



**ÖZEL YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN ÜÇGENLER
KONUSUNA YÖNELİK GEOMETRİK MUHAKEME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZGE ÇAKIOĞLU

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
HAZİRAN-2024**

**ÖZEL YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN ÜÇGENLER
KONUSUNA YÖNELİK GEOMETRİK MUHAKEME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÖZGE ÇAKIOĞLU
ORCID ID:**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. GAMZE KURT BİREL
ORCID ID:**

**MERSİN
2024**

ONAY

Özge ÇAKIOĞLU tarafından Doç. Dr. Gamze KURT BİREL danışmanlığında hazırlanan “ÖZEL YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN ÜÇGENLER KONUSUNA YÖNELİK GEOMETRİK MUHAKEME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ” başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 27.06.2024 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oybirliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Unvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Doç. Dr. Candaş UYGAN	
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Orkun COŞKUNTUNCEL	
Üye	Doç. Dr. Gamze KURT BİREL	

Jüri kararı, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun aşağıdaki tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Tarih :
Sayı :

Prof. Dr. Hakan AKDAĞ
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÖZET

ÖZEL YETENEKLİ ÖĞRENCİLERİN ÜÇGENLER KONUSUNA YÖNELİK GEOMETRİK MUHAKEME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Bu çalışmanın amacı özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik geometrik muhakeme süreçlerini araştırma ekibi tarafından tasarlanan üçgende açı, üçgende açı-kenar ilişkisi ve üçgen eşitsizliği etkinlikleri aracılığıyla incelemektir. Bu çalışmada özel yetenekli öğrencilerin üçgenler konusunda geometrik muhakeme becerilerinin nasıl olduğunu algısal ve bilişsel muhakeme süreçleri bağlamında incelemek ve bu süreçler arası etkileşimin nasıl gerçekleştiğini ortaya koymak hedeflenmektedir. Bu amaçla bu çalışmada ‘Özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik geometrik muhakeme becerileri nasıldır?’ ve ‘Özel yetenekli ortaokul öğrencilerinde geometri öğretiminde bilişsel ve algısal süreçler arasındaki etkileşim nasıldır?’ araştırma sorularına cevap aranmaktadır. Araştırmanın teorik çerçevesini Duval’ın (1995) bilişsel muhakeme modeli oluşturmaktadır. Öğrencilerin geometrik muhakeme becerilerinin derinlemesine incelenmesi için nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması yöntemi benimsenmiştir. Araştırmanın katılımcıları amaçlı örnekleme yolu ile seçilmiştir. Katılımcı grubu 2023-2024 eğitim öğretim yılında bir Bilim ve Sanat Merkezi’nde öğrenim gören beş özel yetenekli ortaokul öğrencisinden oluşmaktadır. Araştırma ekibi tarafından geliştirilen üç etkinlik kâğıdı ve Algısal Süreç İnceleme Formu (ASİF) veri toplama araçları olarak kullanılmıştır. Etkinlikler öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler sırasında gerçekleştirilmiş ve bu uygulama ekran ve video kaydı ile kayıt altına alınmıştır. Elde edilen veriler Duval’ın bilişsel geometrik muhakeme modeli çerçevesinde analiz edilmiştir. Yapılan ilişkin tümdengelimli içerik analizi sürecinde veriler, içerik analizine göre şu sonuçlara ulaşılmıştır: Öğrencilerin, bilişsel muhakeme becerilerinden görselleştirme, oluşturma ve muhakeme becerilerine farklı seviyelerde sahip oldukları, görselleştirme becerilerinde iyi olan öğrencinin muhakeme sürecini her zaman tamamlayamadığı, katılımcıların genellikle muhakemeyi sözel bir dil kullanarak yaptıkları, fakat teorik muhakemeyi ispat boyutunda yapamadıkları görülmüştür. Ek olarak, fiziksel materyallerle gerçekleştirilen muhakeme süreçleri incelendiğinde fiziksel materyal kullanımının muhakeme sürecini olumlu yönde etkilediği, öğrencinin konuya yönelik kavramsal anlayışının derinleştiği söylenebilir. Sonuç olarak, algısal ve bilişsel süreçler ayrı düşünülse de bu ikisinin etkileşiminin farklı öğrenme ortamları veya çeşitli öğretim materyalleriyle desteklenmesi ile geometrik muhakeme sürecinin olumlu etkilendiği iddia edilebilir.

Anahtar Kelimeler: geometrik muhakeme, üçgenler, özel yetenekli öğrenciler

ABSTRACT
**A STUDY OF THE GEOMETRIC REASONING PROCESSES OF GIFTED
STUDENTS CONCERNING TRIANGLES**

This study aims to investigate the geometric reasoning processes of gifted middle school students in the context of triangles through activities designed about angles of a triangle, angle-side relationships, and triangle inequalities. The research focuses on examining how these students demonstrate their geometric reasoning skills in the context of perceptual and cognitive reasoning processes, as well as how these processes interact with one another. The primary research questions addressed are: “What are the geometric reasoning skills of gifted middle school students concerning triangles?” and “How do cognitive and perceptual processes interact in the teaching of geometry to gifted middle school students?” Duval’s (1995) cognitive model of geometrical reasoning serves as the theoretical foundation for this study. We employed a qualitative case study design to deeply investigate the students' geometric reasoning skills. We selected participants through purposive sampling, which included five gifted middle school students enrolled at a Science and Art Center during the 2023–2024 academic year. Data collection tools included three activity sheets developed by the research team, and the Perceptual Process Evaluation Form (PPEF). We conducted these activities during one-on-one interviews with the students, recording them using screen and video capture methods. We analyzed the data using Duval’s cognitive model of geometrical reasoning. The findings revealed that students possessed varying levels of visualization, construction, and reasoning skills. We observed that students who excelled in visualization did not always successfully complete the reasoning process. Participants tended to express their reasoning verbally, but struggled with theoretical reasoning. Additionally, the use of physical materials during the reasoning processes appeared to positively influence the students' reasoning and deepen their conceptual understanding of the subject. In conclusion, while perceptual and cognitive processes can be considered separately, their interaction, supported by different learning environments or various instructional materials, can positively impact the geometric reasoning process.

Keywords: geometric reasoning, triangles, gifted students

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez yazım süresince bana yol gösteren, her ihtiyacım olduğunda değerli zamanını bana ayıran, beni hep motive eden değerli danışmanım Doç. Dr. Gamze KURT BİREL'e teşekkürlerimi sunarım. Tez savunma sınavıma katılarak değerli akademik görüşleri ile çalışmama katkı sağlayan jüri üyeleri Doç. Dr. Candaş UYGAN ve Dr. Öğrt. Üyesi Orkun COŞKUNTUNCEL'e, yüksek lisans eğitimim süresince kendilerinden ders alma ve deneyimlerinden faydalanma şansına sahip olduğum değerli hocalarım Doç. Dr. Meriç ÖZGELDİ ve Prof. Dr. Mutlu Nisa ÜNALDI CORAL'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmama gönüllü olarak katılan değerli öğrencilerime teşekkürlerimi sunarım.

Bu sürecin başarılı bir şekilde tamamlanmasında her konuda desteğini hissettiğim, zorlandığım anlarda beni motive eden ve yanında hissettiren gönlümün müfettişi, canım eşim Vedat ÇAKIOĞLU'na yürekten teşekkür ederim. Yaşam enerjisi ve gülümsemesi ile bana ilham olan, süreci tamamlamamda bana güç ve destek veren can parçam, canım kızım Cemre ÇAKIOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Beni her zaman destekleyen, hayallerimi gerçekleştirmem için ellerinden gelen her türlü yardımı koşulsuzca sunan ve bana güç veren canım ailem İsmail Hakkı GÖK, Ayşe GÖK ve Hülya ÇAKIOĞLU'na çok teşekkür ederim. Ayrıca ailemin küçük kahramanları Yağmur ve Nehir'e sevgi dolu katkıları için teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmem ve kendi ayaklarım üzerinde durmam için büyük fedakârlık gösteren, çalışkanlıklarını örnek aldığım, hayatta karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmeyi ve her daim gülümsemeyi öğrendiğim, varlıklarıyla hayatıma anlam katan, bugünleri görmesini çok istediğim ancak ömürleri yetmeyen Canım ANNEM ve Canım BABAMA minnettarım... Onlara sonsuz teşekkürler...

Özge ÇAKIOĞLU

İÇİNDEKİLER

ONAY	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
TABLolar DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi	6
1.3. Araştırma Sorusu.....	7
1.4. Sayıtlılar	8
1.5. Sınırlılıklar	8
1.6. Tanımlar	8
BÖLÜM 2 KURAMSAL TEMEL VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR.....	10
2.1. Kuramsal Temel	10
2.2. İlgili Çalışmalar.....	23
BÖLÜM 3 YÖNTEM	28
3.1. Araştırmanın Yöntemi.....	28
3.2. Araştırmanın Çalışma Grubu	29
3.3. Veri Toplama Araçları.....	30
3.4. Veri Toplama Süreci	35
3.5. Araştırmanın Kalitesi	36
3.6. Verilerin Analizi.....	37
BÖLÜM 4 BULGULAR.....	43
BÖLÜM 5 TARTIŞMA	99
BÖLÜM 6 SONUÇ VE ÖNERİLER	106
KAYNAKÇA	108
EKLER	115
EK-1 ETİK BEYANI.....	115
EK-2 ORJİNALLİK RAPORU	116
EK-3 ÖZGEÇMİŞ.....	117
EK-4 ETİK KURUL BELGESİ.....	118
EK-5 ARAŞTIRMA İZİN BELGESİ	119
EK-6 VELİ ONAM FORMU.....	120
EK-7 ÜÇGENDE AÇI ETKİNLİK KAĞIDI	121
EK-8 ÜÇGENDE AÇI-KENAR İLİŞKİSİ ETKİNLİK KAĞIDI	122
EK-9 ÜÇGEN EŞİTSİZLİĞİ ETKİNLİK KAĞIDI	124
EK-10 ALGISAL SÜREÇ İNCELEME FORMU (ASİF)	126

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1 <i>Araştırmanın yapılandırılması süreci</i>	28
Tablo 2 <i>Veri toplama araçları ve ilgili etkinlik</i>	31
Tablo 3 <i>Veri toplama sürecinin adımları</i>	36
Tablo 4 <i>Duval'ın bilişsel geometrik muhakeme çerçevesini yansıtan becerileri</i>	38
Tablo 5 <i>Soruların ilgili olduğu bilişsel muhakeme süreçleri</i>	39
Tablo 6 <i>Soruların ilgili olduğu algısal muhakeme süreçleri</i>	40
Tablo 7 <i>Bilişsel muhakeme ile ilgili veri analizi sistemiği</i>	40
Tablo 8 <i>Algısal muhakeme ile ilgili veri analizi sistemiği</i>	41
Tablo 9 <i>Öğrencilerin üçgen eşitsizliğine yönelik taşıdıkları bilişsel beceriler</i>	87



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1 Duval'e (1998) göre bilişsel muhakeme süreci.....	20
Şekil 2 Duval'e (1998) göre bilişsel süreçler arasındaki etkileşim	21
Şekil 3 Veri toplama ortamı	35
Şekil 4 Birinci etkinlik kağıdında yer alan soruların ilgili olduğu bilişsel boyutlar	44
Şekil 5 Kaan'ın etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt	44
Şekil 6 Kaan'ın etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt	46
Şekil 7 Kaan'ın etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt	47
Şekil 8 Deniz'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt.....	47
Şekil 9 Deniz'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt.....	48
Şekil 10 Deniz'in etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt.....	48
Şekil 11 Deniz'in etkinliğin sorusuna verdiği ikinci yanıt	49
Şekil 12 Serap'ın etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt.....	49
Şekil 13 Serap'ın etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt.....	50
Şekil 14 Serap'ın etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt.....	50
Şekil 15 Serap'ın etkinliğin 3. sorusunda dış açı için verdiği yanıt	51
Şekil 16 Merve'nin etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt	52
Şekil 17 Merve'nin etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt	52
Şekil 18 Özlem'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt	53
Şekil 19 Özlem'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt	53
Şekil 20 Özlem'in etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt	54
Şekil 21 İkinci etkinlik sorularının ilgili olduğu bilişsel boyutlar	56
Şekil 22 Kaan'ın etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt	56
Şekil 23 Kaan'ın etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt	58
Şekil 24 Kaan'ın etkinliğin üçüncü sorusunda katladığı üçgen	58
Şekil 25 Kaan'ın etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt	59
Şekil 26 Deniz'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt.....	59
Şekil 27 Deniz'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt.....	61
Şekil 28 Deniz'in etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt.....	62
Şekil 29 Serap'ın etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt.....	62
Şekil 30 Serap'ın etkinliğin 1. sorusuna yaptığı açıklama.....	63
Şekil 31 Serap'ın etkinliğin 2. Sorusuna verdiği yanıt	63
Şekil 32 Serap'ın etkinliğin 2. Sorusuna verdiği yanıt	64
Şekil 33 Serap'ın etkinliğin 3. Sorusuna verdiği yanıt	64
Şekil 34 Merve'nin etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt	65
Şekil 35 Merve'nin etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt	66
Şekil 36 Merve'nin etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt	66
Şekil 37 Merve'nin etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt	67
Şekil 38 Özlem'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt	68
Şekil 39 Özlem'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt	68
Şekil 40 Özlem'in etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt	68
Şekil 41 Üçüncü etkinlik sorularının ilgili olduğu bilişsel boyutlar	70
Şekil 42 Öğrencilere verilen geometri şeritleri	71
Şekil 43 Kaan'ın geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması.....	71
Şekil 44 Kaan'ın etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt.....	72
Şekil 45 Kaan'ın etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt	72
Şekil 46 Kaan'ın etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği ikinci yanıt.....	73
Şekil 47 Kaan'ın etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt.....	74

Şekil 48 Kaan'ın etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt	74
Şekil 49 Deniz'in geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması	75
Şekil 50 Deniz'in etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt	75
Şekil 51 Deniz'in etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt	76
Şekil 52 Deniz'in etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt	76
Şekil 53 Deniz'in etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt	77
Şekil 54 Serap'ın geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması	78
Şekil 55 Serap'ın etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt	78
Şekil 56 Serap'ın etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt	79
Şekil 57 Serap'ın etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt	79
Şekil 58 Merve'nin geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması	80
Şekil 59 Merve'nin etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt	81
Şekil 60 Merve'nin etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt	81
Şekil 61 Merve'nin etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt	82
Şekil 62 Merve'nin etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt	83
Şekil 63 Özlem'in geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması	83
Şekil 64 Özlem'in etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt	84
Şekil 65 Özlem'in etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt	84
Şekil 66 Özlem'in etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt	85
Şekil 67 Özlem'in etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt	86
Şekil 68 ASİF sorularının ilgili olduğu algısal süreçler	87
Şekil 69 Görsel algıyla ilişkili birinci soruya verilen yanıtlar	89
Şekil 70 Sözel algıyla ilişkili ikinci soruya verilen yanıtlar	90
Şekil 71 Görsel-sözel algıyla ilişkili dördüncü soruya verilen yanıtlar	92
Şekil 72 İşlevsel algıyla ilişkili üçüncü soruya verilen yanıtlar	94
Şekil 73 Kaan'ın sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt	95
Şekil 74 Deniz'in sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt	96
Şekil 75 Serap'ın sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt	96
Şekil 76 Merve'nin sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt	97
Şekil 77 Özlem'in sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt	97

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ASİF: Algısal Süreç İnceleme Formu

BİLSEM: Bilim ve Sanat Merkezi

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

NCTM: Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi

PISA: Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı

TIMSS: Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması

TÜBİTAK: Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu

OBS: Open Broadcaster Software



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde problem durumu, araştırmanın amacı ve önemi, araştırma sorusu, alt araştırma soruları, sayıtlar, sınırlılıklar ve tanımlar bulunmaktadır.

1.1. Problem Durumu

Geometri matematiğin bir alt dalıdır. Yunanca’da yerküre/dünya anlamına gelen “geo” kelimesi ile ölçmek anlamına gelen “metry” kelimesinin birleşiminden türetilmiştir (Argün vd., 2014). Geometri konum, boyut, uzay, çeşitli şekil ve cisimleri inceleyen bilim dalı şeklinde tanımlanabilir (Scriba & Schreiber, 2015). İnsanların çevresinde görülen doğal görseller geometrinin temelini oluşturmuştur. Şekillerin ölçülmeye başlanması ile birlikte geometri bilimi daha da gelişmiştir. Heredot’a göre bu ölçümlerin temeli Mısırlılara kadar dayanmaktadır. Geometri bilimi Antik Mısır’dan bu yana kümülatif olarak ilerlemiş, teknolojinin gelişmesi ile birlikte mühendislik, mimarlık, bilgisayar programcılığı gibi mesleklerin oluşmasına katkıda bulunmuştur. Ayrıca tasarım ve sanat gibi alanlarda da altın oran gibi kavramlarla pek çok sanatçının eserinin ölümsüzleşmesine imkân sağlamıştır.

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM), geometrinin dünyayı anlamamıza ve daha iyi analiz etmemize olanak tanıyan bir araç olduğunu belirtir. Bu nedenle geometrinin matematik müfredatının merkezinde yer alması gerektiğini vurgulamışlardır (NCTM, 2001). Ancak merkezde yer alması gereken bu dersi öğrenciler karmaşık, soyut, ezber, sıkıcı ve anlamsız formüllerden oluşan bir ders olarak görmektedirler (Güven & Karataş, 2003). Benzer şekilde, geometrinin büyük ölçüde soyut kavramlara dayanması, öğrencilerin bu derste zorlanmalarına ve ilgilerinin azalmasına yol açmaktadır (Gür & Kobak Demir, 2017). Nitekim öğrencilerin geometri öğrenirken yaşadığı zorluklar ulusal ve uluslararası sınav sonuçlarında da kendini göstermektedir (Kemankaşlı, 2010). Örneğin ulusal sınavlardan biri olan TIMSS sonuçlarına göre öğrencilerde sınavın alt boyutlardan biri olan geometri alt boyutunda ve Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA) sonuçlarına göre de sınavın uzay ve şekil alt boyutunda başarılı olamadıkları bilinmektedir (Bal, 2012). Dolayısı ile uygulanan geometri öğretimi ile uluslararası sınav sonuçlarında istenilen seviyeye ulaşamadığı görülmektedir. Bu nedenle geometri öğretiminde izlenen yolların farklılaşması önem kazanmaktadır. Geometri konularının anlamlandırma sürecini kolaylaştırmak için geometri öğretimi için fiziki ve sanal ortam materyallerinin önemli olduğu söylenebilir (Erduran & Yeşildere; Kurtuluş & Uygan,

2016; Öztürk & Güven, 2012). Öztürk ve Güven'e (2012) göre öğrenme ortamının etkililiği matematiksel araç kullanımı ile artmaktadır. Yalın'a (2007) göre ise matematiksel araç sayısının artması farklı duyu organlarına hitap ettiği için öğrenmenin kalıcılığını artmasını sağlamaktadır. Pergel ve cetvel gibi araçların kullanımı geometrik bilgiyi daha derinlemesine kavramamızı ve anlamlandırma sürecimizi olumlu yönde etkiler (Erduran & Yeşildere, 2010). Öğrencilere geometrik kavramları daha iyi anlamaları için, fiziksel materyaller veya bilgisayar yazılımları kullanılarak destek sağlanmalıdır (Kurtuluş & Uygan, 2016). Geometrideki soyut kavramların görselleştirilmesi ve akıl yürütme sürecini destekleyecek fiziki materyallerle öğretim yapılması geometri öğretimi için önemli hale gelmektedir.

Geometri dersi, konuların kademeli ve birikimli olarak öğretildiği, yapılandırılmış bir alt konulardan oluşmaktadır. Örneğin, bir geometrik kavram olan üçgenler konusu diğer geometrik kavramların öğrenilmesinde temel oluşturmaktadır. Çünkü geometrik muhakemede şekiller arası ilişkinin kurulabilmesi ve açıklanabilmesi önemlidir. Üçgenler, geometri öğretiminin vazgeçilmez bir parçasıdır ve birçok geometrik kavramın temelini oluşturur. Üçgenlerin temel özellikleri, açı ilişkileri ve alan hesaplamaları gibi konular, öğrencilere daha karmaşık geometrik şekilleri anlamaları için sağlam bir temel sağlar. Bu nedenle, geometrik muhakeme çalışmalarında üçgenlerin incelenmesi, öğrencilerin geometrik kavrayışlarını derinleştirir (Smith, 2019). Ayrıca çokgenler arasında en az kenara sahip çokgen olan üçgenden yola çıkarak geometri öğretmek diğer çokgenlerin oluşturulmasını ve şekiller arası ilişkilerin anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır (Çetin, 2020). Üçgenler konusunun derinlemesine öğretilmesi öğrencilerin problem çözme ve eleştirel düşünme becerilerinin geliştirilmesi için fırsat sunar. Özellikle, üçgen çeşitleri ve özellikleri, öğrencilerin geometrik problemlere farklı bakış açılarıyla yaklaşmalarını sağlar. Bu, onların analitik düşünme becerilerini ve yaratıcı problem çözme yeteneklerini geliştirir (Miller & Thompson, 2018). Üçgenlerle ilgili problemler, öğrencilere soyut ve mantıksal düşünme becerilerini geliştirme fırsatı sunar ve bu problemler geometrik muhakeme süreçlerini geliştirmek için ideal uygulama alanlarıdır (Jones, 2017). Bu nedenle pek çok çokgenin anlaşılmasının temelinde yer alan üçgenler konusu geometrik muhakeme için önemli görülmektedir (Çetin, 2020). Bütün bu sebepler göz önüne alınarak bu çalışmada özel yetenekli öğrencilerin üçgenler konusuna yönelik geometrik muhakeme becerileri üçgende açı, üçgende açı-kenar ilişkisi ve üçgen eşitsizliği konuları ile ilgili etkinlikler çerçevesinde derinlemesine incelenmektedir.

Geometri dersinin temel amacı öğrencilere geometrik düşünme becerisi kazandırmaktır. Aynı zamanda öğrencilerin tümevarımsal düşünme ve ispat becerilerinin geliştirilmesi de istenmektedir (Türnüklü vd., 2013). Bu amaç doğrultusunda, öğrencilerin problem çözme

yeteneklerini, eleştirel düşünme becerilerini ve matematikle diğer konular arasındaki ilişkiyi kurabilme yeteneklerini geliştirmeleri hedeflenmektedir (Driscoll vd., 2007). Tüm bunlar geometrik düşünme becerisine katkı sağlamakla birlikte öğrencinin çok yönlü olarak yaşamının kalitesini de artıracak becerilerdir.

Millî Eğitim Bakanlığı'nın 2018 yılında yayınladığı öğretim programında ortaokul 5. sınıftan 8. sınıfa kadar her kademedede geometri ve ölçme alt öğrenme alanına yönelik farklı kazanımlara yer verildiği görülmektedir. Bu program, geometri öğretiminde öğrencilerin temel geometrik kavramları anlamalarını ve uygulamalarını amaçlamıştır. Öğrencilerden çeşitli geometrik şekilleri tanımlamaları, çizim yapmaları ve alan, hacim gibi ölçümleri gerçekleştirmeleri beklenmiştir. Program, analitik düşünme ve problem çözme becerilerinin geliştirilmesini ve öğrencilerin geometrik şekillerin özelliklerini kavramalarını ve matematiksel araçları etkin kullanmalarını hedeflemiştir. Programda, her seviyede çeşitli geometrik kavramlara odaklanılmasına rağmen, pergel ve çizgeç ile yapılan inşa çalışmalarına ağırlık verilmediği görülmektedir.

Millî Eğitim Bakanlığı'nın 2024 yılında yayınladığı ve Eylül 2024'te 5. Sınıf öğrencilerine uygulanmaya başlayacak olan ortaokul matematik öğretimi programı, 5. sınıftan itibaren geometrik kavramların beceri gelişimi odaklı öğretilmesini amaçlayarak geometrik şekillerin çiziminde matematiksel araçlar ve teknolojinin kullanımını ön planda tutmaktadır. Programda pergel ve çizgeçten veya matematik yazılımından yararlanarak çeşitli inşa çalışmaları yapılması beklenmektedir. Bu programa genel olarak bakıldığında öğrencilerin, matematiksel araç ve teknoloji kullanımına bağlı olarak çıkarım yapma, problem çözme ve muhakeme yapma becerilerine yoğunlaştığı söylenebilir. MEB (2024) öğretim programında, geometri öğretiminde çözümleme, yorumlama, değerlendirme, yansıtma, sınıflandırma, çıkarım yapma, analogik akıl yürütme ve tümevarımsal akıl yürütme becerilerinin gelişimi hedeflenmektedir. Belirlenen hedeflere ulaşmak sorgulayıcı ve keşfedici geometri öğretim ortamı tasarımları ile mümkündür.

Ülkemizde uygulanan Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması (TIMSS) sonuç raporları geometri öğretiminde birbiri ile ilişkili konuların birlikte ele alınmasında ve geometrik kavramların modellenmesinde yaşanan sorunlardan kaynaklı olarak geometri öğretiminde sorunlar yaşandığını göstermektedir (Ünlü & Ertekin, 2020). Dolayısıyla, geometri konularının fiziki materyal desteği ile ele alınması ve sorgulamaya yönelik oluşturulan geometri öğretim ortamları önemli hale gelmektedir. Kondratieva (2013) geometri öğretimi sürecinde geometrik inşa sürecinin açıklanması, gerekçelendirilmesi ve ispat yöntemlerinin kullanılmasının geometrik düşünmenin gelişimine katkı sağladığını iddia etmektedir.

Geometrik muhakemenin geliştirilmesinde iki tür hedef ön plana çıkmaktadır: Bunlardan biri öğretim programında yer alan bilgi ve becerilerin kazandırılması, diğeri ise öğrencilerin geometrik düşünme becerilerinin geliştirilmesidir (Baykul, 2009). Bu şekilde öğrenciler yeni problem durumları arasında geçiş yapabilmekte ve geometriyi anlamlı hale getirebilmektedir.

Öğrencilerin geometrik düşünme becerilerinin gelişmesi için geometrik şekilleri ilişki kurarak sınıflandırmaları, bilgisayar yardımı veya kalem-kâğıt ile yeni şekiller oluşturmaları gerekmektedir (Olkun & Aydoğdu, 2003). Bu sonuca rağmen bazı araştırmalar geometri öğretiminde pergel ve cetvel gibi fiziksel materyallerin kullanılmasının konuyu daha da zorlaştırmasından kaynaklı olarak öğrencilerin konuya ilgilerinin azaldığını iddia etmektedir (Güven, 2006; Karakuş, 2014). Geometri öğretiminde fiziksel materyal kullanımının yanında zaman içinde teknolojinin gelişimi ile dinamik matematik yazılımlarından yararlanılmaktadır. GeoGebra, Euklides, Geometer's Skechpad, Cabri gibi pek çok program bulunmaktadır. Bu programların en önemli özelliği şekilleri oluşturan kritik özelliklerin (örneğin, eşkenar dörtgenin tüm kenarlarının eşit uzunlukta olması) korunarak kritik olmayan özelliklerindeki değişimlerini (örneğin, kenar uzunlukları 3 birim olan eşkenar dörtgenin kenarlarını 5 birim uzunlukta olacak biçimde manipüle etme) göstermeye imkân sağlayan dinamik yapıda olmasıdır (Şimşek & Yaşar, 2019). Geometrik şekiller kâğıt üzerinde dinamik özelliğe sahip olmamasından dolayı hareket ettirilemez; ancak dinamik matematik yazılımları ile şekiller kolaylıkla hareket ettirilebilmektedir. Geometri öğretiminde dinamik yazılımların ele alındığı pek çok araştırmada geometri konularının kolaylıkla görselleştirildiği ve şekiller arası ilişkilerin daha iyi açıklanabildiği sonucuna ulaşılmıştır (Cheung, 2011; Çiftçi & Tatar, 2014; Jones, 2000; Napitupulu, 2001; Tatar vd., 2014).

İlgili alanyazın tarandığında geometri öğretimine yönelik pek çok çalışmaya (örn. Clements, 1998; Güven, 2002; Karakuş, 2014; Karpuz vd., 2014; Kondratieva, 2013) rastlandığı ancak bu çalışmaların birçoğunun dörtgenler konusuna (örn. Erez & Yerushalmy, 2006; Kabaca, 2017; Türnüklü vd., 2013) odaklandığı gözlenmiştir. Geometrik şekillerin temeli olarak üçgenler konusunu ele alan çalışmalara da rastlanmıştır (Çetin, 2020; Uygun & Akyüz, 2016; Türnüklü vd., 2017). Ancak özel yetenekli öğrencilerde geometrik muhakemede genellikle seviye belirlemeye yönelik çalışmalar yapılmaktadır (örn. Kanbur Tekerek & Argün, 2022; Sağır Gürlevik, 2017). Dolayısıyla, özel yeteneklilerde matematik eğitime yönelik yapılan çalışmaların genellikle nicel çalışmalar olduğu görülmektedir (örn. Nacar, 2017). Yürütülen çalışmalara ek olarak, seviye belirlemekten ziyade özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusu özelinde geometrik muhakeme süreçlerinin nasıl olduğunun incelenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Geometri öğretiminin etkili olabilmesi için

öğrencilerin geometrik kavramları derinlemesine öğrendikleri ve geometrik şekiller arasındaki ilişkiyi açıklayabildikleri öğrenme ortamı tasarımı önemlidir (Battista, 2002). Tasarlanan çeşitli öğrenme ortamlarının ortak amacı öğrencilerde geometrik şekiller ve sistemler arası ilişkilendirme yaparak öğrencilerin üst düzey geometrik muhakeme gerektiren süreçlere doğru yol almasını sağlamaktır. Dolayısıyla, uygun öğrenme ortamları tasarlayarak farklı öğrenci gruplarının geometriyi zihinlerinde nasıl anlamlandırdıklarını ortaya çıkarmanın önemli olduğu düşünülmektedir.

Farklı öğrenci gruplarından biride özel yetenekli öğrencilerdir. Özel yetenekli öğrenciler, yaratıcı düşünme, soyut kavramları anlama ve çeşitli akademik alanlarda yüksek performans sergileme yetenekleriyle betimlenebilir. Ülkemizde bu tür öğrencilerin potansiyellerini geliştirmek amacıyla kurulan Bilim ve Sanat Merkezleri (BİLSEM), farklılaştırılmış öğretim programları uygulamaktadır. BİLSEM’ler standart eğitim sisteminin ötesinde, öğrencilerin yeteneklerini geliştirmeye yönelik zenginleştirilmiş ve farklılaştırılmış programlar sunar. Bu nedenle, geometrik muhakeme süreçlerinin detaylı bir şekilde incelenmesi için BİLSEM öğrencilerinin ideal bir grup olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin hızlı ve farklı öğrenme kapasitelerini desteklemek için fiziksel ve sanal manipülatifler ile bilgi-iletişim teknolojilerinin ve dinamik matematik yazılımların kullanılması vurgulanmaktadır (Bilsem Matematik Çerçeve Programı, 2023). Özel yetenekli çocuklara uygun olarak hazırlanan matematik ve geometri öğretim programlarının temel amacı, bireysel ihtiyaçlara odaklanarak onların düşünme becerilerini geliştirmektir (Altun, 2018). Bu programlar esneklik sağlamakta olup, öğretmenler tarafından öğrencilerin bireysel özelliklerine göre uyarlanabilmektedir. Böylece, öğrencilerin üst düzey düşünme becerilerini kazanmaları hedeflenmektedir (Bilsem Yönergesi, 2018). BİLSEM’de eğitim gören öğrenciler, kapsamlı ve derinlemesine öğrenme deneyimleri ile analitik düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirme fırsatı bulurlar (Kanbur Tekerek & Argün, 2022). Bu tür bir eğitim ortamı, öğrencilerin geometrik kavramları daha derinlemesine anlamalarını ve karmaşık problem çözme stratejileri geliştirmelerini sağlar.

Özel yetenekli öğrenciler genellikle yaşlılarından daha hızlı öğrenir, yaratıcı ve sanatsal yetenekleri daha belirgindir, liderlik becerileri gelişmiştir ve soyut düşünme kapasiteleri yüksektir. Bu öğrencilerin akranlarından farklılık gösteren özellikleri Davaslıgil’e (2004) göre öğrenme hızı, anlamada derinlik ve ilgi düzeyi iken, Sak (2013) ve Yılmaz’a (2019) göre keşfetme, soyut düşünme, eleştirel düşünme ve fikir üretme becerileridir. Bu özelliklerin yanı sıra, eleştirel düşünme ve fikir üretme kapasiteleri de yüksektir. Geometri, öğrencilerin uzamsal düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmede kritik bir rol oynamaktadır. Literatürde,

üstün yetenekli öğrencilerin, geometri alanında daha hızlı ilerleyebildikleri ve soyut düşünme becerilerinin daha erken geliştiği vurgulanmaktadır (Fleischmann, 2016). BİLSEM öğrencilerinin geometrik muhakeme becerileri üzerine yapılan çalışmalar, onların bu alanda sahip oldukları potansiyelin daha net bir şekilde ortaya konmasını mümkün kılmaktadır (Kanbur Tekerek & Argün, 2022). Bu nedenle özel yetenekli öğrencilerin, geometri alanındaki yeteneklerinin incelenmesi, onların potansiyellerini tam olarak ortaya koymak açısından büyük önem taşımaktadır. Aktaş (2020), BİLSEM programlarının, öğrencilerin bireysel yeteneklerini en üst düzeyde geliştirmeyi amaçladığını vurgular. Özel yeteneğe sahip öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerinin derinlemesine incelenmesinin, literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu çalışmanın amacı özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik geometrik muhakeme süreçlerini tasarlanan farklı etkinlikler yardımı ile incelemektir. Özel yetenekli öğrencilerin üçgenler konusunda geometrik muhakeme becerilerinin nasıl olduğunu algısal ve bilişsel muhakeme süreçleri özelinde incelemek ve bu süreçler arası etkileşimi ortaya koymak hedeflenmektedir.

Geometrik muhakeme becerisini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamlarının ortak amacı öğrencilerde geometrik şekiller ve sistemler arası ilişkilendirme yapmalarını sağlamaktır. Bu yüzden uygun öğrenme ortamları tasarlayarak farklı öğrenci gruplarının geometriyi zihinlerinde nasıl anlamlandırdıklarını ortaya çıkarmak önemlidir. Bu farklı öğrenci gruplarından biri olarak, özel yetenekli öğrenciler yaşıtlarına göre hızlı öğrenen ve üstün akademik performans gösteren, sorgulama ve soyut düşünme becerileri yüksek olan öğrencilerdir. Özel yetenekli öğrencilerde geometrik muhakemede genellikle seviye belirlemeye yönelik çalışmalar yapıldığı görülmektedir (örn. Kanbur Tekerek & Argün, 2022; Sağır Gürlevik, 2017). Bu nedenle yaşıtlarından bazı özellikleri ile farklılık gösteren bu bireylerin geometrik muhakeme becerisinin seviyesini belirlemek yerine zihinlerinde oluşan bu sürecin nasıl gerçekleştiğini ortaya koymanın önemli olduğu düşünülmektedir. Bu çalışmada, üçgenin en az kenar sayısına sahip temel çokgen olması ve üçgenin özelliklerinin diğer çokgenlerin anlaşılmasına yardımcı olacağı düşünüldüğü için özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakeme süreçleri üçgenler konusu özelinde incelenmiştir.

Genel olarak, geometrik şekil ve cisimlerin tanınması ve bu şekiller arasındaki ilişkilerin açıklanması (Van de Walle vd., 2013) olarak tanımlanan geometrik muhakeme kavramı için gelişimsel ve bilişsel farklı yaklaşımlarla ele alınan teori ve kavramsal çerçeveler mevcuttur.

Bunlardan gelişimsel yaklaşımla inceleyen teori Van Hiele Geometrik Düşünme Teorisi (1986), bilişsel yaklaşım ile ele alan teori Fischbein'in Şekilsel Kavram Teorisi (1993) ve bilişsel yaklaşım ile ele alan model ise Duval'in Bilişsel Modeli'dir (1998, 1999, 2000). Genel olarak bakıldığında Fischbein (1993), geometrik muhakeme için şekil-kavram ikilisini kullanırken, Duval (1995, 1998, 1999, 2000) ise algı-şekil-kavram üçlüsünü kullanmıştır. Dolayısıyla Duval'in modelinin, Fischbein'in teorisini de içeren daha kapsamlı bir yaklaşım sunduğu iddia edilebilir.

Bu çalışmada, özel yetenekli öğrencilerin üçgenler konusundaki geometrik muhakeme becerileri Duval'in bilişsel modeline göre incelenmektedir. Geometri öğretimi ile ilgili birçok çalışma, geometrik muhakemede gelişimsel bir model olan Van Hiele Geometrik Düşünme teorisine (1986) odaklanmaktadır (örn. Altun, 2018; Bal, 2014; Kılıç, 2003; Kobal, 2020). Ancak geometrik muhakeme ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde Duval'in bilişsel modelinin daha kapsayıcı olmasına rağmen, bu konuda daha az sayıda çalışma yapıldığı görülmüştür (Karpuz, 2018). Geometri öğretiminde farklı ortamların bilginin anlamlandırılma sürecine yardımcı olduğu bilinmektedir. Bu nedenle geometride bilginin anlamlı bir şekilde düzenlenmesinde temsil kavramı önemli bir rol oynamaktadır. Duval (1999), temsil kavramını, matematiksel kavramların zihinde işlenebilmesi ve başkalarına aktarılması için gereken araçlar şeklinde tanımlamaktadır. Temsillerin ortaya konulmasında farklı öğrenme ortamları tasarlamak da büyük önem taşımaktadır. Bu araştırmada Duval'in bilişsel modeli tercih edilerek bu modelin farklı öğrenme ortamlarındaki etkinliklerin incelenmesine daha uygun olacağı düşünülmüş ve yürütülen bu çalışmada kavramsal çerçeve olarak Duval'in bilişsel modeli (1998,1999,2000) tercih edilmiştir.

Bu araştırmada akranlarından farklı bir performans gösteren özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakeme becerilerinin farklı araçlar kullanımını gerektiren özel olarak tasarlanmış etkinlikler aracılığı ile incelenmesinin önemli olduğu ve özel yetenekliler ve matematik eğitimi alanına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.3. Araştırma Sorusu

Bu araştırmada aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranmaktadır:

- 1) Özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik geometrik muhakeme becerileri nasıldır?
 - a. Özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik algısal süreçleri nasıldır?

- b. Özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik bilişsel muhakeme süreçleri nasıldır?
- 2) Özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik bilişsel ve algısal süreçleri arasındaki etkileşim nasıldır?

1.4. Sayıtlar

Veri toplama araçlarını dolduran öğrencilerin, sorulara içten ve dürüst cevaplar verdikleri varsayılmaktadır. Buna ek olarak, araştırma süresinin ve amaca yönelik hazırlanan ve alınan uzman görüşleri doğrultusunda geliştirilen veri toplama araçlarının araştırmanın amacına uygun olduğu düşünülmektedir.

1.5. Sınırlılıklar

Bu araştırma özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin üçgende açı, üçgende kenar ve üçgen eşitsizliği konularında geometrik muhakeme becerilerini incelemeyi amaçlayan nitel bir çalışma olduğu için yalnızca beş kişilik bir katılımcı grubu içermektedir. Bu durum, çalışmanın bir sınırlılığı olarak görülebilir. Ancak, her katılımcının bir durum olarak ele alındığı bir durum çalışması olması ve farklı veri toplama araçları ile çeşitli veri elde edilmesi sebebiyle zengin bir veri toplanmış ve her bir durum derinlemesine incelenmiştir. Ek olarak, katılımcı grubunun yalnızca bir BİLSEM’den oluşturulması bir sınırlılık olarak görülebilir. Fakat, araştırmacının katılımcılara kolay ulaşıyor olması ve araştırmacının katılımcıları yakından tanıyor olmasının, öğrencilerin düşünme süreçlerine yönelik yapılan çıkarımların geçerliğini desteklediği düşünülmektedir. Bu durum öğrencilerden daha güvenilir veri elde edilmesini sağlamış ve araştırmanın kalitesini artırmıştır.

