T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

ŞENAY ALIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAHRAMANMARAŞ 2021

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

ŞENAY ALIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

KAHRAMANMARAŞ 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Şenay ALIÇ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bilgilerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ŞENAY ALIÇ

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Giriş bölümünde çalışmanın tarihçesi, amacı ve konunun ele alınma nedenlerinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tez boyunca kullanılacak bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Bunlara ek olarak bu eğrilerin çatı elemanları, eğrilik ve burulmaları verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölüm ise bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Çalışmanın dördüncü bölümünde, Frenet çatısından farklı alternatif bir çatıya göre Smarandache eğrileri ile ilgili tanım ve teoremler ifade edilmiş, bu eğrilerin çatı elemanları, eğrilik ve burulmaları hesaplanmıştır. Beşinci bölümde ise alternatif çatıya göre özel bir eğri çifti olan WC* partner eğrilerinin Smarandache eğrileri tanımlanarak bu eğrilerin çatı elemanları ve eğrilik, burulmaları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Frenet Vektörleri, Smarandache Eğrileri, Alternatif çatı

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Eylül/2021

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Beyhan YILMAZ
Sayfa Sayısı: 68

SMARANDACHE CURVES ACCORDING TO ALTERNATİVE FRAME
(M.Sc. THESIS)

ŞENAY ALIÇ

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the introduction chapter, the history, purpose of the study and the reasons for dealing with the subject are mentioned. In the second chapter, some definitions and theorems that will be used throughout the thesis are given. In the third chapter, firstly, the definitions and theorems about Smarandache curves according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space are given. In addition to these, frame elements, curvature and torsion of these curves are given.

The fourth and fifth chapters are the original part of this study. In the fourth part of the study, definitions and theorems related to Smarandache curves are introduced according to alternative frame different from the Frenet frame. Also, frame elements, curvature and torsion of these curves are given. In the fifth chapter, the Smarandache curves of WC* partner curves, which are a special curve pair are defined and the frame elements and curvature and torsion of these curves are obtained.

Keywords: Euclidean Space, Frenet frame, Smarandache Curves, Alternative frame

Kahramanmaraş Sütçü Imam University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, September/2021

Supervisor: Asst. Prof. Beyhan YILMAZ
Page number: 68

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Beyhan YILMAZ'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim süresince bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen saygıdeğer hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Oğuzhan BAHADIR'a ve Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında beni yönlendiren bana vakit ayıran ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Dr. Feride TUĞRUL'a çok teşekkür ederim.

Beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme ve çalışmam boyunca benden bir an olsun desteğini ve bana olan güvenini esirgemeyen arkadaşım Murat ÇAKIR'a çok teşekkür ederim.

Şenay ALIÇ

iÇiNDEKiLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-Boyutlu reel iç çarpım uzayı
$\mathbb{E}^3$	:	3-Boyutlu Öklid uzayı
V	:	Vektör uzayı
I	:	$\mathbb{R}$, reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\langle , \rangle$	:	İç çarpım
$\wedge$	:	Vektörel çarpım
$\|,\|$	:	Norm
T, N, B	:	$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında eğrinin Frenet vektörleri
κ	:	Frenet çatısına göre birinci eğrilik
τ	:	Frenet çatısına göre ikincilik eğrilik
N, C, W	:	Alternatif çatı elemanları
f	:	Alternatif çatısına göre birinci eğrilik
g	:	Alternatif çatısına göre ikinci eğrilik
β_1	:	N^*C^*-Smarandache Eğrisi
β_2	:	C^*W^*-Smarandache Eğrisi
β_3	:	N^*W^*-Smarandache Eğrisi
β_4	:	$N^*C^*W^*$-Smarandache Eğrisi

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi, diferansiyel geometride çok kapsamlı bir çalışma alanı oluşturur. Temel diferensiyel geometri teorisinden bilindiği gibi eğrinin teğet T, asli normal N ve binormal B vektörleri göz önüne alındığında, bir düzlem eğrinin $\{T, N\}$ vektörleri tarafından geriliyorsa oskülatör düzlem, $\{T, B\}$ vektörleri tarafından geriliyorsa rektifiyan düzlem ve $\{N, B\}$ vektörleri tarafından geriliyorsa da normal düzlem adını alır. Eğrinin eğrilik ve burulma değerlerinin hesaplanmasıyla eğrinin biçimi ve uzunluğu belirlenebilmektedir. Özelikle eğrinin Serret-Frenet vektörleri, eğrinin eğrilik ve burulması bize eğri hakkında çok önemli bulgular sağlar. Bunun yanısıra eğrilerin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak, eğri çifti adını verdiğimiz eğriler için de birçok yeni teori elde edilmektedir. Eğrinin eğriliklerinin durumuna göre, pozisyon vektörünün bulunduğu düzlemlere göre sınıflandırılan ve adlandırılan pek çok özel eğri bulunmaktadır.

Bir aksiyomun, aynı uzayda farklı olması durumunda, aksiyomun saçma bir şekilde reddedildiği söylenir. Bu nedenle, bir aksiyomun kısmen ispat edildiği veya bir aksiyomun bir dereceye kadar ispat edildiği söylenebilir. Smarandache geometrisi, saçma bir şekilde reddedilen en az bir aksiyomu olan bir geometridir. Böylece, özel bir durum olarak, Öklidyen, Lobachevsky-Bolyai-Gauss ve Riemann geometrileri, bazı Smarandache geometrileri ile aynı uzayda tamamen birleştirilebilirdir. Bu son geometriler kısmen Öklid ve Öklid dışı olabilir. Smarandache geometrisindeki bir eğriye Smarandache eğrisi adı verilir (Ashbacher, 1997; Bhattacharya, 2004-2005; Mao, 2006). Regüler bir eğrinin Frenet vektörleri ile üretilen yer vektörüne sahip regüler eğri olarak da tanımlanır. Bu eğriler pek çok yazar tarafından pek çok farklı uzayda karakterize edilmiştir. Konu ile ilgili çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir:

2008 yılında Turgut ve Yılmaz tarafından yapılan "Smarandache Curves in Minkowski space-time" isimli çalışmada Minkowski uzayında Smarandache eğrisinin tanımını ifade ederek, E_1^4 de TB_2 Smarandache eğrisine ait bazı özel durumları incelemiş ve bu eğrinin Frenet elemanlarını hesaplamıştır (Turgut ve Yılmaz, 2008). A. T. Ali, 2010 yılında, "Special Smarandache Curves in Euclidian Space" isimli çalışmada bazı özel Smarandache eğrilerini tanımlayarak bu eğrilere ait Frenet-Serret invaryantlarının özel durumlarını çalışmıştır (Ali, 2010). Şenyurt ve Sivas, "An Application of Smarandache

Curve" isimli çalışmada α eğrisinin Frenet vektörleri, $\{T, N, B\}$ ve birim Darboux vektörü C olmak üzere NC -Smarandache eğrisini tanımlamışlar ve bununla birlikte NB ve TNB -Smarandache eğrilerinin eğriliklerini hesaplamışlardır (Şenyurt ve Sivas, 2013). Bektaş ve Yüce, "Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidian 3-Space" isimli çalışmada Öklid uzayında Darboux çatısına ait Smarandache eğrilerini incelemişler ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonları ve sonuçları vermişlerdir (Bektaş ve Yüce, 2013). Çetin ve ark., "Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidian 3-Space" isimli çalışmada Öklid uzayında Bishop çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlar ve bu eğrilerin bazı diferansiyel geometrik özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca Smarandache eğrisine ait oskülatör kürenin merkezini ve kürenin eğriliği ile ilgili bazı sonuçlar bulmuşlardır (Çetin ve ark., 2014). Taşköprü ve Tosun, "Smarandache Curves According to Sabban Frame on S^2" isimli çalışmada S^2 birim küresi üzerinde Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemişler ve bu eğrilerin karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir (Taşköprü ve Tosun, 2014). Şenyurt ve Kaya, "NC-Smarandache Curve and NW-Smarandache Curve According to Alternative Frame" isimli çalışmada çatı elemanlarını, eğrilik ve torsiyonlarını hesaplamışlardır (Şenyurt ve Kaya, 2018). Ouarab, "NC-Smarandache Ruled Surface and NW-Smarandache Ruled Surface according to Alternative Moving Frame in E^3 " isimli çalışmada bu özel yüzeylerin geliştirilebilir ve minimal olması için gerekli ve yeterli koşulları veren teoremlerle ilgili sonuçlar elde etmiştir (Ouarab, 2021). Yine Smarandache eğrileri ile ilgili son yıllarda oldukça sık çalışma yapılmıştır (Elzawy, 2017; Abdel-Aziz ve Saad, 2017; Saad ve Abdel-Baky, 2020; Lal, 2021; Solouma, 2021).

Öte yandan karşılıklı noktalardan bazı özellikleri sağlayan eğri çiftlerinden Bertrand eğri çifti, İnvolüt-Evolut eğri çifti, Mannheim eğri çifti gibi pek çok eğri çiftleri bulunmaktadır. Bu eğrilerin de Smarandache eğrileri pek çok yazar tarafından incelenmiştir (Çalışkan, 2014; Sivas, 2014; Çelik, 2016).

Bu tez çalışmasında ise, Frenet çatısından farklı bir alternatif çatı yardımıyla tanımlamış olduğumuz Smarandache eğrilerine ve tanımlanmış özel bir eğri çifti olan WC^* eğri çiftleri üzerine çalışılıp bu eğri çiftlerinin Smarandache eğrilerinin çatı elemanları elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlerden söz edilecektir.

2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1 A boştan farklı bir cümle, V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$f : A \times A \to V$$

$$(P, Q) \to f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

fonksiyonu

A1. $\forall$ P,Q,R $\in$ A için f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)

A2. $\forall$P $\in$ A, $\forall\vec{\alpha}\in$ V için f(P,Q)= $\vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek Q $\in$ A noktası vardır.

özelliklerini sağlıyorsa A'ya V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu afin uzay denir. Burada A1 ve A2 özelliklerine afin aksiyomları denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2 A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu afin uzay olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi ($\overrightarrow{P_0P_i} \in V$), V vektör uzayının bir bazı (tabanı) ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta (n+1)-lisine A afin uzayında bir afin çatı denir. Burada P_0 noktasına afin çatının başlangıç noktası $P_0, P_1, ..., P_n$ noktalarına da afin çatının uç noktaları denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Teorem 2.1 A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu afin uzay olsun. A afin uzayında belli bir $P_0 \in A$ noktası tespit edildiğinde başlangıcı $P_0 \in A$ noktası olan bir afin çatı vardır (Hacısalihoğlu, 2000).

İspat:

V, n-boyutlu bir vektör uzayı olduğundan $\{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, ..., \vec{\alpha_n}\}$ sistemi V nin bir bazı olsun.
$P_0 \in A$ noktası seçildiğinde A2 aksiyomu gereğince;
$\vec{\alpha_1} = \overrightarrow{P_0P_1}$ olacak şekilde bir tek $P_1 \in A$,
$\vec{\alpha_2} = \overrightarrow{P_0P_2}$ olacak şekilde bir tek $P_2 \in A$,
$\vdots$
$\vec{\alpha_n} = \overrightarrow{P_0P_n}$ olacak şekilde bir tek $P_n \in A$ noktası vardır.

$\{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, ..., \vec{\alpha_n}\}$ sistemi V nin bir bazı olduğundan $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi de V nin bir bazıdır. O halde $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ sistemi başlangıç noktası $P_0 \in A$ noktası olan A'da bir afin çatıdır.

Tanım 2.3 A, V vektör uzayı ile bileşen n-boyutlu afin uzay olsun. Eğer A afin uzayının birleştiği V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise bu A afin uzayına Öklid uzayı denir. Her afin uzay bir Öklid uzayı değilken her Öklid uzayı bir afin uzayıdır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.4 $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayı ile birleşen bir Öklid uzayı ve $E_0, E_1, ..., E_n \in \mathbb{E}^n$ olsun. Eğer $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, ..., \overrightarrow{E_0E_n}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ uzayının bir ortonormal bazı ise yani, $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, ..., \overrightarrow{E_0E_n}\}$, $\mathbb{R}^n$ nin bir bazı ve $< \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} > = \delta_i j$ (kronecker deltası) ise $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ nokta kümesine $\mathbb{E}^n$ de bir Öklid çatısı (dik çatı) denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Uyarı

Her Öklid uzayı bir afin uzay olduğundan her Öklid çatısı da bir afin çatıdır.

Tanım 2.5 $d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$,

$$d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(X,Y) \in \mathbb{R}$ sayısına da X ile Y noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Teorem 2.2 $\mathbb{E}^n$ de uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoğlu, 2000).

İspat:

1. $\mathbb{E}^n$ ile birleşen $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayında iç çarpım fonksiyonu pozitif tanımlı olduğundan, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ için $\|\alpha\| \geq 0$ Yani
   $\|\alpha\| = \|\vec{xy}\| = d(x,y) \geq 0$ dır.
   $\Rightarrow d(x,y) = \|\vec{xy}\| = 0$ ise $x - y = 0 \Rightarrow x = y$
   $\Leftarrow x = y$ ise $x - y = 0$ ve $d(x,y) = \|\vec{xy}\| = 0$

2. d(x,y) $=\|\vec{xy}\| = \|\vec{yx}\|=$d(y,x)

3. $\|\overrightarrow{XZ}\| = |\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ}| \leq \|\overrightarrow{XY}\| + \|\overrightarrow{YZ}\|$ dır.

Bu üç özellik sağlandığından $\mathbb{E}^n$ de uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Tanım 2.6 n boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de $\forall\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{E}^n$ için,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.7 $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı ve $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.8 V bir iç çarpım uzayı olsun. $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\vec{x}, \vec{y} \neq 0$ olmak üzere bu iki vektör arasındaki açı

$$\cos\theta = \frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

eşitliği ile tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.9 3 boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$ için Öklid vektörel çarpımı,

$$x \wedge y = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.10 $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı ve I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ kümesine $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir eğri denir. Ayrıca (I,α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu, I alt kümesine eğrinin parametre aralığı ve t$\in I$ reel sayısına eğrinin parametresi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.11 $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to \mathbb{E}^{n+1}$' nın Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1})$, $\alpha(t) \in M$ eğrisinin diferansiyeli aşağıdaki gibidir,

$$\alpha^{'}(t) = (\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}, \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}, ..., \frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial t})$$

$\alpha^{'}(t)$ tanjant vektörüne M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.12 $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha^{'}(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.13 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.14 V bir iç çarpım uzayı $E \subset V$ olsun. E içindeki farklı her vektör çifti ortogonal ise E'ye ortogonal vektör kümesi denir. Ayrıca ortogonal E kümesindeki her vektörün uzunluğu 1 ise E'ye ortonormal bir küme denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.15 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha^{'}, \alpha^{'}, ..., \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için: $\alpha^{(k)} \in S_p\psi$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), ..., V_r, (m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektörü denir.

Özel hal: n=3 özel halinde, 3-boyutlu Öklid uzayında Serret-Frenet 3-ayaklısı elde edilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$\begin{cases} T(s) = \alpha^{'}(s) \\ N(s) = \frac{\alpha^{'}(s)}{||\alpha^{'}(s)||} \\ B(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases} . \tag{2.1.1}$$

şeklindedir. Böylece $\{T(s), N(s), B(s)\}$ sistemi, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin Serret-Frenet 3-ayaklısıdır. Burada T(s) vektörüne, teğet vektör alanı, N(s) vektörüne asli normal vektör alanı ve B(s) vektörüne binormal vektör alanı adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.16 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğrinin birinci ve ikinci eğriliği sırasıyla $\kappa(s) = \langle T^{'}(s), N(s)\rangle$ ve $\tau(s) = \langle N^{'}(s), B(s)\rangle$ şeklinde tanımlanmak üzere $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Serret-Frenet çatısı için değişim formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} T^{'}(s) \\ N^{'}(s) \\ B^{'}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

Birim hızlı α eğrisi için eğrinin birinci eğriliği olan $\kappa(s)$ ifadesi eğrinin s parametresine karşılık gelen noktasındaki eğriliği adını alır ve $\kappa(s) = \|\alpha^{''}(s)\|$ şeklinde hesaplanır. Eğrinin birinci eğriliği teğetten sapma miktarını ölçer. Eğrinin ikinci eğriliği olan $\tau(s)$ skaler çarpanına ise eğrinin s parametresine karşılık gelen noktasındaki burulması denir. Burulma kısaca eğrinin Oskülatör düzlemden ayrılma miktarının ölçüsü olarak da ifade edilebilir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$\tau = \frac{< \alpha^{'}(s) \wedge \alpha^{''}(s), \alpha^{'''}(s) >}{\|\alpha^{'}(s) \wedge \alpha^{''}(s)\|^2} \tag{2.1.3}$$

(Hacısalihoğlu, 2000).

2.2 3-Boyutlu Öklid Uzayında Alternatif Çatıya Göre Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.17 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğri olsun. Frenet çatısından farklı olan bir alternatif çatı $\{N(s), C(s), W(s)\}$ ile tanımlı olmak üzere

$$N(s) = N(s), \quad C(s) = \frac{N^{'}(s)}{\|N^{'}(s)\|}, \quad W(s) = N(s) \wedge C(s) \tag{2.2.1}$$

şeklindedir (Uzunoğlu ve ark., 2016). Alternatif çatıya göre türev değişiminin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} N^{'}(s) \\ C^{'}(s) \\ W^{'}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ C(s) \\ W(s) \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

olup burada f ve g, α eğrisinin alternatif çatıya göre eğrilikleridir. Bu eğriliklerin Frenet eğriliklerle olan ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} f(s) = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\ g(s) = \frac{(\tau/\kappa)'}{1+\tau^2/\kappa^2} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Tanım 2.18 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ ve $\alpha^* : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler iki eğri olsun. Alternatif açıya göre eğrilerin çatı elemanları sırasıyla $\{N, C, W, f, g\}$ ve $\{N^*, C^*, W^*, f^*, g^*\}$ şeklindedir. Eğer $W = C^*$ ise bu eğriler WC^* eğri çifti olarak adlandırılır. Bu eğri çiftinin çatı elemanları arasında

$$\begin{pmatrix} N^* \\ C^* \\ W^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(90-\theta) & sin(90-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin(90-\theta) & cos(90-\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ C \\ W \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

$$\begin{cases} N^* = sin\theta N + cos\theta C \\ C^* = W \\ W^* = -cos\theta N + sin\theta C \end{cases} \tag{2.2.5}$$

şeklinde bağıntı vardır (Has ve Yılmaz, 2020).

Tanım 2.19 (α, α^*) WC^* eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri f ve g, α^* eğrisinin eğrilikleri f^* ve g^* olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} f^* = gcos\theta \\ g^* = -gsin\theta \end{cases} . \tag{2.2.6}$$

bağıntısı vardır (Has ve Yılmaz, 2020).

3. ÖKLİD UZAYINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ

Tanım 3.1 Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye **Smarandache eğrisi** denir (Turgut ve Yılmaz, 2008). Bu tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir.

Tanım 3.2 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin Frenet çatısı {T(s),N(s),B(s)} olsun. Konum vektörü

$$\beta(s) = \frac{a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s) + c^2(s)}}$$

olan vektörün çizdiği regüler eğriye **Smarandache eğrisi** denir (Şenyurt ve Sivas, 2013).

3.1 TN−Smarandache Eğrisi

Tanım 3.3 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T(s),N(s),B(s)} olsun.

$$\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + N(s))$$

eğrisi TN−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, 2010).

Teorem 3.1 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T,N,B}, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun. TN-Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} \kappa_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2+\tau^2)^2}\sqrt{\delta_1^2 + \mu_1^2 + \eta_1^2}, \\ \tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}[(\tau^3+2\kappa^2\tau-\tau\kappa'+\kappa\tau')\bar{\delta}_1+(\kappa\tau'-\kappa'\tau)\bar{\mu}_1+(2\kappa^3+\kappa\tau^2)\bar{\eta}_1]}{(\tau^3+2\kappa^2\tau-\tau\kappa'+\kappa\tau')^2+(\kappa\tau'-\kappa'\tau)^2+(2\kappa^3+\kappa\tau^2)^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \delta_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \\ \mu_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) - \tau(\tau^3 + \kappa\tau' - \tau\kappa')] \\ \eta_1 = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\delta_1} = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa^{'}) - \kappa^{''} \\ \overline{\mu_1} = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa^{'}) - 3\tau\tau' + \kappa^{''} \\ \overline{\eta_1} = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa^{'} + \kappa\tau^{'} + \tau^{''} \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır (Ali, 2010).

