 2009. He's Variational Iteration Method for Solving Nonlinear Mixed Volterra-Fredholm Integral Equations. *Comput. Math. Appl.*, **58**: 2172-2176.
- Zhang, C., Vandewalle, S., 2006. General Linear Methods for Volterra Integro-Differential Equations with Memory. *SIAM J. Sci. Comput.*, **27** (6): 2010-2031.
- Zhang, S., Lin, T., Lin, Y., Rao, M., 1998. Defect Correction and a Posteriori Error Estimation of Petrov-Galerkin Methods for Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations. *Appl. Math.*, **45** (4): 241-263.

EKLER

Ek 1: Örnek 8.5.1 ve Örnek 8.5.2 için MATLAB Programı

```
clc, clear all
% x0=input('x0= ');
% y0=input('y0= ');
% N=input('Adim sayisi = ');
% M=input('Iterasyon sayisi = ');

K=@(t,x,w) t-t+x-x+w.^2;
Kt=@(t,x,w) t-t+x-x+2.*w;

x0=0;
xN=1;
y0=1;
N=32;
M=3;
for k=1:3
    xx=x0:1/N:xN;
    for j=2:N+1
        h(j)=xx(j)-xx(j-1);
    end
    y(N+1,1)=y0;
    for j=2:M+1
        y(1,j)=1;
    end

    for j=2:N+1
        for n=2:M+1

            A(j)=exp(-2.*h(j));
            C(j)=(1-exp(-2.*h(j)))./h(j);
            F(j)=(exp(-xx(j)).*(1-exp(-h(j))))./h(j);
            TOP(j)=0;
            for l=1:j-1
                TOP(j)=TOP(j)+h(j).*K(xx(j),xx(l),y(j,n-1));
            end
            y(j,n)=(A(j)*y(j-1,n)+h(j).*F(j)+0.5.*C(j).*(h(j)).*TOP(j));
        end
    end

    end

% U=u(xx);
for j=1:N+1
    switch k
        case 1
            y21(j)=y(j,M+1);
```

```

        case 2
            y22(j)=y(j,M+1);
        end
    end
    end
    N=2*N;
    end
% *****
% *****
N=N/8;
% i=N/2;
tt=x0:1/N:xN;
y32=y22(1:2:2*N+1);
r0=abs(y21(1)-y22(1));
for j=2:N+1
    r0=max(r0,abs(y21(j)-y32(j)));
end
y33=y(1:4:4*N+1,M+1);
r1=abs(y22(1)-y33(1));
for j=2:N
    r1=max(r1,abs(y32(j)-y33(j)));
end
pt=reallog(r0/r1)/reallog(2);
fprintf('r0=% 10.8f  r1=% 10.8f  pt=% 10.8f\n',r0,r1,pt);
plot(tt,y21,'* b');
hold on
plot(tt,y32,'-- y');
hold on
plot(tt,y33,'o r');
% end

```

ÖZ GEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Van' da tamamladı. Lisans eğitimine 2001 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü' nde başladı ve 2006 yılında mezun oldu. 2010-2014 yılları arasında Adalet Bakanlığı bünyesinde memur olarak çalıştı. 2014 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Sınıf Öğretmenliği Bölümü' nden mezun oldu ve 2014-2019 yılları arasında Van' da sınıf öğretmeni olarak çalıştı. 2019 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2020 yılında Van 15 Temmuz Şehitleri Anadolu İmam Hatip Lisesi' ne matematik öğretmeni olarak geçiş yaptı. Halen bu okulda öğretmenlik görevine devam etmektedir.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 28/07/2021

Tez Başlığı / Konusu: LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLER

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 53 sayfalık kısmına ilişkin, 28/07/2021 tarihinde tez danışmanım tarafından TURNITIN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 14 (on dört) dur.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

28/07/2021

Adı Soyadı: Mehmet Emin ATEŞ

Öğrenci No:19910001226

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: Uygulamalı Matematik

Statüsü: Y. Lisans

Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Musa ÇAKIR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)