1.6. Tanımlar

Bilim ve Sanat Merkezi (BİLSEM): Türkiye’de özel yetenekli öğrencilerin yeteneklerinin farkında olmalarını, ilgi alanlarında gelişim göstermelerini ve kapasitelerini en üst düzeyde ortaya koymalarını sağlamak amacıyla Millî Eğitim Bakanlığına bağlı olarak eğitim vermek amacıyla açılmış kurumlar olarak tanımlanmaktadır (Bilsem yönergesi,2018).

GeoGebra: Geometri öğretiminde kullanılan dinamik matematik yazılımlarından biri olarak ele alınmaktadır.

Geometrik Muhakeme: Bu çalışmada geometrik şekillerin özelliklerini tanıma, aralarında ilişki kurma ve farklı özelliklere dair çıkarımlar yapma şeklinde tanımlanmıştır.

Özel Yetenekli Birey: Bu çalışmada özel yetenekli öğrenciler, genellikle yaşlılarından daha hızlı öğrenen, yaratıcılık, sanatsal ve liderlik yetenekleri daha belirgin olan, çeşitli akademik alanlarda öne çıkan, soyut düşünme becerisi gelişmiş, özel ilgi alanlarında bağımsız hareket etmeyi tercih eden ve genellikle üst düzey performans sergileyen bireyler şeklinde tanımlanmıştır.



BÖLÜM 2

KURAMSAL TEMEL VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

2.1. Kuramsal Temel

Bu bölümde öncelikle geometri öğretimine genel bir giriş yapılarak fiziksel materyallerle geometri öğretimi, GeoGebra ile geometri öğretimi, özel yeteneklilerde geometri öğretimi alt başlıklarında geometri öğretimi açıklanmıştır. Daha sonra geometrik muhakeme ile ilgili bölümde geometrik muhakemenin ne olduğu ve farklı yaklaşımları açıklanarak bu araştırmaya temel oluşturan kavramsal çerçeve betimlenmiştir. Son olarak, araştırmanın amacı kapsamında geometrik muhakeme becerisi üzerine yapılan çalışmalar incelenmiş ve özetlenmiştir.

2.1.1. Geometri Öğretimi

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) (2001), içinde olduğumuz evreni anlamamızı ve analiz etmemizi sağladığı için geometrinin matematik müfredatının merkezinde yer alması gerektiğini ifade ederek geometrinin ve geometri öğretiminin önemini ortaya koymuştur. Buradan hareketle tasarlanan matematik öğretim programında yer alan geometri öğretiminde temel amaç bireyin günlük hayatta karşılaştığı problemlere çözüm üretebilmesidir (MEB, 2018). Bu sene çalışmaları tamamlanan ve yayınlanan beceri temelli ortaokul matematik öğretim programında ele alınan geometri öğretiminde inşa ve çemberin odağa alındığı, böylece kavramların ilişkilendirilmesine zemin hazırlanmış olduğu da görülmektedir (MEB, 2024). Henüz uygulanmaya başlamayan bu programın literatürdeki öneriler göz önüne alınarak tasarlandığını söyleyebiliriz fakat uygulamada neler olacağını görmek için bir sonraki öğretim yılını beklememiz gerekmektedir.

Geometrik düşünme becerisindeki gelişimde, öğrencilerin problem çözme, eleştirel düşünme ve matematikle ilişkilendirilen diğer beceriler arasında ilişki kurabilmeleri amaçlanır. (Driscoll vd., 2007). Bu amaç doğrultusunda geometri öğretimi ile tümevarımsal düşünme ve ispat becerilerinin geliştirilmesi de hedeflenmektedir (Türnüklü vd., 2013). Geometri öğretimi ile öğrencilerin akıl yürütme, ispat yapma, ilişkilendirme ve sorgulama becerileri gelişir (Chen vd., 2021; Yiğit Koyunkaya, 2020). Bu becerileri geliştirmek için geometri öğrenme ortamında çeşitli araç ve gereç kullanımının geometri öğretimine olumlu yansıtacağı bilinmektedir (Öztürk & Güven, 2012). Ayrıca öğrenme ortamında farklı öğretim materyalleri kullanmak daha fazla sayıda duyuya hitap ettiği için kalıcı öğrenmeyi desteklemektedir (Ünlü & Ertekin,

2020, Yalın, 2007). Geometri öğrenme ve öğretme sürecinde farklı araç-gereç kullanılarak tasarlanan öğrenme ortamları etkili geometri öğretimi için gereklidir (Battista, 2002). Verimli ve etkili bir öğrenme ortamı için fiziksel materyaller, gerçek nesneler ve dinamik geometri yazılımları kullanılması önerilmektedir.

Fiziksel Araçlar ile Geometri Öğretimi

Fiziksel matematiksel araç kullanılarak yapılan geometri eğitimi çalışmaları incelendiğinde genellikle çalışmalarda pergeli, cetveli ve çizgeci ile yapılan inşaa etkinliklerine rastlanmaktadır. Ünlü matematikçi Öklid tarafından milattan önce 300 yıllarında yazılan “Elemanlar” kitabında yer alan ve pergeli ve çizgeci kullanılarak yapılan inşaa geometrik inşaa olarak isimlendirilmektedir (Martin, 2012). Pergeli, yay ve çember çizmek için; çizgeci, Öklid geometrisinde kullanılan üzerinde ölçme birimleri bulunmayan ve sadece düz çizgi çizmek için; cetveli, doğru çizgiler çizmeye yarayan ve uzunluk ölçmek için kullanılan araçlardır. Pergeli ve çizgeci kullanılarak yapılan geometrik inşaa, diğeri araçlar kullanılarak yapılan çizimlerden farklı bir öneme sahiptir (Erduran & Yeşildere, 2010). Örneğinin bir doğru parçasına eş doğru parçası çizebilme sadece cetveli ile yapılırsa, psikomotor beceri gerektirirken yalnızca pergeli ve çizgeci kullanılarak inşaa edilmesi öğrencilerin şekillerin geometrik özelliklerini keşfetmelerine yardımcı olur ve bu şekilde öğrencilerin geometrik şekil anlayışları da derinleşmektedir (Napitupulu, 2001).

Uzun yıllar boyunca geometri eğitiminde önemli yeri olan geometrik inşaa konusu Türkiye’de matematik öğretim programlarında şu şekilde ele alınmıştır. Örneğinin, MEB’in 2009 yılı ortaokul matematik öğretim programında, geometrik inşaa; ölçülü veya ölçsüz cetveli araçlarıyla çizim yapmak, fiziksel araçlarla model oluşturmak ve geometrik cisimlerin açınımlarını yapmak olarak tanımlanmıştır (MEB, 2009). MEB’in 2009 ortaokul matematik öğretim programında öğrencilerin, paralel doğru, eş açı, dikme, orta dikme, çokgen ve geometrik cisim inşaa gibi pek çok geometrik inşaa becerisi kazanmaları beklenmiştir. Bu kazanımlara yönelik etkinliklerde kâğıt katlama, pergeli ve cetveli kullanımı ile farklı geometri yazılımlarının kullanılması önerilmiştir (MEB, 2009). Bu programda öğrencilerden beklenti, geometrik yapıyı inşaa ederken şeklin özelliklerini sorgulayabilmeleridir (Erduran & Yeşildere, 2010).

MEB’in 2009 yılı matematik öğretim programında detaylı şekilde uygulamalı olarak yer verilen geometrik inşaa, MEB’in 2018 yılı öğretim programında öğrencinin istenilen geometrik kavramı kâğıt katlama, birim karelerden yararlanma ve dinamik matematik yazılımlarını kullanarak şekli oluşturma biçiminde ele alınmıştır. Hedeflenen kazanımlarda ‘bir doğru

parçasına paralel doğru parçaları inşa eder’, ‘üçgende kenarortay, açıortay ve yüksekliği inşa eder’ ve ‘geometrik cisimleri inşa eder’ şeklinde yer verildiği görülmektedir. Az da olsa kazanımlarda yer verilmesine rağmen uygulamada pergeli ve çizgeç kullanılarak yapılan geometrik inşa çalışmalarına öğretimde yeterince yer verilmediği görülmüştür (Ulusoy, 2019).

Millî Eğitim Bakanlığı’nın (MEB) 2024 yılında yayınladığı 2024-2025 eğitim öğretim yılında uygulanması planlanan ortaokul matematik öğretim programında ise inşa etmek şeklinde ele alınan kavram, pergeli ve ölçüsüz cetvel (çizgeç) yardımıyla geometrik şekillerde, eşit uzunluklar, eş açılar, dik doğru parçaları gibi özellikleri oluşturma süreci olarak tanımlanmıştır. Bu programda inşa kavramına odaklanılmasının geometri öğrenme alanının temelini oluşturduğu söylenebilir. Örneğin; inşa etmeye yönelik yer verilen öğrenme süreçleri eş doğru parçaları inşa etme, üçgen inşa etme, üçgen çeşitlerini inşa adımları üzerinden muhakeme etme, geometrik şekilleri inşa etme, üçgende yardımcı elemanları inşa etme vb. şekilde incelendiği görülmektedir. İnşa etme süreçleri, temel geometrik şekillerin özelliklerinden yola çıkarak çizim adımlarıyla diğer geometrik şekillerin özelliklerini oluşturmayı içerir (Smart, 1993). Bu süreç, çemberin özelliklerinden başlayarak diğer şekillerin özelliklerini oluşturmayı amaçlar.

Öğretim programlarında yıllar geçtikçe özellikle 2024 öğretim programında detaylı olarak yer verilen geometrik inşa konusunun önemi bir kez daha ortaya konmuştur diyebiliriz. Bu programda ele alınan inşa sürecinin amacı, geometrik şekli kuralına uygun şekilde eksiksiz çizmek değil öğrencilerin geometrik şekilleri çizim aşamasında şekiller üzerinde düşünerek ilişki kurmalarını sağlamak ve sorgulama yapmalarına odaklanmaktır. Bu süreçte sorgulamanın tam olarak gerçekleştirilebilmesi ve tamamen öğrencinin oluşturabilmesi ve muhakeme yapabilmesi için öğrenme ortamının iyi bir şekilde tasarlanması önemli hale gelmektedir (Kondratieva, 2013). Programda planlanan etkinliklerde pergeli, cetvel, açı ölçer, ölçüsüz cetvel, geometri şeritleri, geometri tahtası, kâğıt katlama, asetat kâğıtları kullanımı gibi ön plana çıkan matematiksel araçlar olduğu görülmektedir. Bu şekilde geometri öğretiminde matematiksel araç kullanımına odaklanılarak öğrencilerin sorgulama becerinin dolayısıyla geometrik muhakemelerinin gelişimi hedeflenmiştir. Geometrik muhakemenin geliştirilmesi için öğrencilerin fiziksel araç kullanarak sorgulamalar yapabileceği inşa etkinlikleri gerçekleştirilmesinin etkili olduğu ileri sürülmektedir (Ünlü & Ertekin, 2020). Ancak yapılması planlanan bu inşa etkinlikleri belirli kurallarla öğretmen tarafından adım adım yaptırılmamalıdır (Erduran & Yeşildere, 2010). Bu şekilde gerçekleştirilen süreç, inşa süreci olarak kabul edilir ama öğrenci deneyiminin merkeze alındığı bir inşa süreci olarak kabul edilmemektedir. İnşada beklenen durum, pergeli-çizgeç veya farklı araçlar kullanarak

öğrencilerin şeklin özelliklerini keşfetmelerine olanak sağlanmasıdır (Napitupulu, 2001; Tosun, 2019). Geometrik inşa çalışmaları uygun öğrenme ortamlarında ve planlı şekilde gerçekleştirildiğinde geometrik muhakeme becerisini olumlu yönde etkilemektedir (Cheung, 2011; Güven, 2006; Napitupulu, 2001).

Dinamik Matematik Yazılımı ile Geometri Öğretimi

Teknolojinin gelişimiyle birlikte birçok dersin öğretiminde yaşandığı gibi geometri öğretiminde de teknolojik yenilikler gerçekleşmiştir. Teknoloji ile bütünleştirilmiş geometri öğretimi, içeriğin sunum şeklini zenginleştirmekte ve öğrencilerin matematiksel ilişkilere daha iyi odaklanmalarını ve akıl yürütme süreçlerini etkin deneyimlemelerini sağlamaktadır (Van de Walle vd., 2013). Teknolojinin geometri öğretimine entegre edilmesi geometri öğretiminde GeoGebra, Cabri, Geometer's SketchPad gibi dinamik matematik yazılımlarının geometri öğretiminde sıkça kullanılmasını sağlamıştır. Bu yazılımlardan ülkemizde en sık kullanılanlardan biri ücretsiz olması, kullanım kolaylığı sağlaması ve Türkçe kullanım desteği sağlaması sebebiyle GeoGebra'dır (Kutluca & Zengin, 2011). GeoGebra ücretsiz kullanımının yanında tablet, telefon gibi elektronik cihazlarda kullanıma da uygundur. MEB'in 2018 matematik öğretim programında teknolojiden yararlanarak özellikle dinamik matematik yazılımlarından yararlanmayı gerektirecek etkinlikler önerilmiş, 2024 ortaokul matematik öğretim programının uygulanmasında ise GeoGebra kullanımının artması beklenmektedir. MEB'in 2018 yılı matematik öğretim programında belirtilen kazanımlarda GeoGebra'dan yararlanmak konunun görselleştirilmesi, somutlaştırılması ve akıl yürütme süreçlerini desteklemesi bakımından önemlidir (Yiğit Koyunkaya, 2023). Teknoloji destekli matematik öğretimi ile, öğrencilerin soyut düşünme, genellemelere ulaşma, modellemeler ile ispat yapma gibi matematiksel etkinlikleri gerçekleştirerek dinamik bir ortamda kavramları keşfetmesi sağlanır (Baki, 2008). Dolayısıyla, öğretim ortamlarının öğrencilerin mevcut becerilerini en üst seviyede ortaya çıkarabilecek etkileşimli ortamlar olması önemlidir. Bu etkileşimli ortamların dinamik matematik yazılımları ile sağlanabileceği düşünülmektedir. Dinamik matematik yazılımlarının en önemli özelliği şekilleri oluşturan temel özelliklerin korunarak temel geometrik elemanları ile eş zamanlı hareket ettirilmeye imkân sağlayan dinamik yapıda olmasıdır (Şimşek & Yaşar, 2019). GeoGebra programına dinamiklik özelliğini veren sürüklenme özelliğidir. Dinamik matematik yazılımlarının sürüklenme özelliği geometrik düşünme süreçlerinde önemli bir role sahiptir (Köse vd., 2012). GeoGebra programında inşa süreci, şeklin belirli kurallar ve mantıksal çıkarımlarla doğrulanma sürecidir. İnşada şekil sürüklemeye dayanıklıdır. Çizim ise genel olarak şekillerin görsel olarak düzenleme ve esnek

şekilde geometrik şekillerin görsellerini oluşturma sürecidir. Sürüklenme, inşa ve çizim farkını ortaya koyarak şeklin değişen ve değişmeyen özelliklerinin keşfedilmesine olanak sağlar (Arzarello vd., 2002; Laborde, 1995). Bu keşif sayesinde öğrenciler dinamik ortamda problem durumlarına farklı çözüm önerileri sunmak için denemeler yapmakta ve genellemelere kendileri ulaşmaktadırlar, böylece bilişsel olarak daha üst seviyelere çıkabilmektedirler (Tapan Broutin, 2014).

Yürütülen araştırmalara göre dinamik matematik yazılımları, öğrencilerin kavramları kendilerinin keşfetmesine olanak sağladığı için geometri başarısını artırmaktadır (Güven & Karataş, 2003; Toluk vd., 2002). Ayrıca bu yazılımlar, öğrencilere soyut geometrik kavramları görselleştirme imkânı sağlayarak, öğrenme sürecini derinleştirebilir ve kavramsal anlayışlarını güçlendirebilir (Smith, 2017). Bu nedenle farklılaştırılarak uygulanan geometri öğretiminin şekil ve kavram etkileşimini güçlendireceği ifade edilebilir. Geometri öğretiminde başarının artmasının doğrudan etkili olmadığı durumlarda da önemli olanın etkili öğrenme ortamı tasarımı olmasıdır (Baki, 2001; Güven, 2006). Karpuz (2018), tasarlanan öğretim ortamlarında gerçekleştirilecek etkinliklerin dinamik matematik yazılımları yardımı ile gerçekleştirilmesinin önemli katkılar sağlayacağını ifade etmektedir. Çünkü yapılan araştırmalar dinamik geometri yazılımlarının sınıf ortamında kullanılmasının geometrik şekiller arası ilişkiyi keşfetmeyi ve ilişkinin ispatlanmasını kolaylaştırdığını göstermektedir (Güven, 2002; Güven, 2008; Karpuz vd., 2014; Ubuz vd., 2009). Sonuç olarak, geometri öğretiminde dinamik matematik yazılımları kullanmanın önemli olduğu ancak öğretilen konunun başka materyallerle desteklenmesinin yararlı olacağı öngörülmektedir (Özdemir & Çakır, 2019).

Özel Yetenekli Öğrencilerde Geometri Öğretimi

Özel yetenekli birey genellikle yaşlılarından daha hızlı öğrenen, yaratıcılık, sanatsal ve liderlik yetenekleri daha belirgin olan, çeşitli akademik alanlarda öne çıkan, soyut düşünme becerisi gelişmiş, özel ilgi alanlarında bağımsız hareket etmeyi tercih eden ve genellikle üst düzey performans sergileyen bireyler şeklinde tanımlanmıştır (Bilsem Yönergesi, 2018). Ülkemizde özel yetenekli öğrencilerin yeteneklerinin farkında olmalarını, ilgi alanlarında gelişim göstermelerini ve kapasitelerini en iyi şekilde kullanmalarını sağlamak amacıyla Millî Eğitim Bakanlığınca Bilim ve Sanat merkezleri (BİLSEM) açılmıştır. Özel yetenekli öğrenciler örgün eğitim kurumlarından arta kalan zamanlarında Bilim ve Sanat Merkezlerinde ilgi alanlarına göre farklılaştırılmış öğretim programlarına göre eğitim almaktadırlar. Uygulanan programlarda yer alan etkinliklerde öğrencilerin üst düzey düşünme becerileri kazanmaları beklenmektedir (Bilsem Yönergesi, 2018). BİLSEM öğretim programları özel yetenekli

öğrencilerin bireysel özelliklerine göre öğretmenler tarafından düzenlenebilecek esnek bir özellik taşımaktadır. Program bu özelliği ile genel öğretim programlarından farklılaşmaktadır. Farklılaşan bu programın temelinde öğrencilerin gösterdiği farklı özellikler yer almaktadır. Bu tanımdan anlaşıldığı gibi matematik öğrenimine yönelik özel yeteneği olan öğrenciler diğer öğrencilerden farklı özellik göstermektedir. Bu özellikler; öğrenme hızı, anlamada derinlik ve ilgi düzeyidir (Davashgil, 2004). Matematikte özel yeteneğe sahip öğrencilerin matematik dersine özel ilgi duyduğu Sak'ın (2005) çalışmasında da ortaya konmaktadır. Batdal Karaduman ve Davashgil (2020) tarafından ilköğretim 5. sınıf seviyesindeki özel yetenekli öğrenciler için farklı özelliklere sahip bir geometri programı geliştirilmiş ve bu programın etkinliği test edilmiştir yapılan bu araştırmanın sonuçları, özel yetenekli öğrencilere yönelik hazırlanan bu geometri programının, öğrencilerin geometriye dair yaratıcı düşünme düzeylerini ve başarılarını artırdığını göstermiştir.

Bilsem matematik öğretim programında, planlanan matematik etkinliklerinde fiziksel ve sanal manipülatiflerin yanında bilgi-iletişim teknolojileri ve dinamik matematik yazılımlarından yararlanmanın önemine vurgu yapılmaktadır. Ayrıca programda ortak becerilerin yanında matematik alanına özgü problem kurarak çözebilme, akıl yürüterek ispat yapabilme, ilişkilendirme, temsil etme, iletişim, matematiksel modelleme, matematiksel kestirim, görsel ve uzamsal dönüştürme, sayı duyusu ve hesaplama, araştırma, karar verme, eleştirel düşünme ve yaratıcı düşünme becerilerinin de gelişimine önem verilmektedir.

Bilsem matematik öğretim programının bu araştırma için hazırlanan etkinliklerine temel oluşturacak geometri ve ölçme alt öğrenme alanından üçgenlerle ilgili olan kazanımları şu şekildedir:

1. Üçgenlerin iç açıları ölçüleri toplamının 180 derece, dış açıları ölçüleri toplamının 360 derece olduğunu keşfeder.
2. Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşısındaki açıların ölçülerini ilişkilendirir ve ispat eder.
3. Üçgen eşitsizliğini keşfeder ve ispat eder.

Özel yetenekli öğrencilerin, geometrik muhakeme becerilerinin diğer akranlarından farklı olarak değerlendirilmesi önem taşımaktadır. Bu öğrencilerin performanslarını incelemek için tasarlanmış çeşitli araç-gereçler ve etkinlikler kullanılarak yapılacak çalışmalar, hem onların eğitim süreçlerini optimize etmek hem de özel yetenekliler alanında çalışacak olan araştırmacılara değerli bilgiler sunmak açısından faydalı olacağı düşünülmektedir.

2.1.2. Geometrik Muhakeme

Geometrik muhakemeyi Van Hiele (1986), şekillerin özelliklerini ve ilişkilerini anlayarak geometrik şekillerle ilgili mantıklı sonuçlara ulaşma ve problemleri çözme süreci olarak tanımlamaktadır. Aynı zamanda geometrik muhakemeyi beş gelişim seviyesinde tanımlar ve bu seviyeler yardımı ile öğrencilerin geometrik muhakemelerini nasıl geliştirdiklerini açıklar (Van Hiele,1986). Geometrik muhakemeyi Duval (1995) ise bireylerin geometrik şekiller ve kavramları farklı temsiller aracılığıyla anlamlandırma ve bu temsiller arasında dönüşüm yapma yeteneği olarak açıklamaktadır. Van de Walle ve diğerleri (2013) ise geometrik muhakemeyi geometrik şekil ve cisimlerin tanınması ve bu şekiller arasındaki ilişkileri açıklama olarak ifade etmektedir. Bu tanımlardan hareketle geometrik muhakeme kısaca geometrik şekillerin bilinen özelliklerinden hareketle diğer özellikleriyle ilgili çıkarım yapma, şekiller arası ilişki kurma ve bu ilişkiyi gerekçeleri ile açıklama olarak tanımlanabilmektedir.

Geometrik muhakeme gelişimsel ve bilişsel yaklaşımlar olarak farklı yaklaşımlarla ele alınmış ve açıklanmaya çalışılmıştır. Bu bölümde sırasıyla gelişimsel yaklaşımla inceleyen teori Van Hiele Geometrik Düşünme Modeli (1986), ikinci olarak bilişsel yaklaşım ile ele alan teori Fishbein'in Şekilsel Kavram Teorisi (1993) bilişsel yaklaşım ile ele alan model ise Duval'in Bilişsel Modeli (1998, 2000) literatürden ilgili araştırmalarla birlikte açıklanacaktır.

Geleşimsel Yaklaşımla Geometrik Muhakeme Teorisi

Van Hiele (1986), geometrik muhakeme sürecini birbiriyle hiyerarşik ilişkili seviyeler halinde ele almakta ve bu seviyeler arası geçişi gelişime bağlı bilgi artışı üzerinden açıklamaktadır. Van Hiele Teorisi, öğretimin öğrencinin öğrenme düzeyinde gerçekleşmesini öneren bir yapı sunmaktadır. Öğrencilerin geometriyi nasıl anladıklarını açıklamada genel kabul görmüş bir teoridir. Fakat bu teori geometrik muhakemeyi gelişimsel yaklaşımla açıkladığı için bilişsel çerçevede açıklayan teori ve modellerin oluşmasına da zemin hazırlamıştır. Van Hiele (1986) ortaya koyduğu teorisinde geometrik muhakemeyi gelişimsel çerçevede 5 düzeyde ele almıştır:

1. Görsel düzey: Bu düzeyde öğrenciler şekli bir bütün olarak algılar, şeklin parçalarını göremezler. Bu evrede şeklin özellikleri değil şeklin görünümü veya konumu önemlidir.
2. Betimsel düzey: Bu düzeyde öğrenci geometrik şeklin bütünü, bu bütünün parçalardan oluştuğunu ve bu parçaların özelliklerinin farkına varmaktadır. Şeklin görünümünden ziyade özelliklerini rahatlıkla açıklayabilmektedir. Ancak şeklin özelliklerini açıklarken şekiller arası ilişkiyi açıklayamamaktadır.

3. Basit çıkarım düzeyi: Bu düzeyde öğrenci geometrik şekiller arasındaki ilişkiyi açıklayabilmektedir. Şekiller arası hiyerarşik ilişkinin farkında olan öğrenciler bu düzeyde yer almaktadır.

4. Çıkarım düzeyi: Bu düzeyde bir öğrenci ispatlanmış matematiksel teoremlerden yararlanarak tümdengelim yolu ile farklı teoremleri ispatlayarak açıklama yapabilmektedir.

5. Sistematiik düşünme düzeyi: Bu düzeydeki öğrenci farklı aksiyomatik sistemleri fark ederek karşılaştırmalı olarak açıklayabilmektedir. Bu nedenle bu düzey üst düzey matematiksel düşünme gerektiren düzey olarak kabul edilmektedir. Örneğin, bu düzeyde bir öğrenci Öklid dışı geometrileri rahatlıkla anlamakta ve yorumlayabilmektedirler.

Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri şu şekilde özetlenebilir: Düzey 1’de öğrenciler şekilleri bütün olarak algılar, Düzey 2’de şekillerin parçalarını fark eder ama ilişkilerini açıklayamazlar, Düzey 3’te şekiller arasında ilişki kurar ve sınıflandırma yaparlar, Düzey 4’te teoremleri ispatlayabilirler ve Düzey 5’te Öklid dışı geometrileri kavrayabilirler. Örneğin; Geometrik düşünme düzeylerinden Düzey 1’de bulunan bir öğrenci üçgen kavramını eşkenar üçgen örneğiyle öğrendiği için diğer üçgen çeşitlerini (geniş açılı üçgen, dik açılı üçgen) üçgen olarak kabul etmemektedir. Düzey 2’de bulunan bir öğrenci eşkenar üçgenin ikizkenar üçgenin tüm özelliklerini taşıdığını aynı zamanda ikizkenar üçgen olduğunu fark etmemektedir. Düzey 3’te bulunan öğrenci şekiller arası ilişki kurabildiği için kendisine bir üçgenin tepe noktasından indirilen dikmenin hem açıortay hem de kenarortay olduğunu söylediğinde, üçgenin ‘eşkenar üçgen ya da ikizkenar üçgen’ olduğunu fark edebilir. Düzey 4’te bulunan bir öğrenci dik üçgende geçerli olan Pisagor bağıntısını çeşitli yöntemlerle ispatlayabilir. Düzey 5’te bulunan öğrenci ise Öklid dışı geometrileri anlayabildiği için Öklid dışı geometride bir üçgenin üç açısının da 90 derece olabileceğini açıklayabilir. Bu düzeyler ve bu düzeylerin getirdiği beceriler teorisinin aşamalı şekilde ilerlediğini göstermektedir.

Van Hiele teorisini temel alarak yürütölen pek çok çalışma bulunmaktadır (örn: Casanova vd., 2021; Clements & Battista, 1992; Duatepe, 2004; Mistretta, 2000; Senk & Usiskin, 2014; Usiskin, 1982; Rizki vd., 2018). Casanova ve diğlerleri, (2021), Bu çalışmada öğrencilerin üçgenler konusundaki geometrik düşünmelerini Van Hiele düzeylerini ve kavram yanılgıları kullanılarak açıklanmıştır. Clements ve Battista (1992), öğrencilerin geometrik düşünme seviyelerini ve bu seviyelerin gelişimini incelemiştir. Bu çalışma, Van Hiele geometrik düşünme seviyelerinin öğrencilerin geometrik düşünme yeteneklerini değerlendirmede etkili olduğunu ve bu seviyelerin doğru öğretim stratejileri ile geliştirilebileceğini göstermiştir (Clements & Battista, 1992). Usiskin (1982), Van Hiele seviyelerinin ortaokul öğrencilerinin geometri başarıları üzerindeki etkisini araştırmıştır.

Araştırma, öğrencilerin geometrik düşünme seviyelerinin geometri başarıları ile doğrudan ilişkili olduğunu, yüksek seviyelerde olan öğrencilerin daha yüksek başarı gösterdiğini ortaya koymuştur (Usiskin, 1982). Mistretta (2000) sekizinci sınıf öğrencileri ile yürüttüğü Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini geliştirmeyi amaçlayan çalışmada geometrik düşünme düzeyinin öğrencilerin bilişsel becerilerinin daha fazla farkında olmalarını sağlamak ve farklılaştırılmış öğretim uygulamaları ile yükseleceği sonucuna ulaşmıştır (Mistretta, 2000). Senk ve Usiskin (2014), öğrencilerinin geometrik ispat yeteneklerini incelemiş ve Van Hiele seviyelerinin bu yeteneklerin gelişiminde belirleyici olduğunu ortaya koymuştur. Öğrencilerin geometrik düşünme seviyelerinin artması, ispat yeteneklerinin de geliştiğini göstermiştir. Duatepe (2004) drama temelli geometri öğretiminin geleneksel öğretimle karşılaştırdığı deneysel çalışmada farklılaştırılmış geometri öğretiminin yedinci sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinde drama temelli öğretim yaptığı grup lehine anlamlı bir sonuç bulmuştur. Rizki ve diğerleri (2018), ortaokul öğrencilerinin uyumlu akıl yürütme becerileri ve Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Araştırmanın sonucu öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin geometrik düşünme düzeyleri üzerindeki olumlu etkisini göstermektedir (Rizki vd., 2018).

Araştırmalar genellikle Van Hiele teorisinin geometrik düşünme süreçlerinin anlaşılmasında ve geliştirilmesinde önemli bir araç olduğunu ve eğitsel stratejilerin bu seviyelere uygun olarak düzenlenmesinin öğrenci başarılarını artırabileceğini göstermektedir. Van Hiele teorisinin modern eğitimde hala geçerliliğini koruduğunu ve dinamik geometri yazılımlarının bu süreçte önemli bir rol oynadığını göstermektedir. Dolayısıyla öğretmenlerin, öğrencilerin seviyelerini doğru bir şekilde belirleyip, derslerde öğrencilerin seviyelerine uygun öğretim yöntemleri kullanmalarının öğrencilerin geometrik düşünme ve anlama süreçlerini olumlu yönde etkileyeceği düşünülmektedir. Fakat bütün bunlara rağmen geometrik muhakemede sadece seviye belirlemek yeterli olmayacaktır. Van Hiele geometrik düşünme teorisi geometrik muhakeme gelişimini genel seviyelerde tanımlarken, Duval'ın bilişsel muhakeme modeli, geometrik düşünmenin farklı temsil türleri ve bu temsil türleri arasındaki dönüşümlerine odaklanır. Duval'ın bilişsel modeli bu düşünmenin bilişsel süreçlerini ve temsil türleri arasındaki dönüşümleri daha ayrıntılı bir şekilde ele alır. Bu nedenle, Duval'ın bilişsel muhakeme modeli, geometrik kavramların derinlemesine anlaşılması ve farklı temsil türleri arasındaki bağlantıların kurulmasında daha kapsamlı bir çerçeve sunmaktadır.

Bilişsel Yaklaşımla Geometrik Muhakeme Çeşitleri

Geometrik muhakemeyi gelişimsel yaklaşımla ele alan Van Hiele geometrik düşünme teorisinin yanında bilişsel yaklaşım ile ele alan iki farklı teori ve model bulunmaktadır. Bu teoriler Fischbein'in Şekilsel Kavram Teorisi (1993) ve Duval'ın Bilişsel Muhakeme Modeli'dir (1998, 2000).

Fischbein'in Şekilsel Kavram Teorisi

Fischbein (1993), geometrik muhakemeyi geometrik şekiller üzerinden kavram ve şekil bilgisi etkileşimi ile açıklamış ve teorisine 'Şekilsel Kavram Teorisi' adını vermiştir. Teori bilişsel çerçevede açıklandığı için zihinsel aktiviteleri açıklamaktadır. Bu nedenle Fischbein (1993), kavram tanımını nesnelerin ve olayların ortak özellikleri şeklinde açıklarken, imge tanımını herhangi bir kavramın zihnimizde oluşturduğu uzamsal özellikler taşıyan hali olarak açıklamıştır. Tanımdan da anlaşıldığı gibi kavram soyut ve genel iken; imge, soyut yapının somut halini ifade etmektedir (Güven & Karpuz, 2016). Bu teoriye göre geometrik muhakemede şekil ve kavram etkileşiminde kavramın şekli yönettiği durumlar üst düzey muhakeme olarak adlandırılmaktadır (Fischbein, 1993). Tam tersi durumda yani şeklin kavramı yönettiği durumlarda sonucun genellenebilirliğini sağlayan tümdengelimli yapı eksik kalmakta ve bu eksiklikten kaynaklı yanlış çıkarımlar yapıldığı düşünülmektedir (Fischbein, 1993). Fischbein ve Nachlieli (1998), bu sebepten ötürü öğrencilerin yanlış çıkarımlar gerçekleştirmemesi için öğrencilere doğru örneklerin farklı öğretim ortamlarında sunulmasının önemine vurgu yapmaktadırlar.

Fischbein'in teorisi, sezgisel düşünmenin ve görselleştirmenin geometrik kavramların anlaşılmasında kritik rol oynadığını vurgular. Fischbein, geometrik muhakemede görselleştirme ile matematiksel düşüncenin nasıl bütünleştiğini inceler. Fischbein'in teorisi, görselleştirmeye dayalı şekilsel bilginin formal matematiksel bilgi ile bütünleşmesine odaklanır. Ancak, Duval'ın bilişsel muhakeme modeline göre eksik kaldığı yönler, özellikle temsil türleri arasındaki dönüşümler, bilişsel süreçlerin detaylandırılması, kavramsal anlayışın derinliği ve matematiksel araçların bu süreçlerdeki rolüdür. Duval'ın bilişsel muhakeme modeli, geometrik düşünmenin daha geniş ve derin bir perspektifini sunar ve öğrencilerin farklı temsil türleri arasında geçiş yapabilme yeteneklerine daha fazla önem vermektedir.

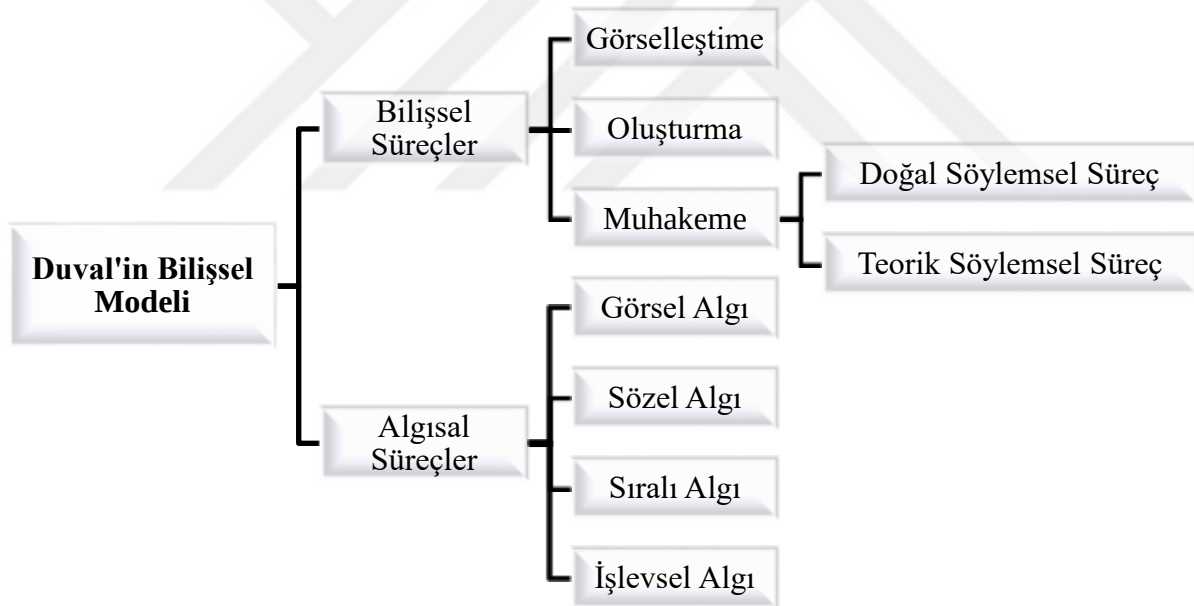
Mutluoğlu ve Erdoğan (2020), 6. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki geometrik muhakeme süreçlerini Fischbein'in şekilsel kavram teorisi çerçevesinde incelemek amacıyla bir çalışma yürütmüştür. Bu çalışma sonucunda, düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin geometrik muhakemelerinde genellikle prototip şekil etkisi altında kaldıkları, orta ve yüksek

başarı düzeyine sahip öğrencilerin ise geometrik muhakemelerini çoğunlukla kavram kontrolünde gerçekleştirdiklerini belirtmiştir.

Akdemir (2022), geometrik muhakemeyi bilişsel teoriler ışığında inceleyerek ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin çokgenler konusundaki zihinsel akıl yürütme süreçlerini detaylı olarak analiz etmiştir. Araştırma sonucunda, öğrencilerin üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen gibi çokgenlerle ilgili kavramlarda önemli yanlış anlamalara sahip olduğuna ulaşmıştır. Öğrencilerin çokgenlerin tanım ve çizimlerinde, kişisel prototip imgelerinden büyük ölçüde etkilendiklerini belirlemiştir. Ek olarak, öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerinde şekil bilgisinin kavramsal bilginin önüne geçtiği ve şekilsiz geometri sorularında doğru şekilleri oluşturmada zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir.

Duval'in Bilişsel Modeli

Bilişsel yaklaşımdan bir diğeri ise Duval'in bilişsel modelidir (Duval, 1998). Bu modelde geometrik muhakeme belirli bilişsel ve algısal süreçler üzerinden ele alınmıştır (Jones, 1998).



Şekil 1 Duval'e (1998) göre bilişsel geometrik muhakeme süreci

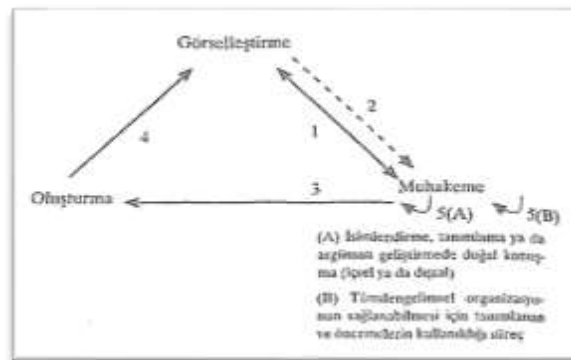
Duval (1998), geometrik muhakemeyi sahip olunan bilgide yaşanan değişim olarak tanımlamakta ve bilişsel ve algısal süreçleri bir arada yorumlamaktadır. Geometrik muhakemenin bilişsel süreçlerini oluşturma, görselleştirme ve muhakeme olmak üzere üç temel bilişsel süreç ile açıklarken algısal süreçleri için görsel algı, sözel algı, sıralı algı ve işlevsel algı şeklinde dört farklı süreç ile açıklamaktadır. Duval'e (1998) göre bilişsel süreçler şu şekilde açıklanmaktadır:

1) Oluşturma süreci; geometrik bir şeklin pergel, çizgeç ve dinamik geometri yazılımları gibi araçlar kullanılarak oluşturulma sürecidir. Geometrik şekillerin oluşturulması şekillerin temel özellikleri üzerinde ilişkilendirme, akıl yürütülme ve çıkarım yapma süreçleri ile birlikte gerçekleşir.