İspat: s yay parametresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere TN$-$Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + N(s))$$

şeklindedir. Bu eğrinin yay parametresi s_β ile ifade edilirse TN$-$Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonu hesaplanabilir. Bunun için eğrinin türevi alınırsa,

$$\frac{d\beta_{TN}}{ds_\beta} \cdot \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin normu alınırsa,

$$\left\| \frac{d\beta_{TN}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa^2 + \kappa^2 + \tau^2)} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}$$

bulunur. Buradan $\beta_{TN}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$T_{\beta_{TN}} = \frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}} \tag{3.1.1}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün bir kez daha türevi alınırsa,

$$\begin{cases} \delta_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa^{'} - \kappa\tau^{'})] \\ \mu_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) - \tau(\tau^3 + \kappa\tau' - \tau\kappa')] \\ \eta_1 = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa^{'} - \kappa\tau^{'})] \end{cases}$$

olmak üzere $T^{'}_{\beta_{TN}}$ vektörü

$$T^{'}_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}(\delta_1 T + \mu_1 N + \eta_1 B) \tag{3.1.2}$$

şeklinde bulunur. β_{TN} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse (3.1.2) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \|T'_{\beta_{TN}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2+\tau^2)^2}\sqrt{\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2}$$

olur. β_{TN} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse, bu vektör

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{T'_{\beta_{TN}}}{\|T'_{\beta_{TN}}\|},$$

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B}{\sqrt{\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TN}} = T_{\beta_{TN}} \wedge N_{\beta_{TN}}$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$B_{\beta_{TN}} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}\sqrt{\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2}} \cdot \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa & \tau \\ \delta_1 & \mu_1 & \eta_1 \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$B_{\beta_{TN}} = \frac{(\kappa\eta_1-\tau\mu_1)T+(\tau\delta_1+\kappa\eta_1)N-(\kappa\mu_1+\kappa\delta_1)B}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}\sqrt{\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2}}$$

şeklinde elde edilir. Torsiyonu bulmak için β_{TN} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerini bulmak gerekir. Buna göre bu türevler

$$\beta''_{TN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(\kappa^2+\kappa')T+(\kappa'-\kappa^2-\tau^2)N+(\kappa\tau+\tau')B\}$$

ve

$$\beta'''_{TN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\bar{\delta}_1 T+\bar{\mu}_1 N+\bar{\eta}_1 B\}$$

şeklinde bulunur. Burada $\overline{\delta_1}, \overline{\mu_1}$ ve $\overline{\eta_1}$

$$\begin{cases} \overline{\delta_1} = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \overline{\mu_1} = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \overline{\eta_1} = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır. β_{TN} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TN}}$ ile gösterilip, aşağıdaki bağıntı ile elde edilir.

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{< \beta'_{TN} \wedge \beta''_{TN}, \beta'''_{TN} >}{\|\beta'_{TN} \wedge \beta''_{TN}\|^2}$$

Burada β_{TN} eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazıldığında, β_{TN} eğrisinin $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu,

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}[(\tau^3 + 2\kappa^2\tau - \tau\kappa' + \kappa\tau')\bar{\delta}_1 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)\bar{\mu}_1 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)\bar{\eta}_1]}{(\tau^3 + 2\kappa^2\tau - \tau\kappa' + \kappa\tau')^2 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

3.2 TB−Smarandache Eğrisi

Tanım 3.4 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T(s),N(s),B(s)} olsun.

$$\beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + B(s))$$

eğrisi TB−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, 2010).

Teorem 3.2 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T,N,B}, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun. TB−Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TB}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} \kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\delta_2^2+\mu_2^2)}}{(\kappa-\tau)^4} \\ \tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}[\kappa^2\tau\bar{\delta}_2 - 2\kappa\tau^2\bar{\delta}_2 + \tau^3\bar{\delta}_2 + \kappa^3\bar{\eta}_2 - 2\kappa^2\tau\bar{\eta}_2 + \kappa\tau^2\bar{\eta}_2]}{(\tau(\kappa-\tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa-\tau)^2)^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \delta_2 = -\kappa^4 + 3\kappa^3\tau - 3\kappa^2\tau^2 + \kappa\tau^3 \\ \mu_2 = 0 \\ \eta_2 = \kappa^3\tau - 3\kappa^2\tau^2 + 3\kappa\tau^3 - \tau^4 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\delta_2} = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^{'}\tau \\ \overline{\mu_2} = (\tau-\kappa)(\tau^2+\kappa^2) + \kappa^{''} - \tau'' \\ \overline{\eta_2} = -3\tau\tau' + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır (Ali, 2010).

İspat: s yay parametresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere TB$-$Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + B(s))$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eğrinin yay parametresi s_β ile ifade edilirse TB$-$Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonu hesaplanabilir. Bunun için ilk olarak eğrinin türevi alınırsa,

$$\frac{d\beta_{TB}}{ds_\beta} \cdot \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}((\kappa-\tau)N)$$

ifadesi bulunur. Bu ifadenin normu alınırsa,

$$\left\| \frac{d\beta_{TB}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa-\tau)^2}{2}} = \frac{|\kappa-\tau|}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Buradan $\beta_{TB}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$T_{\beta_{TB}} = \begin{cases} N, & \kappa > \tau \\ -N, & \kappa < \tau \end{cases} \tag{3.2.1}$$

şeklinde bulunur. Bu teğet vektörünün bir kez daha türevi alınırsa,

$$T^{'}_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa-\tau}(-\kappa T + \tau B) \tag{3.2.2}$$

şeklinde bulunur. $\beta_{TB}(s)$ eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse (3.2.2) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \|T^{'}_{\beta_{TB}(s)}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2+\tau^2)}}{\kappa-\tau}$$

olur. β_{TB} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse, bu vektör

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{T'_{\beta_{TB}}}{\|T'_{\beta_{TB}}\|},$$

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(-\kappa T + \tau B)$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TB}} = T_{\beta_{TB}} \wedge N_{\beta_{TB}}$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$B_{\beta_{TB}} = \frac{1}{\kappa^2+\tau^2} \cdot \begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$B_{\beta_{TB}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

vektör alanı elde edilir. Torsiyonu bulmak için β_{TB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevlerinin bulunması gerekir. Buna göre gerekli işlemler yapılırsa

$$\beta''_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(\kappa^2+\kappa\tau)T + (\kappa' - \tau')N + (\kappa\tau - \tau^2)B\}$$

ve

$$\beta'''_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\bar{\delta}_2 T + \bar{\mu}_2 N + \bar{\eta}_2 B\}$$

şeklinde bulunur. Burada $\overline{\delta_2}, \overline{\mu_2}$ ve $\overline{\eta_2}$

$$\begin{cases} \overline{\delta_2} = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau \\ \overline{\mu_2} = (\tau-\kappa)(\tau^2+\kappa^2) + \kappa'' - \tau'' \\ \overline{\eta_2} = -3\tau\tau' + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır. β_{TB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TB}}$ ile gösterilip, aşağıdaki bağıntı ile elde edilir.

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{< \beta'_{TB} \wedge \beta''_{TB}, \beta'''_{TB} >}{\|\beta'_{TB} \wedge \beta''_{TB}\|^2}$$

Burada β_{TB} eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazıldığında, β_{TB} eğrisinin torsiyonu,

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}[\kappa^2\tau\bar{\delta}_2 - 2\kappa\tau^2\bar{\delta}_2 + \tau^3\bar{\delta}_2 + \kappa^3\bar{\eta}_2 - 2\kappa^2\tau\bar{\eta}_2 + \kappa\tau^2\bar{\eta}_2]}{(\tau(\kappa-\tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa-\tau)^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

3.3 NB−Smarandache Eğrisi

Tanım 3.5 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T(s),N(s),B(s)} olsun.

$$\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + B(s))$$

eğrisi NB−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, 2010).

Teorem 3.3 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T,N,B}, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun. NB-Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} \kappa_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}}{(\kappa^2+2\tau^2)^2}\sqrt{\delta_3^2 + \delta_3^2 + \delta_3^2} \\ \tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}[(2\tau^3+\tau\kappa^2)\bar{\delta}_3+(\tau'\kappa-\tau\kappa')\bar{\mu}_3+(\kappa^3+2\kappa\tau^2+\kappa\tau'-\tau\kappa')\bar{\eta}_3]}{(2\tau^3+\tau\kappa^2)^2+(\tau'\kappa-\tau\kappa')^2+(\kappa^3+2\kappa\tau^2+\kappa\tau'-\tau\kappa')^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \delta_3 = (\kappa^2 + 2\tau^2)\kappa\tau + 2\tau(\kappa\tau' - \tau\kappa') \\ \mu_3 = -(\kappa^2 + 2\tau^2)(\kappa^2 + \tau^2) + \kappa(\kappa'\tau - \tau'\kappa) \\ \eta_3 = (\kappa^2 + 2\tau^2)(-\tau^2) + \kappa(\kappa\tau' - \kappa'\tau) \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\delta_3} = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \overline{\mu_3} = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 4\tau\tau' + \kappa'' \\ \overline{\eta_3} = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır (Ali, 2010).

İspat: s yay parametresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere NB−Smarandache eğrisi,

$$\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + B(s))$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eğrinin yay parametresi s_β ile gösterilmek üzere NB−Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonu hesaplanabilir. Bunun için öncelikle eğrinin s parametresine göre birinci türevi alınırsa,

$$\frac{d\beta_{NB}}{ds_\beta} \cdot \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının normu alınırsa,

$$\left\| \frac{d\beta_{NB}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa^2 + \tau^2 + \tau^2)} = \sqrt{\frac{\kappa^2 + 2\tau^2}{2}}$$

olarak bulunur. Buradan $\beta_{NB}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$T_{\beta_{NB}} = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}} \tag{3.3.1}$$

şeklindedir. Bu teğet vektörünün tekrar türevi alınırsa,

$$\begin{cases} \delta_3 = (\kappa^2 + 2\tau^2)\kappa\tau + 2\tau(\kappa\tau' - \tau\kappa') \\ \mu_3 = -(\kappa^2 + 2\tau^2)(\kappa^2 + \tau^2) + \kappa(\kappa'\tau - \tau'\kappa) \\ \eta_3 = (\kappa^2 + 2\tau^2)(-\tau^2) + \kappa(\kappa\tau' - \kappa'\tau) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{NB}}$ vektörü

$$T'_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2}(\delta_3 T + \mu_3 N + \eta_3 B) \tag{3.3.2}$$

şeklinde bulunur. $\beta_{NB}(s)$ eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse (3.3.2) bağıntısından $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \|T'_{\beta_{NB}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}}{(\kappa^2+2\tau^2)^2}\sqrt{\delta_3^2+\mu_3^2+\eta_3^2}$$

olur. β_{NB} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse bu vektör,

$$N_{\beta_{NB}} = \frac{T'_{\beta_{NB}}}{\|T'_{\beta_{NB}}\|},$$

$$N_{\beta_{NB}} = \frac{\delta_3 T+\mu_3 N+\eta_3 B}{\sqrt{\delta_3^2+\mu_3^2+\eta_3^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{NB}} = T_{\beta_{NB}} \wedge N_{\beta_{NB}}$ ifadesinden ise binormal vektör alanı,

$$B_{\beta_{NB}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}\sqrt{\delta_3^2+\mu_3^2+\eta_3^2}} \cdot \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & -\tau & \tau \\ \delta_3 & \mu_3 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$B_{\beta_{NB}} = \frac{(\tau\mu_3-\tau\eta_3)T+(\tau\delta_3+\kappa\eta_3)N+(\tau\delta_3+\kappa\mu_3)B}{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}\sqrt{\delta_3^2+\mu_3^2+\delta_3^2}}$$

şeklinde elde edilir. Torsiyonu bulmak için β_{NB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri hesaplanırsa

$$\beta''_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(\kappa'+\kappa\tau)T+(-\kappa^2-\tau^2-\tau')N+(\tau'+\tau^2)B\}$$

ve

$$\beta'''_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\bar{\delta}_3 T+\bar{\mu}_3 N+\bar{\eta}_3 B\}$$

elde edilir. Burada $\overline{\delta_3}, \overline{\mu_3}$ ve $\overline{\eta_3}$

$$\begin{cases} \overline{\delta_3} = \kappa^3+\kappa(\tau^2-3\kappa')-\kappa'' \\ \overline{\mu_3} = -\kappa^3-\kappa(\tau^2+3\kappa')-4\tau\tau'+\kappa'' \\ \overline{\eta_3} = -\kappa^2\tau-\tau^3+2\tau\kappa'+\kappa\tau'+\tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. β_{NB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{< \beta'_{NB} \wedge \beta''_{NB}, \beta'''_{NB} >}{\|\beta'_{NB} \wedge \beta''_{NB}\|^2}$$

bağıntısından gerekli türevler yerlerine yazılırsa, β_{NB} eğrisinin $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu,

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}[(2\tau^3 + \tau\kappa^2)\bar{\delta}_3 + (\tau'\kappa - \tau\kappa')\bar{\mu}_3 + (\kappa^3 + 2\kappa\tau^2 + \kappa\tau' - \tau\kappa')\bar{\eta}_3]}{(2\tau^3 + \tau\kappa^2)^2 + (\tau'\kappa - \tau\kappa')^2 + (\kappa^3 + 2\kappa\tau^2 + \kappa\tau' - \tau\kappa')^2}$$

şeklinde elde edilir.

3.4 TNB−Smarandache Eğrisi

Tanım 3.6 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T(s),N(s),B(s)} olsun.

$$\beta_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T(s) + N(s) + B(s))$$

eğrisi TNB−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, 2010).

Teorem 3.4 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı {T,N,B}, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun. TNB-Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} \kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}}{4(\kappa^2+\tau^2-\kappa\tau)^2}\sqrt{\delta_4^2 + \delta_4^2 + \delta_4^2} \\ \tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}[(\kappa^2\tau+\kappa\tau'-2\kappa\tau^2-\tau\tau'+2\tau^3-\tau\kappa'+\tau\kappa^2)\bar{\delta}_4+(\kappa\tau'-\tau\kappa')\bar{\mu}_4+(2\kappa^3-\tau\kappa')\bar{\eta}_4]}{(\kappa^2\tau+\kappa\tau'-2\kappa\tau^2-\tau\tau'+2\tau^3-\tau\kappa'+\tau\kappa^2)^2+(\kappa\tau'-\tau\kappa')^2+(2\kappa^3-\tau\kappa')^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \delta_4 = \kappa\tau[4\kappa(\kappa-\tau) + 2(\tau' + \tau^2) + \kappa'] - \kappa^2(2\kappa^2 + \tau') - 2\kappa'\tau^2 \\ \mu_4 = 2\kappa\tau[(\kappa-\tau)^2 + 2\tau - 2\tau'] - 2(\kappa^4 + \tau^4) + \kappa'\tau^2 - \kappa^2\tau' \\ \eta_4 = \tau[2\kappa(\kappa^2 + 4\tau^2 - \kappa' - 2\kappa\tau) + (\tau\kappa' + \tau' - 2\tau^3)] \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\delta_4} = \kappa'\tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \\ \overline{\mu_4} = \tau^3 - \kappa^3 - 3(\kappa\kappa' + \tau\tau') - (-\kappa^{''} + \tau^{''}) + \kappa\tau(\kappa - \tau) \\ \overline{\eta_4} = \tau'' - \kappa^2\tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa^{'} + \kappa\tau' \end{cases}$$

şeklindedir (Ali, 2010).

İspat: s yay parametresi ve $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere TNB-Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T(s) + N(s) + B(s))$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eğrinin yay parametresi s_β olmak üzere TNB−Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonu hesaplanabilir. Bunun için öncelikle eğrinin s parametresine göre birinci türevi alınırsa,,

$$\frac{d\beta_{TNB}}{ds_\beta} \cdot \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafın normu alınırsa,

$$\left\| \frac{d\beta_{TNB}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}$$

olarak bulunur. Buradan $\beta_{TNB}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı,

$$T_{\beta_{TNB}} = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau}} \tag{3.4.1}$$

şeklinde elde edilir. Bu teğet vektörünün tekrar türevi alınırsa,

$$\begin{cases} \delta_4 = \kappa\tau[4\kappa(\kappa - \tau) + 2(\tau' + \tau^2) + \kappa^{'}] - \kappa^2(2\kappa^2 + \tau^{'}) - 2\kappa'\tau^2 \\ \mu_4 = 2\kappa\tau[(\kappa - \tau)^2 + 2\tau - 2\tau'] - 2(\kappa^4 + \tau^4) + \kappa^{'}\tau^2 \ - \kappa^2\tau' \\ \eta_4 = \tau[2\kappa(\kappa^2 + 4\tau^2 - \kappa' - 2\kappa\tau) + (\tau\kappa' + \tau' - 2\tau^3)] \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{TNB}}$ vektörü

$$T'_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}}{4(\kappa^2+\tau^2-\kappa\tau)^2}(\delta_4 T + \mu_4 N + \eta_4 B) \tag{3.4.2}$$

şeklini alır. $\beta_{TNB}(s)$ eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse (3.4.2) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \|T'_{\beta_{TNB}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}}{4(\kappa^2+\tau^2-\kappa\tau)^2}\sqrt{\delta_4^2+\mu_4^2+\eta_4^2}$$

olur. β_{TNB} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse bu vektör,

$$N_{\beta_{TNB}} = \frac{T'_{\beta_{TNB}}}{\|T'_{\beta_{TNB}}\|},$$
$$N_{\beta_{TNB}} = \frac{\delta_4 T + \mu_4 N + \eta_4 B}{\sqrt{\delta_4^2+\mu_4^2+\eta_4^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TNB}} = T_{\beta_{TNB}} \wedge N_{\beta_{TNB}}$ çarpımından binormal vektör alanı,

$$B_{\beta_{TNB}} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+2\tau^2-2\kappa\tau}\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}} \cdot \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa-\tau & \tau \\ \delta_4 & \mu_4 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

ve böylece

$$B_{\beta_{TNB}} = \frac{((\kappa-\tau)\eta_4 - \tau\mu_4)T + (\tau\delta_4+\kappa\eta_4)N + ((\tau-\kappa)\delta_4 - \kappa\mu_4)B}{\sqrt{2\kappa^2+2\tau^2-2\kappa\tau}\sqrt{\delta_4^2+\mu_4^2+\mu_4^2}}$$

olarak bulunur. β_{TNB} eğrisinin torsiyonu için eğrinin ikinci ve üçüncü türevleri hesaplanırsa,

$$\beta''_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{(-\kappa'-\kappa^2+\kappa\tau)T - (\kappa^2+\kappa'+\tau'+\tau^2)N + (\kappa\tau-\tau^2+\tau')B\}$$

ve

$$\beta'''_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{\bar{\delta}_4 T + \bar{\mu}_4 N + \bar{\eta}_4 B\}$$

şeklinde bulunur. Burada $\overline{\delta_4}, \overline{\mu_4}$ ve $\overline{\eta_4}$

$$\begin{cases} \overline{\delta_4} = \kappa'\tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \\ \overline{\mu_4} = \tau^3 - \kappa^3 - 3(\kappa\kappa' + \tau\tau') - (-\kappa'' + \tau'') + \kappa\tau(\kappa - \tau) \\ \overline{\eta_4} = \tau'' - \kappa^2\tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. β_{TNB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilip aşağıdaki bağıntıda elde edilen türevler yerlerine yazılırsa

$$\tau = \frac{< \beta'_{TNB} \wedge \beta''_{TNB}, \beta'''_{TNB} >}{\|\beta'_{TNB} \wedge \beta''_{TNB}\|^2}$$

β_{TNB} eğrisinin $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu,

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}[(\kappa^2\tau + \kappa\tau' - 2\kappa\tau^2 - \tau\tau' + 2\tau^3 - \tau\kappa' + \tau\kappa^2)\bar{\delta}_4 + (\kappa\tau' - \tau\kappa')\bar{\mu}_4 + (2\kappa^3 - \tau\kappa')\bar{\eta}_4]}{(\kappa^2\tau + \kappa\tau' - 2\kappa\tau^2 - \tau\tau' + 2\tau^3 - \tau\kappa' + \tau\kappa^2)^2 + (\kappa\tau' - \tau\kappa')^2 + (2\kappa^3 - \tau\kappa')^2}$$

şeklinde elde edilir.

4. ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Tezin bu bölümü, çalışmanın orjinal kısmının ilk bölümünü oluşturmaktadır. Bu kısımda Frenet çatısından farklı bir alternatif çatı yardımıyla dört farklı Smarandache eğrisi tanımlanmış ve bu eğrilerin çatı elemanları ile eğrilik ve torsiyonları elde edilmiştir.

4.1 NC−Smarandache Eğrisi

Tanım 4.1 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin çatısı {N(s),C(s),W(s)} olsun.

$$\beta_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + C(s))$$

eğrisi NC−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Şenyurt ve Kaya, 2018).

Teorem 4.1 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin çatısı {N,C,W}, eğriliği f ve torsiyonu g olsun. NC−Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre $f_{\beta_{NC}}$ eğriliği ve $g_{\beta_{NC}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_5^2+\mu_5^2+\eta_5^2}}{(2f^2+g^2)^2}]^2 + [\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_5}\widehat{\delta_5}+\tilde{\mu_5}\widehat{\mu_5}+\tilde{\eta_5}\widehat{\eta_5})}{\tilde{\delta_5^2}+\tilde{\mu_5}^2+\tilde{\eta_5}^2}]^2} \\ g = \dfrac{\left[\dfrac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_5}\,\widehat{\delta_5}+\tilde{\mu_5}\,\widehat{\mu_5}+\tilde{\eta_5}\,\widehat{\eta_5})}{\tilde{\delta_5}^2+\tilde{\mu_5}^2+\tilde{\eta_5}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_5^2+\mu_5^2+\eta_5^2}}{(2f^2+g^2)^2}}\right]'}{1+\left[\dfrac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_5}\,\widehat{\delta_5}+\tilde{\mu_5}\,\widehat{\mu_5}+\tilde{\eta_5}\,\widehat{\eta_5})}{\tilde{\delta_5}^2+\tilde{\mu_5}^2+\tilde{\eta_5}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_5{}^2+\mu_5{}^2+\eta_5{}^2}}{(2f^2+g^2)^2}}\right]^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \delta_5 = -[f^2(2f^2+g^2) + g(gf^{'} - fg^{'})] \\ \mu_5 = -[f^2(2f^2+3g^2) - g(g^3 + fg' - gf')] \\ \eta_5 = f[g(2f^2+g^2) - 2(gf^{'} - fg^{'})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\delta_5} = [(\delta_5^{'} - f\mu_5)(\delta_5^2+\mu_5^2+\eta_5^2) - \delta_5(\delta_5\delta_5^{'} + \mu_5\mu_5^{'} + \eta_5\eta_5^{'})] \\ \bar{\mu_5} = [(f\delta_5 + \mu_5^{'} - g\eta_5)(\delta_5^2+\mu_5^2+\eta_5^2) - \mu_5(\delta_5\delta_5^{'} + \mu_5\mu_5^{'} + \eta_5\eta_5^{'})] \\ \bar{\eta_5} = [(g\mu_5 + \eta_5^{'})(\delta_5^2+\mu_5^2+\eta_5^2) - \eta_5(\delta_5\delta_5^{'} + \mu_5\mu_5^{'} + \eta_5\eta_5^{'})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_5} = (-2ff' - f'' + f^3 - ff' + fg^2) \\ \widehat{\mu_5} = (-f^3 - ff' - 2ff' + f'' - 2gg' - fg^2 - gg') \\ \widehat{\eta_5} = (-f^2g - g^3 + 2gf' + fg' + g'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_5} = (g^3 + 2f^2g - gf' + fg') \\ \tilde{\mu_5} = (fg' - f'g) \\ \tilde{\eta_5} = (-f^2g - g^3 + 2gf' + fg' + g'') \end{cases}$$

katsayıları mevcuttur.

İspat: $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de alternatif çatıya göre birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere, β eğrisinin NC$-$Smarandache eğrisi olan $\beta_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + C)$ eğrisinin yay parametresi $s_{\beta_{NC}}$ olmak üzere, eğrinin s'ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\beta_{NC}}{ds_{\beta_{NC}}}\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-fN + fC + gW)$$

olup yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \sqrt{\frac{1}{2}(f^2 + f^2 + g^2)} = \sqrt{\frac{2f^2 + g^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa β_{NC} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NC}} = \frac{-fN + fC + gW}{\sqrt{2f^2 + g^2}} \tag{4.1.1}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \delta_5 = -[f^2(2f^2 + g^2) + g(gf' - fg')] \\ \mu_5 = -[f^2(2f^2 + 3g^2) - g(g^3 + fg' - gf')] \\ \eta_5 = f[g(2f^2 + g^2) - 2(gf' - fg')] \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{NC}}$ vektörü

$$T'_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}}{(2f^2 + g^2)^2}(\delta_5 N + \mu_5 C + \eta_5 W) \tag{4.1.2}$$

şeklinde bulunur. β_{NC} eğrisinin Frenet eğriliği $\kappa_{\beta_{NC}}$ ile gösterilirse (4.1.2) bağıntısından $\kappa_{\beta_{NC}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}}{(2f^2 + g^2)^2}\sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2} \tag{4.1.3}$$

olur. β_{NC} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{NC}}$ ile gösterilirse, bu vektör

$$N_{\beta_{NC}} = \frac{\delta_5 N + \mu_5 C + \eta_5 W}{\sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2}} \tag{4.1.4}$$

şeklinde bulunur. (4.1.4) bağıntısının tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\delta_5} = [(\delta_5' - f\mu_5)(\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2) - \delta_5(\delta_5\delta_5' + \mu_5\mu_5' + \eta_5\eta_5')] \\ \bar{\mu_5} = [(f\delta_5 + \mu_5' - g\eta_5)(\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2) - \mu_5(\delta_5\delta_5' + \mu_5\mu_5' + \eta_5\eta_5')] \\ \bar{\eta_5} = [(g\mu_5 + \eta_5')(\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2) - \eta_5(\delta_5\delta_5' + \mu_5\mu_5' + \eta_5\eta_5')] \end{cases}$$

olmak üzere $N'_{\beta_{NC}}$ türevi

$$N'_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2f^2 + g^2}} \frac{\bar{\delta}_5 N + \bar{\mu}_5 C + \bar{\eta}_5 W}{(2f^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.1.5}$$

şeklinde bulunur. (4.1.5) bağıntısının normu alınırsa

$$\|N'_{\beta_{NC}}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2f^2 + g^2}} \frac{\sqrt{\bar{\delta}_5^2 + \bar{\mu}_5^2 + \bar{\eta}_5^2}}{(\bar{\delta}_5^2 + \bar{\mu}_5^2 + \bar{\eta}_5^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. $C_{\beta_{NC}} = \frac{N'_{\beta_{NC}}}{\|N'_{\beta_{NC}}\|}$ olduğundan (4.1.5) ve (4.1.6) bağıntılarından gerekli cebirsel işlemler yapıldığında C vektör alanı,

$$C_{\beta_{NC}} = \frac{\bar{\delta}_5 N + \bar{\mu}_5 C + \bar{\eta}_5 W}{\sqrt{\bar{\delta}_5^2 + \bar{\mu}_5^2 + \bar{\eta}_5^2}}$$

olarak bulunur. $W_{\beta_{NC}} = N_{\beta_{NC}} \wedge C_{\beta_{NC}}$ olduğundan $W_{\beta_{NC}}$ vektör alanı

$$W_{\beta_{NC}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2} \cdot \sqrt{\bar{\delta_5}^2 + \bar{\mu_5}^2 + \bar{\eta_5}^2}} \begin{vmatrix} N & C & W \\ \delta_5 & \mu_5 & \eta_5 \\ \bar{\delta_5} & \bar{\mu_5} & \bar{\eta_5} \end{vmatrix},$$

$$W_{\beta_{NC}} = \frac{(\mu_5\bar{\eta_5} - \eta_5\bar{\mu_5})N - (\delta_5\bar{\eta_5} - \eta_5\bar{\delta_5})C + (\delta_5\bar{\mu_5} - \mu_5\delta_5)W}{\sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2} \cdot \sqrt{\bar{\delta_5}^2 + \bar{\mu_5}^2 + \bar{\eta_5}^2}}$$

olur. β_{NC} eğrisinin Frenet torsiyonunu bulmak için eğrinin ikinci ve üçüncü türevleri hesaplanırsa

$$\beta''_{NC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(f^2 + f')N + (-f^2 + f' - g^2)C + (fg + g')W),$$

ve

$$\beta_{NC}^{'''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{\delta_5} N + \widehat{\mu_5} C + \widehat{\eta_5} W)$$

şeklinde bulunur. Burada $\widehat{\delta_5}, \widehat{\mu_5}, \widehat{\eta_5}$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_5} = (-2ff^{'} - f^{''} + f^3 - ff^{'} + fg^2) \\ \widehat{\mu_5} = (-f^3 - ff^{'} - 2ff^{'} + f^{''} - 2gg^{'} - fg^2 - gg^{'}) \\ \widehat{\eta_5} = (-f^2 g - g^3 + 2gf^{'} + fg^{'} + g^{''}) \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. β_{NC} Frenet eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{NC}}$ ile gösterilip hesaplanan türevler yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\tau_{\beta_{NC}}$ ifadesi

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left[\ (g^3 + 2f^2 g - gf^{'} + fg^{'})\widehat{\delta_5} + (fg^{'} - f^{'}g)\widehat{\mu_5} + (2f^3 + fg^2)\widehat{\eta_5}\ \right]}{(g^3 + 2f^2 g - gf^{'} + fg^{'})^2 + (fg^{'} - f^{'}g)^2 + (2f^3 + fg^2)^2} \tag{4.1.7}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.3) bağıntısında (4.1.3) ve (4.1.7) ifadeleri yerlerine yazılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla;

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2}}{(2f^2 + g^2)^2}]^2 + [\frac{\sqrt{2} \cdot (\tilde{\delta_5}\widehat{\delta_5} + \tilde{\mu_5}\widehat{\mu_5} + \tilde{\eta_5}\widehat{\eta_5})}{\tilde{\delta_5^2} + \tilde{\mu_5}^2 + \tilde{\eta_5}^2}]^2}$$

ve

$$g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_5}\,\widehat{\delta_5} + \tilde{\mu_5}\,\widehat{\mu_5} + \tilde{\eta_5}\,\widehat{\eta_5})}{\tilde{\delta_5}^2 + \tilde{\mu_5}^2 + \tilde{\eta_5}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2}}{(2f^2 + g^2)^2}}\right]^{'}}{1 + \left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_5}\,\widehat{\delta_5} + \tilde{\mu_5}\,\widehat{\mu_5} + \tilde{\eta_5}\,\widehat{\eta_5})}{\tilde{\delta_5}^2 + \tilde{\mu_5}^2 + \tilde{\eta_5}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_5{}^2 + \mu_5{}^2 + \eta_5{}^2}}{(2f^2 + g^2)^2}}\right]^2}$$

şekilde elde edilir. Burada $\tilde{\delta_5}, \tilde{\mu_5}, \tilde{\eta_5}$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_5} = (g^3 + 2f^2 g - gf^{'} + fg^{'}) \\ \tilde{\mu_5} = (fg^{'} - f^{'}g) \\ \tilde{\eta_5} = (-f^2 g - g^3 + 2gf^{'} + fg^{'} + g^{''}) \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır. Böylece NC−Smarandache eğrisinin, alternatif çatıya göre çatı elemanları elde edilmiş olur.

4.2 NW−Smarandache Eğrisi

Tanım 4.2 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin çatısı {N(s),C(s),W(s)} olsun.

$$\beta_{NW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + W(s))$$

eğrisi NW−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Şenyurt ve Kaya, 2018).

Teorem 4.2 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin çatısı {N,C,W}, eğriliği f ve torsiyonu g olsun. NW−Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre $f_{\beta_{NW}}$ eğriliği ve $g_{\beta_{NW}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{f^2+g^2}}{(f-g)}]^2 + [\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_6}\widehat{\delta_6}+\tilde{\eta_6}\widehat{\eta_6})}{\tilde{\delta}_6^2+\tilde{\eta_6}^2}]^2} \\ g = \dfrac{\left[\dfrac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_6}\widehat{\delta_6}+\tilde{\eta_6}\widehat{\eta_6})}{\tilde{\delta}_6^2+\widehat{\eta}_6^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{f^2+g^2}}{(f-g)}}\right]'}{1+\left[\dfrac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_6}\widehat{\delta_6}+\tilde{\eta_6}\widehat{\eta_6})}{\tilde{\delta}_6^2+\tilde{\eta}_6^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{f^2+g^2}}{(f-g)}}\right]^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\delta}_6 = (-f'f^2 - f'g^2 + f^2f' + fgg') \\ \bar{\mu}_6 = (-f^4 - f^2g^2 - g^2f^2 - g^4) \\ \bar{\eta}_6 = (g'f^2 + g'g^2 - gff' - g^2g') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_6} = (-3ff' + 2fg' + gf') \\ \widehat{\mu_6} = (f^2+g^2)(-f+g) + f'' - g'' \\ \widehat{\eta_6} = (-3gg' + 2gf' + fg') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_6} = (f^2g - 2fg^2 + g^3) \\ \tilde{\mu_6} = 0 \\ \tilde{\eta_6} = (f^3 - 2f^2g + fg^2) \end{cases}$$

katsayıları mevcuttur.

İspat: $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de alternatif çatıya göre birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere, β eğrisinin NW−Smarandache eğrisi olan $\beta_{NW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + W)$ eğrisinin yay parametresi $s_{\beta_{NW}}$ olmak üzere, eğrinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\beta_{NW}}{ds_{\beta_{NW}}}\frac{ds_{\beta_{NW}}}{ds} = \frac{(f-g)C}{\sqrt{2}},$$

olup yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{NW}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NW}}}{ds} = \sqrt{\frac{(f-g)^2}{2}} = \frac{|f-g|}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa β_{NW} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NW}} = \begin{cases} C, & f > g \\ -C, & f < g \end{cases} \tag{4.2.1}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$T'_{\beta_{NW}} = \frac{\sqrt{2}(-fN + gW)}{|f-g|} \tag{4.2.2}$$

şeklinde bulunur. β_{NW} eğrisinin Frenet eğriliği $\kappa_{\beta_{NW}}$ ile gösterilirse (4.2.2) bağıntısından

$$\kappa_{\beta_{NW}} = \frac{\sqrt{2}}{(f-g)}\sqrt{f^2+g^2} \tag{4.2.3}$$

olur. β_{NW} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{NW}}$ ile gösterilirse, bu vektör

$$N_{\beta_{NW}} = \frac{1}{\sqrt{f^2+g^2}}(-fN + gW) \tag{4.2.4}$$

şeklinde bulunur. (4.2.4) bağıntısının tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\delta}_6 = (-f'f^2 - f'g^2 + f^2f' + fgg') \\ \bar{\mu}_6 = (-f^4 - f^2g^2 - g^2f^2 - g^4) \\ \bar{\eta}_6 = (g'f^2 + g'g^2 - gff' - g^2g') \end{cases}$$

olmak üzere $N'_{\beta_{NW}}$ türevi

$$N'_{\beta_{NW}} = \frac{\sqrt{2}}{|f-g|} \cdot \frac{\bar{\delta}_6 N + \bar{\mu}_6 C + \bar{\eta}_6 W}{(f^2+g^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.2.5}$$

şeklinde bulunur. (4.2.5) bağıntısının her iki tarafının normu alınırsa

$$\|N'_{\beta_{NW}}\| = \frac{\sqrt{2}}{(f^2+g^2)^{\frac{3}{2}}|f-g|} \cdot \sqrt{\bar{\delta}_6^2 + \bar{\mu}_6^2 + \bar{\eta}_6^2} \tag{4.2.6}$$

olur. $C_{\beta_{NW}} = \frac{N'_{\beta_{NW}}}{\|N'_{\beta_{NW}}\|}$ olduğundan (4.2.5) ve (4.2.6) bağıntılarından gerekli cebirsel işlemler yapıldığında C vektör alanı,

$$C_{\beta_{NW}} = \frac{N'_{\beta_{NW}}}{\|N'_{\beta_{NW}}\|} = \frac{\bar{\delta}_6 N + \bar{\mu}_6 C + \bar{\eta}_6 W}{\sqrt{\bar{\delta}_6^2 + \bar{\mu}_6^2 + \bar{\eta}_6^2}}$$

olarak bulunur. $W_{\beta_{NW}} = N_{\beta_{NW}} \wedge C_{\beta_{NW}}$ olduğundan $W_{\beta_{NW}}$ vektör alanı

$$W_{\beta_{NW}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\delta}_6^2 + \bar{\mu}_6^2 + \bar{\eta}_6^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}} \begin{vmatrix} N & C & W \\ -f & 0 & g \\ \bar{\delta}_6 & \bar{\mu}_6 & \bar{\eta}_6 \end{vmatrix},$$

$$W_{\beta_{NW}} = \frac{-g\bar{\mu}_6 N + (f\bar{\eta}_6 + g\bar{\delta}_6)C - f\bar{\mu}_6 W}{\sqrt{\bar{\delta}_6^2 + \bar{\mu}_6^2 + \bar{\eta}_6^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan β_{NW} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_{NW}^{''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f^2 + gf)N + (f^{'} - g^{'})C + (fg - g^2)W),$$

ve

$$\beta_{NW}^{'''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{\delta_6} N + \widehat{\mu_6} C + \widehat{\eta_6} W)$$

şeklinde bulunur. Burada $\widehat{\delta_6}, \widehat{\mu_6}, \widehat{\eta_6}$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_6} = (-3ff^{'} + 2fg^{'} + gf^{'}) \\ \widehat{\mu_6} = (f^2 + g^2)(-f + g) + f^{''} - g^{''} \\ \widehat{\eta_6} = (-3gg^{'} + 2gf^{'} + fg^{'}) \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. β_{NW} eğrisinin Frenet torsiyonu $\tau_{\beta_{NW}}$ ile gösterilip birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\tau_{\beta_{NW}}$ ifadesi

$$\tau_{\beta_{NW}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left[\; (f^2 g - 2fg^2 + g^3)\bar{\delta}_5 + 0 + (f^3 - 2f^2 g + fg^2)\bar{\eta}_5, \;\right]}{(f^2 g - 2fg^2 + g^3)^2 + (f^3 - 2f^2 g + fg^2)^2} \tag{4.2.7}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.3) bağıntısında (4.2.3) ve (4.2.7) ifadeleri yerlerine yazılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}}{(f - g)}]^2 + [\frac{\sqrt{2} \cdot (\tilde{\delta}_6 \widehat{\delta_6} + \tilde{\eta}_6 \widehat{\eta_6})}{\tilde{\delta}_6^2 + \tilde{\eta}_6{}^2}]^2}$$

ve

$$g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2} \cdot (\tilde{\delta}_6 \widehat{\delta_6} + \tilde{\eta}_6 \widehat{\eta_6})}{\tilde{\delta}_6^2 + \tilde{\eta}_6^2}}{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}}{(f - g)}}\right]^{'}}{1 + \left[\frac{\frac{\sqrt{2} \cdot (\tilde{\delta}_6 \widehat{\delta_6} + \tilde{\eta}_6 \widehat{\eta_6})}{\tilde{\delta}_6^2 + \tilde{\eta}_6^2}}{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}}{(f - g)}}\right]^2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{\delta_6}, \tilde{\mu_6}, \tilde{\eta_6}$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_6} = (f^2 g - 2fg^2 + g^3) \\ \tilde{\mu_6} = 0 \\ \tilde{\eta_6} = (f^3 - 2f^2 g + fg^2) \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. Böylece NW−Smarandache eğrisinin, alternatif çatıya göre çatı elemanları elde edilmiş olur.

4.3 CW−Smarandache Eğrisi

Tanım 4.3 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin çatısı {N(s),C(s),W(s)} olsun.

$$\beta_{CW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C(s) + W(s))$$

eğrisi CW−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır.