2) Görselleştirme süreci; bir geometrik kavramın/şeklin/nesnenin görsel olarak kabaca temsil edilmesi, olağan durumun açıklanması ve karmaşık geometrik bir durumun sezgi ya da deney yoluyla keşfedilmesini ifade etmektedir.

3) Muhakeme süreci; bilginin açıklanması ve mevcut bilgide bir değişimin ve genişlemenin meydana gelmesi olarak tanımlanmaktadır. Muhakeme süreci, doğal ve teorik olmak üzere iki kategoride incelemektedir. Doğal muhakeme, bilginin doğal dil kullanılarak şekil üzerinden yürütülerek yapıldığı muhakeme sürecidir. Bu muhakeme türünde önemli olan bilgiyi matematiksel ilkelerle desteklemeye ihtiyaç duymadan şekil özelliklerinden çıkarılan sonuçların doğal dille açıklanmasıdır. Bir diğer muhakeme türü olan teorik muhakeme ise bilginin sembolik gösterimi yardımı ile tümdengelimsel ilişki kurma süreci olarak tanımlanmaktadır. Bu muhakemede ulaşılan sonuçlar matematiksel tanım, aksiyom ve teoremlerle açıklanmaktadır.

Birbirinden bağımsız gibi görünen bu bilişsel süreçler birbirini etkilemektedir. Duval (1998), bilişsel süreçlerin birbirini etkilemesini aşağıda gösterilen Şekil 2'deki gibi ifade etmiştir. Şekil 2'deki bu gösterimi açıklamak gerekirse 5(A) doğal muhakemeyi; 5(B) Teorik muhakemeyi; 1, 3 ve 4 numaralı oklar belirtilen yönden okun ucuna doğru bir muhakeme süreci gerçekleştiğini ifade ederken, 2 numaralı okun kesikli şekilde gösterilmesi görselleştirmenin her zaman muhakemeye yardım etmeyeceğini ifade etmektedir. Ayrıca 3 ve 4 numaralı okların tek yönlü olması geometrik şekil oluşturulurken görselleştirildiğinden oluşturma sürecinden muhakemeye doğrudan bir geçiş olmadığını göstermektedir. Duval'e (1998) göre bu üç bilişsel süreç birbirinden bağımsız düşünülmekte, fakat bağımsız olmalarına rağmen birbirleriyle yakından ilişkili kabul edilmektedir.



Şekil 2 Duval'e (1998) göre bilişsel süreçler arasındaki etkileşim (Güven & Karpuz, 2016)

Duval (1995), geometrik muhakemeyi bilişsel süreçlerle birlikte yorumlayarak ‘şekle bakma süreci’ olarak da isimlendirdiği dört farklı algısal süreci aşağıdaki gibi açıklamaktadır:

1. Görsel algı: Bir şekle ilk baktığımızda elde ettiğimiz bilgileri ifade etmektedir. Görsel algı ile şeklin bütününe oluşturan parçalar arasındaki ilişkiler fark edilememektedir.

2. Sözel algı: Şekil ile ilgili verilen bilgiler yardımı ile ilişki kurup çıkarım yapabilmek olarak tanımlanmaktadır. Duval’e (1998) göre şekil ile ilgili çıkarımlar sözel algı ile başlamalı ve sözel algı muhakeme sürecine hâkim olmalıdır.

3. Sıralı algı: Geometrik bir şeklin bir araç yardımı ile oluşturulması ya da oluşturulma sürecinin açıklanması olarak ifade edilmektedir. Bir şeklin farklı araçlarla oluşturulması sıralı algıda önemli bir yer tutmaktadır (Karpuz, 2018).

4. İşlevsel algı: Geometri problemlerini çözerken, şeklin ilk görüntüsü üzerine yapılan değişiklikler (yardımcı doğrular çizmek, bir nesneyi silmek veya eklemek, şeklin konumunu değiştirmek vb.) veya şeklin bazı parçalarını diğerlerine göre daha fazla düşünmek olarak tanımlanmaktadır.

Bu algısal süreçlerin her biri geometrik şekillerdeki matematiksel bilginin fark edilmesine yardımcı işlevleri yerine getirmektedir (Duval, 1995, 1998, 1999). Bu nedenle ayrı ayrı sınıflandırılmasına rağmen birbirleri arasındaki etkileşimin gücü geometrik muhakeme için önem arz etmektedir. Bu sebeple matematik öğretimi sırasında algı türlerinden her birine ayrı ayrı önem verilmelidir (Michael vd., 2011).

Genel olarak bakıldığında Fischbein (1993), geometrik muhakeme için Şekil-Kavram ikilisini kullanırken, Duval (1995, 1998, 1999, 2000) ise Algı-Şekil-Kavram üçlüsünü kullanmıştır. Bu sebeple Duval’ın bilişsel modelinin Fischbein’in teorisini de kapsayan daha geniş bir model olduğu ifade edilebilir (Karpuz, 2018).

Geometrik muhakemeyi sınıflandıran gelişimsel ve bilişsel teorileri ve modelleri karşılaştırmak gerekirse, geometrik muhakemede Van Hiele modelinde şekilsel ve kavramsal süreçte gelişimsel bir ilişki olduğu; Fischbein teorisi ve Duval’ın bilişsel modelinde ise şekilsel ve kavramsal süreçte gelişimsel bir ilişki olmadığı ve sürecin kendi içinde etkileşimli kategorilerden oluştuğu söylenebilir.

Van Hiele Geometrik Düşünme Teorisi ve Fischbein’in Şekilsel Kavram Teorisi’nin Duval’ın modeline göre bazı eksiklikleri vardır. Van Hiele geometrik düşünme teorisi, geometrik düşünmenin farklı temsillerini (figüratif, sözel, sembolik) ve bu temsiller arasındaki geçişleri yeterince ele almaz. Fischbein, sezgilerin matematiksel düşünmedeki rolünü vurgular ve sezgileri doğal, rasyonel ve psikomotor olarak sınıflandırır. Ayrıca, algısal ve kavramsal sezgiler arasında ayrım yapar. Ancak, Fischbein’in teorisi, geometrik düşünmenin farklı temsil

modlarına (figüratif, sözel, sembolik) ve bu temsiller arasındaki geçişlere odaklanmaz. Duval bu temsillerin ve dönüşümlerin geometrik düşünmede kritik rol oynadığını (Fishcbein, 1987) ve bu temsillerin geometrik düşünme ve problem çözmedeki önemini vurgular (Clements & Battista, 1992).

Van Hiele teorisi temelde geometrik düşünmenin nasıl geliştiğini açıklamaktadır. Van Hiele teorisi, öğrencilerin belirli bir düşünme stiline sahip olduğunu ve öğrencilerin geometrik düşünme seviyelerini belirgin bir şekilde tanımlayarak ve açıklamaktadır. Fischbein'in teorisi ise, matematiksel düşünme ve kavrayış süreçlerini inceleyen önemli bir yaklaşımdır. Teori, özellikle öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl anladığını ve bu kavramlarla nasıl etkileşime girdiğini anlamaya odaklanmaktadır.

Van Hiele teorisi, sezgisel ve algısal faktörlerin geometrik düşünmedeki rolünü yeterince vurgulamaz. Bu konular Fischbein'in teorisinde ele alınırken, Duval, temsillerin algısal ve sezgisel temellerini de dikkate alır (Battista, 2007). Fischbein'in teorisi, eğitim uygulamalarında sezgilerin nasıl geliştirileceğine dair genel öneriler sunsa da Duval'ın bilişsel modeli, temsiller arası geçişlerin nasıl öğretileceği ve öğrencilerin bilişsel süreçlerinin nasıl destekleneceği konusunda daha spesifik rehberlik sağlar (Duval, 1999).

Duval'ın bilişsel modeline göre bilişsel gelişimin derin süreci hakkında çok fazla araştırma ve görselleştirme yapmak muhakeme sürecini öğrenmede gereklidir (Jones, 1998). Bu bilişsel sürecin ortaya konmasında Duval'ın (1999) başka bir teorisi çoklu temsiller de önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü Duval (1999), çoklu temsiller teorisine göre temsil kavramını matematiksel gerçeklerin zihinde işlenebilmesi ve başka kişilere aktarımını sağlamak için ihtiyaç duyulan araçlar olarak tanımlamıştır. Matematikte ve onun alt dalı olan geometride bilginin anlamlı düzenlenmesinde temsil kavramı önemli bir yer tutmaktadır. Bilgi zihinde anlamlı düzenlenirken ilişki kurma, soyut düşünme ve genellemeler gibi yeterliliklerin gelişimi için farklı temsillerden yararlanma önerilmektedir (Delice & Sevimli, 2016). Bu araştırmada uygulanacak etkinliklerde de farklı araç gereçlerden yararlanılarak muhakeme süreci derinlemesine incelenmek istenmektedir. Bu nedenle bu araştırmanın kuramsal çerçevesi, özel yetenekli ortaokul öğrencilerin geometrik muhakemeyi nasıl gerçekleştirdikleri veya başka bir deyişle bilgiyi zihinde nasıl anlamlandırdıklarını ortaya koyabilmek için geometrik muhakeme sürecini bilişsel yaklaşımla ele alan Duval'ın bilişsel modelidir (1995, 1998, 1999, 2000).

2.2. İlgili Çalışmalar

Geometrik muhakeme ile ilgili araştırmalar incelendiğinde bu araştırmaların bazılarının matematik öğretmen adayları ile (Karakuş, 2014; Gürhan & Tapan Broutin, 2017; Köse vd.,

2012; Ulusoy, 2019), bazılarının lise öğrencileri ile (Karpuz, 2018; Karpuz & Atasoy; 2019; Karpuz & Güven, 2022), bazılarının da ortaokul öğrencileri ile (Alphayta, 2022; Chen vd., 2021; Kaleli Yılmaz & Yüksel, 2019; Kaya vd., 2023; Kızıltoprak, 2020; Michael Chrysanthou vd., 2024; Şengün & Kabaca, 2016) yürütüldüğü görülmektedir.

Matematik öğretmen adayları ile yürütülen çalışmalardan bazıları örnek olarak incelenmiştir. Örneğin, Köse ve diğerlerinin (2012) matematik öğretmen adaylarının geometrik inşa problemlerinin çözümünde inşa araçlarını (hesap makinesi ve geometrik çizim araçları) nasıl kullandıklarına ve inşa sürecinde geometrik ilişkilere yönelik nasıl muhakeme yaptıklarına odaklanmıştır. Bu çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının geometrik inşa problemlerinin çözümünde muhakeme becerilerinde gelişime görüldüğü ve bu gelişimde teknoloji ile desteklenmiş geometri öğretim sürecinin, kâğıt kalem ortamında gerçekleştirilen geometrik inşa üzerinde olumlu etki bıraktığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin ve öğretmenlerin geometrik muhakemelerini geliştirmek için öğretim ortamlarında geometrik inşa problemlerinde hem dinamik geometri yazılımlarını hem de klasik geometrik araçları kullanmaları önerilmiştir. Gürhan ve Tapan Broutin (2017), matematik öğretmen adaylarının bir matematiksel problem durumu karşısında hangi kavrama türlerini ne şekilde kullandıklarını inceledikleri çalışmalarının sonucuna göre öğrenciler verilen matematiksel bir durumu anlamada farklı algı türlerini kullanmaktadır. Araştırma sonucunda öğrencilerin Duval'ın algı türlerinden görsel, sözel ve işlevsel algıyı kullandıkları, fakat sıralı algıyı hiç kullanmadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Karakuş (2014), ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan 63 öğretmen adayının geometrik inşa etkinliklerine yönelik görüşlerini inceledikleri çalışmasında geometrik inşa etkinliklerinin eğitimde daha fazla vurgulanması gerektiğini ve öğretmen adaylarının inşa etkinliklerinde aktif rol alması için inşa eğitiminin desteklenmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Ulusoy (2019), ilköğretim matematik öğretmen adaylarının pergel ve ölçüsüz cetvel yardımı ile paralel doğrular inşasını nasıl yaptıklarını ve bu inşa sürecindeki gerekçeleri incelemiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının paralellik inşalarında dik doğrular, aç kopyalama, eşkenar üçgen ve eşkenar dörtgen şeklinde dört farklı yöntem kullandığını, ancak çoğunun hatalı varsayımlar nedeniyle yanlış sonuçlara ulaştığını ortaya koymuştur. GeoGebra destekli tartışmalar sayesinde adaylar, alternatif inşa yöntemlerini, sağlam gerekçeler sunmanın önemini, hatalı varsayımların inşalardaki etkilerini ve dinamik geometri yazılımları ile klasik yöntemlerin farklı rollerini fark etmişlerdir (Ulusoy, 2019).

Lise öğrencileri ile yürütülen çalışmalardan bazıları örnek olarak incelenmiştir. Örneğin, Karpuz (2018), Duval'ın bilişsel modelini temel alarak tasarlanan öğrenme ortamının,

dokuzuncu sınıf öğrencilerinin teorik muhakeme ve şekil inceleme süreçlerinin gelişimine etkisini deneysel bir araştırma ile incelemiştir. Bir sınıfta geleneksel öğrenme yöntemleri kullanılırken, diğer sınıfta bilişsel modele uygun bir öğrenme ortamı oluşturulmuştur. Sonuçlar, bilişsel modele dayalı öğrenme ortamının öğrencilerin teorik muhakeme süreçlerini olumlu yönde geliştirdiğini, ancak algısal süreçler açısından sınıflar arasında bir fark olmadığını göstermiştir (Karpuz, 2018). Bu durum, teorik muhakemenin algısal süreçlerin gelişimini engellediğini ve bu iki sürecin aynı anda geliştirilmemesi gerektiği sonucunu ortaya koymuştur. Karpuz ve Güven (2022) dokuzuncu sınıf öğrencilerinin Duval'ın Bilişsel Modeli perspektifinden teorik muhakeme sürecine doğrudan katılmaya istekli olup olmadıklarını incelemiştir. Çalışmada elde edilen bulgular, öğrencilerin çoğunun bu süreç için gerekli davranışları sergileyemediğini ve söylemsel bilgiyi algısal bilgiye dönüştürmede, yazmada ve çıkarım yapmada başarısız olduğunu göstermektedir. Sonuçlar ortaokulu bitiren bu öğrencilerin teorik muhakeme gerektiren kanıt gösterme gibi üst düzey becerilerde zorlandığını göstermektedir. Karpuz ve Atasoy (2019) dokuzuncu sınıf öğrencilerinin geometrik şekil algılarını incelemek amacıyla yürüttüğü çalışmalarında 51 öğrencinin yarısından fazlasının söylemsel ve işlevsel algılarının lise geometrisi için yeterli düzeyde olmadığını ve çoğu öğrencinin geometrik şekiller içinde yer alan çeşitli alt figürleri tanımda başarısız olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Ortaokul öğrencileri ile yürütülen çalışmalardan bazıları örnek olarak incelenmiştir. Örneğin, Kızıltoprak (2020), ortaokul yedinci sınıf öğrencilerinin dörtgenlerle ilgili geometrik muhakeme becerilerini geliştirmeyi amaçlayan çalışmasında Duval'ın bilişsel muhakeme modeline göre hazırlanmış problemler kullanmış ve öğrencilerin bu problemlere yönelik muhakemelerinin söylemsel muhakemeye yaklaştığını tespit etmişlerdir Alphayta'nın (2022) sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik muhakeme becerileri ile geometrik muhakeme öz-yeterlik algıları arasındaki ilişkiyi incelenmek amacıyla yürüttüğü araştırmasının sonucuna göre, öğrencilerin geometrik muhakeme öz-yeterlik algılarının güçlü, muhakeme beceri düzeylerinin düşük düzeyde olduğu; ayrıca geometrik muhakeme becerileri ile öz-yeterlik algıları arasında anlamlı ve orta düzeyde bir ilişki olduğu görülmüştür. Chrysanthou ve diğerlerinin (2024) ortaokul öğrencilerinin geometrik şekil kavramalarını Duval'ın algısal, işlevsel ve söylemsel ile ilgili bilişsel muhakeme modeline göre incelediği çalışmasında öğrencilerin algısal beceriler içeren görevleri çözmeyi daha kolay buldukları görülmüştür. Şengün ve Kabaca (2016), yedinci sınıf öğrencilerinin dinamik geometri ortamında üçgen inşa süreci üzerinde akıl yürütme süreçlerini inceledikleri çalışmalarında kâğıt-kalem ortamında akıl yürütme, muhakeme ve test etme gibi zihinsel beceri süreçleri gerçekleştiremediklerini, ancak

GeoGebra ortamında üçgen inşa sürecini diledikleri gibi test eden öğrencilerin dinamik ortamda aldıkları geri bildirim sayesinde akıl yürütme sürecini tamamladıklarını ortaya koymuştur. Doğan ve İçel (2010) GeoGebra'nın sekizinci sınıf öğrencilerinin üçgenler konusundaki başarılarına olan etkilerini, deney ve kontrol grupları üzerinden inceledikleri çalışmalarında GeoGebra'nın öğrencilerin öğrenme süreçlerine ve başarılarına olumlu etkileri olduğunu göstermektedir. Kaleli Yılmaz ve Yüksel (2019), yedinci sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerini artırmak için farklı öğrenme ortamlarının tasarlayarak tasarlanan ortamları değerlendirmek amacıyla yürüttüğü çalışmalarında bilgisayar destekli, somut materyallerle destekli ve geleneksel öğretim uygulanan grubun geometrik düşünme düzeylerinin nasıl etkilendiğini incelemişlerdir. Sonuçta tüm gruplarda öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinde belirgin bir artış gözlenmiştir; ancak, en fazla artışın, dinamik matematik ve geometri yazılımı GeoGebra kullanılarak bilgisayar destekli öğrenme ortamında eğitim alan öğrencilerde olduğuna ulaşılmıştır. Deliyianni ve diğerleri (2010), 1086 ortaokul öğrencisinin Duval'in kavrama türleri olan algısal, söylemsel ve işlevsel kavramanın, öğrencilerin, geometrik şekilleri algılamadaki rolünü incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin geometrik şekilleri algılama ve tanıma yetenekleri, alan ve çevre ölçümü becerileri ve söylemsel kavrama yetenekleri test edilmiştir. Sonuç olarak 7. ve 8 sınıf öğrencilerinin performanslarının 5. ve 6. Sınıf seviyesindeki öğrencilerin performansına göre yüksek olduğunu ve bu farklılıkların bilişsel gelişim ile ilişkilendirilebileceğine ulaşılmıştır. Gagatsis ve diğerleri (2010) ilkökul ve ortaokul öğrencilerinin geometrik şekilleri yorumlama süreçlerini iki aşamalı araştırma gerçekleştirerek ulaştığı sonuçlar ile yorumlama süreçlerini özetlemeyi amaçlamışlardır. İlk olarak ilkökul ve ortaokul öğrencilerinin geometrik şekilleri yorumlamalarını algısal, işlevsel ve sıralı algı düzeyinde incelemiştir. Sonuç olarak da geometrik şekil anlayışının bu üç düzeyde farklılaştığını ve her bir düzeyin öğrenci öğreniminde önemli bir rol oynadığını ortaya koyduğuna ulaşmıştır. İkinci aşamada geometrik şekillerin işlevsel olarak anlaşılmasını etkileyen faktörleri incelemeyi amaçlamışlardır. Sonuç olarak geometrik şekillerin işlevsel kavranmasında çeşitli değişkenlerin rolünün olduğuna ulaşmışlardır. Genel olarak bu iki aşama sonunda gelecekteki araştırmalar için bir yol haritası ortaya konmuştur.

Son olarak sekizinci sınıf ders kitabında yer alan geometri ve ölçme alanında çözümlü örnekler ve 2018, 2019, 2020 ve 2021 yıllarındaki Liseye Geçiş Sistemi (LGS) sınavlarındaki matematik testlerinde bulunan geometri soruları Duval'in (1995) kavrayış türleri açısından Kaya ve diğerlerinin (2023) çalışmasında incelenmiş ve yine Duval'in (1995) algısal süreçleri göz önünde bulundurularak sorular analiz edilmiştir. Bu analize göre üçgenler konusunda kullanılan algısal süreçlerin kullanım sıklığı çoktan aza doğru sırasıyla söylemsel, sıralı,

işlevsel ve görsel algı şeklindedir. Ayrıca, matematik ders kitabında geometri ve ölçme alanını kapsayan tüm çözümlü örneklerde algısal süreçlerin kullanım sıklığı çoktan aza doğru söylemsel, sıralı, işlevsel ve görsel algı şeklinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Üçgenler ve dönüşüm geometrisi konusundaki çözümlü örneklerde görsel algıya yer verilmediği tespit edilmiştir.



BÖLÜM 3

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yöntemi, araştırmanın katılımcıları (çalışma grubu), veri toplama araçları, veri toplama süreci ve veri analizi hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Yöntemi

Bu çalışma özel yetenekli ortaokul öğrencilerinin ortaokul matematik öğretim programının geometri ve ölçme alanında yer alan üçgenler konusuna yönelik geometrik muhakeme becerilerinin incelendiği nitel bir araştırmadır. Creswell (2020), durum çalışmasını bir durumun, etkinliğin veya sürecin kendi sınırları içinde kapsamlı veri toplamaya dayalı olarak derinlemesine araştırılması olarak ifade ederken Patton (2014) durum çalışmasını bir grubu veya olayı, birbirine bağlı diğer sistemleri derinlemesine inceleme ve analiz etme şeklinde tanımlamıştır. Bu tanımlara göre, araştırmanın yöntemi çalışmanın amaçlarına en uygun yöntem olarak durum çalışması şeklinde belirlenmiştir. Bu araştırmada öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerinin çoklu veri kaynakları aracılığıyla (görüşmeler, gözlemler, veri toplama dokümanları, görsel-işitsel veri) derinlemesine incelenmesi ve belirlenen araştırma sorusuna cevap verilmesi amaçlandığı için nitel yöntem ve durum çalışması deseni benimsenmiştir. Araştırmanın nasıl yapılandırıldığı Tablo 1’de gösterilmiştir.

Tablo 1 *Araştırmanın yapılandırılması süreci*

TASARIM AŞAMASI		Geometrik muhakeme teorilerinin incelenmesi Duval’ın geometrik muhakeme modelinin incelenmesi Duval’ın geometrik muhakeme sürecinin göstergelerinin incelenmesi Belirlenen ilke ve göstergelere göre etkinliklerin ve soruların hazırlanması
UYGULAMA AŞAMASI	PİLOT	Hazırlanan etkinliklerin belirlenen öğrencilere uygulanması Veri toplama aracının test edilmesi Etkinliklere ve veri toplama aracına son şeklinin verilmesi Araştırmacının deneyim kazanması
	ASIL	Öğrencilere GeoGebra ve pergel cetvel kullanıma yönelik eğitim verilmesi Son şekli verilen etkinliklerin öğrencilere uygulanması Öğrenciler ile birebir görüşmeler yapılarak veri toplanması

VERİ	Etkinliklerden elde edilen verinin analize hazırlanması
ANALİZİ VE	Görüşmeden elde edilen verinin analize hazırlanması
RAPORLAMA	Araştırmacının alan notlarının analize hazırlanması
AŞAMASI	Veri analizi sonucu elde edilen bulguların raporlanması

Ortaokul öğrencilerinin üçgenler konusunda geometrik muhakeme sürecinin nasıl olduğunu amaçlayan bu çoklu durum çalışmasında, her katılımcı bir durum olarak seçilmiştir ve dolayısıyla analiz birimi öğrencidir.

3.2. Araştırmanın Çalışma Grubu

Araştırmanın katılımcıları, araştırmacının matematik öğretmeni olarak görev yaptığı Bİlsem’de 2023-2024 eğitim öğretim döneminde genel-zihinsel yetenek alanında öğrenim gören ortaokul öğrencilerinden oluşmaktadır. Araştırma Mersin İl Milli Eğitim Müdürlüğü’nden gerekli araştırma izinleri alınarak yürütülmüştür. Bu araştırma katılımcıları yakından tanımak ve onlarla sağlıklı iletişim kurmayı gerektirdiğinden araştırmacının matematik öğretmeni olarak görev yaptığı kurumda gerçekleştirilmiştir. Katılımcı öğrenciler ve velileri veri toplama aşamasından önce bilgilendirilerek çalışmaya katılım için gönüllülük şartı aranmıştır. Gönüllü olan öğrencilerin velilerine bu araştırma için veli onam formu sunulmuş ve onayları alınmıştır. Bu formda veri toplama sürecinde araştırmacı ve katılımcı arasında geçen diyaloglar için ses ve görüntü kaydı alınacağı ve toplanan verilerin bu çalışma haricinde kullanılmayacağı da belirtilmiştir. Katılımcılar için uygun zaman belirlenerek ve uygun bir ortam hazırlanarak etkinlikler sırasıyla gerçekleştirilmiştir.

Araştırmacı, son üç yıldır BİLSEM’de olmak üzere on yıldır matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. BİLSEM matematik öğretim programının içeriğinde yer alan geometrik inşa kavramı ve geometrik muhakeme konularında kendini geliştirmek amacıyla bu kavramların öğretimi ile ilgili online eğitimler ve TÜBİTAK’ın geometri ile ilgili öğretmen eğitimi projelerinde katılımcı olarak görev almıştır. Derslerini yürütürken geometrik inşanın temel etkinliklerinden yararlanmakta ve derslerinde GeoGebra programını aktif olarak kullanmaya önem vermektedir.

Katılımcılar amaçlı örnekleme metodu kullanılarak seçilmiştir. Amaçlı örnekleme araştırmanın amacına uygun görülen gruplarla özel durumlarda çalışabilmek için tercih edilir (Yıldırım & Şimşek, 2016). Bu araştırma için BİLSEM matematik dersine üç yıldır aktif devam eden 15 öğrenci içerisinde daha önce matematik alanında ulusal araştırma projesi yarışmalarına katılmış ve uzun sürecek bir bilimsel çalışma sürecini eksiksiz tamamlayabileceği düşünülen öğrenciler belirlenmiştir. Belirlenen katılımcılar, matematik

dersini seven, matematikteki akademik başarıları yüksek ve matematiğe özel ilgileri olduğu Bilsem yönergesinde yer alan kriterlere göre daha önceden tespit edilmiş, gönüllü dördü kız biri erkek toplam beş öğrenciden oluşmaktadır. Bu araştırmada katılımcıların gerçek isimleri gizli tutularak takma isimler verilmiştir. Kız öğrencilerden Deniz 8. sınıf, Özlem, Serap, Merve ve erkek öğrenci Kaan 7. sınıf öğrencisidir. Bütün katılımcıların kişisel bilgisayarı bulunmaktadır. Katılımcıların Bilsem öğretim programının teknoloji odaklı olması ve BİLSEM’de katıldıkları bilgisayar dersi nedeniyle günlük ortalama 2-3 saat bilgisayar kullandıkları bilinmektedir. Ayrıca katılımcılar Scratch, Mblock, Tinkercad ve GeoGebra gibi çeşitli bilgisayar programlarını kullanabilmektedir. Bu araştırmadaki öğrencilerin üç yıldır araştırmacının matematik derslerine birlikte katılıyor olmaları sebebiyle öğrencilerin üçgende iç açı, eşkenar üçgen ve ikizkenar üçgenin özelliklerini biliyor oldukları, üçgende açı-kenar ilişkisi ve üçgen eşitsizliği konularını sınıf seviyelerinden kaynaklı olarak daha önce öğrenmedikleri bilinmektedir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada temel olarak kullanılan dört farklı veri toplama aracı bulunmaktadır. Bu araçlardan üç tanesi bilişsel muhakemenin bilişsel boyutunu ortaya koymaya yönelik üç farklı etkinlik kâğıdı, dördüncüsü ise bilişsel muhakemenin algısal boyutunu ortaya koymaya yönelik geliştiren Algısal Süreç İnceleme Formu’dur (ASİF).

Bilişsel muhakeme ile ilgili alanyazın incelendikten sonra araştırmanın teorik çerçevesine ve yöntemine uygun olarak ilk olarak, öğrencilerin üçgenler konusundaki bilişsel muhakeme süreçlerini keşfetmek amacıyla etkinlik kâğıtları hazırlanmıştır. Hazırlanan etkinlik kâğıtları üçgenler konusu özelinde Duval’ın bilişsel muhakeme modelinin becerilerini ön plana çıkarmaya yönelik açık uçlu, uygulama ve keşfetme temelli sorulardan oluşmaktadır. Öğrencinin bilişsel sürecini incelemek üzere bu araştırmaya özgü tasarlanan etkinlikler ve etkinlik kâğıdı aracılığı ile yöneltilecek sorular belirlenmiştir. Belirlenen sorular düzenlenerek taslak haline getirilmiştir. Taslaktaki soruların araştırmanın amacına uygunluğu, anlaşılabilirliği ve tutarlılığının değerlendirilmesi için iki uzmanın görüşüne başvurulmuştur. Uzmanlardan biri matematik eğitimi alanında doktora bulunan ve geometri öğretimi üzerine yayınları olan bir öğretim üyesidir ve etkinliklerde yer alan soruların bilişsel muhakeme boyutu becerilerine uygunluğunu incelemiştir. Diğer uzman matematik öğretmenidir ve soruların anlaşılabilirliğine ve öğrencilerin seviyesine uygunluğunu denetlemiştir. Uzmanların önerileri dikkate alınarak sorular yeniden düzenlenmiştir. Etkinlik kâğıdı düzenlendikten sonra Bilsem’de öğrenim gören farklı bir yedinci sınıf öğrencisi ile pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Uzmanların görüşü ve

pilot uygulama sonunda elde edilen veriler ışığında veri toplama araçları son haline getirilmiştir. İkinci olarak ise araştırma ekibi tarafından tasarlanan Algısal Süreç İnceleme Formu (ASİF) yardımıyla, öğrencilerin üçgenlerle ilgili algısal muhakeme süreçleri değerlendirilmiştir. Araştırma ekibi tarafından geliştirilen üçgenler konusuna yönelik algısal muhakeme süreçlerini incelemek amacıyla hazırlanan ASİF’te yer alan sorular öğrencilerin üçgenlere yönelik algısal muhakeme süreçlerini incelemek amacı ile beş açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Soruların her biri algısal süreçlerden görsel algı, sözel algı, sıralı algı ve işlevsel algıyı ortaya koymak için bu bileşenler ve bu bileşenlerin etkileşimine uygun olarak belirlenmiştir. Bu sorular belirlenirken Duval (1995, 1998, 1999, 2000), Karpuz (2018), Kızıltoprak (2020) araştırmalarından yararlanılmıştır.

Veriler, etkinlik kâğıdı ve ASİF uygulaması sırasında her öğrenciyle klinik görüşmeler yapılarak toplanmıştır. Öğrencilerin etkinlik sırasında araştırmacı ile diyalogunun kayıt altına alınması için ortamın ses kaydı, bilgisayar ortamında yapılan etkinliklerin kayıt altına alınması için de ekran kaydı alınmıştır. Bu kayıt işlemlerinin hepsi için etkinlik sırasında kullanılacak OBS ekran ve video kayıt programının öğrencilerin bilgisayarlarına kurulumu önceden gerçekleştirilmiştir. Veri toplarken kullanılan araçlar Tablo 2’de özetlenmiştir.

Tablo 2 *Veri toplama araçları ve ilgili etkinlik*

Hafta	Etkinlik Konusu	Veri Toplama Araçları
1. Hafta	GeoGebra ve pergel, cetvel, çizgeç kullanımı	Etkinlik kâğıdı
2. Hafta	Üçgende açı (kâğıt katlama, GeoGebra)	Etkinlik kâğıdı, video kaydı, fotoğraf, ekran kaydı (GeoGebra için)
3. Hafta	Üçgende açı-kenar ilişkisi	Etkinlik kâğıdı, ekran kaydı (GeoGebra için), video kaydı, fotoğraf
4. Hafta	Üçgen eşitsizliği	Etkinlik kâğıdı, ekran kaydı (GeoGebra için), video kaydı, fotoğraf
5. Hafta	ASİF uygulaması	Etkinlik kâğıdı

Tablo 2’de özetlendiği gibi öğrencilerin üçgenler konusuna yönelik bilişsel süreçlerini incelemeye yönelik GeoGebra ve pergel-çizgeç kullanımına yönelik bir hazırlık etkinliği, üçgenler konusu özelinde üç etkinlik kâğıdı ve algısal süreç inceleme formu olmak üzere beş farklı etkinlik planlanmıştır. Üçgenler konusu ile ilgili etkinliklerin konusu şu şekildedir: Üçgende açı, üçgende açı-kenar ilişkisi, üçgen eşitsizliği. Tasarlanan etkinlikler etkinlik kâğıtları ile öğrencilere sunulmuştur.

3.3.1. Etkinliklere Hazırlık Süreci

İlk olarak öğrencilere temel etkinliklerimizde ihtiyaç duyulabilecek GeoGebra araç menüsü tanıtılarak veri toplama için sırasıyla şu görevler gerçekleştirilmiştir:

- GeoGebra araç menüsü tanıtımı yapıldı.
- Nokta, doğru ve doğru parçası araçları kullanılarak çokgen ve çemberler oluşturuldu.
- Bir doğruya paralel ve dik doğrular çizilip, iki doğru veya doğru parçasının kesişim noktaları belirlendi.
- Çokgen aracı ile çokgenler oluşturulup, bu çokgenlerin açıları ve kenar uzunlukları ölçüldü.
- Belirli uzunlukta doğru parçaları ve ölçülerde açılar çizildi, iki paralel doğru ve bir kesen doğru arasında kalan açılar oluşturuldu.
- Sürgü aracı tanıtılarak uzunluğu sürgülerle kontrol edilebilen doğru parçaları, açı ölçüsü sürgü ile kontrol edilebilen açılar ve yarıçap uzunluğu sürgü ile kontrol edilebilen çemberler öğrenciler tarafından çizildi.

GeoGebra hazırlık süreci tamamlandıktan sonra öğretmen desteği ile pergeli, cetveli ve çizgeci kullanarak diğer etkinliklere temel oluşturacak pergeli, cetveli ve çizgeci etkinlikleri gerçekleştirildi. Bu etkinliklerde öğrencilere pergeli kullanımı hakkında bilgi verildikten sonra, çember ve özellikleri hakkında bilgilendirme yapıldı. Pergeli kullanarak çember çizme etkinlikleri gerçekleştirildi. Ayrıca, bir doğru parçasına eş doğru parçası inşa etme, bir doğru parçasının orta noktasını bulma, bir doğru parçasına dışındaki bir noktadan ve üzerindeki bir noktadan dik çizme çalışmaları öğretmen yönlendirmeleri ile öğrenciler tarafından yapıldı. Bu temel hazırlık etkinlikleri öğrencilerle grup olarak gerçekleştirilirken asıl veri toplama sürecindeki etkinlikler bireysel olarak gerçekleştirilmiştir.

Aşağıdaki bölümde veri toplamada kullanılan üç etkinlik kâğıdı açıklanmıştır. Bu etkinliklerde fiziksel araç ve GeoGebra kullanımı gerektiren sorulara ve görevlere yer verilmiştir. Amaç, öğrencilere sunulan etkinlik soruları aracılığı ile öğrencilerin geometrik muhakeme sürecini farklı öğretim ortamlarında derinlemesine incelemektir.

3.3.2. Üçgende Açı Etkinliği

Genel olarak kapsadığı konu üçgende açı olan birinci etkinliğin (Ek 7) ilk sorusu etkinlik kâğıdına çizilmiş olarak verilen herhangi üç üçgenin iç açılarının ve dış açılarının yerini kâğıt üzerinde belirlemeye yöneliktir. Öğrencilerin iç ve dış açı kavramına hâkim olup olmadıkları ve bu kavramları nasıl görselleştirdikleri incelenmiştir. Bu etkinliğin ikinci sorusunda öğrenciden üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180 derece, dış açılarının ölçüleri

toplamının 360 derece olduğunu açıklayabilecek bir yöntem geliştirmesi ve geliştirdiği yöntemi kendi zihinsel şema bilgileriyle açıklaması beklenmiştir. Bunu yaparken kâğıt katlama, kesme, yapıştırma etkinliklerinden yararlanabilmesi adına ipucu verilmiştir. Öğrencilerin tamamen kendi bilişsel şemaları ile iç ve dış açıların ölçüleri toplamını açıklamaları beklenmiştir. Bu etkinliğin son sorusunda üçgenin iç açıları ölçülerinin 180 derece ve dış açılarının ölçüleri toplamının 360 derece olduğunu GeoGebra programından yararlanarak açıklaması istenmiştir. Bu muhakemeleri gerçekleştirirken öğrencilerin bilişsel süreçlerini daha iyi ortaya çıkarabilmek için araştırmacı ve öğrenciler arasında soru cevaplar ile diyaloglar gerçekleştirilmiştir. Bu etkinlikte öğrencinin üçgende açı konusu özelinde bilişsel muhakeme becerilerini kullanarak üçgende açı konusuna dair çıkarımda bulunması ve yaptığı çıkarımları genelleyebilmesi amaçlanmıştır.

3.3.3. Üçgende Açı-Kenar İlişkisi Etkinliği

Konusu üçgende açı-kenar ilişkisi olan ikinci etkinliğin (Ek 8) ilk sorusu GeoGebra programında öğrenci tarafından oluşturulan herhangi bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları ve ilgili kenarın karşısındaki açının ölçüsünü program aracılığıyla ölçerek etkinlik kâğıdı üzerine not alma ile ilgilidir. Öğrenciden ilk soruda aldığı nota göre belirlediği kenar uzunluğu ve bu kenarı gören açının ölçüsü arasında matematiksel ilişki olup olmadığını belirlemesi ve varsa bu ilişkiyi açıklaması beklenmektedir. Etkinliğin ikinci sorusunda etkinlik kâğıdı üzerinde görsel olarak birbirinden farklı dört üçgen verilmiştir. Öğrencinin birinci soruda yaptığı çıkarıma göre verilen üçgenler üzerindeki sembollerini dikkate alarak kenar-açı ilişkisi özelinde kurduğu ilişkileri açıklaması beklenmektedir. Bu etkinliğin son sorusunda renkli kâğıttan kesilmiş bir üçgen öğrenciye verilmiştir. Öğrenciden verilen üçgenin kenarlarını ikişerli olarak birbiri üzerine katlayarak kenar uzunlukları için karşılaştırmalı bir çıkarım yapması beklenmektedir. Yaptığı çıkarımları not alması ve matematiksel olarak açıklaması beklenmektedir. Bu etkinlik Duval'ın bilişsel muhakeme boyutuna göre öğrencilerin üçgende açı-kenar ilişkisi üzerine yaptığı görselleştirme, oluşturma ve muhakeme becerilerini nasıl kullandıklarını ortaya koymayı hedeflemiştir.