Teorem 4.3 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin çatısı {N,C,W}, eğriliği f ve torsiyonu g olsun. CW−Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre $f_{\beta_{CW}}$ eğriliği ve $g_{\beta_{CW}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_7^2+\mu_7^2+\eta_7^2}}{(f^2+2g^2)^2}]^2 + [\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta_7}\widehat{\delta_7}+\tilde{\mu_7}\widehat{\mu_7}+\tilde{\eta_7}\widehat{\eta_7})}{\tilde{\delta_7^2}+\tilde{\mu_7}^2+\tilde{\eta_7}^2}]^2} \\ g = \dfrac{\left[\dfrac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta}_7\widehat{\delta}_7+\tilde{\mu}_7\widehat{\mu}_7+\tilde{\eta}_7\widehat{\eta}_7)}{\tilde{\delta}_7^2+\tilde{\mu}_7^2+\tilde{\eta}_7^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_7^2+\mu_7^2+\eta_7^2}}{(f^2+2g^2)}}\right]'}{1+\left[\dfrac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\tilde{\delta}_7\widehat{\delta}_7+\tilde{\mu}_7\widehat{\mu}_7+\tilde{\eta}_7\widehat{\eta}_7)}{\delta_7^2+\mu_7^2+\eta_7^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\delta_7^2+\mu_7^2+\eta_7^2}}{(f^2+2g^2)}}\right]^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \delta_7 = (fg(f^2 + 2g^2)) + 2g(fg' - gf') \\ \mu_7 = -(f^2 + 2g^2)(f^2 + g^2) + f(f'g - g'f) \\ \eta_7 = -g^2(f^2 + 2g^2) + f(fg' - gf') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\delta_7} = [(\delta_7' - f\mu_7)(\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2) - \delta_7(\delta_7\delta_7' + \mu_7\mu_7' + \eta_7\eta_7')] \\ \bar{\mu_7} = [(f\delta_7 + \mu_7' - g\eta_7)(\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2) - \mu_7(\delta_7\delta_7' + \mu_7\mu_7' + \eta_7\eta_7')] \\ \bar{\eta_7} = [(g\mu_7 + \eta_7')(\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2) - \eta_7(\delta_7\delta_7' + \mu_7\mu_7' + \eta_7\eta_7')] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_7} = (-f'' + f(2g' + f^2) + g(f' + gf)) \\ \widehat{\mu_7} = (f(-3f' + gf) + g(-3g' + g^2) - g'') \\ \widehat{\eta_7} = -g(f^2 + g^2 + 3g') + g'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_7} = (2g^3 + gf^2) \\ \tilde{\mu_7} = (g'f - gf') \\ \tilde{\eta_7} = (f^3 + 2fg^2 + fg' - gf') \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır.

İspat: $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de alternatif çatıya göre birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere, β eğrisinin CW−Smarandache eğrisi olan $\beta_{CW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C + W)$ eğrisinin yay parametresi $s_{\beta_{CW}}$ olmak üzere β eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\beta_{CW}}{ds_{\beta_{CW}}}\frac{ds_{\beta_{CW}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-fN + gW - gC),$$

olup her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_{CW}}}{ds} = \sqrt{\frac{1}{2}(f^2 + g^2 + g^2)} = \sqrt{\frac{f^2 + 2g^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa β_{CW} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{CW}} = \frac{-fN + gW - gC}{\sqrt{f^2 + 2g^2}} \tag{4.3.1}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \delta_7 = (fg(f^2 + 2g^2)) + 2g(fg' - gf') \\ \mu_7 = -(f^2 + 2g^2)(f^2 + g^2) + f(f'g - g'f) \\ \eta_7 = -g^2(f^2 + 2g^2) + f(fg' - gf') \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{CW}}$ vektörü

$$T'_{\beta_{CW}} = \frac{\delta_7 N + \mu_7 C + \eta_7 W}{(f^2 + 2g^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(f^2 + 2g^2)}} \tag{4.3.2}$$

şeklinde bulunur. β_{CW} eğrisinin Frenet eğriliği $\kappa_{\beta_{CW}}$ ile gösterilirse (4.3.2) bağıntısından

$$\kappa_{\beta_{CW}} = \frac{\sqrt{2}}{(f^2 + 2g^2)^2}\sqrt{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2} \tag{4.3.3}$$

olarak bulunur. β_{CW} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{CW}}$ ile gösterilirse, bu vektör

$$N_{\beta_{CW}} = \frac{\delta_7 N + \mu_7 C + \eta_7 W}{\sqrt{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2}} \tag{4.3.4}$$

şeklinde bulunur. (4.3.4) bağıntısının tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\delta_7} = [(\delta_7' - f\mu_7)(\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2) - \delta_7(\delta_7\delta_7' + \mu_7\mu_7' + \eta_7\eta_7')] \\ \bar{\mu_7} = [(f\delta_7 + \mu_7' - g\eta_7)(\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2) - \mu_7(\delta_7\delta_7' + \mu_7\mu_7' + \eta_7\eta_7')] \\ \bar{\eta_7} = [(g\mu_7 + \eta_7')(\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2) - \eta_7(\delta_7\delta_7' + \mu_7\mu_7' + \eta_7\eta_7')] \end{cases}$$

olmak üzere $N'_{\beta_{NC}}$ türevi

$$N'_{\beta_{CW}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f^2 + 2g^2}} \frac{\bar{\delta}_7 N + \bar{\mu}_7 C + \bar{\eta}_7 W}{(2f^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.3.5}$$

şeklindedir. (4.3.5) bağıntısının normu alınırsa

$$\|N'_{\beta_{CW}}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f^2 + 2g^2}} \frac{\sqrt{\bar{\delta}_7^2 + \bar{\mu}_7^2 + \bar{\eta}_7^2}}{(\bar{\delta}_7^2 + \bar{\mu}_7^2 + \bar{\eta}_7^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.3.6}$$

olur. $C_{\beta_{CW}} = \frac{N'_{\beta_{CW}}}{\|N'_{\beta_{CW}}\|}$ olmak üzere (4.3.5) ve (4.3.6) bağıntılarından gerekli cebirsel işlemler yapıldığında C vektör alanı,

$$C_{\beta_{CW}} = \frac{\bar{\delta}_7 N + \bar{\mu}_7 C + \bar{\eta}_7 W}{\sqrt{\bar{\delta}_7^2 + \bar{\mu}_7^2 + \bar{\eta}_7^2}}$$

şeklinde bulunur. $W_{\beta_{CW}} = N_{\beta_{CW}} \wedge C_{\beta_{CW}}$ vektörel çarpımından $W_{\beta_{CW}}$ vektör alanı

$$W_{\beta_{CW}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2} \cdot \sqrt{\bar{\delta_7}^2 + \bar{\mu_7}^2 + \bar{\eta_7}^2}} \begin{vmatrix} N & C & W \\ \delta_7 & \mu_5 & \eta_7 \\ \bar{\delta_7} & \bar{\mu_7} & \bar{\eta_7} \end{vmatrix},$$

$$W_{\beta_{CW}} = \frac{(\mu_7\bar{\eta_7} - \eta_5\bar{\mu_7})N - (\delta_7\bar{\eta_7} - \eta_7\bar{\delta_7})C + (\delta_7\bar{\mu_7} - \mu_7\delta_7)W}{\sqrt{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2} \cdot \sqrt{\bar{\delta_7}^2 + \bar{\mu_7}^2 + \bar{\eta_7}^2}}$$

olur. β_{CW} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{CW} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f' + gf)N + (-f^2 - g^2 - g')C + (g' - g^2)W),$$

ve

$$\beta'''_{CW} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{\delta_7}N + \widehat{\mu_7}C + \widehat{\eta_7}W)$$

şeklinde bulunur. Burada $\widehat{\delta_7}, \widehat{\mu_7}, \widehat{\eta_7}$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_7} = (-f'' + f(2g' + f^2) + g(f' + gf)) \\ \widehat{\mu_7} = (f(-3f' + gf) + g(-3g' + g^2) - g'') \\ \widehat{\eta_7} = -g(f^2 + g^2 + 3g') + g'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. Bu eğrinin Frenet torsiyonu $\tau_{\beta_{CW}}$ ile gösterilip birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\tau_{\beta_{CW}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left[\ (2g^3 + gf^2)\widehat{\delta_7} + (g'f - gf')\widehat{\mu_7} + (f^3 + 2fg^2 + fg' - gf')\widehat{\eta_7} \ \right]}{(2g^3 + gf^2)^2 + (g'f - gf')^2 + (f^3 + 2fg^2 + fg' - gf')^2} \tag{4.3.7}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.3) bağıntısında (4.3.3) ve (4.3.7) ifadeleri yerlerine yazılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2}}{(f^2 + 2g^2)^2}]^2 + [\frac{\sqrt{2} \cdot (\tilde{\delta_7}\widehat{\delta_7} + \tilde{\mu_7}\widehat{\mu_7} + \tilde{\eta_7}\widehat{\eta_7})}{\tilde{\delta_7}^2 + \tilde{\mu_7}^2 + \tilde{\eta_7}^2}]^2}$$

ve

$$g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2} \cdot (\tilde{\delta}_7\widehat{\delta}_7 + \tilde{\mu}_7\widehat{\mu}_7 + \tilde{\eta}_7\widehat{\eta}_7)}{\tilde{\delta}_7^2 + \tilde{\mu}_7^2 + \tilde{\eta}_7^2}}{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2}}{(f^2 + 2g^2)}} \right]'}{1 + \left[\frac{\frac{\sqrt{2} \cdot (\tilde{\delta}_7\widehat{\delta}_7 + \tilde{\mu}_7\widehat{\mu}_7 + \tilde{\eta}_7\widehat{\eta}_7)}{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2}}{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\delta_7^2 + \mu_7^2 + \eta_7^2}}{(f^2 + 2g^2)}} \right]^2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{\delta_7}, \tilde{\mu_7}, \tilde{\eta_7}$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_7} = (2g^3 + gf^2) \\ \tilde{\mu_7} = (g'f - gf') \\ \tilde{\eta_7} = (f^3 + 2fg^2 + fg' - gf') \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. Böylece CW$-$Smarandache eğrisinin, alternatif çatıya göre çatı elemanları elde edilmiş olur.

4.4 NCW-Smarandache Eğrisi

Tanım 4.4 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin çatısı {N(s),C(s),W(s)} olsun.

$$\beta_{NCW}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N(s) + C(s) + W(s))$$

eğrisi NCW−Smarandache eğrisi olarak adlandırılır.

Teorem 4.4 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin çatısı {N,C,W}, eğriliği f ve torsiyonu g olsun. NCW−Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre $f_{\beta_{NCW}}$ eğriliği ve $g_{\beta_{NCW}}$ torsiyonu sırasıyla;

$$\begin{cases} f = \sqrt{[\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}}{(2f^2+2g^2-2gf)^2}]^2 + [\frac{\sqrt{3}\cdot(\tilde{\delta_8}\widehat{\delta_8}+\tilde{\mu_8}\widehat{\mu_8}+\tilde{\eta_8}\widehat{\eta_8})}{\tilde{\delta}_8^2+\tilde{\mu_8}^2+\tilde{\eta_8}^2}]^2} \\ \\ g = \dfrac{\left[\dfrac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\tilde{\delta}_8\widehat{\delta}_8+\tilde{\mu}_8\widehat{\mu}_8+\tilde{\eta}_8\widehat{\eta}_8)}{\tilde{\delta}_8^2+\tilde{\mu}_8^2+\tilde{\eta}_8^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}}{(2f^2+2g^2-2gf)^2}}\right]'}{1+\left[\dfrac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\tilde{\delta}_8\widehat{\delta}_8+\tilde{\mu}_8\widehat{\mu}_8+\tilde{\eta}_8\tilde{\eta}_8)}{\tilde{\delta}_8^2+\tilde{\mu}_8^2+\tilde{\eta}_8^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}}{(2f^2+2g^2-2gf)^2}}\right]^2} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \delta_8 = gff' - 2f'g^2 - 2f^4 - 4f^2g^2 + 4f^3g + 2g^3f + 2fgg' - f^2g' \\ \mu_8 = f^2(-2f^2 - 4g^2 - 2fg - g') + g^2(-2g^4 + 2fg - g' + fg(f' - g')) \\ \eta_8 = 2f^2(fg - 2g^2 + g') + g^2(4fg - 2g^2 + f') - fg(g' + 2f') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\delta_8} = [(\delta_8' - f\mu_8)(\delta_8^2 + \mu_8^2 + \eta_8^2) - \delta_8(\delta_8\delta_8' + \mu_8\mu_8' + \eta_8\eta_8')] \\ \bar{\mu_8} = [(f\delta_8 + \mu_8' - g\eta_8)(\delta_8^2 + \mu_8^2 + \eta_8^2) - \mu_8(\delta_8\delta_8' + \mu_8\mu_8' + \eta_8\eta_8')] \\ \bar{\eta_8} = [(g\mu_8 + \eta_8')(\delta_8^2 + \mu_8^2 + \eta_8^2) - \eta_8(\delta_8\delta_8' + \mu_8\mu_8' + \eta_8\eta_8')] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_8} = (f^3 + fg^2 - 3ff' - f'' + 2g'f + gf') \\ \widehat{\mu_8} = (g^3 - f^3 - 3(ff' + gg') - (-f'' + g'') + fg(f - g)) \\ \widehat{\eta_8} = (g'' - f^2g - 3gg' - g^3 + 2gf' + fg') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_8} = (2f^2g - 2fg^2 + fg' - gf') \\ \tilde{\mu_8} = (fg' - f'g) \\ \tilde{\eta_8} = (2f^3 + 2fg^2 - 2gf^2 - gf' + fg') \end{cases}$$

katsayıları mevcuttur.

İspat: $\beta = \beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de alternatif çatıya göre birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere, β eğrisinin NCW−Smarandache eğrisi olan $\beta_{NCW}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N+C+W)$ eğrisinin yay parametresi $s_{\beta_{NCW}}$ olmak üzere, eğrinin s'ye göre türevi ve ardından her tarafın normu alınırsa

$$\frac{d\beta_{NCW}}{ds_{\beta_{NCW}}}\frac{ds_{\beta_{NCW}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}(fC-fN+gW-gC),$$

ve

$$\frac{ds_{\beta_{NCW}}}{ds}=\sqrt{\frac{2}{3}(f^2+g^2-gf)}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa β_{NCW} teğet vektör alanı

$$T_{\beta_{NCW}}=\frac{fC-fN+gW-gC}{\sqrt{2(f^2+g^2-gf)}} \tag{4.4.1}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \delta_8=gff'-2f'g^2-2f^4-4f^2g^2+4f^3g+2g^3f+2fgg'-f^2g' \\ \mu_8=f^2(-2f^2-4g^2-2fg-g')+g^2(-2g^4+2fg-g'+fg(f'-g')) \\ \eta_8=2f^2(fg-2g^2+g')+g^2(4fg-2g^2+f')-fg(g'+2f') \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{NCW}}$ vektörü

$$T'_{\beta_{NCW}}=\frac{\delta_8N+\mu_8C+\eta_8W}{(2f^2+2g^2-2gf)^{\frac{3}{2}}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2f^2+2g^2-2gf)}} \tag{4.4.2}$$

şeklinde bulunur. β_{NCW} eğrisinin Frenet eğriliği $\kappa_{\beta_{NCW}}$ ile gösterilirse (4.4.2) bağıntısından

$$\kappa_{\beta_{NCW}}=\frac{\sqrt{3}}{(2f^2+2g^2-2gf)^2}\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2} \tag{4.4.3}$$

elde edilir. β_{NCW} eğrisinin asli normal vektör alanı $N_{\beta_{NCW}}$ ile gösterilirse, bu vektör

$$N_{\beta_{NCW}}=\frac{\delta_8N+\mu_8C+\eta_8W}{\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}} \tag{4.4.4}$$

şeklinde bulunur. (4.4.4) bağıntısının tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\delta}_8=[(\delta_8'-f\mu_8)(\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2)-\delta_8(\delta_8\delta_8'+\mu_8\mu_8'+\eta_8\eta_8')] \\ \bar{\mu}_8=[(f\delta_8+\mu_8'-g\eta_8)(\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2)-\mu_8(\delta_8\delta_8'+\mu_8\mu_8'+\eta_8\eta_8')] \\ \bar{\eta}_8=[(g\mu_8+\eta_8')(\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2)-\eta_8(\delta_8\delta_8'+\mu_8\mu_8'+\eta_8\eta_8')] \end{cases}$$

olmak üzere $N'_{\beta_{NCW}}$ türevi

$$N'=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2f^2+2g^2-2gf}}\frac{\bar{\delta}_8N+\bar{\mu}_8C+\bar{\eta}_8W}{(\bar{\delta}_8^2+\bar{\mu}_8^2+\bar{\eta}_8^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.4.5}$$

şeklinde bulunur. (4.4.5) bağıntısının normu alınırsa

$$\|N'_{\beta_{NCW}}\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2f^2+2g^2-2gf}}\frac{\sqrt{\bar{\delta}_8^2+\bar{\mu}_8^2+\bar{\eta}_8^2}}{(\bar{\delta}_8^2+\bar{\mu}_8^2+\bar{\eta}_8^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.4.6}$$

olur. $C_{\beta_{NCW}} = \frac{N'_{\beta_{NCW}}}{\|N'_{\beta_{NCW}}\|}$ vektör alanı için (4.4.5) ve (4.4.6) bağıntılarından gerekli cebirsel işlemler yapıldığında C vektör alanı,

$$C_{\beta_{NCW}} = \frac{\bar{\delta}_8 N + \bar{\mu}_8 C + \bar{\eta}_8 W}{\sqrt{\bar{\delta}_8^2+\bar{\mu}_8^2+\bar{\eta}_8^2}}$$

olarak bulunur. $W_{\beta_{NCW}} = N_{\beta_{NCW}} \wedge C_{\beta_{NCW}}$ çarpımından ise $W_{\beta_{NCW}}$ vektör alanı

$$W_{\beta_{NCW}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}\sqrt{\bar{\delta_8}^2+\bar{\mu_8}^2+\bar{\eta_8}^2}}\begin{vmatrix} N & C & W \\ \delta_8 & \mu_8 & \eta_8 \\ \bar{\delta_8} & \bar{\mu_8} & \bar{\eta_8} \end{vmatrix},$$

$$W_{\beta_{NCW}} = \frac{(\mu_8\bar{\eta_8}-\eta_8\bar{\mu_8})N - (\delta_8\bar{\eta_8}-\eta_8\bar{\delta_8})C + (\delta_8\bar{\mu_8}-\mu_8\delta_8)W}{\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}\cdot\sqrt{\bar{\delta_8}^2+\bar{\mu_8}^2+\bar{\eta_8}^2}}$$

olur. Ayrıca β_{NCW} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{NCW} = \frac{1}{\sqrt{3}}((-f'-f^2+gf)N + (-f^2+f'-g'-g^2)C + (fg-g^2+g')W),$$

ve

$$\beta'''_{NCW} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\widehat{\delta_8}N + \widehat{\mu_8}C + \widehat{\eta_8}W)$$

şeklindedir. Burada $\widehat{\delta_8}, \widehat{\mu_8}, \widehat{\eta_8}$

$$\begin{cases} \widehat{\delta_8} = (f^3+fg^2-3ff'-f''+2g'f+gf') \\ \widehat{\mu_8} = (g^3-f^3-3(ff'+gg')-(-f''+g'')+fg(f-g)) \\ \widehat{\eta_8} = (g''-f^2g-3gg'-g^3+2gf'+fg') \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır. β_{NCW} eğrisinin Frenet torsiyonu $\tau_{\beta_{NCW}}$ ile gösterilip ilgili türevler yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa torsiyon

$$\tau_{\beta_{NCW}} = \sqrt{3}\frac{\begin{bmatrix} (2f^2g-2fg^2+fg'-gf')\widehat{\delta_8} \\ +(fg'-f'g)\widehat{\mu_8} \\ +(2f^3+2fg^2-2gf^2-2gf^2-gf'+fg')\widehat{\eta_8} \end{bmatrix}}{(2f^2g-2fg^2+fg'-gf')^2+(fg'-f'g)^2+(2f^3+2fg^2-2gf^2-gf'+fg')^2} \tag{4.4.7}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.3) bağıntısında (4.4.3) ve (4.4.7) ifadeleri yerlerine yazılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\delta_8^2 + \mu_8^2 + \eta_8^2}}{(2f^2 + 2g^2 - 2gf)^2}]^2 + [\frac{\sqrt{3} \cdot (\tilde{\delta_8}\widehat{\delta_8} + \tilde{\mu_8}\widehat{\mu_8} + \tilde{\eta_8}\widehat{\eta_8})}{\tilde{\delta_8^2} + \tilde{\mu_8}^2 + \tilde{\eta_8}^2}]^2}$$

ve

$$g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\tilde{\delta}_8\widehat{\delta}_8+\tilde{\mu}_8\widehat{\mu}_8+\tilde{\eta}_8\widehat{\eta}_8)}{\tilde{\delta}_8^2+\tilde{\mu}_8^2+\tilde{\eta}_8^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}}{(2f^2+2g^2-2gf)^2}}\right]'}{1+\left[\frac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\tilde{\delta}_8\widehat{\delta}_8+\tilde{\mu}_8\widehat{\mu}_8+\tilde{\eta}_8\tilde{\eta}_8)}{\tilde{\delta}_8^2+\tilde{\mu}_8^2+\tilde{\eta}_8^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\delta_8^2+\mu_8^2+\eta_8^2}}{(2f^2+2g^2-2gf)^2}}\right]^2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{\delta_8}, \tilde{\mu_8}, \tilde{\eta_8}$

$$\begin{cases} \tilde{\delta_8} = (2f^2g - 2fg^2 + fg^{'} - gf^{'}), \\ \tilde{\mu_8} = (fg^{'} - f^{'}g), \\ \tilde{\eta_8} = (2f^3 + 2fg^2 - 2gf^2 - gf^{'} + fg^{'}). \end{cases}$$

şeklinde katsayılardır. Böylece NCW−Smarandache eğrisinin, alternatif çatıya göre çatı elemanları elde edilmiş olur.

5. ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE BİR EĞRİ ÇİFTİNİN SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölüm çalışmanın orjinal kısmının ikinci bölümünü oluşturmaktadır. Burada (β, β^*) WC^*-partner eğri çifti olmak üzere β^* partner eğrisinin alternatif çatı elemanları tarafından oluşturulan Smarandache eğrileri ;

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_{N^*C^*}(s) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*), \quad N^*C^*- \text{ Smarandache eğrisi}\\
\beta_2 &= \beta_{C^*W^*}(s) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(C^* + W^*), \quad C^*W^*- \text{ Smarandache eğrisi}\\
\beta_3 &= \beta_{N^*W^*}(s) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(N^* + W^*), \quad N^*W^*- \text{ Smarandache eğrisi}\\
\beta_4 &= \beta_{N^*C^*W^*}(s) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(N^* + C^* + W^*), \quad N^*C^*W^*- \text{ Smarandache eğrisi}
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilerek bu eğrilere ait eğrilik ve burulmalar hesaplanmıştır. Elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları β eğrisinin eğrilik ve burulmaları cinsinden ifade edilmiştir.

5.1 N^*C^*−Smarandache Eğrisi

Tanım 5.1 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta^* : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrilerinin çatı elemanları sırasıyla $\{N, C, W, f, g\}$ ve $\{N^*, C^*, W^*, f^*, g^*\}$ olsun. (β, β^*) eğrileri WC^*-partner eğri çifti olmak üzere β^* eğrisinin N^*C^*−Smaranadache eğrisi

$$\beta_1(s) = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \tag{5.1.1}$$

şeklinde tanımlıdır. N^*C^*−Smarandache eğrisinin yay parametresi s_{β_1} olmak üzere, β_1 eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_1}\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f^*N^* + f^*C^* + g^*W^*) \tag{5.1.2}$$

olup her iki tarafın normu alınırsa,

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \sqrt{\frac{2f^{*2} + g^{*2}}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa β_1 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{-f^*N^* + f^*C^* + g^*W^*}{\sqrt{2f^{*2} + g^{*2}}} \tag{5.1.3}$$

şeklinde bulunur. (5.1.1) ifadesinde N^* ve C^* vektörlerinin yerine (2.2.5) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa, N^*C^*-Smarandache eğrisinin WC^* eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta N + \cos\theta C + W) \tag{5.1.4}$$

olur. (5.1.3) denkleminde (2.2.5) ve (2.2.6) bağıntıları dikkate alınırsa (5.1.4) ifadesindeki β_1 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{\cos\theta W - C}{\sqrt{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \tag{5.1.5}$$

şeklinde bulunur. (5.1.3) ifadesinin tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \zeta_1 = -[f^{*2}(2f^{*2} + g^{*2}) + g^*(g^*f^{*'} - f^*g^{*'})] \\ \Delta_1 = -[f^{*2}(2f^{*2} + 3g^{*2}) - g^*(g^{*3} + f^*g*' - g^*f*')] \\ \varepsilon_1 = f^*[g^*(2f^{*2} + g^{*2}) - 2(g^*f^{*'} - f^*g^{*'})] \end{cases} \tag{5.1.6}$$

olmak üzere $T^{'}_{\beta_1}$ vektörü

$$T^{'}_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2f^{*2} + g^{*2})^2}(\zeta_1 N^* + \Delta_1 C^* + \varepsilon_1 W^*) \tag{5.1.7}$$

olur. (5.1.6) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\zeta_1} = -2g^4\cos^4\theta - g^4\sin^2\theta\cos^2\theta - g^2g^{'}\sin^2\theta\cos\theta + g^3\sin^2\theta\cos\theta \\ \overline{\Delta_1} = 2g^2\cos^2\theta - 2g^4\cos^4\theta - 2g^2g^{'}\cos^3\theta - g^2g^{'}\cos\theta\sin^2\theta - 3g^4\cos^2\theta\sin^2\theta \\ \qquad +g^2g^{'}\sin\theta\cos\theta - g^4\sin^4\theta \\ \overline{\varepsilon_1} = -2g^4\sin\theta\cos^3\theta - 2g^3\sin\theta\cos^2\theta - g^4\sin^3\theta\cos\theta + 2g^2g^{'}\cos^2\theta\sin\theta \end{cases} \tag{5.1.8}$$

şeklinde olur. $T^{'}_{\beta_1}(s)$ ifadesinde (2.2.5) ve (5.1.8) bağıntıları yerlerine yazılırsa $T^{'}_{\beta_1}$ vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$T^{'}_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}(\overline{\zeta_1}N + \overline{\Delta_1}C + \overline{\varepsilon_1}W)}{(2g^2\cos^2\theta + g^2\sin^2\theta)^2} \tag{5.1.9}$$

olarak bulunur. β_1 eğrisinin eğriliği κ_{β_1} ile gösterilirse (5.1.7) bağıntısından κ_{β_1} eğriliği

$$\kappa_{\beta_1} = \|T^{'}_{\beta_1}\|,$$

$$\kappa_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}}{(2f^{*2}+g^{*2})^2}\sqrt{\zeta_1^2+\Delta_1^2+\varepsilon_1^2} \tag{5.1.10}$$

olur. Burada f^* ve g^* eğrilikleri yerine (2.2.6) bağıntısındaki karşılıkları yazılırsa κ_{β_1} eğriliğinin WC^* eğri çiftinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_1} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\overline{\zeta_1}^2+\overline{\Delta_1}^2+\overline{\varepsilon_1}^2}}{(2g^2\cos^2\theta+g^2\sin^2\theta)^2} \tag{5.1.11}$$

dır. β_1 eğrisinin asli normal vektör alanı N_{β_1} ile gösterilirse (5.1.7) bağıntısından

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\zeta_1 N^* + \Delta_1 C^* + \varepsilon_1 W^*}{\sqrt{\zeta_1^2+\Delta_1^2+\varepsilon_1^2}} \tag{5.1.12}$$

elde edilir. Burada N^*, C^* ve W^* ifadeleri yerine (2.2.5) denkleminden karşılıkları yazılırsa, N_{β_1} ifadesinin WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$N_{\beta_1} = \frac{\overline{\zeta_1}N + \overline{\Delta_1}C + \overline{\varepsilon_1}W}{\sqrt{\overline{\zeta_1}^2+\overline{\Delta_1}^2+\overline{\varepsilon_1}^2}} \tag{5.1.13}$$

şeklindedir. (5.1.12) bağıntısının tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\Delta_1\zeta_1^2 f^* + \zeta_1'\Delta_1^2 - \Delta_1^3 f^* + \zeta_1'\varepsilon_1^2 - \Delta_1\varepsilon_1^2 f^* - \zeta_1\Delta_1\Delta_1' - \zeta_1\varepsilon_1\varepsilon_1' \\ \phi_1 = \zeta_1^3 f^* + \Delta_1'\zeta_1^2 - \varepsilon_1\zeta_1^2 g^* + \zeta_1\Delta_1^2 f^* - \varepsilon_1\Delta_1^2 g^* + \zeta_1\varepsilon_1^2 f^* + \Delta_1{}'\varepsilon_1^2 \\ \qquad + \varepsilon_1^3 g^* - \zeta_1\zeta_1'\Delta_1 - \Delta_1\varepsilon_1\varepsilon_1' \\ \gamma_1 = \Delta_1\zeta_1^2 g^* + \varepsilon_1'\zeta_1^2 + \Delta_1^3 g^* + \varepsilon_1'\Delta_1^2 + \Delta_1\varepsilon_1^2 g^* - \zeta_1\zeta_1'\varepsilon_1 - \varepsilon_1\Delta_1\Delta_1' \end{cases} \tag{5.1.14}$$

olmak üzere N'_{β_1} türevi

$$N'_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2f^{*2}+g^{*2}}}\frac{\sigma_1 N^* + \phi_1 C^* + \gamma_1 W^*}{(\zeta_1^2+\Delta_1^2+\varepsilon_1^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.1.15}$$

olur. (5.1.14) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\sigma_1} = -\Delta_1\zeta_1^2 g\cos\theta + \zeta_1'\Delta_1^2 - \Delta_1^3 g\cos\theta + \zeta_1'\varepsilon_1^2 - \Delta_1\varepsilon_1^2 g\cos\theta - \zeta_1\Delta_1\Delta_1' - \zeta_1\varepsilon_1\varepsilon_1' \\ \overline{\phi_1} = \zeta_1^3 g\cos\theta + \Delta_1'\zeta_1^2 + \varepsilon_1\zeta_1^2 g\sin\theta + \zeta_1\Delta_1^2 g\cos\theta + \varepsilon_1\Delta_1^2 g\sin\theta + \zeta_1\varepsilon_1^2 g\cos\theta + \Delta_1{}'\varepsilon_1^2 \\ \qquad - \varepsilon_1^3 g\sin\theta - \zeta_1\zeta_1'\Delta_1 - \Delta_1\varepsilon_1\varepsilon_1' \\ \overline{\gamma_1} = -\Delta_1\zeta_1^2 g\sin\theta + \varepsilon_1'\zeta_1^2 - \Delta_1^3 g\sin\theta + \varepsilon_1'\Delta_1^2 - \Delta_1\varepsilon_1^2 g\sin\theta - \zeta_1\zeta_1'\varepsilon_1 - \varepsilon_1\Delta_1\Delta_1' \end{cases} \tag{5.1.16}$$

şeklinde olur. $N'_{\beta_1}(s)$ türevi ifadesinde (2.2.5) ve (5.1.16) bağıntıları yerlerine yazılırsa N'_{β_1} vektörünün WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$N'_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2g^2\cos^2\theta + g^2\sin^2\theta}} \frac{\overline{\sigma_1}N + \overline{\phi_1}C + \overline{\gamma_1}W}{(\overline{\zeta_1}^2 + \overline{\Delta_1}^2 + \overline{\varepsilon_1}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.1.17}$$

olarak bulunur. (5.1.15) bağıntısının her iki tarafının normu alınırsa

$$\|N'_{\beta_1}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2f^{*2} + g^{*2}}} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \phi_1^2 + \gamma_1^2}}{(\zeta_1^2 + \Delta_1^2 + \varepsilon_1^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.1.18}$$

şeklinde bulunur. (5.1.18) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) dan karşılıkları yazılırsa

$$\|N'_{\beta_1}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2g^2\cos^2\theta + g^2\sin^2\theta}} \frac{\sqrt{\overline{\sigma_1}^2 + \overline{\phi_1}^2 + \overline{\gamma_1^2}}}{(\overline{\zeta_1}^2 + \overline{\Delta_1}^2 + \overline{\varepsilon_1}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.1.19}$$

şeklinde elde edilir. $C_{\beta_1} = \frac{N'_{\beta_1}}{\|N'_{\beta_1}\|}$ olduğundan (5.1.15) ve (5.1.18) bağıntılarından gerekli cebirsel işlemler yapıldığında

$$C_{\beta_1} = \frac{\sigma_1 N^* + \phi_1 C^* + \gamma_1 W^*}{\sqrt{\sigma_1^2 + \phi_1^2 + \gamma_1^2}} \tag{5.1.20}$$

olarak bulunur. $C_{\beta_1}(s)$ ifadesinde (2.2.5) bağıntısı yerine yazılırsa C_{β_1} vektörünün WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$C_{\beta_1} = \frac{\overline{\sigma_1}N + \overline{\phi_1}C + \overline{\gamma_1 W}}{\sqrt{\overline{\sigma_1}^2 + \overline{\phi_1}^2 + \overline{\gamma_1}^2}} \tag{5.1.21}$$

olarak bulunur. $W = N \wedge C$ olduğundan W_{β_1} vektör alanı

$$W_{\beta_1} = \frac{(\Delta_1\gamma_1 - \varepsilon_1\phi_1)N^* + (-\zeta_1\gamma_1 + \sigma_1\varepsilon_1)C^* + (\zeta_1\phi_1 - \Delta_1\sigma_1)W^*}{(\sqrt{\zeta_1^2 + \Delta_1^2 + \varepsilon_1^2})(\sqrt{\sigma_1^2 + \phi_1^2 + \gamma_1^2})} \tag{5.1.22}$$

olur. Burada N^*, C^*, W^*ifadelerinin yerlerine (2.2.5) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa

W_{β_1} vektörünün WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$W_{\beta_1} = \frac{\begin{bmatrix} (\overline{\Delta_1}\,\overline{\gamma_1}\sin\theta - \overline{\varepsilon_1}\,\overline{\phi_1}\sin\theta - \overline{\zeta_1}\,\overline{\phi_1}\cos\theta + \overline{\Delta_1}\,\overline{\sigma_1}\cos\theta)N \\ +(\overline{\Delta_1}\,\overline{\gamma_1}\cos\theta - \overline{\varepsilon_1}\,\overline{\phi_1}\cos\theta + \overline{\zeta_1}\,\overline{\phi_1}\sin\theta - \overline{\Delta_1}\,\overline{\sigma_1}\sin\theta)C \\ +(-\overline{\zeta_1}\,\overline{\gamma_1} + \overline{\sigma_1}\,\overline{\varepsilon_1})W \end{bmatrix}}{(\sqrt{\overline{\zeta_1}^2 + \overline{\Delta_1}^2 + \overline{\varepsilon_1}^2})(\sqrt{\overline{\sigma_1}^2 + \overline{\phi_1}^2 + \overline{\gamma_1}^2})} \tag{5.1.23}$$

şeklinde bulunur. β_1 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınınca ;

$$\beta_1^{''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(f^{*2} + f^{*'})N^* + (-f^{*2} + f^{*'} - g^{*2})C^* + (f^*g^* + g^{*'})W^*)$$

ve

$$\beta_1^{'''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_1 N^* + \rho_1 C^* + \chi_1 W^*)$$

şeklinde elde edilir. Burada ν_1, ρ_1 ve χ_1 katsayıları

$$\begin{cases} \nu_1 = (-2f^*f^{*'} - f^{*''} + f^{*3} - f^*f^{*'} + f^*g^{*2}) \\ \rho_1 = (-f^{*3} - f^*f^{*'} - 2f^*f^{*'} + f^{*''} - 2g^*g^{*'} - f^*g^{*2} - g^*g^{*'}) \\ \chi_1 = (-f^{*2}g^* - g^{*3} + 2g^*f^{*'} + f^*g^{*'} + g^{*''}) \end{cases} \tag{5.1.24}$$

şeklindedir. β_1 eğrisinin torsiyonu τ_{β_1} ile gösterilirse eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa τ_{β_1} torsiyonu

$$\begin{cases} \omega_1 = f^{*2}g^* + f^*g^{*'} + f^{*2}g^* - g^*f^{*'} + g^{*3} \\ \psi_1 = -[(-f^*(f^*g^* + g^{*'}) - g^*(-f^{*2} + f^{*'}))] \\ \lambda_1 = f^{*3} - f^*f^{*'} + f^*g^{*2} + f^{*3} - f^*f^{*'} \end{cases} \tag{5.1.25}$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}(\nu_1\omega_1 + \rho_1\psi_1 + \chi_1\lambda_1)}{\omega_1^2 + \psi_1^2 + \lambda_1^2} \tag{5.1.26}$$

olur. (5.1.24) ve (5.1.25) bağıntılarında (2.2.6) eşitlikler yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\nu_1} = -2gg^{'}\cos^2\theta - g^{''}\cos\theta + g^3\cos^3\theta - gg^{'}\cos^2\theta + g^2\sin\theta\cos\theta \\ \overline{\rho_1} = -g^3\cos^3\theta - gg^{'}\cos^2\theta - 2gg^{'}\cos^2\theta + g^{''}\cos\theta - 3gg^{'}\sin^2\theta - g^3\cos\theta\sin\theta \\ \overline{\chi_1} = g^2\cos^2\theta\sin\theta + g^3\sin^3\theta - gg^{'}\sin\theta\cos\theta + g^{''}\sin\theta \end{cases} \tag{5.1.27}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\omega_1} = gcos\theta(-g^2cos\theta\sin\theta - g^{'}\sin\theta) + gsin\theta(-g^2\cos^2\theta + g^{'}\cos\theta - g^2\sin^2\theta) \\ \overline{\psi_1} = -[-g\cos\theta(-g^2cos\theta\sin\theta - g^{'}\sin\theta) - g\cos\theta(-g^2\cos^2\theta + g^{'}\cos\theta))] \\ \overline{\lambda_1} = -g\cos\theta[-g^2\cos^2\theta + g^{'}\cos\theta - g^2\sin^2\theta - gcos\theta(-g^2\cos^2\theta + g^{'}\cos\theta)] \end{cases} \tag{5.1.28}$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.1.26) eşitliğinde yerine yazılırsa N^*C^*-Smarandache eğrisinin τ_{β_1} torsiyonunun WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}(\overline{\nu_1}\,\overline{\omega_1} + \overline{\rho_1}\,\overline{\psi_1} + \overline{\chi_1}\,\overline{\lambda_1})}{\overline{\omega_1}^2 + \overline{\psi_1}^2 + \overline{\lambda_1}^2}$$

olarak bulunur. (2.2.3) bağıntısında (5.1.10) ve (5.1.26) ifadeleri yerlerine yazılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_1^2 + \Delta_1^2 + \varepsilon_1^2}}{(2f^{*2} + g^{*2})}]^2 + [\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_1\omega_1 + \rho_1\psi_1 + \chi_1\lambda_1)}{\omega_1^2 + \psi_1^2 + \lambda_1^2}]^2} \tag{5.1.29}$$

ve

$$g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_1\omega_1+\rho_1\psi_1+\chi_1\lambda_1)}{\omega_1^2+\psi_1^2+\lambda_1^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_1^2+\Delta_1^2+\varepsilon_1^2}}{(2f^{*2}+g^{*2})}}\right]^{'}}{1 + \left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_1\omega_1+\rho_1\psi_1+\chi_1\lambda_1)}{\omega_1^2+\psi_1^2+\lambda_1^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_1^2+\Delta_1^2+\varepsilon_1^2}}{(2f^{*2}+g^{*2})}}\right]^2} \tag{5.1.30}$$

şeklinde elde edilir. (5.1.29) ve (5.1.30) bağıntısında (2.2.6) karşılıkları yazılırsa N^*C^*-Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonun WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_1}^2 + \overline{\Delta_1}^2 + \overline{\varepsilon_1}^2}}{(2gcos\theta + g^2\sin^2\theta)}]^2 + [\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_1}\,\overline{\omega_1} + \overline{\rho_1}\,\overline{\psi_1} + \overline{\chi_1}\,\overline{\lambda_1})}{\overline{\omega_1}^2 + \overline{\psi_1}^2 + \overline{\lambda_1}^2}]^2} \tag{5.1.31}$$

ve

$$g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_1}\,\overline{\omega_1}+\overline{\rho_1}\,\overline{\psi_1}+\overline{\chi_1}\,\overline{\lambda_1})}{\overline{\omega_1}^2+\overline{\psi_1}^2+\overline{\lambda_1}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_1}^2+\overline{\Delta_1}^2+\overline{\varepsilon_1}^2}}{(2g\cos\theta+g^2\sin^2\theta)}}\right]'}{1+\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_1}\,\overline{\omega_1}+\overline{\rho_1}\,\overline{\psi_1}+\overline{\chi_1}\,\overline{\lambda_1})}{\overline{\omega_1}^2+\overline{\psi_1}^2+\overline{\lambda_1}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_1}^2+\overline{\Delta_1}^2+\overline{\varepsilon_1}^2}}{(2g\cos\theta+g^2\sin^2\theta)}}\right]^2} \tag{5.1.32}$$

olarak bulunur.