3.3.4. Üçgen Eşitsizliği Etkinliği

Kapsamı üçgen eşitsizliği konusu olan üçüncü etkinliğin (Ek 9) ilk sorusu ‘herhangi üç doğru parçası ile üçgen çizilebilir mi?’ şeklinde kısa cevaplı bir sorudur. Burada öğrencinin bu konuda öngörüsünün ne olduğunu ortaya koyması beklenmektedir. İkinci soruda öğrenciye farklı uzunluklarda geometri şeritleri verilmiş ve bu şeritleri kullanarak farklı üçgenler oluşturmaya çalışmasını, oluşturduğu ve oluşturamadığı üçgenler için şerit uzunluklarını

etkinlik kâğıdı üzerindeki tabloya not alması beklenmektedir. Daha sonra not aldığı uzunluklar arasında bir ilişki varsa bu ilişkiyi açıklaması istenmektedir. Üçüncü soruda öğrenciden kenar uzunluğu 3 cm, 4 cm ve 10 cm olan bir üçgeni pergeli ve cetveli kullanarak oluşturması istenmiş ve oluşturma sürecini açıklaması beklenmektedir. Etkinliğin dördüncü sorusunda öğrencinin üçüncü soruda pergeli cetveli ile yaptığı etkinliği sürgüler aracılığı ile GeoGebra’da yapması istenmiştir. Öğrenciden GeoGebra programında sadece sürgü, pergeli, cetveli araçlarını kullanarak kenar uzunlukları önce 3 cm, 4 cm ve 8 cm olan bir üçgen oluşturup oluşturamayacağını test etmesi istenmiştir. Daha sonra kenar uzunluklarına bağladığı sürgüleri hareket ettirerek üçgen oluşturan ve oluşturmayan uzunlukları etkinlik kâğıdına not alması beklenmektedir. Bu aşama tamamlandıktan sonra öğrencinin üçgen oluşturan ve oluşturmayan kenar uzunlukları hakkında yorum yapması ve yaptığı yoruma dayanarak bir çıkarım yapması beklenmektedir. Etkinliğin son sorusunda ise öğrencinin bir üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak açıklaması ve yaptığı açıklamalarda matematiksel semboller kullanması beklenmektedir. Bu etkinlikte öğrencinin üçgen eşitsizliği konusuna dair görselleştirme, oluşturma ve muhakeme boyutları becerilerini kullanarak konu ile ilgili çıkarımlar yapması ve üçgen eşitsizliği önermesini keşfetmesi hedeflenmektedir.

3.3.5. Algısal Süreç İnceleme Formu (ASİF)

Öğrencilerinin üçgenler konusuna yönelik algısal süreçlerini incelemeye yönelik beş açık uçlu sorudan oluşan ASİF (Ek 10’da görülebilir) hazırlanmıştır. Bu testin ilk sorusu öğrencinin görsel algı becerilerini taşıyıp taşımadığını ortaya koymayı hedefleyen bir üçgen sorusundan oluşmaktadır. Farklı üçgenlerin birleşimi ile oluşan büyük bir ABC üçgeni verilmiştir. Öğrenciden bu şekle baktığında şeklin özellikleri ile ilgili gördüklerini detaylı olarak açıklaması beklenmektedir. Testin ikinci sorusu sözel algı becerilerini ortaya koymak için sorulmuştur. Burada ikizkenar bir üçgenin özellikleri şekil üzerinde işaret ve sembollerle belirtilmiştir. Öğrencinin şekil üzerindeki işaret ve sembolleri doğru yorumlayarak şeklin özelliğini açıklaması beklenmektedir. Üçüncü soru ise işlevsel algı ile ilgilidir. Bu soruda öğrencinin 8x8 birimkarelik bir alan içine çizilebilecek en büyük alan ölçüsüne sahip farklı üçgenler çizilebileceğini fark etmesi beklenmektedir. Aynı alana sahip farklı üçgen çiziminin, eşit kenar uzunluğu ve aynı yüksekliğe sahip olması şeklinde açıklaması istenmektedir. Dördüncü soru hem görsel hem sözel algı etkileşimine yöneliktir. Öğrenciden, matematiksel sembol ve işaretlerle verilen bir üçgeni görsel olarak oluşturmaları istenmektedir. Etkinliğin son sorusu sıralı algı ile ilgilidir. Bu soruda pergeli ve çizgeç verilmiş ve öğrencinin bunları

kullanarak kâğıt üzerinde bir eşkenar üçgen oluşturması istenmiştir. Öğrenciden beklenen oluşturduğu eşkenar üçgeni nasıl oluşturduğunu adım adım sıralı şekilde açıklayabilmesidir.

Bu araştırmada öğrencilerin bilişsel ve algısal süreçlerinin nasıl olduğunu açıklamaya yönelik veriler, konu ile ilgili hazırlanan etkinlik kağıtları ve testlerden birebir görüşme sürecindeki konuşmalardan ve fiziksel araç kullanım sürecinden (pergel, çizgeç, cetvel, GeoGebra, geometri şeritleri, kâğıt katlama) elde edilmiştir. Bu etkinlikte üçgenlerle ilgili algısal süreç becerilerine göre hazırlanmış sorular yardımıyla, öğrencinin algısal süreç becerilerini nasıl kullandığının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.

3.4. Veri Toplama Süreci

Bu araştırmada elde edilen veri Akdeniz bölgesinde yer alan bir ilde bulunan özel yetenekli öğrencilerin eğitim aldığı bir bilim ve sanat merkezinin matematik sınıfında toplanmıştır. Öğrencilerin bilişsel muhakeme sürecinin birbirinden etkilenmemesi için veriler, klinik görüşmeler ile bireysel olarak toplanmıştır. Matematik eğitimi literatüründe klinik görüşme, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini ve anlama seviyelerini derinlemesine incelemek amacıyla yapılan yapılandırılmamış veya yarı yapılandırılmış görüşme türü olarak tanımlanır (Hunting, 1997). Klinik görüşmeler, öğrencinin matematiksel kavramları nasıl anladığını ve uyguladığını ortaya koymayı amaçlar. Bu tür görüşmelerde, araştırmacı öğrencinin düşüncelerini ve problem çözme süreçlerini anlamak için sorular sorar ve öğrencinin yanıtlarını detaylı olarak araştırır. (Ginsburg, 1997). Bu yöntem, öğrencinin düşüncelerini anlamak ve öğrenme sürecini iyileştirmek için zengin veriler sağlar. Veri toplanan ortam ve bazı katılımcılar Şekil 3’te verilmiştir.



Şekil 3 Veri toplama ortamı

Öğrencilerin etkinlik sırasında kullandığı ortak bilgisayara veri toplarken veri kaybı olmaması adına önceden yüklenen OBS programı (ses ve video kayıt programı) ile hem etkinlik kâğıtları cevaplandırılırken araştırmacı ve öğrenci arasındaki konuşmalar kayıt altına alınmış

hem de GeoGebra’da gerçekleştirilen etkinlikler sırasında ekran kaydı alınmasını sağlamıştır. Her etkinlik kâğıdı tamamlanana kadar program açık bırakılmıştır. Veri toplama sürecinin adımları Tablo 3’te verilmiştir.

Tablo 3 *Veri toplama sürecinin adımları*

Süreçler	Hafta/Süre	Uygulama	İçerik ve Amaç
Hazırlık Süreci	1. Hafta (2 ders saati)	GeoGebra ve pergel, cetvel, kullanım eğitimi	GeoGebra araç menüsünü tanıtmak ve temel geometrik inşa çalışmaları yapmak
	2. Hafta (2 ders saati)	1. Etkinlik: Üçgende açı	Bir üçgenin iç açılarının 180 derece olduğunu ve dış açılarının toplamının 360 derece olduğunu göstermek
Bilişsel süreç	3. Hafta (2 ders saati)	2. Etkinlik: Üçgende açı-kenar ilişkisi	Bir üçgende uzun kenarın karşısındaki açının daha büyük olduğunu göstermek
	4. Hafta (4 ders saati)	3. Etkinlik: Üçgen eşitsizliği	Bir üçgende kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi (üçgen eşitsizliğini) açıklamak
Algısal süreç	5. Hafta (2 ders saati)	ASİF uygulaması	Öğrencinin üçgenler konusuna yönelik algısal sürecini incelemek

3.5. Araştırmanın Kalitesi

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenilirlik gibi kavramlar yerine geçen araştırmanın kalitesi; güvenilirlik, aktarılabilirlik, tutarlılık ve doğrulanabilirlik gibi kriterler ile sağlanmaktadır (Lincoln ve Guba, 1985). Araştırmacı, güvenilirliği sağlamak için araştırma sürecinde objektif davranışlara dikkat etmiş ve bu araştırma öncesinde nitel araştırma yaparak alandaki deneyimini artırmıştır. Patton (2014), nitel araştırmalarda nesnelliği araştırmacının araştırma sürecindeki güvenilirliği, dürüstlüğü ve dengeli tutumu olarak tanımlamıştır. Araştırmacı araştırma süreci boyunca objektif davranmaya özen göstermiş ve katılımcıların verdikleri cevapları kavramsal çerçeveye uygun şekilde yorumlamıştır. Katılımcıların araştırmacının kendi öğrencileri olması sebebiyle veri toplama sürecinde öğrencilerden gelen ‘Öğretmenim bu soruya doğru cevap verdim mi?’ gibi sorulara doğru ya da yanlış demeden sadece öğrencilerin bildiklerini açıklamaya teşvik etmiştir. Araştırmacı güvenilirliği sağlamak için araştırma sürecini ve ortamını ayrıntılı bir şekilde sunmaya özen göstermiştir. Bu bağlamda katılımcıların seçiminde kullanılan yöntemler, katılımcıların demografik özellikleri ve araştırma ortamı ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Araştırmanın inandırıcılığını ve güvenilirliğini artıran bir diğer yöntem, farklı veri toplama tekniklerinin eşzamanlı olarak kullanılması olan veri çeşitlemesidir (üçgenleme). Veri

çeşitlemesi, nitel araştırmada farklı veri toplama araçlarının eş zamanlı kullanılarak birbirlerini desteklemesidir (Creswell, 2020). Örneğin, araştırma verileri öğrencilerin etkinlik kağıtlarından alınan yanıtlarla birlikte, araştırma ortamının ve öğrenci ekranlarının video kayıtları ve gözlem verilerinden elde edilmiştir. Ayrıca araştırmanın tasarlanmasından araştırmanın raporlanması sürecine kadar elde edilen verilerin nesnel şekilde aktarılabilmesi için matematik eğitimcisi bir uzmanın değerlendirmelerine başvurulmuştur. Araştırmaya katılacak öğrencilere ve velilere araştırma süreci araştırma başında detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca onay için velilerin Veli Onam Formu (Ek 6) ile rızası alınmıştır. Başlarken, öğrencilere araştırmadan istedikleri zaman ayrılacakları belirtilmiştir. Veli onam formunda belirtildiği gibi toplanan verilerin sadece araştırma amaçları doğrultusunda kullanılacağı ve araştırma ekibi dışında hiç kimseyle paylaşılmayacağı da öğrencilere ve velilere ayrıca açıklanmıştır.

Geçerlilik kavramı, genellikle nitel araştırmacılar tarafından aktarılabilirlik olarak yorumlanmaktadır (Maxwell, 1992). Aktarılabilirliğin sağlanması için araştırmacının örneklem seçimi, araştırma ortamı ve sahip olduğu önceki deneyimler hakkında detaylı bilgi vermesi gerekmektedir (Creswell, 2020). Ayrıca, araştırmada amaçlı örnekleme kullanılması ve katılımcıların seçiminin ayrıntılı bir şekilde ele alınması, araştırmanın farklı bağlamlarda tekrar uygulanabilirliğini güçlendirmektedir (Miles & Huberman, 2015). Araştırmada katılımcı seçimi süreci, katılımcıların araştırmacının bakış açısına ilişkin ön bilgileriyle birlikte ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

3.6. Veri Analizi

Durum çalışması ele alınan durumun kendi sınırları içinde incelenmesi ve yorumlanmasını gerektirdiği için her durum ayrı analiz edilmiş ve bu aşamadan sonra durumların karşılaştırmalı analizine geçilmiştir. Bu araştırmada tematik içerik analizi kullanılmıştır. Creswell (2018), tematik içerik analizini bir alanla ilgili çalışmaların eğilimlerini ve sonuçlarını temalar veya şablonlar oluşturarak eleştirel bir bakış açısıyla sentezleyen bir yöntem olarak açıklamaktadır. Tümdengelimli içerik analizi ise mevcut bilgiler veya teoriler temel alınarak analizin yapısının oluşturulup işlevsel hale getirildiği durumlarda kullanılır (Elo & Kyngäs, 2008). Bu çalışmada da toplanan veriler önceden belirlenen bir tematik çerçeve ile çözümlendiği için tümdengelimli içerik analizinden yararlanılmıştır. Öğrencinin bilişsel ve algısal süreci ve bu iki sürecin etkileşimi Duval'in geometrik bilişsel muhakeme modelinde belirlediği muhakeme becerilerinden yararlanarak ve bu becerilerin araştırmaya uygun şekilde güncellenmiş hali ele alınarak incelenmiştir. Veri analizi için bilişsel ve algısal sürecini

incelemek üzere beklenen becerilerin etkinlik kâğıdında yer alan soruların kapsamı dâhilinde güncellenmiş hali aşağıdaki Tablo 4'te yer almaktadır:

Tablo 4 *Duval'in bilişsel geometrik muhakeme çerçevesini yansıtan becerileri (Karpuz, 2018)*

Geometrik Muhakeme Süreçleri	Muhakeme Sürecinin Aşamaları	Beklenen Beceriler
Bilişsel Süreçler	Görselleştirme	Matematiksel sembolleri ve gösterimleri doğru şekilde kullanabilir. Verilen geometrik şekli oluşturan temel elemanları ve özelliklerini tanımlayabilir. Şekil üzerindeki görsel bilgileri kullanarak doğru çıkarımlar yapabilir. Sözel bilgileri görsel bilgiye ve görsel bilgileri sözel bilgiye doğru şekilde dönüştürebilir. Geometrik bir şekli parçalara ayırıp bu parçalarla yeni şekiller oluşturabilir. Geometrik şeklin bütününden ziyade belirli bölümüne odaklanabilir. Şekilden yola çıkarak geometrik ilişkiler hakkında çıkarımlarda bulunamaz.
	Oluşturma	Bir geometrik şekli bir araç yardımı ile oluşturabilir. Bir geometrik şeklin bir araç yardımı ile oluşumunu açıklayabilir.
	Muhakeme	Matematiksel ilişkileri sözel ifadelerle ve önermelerle ifade edebilir yani sözel muhakeme yapar Çıkarım yaparken sadece aksiyom, tanım ve teoremleri kullanır yani teorik muhakeme yapar. Şekilde yaptığı değişiklikleri aksiyom, tanım ve teoremleri kullanarak gerekçelendirip açıklayabilir. Yaptığı bir çıkarımı başka bir durumda kullanabilir. Geometrik bir durumu ifade ederken matematiksel kavramlardan yararlanabilir.
Algısal Süreç	Görsel Algı	Verilen geometrik şekli ve temel elemanlarını tanıy ve adlandırabilir.
	Sözel Algı	Sorudaki sözel bilgileri doğru şekilde görsel bilgiye dönüştürebilir. Şekildeki görsel bilgileri sözel bilgilere çevirip doğru çıkarımlar yapabilir. Şeklin görünümüne dayanarak geometrik ilişkiler hakkında çıkarım yapmaz. Şekildeki görsel bilgileri semboller ve matematiksel kavramlarla doğru şekilde sözel bilgiye çevirebilir.

İşlevsel Algı	Şeklin bazı bölümlerine odaklanabilir. Geometrik şekle ait alt parçaların yönünü ve konumunu değiştirerek yeni şekiller oluşturabilir. Verilen geometrik şekil üzerinde değişiklik yapabilmek için sayısal verilere ihtiyaç duymadan doğru çıkarımlarda bulunabilir.
Sıralı Algı	Geometrik bir şekli bir araç aracılığı şekli ile oluşturulabilir. Bir geometrik şeklin bir araç aracılığı ile oluşturduğu şeklin oluşturulma aşaması açıklayabilir.

Bulgular Duval’ın bilişsel geometrik muhakeme çerçevesinde görselleştirme, muhakeme ve oluşturma alt boyutlarına uygun hazırlanan sorular üzerinden etkinlik bazında yorumlanmıştır. Soruların ilgili olduğu bilişsel boyutlar Tablo 5’te yer almaktadır.

Tablo 5 Soruların ilgili olduğu bilişsel muhakeme süreçleri

Konu	Bilişsel Süreç	Soru numaraları	Etkinliğin gerçekleştirildiği ortam
Üçgende açı	Görselleştirme	1. Soru, 2. Soru	Etkinlik kâğıdı
	Muhakeme	2. Soru, 3. Soru	Etkinlik kâğıdı, kâğıt katlama
	Oluşturma	3. Soru	GeoGebra programı
Üçgende açı-kenar ilişkisi	Görselleştirme	2. Soru, 3. Soru	Etkinlik kâğıdı,
	Muhakeme	1. Soru, 3. Soru	Kâğıt katlama
	Oluşturma	1. Soru	GeoGebra programı
Üçgen eşitsizliği	Görselleştirme	4. Soru	GeoGebra programı
	Muhakeme	4. Soru, 5. Soru	GeoGebra programı, etkinlik kâğıdı
	Oluşturma	2. Soru, 3. Soru	Geometri şeritleri, pergel, ölçüsüz cetvel

Bu araştırmada öğrencilerin geometrik muhakeme sırasında nasıl bir algısal süreç yaşadıklarına yönelik soruyu cevaplamak için araştırmacı tarafından hazırlanan ASİF ile veri toplanmıştır. Veriler ASİF kullanılarak pergel, cetvel yardımı ile toplanmıştır. Bulgular, Duval’ın (1995), geometrik muhakemeyi bilişsel süreçlerle birlikte yorumlayarak ‘şekle bakma süreçleri’ ile ele aldığı algısal süreçler çerçevesinde, görsel algı, sözel algı, sıralı algı ve işlevsel algı boyutlarına uygun hazırlanan sorular üzerinden yorumlanmıştır. Soruların ilgili olduğu algısal boyutlar Tablo 6’da verilmiştir.

Tablo 6 Soruların ilgili olduğu algısal muhakeme süreçleri

Konu	Algısal Süreç	Soru numaraları	Etkinliğin gerçekleştirildiği ortam
Üçgenin temel özellikleri	Görsel algı	1. Soru, 4. Soru	Etkinlik kâğıdı
İkizkenar üçgen özellikleri	Sözel algı	2. Soru, 4. Soru	Etkinlik kâğıdı
Üçgen oluşturma	İşlevsel algı	3. Soru	Etkinlik kâğıdı
Eşkenar üçgen özellikleri	Sıralı algı	5. Soru	Etkinlik kâğıdı

Son olarak Duval'ın (1998) birbirinden bağımsız gibi görünen bilişsel ve algısal süreçlerin aslında birbirini etkilediği fikri çerçevesinde, ASİF den elde edilen veriler ile etkinlik kâğıdından elde edilen veriler karşılaştırılarak geometrik muhakemede bu süreçlerin etkileşimi incelenmiştir. Çalışmanın bilişsel muhakeme sürecine ilişkin verileri tümdengelimli içerik analizi sürecinde aşağıda yer alan Tablo 7'deki analiz kriterlerine göre yorumlanmıştır.

Tablo 7 Bilişsel muhakeme ile ilgili veri analizi sistematığı

Bilişsel muhakeme ile ilgili etkinlikler	Bilişsel muhakemeye yönelik beklenen beceriler	Bilişsel muhakeme boyutları
	Üçgeni oluşturan temel özellikleri şekil üzerinde gösterebilmek Üçgenin iç ve dış açılarını şekil üzerinde doğru gösterebilmek Üçgenin açıları ile ilgili şekil üzerindeki görsel bilgileri kullanarak doğru çıkarımlar yapabilmek. Üçgenin iç ve dış açıları ölçüleri toplamını kâğıt katlama ile gösterebilmek	Görselleştirme
Üçgende Açı	Üçgeni GeoGebra ortamında oluşturmak ve iç ve dış açı ilişkisini açıklayabilmek	Oluşturma
	Üçgende iç ve dış açı ölçüleri toplamına yönelik kurduğu ilişkiyi doğal bir dille açıklayabilmek (Doğal muhakeme) Üçgende iç ve dış açı ölçüleri toplamına yönelik kurduğu ilişkiyi matematiksel sembollerden ve cebirsel ifadelerden yararlanarak açıklayabilmek (Teorik muhakeme)	Muhakeme
Üçgende Açı-Kenar İlişkisi	GeoGebra programından yararlanarak farklı üçgenler çizmek, çizdiği üçgenlerin açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını ölçebilmek	Görselleştirme
	GeoGebra programından yararlanarak üçgen oluşturmak ve açı ölçüsü ile kenar uzunluğu arasında ilişki kurabilmek	Oluşturma

Üçgen Eşitsizliği	Üçgende açı ve kenar arasında kurduğu ilişkiyi sözel olarak açıklayabilmek (doğal muhakeme)	Muhakeme
	Üçgende açı kenar ilişkisine yönelik kurduğu ilişkiyi matematiksel sembol ve önermelerle açıklayabilmek (teorik muhakeme)	
	Geometri şeritleri, GeoGebra’da sürgüler ile üçgen oluşturabilmek ve sürgüleri kullanarak farklı üçgenler elde etmek	Görselleştirme
	Pergel, cetvel kullanarak üçgen oluşturabilmek ve geometri şeritleri ve GeoGebra yardımı ile üçgenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurabilmek	Oluşturma
	Üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi sözel olarak açıklayabilmek (doğal muhakeme)	Muhakeme
	Üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi matematiksel sembollerle ve önermelerle açıklayabilmek (teorik muhakeme)	

Örneğin, Deniz’in üçgenin iç ve dış açı ölçüleri toplamını kâğıt katlama yaparak iç açılar ölçüleri toplamını 180 derece (doğru açı) şeklinde, dış açılar ölçüleri toplamını 360 derece (tam açı) olarak gösterebilmesi görselleştirme olarak yorumlanırken, Kaan’ın pergel cetvel ve geometri şeritleri ile üçgen oluşturup üçgenlerin kenar uzunlukları arasında ilişki kurabilmesi oluşturma olarak yorumlanmıştır. Ayrıca etkinliklerde öğrencilerin ulaşması beklenen çıkarımlar ve önermeler matematiksel sembol ve işaretlerle yapılmış ise teorik muhakeme, matematiksel sembol ve işaretler kullanmadan sözel olarak yapılmış ise doğal muhakeme gerçekleştirdikleri şeklinde yorumlanmıştır. Çalışmanın algısal muhakeme sürecine ilişkin verileri aşağıda yer alan Tablo 8’deki analiz kriterlerine göre yorumlanmıştır.

Tablo 8 *Algısal muhakeme ile ilgili veri analizi sistematığı*

Algısal Süreç İnceleme Formu (ASİF)	Algısal süreçlere yönelik beklenen beceriler	Algısal süreç boyutları
Üçgenin temel özellikleri	Üçgenin ve üçgeni oluşturan parçaların temel geometrik özelliklerinin farkına varabilmek	Görsel Algı
İkizkenar üçgen özellikleri	Üçgen üzerinde verilen matematiksel sembolleri ve bilgiyi görsel bilgiye çevirebilmek ve bu bilgiyi kullanabilmek	Sözel Algı
Üçgen oluşturma	Üçgenin yönünü ve konumunu değiştirerek verilen kare içine en büyük alana sahip farklı üçgenler çizilebilmek	İşlevsel Algı
Eşkenar üçgen özellikleri	Eşkenar üçgeni pergel ve çizgeç ile oluşturabilmek ve oluşturma adımlarının aşamalarını açıklayabilmek	Sıralı Algı

Örneğin, Kaan'ın pergel ve çizgeç ile eşkenar üçgen oluşturarak bu oluşturma adımlarını detaylı açıklayabilmesi sıralı algı olarak yorumlanırken, Deniz'in 8x8 birimlik kare içine çizilebilecek en büyük alana sahip farklı üçgenleri çizebilmesi ve bu durumu açıklaması işlevsel algı olarak yorumlanmıştır.



BÖLÜM 4

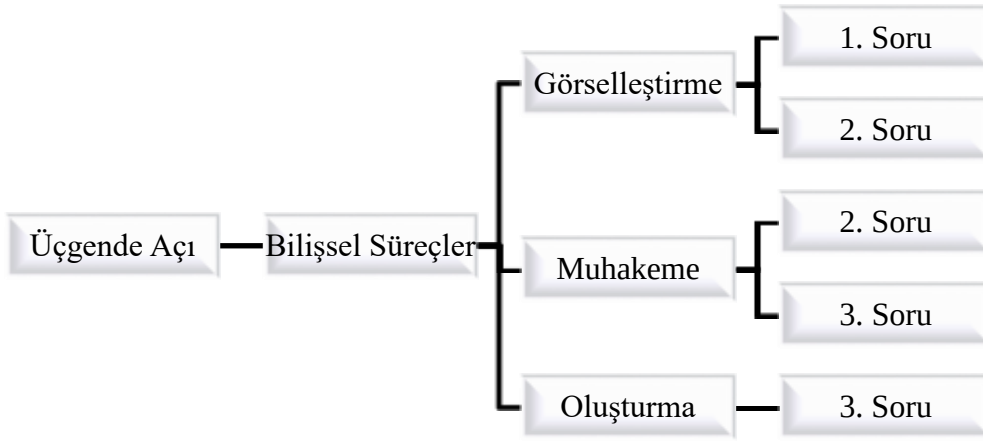
BULGULAR

Bu bölümde elde edilen bulgular her katılımcı için geometrik muhakemenin bilişsel ve algısal sürecine göre iki alt bölümde özetlenmiştir. Öğrencilerin bilişsel geometrik muhakeme süreçlerini incelemek üzere kullanılan etkinlik kâğıtları ve araştırma ekibi tarafından geliştirilen ASİF aracılığıyla toplanan veri her bir durum özelinde Tablo 3'e göre yorumlanarak raporlaştırılmıştır. Bulgular Duval'ın bilişsel geometrik muhakeme modeli çerçevesinde bilişsel süreçler olan görselleştirme, muhakeme ve oluşturma alt boyutlarına uygun hazırlanan sorular üzerinden etkinlik bazlı yorumlanırken; algısal süreçler görsel algı, sözel algı, işlevsel algı ve sıralı algı alt boyutlarına uygun hazırlanan ASİF sorularına verilen cevaplar üzerinden soru bazlı yorumlanmıştır. Son olarak, öğrencilerin her süreçteki durumu karşılaştırılarak bu alt boyutların birbiri arasındaki etkileşimi karşılaştırılmıştır.

4.1. Bilişsel Süreçlere Ait Bulgular

4.1.1. Üçgende Açı

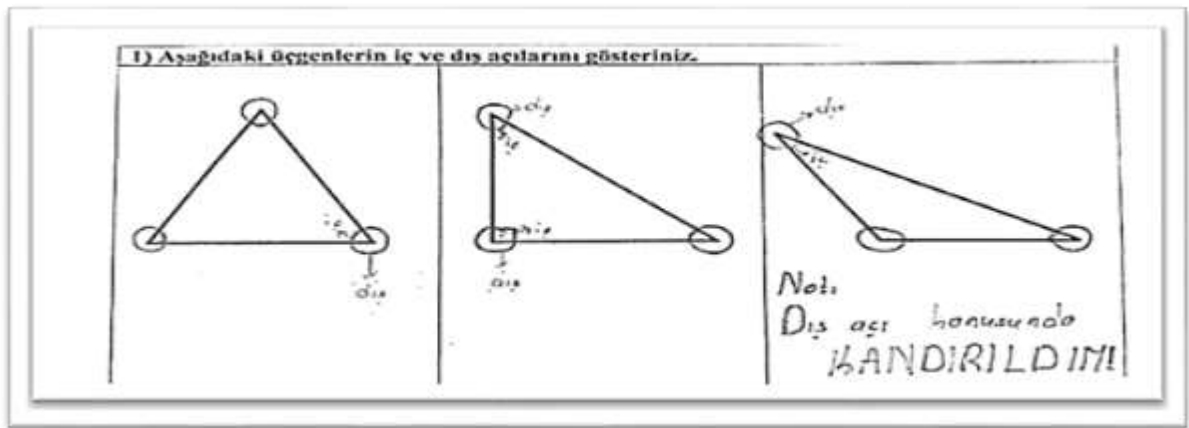
Öğrencilerin hepsi etkinlik kâğıdı kendilerine dağıtıldıktan sonra soruları dikkatle okuyup anlamaya çalıştılar. Bu etkinliğin ilk sorusu bilişsel muhakemenin görselleştirme boyutu ile ilgilidir. Herhangi bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180 derece, dış açılarının ölçülerinin toplamının 360 derece olduğunu gösteren bir yöntem bulmak olan ikinci soru görselleştirme boyutu ile ilgilidir. Ayrıca öğrenci bulduğu yönteme göre açıklama yapabiliyor ya da çıkarımda bulunabiliyorsa muhakeme yapabildiği yönünde yorumlanmıştır. Etkinliğin üçüncü sorusu ise muhakeme ve oluşturma boyutu ile ilgilidir. Bu etkinlikte eğer öğrenciler kurduğu matematiksel ilişkiyi doğal bir dille ifade edebiliyor ve sahip olduğu bilgide değişim yaşıyorsa muhakeme boyutu becerilerini taşımaktadır şeklinde yorumlanmıştır. Soruların ilgili olduğu bilişsel muhakeme boyutları Şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4 Birinci etkinlik kağıdında yer alan soruların ilgili olduğu bilişsel boyutlar

Kaan'ın Durumu

Üçgende açı etkinliğinin birinci sorusunda verilen üç farklı üçgenin iç ve dış açıların şekil üzerinde yerlerini belirlemeye yönelik soruda Şekil 5'te görüldüğü gibi Kaan iç açıyı üçgenler üzerinde doğru göstermiş ancak dış açıyı, iç açıyı 360 dereceye tamamlayan açı şeklinde gösterdiği için dış açıyı yanlış göstermiştir. Kaan, doğru olarak belirlediği iç açıyı 360 dereceye tamamlayarak o köşeye ait yansık açıyı göstererek dış açıyı ifade etmiştir. Fakat öğrenci etkinliğin görselleştirme ve muhakeme boyutu ile ilgili olan ikinci sorusuna yanıt ararken dış açıyı yanlış gösterdiğini kendisi fark ederek bu soruya geri dönüp soru üzerine kendi zihnindeki dış açı kavramına yönelik bilgi için '*Kandırıldım*' notunu yazdığı gözlenmiştir. Buradan öğrencinin üçgende açı konusu özelinde iç ve dış açıları görselleştirebildiğini, dolayısıyla görselleştirme yapabildiğini; ayrıca, görselleştirme yaparken kendi zihnindeki bilgide değişiklik meydana geldiği gözlemlendiği için öğrencinin muhakeme yapabildiği iddia edilebilir.

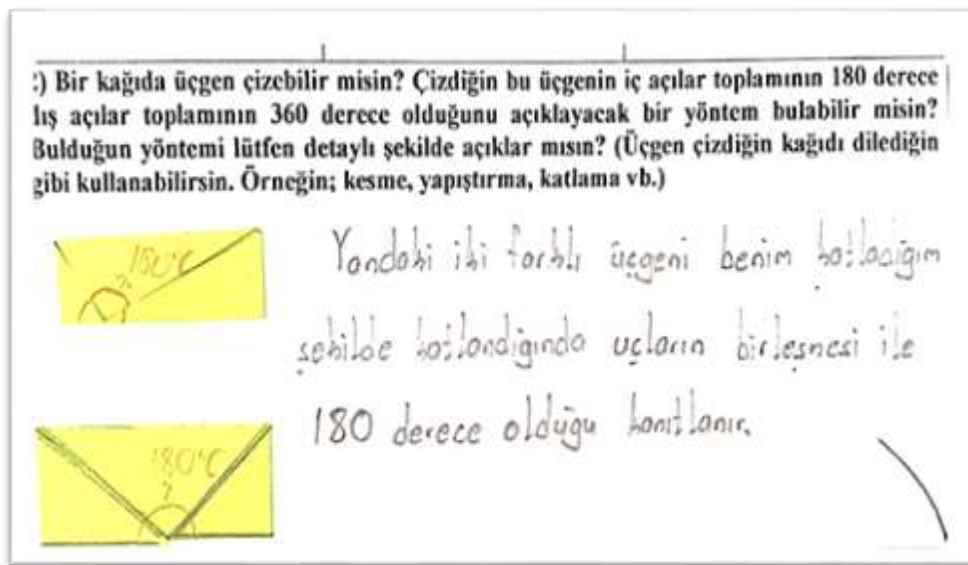


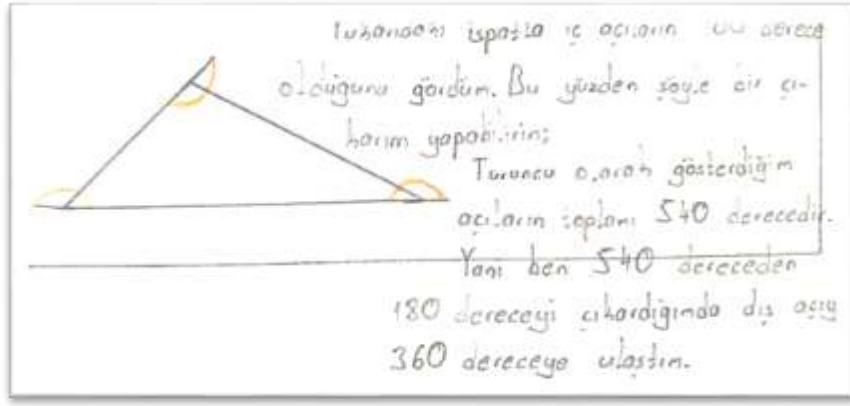
Şekil 5 Kaan'ın etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

Üçgende açı etkinliğinin ikinci sorusu hem görselleştirme hem muhakeme boyutuna ait beceriler gerektirmektedir. Kaan bu soruda hem kâğıt üzerinde iki farklı üçgen çizip keserek iç açılarını belirlemiş belirlediği açılar bir araya getirecek şekilde kendisi katlamış ve oluşturduğu üçgenlerin iç açıları ölçüleri toplamının doğru açı, yani 180 derece olduğunu üçgenlerin açılarını katlayarak Şekil 6'da görüldüğü gibi göstermiştir. Öğrenciye bunu çok çabuk ve doğru yaptığı araştırmacı tarafından söylendiğinde “iç açılar toplamının böyle olduğunu daha önceden düşünmüştüm” şeklinde cevap vermiştir. Bu yaptığı kâğıt katlama aşamasından sonra dış açılar ölçüleri toplamının 360 derece olduğunu şöyle açıklamıştır:

Kaan: “Yukarıdaki ispatla iç açların 180 derece olduğunu gördüm. Bu yüzden şöyle bir çıkarım yapabilirim: Turuncu olarak gösterdiğim açların toplamı 540 derecedir. Yani ben 540 dereceden 180 dereceyi çıkardığımda dış açığa, 360 dereceye ulaştım.”

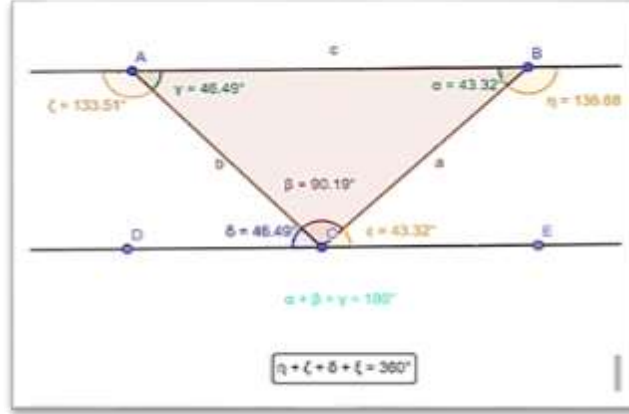
Burada Kaan bir önceki soru ile bağlantılı olarak kendisi çıkarımda bulunmuş ve bulunduğu çıkarımdan yararlanarak dış açılar ölçüsü toplamının 360 derece olduğunu açıklamıştır. Burada soruların birinde yaptığı çıkarımı diğerine aktararak muhakeme yapabildiği için görselleştirme ve muhakemenin birbiri ile etkileşim halinde olduğu ifade edilebilir. Öğrenci, ikinci sorudaki önermeleri görselleştirerek açıkladıktan sonra dış açı ile ilgili kendi bilişsel bilgileri ile açıkladığı durum uyuşmadığı için bu aşamadan sonra birinci sorudaki dış açıyı yanlış gösterdiğini dile getirerek ilk soru üzerine dış açıyı hatalı gösterdiğini ifade etmiş ve Şekil 5'te görüldüğü gibi soru üzerine not almıştır. Bu durumda Kaan'ın şekil üzerindeki görsel bilgidен yola çıkarak doğru çıkarımda bulunabildiği için görselleştirme yapabildiği ve ulaştığı matematiksel bilgiyi sözel olarak açıklayabildiği için muhakeme yaptığı söylenebilir.





Şekil 6 Kaan'ın etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

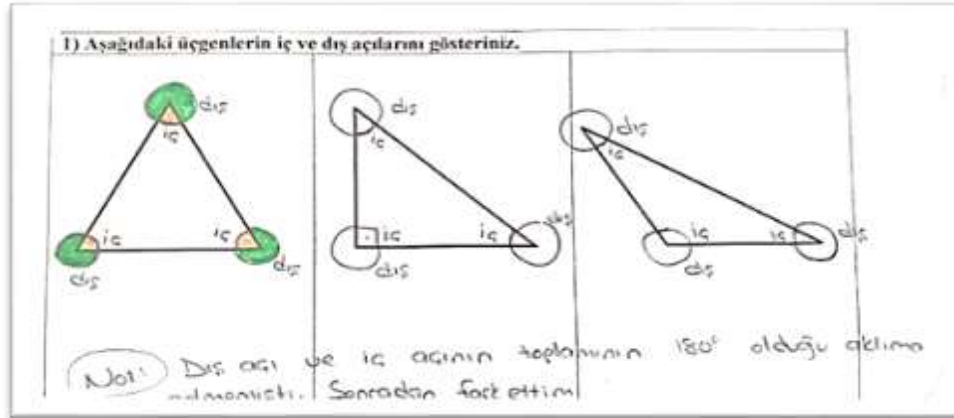
Üçgende açı ile ilgili etkinliğin üçüncü sorusu ikinci sorudaki muhakeme ve oluşturma boyutu ile ilgili olan bu etkinlikte üçgenin iç açılarının ölçüsü toplamının 180 derece dış açılarının ölçüsü toplamının 360 derece olduğunu GeoGebra programı yardımı ile göstermeleri istenmiştir. Bu nedenle bu soru hem muhakeme hem de oluşturma boyutu ile ilgili beceriler gerektirmektedir. Kaan önce paralel doğrular çizmiş sonra doğrular üzerinden nokta belirleyerek üçgen aracı ile üçgen oluşturmuştur. Oluşturduğu üçgenin iç ve dış açılarını belirleyerek ölçüm yapmıştır. Son olarak da belirlediği iç açılarının ölçülerinin toplamının 180 derece, dış açılarının ölçülerinin toplamının 360 derece olduğunu Şekil 7'de görüldüğü gibi cebir penceresinden yararlanarak göstermiştir. Kaan, Şekil 7'de görüldüğü gibi paralel doğrular arasında kalan iç ters açılardan yararlanarak BAC köşesine ait 46,49 derecelik iç açıyı C köşesine ait ACD açısının ölçüsü ile aynı olduğunu göstermiştir. Daha sonra benzer şekilde paralel doğrular arasında kalan iç ters açılardan yararlanarak ABC köşesine ait 43,32 derecelik açıyı BCE köşesine ait açının ölçüsü ile aynı olduğunu fark etmiştir. Bu iki açının toplamı ACD açısının yani 90,19 derecelik açının dış açısı olduğunu göstermiştir. ACD iç açısına ait dış açının ölçüsünün ACD ve BCE açılarının toplamı $46,49 + 43,32 = 89,81$ olduğunu fark etmiştir. Bu durum, öğrencinin Şekil 7'de görüldüğü gibi bir dış açıyı iki açının toplamı şeklinde GeoGebra'nın cebir penceresinde sembollerle göstermesinden dolayı öğrencinin paralel doğrular ve kesen arasında oluşan açılar arasındaki ilişkiyi bildiğini göstermektedir. Kaan daha sonra GeoGebra programının sürükleme özelliğinden yararlanarak üçgenler değişse de açılar toplamının aynı kaldığını sözel olarak açıklamıştır. Bu durumda Kaan'ın muhakeme boyutunun becerilerine sahip olduğunu, ancak muhakemeyi ispat ve önermeler kullanmadan yaptığı için teorik değil sözel muhakeme yaptığı ifade edilebilir. Ayrıca Kaan'ın üçgende bir köşeye ait dış açıyı o köşeye ait açıyla komşu olan iki açının toplamı şeklinde ifade edebildiği ve paralel doğrular ve bir kesenin oluşturduğu açılardan yararlanabildiği için iyi bir muhakeme becerisine sahip olduğu söylenebilir.