5.2 C^*W^*-Smarandache Eğrisi

Tanım 5.2 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta^* : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrilerinin çatı elemanları sırasıyla $\{N, C, W, f, g\}$ ve $\{N^*, C^*, W^*, f^*, g^*\}$ olsun. (β, β^*) eğrileri WC^*-partner eğri çifti olmak üzere β^* eğrisinin C^*W^*-Smaranadache eğrisi

$$\beta_2(s) = \beta_{C^*W^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^* + W^*) \tag{5.2.1}$$

şeklinde tanımlıdır. C^*W^*-Smarandache eğrisinin yay parametresi s_{β_2} olmak üzere β_2 eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_{\beta_2}\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f^*N^* - g^*C^* + g^*W^*) \tag{5.2.2}$$

olur ve normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_2}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \sqrt{\frac{f^{*2} + 2g^{*2}}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa β_2 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2} = \frac{-f^*N^* + g^*W^* - g^*C^*}{\sqrt{f^{*2} + 2g^{*2}}}. \tag{5.2.3}$$

şeklinde olur. (5.2.1) ifadesinde C^* ve W^* yerine (2.2.5) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin WC^* eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta N + \sin\theta C + W) \tag{5.2.4}$$

olur. (5.2.3) denkleminde (2.2.5) ve (2.2.6) bağıntıları dikkate alınırsa (5.2.4) ifadesindeki β_2 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{\sin\theta W - C}{\sqrt{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}} \tag{5.2.5}$$

şeklinde bulunur. (5.2.3) ifadesinin tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \zeta_2 = (f^* g^*(f^{*2} + 2g^{*2})) + 2g^*(f^* g^{*'} - g^* f^{*'}) \\ \Delta_2 = -(f^{*2} + 2g^{*2})(f^{*2} + g^{*2}) + f^*(f^{*'} g^* - g^{*'} f^*) \\ \varepsilon_2 = -g^{*2}(f^{*2} + 2g^{*2}) + f^*(f^* g^{*'} - g^* f^{*'}) \end{cases} \tag{5.2.6}$$

olmak üzere T'_{β_2} vektörü

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(f^{*2} + 2g^{*2})^2}(\zeta_2 N^* + \Delta_2 C^* + \varepsilon_2 W^*) \tag{5.2.7}$$

olur. (5.2.6) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\zeta_2} = -g^4\sin\theta\cos^3\theta - 2g^2 g'\cos\theta\sin^2\theta - 2g^4\cos\theta\sin^3\theta + 2g^2 g'\cos\theta\sin^2\theta \\ \overline{\Delta_2} = -g^4\sin^2\theta\cos^2\theta + gg'\sin\theta\cos^2\theta + 2g^4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2g^4\sin^4\theta \\ \qquad -g^2 g'\sin\theta\cos^2\theta \\ \overline{\varepsilon_2} = -g^2 g'\sin\theta\cos^2\theta - g^4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2g^4\sin^4\theta + g^2 g'\sin\theta\cos^2\theta \end{cases} \tag{5.2.8}$$

şeklinde olur. $T'_{\beta_2}(s)$ ifadesinde (2.2.5) ve (5.2.8) bağıntıları yerine yazılırsa T'_{β_2} vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}(\overline{\zeta_2}N + \overline{\Delta_2}C + \overline{\varepsilon_2}W)}{(g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta)^2} \tag{5.2.9}$$

olarak bulunur. β_2 eğrisinin eğriliği κ_{β_2} ile gösterilirse (5.2.7) bağıntısından κ_{β_2} eğriliği

$$\kappa_{\beta_2} = \|T'_{\beta_2}\|,$$

$$\kappa_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}}{(f^{*2} + 2g^{*2})^2}\sqrt{\zeta_2^2 + \Delta_2^2 + \varepsilon_2^2} \tag{5.2.10}$$

olur. Burada f^* ve g^* ın yerine (2.2.6) bağıntısındaki karşılıkları yazılırsa κ_{β_2} eğriliğinin WC^* eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_2} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\overline{\zeta_2}^2 + \overline{\Delta_2}^2 + \overline{\varepsilon_2}^2}}{(g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta)^2} \tag{5.2.11}$$

şeklindedir. β_2 eğrisinin asli normal vektör alanı N_{β_2} ile gösterilirse (5.2.7) bağıntısından

$$N_{\beta_2} = \frac{T'_{\beta_2}}{\|T'_{\beta_2}\|},$$
$$N_{\beta_2} = \frac{\zeta_2 N^* + \Delta_2 C^* + \varepsilon_2 W^*}{\sqrt{\zeta_2^2 + \Delta_2^2 + \varepsilon_2^2}} \tag{5.2.12}$$

olur. Burada N^*, C^* ve W^* yerine (2.2.5) bağıntısındaki karşılıkları yazılırsa N_{β_2} ifadesinin WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$N_{\beta_2} = \frac{\overline{\zeta_2}N + \overline{\Delta_2}C + \overline{\varepsilon_2}W}{\sqrt{\overline{\zeta_2}^2 + \overline{\Delta_2}^2 + \overline{\varepsilon_2}^2}} \tag{5.2.13}$$

şeklindedir. (5.2.12) bağıntısının tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \sigma_2 = -\Delta_2\zeta_2^2 f^* + \zeta_2'\Delta_2^2 - \Delta_2^3 f^* + \zeta_2'\varepsilon_2^2 - \Delta_2\varepsilon_2^2 f^* - \zeta_2\Delta_2\Delta_2' - \zeta_2\varepsilon_2\varepsilon_2' \\ \phi_2 = \zeta_2^3 f^* + \Delta_2'\zeta_2^2 - \varepsilon_2\zeta_2^2 g^* + \zeta_2\Delta_2^2 f^* - \varepsilon_2\Delta_2^2 g^* + \zeta_2\varepsilon_2^2 f^* + \Delta_2{}'\varepsilon_2^2 \\ \qquad +\varepsilon_2^3 g^* - \zeta_2\zeta_2'\Delta_2 - \Delta_2\varepsilon_2\varepsilon_2' \\ \gamma_2 = \Delta_2\zeta_2^2 g^* + \varepsilon_2'\zeta_2^2 + \Delta_2^3 g^* + \varepsilon_2'\Delta_2^2 + \Delta_2\varepsilon_2^2 g^* - \zeta_2\zeta_2'\varepsilon_2 - \varepsilon_2\Delta_2\Delta_2' \end{cases} \tag{5.2.14}$$

olmak üzere N'_{β_2} türevi

$$N'_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f^{*2} + 2g^{*2}}}\frac{\sigma_2 N^* + \phi_2 C^* + \gamma_2 W^*}{(\zeta_2^2 + \Delta_2^2 + \varepsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.2.15}$$

olur. (5.2.14) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$
\begin{cases}
\overline{\sigma_2} = -\Delta_2\zeta_2^2 g\cos\theta + \zeta_2^{'}\Delta_2^2 - \Delta_2^3 g\cos\theta + \zeta_2^{'}\varepsilon_2^2 - \Delta_2\varepsilon_2^2 g\cos\theta - \zeta_2\Delta_2\Delta_2^{'} - \zeta_2\varepsilon_2\varepsilon_2^{'} \\
\overline{\phi_2} = \zeta_2^3 g\cos\theta + \Delta_2^{'}\zeta_2^2 + \varepsilon_2\zeta_2^2 g\sin\theta + \zeta_2\Delta_2^2 g\cos\theta + \varepsilon_2\Delta_2^2 g\sin\theta + \zeta_2\varepsilon_2^2 g\cos\theta \\
\qquad +\Delta_2{'}\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2^3 g\sin\theta - \zeta_2\zeta_2^{'}\Delta_2 - \Delta_2\varepsilon_2\varepsilon_2^{'} \\
\overline{\gamma_2} = -\Delta_2\zeta_2^2 g\sin\theta + \varepsilon_2^{'}\zeta_2^2 - \Delta_2^3 g\sin\theta + \varepsilon_2^{'}\Delta_2^2 - \Delta_2\varepsilon_2^2 g\sin\theta - \zeta_2\zeta_2^{'}\varepsilon_2 - \varepsilon_2\Delta_2\Delta_2^{'}
\end{cases}
\tag{5.2.16}
$$

şeklinde olur. $N_{\beta_2}^{'}(s)$ ifadesinde (2.2.5) ve (5.2.16) bağıntıları yerlerine yazılırsa $N_{\beta_2}^{'}$ vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$
N_{\beta_2}^{'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta}}\frac{\overline{\sigma_2}N + \overline{\phi_2}C + \overline{\gamma_2}W}{(\overline{\zeta_2}^2 + \overline{\Delta_2}^2 + \overline{\varepsilon_2}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.2.17}
$$

olarak bulunur. (5.2.15) bağıntısının her iki tarafının normu alınırsa

$$
\|N_{\beta_2}^{'}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f^{*2} + 2g^{*2}}}\frac{\sqrt{\sigma_2^2 + \phi_2^2 + \gamma_2^2}}{(\zeta_2^2 + \Delta_2^2 + \varepsilon_2^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.2.18}
$$

şeklinde bulunur. (5.2.18) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) bağıntısındaki karşılıkları yazılırsa

$$
\|N_{\beta_2}^{'}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta}}\frac{\sqrt{\overline{\sigma_2}^2 + \overline{\phi_2}^2 + \overline{\gamma_2^2}}}{(\overline{\zeta_2}^2 + \overline{\Delta_2}^2 + \overline{\varepsilon_2}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.2.19}
$$

olarak bulunur. $C_{\beta_2} = \frac{N_{\beta_2}^{'}}{\|N_{\beta_2}^{'}\|}$ olduğundan (5.2.15) ve (5.2.18) bağıntılarından gerekli cebirsel işlemler yapıldığında

$$
C_{\beta_2} = \frac{\sigma_2 N^* + \phi_2 C^* + \gamma_2 W^*}{\sqrt{\sigma_2^2 + \phi_2^2 + \gamma_2^2}} \tag{5.2.20}
$$

olarak elde edilir. $C_{\beta_2}(s)$ ifadesinde (2.2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa C_{β_2} vektörünün WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$
C_{\beta_2} = \frac{\overline{\sigma_2}N + \overline{\phi_2}C + \overline{\gamma_2 W}}{\sqrt{\overline{\sigma_2}^2 + \overline{\phi_2}^2 + \overline{\gamma_2}^2}} \tag{5.2.21}
$$

olarak bulunur. $W = N \wedge C$ olduğundan W_{β_2} vektör alanı

$$W_{\beta_2} = \frac{(\Delta_2\gamma_2 - \varepsilon_2\phi)N^* + (-\zeta_2\gamma_2 + \sigma_2\varepsilon_2)C^* + (\zeta_2\phi_2 - \Delta_2\sigma_2)W^*}{(\sqrt{\zeta_2^2 + \Delta_2^2 + \varepsilon_2^2})(\sqrt{\sigma_2^2 + \phi_2^2 + \gamma_2^2})} \tag{5.2.22}$$

olur. Burada N^*, C^*, W^* ifadelerinin yerlerine (2.2.5) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa W_{β_2} vektörünün WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$W_{\beta_2} = \frac{\begin{bmatrix} (\overline{\Delta_2}\,\overline{\gamma_2}\sin\theta - \overline{\varepsilon_2}\,\overline{\phi_2}\sin\theta - \overline{\zeta_2}\,\overline{\phi_2}\cos\theta + \overline{\Delta_2}\,\overline{\sigma_2}\cos\theta)N \\ +(\overline{\Delta_2}\,\overline{\gamma_2}\cos\theta - \overline{\varepsilon_2}\,\overline{\phi_2}\cos\theta + \overline{\zeta_2}\,\overline{\phi_2}\sin\theta - \overline{\Delta_2}\,\overline{\sigma_2}\sin\theta)C \\ +(-\overline{\zeta_2}\,\overline{\gamma_2} + \overline{\sigma_2}\,\overline{\varepsilon_2})W \end{bmatrix}}{\sqrt{\overline{\zeta_2}^2 + \overline{\Delta_2}^2 + \overline{\varepsilon_2}^2}\sqrt{\overline{\sigma_2}^2 + \overline{\phi_2}^2 + \overline{\gamma_2}^2}} \tag{5.2.23}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan β_2 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa ;

$$\beta_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f^{*'} + g^*f^*)N^* + (-f^{*2} - g^{*2} - g^{*'})C^* + (g^{*'} - g^{*2})W^*)$$

ve

$$\beta_2''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_2 N^* + \rho_2 C^* + \chi_2 W^*)$$

şeklinde bulunur. Burada ν_2, ρ_2 ve χ_2 katsayıları

$$\begin{cases} \nu_2 = (-f^{*''} + f^*(2g^{'*} + f^{*2}) + g^*(f^{*'} + g^*f^*)) \\ \rho_2 = (f^*(-3f^{*'} + g^*f^*) + g^*(-3g^{*'} + g^{*2}) - g^{*''}) \\ \chi_2 = -g^*(f^{*2} + g^{*2} + 3g^{*'}) + g^{*''} \end{cases} \tag{5.2.24}$$

şeklindedir. β_2 eğrisinin torsiyonu τ_{β_2} ile gösterilmek üzere birinci, ikinci ve üçüncü türevler yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa τ_{β_2} torsiyonu

$$\begin{cases} \omega_2 = -g^*g^{*'} + g^{*3} + g^*f^{*2} + g^{*3} + g^*g^{*'} \\ \psi_2 = f^*g^{*'} - f^*g^{*2} + g^*f^{*'} + g^{*2}f^* \\ \lambda_2 = f^{*3} + f^*g^{*2} + f^*g^{*'} - g^*f^{*'} + g^{*2}f^* \end{cases} \tag{5.2.25}$$

katsayılarıyla birlikte

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}(\nu_2\omega_2 + \rho_2\psi_2 + \chi_2\lambda_2)}{\omega_2^2 + \psi_2^2 + \lambda_2^2} \tag{5.2.26}$$

olarak bulunur. (5.2.24) ve (5.2.25) bağıntılarından (2.2.6) eşitliğindeki karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\nu_2} = (-g'' \cos\theta + g\cos\theta(-2g' \sin\theta + g^2\cos^2\theta) - g\sin\theta(g'\cos\theta - g^2\cos\theta\sin\theta)) \\ \overline{\rho_2} = (g\cos\theta(-3g'\cos\theta - g^2\sin\theta\cos\theta) - g - \sin\theta(3g'\sin\theta + g^2\sin^2\theta) + g''\sin\theta) \\ \overline{\chi_2} = g\cos\theta(g^2\cos^2\theta + g^2\sin^2\theta - 3g'\sin\theta) - g''\sin\theta \end{cases} \tag{5.2.27}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\omega_2} = -gg'\sin^2\theta - g^3\sin^3\theta - g^3\sin\theta\cos^2\theta - g^3\sin^3\theta + gg'\sin^2\theta \\ \overline{\psi_2} = -gg'\sin\theta\cos\theta - g^3\sin^2\theta\cos\theta - gg'\sin\theta\cos\theta + g^3\sin^2\theta\cos\theta \\ \overline{\lambda_2} = g^3\cos^3\theta + g^3\cos\theta\sin^2\theta - gg'\sin\theta\cos\theta + gg'\sin\theta\cos\theta + g^3\sin^2\theta\cos\theta \end{cases} \tag{5.2.28}$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.2.26) de yerine yazılırsa C^*W^*-Smarandache eğrisinin τ_{β_2} torsiyonunun WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}(\overline{\nu_2}\,\overline{\omega_2} + \overline{\rho_2}\,\overline{\psi_2} + \overline{\chi_2}\,\overline{\lambda_2})}{\overline{\omega_2}^2 + \overline{\psi_2}^2 + \overline{\lambda_2}^2}$$

şeklindedir. (2.2.3) bağıntısında (5.2.10) ve (5.2.26) ifadeleri yerlerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_2^2 + \Delta_2^2 + \varepsilon_2^2}}{(f^{*2} + 2g^{*2})}]^2 + [\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_2\omega_2 + \rho_2\psi_2 + \chi_2\lambda_2)}{\omega_2^2 + \psi_2^2 + \lambda_2^2}]^2} \tag{5.2.29}$$

ve

$$g=\frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_2\omega_2+\rho_2\psi_2+\chi_2\lambda_2)}{\omega_2^2+\psi_2^2+\lambda_2^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_2^2+\Delta_2^2+\varepsilon_2^2}}{(f^{*2}+2g^{*2})}}\right]'}{1+\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_2\omega_2+\rho_2\psi_2+\chi_2\lambda_2)}{\omega_2^2+\psi_2^2+\lambda_2^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_2^2+\Delta_2^2+\varepsilon_2^2}}{(f^{*2}+2g^{*2})}}\right]^2} \tag{5.2.30}$$

şeklinde bulunur. (5.2.29) ve (5.2.30) bağıntılarından (2.2.6) karşılıkları yazılırsa C^*W^* Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonunun WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$f=\sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_2}^2+\overline{\Delta_2}^2+\overline{\varepsilon_2}^2}}{(gcos\theta+2g^2\sin^2\theta)}]^2+[\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_2}\,\overline{\omega_2}+\overline{\rho_2}\,\overline{\psi_2}+\overline{\chi_2}\,\overline{\lambda_2})}{\overline{\omega_2}^2+\overline{\psi_2}^2+\overline{\lambda_2}^2}]^2} \tag{5.2.31}$$

ve

$$g=\frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_2}\,\overline{\omega_2}+\overline{\rho_2}\,\overline{\psi_2}+\overline{\chi_2}\,\overline{\lambda_2})}{\overline{\omega_2}^2+\overline{\psi_2}^2+\overline{\lambda_2}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_2}^2+\overline{\Delta_2}^2+\overline{\varepsilon_2}^2}}{(g\cos\theta+2g^2\sin^2\theta)}}\right]'}{1+\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_2}\,\overline{\omega_2}+\overline{\rho_2}\,\overline{\psi_2}+\overline{\chi_2}\,\overline{\lambda_2})}{\overline{\omega_2}^2+\overline{\psi_2}^2+\overline{\lambda_2}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_2}^2+\overline{\Delta_2}^2+\overline{\varepsilon_2}^2}}{(g\cos\theta+2g^2\sin^2\theta)}}\right]^2} \tag{5.2.32}$$

olarak bulunur.

5.3 N^*W^*-Smarandache Eğrisi

Tanım 5.3 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta^* : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrilerinin çatı elemanları sırasıyla $\{N, C, W, f, g\}$ ve $\{N^*, C^*, W^*, f^*, g^*\}$ olsun. (β, β^*) eğrileri WC^*-partner eğri çifti olmak üzere β^* eğrisinin N^*W^*-Smaranadache eğrisi

$$\beta_3(s) = \beta_{N^*W^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + W^*) \tag{5.3.1}$$

şeklinde tanımlıdır. N^*W^*-Smarandache eğrisinin yay parametresi s_{β_3} olmak üzere β_3 eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_{\beta_3}\frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^*C^* - g^*C^*) \tag{5.3.2}$$

olur ve normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_3}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \sqrt{\frac{(f^* - g^*)^2}{2}} = \frac{|f^* - g^*|}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa β_3 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3} = \begin{cases} C^*, & f^* > g^* \\ -C^*, & f^* < g^* \end{cases} . \tag{5.3.3}$$

şeklinde olur. (5.3.1) ifadesinde N^* ve W^* yerine (2.2.5) den karşılıkları yazılırsa N^*W^*-Smarandache eğrisinin WC^* eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\sin\theta - \cos\theta)N + (\sin\theta + \cos\theta)C) \tag{5.3.4}$$

olur. (5.3.3) denkleminde (2.2.5) ve (2.2.6) bağıntıları dikkate alınırsa (5.3.4) ifadesindeki β_3 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = \frac{g(\cos\theta + \sin\theta)W}{|g||\cos\theta + \sin\theta|} \tag{5.3.5}$$

şeklinde bulunur. (5.3.3) ifadesinin tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \zeta_3 = -f^* \\ \Delta_3 = 0 \\ \varepsilon_3 = g^* \end{cases} \tag{5.3.6}$$

olmak üzere T'_{β_3} vektörü

$$T'_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{2}(\zeta_3 N^* + \varepsilon_3 W^*)}{|f^* - g^*|} \tag{5.3.7}$$

olur. (5.3.6) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\zeta_3} = -g\cos\theta \\ \overline{\Delta_3} = 0 \\ \overline{\varepsilon_3} = -g\sin\theta \end{cases} \tag{5.3.8}$$

şeklinde olur. $T'_{\beta_3}(s)$ türevi ifadesinde (2.2.5) ve (5.3.8) bağıntıları yerlerine yazılırsa T'_{β_3} vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{2}(\overline{\zeta_3}N + \overline{\varepsilon_3}W)}{|g||\cos\theta + \sin\theta|} \tag{5.3.9}$$

olarak bulunur. β_3 eğrisinin eğriliği κ_{β_3} ile gösterilirse (5.3.7) bağıntısından κ_{β_3} eğriliği

$$\kappa_{\beta_3} = \|T'_{\beta_3}\|,$$

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}}{|f^* - g^*|}\sqrt{\zeta_3^2 + \varepsilon_3^2} \tag{5.3.10}$$

olur. Burada f^* ve g^* yerine (2.2.6) denkleminden karşılıkları yazılırsa κ_{β_3} eğriliğinin WC^* eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_3} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\overline{\zeta_3}^2 + \overline{\varepsilon_3}^2}}{|g||\cos\theta + \sin\theta|} \tag{5.3.11}$$

dır. β_3 eğrisinin asli normal vektör alanı N_{β_3} ile gösterilirse (5.3.7) bağıntısından

$$N_{\beta_3} = \frac{T'_{\beta_3}}{\|T'_{\beta_3}\|},$$

$$N_{\beta_3} = \frac{\zeta_3 N^* + \varepsilon_3 W^*}{\sqrt{\zeta_3^2 + \varepsilon_3^2}} \tag{5.3.12}$$

olur. Burada N^*, C^* ve W^* ifadeleri yerine (2.2.5) den karşılıkları yazılırsa N_{β_3} ifadesinin WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$N_{\beta_3} = \frac{\overline{\zeta_3}N + \overline{\varepsilon_3}W}{\sqrt{\overline{\zeta_3}^2 + \overline{\varepsilon_3}^2}} \tag{5.3.13}$$

şeklindedir. (5.3.12) bağıntısının tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \sigma_3 = \zeta_3'\zeta_3^2 + \zeta_3'\varepsilon_3^2 - \zeta_3^3\zeta_3' - \zeta_3\varepsilon_3\varepsilon_3' \\ \phi_3 = \zeta_3^3 f^* + \varepsilon_3^2\zeta_3 f^* - \zeta_3^2\varepsilon_3' g^* - \varepsilon_3^2\varepsilon_3' g^* \\ \gamma_3 = -\varepsilon_3\zeta_3'\zeta_3^2 - \varepsilon_3^2\varepsilon_3' + \varepsilon_3'\varepsilon_3^2 + \varepsilon_3'\zeta_3^2 \end{cases} \tag{5.3.14}$$

olmak üzere N'_{β_3} türevi

$$N'_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}}{|f^* - g^*|} \frac{\sigma_3 N^* + \gamma_3 W^*}{(\zeta_3^2 + \varepsilon_3^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.3.15}$$

olur. (5.3.14) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\sigma_3} = \zeta_3' \zeta_3^2 + \zeta_3' \varepsilon_3^2 - \zeta_3^3 \zeta_3' - \zeta_3 \varepsilon_3 \varepsilon_3' \\ \overline{\phi_3} = \zeta_3^3 f \cos\theta + \varepsilon_3^2 \zeta_3 f \cos\theta + \zeta_3^2 \varepsilon_3' g \sin\theta + \varepsilon_3^2 \varepsilon_3' g \sin\theta \\ \overline{\gamma_3} = -\varepsilon_3 \zeta_3' \zeta_3^2 - \varepsilon_3^2 \varepsilon_3' + \varepsilon_3' \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3' \zeta_3^2 \end{cases} \tag{5.3.16}$$

şeklinde olur. $N'_{\beta_3}(s)$ türevi ifadesinde (2.2.5) ve (5.3.16) bağıntıları yerine yazılırsa N'_{β_3} vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$N'_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}}{|g \cos\theta + g \sin\theta|} \frac{\overline{\sigma_3} N + \overline{\gamma_3 W}}{(\overline{\zeta_3}^2 + \overline{\varepsilon_3}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.3.17}$$

olarak bulunur. (5.3.15) bağıntısının normu alınırsa

$$\|N'_{\beta_3}\| = \frac{\sqrt{2}}{|f^* - g^*|} \frac{\sqrt{\sigma_3^2 + \gamma_3^2}}{(\zeta_3^2 + \varepsilon_3^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.3.18}$$

şeklinde bulunur. (5.3.18) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) dan karşılıkları yazılırsa

$$\|N'_{\beta_3}\| = \frac{\sqrt{2}}{|g \cos\theta + g \sin\theta|} \frac{\sqrt{\overline{\sigma_3}^2 + \overline{\gamma_3^2}}}{(\overline{\zeta_3}^2 + \overline{\varepsilon_3}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.3.19}$$

olarak bulunur. $C_{\beta_3} = \frac{N'_{\beta_3}}{\|N'_{\beta_3}\|}$ olduğundan (5.3.15) ve (5.3.18) bağıntılarından gerekli cebirsel işlemler yapıldığında

$$C_{\beta_3} = \frac{\sigma_3 N^* + \gamma_3 W^*}{\sqrt{\sigma_3^2 + \gamma_3^2}} \tag{5.3.20}$$

olarak bulunur. $C_{\beta_3}(s)$ ifadesinde (2.2.5) bağıntısı yerine yazılırsa C_{β_3} vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$C_{\beta_1} = \frac{\overline{\sigma_3} N + \overline{\gamma_3 W}}{\sqrt{\overline{\sigma_3}^2 + \overline{\gamma_3}^2}} \tag{5.3.21}$$

olarak bulunur. $W = N \wedge C$ vektörel çarpımı yapılırsa

$$W_{\beta_3} = \frac{(-\zeta_3\gamma_3 + \sigma_3\varepsilon_3)C^*}{(\sqrt{\zeta_3^2 + \varepsilon_3^2})(\sqrt{\sigma_3^2 + \gamma_3^2})} \tag{5.3.22}$$

olur. Burada N^*, C^*, W^* ifadelerinin yerlerine (2.2.5) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa W_{β_3} vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$W_{\beta_3} = \frac{\left[(-\overline{\delta}\,\overline{\gamma} + \overline{\sigma_3}\,\overline{\varepsilon_3})W\right]}{(\sqrt{\overline{\zeta_3}^2 + \overline{\varepsilon_3}^2})(\sqrt{\overline{\sigma_3}^2 + \overline{\gamma_3}^2})} \tag{5.3.23}$$

şeklinde bulunur. β_3 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınınca ;

$$\beta_3^{''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f^* + g^* f^*)N^* + (f^{*'} - g^{*'})C^* + (f^* g^* - g^{*2})W^*),$$

ve

$$\beta_3^{'''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_3 N^* + \rho_3 C^* + \chi_3 W^*)$$

elde edilir. Burada ν_3, ρ_3 ve χ_3 katsayıları

$$\begin{cases} \nu_3 = (-3f^* f^{*'} + 2f^* g^{*'} + g^* f^{*'}) \\ \rho_3 = (f^{*2} + g^{*2})(-f^* + g^*) + f^{*''} - g^{*''} \\ \chi_3 = (-3g^* g^{*'} + 2g^* f^{*'} + f^* g^{*'}) \end{cases} \tag{5.3.24}$$

şeklindedir. β_3 eğrisinin torsiyonu τ_{β_3} ile gösterilirse birinci, ikinci ve üçüncü türevler yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa τ_{β_3} torsiyonu, katsayılar

$$\begin{cases} \omega_3 = -g^* f^{*'} + g^* g^{*'} \\ \psi_3 = -[(-f^*(f^* g^* + g^{*2}) - g^*(-f^* + f^* g^*))] \\ \lambda_3 = -f^* f^{*'} + f^* g^{*'} \end{cases} \tag{5.3.25}$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}(\nu_3\omega_3 + \rho_3\psi_3 + \chi_3\lambda_3)}{\omega_3^2 + \psi_3^2 + \lambda_3^2} \tag{5.3.26}$$

olur. (5.3.24) ve (5.3.25) bağıntısında (2.2.6) eşitliği yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\nu_3} = -3gg^{'}\cos^2\theta + 2gg^{'}\sin\theta\cos\theta + gg^{'}\sin\theta\cos\theta \\ \overline{\rho_3} = (g^2\cos^2\theta + g^2\sin^2\theta)(-g\cos\theta - g\sin\theta) + g^{''}\cos\theta - g^{''}\sin\theta \\ \overline{\chi_3} = (-3gg^{'}\sin^2\theta + 2gg^{'}\sin\theta\cos\theta + gg^{'}\sin\theta\cos\theta) \end{cases} \tag{5.3.27}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\omega_3} = gg^{'}\sin\theta\cos\theta + gg^{'}\sin^2\theta \\ \overline{\psi_3} = -[(-g\cos\theta(-g^2\sin\theta\cos\theta + g^2\sin^2\theta) + g\sin\theta(-g\cos\theta - g^2\sin\theta\cos\theta))] \\ \overline{\lambda_3} = -gg^{'}\cos^2\theta + gg^{'}\sin\theta\cos\theta \end{cases} \tag{5.3.28}$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.3.26) denkleminde yerine yazılırsa N^*W^*-Smarandache eğrisinin τ_{β_3} torsiyonunun WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}(\overline{\nu_3}\,\overline{\omega_3} + \overline{\rho_3}\,\overline{\psi_3} + \overline{\chi_3}\,\overline{\lambda_3})}{\overline{\omega_3}^2 + \overline{\psi_3}^2 + \overline{\lambda_3}^2}$$

olarak bulunur. (2.2.3) bağıntısında (5.3.10) ve (5.3.26) ifadeleri yerlerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$f = \sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_3^2+\varepsilon_3^2}}{(|f^*-g^*|)}]^2 + [\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_3\omega_3+\rho_3\psi_3+\chi_3\lambda_3)}{\omega_3^2+\psi_3^2+\lambda_3^2}]^2} \tag{5.3.29}$$

ve

$$g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_3\omega_3+\rho_3\psi_3+\chi_3\lambda_3)}{\omega_3^2+\psi_3^2+\lambda_3^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_3^2+\varepsilon_3^2}}{(|f^*-g^*|)}}\right]^{'}}{1+\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\nu_3\omega_3+\rho_3\psi_3+\chi_3\lambda_3)}{\omega^2+\psi_3^2+\lambda_3^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\zeta_3^2+\varepsilon_3^2}}{(|f^*-g^*|)}}\right]^2} \tag{5.3.30}$$

şeklinde bulunur. (5.3.29) ve (5.3.30) bağıntılarında (2.2.6) karşılıkları yazılırsa

N^*W^*-Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonunun WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$f=\sqrt{[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_3}^2+\overline{\varepsilon_3}^2}}{|g\cos\theta+g\sin\theta|}]^2+[\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_3}\,\overline{\omega_3}+\overline{\rho_3}\,\overline{\psi_3}+\overline{\chi_3}\,\overline{\lambda_3})}{\overline{\omega_3}^2+\overline{\psi_3}^2+\overline{\lambda_3}^2}]^2} \tag{5.3.31}$$

ve

$$g=\frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_3}\,\overline{\omega_3}+\overline{\rho_3}\,\overline{\psi_3}+\overline{\chi_3}\,\overline{\lambda_3})}{\overline{\omega_3}^2+\overline{\psi_3}^2+\overline{\lambda_3}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_3}^2+\overline{\varepsilon_3}^2}}{|g\cos\theta+g\sin\theta|}}\right]'}{1+\left[\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(\overline{\nu_3}\,\overline{\omega_3}+\overline{\rho_3}\,\overline{\psi_3}+\overline{\chi_3}\,\overline{\lambda_3})}{\overline{\omega_3}^2+\overline{\psi_3}^2+\overline{\lambda_3}^2}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_3}^2+\overline{\varepsilon_3}^2}}{|g\cos\theta+g\sin\theta|}}\right]^2} \tag{5.3.32}$$

olarak bulunur.

5.4 $N^*C^*W^*-$Smarandache Eğrisi

Tanım 5.4 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta^* : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrilerinin çatı elemanları sırasıyla $\{N, C, W, f, g\}$ ve $\{N^*, C^*, W^*, f^*, g^*\}$ olsun. (β, β^*) eğrileri WC^*-partner eğri çifti olmak üzere β^* eğrisinin $N^*C^*W^*$-Smaranadache eğrisi

$$\beta_4(s)=\beta_{N^*C^*W^*}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(N^*+C^*+W^*) \tag{5.4.1}$$

şeklinde tanımlıdır. $N^*C^*W^*-$Smarandache eğrisinin yay parametresine s_{β_4} olmak üzere β_4 eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_{\beta_4}\frac{ds_{\beta_4}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-f^*N^*+(f^*-g^*)C^*+g^*W^*) \tag{5.4.2}$$

olur ve normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_4}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_4}}{ds}=\sqrt{\frac{2(f^{*2}+g^{*2}-g^*f^*)}{3}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa β_4 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{-f^*N^* + (f^* - g^*)C^* + g^*W^*}{\sqrt{2(f^{*2} + g^{*2} - g^*f^*)}} \tag{5.4.3}$$

şeklinde olur. (5.4.1) ifadesinde N^*, C^* ve W^* yerine (2.2.5) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa $N^*C^*W^*-$Smarandache eğrisinin WC^* eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}((\sin\theta - \cos\theta)N + (\cos\theta + \sin\theta)C + W) \tag{5.4.4}$$

olur. (5.4.3) denkleminde (2.2.5) ve (2.2.6) bağıntıları dikkate alınırsa (5.4.4) ifadesindeki β_4 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{(-g\cos\theta\sin\theta + g\sin\theta\cos\theta)N + (-g\cos^2\theta - g\sin^2\theta)C + (g\cos\theta + g\sin\theta)W}{g\sqrt{2(1+\cos\theta\sin\theta)}} \tag{5.4.5}$$

şeklinde bulunur. (5.4.3) ifadesinin tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \zeta_4 = g^*f^*f^{*'} - 2f^{*'}g^{*2} - 2f^{*4} - 4f^{*2}g^{*2} + 4f^{*3}g^* + 2g^{*3}f^* + 2f^*g^*g^{*'} - f^{*2}g^{*'} \\ \Delta_4 = f^{*2}(-2f^{*2} - 4g^{*2} - 2f^*g^* - g^{*'}) + g^{*2}(-2g^{*4} + 2f^*g^* - g^{*'} + f^*g^*(f^{*'} - g^{*'})) \\ \varepsilon_4 = 2f^{*2}(f^*g^* - 2g^{*2} + g^{*'}) + g^{*2}(4f^*g^* - 2g^{*2} + f^{*'}) - f^*g^*(g^{*'} + 2f^{*'}) \end{cases} \tag{5.4.6}$$

olmak üzere $T^{'}_{\beta_4}$ vektörü

$$T^{'}_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{(2f^{*2} + 2g^{*2} - 2g^*f^*)^2}(\zeta_4N^* + \Delta_4C^* + \varepsilon_4W^*) \tag{5.4.7}$$

olur. (5.4.6) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\zeta_4} = -g^2 g^{'} \sin\theta\cos^2\theta - 2g^2 g^{'} \sin^2\theta\cos\theta - 2g^4\cos^4\theta - 4g^4\sin^2\theta\cos^2\theta - 4g^4\cos^3\theta\sin\theta \\ \qquad -2g^4\sin^3\theta\cos\theta + 2g^2 g^{'}\sin^2\theta\cos\theta + g^2 g^{'}\cos^2\theta\sin\theta \\ \overline{\Delta_4} = g^2\cos^2\theta(-2f^2\cos^2\theta - 4g^2\sin^2\theta - 2g^2\sin\theta\cos\theta + g^{'}\sin\theta) + g^2\sin^2\theta(-2g^4\sin^4\theta \\ \quad -2g^2\sin\theta\cos\theta + g^{'}\sin\theta - g^2\sin\theta\cos\theta(g^{'}\cos\theta + g^{'}\sin\theta)) \\ \overline{\varepsilon_4} = 2g^2\cos^2\theta(-g^2\sin\theta\cos\theta - 2g^2\sin^2\theta + g^{'}\sin\theta) + g^2\sin^2\theta(4g^2\sin\theta\cos\theta - 2g^2\sin^2\theta \\ \quad +g^{'}\cos\theta) + g^2\sin\theta\cos\theta(g^{'}\sin\theta + 2g^{'}\cos\theta) \end{cases} \tag{5.4.8}$$

şeklinde olur. $T^{'}_{\beta_4}(s)$ ifadesinde (2.2.5) ve (5.4.8) bağıntıları yerine yazılırsa $T^{'}_{\beta_4}$ vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$T^{'}_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}(\overline{\zeta_4}N + \overline{\Delta_4}C + \overline{\varepsilon_4}W)}{(2g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta + 2g^2\sin\theta\cos\theta)^2} \tag{5.4.9}$$

olarak bulunur. β_4 eğrisinin eğriliği κ_{β_4} ile gösterilirse (5.4.7) bağıntısından κ_{β_4} eğriliği

$$\kappa_{\beta_4} = \|T^{'}_{\beta_4}\|,$$

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}}{(2f^{*2} + 2g^{*2} - 2g^* f^*)^2}\sqrt{\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2} \tag{5.4.10}$$

olur. Burada f^* ve g^* yerine (2.2.6) dan karşılıkları yazılırsa κ_{β_4} eğriliğinin WC^* eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\overline{\zeta_4}^2 + \overline{\Delta_4}^2 + \overline{\varepsilon_4}^2}}{(2g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta + 2g^2\sin\theta\cos\theta)^2} \tag{5.4.11}$$

dır. β_4 eğrisinin asli normal vektör alanı N_{β_4} ile gösterilirse (5.4.7) bağıntısından

$$N_{\beta_4} = \frac{T^{'}_{\beta_4}}{\|T^{'}_{\beta_4}\|},$$

$$N_{\beta_4} = \frac{\zeta_4 N^* + \Delta_4 C^* + \varepsilon_4 W^*}{\sqrt{\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2}} \tag{5.4.12}$$

elde edilir. Burada N^*, C^* ve W^* yerine (2.2.5) denkleminden karşılıkları yazılırsa, N_{β_4} ifadesinin WC^* eğri çiftinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$N_{\beta_4} = \frac{\overline{\zeta_4}N + \overline{\Delta_4}C + \overline{\varepsilon_4}W}{\sqrt{\overline{\zeta_4}^2 + \overline{\Delta_4}^2 + \overline{\varepsilon_4}^2}} \tag{5.4.13}$$