Şekil 7 Kaan'ın etkinliğin 3. Sorusuna verdiği yanıt

Deniz'in Durumu

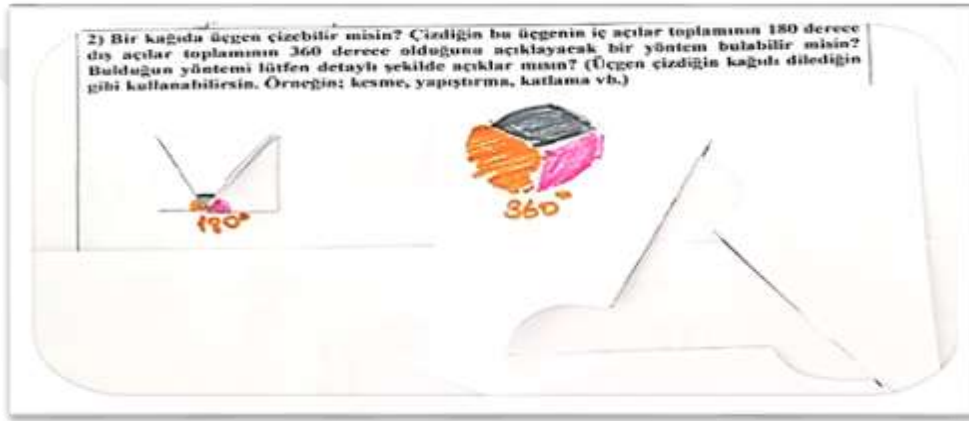
Üçgende açı etkinliğinin birinci sorusunda verilen üç farklı üçgenin iç ve dış açılarını belirlemeye yönelik soruya Şekil 8'de görüldüğü gibi, Deniz, iç açıyı üçgenler üzerinde doğru göstermiş ancak dış açıyı yanlış göstermiştir. Duval'in bilişsel modeline göre bu öğrenci için iç açıyı üçgen üzerinde doğru ifade ettiği için görselleştirme yapabiliyor diyebiliriz. Deniz iç açıyı belirledikten sonra aynı köşeye ait yansık açıyı dış açı olarak belirlemiştir. Daha sonra üçgende açı ile ilgili etkinliğin ikinci sorusuna yanıt ararken dış açıyı yanlış gösterdiğini kendisi fark ederek ilk soruya geri dönmüş "Dış açı ve iç açının toplamının 180 derece olduğu aklıma gelmemişti. Sonradan fark ettim" şeklinde soru üzerine not yazmıştır. Burada kendi zihnindeki sahip olduğu bilgide değişiklik yaşandığı için dış açı konusunda muhakeme yapabildiği ifade edilebilir.



Şekil 8 Deniz'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

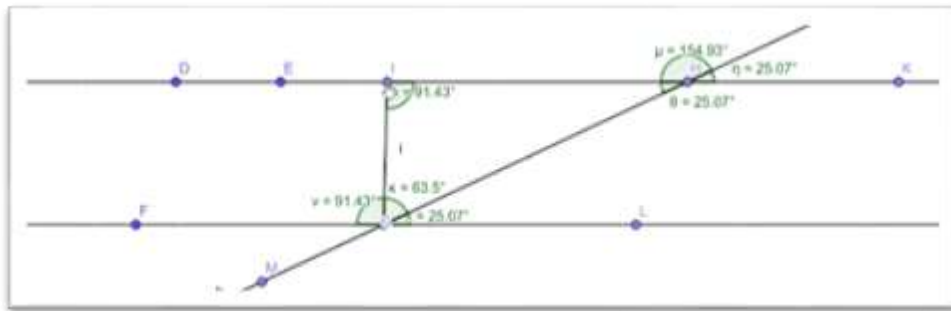
Deniz etkinliğin ikinci sorusunda bir kâğıda herhangi bir üçgen çizmiş daha sonra çizdiği üçgeni keserek önce üçgenin iç açı ölçülerini belirlemiş, sonra kâğıdı katlayarak iç açıları bir doğru üzerinde birleştirerek bu üç açının toplamının 180 derece olduğunu Şekil 9'da görüldüğü gibi görselleştirerek doğru olarak açıklamıştır. Öğrenciye bu gösterdiği durumu çok

çabuk ve doğru yaptığı söylendiğinde “Bunu daha önce neden 180 derece olduğunu merak edip öğrenmiştim” şeklinde yanıt vermiştir. Daha sonra kâğıt üzerinde başka bir üçgen çizip keserek üçgenin dış açı ölçülerini belirlemiş ve bu açıları kesmiştir. Kestiği açıları farklı renklerle boyayıp birleştirerek dış açılarının ölçüleri toplamının tam açı, yani 360 derece olduğunu görsel olarak göstermiştir. Bu durumda Deniz’in açıları farklı renklerle gösterip doğru ve tam açı haline getirebildiği için görselleştirme becerisine, görsel olarak ifade ettiği durumları sözel olarak açıklayabilmesinden dolayı muhakeme becerisine sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca öğrencinin, bu sorudaki açıklamalarına bağlı olarak birinci soruda dış açıyı yanlış gösterdiğini dile getirmesi ve aynı köşeye ait iç ve dış açının bütünler açı (180 derece) olduğunu fark etmesinden dolayı görselleştirme ve muhakemenin birbirini etkilediği iddia edilebilir.



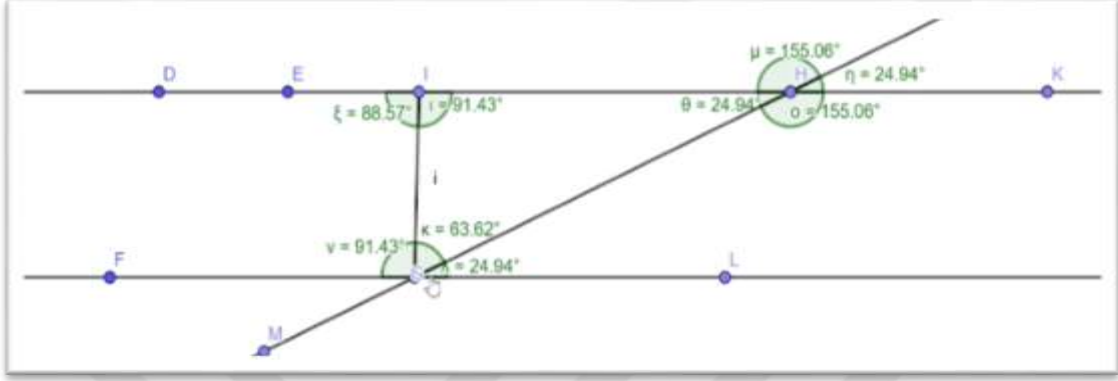
Şekil 9 Deniz'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Üçgende açı etkinliğinin son sorusuna Deniz, Şekil 10'daki gibi GeoGebra programında paralel doğrular çizip, bu doğruları kesen doğrulardan yararlanarak paralel doğrular arasında bir üçgen oluşturmuştur. Oluşturduğu üçgenin iç açı ölçülerini belirleyerek ölçüm yapmış sonra belirlediği üç açının ölçüleri toplamının 180 derece olduğunu paralel doğrular arasındaki iç ters açıları ifade ederek taşıyıp FGL açısında doğru açı oluşturduğunu göstererek iç açı ölçüleri toplamının 180 derece olduğunu açıklamıştır.



Şekil 10 Deniz'in etkinliğin 3. sorusuna verdiği ilk yanıt

Deniz, dış açıların ölçüleri toplamının 360 derece olduğunu Şekil 10’da görüldüğü gibi paralel doğrular arasında HIG üçgeni oluşturarak göstermeye çalışmıştır. Burada oluşturduğu üçgenin iç ve dış açılarını belirleyerek açıları ölçmüştür. Ölçtüğü iç açıların komşu bütünleri olan ait dış açıları Şekil 11’de görüldüğü biçimde ölçmüştür. Daha sonra dış açıların ölçüleri toplamını $88,57^\circ + 155,06^\circ + 91,43^\circ + 24,94^\circ = 360^\circ$ ‘dir şeklinde açıklamıştır.

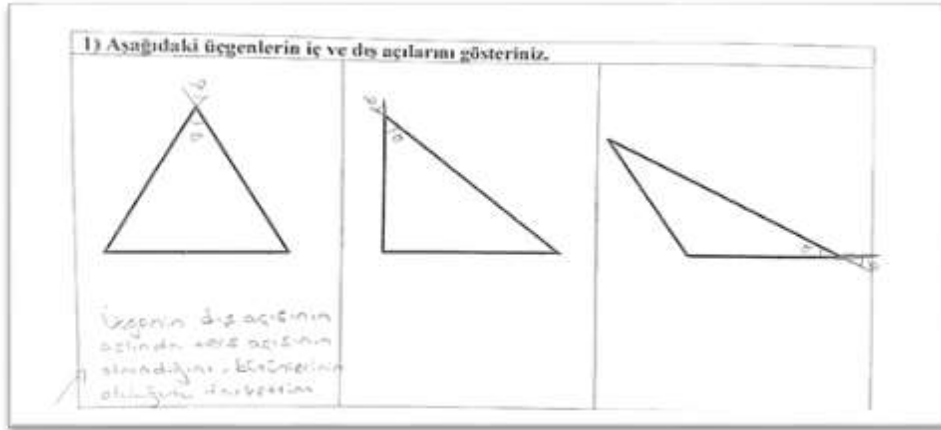


Şekil 11 Deniz’in etkinliğin sorusuna verdiği ikinci yanıt

Deniz, GeoGebra’nın sürükleme özelliğinden yararlanarak farklı üçgenler oluşturmuş üçgenler değişse de açıların ölçülerinin toplamının aynı kaldığını ifade etmiştir. Bu durumda üçgeni GeoGebra programından yararlanarak paralel doğrular arasında oluşturduğu için, Deniz’in oluşturma becerisine sahip olduğunu, verilen önermeleri ispat ve önermelerle olmasa da sözel ifadelerle açıklayabildiği için muhakeme becerilerine sahip olduğu söylenebilir.

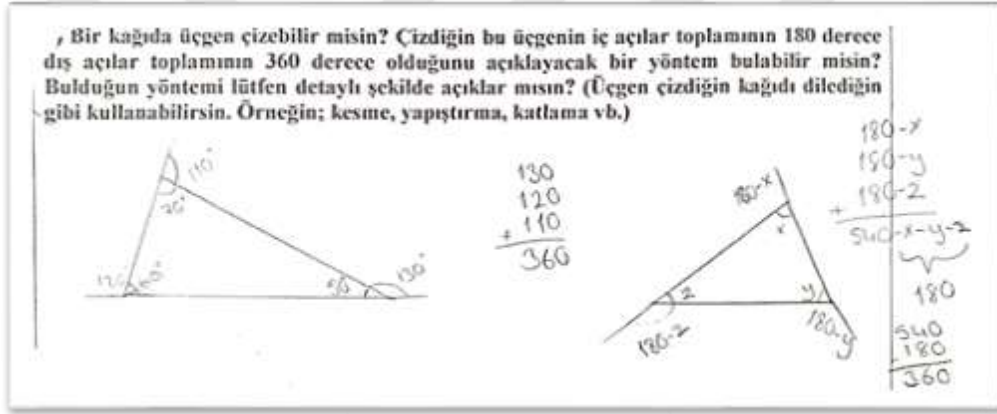
Serap’ın Durumu

Serap, üçgende açı etkinliğinin birinci sorusunda verilen üç farklı üçgenin iç ve dış açılarını belirlemeye yönelik soruya Şekil 12’de görüldüğü gibi iç açıyı üçgenler üzerinde doğru göstererek sadece iç açıya yönelik görselleştirmeyi doğru yapmıştır. Dış açıyı ise iç açının ters açısı şeklinde göstererek yanlış ifade etmiştir.



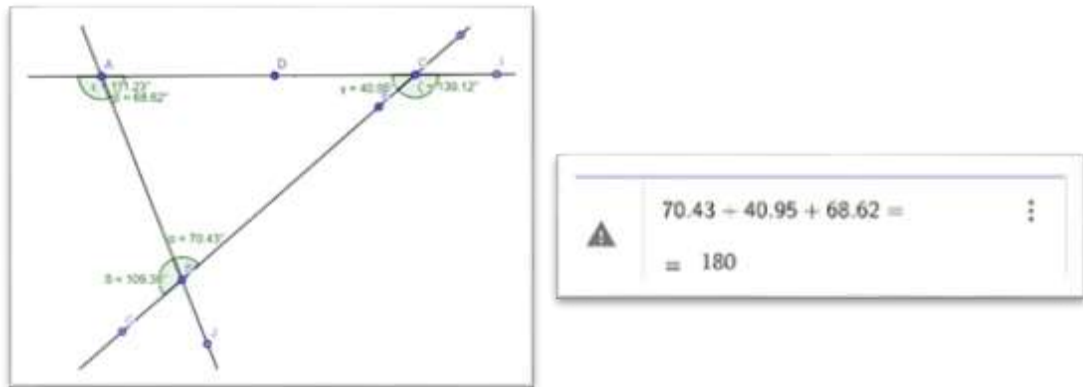
Şekil 12 Serap’ın etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

Serap ikinci soruda Şekil 13'te görüldüğü gibi farklı büyüklüklerde üçgenler çizerek önce açılara rastgele değerler vermiş, sonra da toplamının 180 derece olduğunu göstermiştir. Öğrenci etkinliğin ikinci sorusuna geçtiğinde dış açıyı kendi belirlediği gibi aldığında dış açılar toplamının 360 derece değil, hep 180 derece olacağını görmüştür. Daha sonra bu durumu Şekil 12'de görüldüğü gibi “Üçgenin dış açısının aslında açının ters açısının olmadığını, bütünlerinin olduğunu fark ettim” şeklinde hem not yazmış hem de sözel olarak dile getirmiştir. Daha sonra yaptığı bu çıkarım doğrultusunda Şekil 13'te görüldüğü gibi dış açıyı iç açılar toplamının 180 derece olduğu kabulünden yola çıkarak bütün sayısal değerler için genellebileceğine karar verip cebirsel bir dil kullanarak açıklamıştır. Ayrıca Serap'ın bir üçgenin dış açılar ölçüleri toplamını göstermek için x, y, z gibi değişkenlerden yararlanmasından dolayı az da olsa teorik muhakeme yapabildiği iddia edilebilir. Öğrencinin üçgende açı konusuna verdiği yanıtlardan görselleştirme ve muhakeme sürecinin birbirini etkilediği ifade edilebilir.



Şekil 13 Serap'ın etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Serap etkinliğin üçüncü sorusunda birbiri ile tek noktada kesişen üç doğruyu ikişerli kesiştirerek üçgen oluşturmuştur. Şekil 14'te görüldüğü gibi oluşturduğu üçgenin iç açılarının ölçülerini belirleyip açı ölçülerini cebir penceresinden yararlanarak topladığında iç açılarının ölçüleri toplamının 180 derece olduğunu göstermiştir.



Şekil 14 Serap'ın etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt

Fakat ikinci soruda genellediği dış açı ölçüleri toplamının 360 derece olduğu önermesini GeoGebra üzerinde çalışırken doğru açıklayamamıştır. Oluşturduğu dış açıların ölçüleri toplamının Şekil 15'te'de görüldüğü gibi 359,69° olarak göstermiştir. Bunun neden bu şekilde olduğu araştırmacı tarafından kendisine sorulduğunda önce “Anlayamadım” şeklinde cevap vermiş, sonra araştırmacının yönlendirmeleri ile dış açıyı ölçmek için belirlediği doğru üzerindeki I, G, J noktalarını doğru üzerinde seçmeden kendisinin işaretlemesinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Bu durumda Serap'ın GeoGebra programı kullanımında hata yaptığı söylenebilir.



$$b = 111.23 + 139.08 + 109.38$$

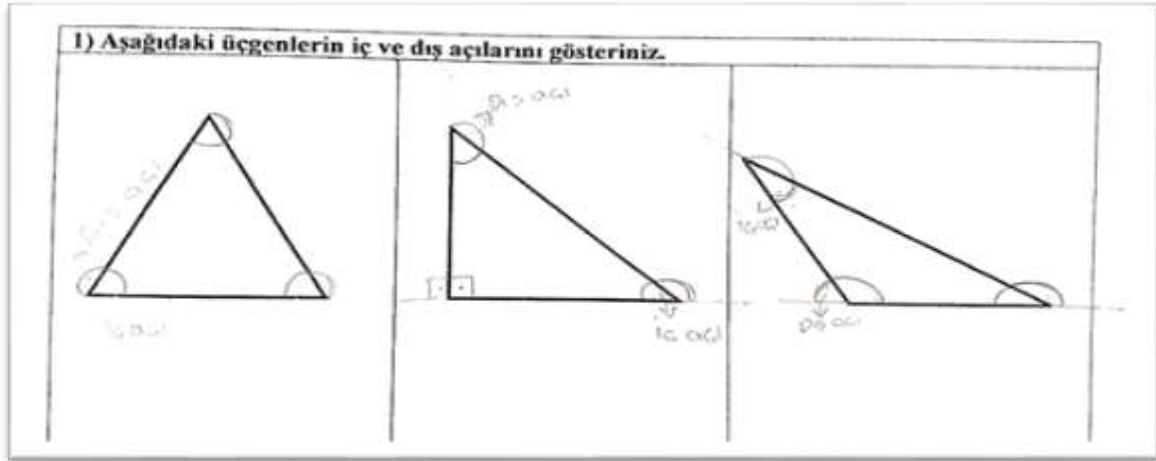
$$= 359.69$$

Şekil 15 Serap'ın etkinliğin 3. sorusunda dış açı için verdiği yanıt

Bu durum Serap'ın üçgende açı konusuna yönelik oluşturma ve muhakeme becerisine yeterli düzeyde sahip olduğunu; ancak GeoGebra kullanımında yaptığı hataya rağmen görselleştirmeyi yapabildiği ifade edilebilir.

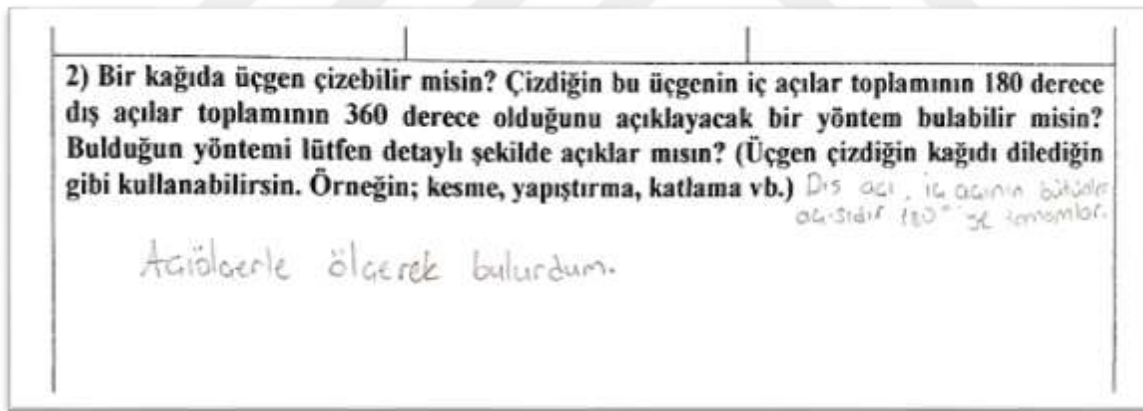
Merve'nin Durumu

Üçgende açı etkinliğinin birinci sorusunda verilen üç farklı üçgenin iç ve dış açılarını belirlemeye yönelik soruda, Şekil 16'da görüldüğü gibi Merve üçgenler üzerinde iç ve dış açıyı doğru göstermiştir. Merve, Şekil 17'de dış açı ile ilgili “Dış açı iç açının bütünler açısıdır. 180 dereceye tamamlar” şeklinde not yazmıştır. Bu verdiği cevaptan Merve'nin dış açı ve iç açı arasındaki ilişkiye dair doğru bilgi sahibi olduğu söylenebilir. Ancak birinci soruda yaptığı görselleştirmeye dayanarak Merve iç açıyı doğru göstermesine rağmen, dış açıya ait çizimi Şekil 16'da görüldüğü gibi yanlış göstermiştir. Bu soruya doğru açıklama yapabilen tek öğrenci Merve olmasına rağmen üçgene ait iç açının komşu bütünlerini şekil üzerinde tam olarak doğru gösterememiştir. İç ve dış açıyı doğru açıklamasına rağmen üçgenler üzerinde dış açıyı tamamen doğru ifade etmediği için Duval'in bilişsel modeline göre bu öğrencinin üçgende açı konusu özelinde tam olarak görselleştirme yapabildiği söylenemez. Merve'nin iç ve dış açının ölçüleri toplamının bütünler açı olmasını doğru söyleyen tek katılımcı olmasına rağmen etkinliğin diğer aşamalarını tamamlayamamasından bu söylediği bilginin daha önceden duyduğu ezbere bir bilgi olduğu iddia edilebilir.



Şekil 16 Merve'nin etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

Merve'nin ikinci soruda üçgenin iç ve dış açılarının ölçüleri toplamını açıklamaya yönelik farklı bir yöntem geliştiremediği ve iç açılar toplamının 180 derece, dış açılar toplamının 360 derece olduğunu Şekil 17'de görüldüğü gibi "Açıölçerle ölçerek bulurdum" şeklinde bir cevap verdiği görülmektedir. Bu sebeple doğru görselleştirme yapan öğrencinin muhakeme yapamadığı görüldüğü için görselleştirme yapabilmenin her zaman muhakeme yapabilmeyi desteklemediği söylenebilir.

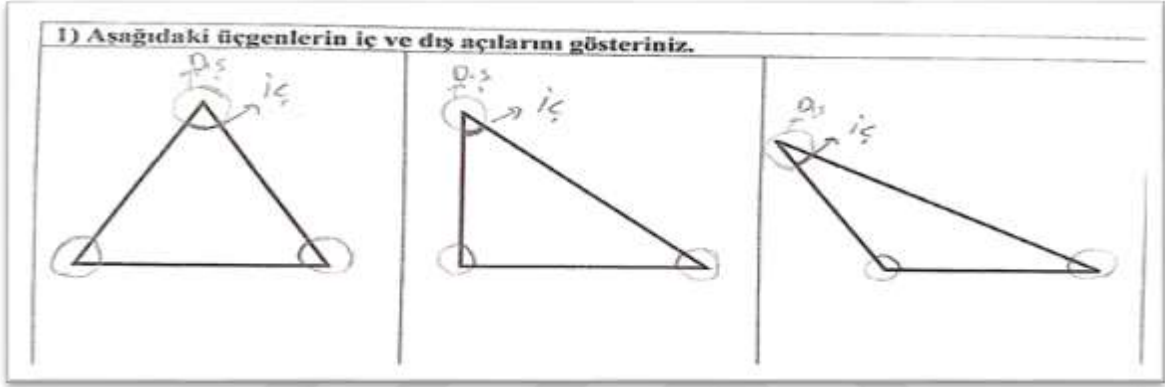


Şekil 17 Merve'nin etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Etkinliğin üçüncü sorusunda Merve ikinci soruya benzer şekilde farklı yöntem geliştirip önermeleri açıklamak için GeoGebra programında denemek istemediğini dile getirmiştir. Bu durumu "Üçgen çizer, açıları bulup daha sonra açıları toplardım" şeklinde kısa bir cevap vererek denemek istememiştir. Buradan hareketle öğrencinin üçgende iç ve dış açıların ölçüleri toplamını açıklama konusunda hem kağıt üzerinde hem de GeoGebra programında üçgenleri oluşturmak istememesinden dolayı oluşturma aşamasında başarılı olamadığı ifade edilebilir.

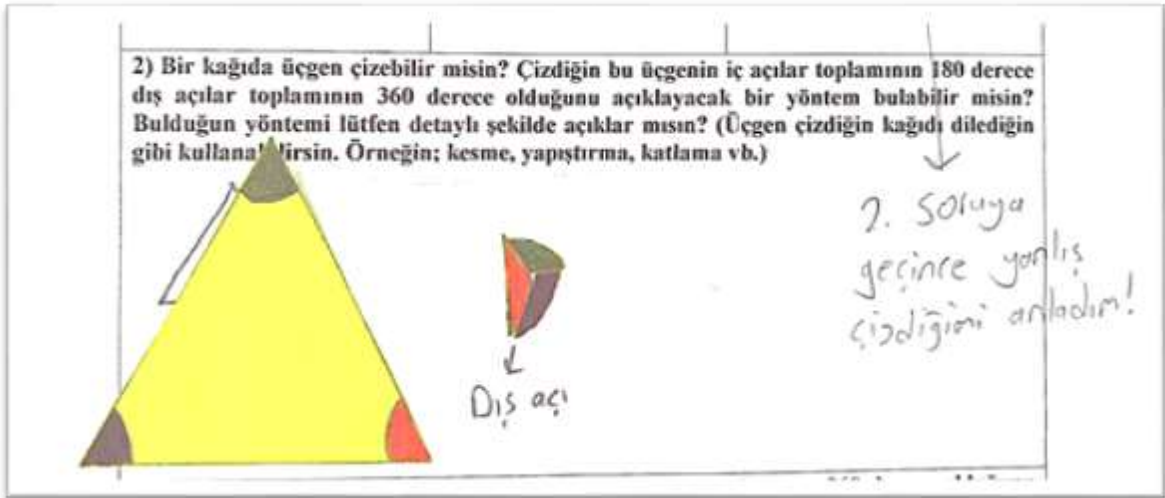
Özlem'in Durumu

Üçgende açı etkinliğinin birinci sorusunda Şekil 18'de görüldüğü gibi Özlem iç açıyı üçgenler üzerinde doğru göstermiş, ancak dış açıyı yanlış göstermiştir. Özlem, iç açıyı doğru göstermiş ancak aynı açığa ait dış açıyı iç açının yansıması olarak ifade etmiştir. Fakat öğrenci etkinliğin görselleştirme ile ilgili olan ikinci sorusuna yanıt ararken dış açıyı yanlış gösterdiğini kendisi fark ederek bu soruya geri dönüp soru üzerine "2. Soruya geçince yanlış çizdiğimi anladım!" notunu belirtmiştir. Bu durumun görselleştirme yaparken bilgide yaşanan değişimi ortaya koyması sebebiyle öğrencinin muhakeme yapabildiğini ortaya çıkardığı söylenebilir.



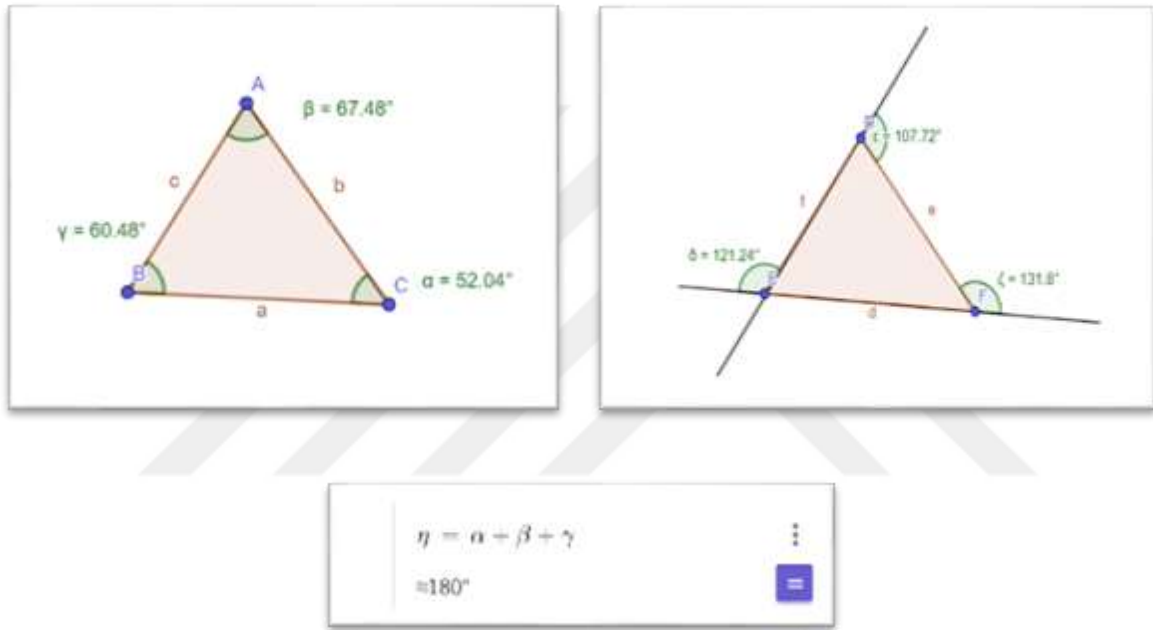
Şekil 18 Özlem'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

Özlem etkinliğin ikinci sorusunda iç açıların ölçüleri toplamının 180 derece olduğunu farklı bir yöntemle açıklayamazken, dış açıların toplamının 360 derece olduğunu Şekil 19'da görüldüğü gibi aynı renge boyadığı iç açının dış açılarına kesip birleştirerek üç dış açının ölçüleri toplamının 360 derece olduğunu açıklamıştır.



Şekil 19 Özlem'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Etkinliğin üçüncü sorusunda Özlem GeoGebra yazılımında çizdiği herhangi bir üçgenin iç açılarını açı aracı ile ölçtüğü gözlenmiş, sonra ölçtüğü açılar cebir penceresinde sembolleri ile topladığında Şekil 20’de görüldüğü gibi toplamın 180 derece olduğunu göstermiştir. Öğrenci GeoGebra ile üçgeni oluşturarak oluşturma aşamasını tamamlayarak aynı zaman üçgeni ile görsel olarak ifade etmiştir diyebiliriz. Yine benzer şekilde çizdiği farklı bir üçgenin dış açılarını açı aracı ile ölçmüş; ancak dış açılar ölçülerini topladığında toplamda $107,72 + 131,8 + 121,24 = 360,76$ ’ya ulaşmıştır. Bunun sebebi olarak dış açıyı ölçmek için doğru üzerinde seçtiği noktaları kendisi rastgele işaretlediği için ölçtüğü dış açılar ölçüleri toplamını yanlış bulmuştur.



Şekil 20 Özlem’in etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt

Üçgende Açı Konusuna Yönelik Durumların Karşılaştırılması

Üçgende açı ile ilgili etkinlikte öğrencilerin tamamı etkinlik kâğıdı üzerinde iç açıyı doğru belirlerken, sorunun dış açıyı göstermeye yönelik kısmına tamamı doğru olmasa da Merve hariç diğer dört öğrenci yanlış cevap vermişlerdir. Öğrencilerden Kaan, Deniz, Serap ve Özlem’in dış açıyı üçgen üzerinde göstermeyle ilgili soruya doğru cevap veremedikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin üçgenin iç açısını şekil üzerinde doğru belirledikleri, ancak dış açı kavramına yönelik eksik bilgiye sahip oldukları, bu nedenle dış açıyı, iç açının ters açısı şeklinde ya da tam açıya tamamladıkları, yani o köşede bulunan yansık açıyı dış açı olarak gösterdikleri görülmüştür. Dış açıya yanlış cevap veren öğrencilerin tamamı dış açıyı yanlış gösterdiklerini etkinliğin ikinci sorusuna çözüm ararken kendileri fark etmiş ve soruya geri dönüp soru üzerine not düşmüşlerdir. Görselleştirme sürecinde öğrencilerin verilen şeklin

geometrik özelliklerini şekle aktarmayı ve şeklin açılarını belirleyebildikleri söylenebilir. Öğrencilerin tamamının görselleştirme boyutunun özelliklerini taşıdığı iddia edilebilir.

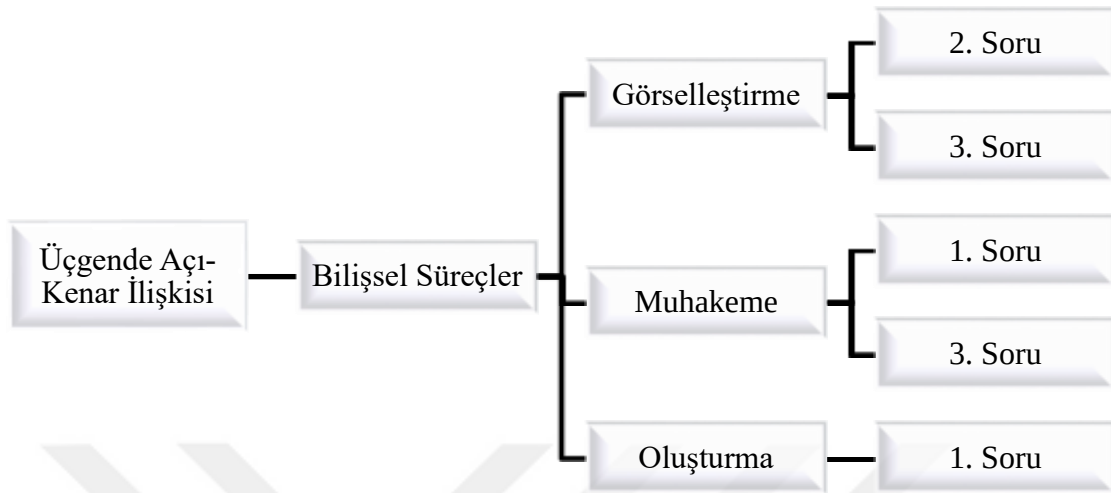
Üçgende açı etkinliğinin üçüncü sorusu için GeoGebra ortamında cevap vermeleri istenmiştir. Muhakeme ve oluşturma boyutu ile ilgili olan bu etkinlik eğer öğrenci kurduğu matematiksel ilişkiyi sözel ifade ve önermelerle ifade edebiliyorsa muhakeme boyutu becerilerini taşımaktadır şeklinde yorumlanmıştır. Bu soruda Özlem'in yanıtının Merve'nin yanıtı ile benzer olduğu görülmüştür. Bu durum bu iki öğrencinin GeoGebra programının özelliklerinden yararlanmadığını, programı sadece açı ölçmek için bir araç olarak kullandığını göstermektedir. Bu durum oluşturma ve görselleştirme boyutu ile ilgili olan ikinci soruya verdikleri cevaplarla benzer özellik taşımaktadır. Bu sebeple her iki öğrencinin üçgende açı ile ilgili olarak oluşturma boyutu becerilerini GeoGebra ortamında yansıtmadıkları iddia edilebilir.

Öğrencilerden Kaan ve Deniz ise üçüncü soruda GeoGebra programında paralel doğru çizim aracından yararlanarak paralel doğrular çizip, bu doğrular üzerinde noktalar belirleyerek üçgen oluşturmuşlardır. Oluşturdukları üçgenin iç ve dış açıları belirleyerek ölçüm yaptılar. Son olarak da belirledikleri iç açıların ölçüleri toplamının 180 derece, dış açıların ölçüleri toplamının 360 derece olduğunu cebir penceresinden yararlanarak göstermişlerdir. Sonra öğrenciler, GeoGebra programının sürüklemeye özelliğinden yararlanarak üçgenler değişse de açıların toplamının aynı kaldığını açıkladılar. Deniz, Kaan ve Serap'ın görselleştirme, oluşturma ve muhakeme boyutunun becerilerine sahip olduğu; ancak Deniz ve Kaan'ın muhakemeyi ispat ve önermelerle değil sözel ifadelerle açıklayarak yaptıklarını; Serap'ın ise değişkenlerden yararlanarak cebirsel bir muhakeme yapabildiği iddia edilebilir.

4.1.2. Üçgende Açı-Kenar İlişkisi

Bu etkinliğin ilk sorusu bilişsel muhakemenin oluşturma ve muhakeme boyutu ile ilgilidir. Öğrencilerin herhangi bir üçgende uzun kenar karşısındaki açının büyük açı, kısa kenar karşısındaki açının küçük açı olduğunu keşfetmesi beklenmektedir. Öğrenci GeoGebra programının araç menülerini kullanarak üçgeni oluşturup üçgenin açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını ölçebiliyor ise görselleştirme ve oluşturma aşamasını gerçekleştirebiliyor, üçgende açı ve kenar uzunlukları arasındaki kurduğu matematiksel ilişkiyi sözel olarak ifade edebiliyorsa muhakeme yapabiliyor şeklinde yorumlanmıştır. Üçgende açı-kenar ilişkisi etkinliğinin ikinci sorusu kâğıt üzerinde görsel sorulara doğru yanıt verip veremediğini görmeyi amaçlamaktadır ve görselleştirme boyutu ile ilgilidir. Bu etkinliğe ait üçüncü soru ise, muhakeme ve görselleştirme boyutu ile ilgilidir. Eğer öğrenciler kurduğu matematiksel ilişkiyi sözel ifade ve önermelerle ifade edebiliyorsa muhakeme boyutu becerilerini taşımaktadır.

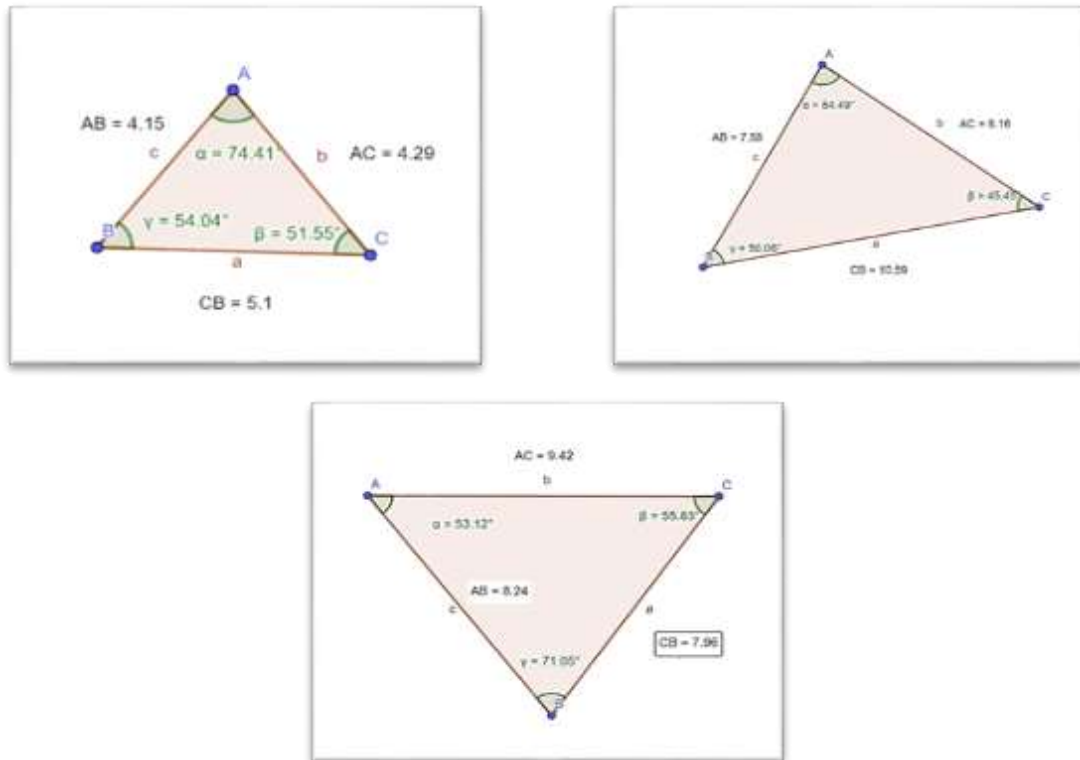
Benzer şekilde, öğrenci şekil üzerindeki görsel bilgilerden yararlanarak doğru çıkarımda bulunabiliyorsa görselleştirme yapabiliyor şeklinde yorumlanmıştır. Soruların ilgili olduğu bilişsel muhakeme boyutları Şekil 21’de gösterilmiştir.



Şekil 21 İkinci etkinlik sorularının ilgili olduğu bilişsel boyutlar

Kaan'ın Durumu

Kaan, ilk olarak GeoGebra’da bir ABC üçgeni çizmiştir. Çizdiği üçgenin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini ölçmüş ve ölçtüğü değerleri etkinlik kâğıdı üzerine not almıştır. Çizdiği bu üçgeni GeoGebra’nın özelliğini kullanarak köşe noktalarından tutup sürükleyerek Şekil 22’de görüldüğü gibi üç farklı üçgen elde etmiştir.



Şekil 22 Kaan'ın etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

Kaan farklı üçgenlerin açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını belirlemiştir. Belirlediği açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını karşılaştırdıktan sonra araştırmacı ve Kaan arasında şu şekilde bir diyalog geçmiştir:

Araştırmacı: Elde edilen üçgenlerin açıları ve kenarları arasında herhangi bir matematiksel ilişki var mı? Varsa açıklayabilir misin?

Kaan: Açının karşısındaki aralık açılınca açı artıyor, aralık azalınca açı azalıyor.

Araştırmacı: Ne demek istediğini tam anlayamadım bana biraz detaylı açıklayabilir misin?

Kaan: Yani kenar uzunluğu ve karşısındaki kenar orantılı artıyor.

Araştırmacı: Söylediklerin birbirini tamamlıyor ama bu gördüğün ilişkiyi daha net toparlayabilir misin? Biraz düşün istersen...

Kaan: Hımm, hocam ben bu not aldıklarımın hepsine aynı anda bakınca şunu farkettim: Kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini birbiri arasında sıraladığımda kenarı gören açı ile kenar uzunluklarının aynı şekilde sıralandığını gördüm.

Araştırmacı: Peki sen şu an üç üçgen için bu sonuca ulaştın. Bu durum bütün üçgenler için böyle midir?

Kaan: Yani üç üçgenimde aynısı oldu.

Araştırmacı: Kendin çoğaltsan bu durumu başka bildiğin üçgenler var mı?

Kaan: İkizkenar, eşkenar mesela.

Araştırmacı: Mesela eşkenarı ele alalım. Bu az önce kurduğun ilişki ile eşkenar üçgen arasında bir ilişki kurabilir misin?

Kaan: (gülümseyerek) Olur olur.

Araştırmacı: Ne oldu niye gülümsedin? Bir şey mi fark ettin?

Kaan: Evet ya hocam kenar uzunlukları eşit olduğu için açılar eşit oluyor.

Araştırmacı: Peki tam tersi olur mu?

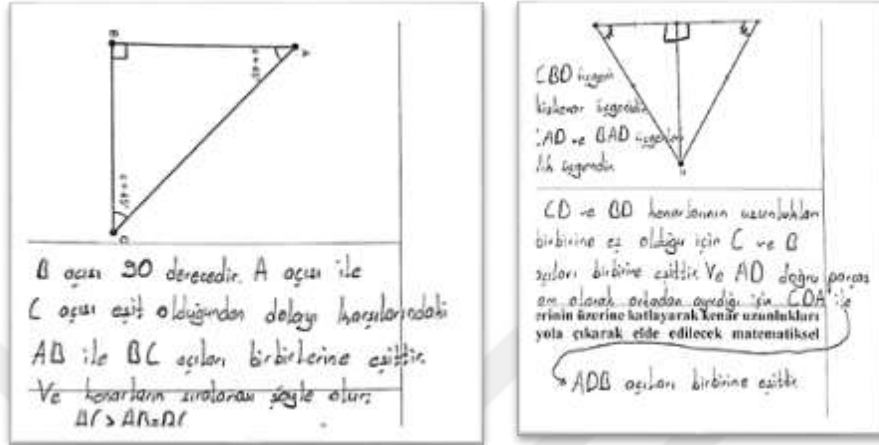
Kaan: Olur, evet açı eşit olduğu için kenarlar eşittir.

Araştırmacı: Peki ikizkenar üçgeni düşünsen?

Kaan: İki tane kenarı eşit olduğu için ona bakan açılar eşit olur.

Kaan ve araştırmacı arasında geçen bu diyalogdan öğrencinin eşkenar ve ikizkenar üçgenin eş açılara sahip olmalarının nedenini keşfettiği söylenebilir. Ayrıca üçgeni GeoGebra aracılığıyla çizibildiğini ve yazılımın dinamik özelliğinden yararlanarak üçgende açı ve kenar ilişkisi ile ilgili olarak sözel muhakeme yapabildiği iddia edilebilir. Benzer şekilde, yaptığı çıkarımlardan ve yazılımdan elde ettiği sonuçları birleştirerek kenarlarına göre üçgen çeşitleri bağlamında doğru çıkarımlar yapabildiği ifade edilebilir.

Kaan etkinliğin görselleştirme ile ilgili olan ikinci sorusuna Şekil 23'te gösterildiği gibi ikizkenar dik üçgen ve ikizkenar üçgenin açı ve kenarları ile ilgili üçgenler üzerinde gösterilen görsel bilgilerden hareketle doğru çıkarımlarda bulunabilmiştir. Bu nedenle yaptığı çıkarımlar ve cevapların doğruluğuna dayanarak üçgende açı-kenar ilişkisi ile ilgili görselleştirme ve muhakeme yapabildiği iddia edilebilir.



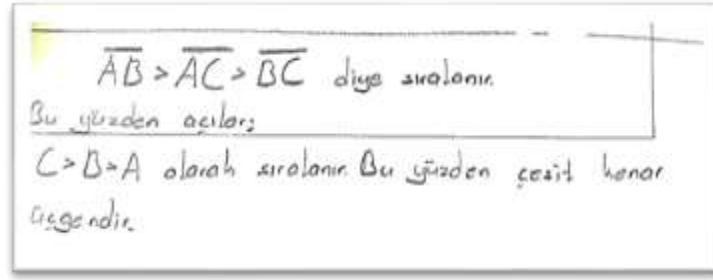
Şekil 23 Kaan'ın etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Bu etkinliğin son sorusunda öğrenciden kâğıt katlama yaparak üçgende kenar ve açı özellikleri hakkında çıkarımda bulunması beklenmektedir. Bu soruda Kaan, ilk olarak kâğıda Şekil 24'te görüldüğü gibi rastgele bir ABC üçgeni çizmiştir.



Şekil 24 Kaan'ın etkinliğin üçüncü sorusunda katladığı üçgen

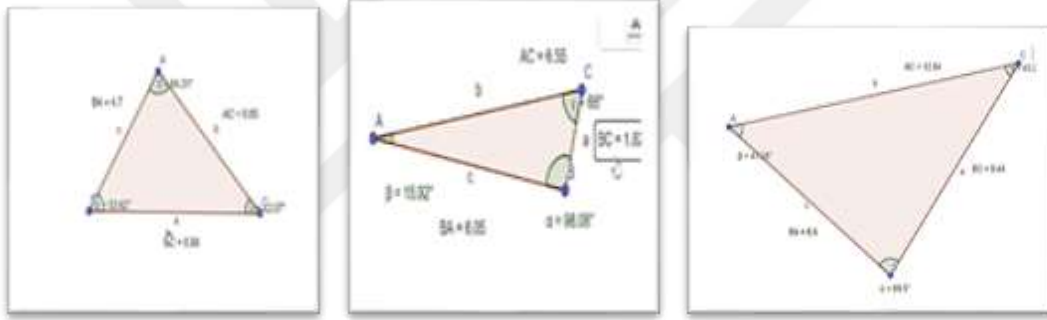
Kaan, çizdiği üçgenin kenarlarını AB, AC ve BC şeklinde isimlendirmiştir. Sonra kenarları birbiri üzerine katlayarak Şekil 25'te görüldüğü gibi $AB > AC > BC$ şeklinde sıralama yapmıştır. Bu sıralamaya bağlı olarak bu kenarları gören açıları da $C > B > A$ şeklinde sıralamıştır. Öğrenci kâğıt katlama aracılığı ile görselleştirme yapmış ve bu görselleştirme sayesinde muhakeme de yaptığı şeklinde yorum yapılabilir.



Şekil 25 Kaan'ın etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt

Deniz'in Durumu

Deniz, GeoGebra'da bir ABC üçgeni çizmiştir. Çizdiği üçgenin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini ölçmüş ve ölçtüğü değerleri etkinlik kâğıdı üzerine not almıştır. Oluşturduğu bu üçgeni köşe noktalarından tutup sürükleyerek Şekil 26'da görüldüğü gibi üç farklı üçgen elde etmiştir. Öğrencinin bir araç yardımı ile yani GeoGebra'nın araç menülerinden yararlanarak üçgen çizebilmesinden dolayı oluşturma aşamasını gerçekleştirdiği söylenebilir.



Şekil 26 Deniz'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

Şekil 26'daki üçgenleri elde ederken Deniz, GeoGebra'da üçgenleri köşe noktalarından tutup çekerek basit şekilde başka bir üçgen oluşturma işini çok eğlenceli bulduğunu ifade etmiştir. Burada GeoGebra'nın dinamikliğinin problem durumlarını kolaylaştırıcı olduğu söylenebilir. Daha sonra araştırmacı ve Deniz arasında şöyle bir konuşma geçmiştir.

Araştırmacı: Şimdi elinde not aldığın bir sürü veri oldu. Bu not aldığın açılar ve bu açıları gören kenarlar arasında bir ilişki var mı sence?

Deniz: Hipotenüs olayını bildiğim için vardır derim.

Araştırmacı: Hımm, nasıl yani? ne demek? hipotenüsü bildiğim için derken ne demek istedin?

Deniz: Açı büyüyor, diğerlerinden büyük olunca da en uzun kenar dediğimiz hipotenüsün karşısına geliyor ya ondan. Yani uzun kenar büyük açının karşısına geliyor.

Araştırmacı: Aslında sen bu durumu hipotenüs olayı diye zihnine kodlamışsın diyebilir miyiz?

Deniz: Evet. (GeoGebra’da çizdiği üçgeni sürükleme yoluyla değiştirmeye devam ediyor).

Bu konuşmadan öğrencinin dik üçgende hipotenüs uzunluğunun en uzun kenar olduğu bilgisine sahip olduğu görülmektedir. Aynı zamanda öğrencinin daha önce sahip olduğu bilgiyi buradaki duruma kolayca aktarabildiği de söylenebilir.

Araştırmacı: Kenarlar ve açı arasında bir ilişki fark ettin mi?

Deniz: Kenarın uzunluğu sıralaması gibi, açının büyüklüğü sıralaması var.

Araştırmacı: Peki, bu düşündüğün şey bütün çizdiğin üçgenlerde geçerli midir?

Deniz: Evet, hepsinde aynı sıralama oluyor.

Araştırmacı: Peki, az önce bahsettiğin hipotenüs olayını bu yaptığın çıkarıma göre açıklar mısın?

Deniz: En büyük açı karşısında en büyük kenar, ortanca açı karşısında ortanca kenar, en küçük açı karşısında en küçük kenar oluyor.

Araştırmacı: Peki. Bu şekilde açıklayabileceğin başka üçgen çeşitleri aklına geliyor mu?

Deniz: Ha! ikizkenarda açılar ondan eşit şimdi anladım.

Araştırmacı: Tebrikler. Harika bir çıkarımda bulundun. Başka bir örnek geliyor mu aklına?

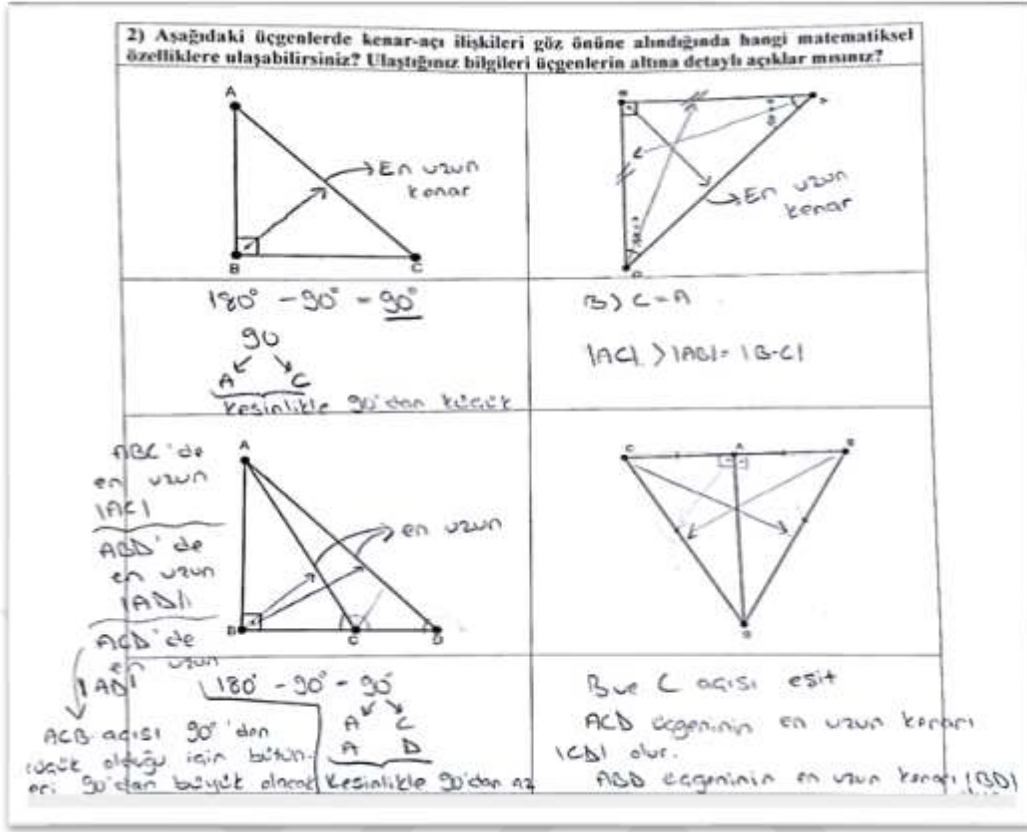
Deniz: Çeşitkenar, bütün kenarlar farklı olduğu için bütün açılar da farklı... Aaa eşkenar var bunların hepsi aynı ya. Onda da kenarlar eşit, açılar da eşit. Keşke bunları daha önce söyleselerdi ya.

Araştırmacı: Neden söylesinler bak bütün hepsine sen ulaştın hiç unutmayacaksın işte ne güzel.

Deniz: Bize hiç söylemiyorlar böyle şeylerin nedenlerini.

Araştırmacı: Kimsenin söylemesine gerek yok. Sen bütün bildiklerinle çok güzel bir sonuca ulaştın. Kalıcı olduğunu düşünüyorum bu bilginin sende.

Deniz’in üçgende açı-kenar ilişkisine dair yukarıda yaptığı eşkenar üçgen ve ikizkenar üçgen özelliklerine ait olan sözel çıkarımların bilişsel olarak üst düzeyde olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü kendi bilgisi ile GeoGebra’nın özelliklerinden yararlanarak ulaştığı sonuçların zihnindeki üçgenler şemasını değiştirdiği iddia edilebilir. Bu durumda bilgede değişikliğe sebep olduğu için öğrencinin iyi düzeyde muhakeme yapabildiği ifade edilebilir.



Şekil 27 Deniz'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Etkinliğin görselleştirme ile ilgili olan ikinci sorusunda Şekil 27'de görüldüğü gibi görsel olarak birbirinden farklı dört üçgen verilmiştir. Deniz'in birinci soruda yaptığı çıkarıma göre verilen üçgenler üzerindeki sembolleri dikkate alarak açı-kenar ilişkisi hakkında ulaştığı sonuçları açıklaması beklenmektedir. Şekil 27'de gösterildiği gibi ikizkenar dik üçgen ve ikizkenar üçgenin açı ve kenarları ile ilgili üçgenler üzerinde gösterilen görsel bilgilerden hareketle doğru çıkarımlarda bulunabilmiştir. Hipotenüs ve üçgende açı-kenar ilişkisini açıklayabilen öğrencinin hem dik üçgende hem de ikizkenar üçgende açıların karşısındaki kenarlara bakarak görselleştirme yapabildiği söylenebilir.

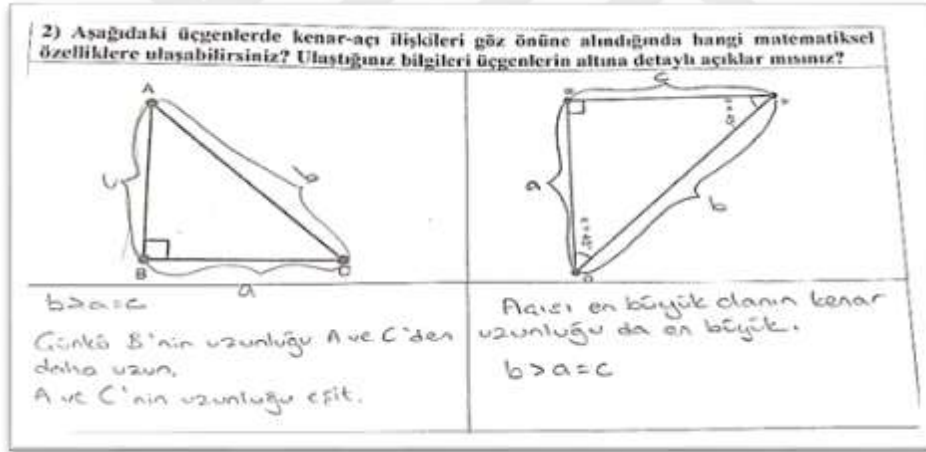
Deniz etkinliğin son sorusunda Şekil 28'deki gibi bir ABC üçgenini kesip kenarlarını birbiri üzerine katlayarak üçgenin kenar uzunlukları ve açıları arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak sembollerle açıklamıştır. Deniz'in üçgende açı-kenar etkinliğinin bütün sorularına verdiği cevaplara dayanarak, oluşturma, görselleştirme ve muhakemeyi sorunsuz yapabildiği ifade edilebilir.

Elde edilen verilere göre üçgenin kenar uzunlukları ve açı ölçüleri arasında matematiksel bir ilişki var mı? Cevabınız evet ise bu ilişkiyi açıklayınız?

Evet vardır. Kenar uzunluğuna göre açı ölçüsü değişiyor.
Kenar uzunluğu en küçükse açı da en küçüktür.
Kenar uzunluğu en büyükse açı da en büyüktür.

Şekil 30 Serap'ın etkinliğin 1. sorusuna yaptığı açıklama

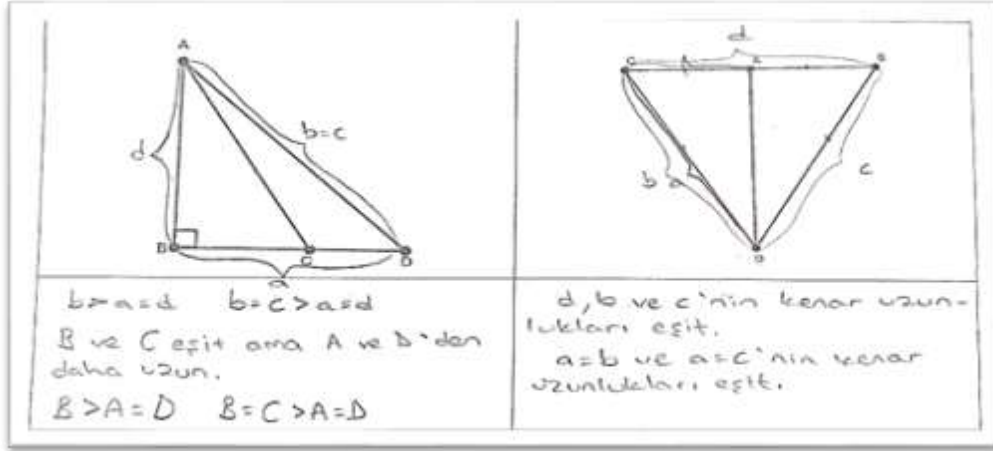
Serap etkinliğin görselleştirme ile ilgili olan ikinci sorusuna şekil üzerindeki çizimlerden yola çıkarak kendi zihinsel prototipine uygun olacak şekilde açı ölçülerini bilmeden çıkarımda bulunmuştur. Yaptığı görselleştirmenin bazılarının doğru, bazılarının ise yanlış olduğu gözlenmiştir. Örneğin, Şekil 31'de görüldüğü üzere birinci soruda verilen dik üçgeni açıları bilmeden ikizkenar dik üçgen olarak yorumlayarak yanlış çıkarımda bulunmuştur. İkinci soruda verilen ikizkenar dik üçgenin kenar ve açı özelliklerine göre yaptığı açıklama doğru bir görselleştirme yaptığını göstermektedir.



Şekil 31 Serap'ın etkinliğin 2. Sorusuna verdiği yanıt

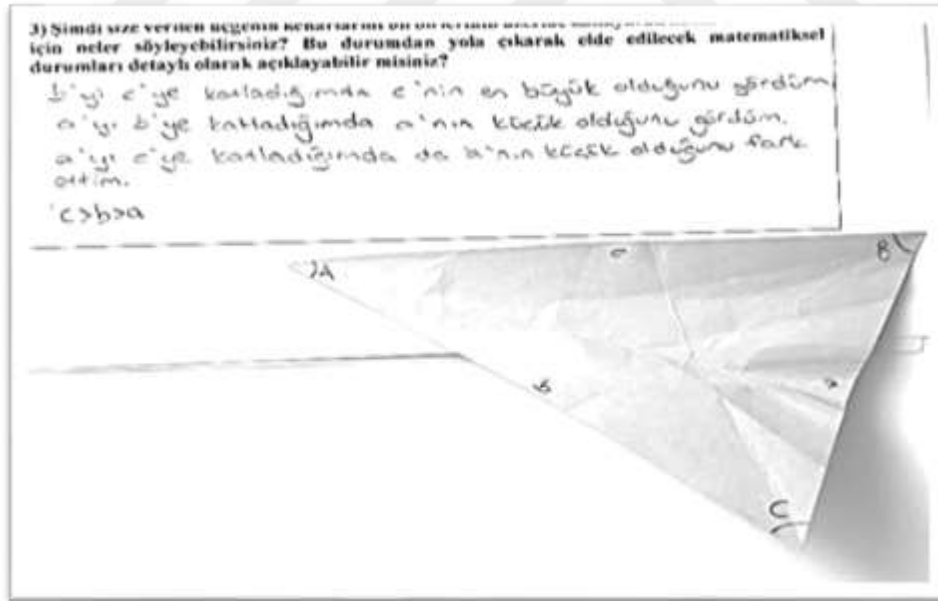
Etkinliğin ikinci sorusunda yer alan diğer üçgen sorularında aynı kenarı gören açılar farklı üçgenlerde bile olsa açığı eşit kabul etmiştir. Bu durum Şekil 31'de gösterilen cevaplardan anlaşılmaktadır. Örneğin; ilk soruda ABC üçgenindeki B açısının gördüğü kenarları b ve ACB üçgeninde C açısının gördüğü kenarı c şeklinde ifade etmiştir. ABC açısı 90 derece, ACB açısı geniş açı olmasına rağmen bu açıların gördüğü kenarları $b=c$ şeklinde göstermiştir. Yine benzer şekilde ikizkenar üçgen olarak verilen Şekil 32'de ikinci soru için yanlış çıkarımda bulunarak d, b, c kenar uzunlarının eşit olduğunu ifade ederek üçgeni eşkenar üçgen olarak göstermiştir. Bu durumda Serap'ın oluşturmaya bağlı muhakeme yapabildiğini;

ancak bu durumu farklı üçgen çeşitlerinin açı-kenar ilişkisini açıklarken tamamen doğru biçimde kullanamadığı ifade edilebilir.



Şekil 32 Serap'ın etkinliğin 2. Sorusuna verdiği yanıt

Bu etkinliğin kâğıt katlama gerektiren son sorusunda Serap bir kâğıda rastgele bir ABC üçgeni çizmiş, çizdiği ABC üçgeninin kenarlarını açıları gören kenarlar olacak şekilde a, b, c şeklinde isimlendirmiştir. Şekil 33'teki gibi kenarları birbirinin üzerine katlayarak kenarların uzunluklarını karşılaştırmış; ancak açılar hakkında herhangi bir yorum yapmadığı görülmüştür.



Şekil 33 Serap'ın etkinliğin 3. Sorusuna verdiği yanıt

Serap açı-kenar arasındaki ilişki hakkında açıklama yapmadığı için, açı-kenar ilişkisi ile ilgili bu etkinliğe verdiği cevaplar bütüncül biçimde düşünüldüğünde; öğrencinin muhakeme değil, durumlara uygun açıklama yapabildiği ancak karşılaştığı farklı durumlara uyarlayamadığı için muhakemeyi doğru olarak yapamadığı iddia edilebilir. Buna gerekçe

olarak, eğer muhakeme yapabilseydi bu bilgiyi tutarlı şekilde bütün sorular üzerinde doğru olarak uygulayabilirdi şeklinde yorumlanabilir.

Serap'ın üçgende açı-kenar ilişkisine yönelik gerçekleştirilen etkinliğin başından sonuna üçgende açı-kenar konusuna ait sahip olduğu doğru bilgide olumlu yönde bir değişim gösterdiği gözlenmiştir. Serap görselleştirme boyutunda hatalı çıkarımlarda bulunmasına rağmen, son olarak kâğıt katlayarak yaptığı muhakemede sahip olduğu bilgide değişiklik yaşamış ve doğru bir muhakeme gerçekleştirmiştir. Üçgende açı-kenar ilişkisine yönelik etkinlik soruları görselleştirme becerilerini ve oluşturma becerilerini ayrı ayrı ön plana çıkardığı için birini doğru şekilde gerçekleştiremeyen Serap başka bir beceri gerektiren soruda doğru cevap vermiştir.

Merve'nin Durumu

Merve etkinliğin üçüncü sorusunda GeoGebra'da bir ABC üçgeni çizmiştir. Çizdiği bu ABC üçgeninin köşe noktalarından tutup sürükleyerek iki farklı üçgen çizmiş, üçgenin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini etkinlik kâğıdı üzerine göstermiştir. Merve üçgenin açılarını a, b, c şeklinde isimlendirirken, kenar uzunluklarını A, B ve C şeklinde isimlendirmiştir. Merve'nin isimlendirdiği bu üçgenlerden ikinci üçgeni ele alarak kenar uzunlukları ve açı ölçülerini karşılaştırarak Şekil 34'te görüldüğü gibi açı ve kenar ilişkisi hakkında doğru bir açıklama yaptığı görülmektedir. Öğrencinin oluşturma yapabildiği ve buna bağlı olarak muhakeme gerçekleştirdiği söylenebilir.

Tablo 2. İkinci ABC üçgenine ait bilgiler			
Kenar	Kenar uzunluğu	Açı ölçüsü	Açı
A	BC = 5.18	a	38.2°
B	CA = 6.82	b	54.18°
C	AB = 8.53	c	87.6°

Tablo 3. Üçüncü ABC üçgenine ait bilgiler			
Kenar	Kenar uzunluğu	Açı ölçüsü	Açı
A	BC = 6.42	a	43.25°
B	CA = 7.36	b	51.72°
C	AB = 8.33	c	84.97°

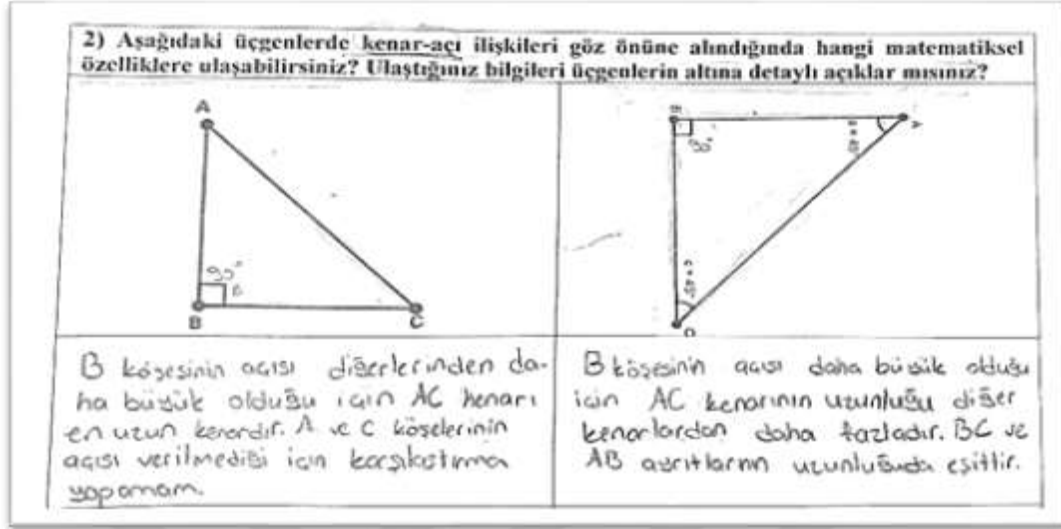
Elde edilen verilere göre üçgenin kenar uzunlukları ve açı ölçüleri arasında matematiksel bir ilişki var mı? Cevabınız evet ise bu ilişkiyi açıklayınız?

Evet, vardır. Üçgenlerin kendi içerisinde karşılaştırıldığında mesela 2. Üçgende kenarları karşılaştırdığımızda " $C > B > A$ " şeklinde olur, aynı şekilde açılarda " $c > b > a$ " şeklinde karşılaştırılır. Diğer üçgenlerde de aynı şekilde değişir.

Şekil 34 Merve'nin etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

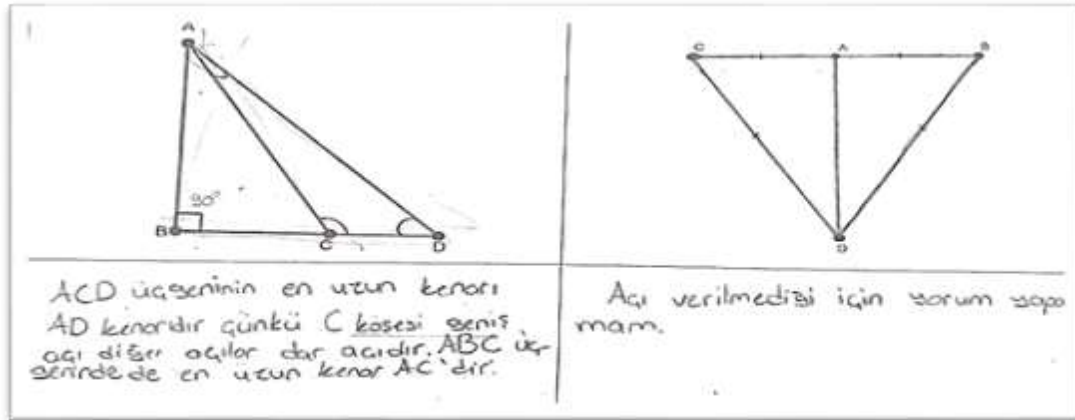
Merve etkinliğin görselleştirme ile ilgili olan ikinci sorusuna Şekil 35'te gösterildiği gibi cevap vermiştir. İkizkenar dik üçgen ve ikizkenar üçgenin açı ve kenarları ile ilgili üçgenler

üzerinde gösterilen görsel bilgilerden hareketle doğru çıkarımlarda bulunabilmiştir. Buradan öğrencinin birinci soruda ulaştığı açı ve kenarlar arasındaki ilişkiye yönelik çıkarımı bu soruda doğru kullandığı ve bu duruma uygun görselleştirme yapabildiği söylenebilir.



Şekil 35 Merve'nin etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

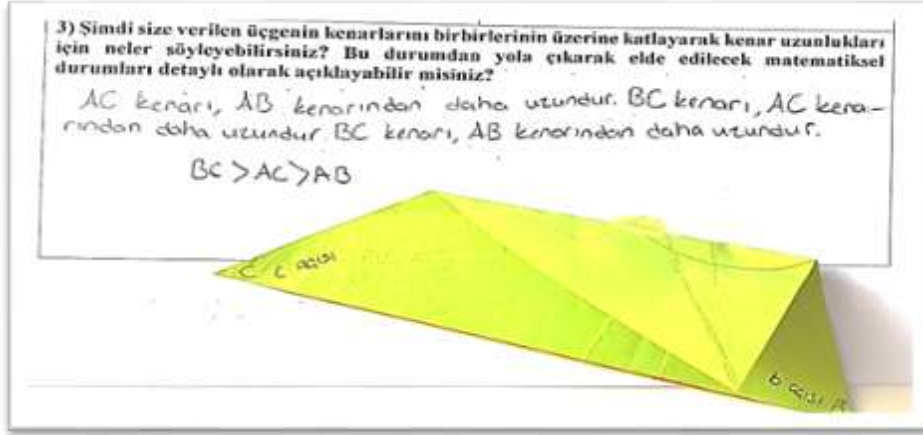
Ek olarak, Merve'nin 90 dereceye sahip açının dik üçgende en büyük açı olduğu ve geniş açının karşısındaki kenarın en uzun kenar olduğuna yönelik çıkarımları dik üçgen ve geniş açı içeren üçgen sorusuna verdiği Şekil 36'da görülen yanıtta anlaşılmaktadır. Ancak ikizkenar üçgen olarak verilen ikinci soruda kenar uzunluklarının eşitliğini kullanarak açılar hakkında yorum yapamadığı görülmektedir. Merve'nin ikizkenar üçgenin eş açıları ve eşit uzunluktaki kenarları için bir açı-kenar ilişkisi kuramadığı söylenebilir.



Şekil 36 Merve'nin etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Bu etkinliğin kâğıt katlama gerektiren son sorusunda Merve, bir kâğıda rastgele bir ABC üçgeni çizmiş, çizdiği üçgenin kenarlarını AC, AB, BC şeklinde isimlendirmiştir. Şekil 37'deki gibi kenarları birbirinin üzerine katlayarak kenarların uzunluklarını $BC > AC > AB$ şeklinde

karşılaştırmış, ancak açılar hakkında herhangi bir yorumda bulunmamıştır. Buna göre, Merve'nin üçgende açı-kenar ilişkisi ile ilgili görselleştirme yapabildiği ama derinlemesine bir muhakemeye yapamadığı ifade edilebilir.

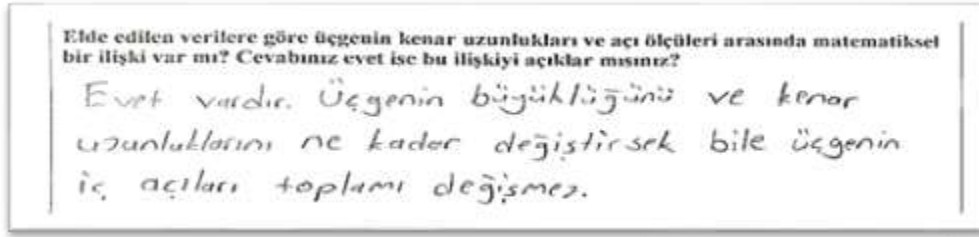


Şekil 37 Merve'nin etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt

Merve'nin, birinci soruda GeoGebra'da çizdiği üçgen üzerinde görselleştirmeden yararlanarak açı ve kenarlar arasında doğru bir ilişki kurabildiği iddia edilebilir. Dolayısıyla Merve oluşturma aşamasında tamamladığı üçgenleri, aynı zamanda görsel olarak ifade edebildiği için bu durumda oluşturma aşamasının görselleştirme aşamasına yardımcı olduğu ifade edilebilir. Ancak ikinci soruda oluşturma aşaması olmadan doğrudan görsel olarak verilen üçgen çeşitlerinde Merve'nin yaptığı çıkarımların bazılarının hatalı ve eksik olduğu gözlenmiştir. Bu nedenle birinci soruda oluşturma aşaması ile birlikte yapılan açı-kenar ilişkisine ait çıkarımın doğru olduğu söylenebilir. Açı-kenar ilişkisi hakkında gerçekleşen bu durum, oluşturma görselleştirmeye olumlu etkisi şeklinde açıklanabilir.

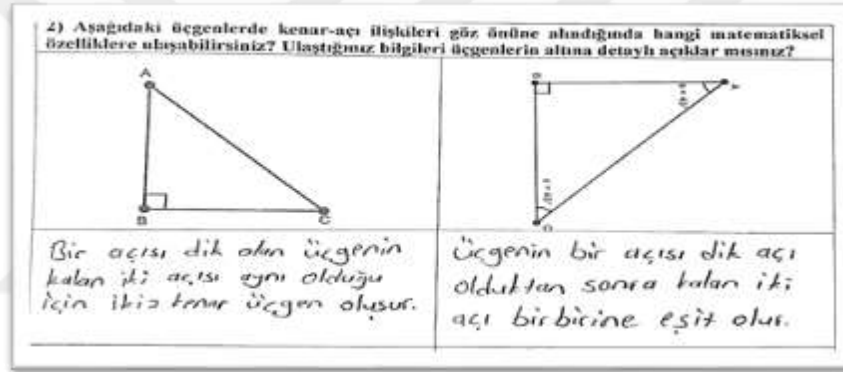
Özlem'in Durumu

Özlem, etkinliğin üçüncü sorusunda GeoGebra programında bir ABC üçgeni çizdi. Bu üçgenin köşe noktalarını tutup GeoGebra'nın sürükleme özelliğinden yararlanarak farklı konumlara getirerek iki farklı üçgen daha elde etti. Bu yeni üçgenlerin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini etkinlik kâğıdına kaydetti. Özlem, üçgenin açılarını A, B ve C harfleriyle, kenar uzunluklarını ise a, b ve c harfleriyle adlandırdı. Oluşturduğu bu üçgenler arasında açı ve kenarlar arasında bir ilişki kuramamıştır. Kurduğu tek ilişkinin, bütün üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamının 180 derece olduğu bilgisi olduğu görülmektedir. Bu durum birinci soru için yaptığı Şekil 38'deki açıklamadan anlaşılmaktadır. Yaptığı bu çıkarımın doğru, ancak üçgende açı-kenar ilişkisini açıklamaya yeterli olmadığı söylenebilir. Öğrencinin GeoGebra kullanarak görselleştirme yapabildiği, ancak buna bağlı muhakeme yapamadığı iddia edilebilir.



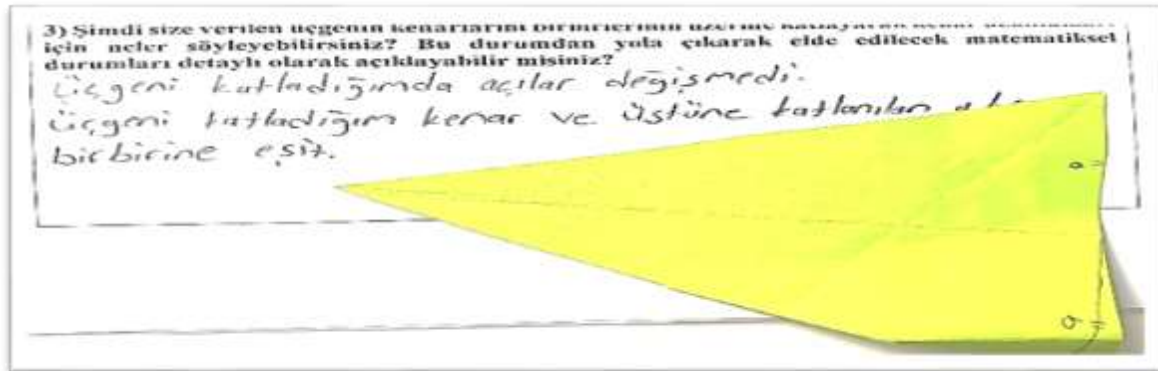
Şekil 38 Özlem'in etkinliğin 1. sorusuna verdiği yanıt

Özlem etkinliğin görselleştirme ile ilgili olan ikinci sorusunda, ilk şekil üzerindeki çizimlerden yola çıkarak kendi zihinsel dik üçgen prototipine uygun olacak şekilde açı ölçülerini bilmeden çıkarımda bulunmuştur. Şekil 39'da yaptığı görselleştirmenin ilkinin yanlış, ikincisinin ise doğru olduğu görülmektedir. Ancak bu görselleştirmeye dair yaptığı açıklama ilk soruda olduğu gibi sadece açılara yönelik olduğu için Özlem'in açı ve kenar ilişkisi hakkında görselleştirme yapamadığı ifade edilebilir.