şeklinde bulunur. (5.4.12) bağıntısının tekrar türevi alınırsa, katsayılar

$$\begin{cases} \sigma_4 = -\Delta_4\zeta_4^2 f^* + \zeta_4^{'}\Delta_4^2 - \Delta_4^3 f^* + \zeta_4^{'}\varepsilon_4^2 - \Delta_4\varepsilon_4^2 f^* - \zeta_4\Delta_4\Delta_4^{'} - \zeta_4\varepsilon_4\varepsilon_4^{'} \\ \phi_4 = \zeta_4^3 f^* + \Delta_4^{'}\zeta_4^2 - \varepsilon_4\zeta_4^2 g^* + \zeta_4\Delta_4^2 f^* - \varepsilon_4\Delta_4^2 g^* + \zeta_4\varepsilon_4^2 f^* + \Delta_4{'}\varepsilon_4^2 \\ \quad +\varepsilon_4^3 g^* - \zeta_4\zeta_4^{'}\Delta_4 - \Delta_4\varepsilon_4\varepsilon_4^{'} \\ \gamma_4 = \Delta_4\zeta_4^2 g^* + \varepsilon_4^{'}\zeta_4^2 + \Delta_4^3 g^* + \varepsilon_4^{'}\Delta_4^2 + \Delta_4\varepsilon_4^2 g^* - \zeta_4\zeta_4^{'}\varepsilon_4 - \varepsilon_4\Delta_4\Delta_4^{'} \end{cases} \tag{5.4.14}$$

olmak üzere $N_{\beta_4}^{'}$ türevi

$$N_{\beta_4}^{'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2f^{*2} + 2g^{*2} - 2g^* f^*}} \frac{\sigma_4 N^* + \phi_4 C^* + \gamma_4 W^*}{(\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.4.15}$$

olur. (5.4.14) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) eşitliğindeki karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\sigma_4} = -\Delta_4\zeta_4^2 g\cos\theta + \zeta_4^{'}\Delta_4^2 - \Delta_4^3 g\cos\theta + \zeta_4^{'}\varepsilon_4^2 - \Delta_4\varepsilon_4^2 g\cos\theta - \zeta_4\Delta_4\Delta_4^{'} - \zeta_4\varepsilon_4\varepsilon_4^{'} \\ \overline{\phi_4} = \zeta_4^3 g\cos\theta + \Delta_4^{'}\zeta_4^2 + \varepsilon_4\zeta_4^2 g\sin\theta + \zeta_4\Delta_4^2 g\cos\theta + \varepsilon_4\Delta_4^2 g\sin\theta + \zeta_4\varepsilon_4^2 g\cos\theta \\ \quad +\Delta_4{'}\varepsilon_4^2 - \varepsilon_4^3 g\sin\theta - \zeta_4\zeta_4^{'}\Delta_4 - \Delta_4\varepsilon_4\eta_1^{'} \\ \overline{\gamma_4} = -\Delta_4\zeta_4^2 g\sin\theta + \varepsilon_4^{'}\zeta_4^2 - \Delta_4^3 g\sin\theta + \varepsilon_4^{'}\Delta_4^2 - \Delta_4\varepsilon_4^2 g\sin\theta - \zeta_4\zeta_4^{'}\varepsilon_4 - \varepsilon_4\Delta_4\Delta_4^{'} \end{cases} \tag{5.4.16}$$

şeklinde olur. $N_{\beta_4}^{'}(s)$ ifadesinde (2.2.5) ve (5.4.16) bağıntısı yerine yazılırsa $N_{\beta_4}^{'}$ vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_4}^{'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta + 2g^2\sin\theta\cos\theta}} \frac{\overline{\sigma_4}N + \overline{\phi_4}C + \overline{\gamma_4}W}{(\overline{\zeta_4}^2 + \overline{\Delta_4}^2 + \overline{\varepsilon_4}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.4.17}$$

olarak bulunur. (5.4.15) bağıntısının her iki tarafının normu alınırsa

$$\|N_{\beta_4}^{'}\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2f^{*2} + 2g^{*2} - 2g^* f^*}} \frac{\sqrt{\sigma_4^2 + \phi_4^2 + \gamma_4^2}}{(\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.4.18}$$

şeklinde bulunur. (5.4.18) ifadesinde f^* ve g^* yerine (2.2.6) dan karşılıkları yazılırsa

$$\|N_{\beta_4}^{'}\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2g^2\cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta + 2g^2\sin\theta\cos\theta}}\frac{\sqrt{\overline{\sigma_4}^2 + \overline{\phi_4}^2 + \overline{\gamma_4^2}}}{(\overline{\zeta_4}^2 + \overline{\Delta_4}^2 + \overline{\varepsilon_4}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.4.19}$$

olarak bulunur. $C_{\beta_4} = \frac{N_{\beta_4}^{'}}{\|N_{\beta_4}^{'}\|}$ olduğundan (5.4.15) ve (5.4.18) bağıntılarında gerekli cebirsel işlemler yapıldığında

$$C_{\beta_4} = \frac{\sigma_4 N^* + \phi_4 C^* + \gamma_4 W^*}{\sqrt{\sigma_4^2 + \phi_4^2 + \gamma_4^2}} \tag{5.4.20}$$

olarak bulunur. $C_{\beta_4}(s)$ ifadesinde (2.2.5) bağıntısı yerine yazılırsa C_{β_4} vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$C_{\beta_4} = \frac{\overline{\sigma_4}N + \overline{\phi_4}C + \overline{\gamma_4 W}}{\sqrt{\overline{\sigma_4}^2 + \overline{\phi_4}^2 + \overline{\gamma_4}^2}} \tag{5.4.21}$$

olarak bulunur. $W = N \wedge C$ olduğundan W_{β_4} vektörü

$$W_{\beta_4} = \frac{(\Delta_4\gamma_4 - \varepsilon_4\phi)N^* + (-\zeta_4\gamma_4 + \sigma_4\varepsilon_4)C^* + (\zeta_4\phi_4 - \Delta_4\sigma_4)W^*}{(\sqrt{\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2})(\sqrt{\sigma_4^2 + \phi_4^2 + \gamma_4^2})} \tag{5.4.22}$$

olur. Burada N^*, C^*, W^* ifadelerinin yerlerine (2.2.5) eşitliğinden karşılıkları yazılırsa W_{β_4} vektörünün WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden karşılığı

$$W_{\beta_4} = \frac{\begin{bmatrix} (\overline{\Delta_4}\,\overline{\gamma_4}\sin\theta - \overline{\varepsilon_4}\,\overline{\phi_4}\sin\theta - \overline{\zeta_4}\,\overline{\phi_4}\cos\theta + \overline{\Delta_4}\,\overline{\sigma_4}\cos\theta)N \\ +(\overline{\Delta_4}\,\overline{\gamma_4}\cos\theta - \overline{\varepsilon_4}\,\overline{\phi_4}\cos\theta + \overline{\zeta_4}\,\overline{\phi_4}\sin\theta - \overline{\Delta_4}\,\overline{\sigma_4}\sin\theta)C \\ +(-\overline{\zeta_4}\,\overline{\gamma_4} + \overline{\sigma_4}\,\overline{\varepsilon_4})W \end{bmatrix}}{\sqrt{\overline{\zeta_4}^2 + \overline{\Delta_4}^2 + \overline{\varepsilon_4}^2}\sqrt{\overline{\sigma_4}^2 + \overline{\phi_4}^2 + \overline{\gamma_4}^2}} \tag{5.4.23}$$

şeklinde bulunur. β_1 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınınca ;

$$\beta_4^{''} = \frac{1}{\sqrt{3}}((-f^{*'} - f^{*2} + g^*f^*)N^* + (-f^{*2} + f^{*'} - g^{*'} - g^{*2})C^* + (f^*g^* - g^{*2} + g^{*'})W^*)$$

ve

$$\beta_4^{'''} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\nu_4 N^* + \rho_4 C^* + \chi_4 W^*)$$

şeklinde elde edilir. Burada ν_4, ρ_4 ve χ_4 katsayıları

$$\begin{cases} \nu_4 = (f^{*3} + fg^{*2} - 3f^*f^{*'} - f^{*''} + 2g^{*'}f + g^*f^{*'}) \\ \rho_4 = (g^{*3} - f^{*3} - 3(f^*f^{*'} + g^*g^{*'}) - (-f^{*''} + g^{*''}) + f^*g^*(f^* - g^*)) \\ \chi_4 = (g^{*''} - f^{*2}g^* - 3g^*g^{*'} - g^{*3} + 2g^*f^{*'} + f^*g^{*'}) \end{cases} \qquad (5.4.24)$$

şeklindedir. β_4 eğrisinin torsiyonu τ_{β_4} ile gösterilirse eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü türevler yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa τ_{β_4} torsiyonu,

$$\begin{cases} \omega_4 = [(f^* - g^*)(f^*g^* - g^{*2} + g^{*'}) - g^*(-f^{*2} + f^{*'} - g^{*'} - g^{*2})] \\ \psi_4 = -[(-f^*(f^*g^* - g^{*2} + g^{*'}) - g^*(-f^{*2} + f^{*'} + g^*f^*))] \\ \lambda_4 = [-f^*(-f^{*2} + f^{*'} - g^{*'} - g^{*2}) - (f^* - g^*)(-f^{*'} - f^{*2} + g^*f^*))] \end{cases} \qquad (5.4.25)$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}(\nu_4\omega_4 + \rho_4\psi_4 + \chi_4\lambda_4)}{\omega_4^2 + \psi_4^2 + \lambda_4^2} \qquad (5.4.26)$$

şeklinde bulunur. (5.4.24) ve (5.4.25) bağıntılarında (2.2.6) eşitliğinde karşılıkları yazılırsa, yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\nu_4} = g^3\cos^3\theta + g^3\cos\theta\sin^2\theta - 3gg^{'}\cos^2\theta - g^{''}\cos\theta + 2gg^{'}\cos\theta\sin\theta \\ \qquad +gg^{'}\sin\theta\cos\theta \\ \overline{\rho_4} = (-g^3\sin^3\theta - g^3\cos^3\theta - 3(gg^{'}\cos^2\theta + gg^{'}\sin^2\theta) - (-g^{''}\cos\theta - g^{''}\sin\theta) \\ \qquad +(g^2\sin\theta\cos\theta)(g\cos\theta + g\sin\theta) \\ \overline{\chi_4} = g^{''}\sin\theta + g^3\sin\theta\cos^2\theta - 3gg^{'}\sin^2\theta + g^3\sin^3\theta - 2gg^{'}\sin\theta\cos\theta \\ \qquad +gg^{'}\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$(5.4.27)$$

ve

$$
\begin{cases}
\overline{\omega_4} = [(g\cos\theta + g\sin\theta)(-g^2\sin\theta\cos\theta - g^2\sin^2\theta - g^{'}\sin\theta) + g\sin\theta(-g^2\cos^2\theta \\
\quad +g^{'}\cos\theta + g^{'}\sin\theta - g^2\sin^2\theta)] \\
\overline{\psi_4} = [-(-g\cos\theta(g^2\sin\theta\cos\theta + g^2\sin^2\theta - g^{'}\sin\theta) + g\sin\theta(-g^2\cos^2\theta \\
\quad +g^{'}\cos\theta - g^2\sin\theta\cos\theta))] \\
\overline{\lambda_4} = [-g\cos\theta(-g^2\cos^2\theta + g^{'}\cos\theta + g^{'}\sin\theta + g^2\sin^2\theta) - (g\cos\theta + g\sin\theta) \\
\quad (-g^{'}\cos\theta - g^2\cos^2\theta - g^2\sin\theta\cos\theta)]
\end{cases}
\tag{5.4.28}
$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.4.26) eşitliğinde yerine yazılırsa $N^*C^*W^*$-Smarandache eğrisinin τ_{β_4} torsiyonunun WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$
\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}(\overline{\nu_4}\,\overline{\omega_4} + \overline{\rho_4}\,\overline{\psi_4} + \overline{\chi_4}\,\overline{\lambda_4})}{\overline{\omega_4}^2 + \overline{\psi_4}^2 + \overline{\lambda_4}^2}
$$

olarak bulunur. (2.2.3) bağıntısında (5.4.10) ve (5.4.26) ifadeleri yerlerine yazılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$
f = \sqrt{[\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2}}{(2f^{*2} + 2g^{*2} - 2g^*f^*)}]^2 + [\frac{\sqrt{3}\cdot(\nu_4\omega_4 + \rho_4\psi_4 + \chi_4\lambda_4)}{\omega_4^2 + \psi_4^2 + \lambda_4^2}]^2}
\tag{5.4.29}
$$

ve

$$
g = \frac{\left[\frac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\nu_4\omega_4 + \rho_4\psi_1 + \chi_1\lambda_4)}{\omega_4^2 + \psi_4^2 + \lambda_4^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2}}{(2f^{*2} + 2g^{*2} - 2g^*f^*)}}\right]^{'}}{1 + \left[\frac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\nu_4\omega_4 + \rho_4\psi_4 + \chi_4\lambda_4)}{\omega_4^2 + \psi_4^2 + \lambda_4^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\zeta_4^2 + \Delta_4^2 + \varepsilon_4^2}}{(2f^{*2} + 2g^{*2} - 2g^*f^*)}}\right]^2}
\tag{5.4.30}
$$

şeklinde bulunur. (5.4.29) ve (5.4.30) bağıntılarında (2.2.6) karşılıkları yazılırsa $N^*C^*W^*$-Smarandache eğrisinin alternatif çatıya göre eğrilik ve torsiyonu WC^* eğrisinin çatı elemanları cinsinden ifadesi

$$
f = \sqrt{[\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_4}^2 + \overline{\Delta_4}^2 + \overline{\varepsilon_4}^2}}{(2g^2cos^2\theta + 2g^2\sin^2\theta + 2g^2\sin\theta\cos\theta)}]^2 + [\frac{\sqrt{3}\cdot(\overline{\nu_4}\,\overline{\omega_4} + \overline{\rho_4}\,\overline{\psi_4} + \overline{\chi_4}\,\overline{\lambda_4})}{\overline{\omega_4}^2 + \overline{\psi_4}^2 + \overline{\lambda_4}^2}]^2}
\tag{5.4.31}
$$

ve

$$g=\frac{\left[\dfrac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\overline{\nu_4}\,\overline{\omega_4}+\overline{\rho_4}\,\overline{\psi_4}+\overline{\chi_4}\,\overline{\lambda_4})}{\overline{\omega_4}^2+\overline{\psi_4}^2+\overline{\lambda_4}^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_4}^2+\overline{\Delta_4}^2+\overline{\varepsilon_4}^2}}{(2g^2\cos^2\theta+2g^2\sin^2\theta+2g^2\sin\theta\cos\theta)}}\right]'}{1+\left[\dfrac{\frac{\sqrt{3}\cdot(\overline{\nu_4}\,\overline{\omega_4}+\overline{\rho_4}\,\overline{\psi_4}+\overline{\chi_4}\,\overline{\lambda_4})}{\overline{\omega_4}^2+\overline{\psi_4}^2+\overline{\lambda_4}^2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\overline{\zeta_4}^2+\overline{\Delta_4}^2+\overline{\varepsilon_4}^2}}{(2g^2\cos^2\theta+2g^2\sin^2\theta+2g^2\sin\theta\cos\theta)}}\right]^2} \tag{5.4.32}$$

olarak bulunur.

6. SONUÇ

6.1 Sonuç 1

Bu tezde ilk olarak Frenet çatısından farklı bir Alternatif çatı $\{N, C, W\}$ üzerinde tanımlı olan bir β eğrisi tarafından oluşturulan Smarandache eğrilerinin;

$\beta_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + C)$ $NC-$Smarandache eğrisi

$\beta_{CW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C + W)$ $CW-$Smarandache eğrisi

$\beta_{NW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + W)$ $NW-$Smarandache eğrisi

$\beta_{NCW}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N + C + W)$ $NCW-$Smarandache eğrisi

eğrilik ve torsiyonları hesaplanmıştır.

6.2 Sonuç 2

İlk olarak (β, β^*) eğrileri, WC^* eğri çifti olarak alındığında $\beta^* : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\{N^*, C^*, W^*\}$ çatı elemanları tarafından oluşturulan Smarandache eğrileri için ;

$\beta_1 = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*)$ N^*C^*-Smarandache eğrisi

$\beta_2 = \beta_{C^*W^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^* + W^*)$ C^*W^*-Smarandache eğrisi

$\beta_3 = \beta_{N^*W^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + W^*)$ N^*W^*-Smarandache eğrisi

$\beta_4 = \beta_{N^*C^*W^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N^* + C^* + W^*)$ $N^*C^*W^*-$Smarandache eğrisi

eğrilik ve torsiyonlar hesaplanmıştır. İkinci olarak yukarıda verilen Smarandache eğrileri WC^* eğri çiftinin çatı elemanları arasındaki ilişkiye bağlı olarak

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta N + \cos\theta C + W),$$
$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta N + \sin\theta C + W),$$
$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\sin\theta - \cos\theta)N + (\sin\theta + \cos\theta)C),$$
$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}((\sin\theta - \cos\theta)N + (\cos\theta + \sin\theta)C + W),$$

şeklinde ifade edilmiş olup bu eğrilerin eğrilik ve torsiyonları hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

Hacısalihoğlu, H. H., (1983). *Diferansiyel Geometri.* İnönü Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Yayınları. Mat. 7, Malatya.

O'neill, B., (1983). *Semi Riemann Geometry.* Academic Press, New York.

Ashbacher, C., (1997). Smarandache Geometries. *Smarandache Notions Journal*, Vol. 8, No. 1-2-3, 212-215.

Hacısalihoğlu, H. H., (2000). *Diferansiyel Geometri.* Ertem Matbaası, Ankara.

Sabuncuoğlu, A., (2004). *Diferansiyel Geometri.* Nobel Yayınları, Ankara.

Bhattacharya S., (2004-2005). A Model to the Smarandache Geometries. *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 33, No. 2, 66.

Mao L., (2006). *Smarandache Geometries Map Theory With Applicatıons* (I), P.R. China.

Turgut M., Yılmaz S., (2008). Smarandache Curves in Minkowski Space-time. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3, 51-55.

Ali, A., (2010). Special Smarandache Curves in the Euclidian Space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2: 30-36.

Şenyurt S., Sivas S., (2013). An Application of Smarandache Curve. Ordu Univ. J. Sci. Tech. 3(1), 46-60.

Bektaş, Ö., Yüce, S., (2013). Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidian 3-Space. *Romanian Journial of Mathematics and Computerscience*, volume 3, 48-59.

Taşköprü K., Tosun M., (2014). Smarandache Curves on S^2. *Boletim da Sociedade paranaense de Matematica 3 serie.* 32(1):51-59.

Sivas S., (2014). *İnvolüt- Evolüt Eğrilerine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri.* Yüksek Lisans Tezi. Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ordu. 87s.

Çalışkan A., (2014). *Mannheim Eğri Çiftine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri.* Yüksek Lisans Tezi. Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ordu. 84s.

Çetin M., Tuncer Y., Karacan M.K., (2014). Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. *General Mathematics Notes.* 20:50-66.

Kahraman F., (2015). *Özel Smarandache Eğrileri.* Yüksek Lisans Tezi. Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Bilecik. 49s.

Çelik Ü., (2016). *Bertand Eğri Çiftine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri.* Yüksek Lisans Tezi. Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ordu. 79s.

Bayrak N., Bektaş Ö., Yüce S., (2016). Special Smarandache curves in E_1^3. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1:Mathematics and Statistics.* 65(2):143-160.

Uzunoğlu B., Gök I. and Yaylı Y., (2016). A New Approach on Curves of Constant Precession. *Appl. Math. Comput.*, 275, 317-323.

Elzawy M., (2017). Smarandache curves in Euclidean 4-space E^4. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 268–271.

Abdel-Aziz H.S., Saad M.K., (2017). Computation of Smarandache curves according to Darboux frame in Minkowski 3-space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 382–390.

Şenyurt S., Kaya G., (2018). NC-Smarandache Curve and NW-Smarandache Curve According to Alternative Frame. *Turk. J. Math. Comput. Sci.*, 269-274.

Saad M.K., Abdel-Baky R.A., (2020). On Ruled Surfaces According to Quasi-Frame in Euclidean 3-Space [on Smarandache curves]. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 17 No. 1, 16.

Yılmaz B., Has A., (2020). Alternative Partner Curves in The Euclidean 3-Space. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 1-10.

Ouarab S., (2021). NC-Smarandache Ruled Surface and NW-Smarandache Ruled

Surface according to Alternative Moving Frame in E^3. *Journal of Mathematics*, Volume 2021. Article ID 9951434, 6 pages.

Solouma E., (2021). Equiform Spacelike Smarandache Curves of Anti-Eqiform Salkowski Curve According to Equiform Frame. *International Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 15, No. 1, 43-59.

Lal S., (2021). Parallel Transport Frame of Smarandache Curves in Euclidean Space. *J. Mountain Res.*, Vol. 16(1), 225-233M.