Şekil 39 Özlem'in etkinliğin 2. sorusuna verdiği yanıt

Bu etkinliğin kâğıt katlama gerektiren son sorusunda Özlem, bir kâğıda rastgele bir üçgen çizmiş, çizdiği üçgenin kenarlarını katladığında açılar değişmediğine dair Şekil 40'ta görüldüğü gibi bir açıklamada bulunmuştur. Bu açıklama, Özlem'in ikinci soruya yaptığı açıklamaya benzer şekilde sadece üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamına odaklandığını ve bu konuya dair muhakeme yapamadığını göstermektedir.



Şekil 40 Özlem'in etkinliğin 3. sorusuna verdiği yanıt

Özlem bu etkinliğin ilk sorusu olan GeoGebra’da üçgen oluşturma aşamasını gerçekleştirememiştir, buna bağlı olarak da doğru görselleştirmeler yapamamıştır. Bu durum oluşturulan herhangi bir geometrik şeklin oluşturulurken aynı zamanda doğal olarak görselleştirildiği durumunu desteklediği söylenebilir. Oluşturma ve görselleştirmeyi doğru yapamayan öğrenci bunlara bağlı olarak muhakeme de yapamamıştır. Bu nedenle bu konuya uygun diğer boyutların becerilerini gerçekleştiremediği için muhakeme sürecini tamamlayamadığı iddia edilebilir.

Üçgende Açı-Kenar İlişkisine Yönelik Durumların Karşılaştırılması

GeoGebra ortamında gerçekleştirilen ve görselleştirme ve oluşturma boyutunun becerilerini taşıyan ilk soruda bütün öğrenciler GeoGebra’da bir üçgen çizmiş, sonra üçgeni köşe noktalarından sürükleyerek farklı sayılarda üçgenler oluşturmuşlardır. Oluşturdukları üçgenlerin açı ölçüleri ve kenar uzunluklarını GeoGebra’nın araçlarını kullanarak ölçmüşlerdir. Kaan, Deniz, Serap ve Merve üçgenlerin kenar ve açılarını karşılaştıklarında büyük açıyı gören kenarın uzun kenar, küçük açıyı gören kenarın kısa kenar olduğunu fark etmişlerdir. Ancak Özlem’in açıları ve kenarlar arasında bir ilişki kuramadığı gözlenmiştir. Buradan hareketle Özlem’in üçgende açı-kenar konusu özelinde oluşturma boyutu becerilerini tam olarak yansıtamadığını, diğer öğrencilerin ise yansıtabildiği ifade edilebilir.

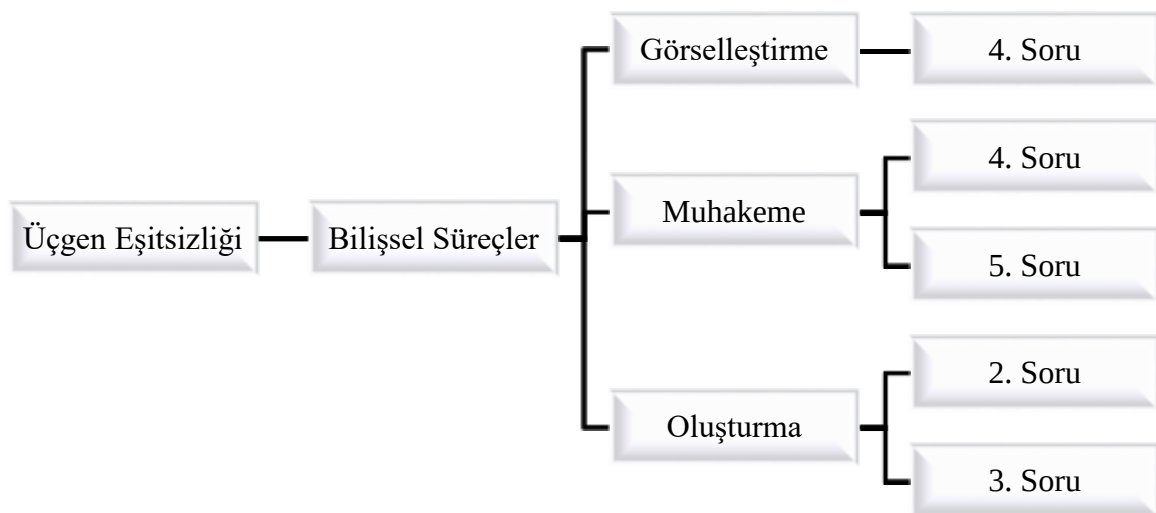
Etkinliğin kâğıt katlama yapmayı gerektiren sorusunda Özlem hariç diğer öğrenciler renkli kâğıttan kesilerek kendilerine verilen üçgenleri kenarları ikişer ikişer birbiri üzerine katlamış ve katladıkları kenarların uzunluklarını karşılaştırmışlardır. Bu katlama sonunda Merve ve Serap üçgenin sadece kenarlarını karşılaştırırken, Kaan ve Deniz ise hem kenarları karşılaştırmış hem de kenar uzunluklarına bağlı olarak ölçüsünü bilmese bile açıları hakkında karşılaştırma yapabilmiştir. Özlem ise üçgenin kenarlarını katlama aşamasını gerçekleştirememiş ve üçgenin sadece açı ölçülerinin katlansa da değişmeyeceğini ifade etmiştir. Bu durum yine Kaan ve Deniz’in üçgende açı-kenar ilişkisine yönelik derinlemesine muhakeme yapabildiğini ve her etkinlikten sonra yaptıkları muhakemeyi diğer sorularda da aktif şekilde kullanabildiklerini göstermektedir.

Üçgende açı-kenar ilişkisini açıklamaya yönelik etkinlikte ‘Büyük açı karşısında uzun kenar, küçük açı karşısında kısa kenar bulunur’ önermesine ulaşabilen öğrenciler Kaan, Deniz, Serap ve Merve olmuştur. Ayrıca özel olarak önermeye detaylı şekilde en net ulaşan ve bu önermeye bağlı olarak eşkenar ve ikizkenar üçgenin açı-kenar ilişkisine yönelik doğru çıkarım yapabilen öğrenciler ise Kaan ve Deniz’dir. Hatta Deniz’in eşkenar ve ikizkenar üçgenin eş açılarının sebebini keşfetmek hoşuna gitmiş ve bu şekilde öğrenmeler gerçekleştirmek

istediğini dile getirmiştir. Bu durumdan hareketle eşkenar üçgen, ikizkenar üçgen gibi üçgen çeşitlerinin eş açı özelliklerini açı-kenar ilişkisinden yararlanarak etkinliklerle keşfettirmenin önemli olduğunu iddia edilebilir. Ek olarak, bu öğrencilerin üçgende açı-kenar ilişkisini anladıktan sonra çeşitkenar üçgen, eşkenar üçgen, ikizkenar üçgen gibi üçgenlerin açı-kenar özelliklerini daha iyi yorumladıkları söylenebilir. Kaan ve Deniz'in bu konuda görselleştirme, oluşturma ve bu aşamalarda elde ettikleri çıkarımlardan yararlanarak ulaştıkları sonuçlara dayanarak muhakeme yapabildikleri iddia edilebilir. Kaan ve Deniz'in yaptıkları muhakemenin matematiksel sembol ve işaretlerle olduğu; Serap ve Merve'nin ise yaptıkları muhakemenin matematiksel sembol ve işaretlerle değil, doğal muhakeme şeklinde gerçekleştiği söylenebilir. Bu duruma bağlı olarak muhakeme süreci derinleştikçe ve çıkarımlar genişledikçe yapılan muhakemelerin doğal muhakemeden çıkıp teorik muhakemeye doğru geliştiği iddia edebilir.

4.1.3. Üçgen eşitsizliği

Üçgen eşitsizliği etkinliğinin ilk sorusu öğrencilerin üçgen çizmek için ön bilgilerini öğrenmeye yönelik olarak 'Herhangi üç doğru parçası ile bir üçgen çizilebilir mi?' şeklinde sorulan kısa cevaplı bir sorudur. İkinci ve üçüncü sorusu geometri şeritleri ve pergel yardımı ile üçgen oluşturmaya yönelik olduğu için bilişsel muhakemenin oluşturma boyutu ile ilgilidir. Bu etkinliğin dördüncü ve beşinci sorusu ise ulaşılan matematiksel ilişkiyi sözel ifadelerle ve önermelerle ifade edebilme durumuna göre muhakeme boyutu ile ilgili olacak şekilde yorumlanmıştır. Bu açıklamaya göre soruların ilgili olduğu bilişsel muhakeme boyutları Şekil 41'de verilmiştir.



Şekil 41 Üçüncü etkinlik sorularının ilgili olduğu bilişsel boyutlar

Kaan'ın Durumu

Kaan birinci soruda üçgen çizimine yönelik ön bilgisini ortaya koymak için sorulan ilk soruya “Hayır.” şeklinde cevap vermiştir. Buradan öğrencinin herhangi uzunlukta üç doğru parçasıyla üçgen oluşmayacağı bilgisine sahip olduğunu söylenebilir. Daha sonra etkinliğin ikinci sorusunda Kaan elinde bulunan Şekil 42’de gösterilen ve bir yüzlerinde gerçek uzunlukları yazılı olan farklı uzunluklarda ve renklerde geometri şeritlerinin uzunluklarını etkinlik kağıdındaki tabloya not almıştır.



Şekil 42 Öğrencilere verilen geometri şeritleri

Belirlediği uzunluklardan elde ettiği verilere göre Şekil 43’te görüldüğü gibi farklı uzunluklar seçerek üçgen oluşturmaya çalışmış, üçgen oluşan ve oluşmayan uzunlukları etkinlik kağıdına not almıştır. Uzunlukların karşısına eğer geometri şeritlerini uç uca ekleyebilmişse ‘üçgen oluştu’, ekleyemediyse ‘üçgen oluşmadı’ şeklinde Şekil 44’te görüldüğü gibi yazmıştır.



12,24 cm-10 cm- 7,07 cm (Üçgen oluştu)

5 cm- 14,14 cm- 5 cm (Üçgen oluşmadı)

Şekil 43 Kaan'ın geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması

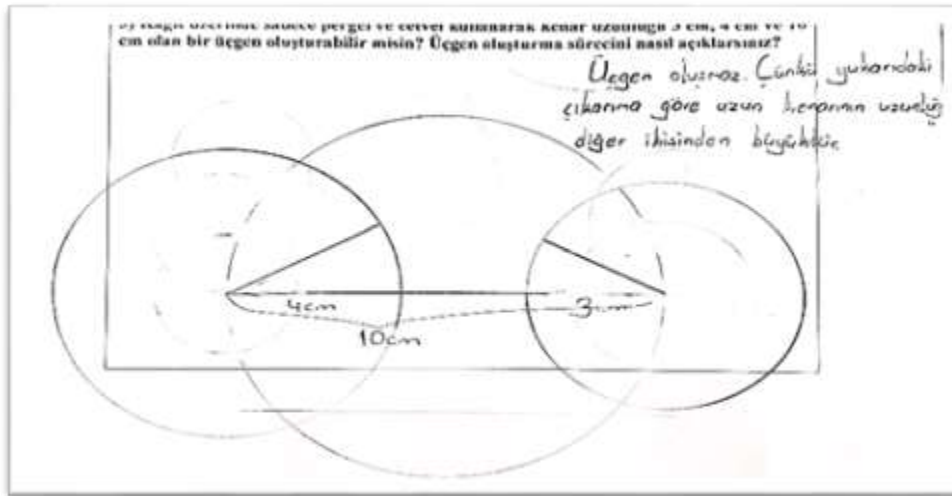
1. kenar uzunluğu	2. kenar uzunluğu	3. kenar uzunluğu	Üçgen oluştu / üçgen oluşmadı
5 cm	5 cm	14.14 cm	üçgen oluşmadı
14.14 cm	5 cm	7.07 cm	üçgen oluşmadı
12.24 cm	10 cm	7.07 cm	üçgen oluştu
14.14 cm	12.24 cm	5 cm	üçgen oluştu

Şekil 44 Kaan'ın etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt

Kaan geometri şeritleri ile oluşturduğu üçgenlerin kenar uzunlukları arasında bir ilişki kurmuş ve kurduğu bu ilişkiyi Şekil 44'te görüldüğü gibi not aldığı verilere göre şu şekilde şöyle açıklamıştır:

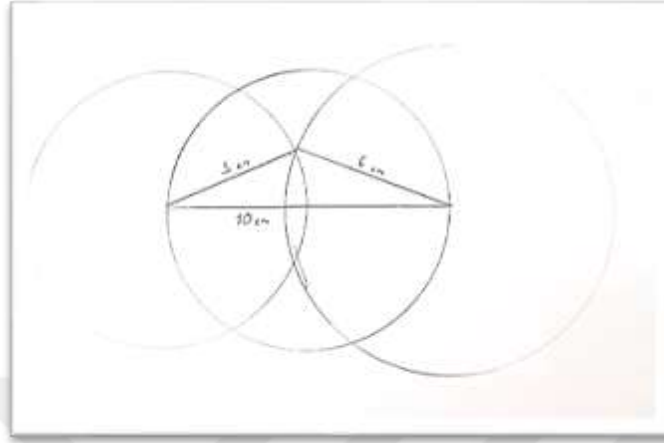
“Oluşturulan üçgenlerin uzun kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunluğundan küçüktür. Ama oluşmayan üçgenlerin uzun kenarın uzunluğundan büyüktür. Yani üçgenlerin oluşması için uzun kenar uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğundan küçük olmalıdır. Eğer büyük olursa üçgen oluşmaz.”

Öğrencinin bu soruya verdiği yanıttan geometri şeritleri ile oluşturma aşamasını gerçekleştirdiği buna bağlı olarak doğru çıkarımda bulunduğu ifade edilebilir. Kaan, pergeli ve cetveli kullanarak cevap aranan üçüncü soruya ikinci sorudakine benzer nitelikte açıklama yapmıştır. Kaan'ın üçüncü soruya verdiği yanıt Şekil 45'te verilmiştir. Burada cetvelden yararlanarak pergeli ile yarıçapı 4 cm ve 3 cm ve çapı 10 cm olan çemberleri çizmiştir. Çemberin birinde 10 cm'yi çap olarak belirlemesi, 10 cm'lik doğru parçası oluşturmak istemesi olarak yorumlanmıştır. Bu belirlenen ve çizdiği doğru parçalarına uygun şekilde üçgen çizilemediğini “Uzun kenar uzunluğu diğer ikisinden büyüktür” şeklinde açıklamıştır. Bu üçgen çizilememe durumunu en uzun kenar olan 10 cm'nin, 4 cm ve 3 cm toplamı olan 7 cm'den büyük olduğu şeklinde yorumladığı görülmektedir.



Şekil 45 Kaan'ın etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt

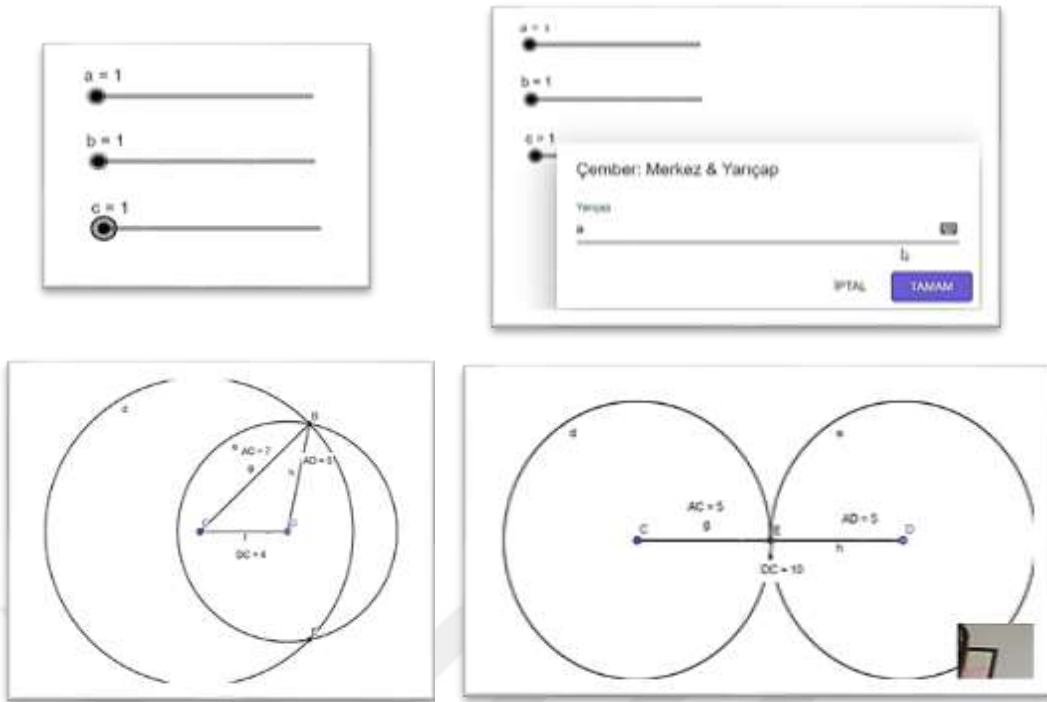
Kaan bu durumu başka uzunluklarda denemek istemiş ve kenar uzunlukları 5 cm, 6 cm ve 10 cm için bu yaptığı çizimi başka bir kâğıtta tekrarlamış ve oluşturduğu üçgeni Şekil 46'da göstermiştir. Çıkarımında bulunduğu durumu başka örnek durumlara da uyarlayabildiği için oluşturma ve muhakeme yapabiliyor şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 46 Kaan'ın etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği ikinci yanıt

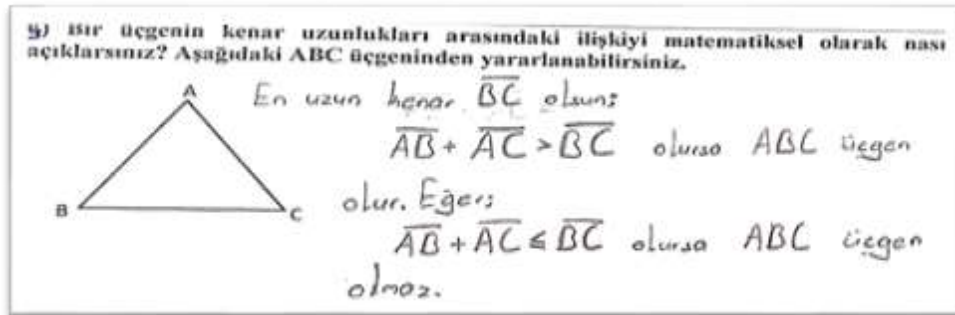
Kaan üçgen eşitsizliği ile ilgili bu etkinliğin dördüncü sorusunda daha önce GeoGebra hazırlık etkinliğinde öğrendiği gibi, GeoGebra'da a, b, c'yi kenar kabul ederek bu kenarları tamsayı olacak şekilde sürgüler oluşturmuştur. Oluşturduğu sürgülerden c doğru parçasının bir ucunu merkez alarak a uzunluğunu yarıçap kabul eden bir çember, sonra diğer ucunu merkez kabul eden b uzunluğunu yarıçap kabul eden diğer çemberi çizdiğinde, çemberler kesişirse üçgen oluşuyor kesişmezse üçgen oluşturmuyor şeklinde yorumlamıştır. Bu süreç Şekil 47'de aşamalar halinde gösterilmiştir. Burada tamsayı olarak seçtiği kenar uzunluklarıyla sürgüleri hareket ettirirken daha önce geometri şeritleri ile yaparken fark etmediği bir durumu dile getirmiştir. Kaan, “Oluşan üçgenlerin iki kenar uzunluğu diğer iki kenarın toplamından küçüktür. Ama oluşmayan üçgende uzun kenar uzunluğu diğer iki kenar uzunluğundan büyük ya da eşittir.” şeklinde açıklamıştır.

Kaan daha önce uzun kenarın diğer iki kenarın toplamından küçük olması durumunu değerlendirirken artık burada uzun kenar uzunluğunun diğer iki kenar uzunluğuna eşit olması durumunda da üçgen oluşturmadığını fark etmiştir. Buradan öğrencinin sahip olduğu bilginin doğruluğunu farklı öğrenme ortamlarında test ederek sahip olduğu çıkarımın eksik kalan kısmını kendisinin fark ettiği iddia edilebilir. Eksik yaptığı matematiksel çıkarımları fark etmesinin bilişsel muhakeme sürecinde kendiliğinden gerçekleştiği söylenebilir.



Şekil 47 Kaan'ın etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt

Kaan üçgen eşitsizliği etkinliğinin son sorusunda üçgen eşitsizliğine yönelik bütün sorulardan yaptığı çıkarımları birleştirerek Şekil 48'de görüldüğü gibi hem sözel hem de matematiksel önermelerle muhakeme yapabilmektedir.



Şekil 48 Kaan'ın etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt

Genel olarak değerlendirildiğinde, Kaan'ın rastgele seçilen üç doğru parçasının üçgen oluşturup oluşturmayacağına dair doğru ön bilgiye sahip olduğunu, ancak bu bilginin detaylarını yaptığı etkinlikler ile keşfettiği söylenebilir. Bu durum, bir üçgende kenar uzunluklarının kendi içinde belirli bir özellik taşıması gerektiğini etkinlik sonunda matematiksel olarak açıklayabilmesinden anlaşılmaktadır.

Deniz'in Durumu

Deniz üçgen eşitsizliği etkinliğinin ilk sorusunda üçgen eşitsizliği konusuna dair ön bilgisini ortaya çıkarmak amacıyla sorulan 'Herhangi üç doğru parçası ile bir üçgen çizilebilir

mi?’ şeklinde sorulan soruya hayır cevabını vermiştir. Bu cevaptan Deniz’in uzunluklar hakkında doğru bir öngörüsü olduğu söylenebilir. Etkinliğin geometri şeritleri kullanarak cevaplanması beklenen ikinci sorusunda Deniz kullandığı şeritleri uç uca eklemiştir. Bu şekillerden bazıları örnek olarak Şekil 49’da verilmiştir. Belirlediği bu üçgenlere ilişkin eğer geometri şeritlerini uç uca ekleyerek birleştirebilirse etkinlik kağıdına ‘üçgen oluştu’ eğer geometri şeritlerini birleştiremezse ‘üçgen oluşmadı’ şeklinde belirtmiştir.



5 cm-14,14 cm-5 cm (Üçgen oluşmadı)

8,66 cm-8,66 cm-8,66 cm (Üçgen oluştu)

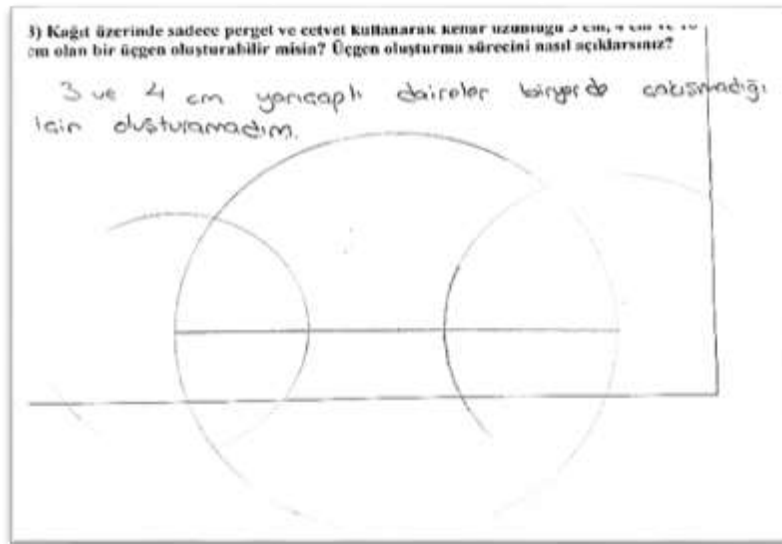
Şekil 49 Deniz'in geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması

Geometri şeritlerini deneyerek oluşturduğu ve oluşturamadığı üçgenlerin kenar uzunluklarını Şekil 50’de görüldüğü gibi tabloya not almıştır. Daha sonra kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi “En uzun kenar uzunluğu diğer iki kenar uzunluğunun toplamı olduğunda üçgen oluşuyor” şeklinde açıklamıştır. Verdiği bu cevaplardan öğrencinin geometri şeritleri yardımı ile oluşturma boyutu becerilerini taşıdığı söylenebilir.

1. kenar uzunluğu	2. kenar uzunluğu	3. kenar uzunluğu	Üçgen oluştu / üçgen oluşmadı
14.14	5	7.07	Oluşmadı
12.24	7.07	5	Oluşmadı
8.66	8.66	8.66	Oluştur
12.24	7.07	10	Oluştur

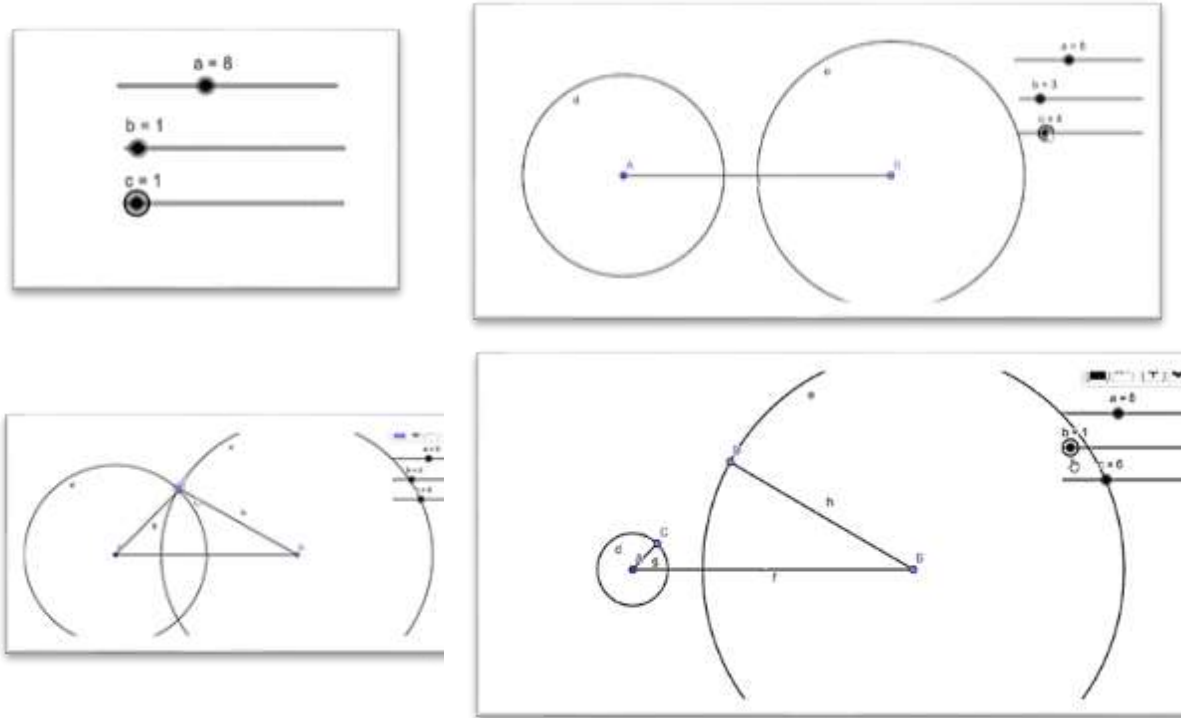
Şekil 50 Deniz'in etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt

Deniz, pergel ve cetvel kullanılarak cevap aranan üçüncü soruya da ikinci sorudakine benzer nitelikte açıklama yapmıştır. Bu soruya verdiği yanıt Şekil 51’de verilmiştir. Burada yarıçapı 4 cm, 3 cm ve çapı 10 cm olan çemberleri çizmiş ve üçgen oluşturmadığını “3 ve 4 cm yarıçaplı daireler bir yerde çakışmadığı için oluşturamadım” şeklinde açıklamıştır. Üçgen oluşturamadığı bu uzunlukların ilişkisini, bunlardan en uzun olan 10 cm’in diğer iki uzunluk olan 3 cm ve 4 cm’nin toplamı olan 7 cm’den büyük olması şeklinde açıklamıştır.



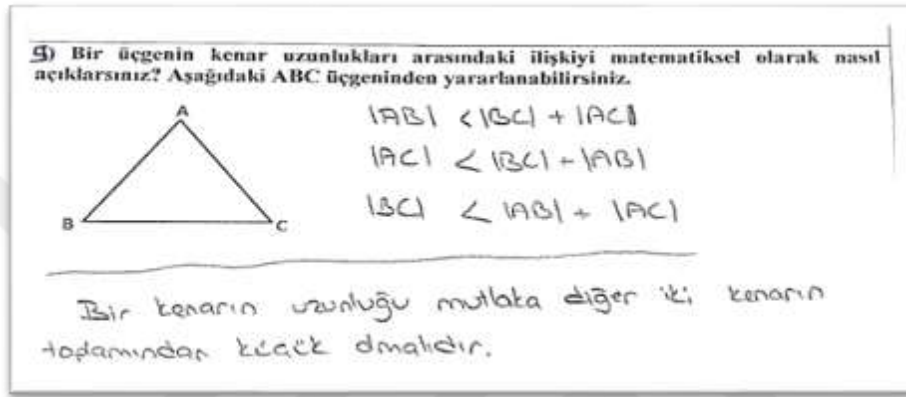
Şekil 51 Deniz'in etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt

Deniz üçgen eşitsizliği ile ilgili olan bu soruda daha önce GeoGebra eğitim etkinliğinde öğrendiği sürgü aracını kullanmıştır. GeoGebra'da a , b , c 'yi kenar kabul ederek bu kenarları tamsayı olacak şekilde belirleyerek Şekil 52'de görüldüğü gibi üç tane sürgü oluşturmuştur. Oluşturduğu sürgüleri AB doğru parçasına, A ve B merkezli çemberlerin yarıçaplarına bağlamıştır. Sürgüleri hareket ettirdikçe eğer çemberler çakışıyorsa üçgen olur, çakışmıyorsa üçgen olmaz şeklinde bir önceki soruda verdiği yanıtla benzer şekilde cevap vermiştir. Öğrencinin burada verdiği yanıtta oluşturma ve görselleştirme yapabildiği söylenebilir.



Şekil 52 Deniz'in etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt

Deniz bu etkinliğin son sorusunda üçgen eşitsizliğine yönelik Şekil 53'te görüldüğü gibi kenar uzunlukları arasındaki ilişkisi matematiksel sembollerle ifade etmiştir. Bu sorudan önceki üçgen eşitsizliği etkinliklerinde üçgendeki uzun kenarın diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük olması gerektiğini ifade ederken, bu soruda en uzun kenarın uzunluğunu bilmeden herhangi bir kenar uzunluğunun bu kenar hariç diğer iki kenar uzunluğu toplamından küçük olursa üçgen oluşur bir çıkarımda bulunmuştur. Yaptığı çıkarımda üçgenin en uzun kenarını dikkate almadığı ancak matematiksel sembollerden yararlanarak çıkarımı açıkladığı görülmektedir.



Şekil 53 Deniz'in etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt

Deniz'in, üçgen eşitsizliğine dair herhangi üç uzunlukla üçgen oluşturulamayacağı ön bilgisine sahip olduğunu; ancak bu ilişkiye dair önce açıklamada bulunamadığı söylenebilir. Çeşitli araç-gereçlerle desteklenen bu etkinlik sonunda Deniz'in bu uzunluklar arasındaki ilişkiyi detaylı ve doğru şekilde açıklayabildiği ifade edilebilir. Buradan öğrencilerin bilişsel muhakeme süreçlerinin doğru öğrenme ortamları ile desteklenmesinin geometri öğretimini olumlu yönde etkilediği de söylenebilir.

Serap'ın Durumu

Serap üçgen eşitsizliği etkinliğinin birinci sorusunda 'Herhangi üç doğru parçası ile bir üçgen çizilebilir mi?' şeklinde sorulan soruya 'Evet, çizilebilir.' şeklinde cevap vermiştir. Öğrencinin üçgen oluşturulan kenar uzunlukları hakkında yanlış ön bilgiye sahip olduğu söylenebilir. Bu bilginin yanlışlığını kendisi fark etmiş ve ikinci sorudaki geometri şeritleri ile etkinliği tamamladıktan sonra ilk soruya "çizilebilir" şeklinde verdiği yanıtın yanlış olduğunu fark etmiş ve birinci soruya geri dönerek "Herhangi üç doğru parçası üçgen oluşturmuyormuş" notunu yazmıştır. Buradan öğrencinin geometri şeritleri ile yaptığı etkinlik doğrultusunda sahip olduğu bilgide değişiklik yaşandığı ifade edilebilir. Serap'ın kendisine verilen geometri şeritleri ile oluşturduğu şekillerden bazıları örnek olarak Şekil 54'te verilmiştir.



5 cm - 12.14 cm - 7.07 cm (Üçgen oluşmadı) 12.24 cm-10 cm-7.07 cm (Üçgen oluştu)

Şekil 54 Serap'ın geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması

İkinci soru için Şekil 55'te görüldüğü gibi “Herhangi üç doğru parçasının üçgen olabilmesi için iki kenar uzunluğunun birbirine yakın olması gerek ya da üç uzunluğunun da eşit olması gerekir. Ve iki uzunluk eşit diğer uzunluk da eşit olan uzunluğa yakın uzunlukta olması gerekiyor. Veya üç uzunluğun da birbirine yakın olması gerekir.” şeklinde bir sözel açıklama yapmış, fakat kenar uzunlukları için ‘yakın olması gerekir’ şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bu açıklamanın tamamının doğru olmadığı, dolayısıyla öğrencinin geometri şeritleri aracılığı ile oluşturma aşamasını gerçekleştirebildiği ancak muhakemeyi eksiksiz şekilde gerçekleştiremediği söylenebilir.

1. kenar uzunluğu	2. kenar uzunluğu	3. kenar uzunluğu	Üçgen oluştu / üçgen oluşmadı
5cm	14.14cm	5cm	Üçgen oluşmadı
7.07cm	14.14cm	5cm	Üçgen oluşmadı
5cm	14.14cm	12.24cm	Üçgen oluştu
8.66cm	8.66cm	8.66cm	Üçgen oluştu
7.07cm	10cm	12.24cm	Üçgen oluştu

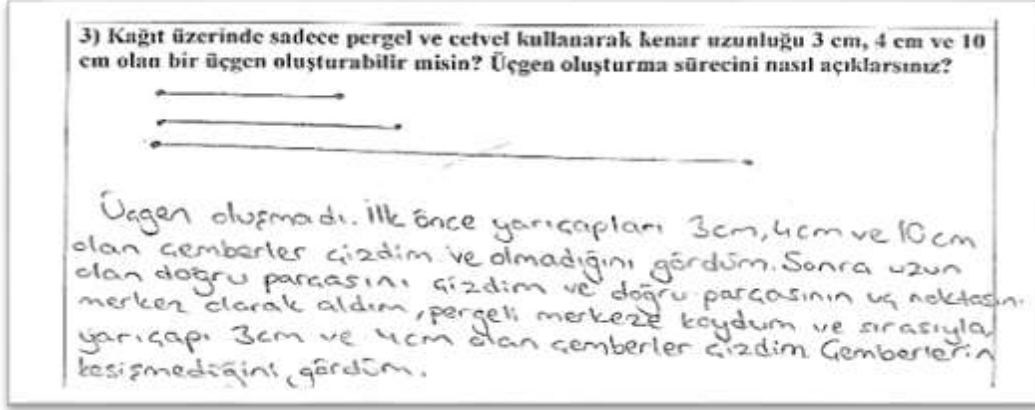
Elde edilen verilere göre üçgen oluşturan ve oluşturmamayan uzunluklar arasında bir ilişki var mı? Eğer var ise bu ilişkiyi nasıl açıklarsınız?

Herhangi üç doğru parçasının üçgen olabilmesi için iki uzunluğun birbirine yakın olması gerek ya da üç uzunluğunun da eşit olması gerekir. Ve iki uzunluk eşit diğer uzunluk da eşit olan uzunluğa yakın uzunlukta olması gerekiyor. Veya üç uzunluğun da birbirine yakın olması gerekir.

Şekil 55 Serap'ın etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt

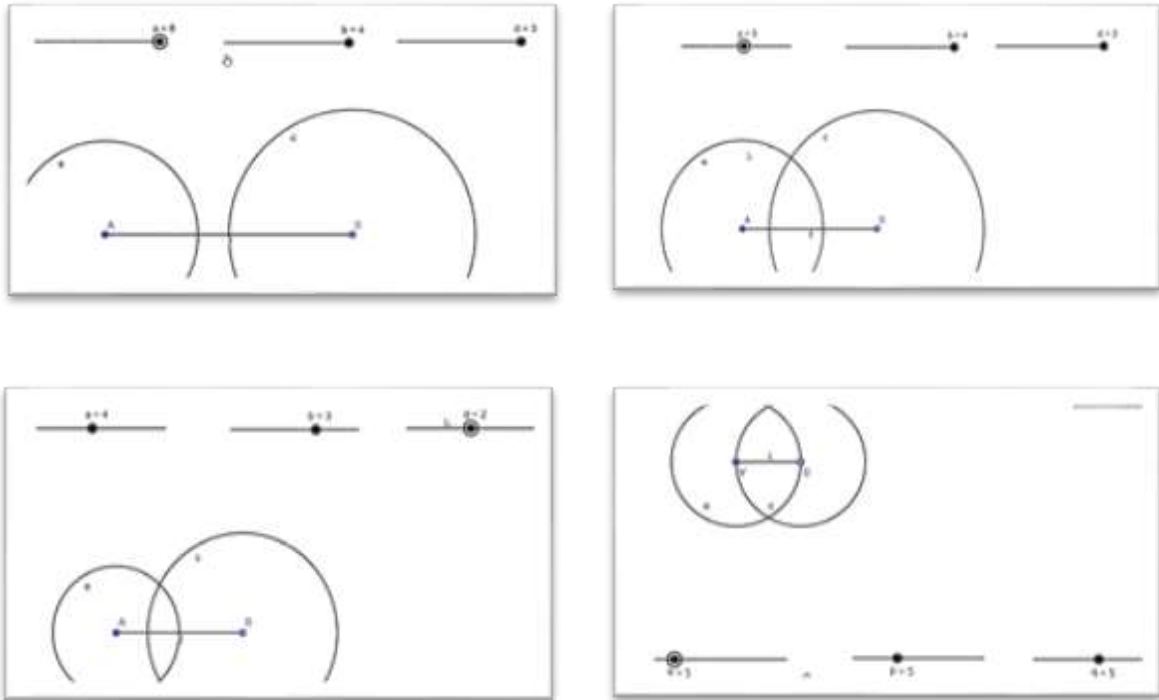
Üçgen eşitsizliği konusunun üçüncü sorusunda Serap ikinci soruya verdiği cevaptan biraz daha farklı olarak Şekil 56'da gösterildiği gibi bir yanıt vermiştir. İkinci soruda üçgeni oluşturan kenar uzunlukları hakkında matematiksel bir ilişki kuramadan sadece uzunlukların yakın olması gibi bir kavramdan bahsederken bu soruya verdiği yanıtına bağlı olarak pergeli kullanımı ile oluşturma yapabildiği ifade edilebilir. Geometri şeridi kullanarak üçgen oluşturmaya yönelik doğru çıkarım yapamadığı durumu pergeli-cetvel kullanarak yapabilmesi,

üçgen eşitsizliği konusunda farklı öğretim ortamlarında gerçekleştirilen etkinliklerin muhakemeyi olumlu yönde desteklediği iddia edilebilir.



Şekil 56 Serap'ın etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt

Serap'ın üçgen eşitsizliği ile ilgili dördüncü soruya GeoGebra'nın sürgü özelliğinden yararlanarak cevap verdiği görülmektedir. GeoGebra'da a, b, c'yi kenar kabul ederek bu kenarları tamsayı olacak şekilde belirleyerek Şekil 57'de görüldüğü gibi üç tane sürgü oluşturmuştur. Oluşturduğu sürgüleri AB doğru parçasına, A ve B merkezli çemberlerin yarıçaplarına bağlamıştır. Sürgüleri hareket ettirdikçe "eğer çemberler çakışıyorsa üçgen olur, çakışmıyorsa üçgen olmaz" şeklinde bir önceki soruda verdiği yanıtla benzer şekilde cevap vermiştir. Öğrencinin burada verdiği yanıtta görselleştirme yapabildiği ifade edilebilir.



Şekil 57 Serap'ın etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt

Serap'ın kenarlar arasında herhangi bir matematiksel ilişki kuramadığı yalnızca verilen sayıları kullanarak üçgenleri çizip çizemeyeceğini yorumlayabilmesi sebebiyle üçgen eşitsizliği konusunda derinlemesine bir muhakeme gerçekleştiremediği söylenebilir. Bu nedenle öğrencinin kenarlar arasında ilişki kuramamış olması bu konuda bilişsel muhakeme gerçekleştiremediğini göstermektedir şeklinde iddia edilebilir.

Merve'nin Durumu

Merve, üçgen eşitsizliği etkinliğinin birinci sorusuna “Çizilebilir.” şeklinde cevap vererek üçgen oluşturmaya yönelik yanlış ön bilgiye sahip olduğunu ortaya koymuştur. İkinci soruda araştırmacının kendisine verdiği farklı renk ve uzunluklardaki geometri şeritleri ile farklı şekiller oluşturmuş ve oluşturduğu şekillerden bazıları örnek olarak Şekil 58’de verilmiştir.



8,66 cm-8,66 cm-8,66 cm (Üçgen oluştu) 5 cm – 12,14 cm – 7,07 cm (Üçgen oluşmadı)

Şekil 58 Merve'nin geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması

Merve, kendisine verilen geometri şeritlerini kullanarak üçgen oluşturan ve oluşturmayan kenar uzunluklarını Şekil 59’da görüldüğü gibi tabloya not alarak üçgenlerin oluşup oluşmadığını incelemiştir. Bu incelemesinde, ilk soruya verdiği cevabın doğru olmadığını fark etmiştir. Öğrencinin bu etkinlikte kullandığı geometri şeritlerinin sahip olduğu bilgide olumlu yönde değişikliğe sebep olduğu söylenebilir. Etkinlik sonunda üçgen oluşturabildiği uzunluklar arasındaki ilişkiyi Şekil 59’da görüldüğü gibi “Bütün uzunluklar eşitse üçgen oluşur. Üçgende en uzun kenarın uzunluğu haricinde diğer kenarları topladığımızda en uzun kenarın uzunluğunu geçmiyorsa üçgen oluşmaz” şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin geometri şeritleri aracılığıyla üçgen oluşturduğu ve oluşturma aşamasından sonra kurduğu ilişkiyi sözel olarak açıkladığı ifade edilebilir.

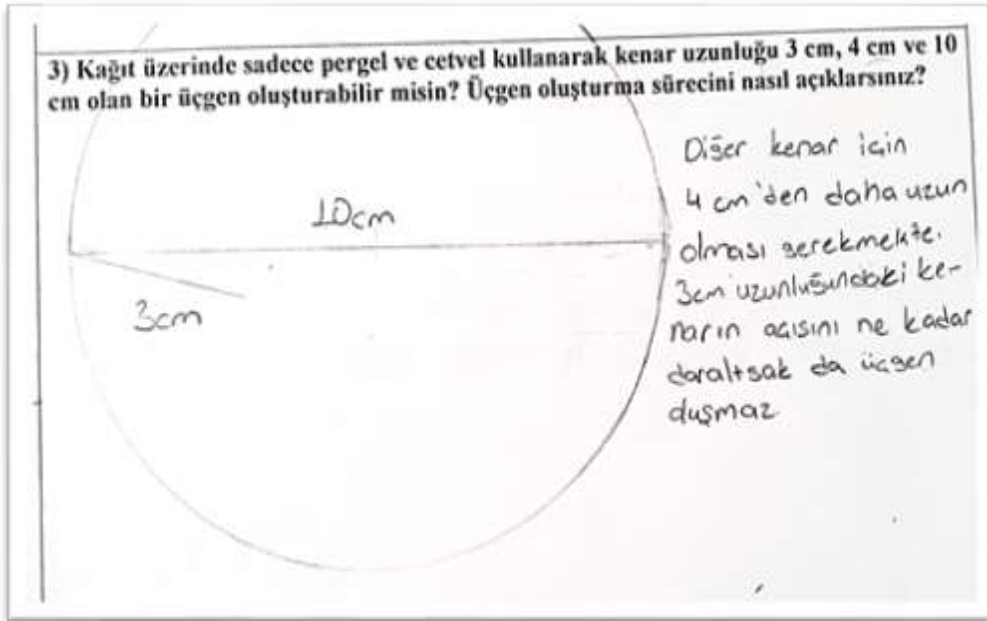
1. kenar uzunluğu	2. kenar uzunluğu	3. kenar uzunluğu	Üçgen oluştu / üçgen oluşmadı
5 cm	14.14 cm	5 cm	Üçgen oluşmadı.
14.14 cm	5 cm	7.07 cm	Üçgen oluşmadı.
8.66 cm	8.66 cm	8.66 cm	Üçgen oluştu.
7.7 cm	10 cm	12.24 cm	Üçgen oluştu.

Eldedilen verilere göre üçgen oluşturan ve oluşturamayan uzunluklar arasında bir ilişki var mı? Eğer var ise bu ilişkiyi nasıl açıklarsınız?

İlişki vardır. Bütün uzunluklar eşitse üçgen düşer. Üçgendeki en uzun kenarın uzunluğu haricinde diğer kenarları topladığımızda en uzun kenarın uzunluğunu geçmiyorsa üçgen oluşmaz.

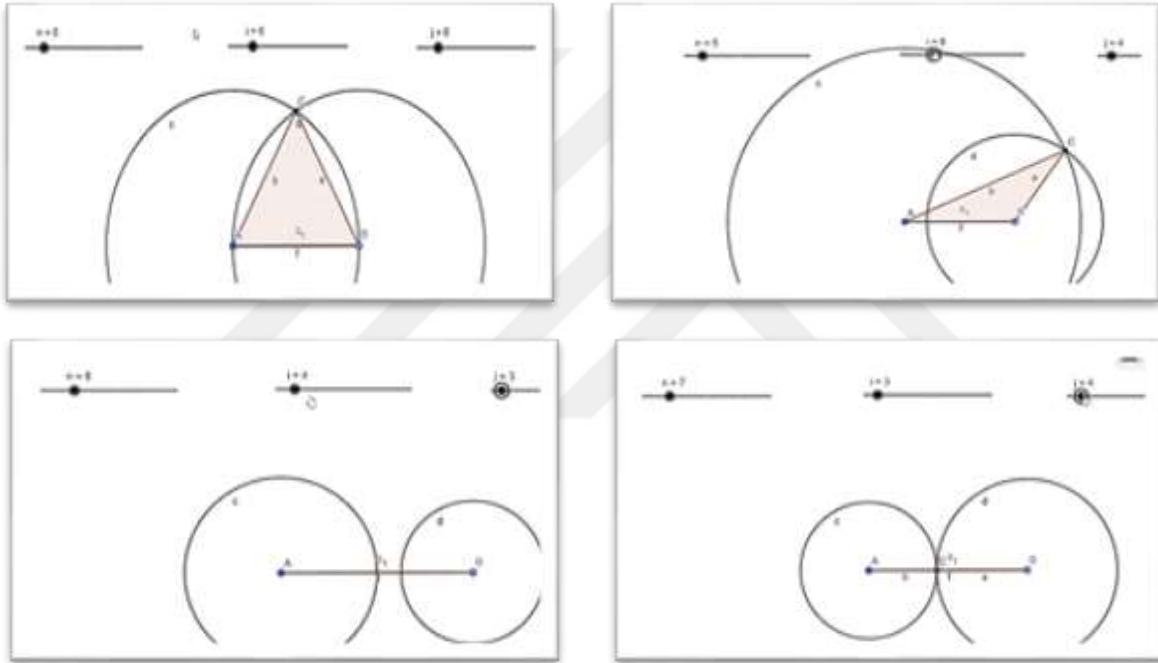
Şekil 59 Merve'nin etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt

Merve etkinliğin üçüncü sorusuna pergeli-cetveli kullanarak Şekil 60'ta görüldüğü gibi bir cevap vermiştir. Öğrenci ilk olarak pergeli 5 cm açarak çapı 10 cm olan bir çemberin çapını çizerek 10 cm'lik doğru parçasını çemberden yararlanarak çizmiş, çapın uç noktalarından birini seçerek 3 cm uzunluğunda bir doğru parçası belirleyerek çizim gerçekleştirmiştir. Merve, "Üçgenin diğer kenar uzunluğu 4 cm'den daha uzun olması gerekmekte. 3 cm uzunluğundaki kenarın açısını ne kadar daraltsak da üçgen oluşmaz" yanıtını vermiştir. Öğrenci bir önceki soruda kullandığı geometri şeritlerinin uç uca eklenmesi durumuna benzer şekilde durumu sözel olarak açıklamıştır. Bu cevaptan öğrencinin oluşturma aşamasını başarılı şekilde tamamladığı söylenebilir.



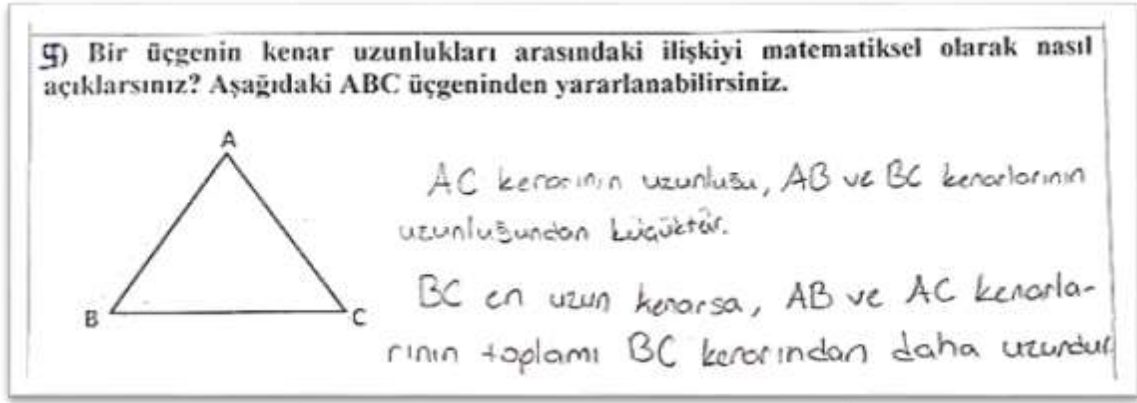
Şekil 60 Merve'nin etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt

Merve, GeoGebra ortamında yürütülen üçgen eşitsizliği ile ilgili dördüncü soruda GeoGebra'nın sürgü özelliğini kullanmıştır. İlk olarak kullanmayı bildiği sürgüleri programda oluşturmuştur. GeoGebra programında a, b, c'yi kenar kabul ederek bu kenarları tamsayı olacak şekilde belirleyip Şekil 61'deki gibi 3 tane sürgü oluşturmuştur. Oluşturduğu sürgüleri AB doğru parçasına, A ve B merkezli çemberlerin yarıçaplarına bağlamıştır. Köşe noktalarını seçerek üçgen oluşturmuştur. Sürgüleri hareket ettirdikçe üçgen oluşan ve üçgen oluşmayan uzunlukları Şekil 61'deki gibi deneyimlemiştir. Merve, “Bir kenar herhangi iki kenarın toplamından küçük ise üçgen oluşur; değilse yani büyükse üçgen oluşmaz” şeklinde kısmen doğru kabul edilebilecek bir açıklama yapmıştır. Öğrencinin burada verdiği yanıtlardan oluşturma ve görselleştirme yapabildiği ifade edilebilir.



Şekil 61 Merve'nin etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt

Merve, bu soruda üçgen eşitsizliğine yönelik Şekil 62'de görüldüğü gibi bu soruya gelmeden gerçekleştirdiği etkinliklerde daha önce herhangi bir kenar uzunluğunun diğer iki kenar uzunluğu toplamından küçük olması gerektiğini ifade etmiştir. GeoGebra, pergel-cetvel ve geometri şeritleri kullanarak tamamladığı etkinliğin sonunda ise ABC üçgeninde en uzun kenarı BC şeklinde belirleyerek, “AB ve AC kenarlarının toplamı BC kenarından daha uzundur” şeklinde tamamı doğru olmayan bir çıkarımda bulunmuştur.

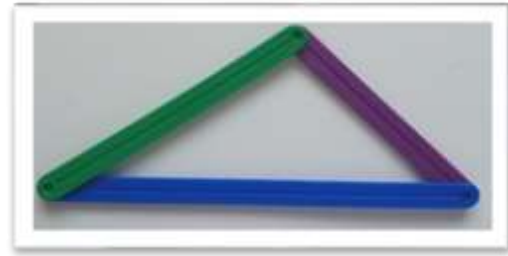
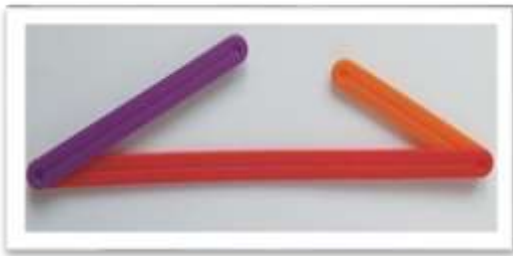


Şekil 62 Merve'nin etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt

Öğrencinin bu etkinliğin ilk sorusuna verdiği yanıttan bu yana, verdiği yanıtlar konu özelinde karşılaştırıldığında, ilk soruda “herhangi bir kenar uzunluğu diğer iki kenar uzunluğundan küçük olması gerekir” derken, sürecin sonunda en uzun kenarın belirlenip uzun kenarın uzunluğunun diğer iki kenar uzunluğundan küçük olması gerektiği yönünde bir değişim yaşadığı gözlenmiştir.

Özlem'in Durumu

Özlem, üçgen eşitsizliği etkinliğinin birinci sorusunda üçgen çizimine yönelik sahip olduğu bilgiyi ortaya çıkarmak amacıyla sorulan ilk soruya “Çizilemez.” şeklinde cevap vermiştir. Öğrencinin verdiği bu cevaptan üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki hakkında doğru bilgiye sahip olmadığı söylenebilir. Özlem etkinliğin geometri şeritleri kullanarak cevaplanması beklenen ikinci sorusunda Şekil 63'te örnek olarak görüldüğü gibi kullandığı şeritler eğer uç uca birleşti ise ‘üçgen oluştu’ birleşmediyse ‘üçgen oluşmadı’ şeklinde not almıştır.



7,07 cm – 14,14 cm- 5 cm (Üçgen oluşmadı) 7,07 cm- 8,66 cm- 12,24 cm (Üçgen oluştu)

Şekil 63 Özlem'in geometri şeritleri ile üçgen oluşturma aşaması

Üçgen oluşan ve oluşmayan durumlarını Şekil 64'te görüldüğü gibi not alan Özlem durumu şöyle açıklamıştır: “Üçgen oluşturan uzunluklarda en uzun kenar dışında kalan iki kenarın toplamı en uzun kenarın uzunluğundan fazla, fakat üçgen oluşturmayan uzunluklarda

en uzun kenar dışında iki kenarın toplamı en uzun kenarın uzunluğundan daha azdır”.Verdiği cevaba dayanarak, Özlem’in geometri şeritleri ile oluşturma aşamasını tamamlayabildiği ve üçgen eşitsizliği durumu hakkında açıklama yapabildiği gözlenmiştir. Verdiği yanıtlardan öğrencinin oluşturma ve muhakeme yapabildiği söylenebilir.

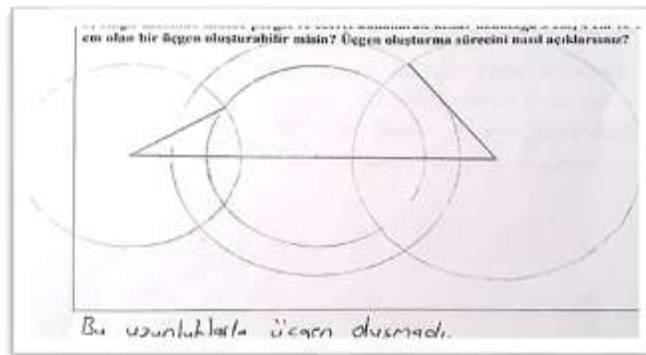
1. kenar uzunluğu	2. kenar uzunluğu	3. kenar uzunluğu	Üçgen oluştu / üçgen oluşmadı
2.07 cm	12.26 cm	8.66 cm	Üçgen oluştu
5 cm	14.14 cm	3.07 cm	Üçgen oluşmadı
12.26 cm	2.07 cm	10 cm	Üçgen oluştu
14.14 cm	8.66 cm	5 cm	Üçgen oluşmadı

Elde edilen verilere göre üçgen oluşturan ve oluşturmamayan uzunluklar arasında bir ilişki var mı? Eğer var ise bu ilişkiyi nasıl açıklarsınız?

Üçgen oluşturan uzunluklarda en uzun kenar dışında kalan iki kenarın toplamı en uzun kenarın uzunluğundan fazla fakat üçgen oluşturmamayan uzunluklarda en uzun kenar dışında iki kenarın toplamı en uzun kenarın uzunluğundan daha azdır.

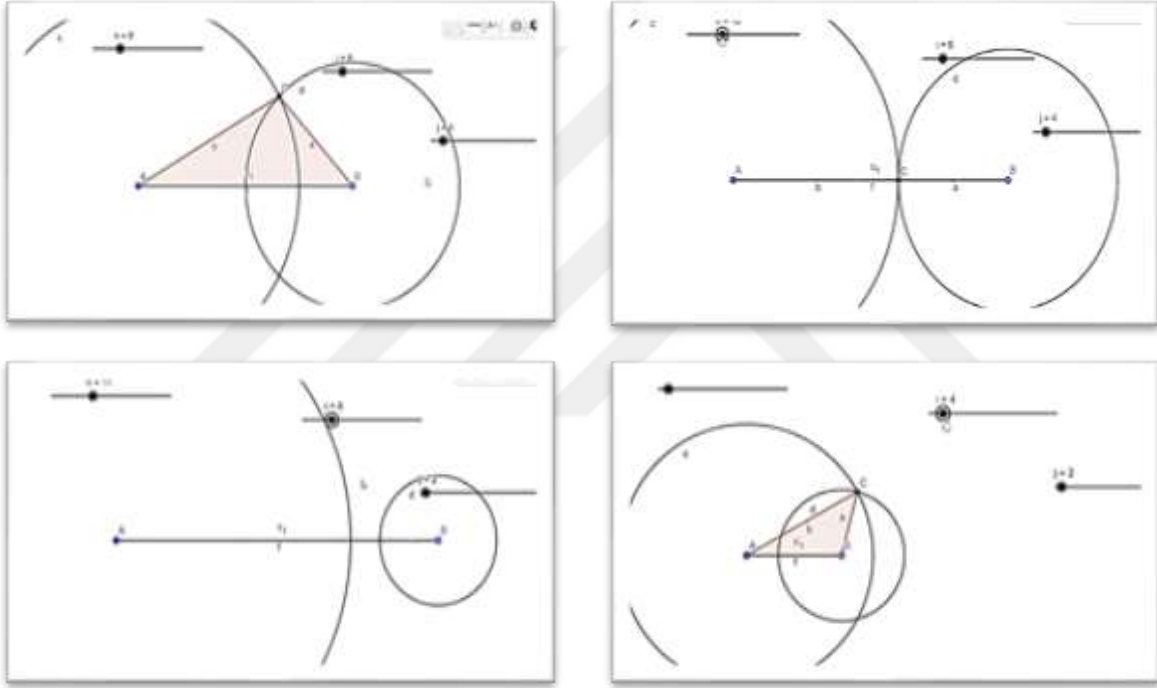
Şekil 64 Özlem'in etkinliğin ikinci sorusuna verdiği yanıt

Üçgende kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaya yönelik gerçekleştirilen üçüncü soruda öğrencinin ikinci etkinlikte olduğu gibi üçgen oluşturma durumlarını bu kez pergel ve cetvel kullanılarak cevap araması beklenmektedir. Öğrenci bu soruya Şekil 65'te görüldüğü gibi yanıt vermiştir. Verdiği yanıtta yarıçapı 3 cm olan iki çember, yarıçapı 4 cm ve 5 cm olan birer tane çember çizdiği görülmektedir. Öğrencinin 3 cm yarıçaplı iki çember çizmesinin yaptığı açıklamayı etkilemeyen rastgele bir çizim olduğu söylenebilir. Yarıçapı 5 cm olan çemberi çizerek ise 10 cm uzunluğunda doğru parçası oluşturmak için çap uzunluğundan yararlandığı ifade edilebilir. Öğrencinin verdiği yanıttan pergel cetvel kullanarak derinlemesine bir muhakemede bulunabilecek bir açıklama yapamadığı görülmektedir. Yaptığı çizimde gerekli oluşturma kanıtlarını sunmadığı için oluşturma aşaması becerilerini yeteri kadar taşımadığı iddia edilebilir.



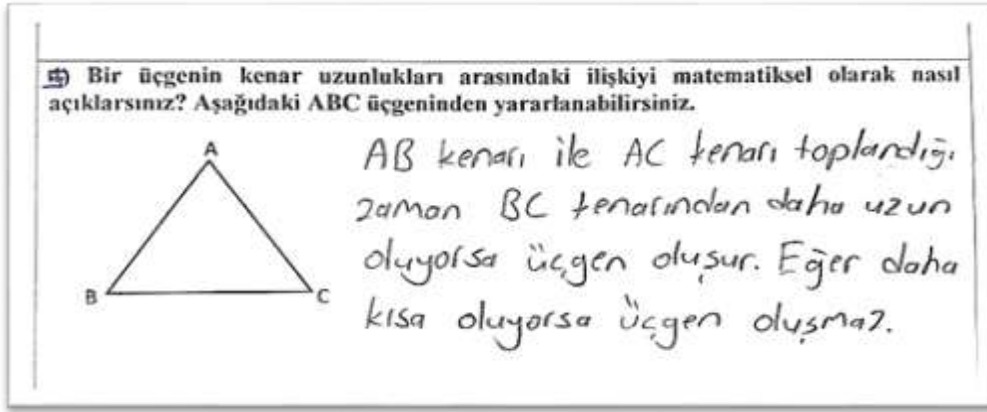
Şekil 65 Özlem'in etkinliğin üçüncü sorusuna verdiği yanıt

Özlem bu etkinliğin dördüncü sorusunda GeoGebra programında sürgüler oluşturmuştur. Oluşturduğu sürgüleri n , i , j şeklinde isimlendirmiştir. Sürgülerdeki değişkenler tamsayı olacak şekilde gerekli ayarlamaları yapmıştır. Şekil 66'da görüldüğü gibi n sürgüsünü doğru parçasına bağlamış, diğer iki sürgüyü ise iki çemberin yarıçapları olacak şekilde ayarlamıştır. Çizdiği çemberlerin kesişim noktalarını birleştirerek üçgen oluşturmuştur. Daha sonra sürgüleri farklı tamsayılar olacak şekilde hareket ettirdiğinde üçgen oluşturan ve oluşturmayan uzunluklar olduğunu fark etmiştir. Bu durumu “İlk taban olarak seçtiğim kenarın üzerinde çemberler iç içe geçtiği zaman üçgen oluşuyor. İç içe geçmediği zaman üçgen oluşmuyor” şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin yaptığı bu açıklamadan üçgen eşitsizliği konusunda muhakeme yapabildiği ifade edilebilir.



Şekil 66 Özlem'in etkinliğin dördüncü sorusuna verdiği yanıt

Özlem, önceki etkinliklerde üçgenin kenar uzunluklarından en uzun kenar dışındaki diğer iki kenarın toplamının en uzun kenardan büyük olması şeklinde belirtirken son soruda Şekil 67'de görüldüğü gibi en uzun kenar uzunluğunu dikkate almadan sadece AB kenarı uzunluğunu ele alarak diğer iki kenarın uzunlukları toplamının bu kenardan uzun olması gerektiğini ifade etmiştir.



Şekil 67 Özlem'in etkinliğin beşinci sorusuna verdiği yanıt

Özlem'in son soruda en uzun kenarı dikkate almadan yapılacak muhakemenin herhangi bir kenarın uzunluğunun diğer iki kenarın uzunluğunun farkından büyük toplamından küçük olması şeklinde yapması gerekirdi. Ancak öğrenci bu önermeye ulaşamadığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla Özlem'in üçgen eşitsizliğine yönelik detaylı bir sözel muhakeme yapamadığını göstermektedir.

Üçgen Eşitsizliği Konusuna Yönelik Durumların Karşılaştırılması

Öğrenciler üçgen eşitsizliği etkinliğinde farklı araç-gereç ve öğretim ortamlarından yararlanmışlardır. Her öğrencinin üçgene yönelik yaptığı inşayı benzer şekilde gerçekleştirmiştir. En uzun kenarı çap kabul eden çember çizmişlerdir ve çizdikleri çap uzunluğunun uç noktalarını diğer çemberlerin merkezi kabul ederek çemberin yarıçaplarını üçgenin diğer kenarları olarak belirlemişlerdir. Hepsinin benzer yanıt vermesinin nedeni önceki etkinlikte geometri şeritleri ile bu inşaya benzer üçgen oluşturmalarından kaynaklanıyor olabilir. İlk soruya verdikleri yanıtlardan Kaan, Deniz ve Özlem'in herhangi üç doğru parçası ile üçgen oluşmadığı ön bilgisine sahip olduğu görülmüştür. Bu bilgiye sahip olmayan Serap ve Merve etkinlik sorularına cevap ararken sahip oldukları bilgide değişiklik yaşamış ve herhangi üç doğru parçası ile üçgen çizilemeyeceğini fark etmişlerdir. Bu durum öğrencilerin bilgilerinde değişiklik oluştuğunu, dolayısıyla muhakeme yapabildiklerini göstermektedir şeklinde yorumlanabilir. Serap kenarlar arasındaki ilişkiye yönelik hiçbir çıkarımda bulunamamıştır. Serap hariç diğer dört öğrenci üçgen eşitsizliğine yönelik etkinlikleri tamamladığında en uzun kenarın belli olması durumunda diğer iki kenarın uzunlukları toplamının en uzun kenardan büyük olması gerektiği yönünde çıkarımda bulunmuşlardır. Buradan hareketle, kenar uzunlukları farkı ile kenarlar arasında ilişkiyi fark edemedikleri söylenebilir. Öğrencilerin bu etkinlikte öne çıkan bulguları aşağıdaki Tablo 9'da verilmiştir.

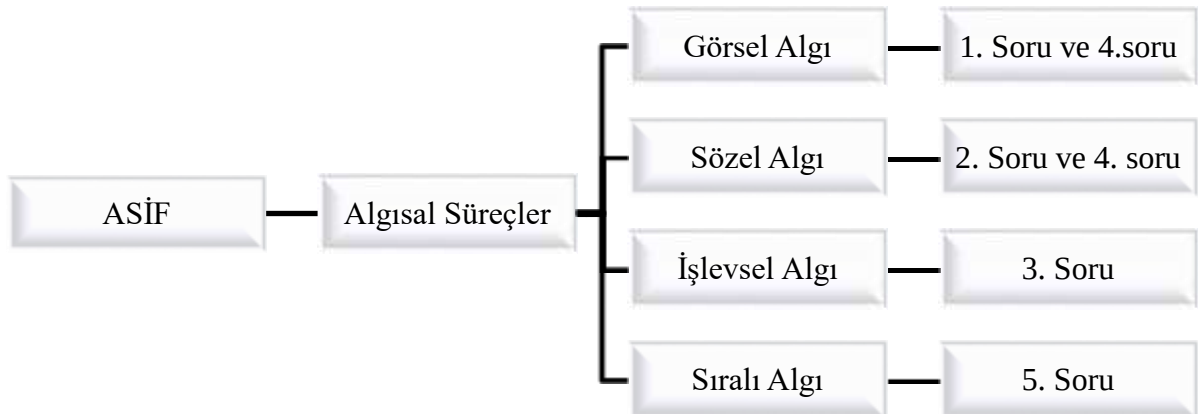
Tablo 9 Öğrencilerin üçgen eşitsizliğine yönelik taşıdıkları bilişsel beceriler

	Oluşturma	Muhakeme	Görselleştirme
Kaan	Hem geometri şeritleri hem GeoGebra hem de pergeli cetvel ile üçgen oluşturdu	Matematiksel semboller ile muhakeme yaptı	Geometri şeritleri ile üçgeni oluşturdu
Deniz	Hem geometri şeritleri hem GeoGebra hem de pergeli cetvel ile üçgen oluşturdu	Matematiksel semboller ile muhakeme yaptı	Geometri şeritleri ile üçgeni oluşturdu
Serap	Geometri şeritleri ile yaptı ancak GeoGebra ve pergeli cetvel ile tamamen doğru yapamadı	Tamamen sözel ifadelerle açıklama yaptı	Geometri şeritleri ile üçgeni oluşturdu
Merve	Geometri şeritleri ve GeoGebra ile yaptı ancak pergeli cetvel ile tamamen doğru yapamadı.	Sözel bir dille muhakeme yaptı	Geometri şeritleri ile üçgeni oluşturdu
Özlem	Geometri şeritleri ve GeoGebra ile yaptı ancak pergeli cetvel ile tamamen doğru yapamadı.	Sözel bir dille muhakeme yaptı	Geometri şeritleri ile üçgeni oluşturdu

Bu etkinlik süreci bir bütün olarak değerlendirildiğinde geometri şeridi, pergeli ve cetvel gibi farklı araçlar yardımı ile oluşturmayı tamamen doğru yapabilen Kaan ve Deniz'in görselleştirme ve muhakemeyi de kolaylıkla gerçekleştirebildiklerini göstermektedir. Etkinliğin sonunda Kaan ve Deniz'in matematiksel sembollerden yararlanarak, Merve ve Özlem'in ise sözel bir dille muhakeme yaptığı söylenebilir.

4.2. Algısal Süreçlere Ait Bulgular

Algısal sürece ait bulgular hazırlanan ASİF aracılığıyla görsel algı, sözel algı, işlevsel algı ve sıralı algı türleri üzerinden soru bazlı analiz edilmiştir. Soruların ilgili olduğu algısal süreç Şekil 68'de gösterilmiştir.

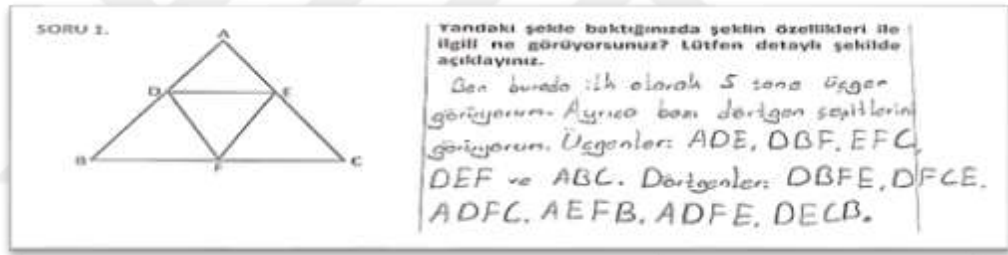


Şekil 68 ASİF sorularının ilgili olduğu algısal süreçler

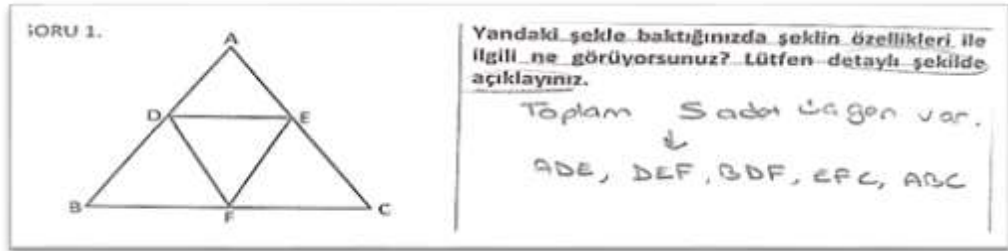
4.2.1. Görsel Algıya Ait Bulgular

Testin ilk sorusu üçgenin temel elemanlarını içeren görsel algı ile ilgilidir. Görsel algı, verilen geometrik şeklin ve şekli oluşturan temel geometrik elemanların farkında olma durumuna göre yorumlanmıştır. Kaan bu soruya Şekil 69 (a)'da görüldüğü gibi şekli oluşturan küçük üçgen ve dörtgenler gördüğünü “Ben burada ilk olarak 5 tane üçgen görüyorum. Ayrıca bazı dörtgen çeşitlerini görüyorum” diyerek gördüğü üçgen ve dörtgenleri sembollerle ifade etmiştir. Deniz ise Şekil 69 (b)'de görüldüğü gibi büyük şekli oluşturan sadece beş tane üçgen gördüğünü ifade etmiş ve gördüğü üçgenleri sembollerle ifade etmiştir. Serap ise Şekil 69 (c)'de görüldüğü gibi şekli oluşturan beş adet üçgen gördüğünü üçgenleri semboller kullanarak göstermiştir. Merve'nin bu soruya verdiği yanıt ise Şekil 69 (d)'de görüldüğü gibi büyük şekli oluşturan dört üçgeni gördüğüne yönelik olmuştur. Son olarak Özlem ise bu soruya Şekil 69 (e)'de görüldüğü gibi ‘Üçgenler görüyorum. Bir üçgenin kendi içinde de üçgenler olabildiğini ve düzgün, eşit ve sıralı şekilde olabildiğini görüyorum.’ şeklinde matematik dili kullanmadan sözel ifadelerle bir yanıt vermiştir.

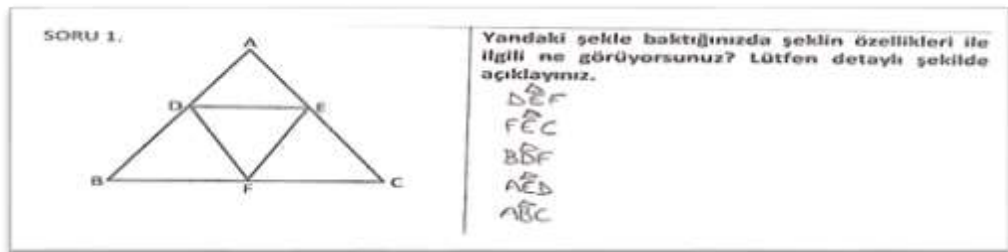
a.
Kaan'ın
Yanıtı



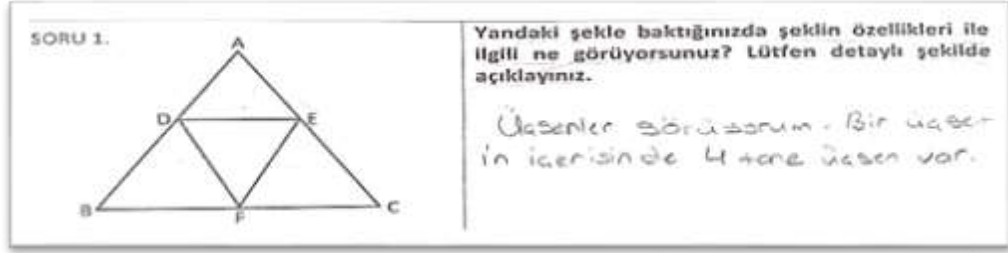
b.
Deniz'in
Yanıtı



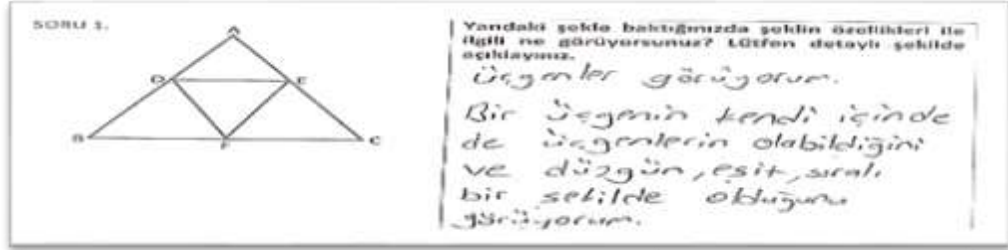
c.
Serap'ın
Yanıtı



d.
Merve'nin
Yanıtı



e.
Özlem'in
Yanıtı



Şekil 69 Görsel algıyla ilişkili birinci soruya verilen yanıtlar

Öğrencilerin görsel algı sürecine ait verdiği yanıtlar karşılaştırıldığında Kaan hariç diğer öğrencilerin büyük geometrik şekil içinde sadece üçgen şekillere odaklandıklarını, Kaan'ın ise dörtgenleri de fark ettiği görülmektedir. Bu durumda Kaan'ın görsel algıya ait becerilere diğerlerinden daha çok sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca Kaan, Deniz, Serap büyük şekil içinde gördükleri üçgenleri köşe noktalarına göre sembolle isimlendirirken, Merve ve Özlem'in sembol kullanmadan sözel ifadelerle yanıt verdikleri görülmektedir.

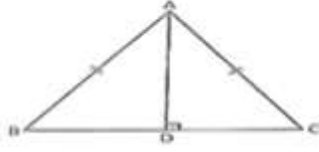
4.2.2. Sözel Algıya Ait Bulgular

Sözel algı ile ilgili olan soru ikizkenar üçgenin özelliklerini sorgulamaktadır. Bu soru kapsamında şekil üzerinde verilen matematiksel bilgileri görsel bilgiye çevirerek kullanma ve tam tersi olarak üçgen üzerinde verilen görsel bilgileri sözel bilgilere çevirebilme durumu yorumlanmıştır. Kaan bu soruya Şekil 70 (a)'da görüldüğü gibi şeklin üzerindeki sembolleri doğru yorumlayarak yaptığı çıkarımları tamamen sembollerle doğru bir şekilde ifade etmiştir. Deniz ise Şekil 70 (b)'de görüldüğü gibi şeklin üzerindeki işaret ve sembollere bakarak şeklin özelliklerini sembollerle ve doğru bir şekilde açıklamıştır. Serap'ın Şekil 70 (c)'de şekil üzerinde yaptığı işaretlerine göre şeklin özelliklerine dair verdiği "Eşkenar üçgendir." yanıtının hatalı olduğu söylenebilir. Verilen bilgilerden eşkenar üçgen olduğuna dair bir çıkarımda bulunulamayacağı açıktır. Merve Şekil 70 (d)'de görüldüğü üzere, şeklin üzerinde verilen özelliklerden kısıtlı bir çıkarımda bulunmuştur. Merve'nin çıkarım yaparken matematiksel sembollerden yararlanmadığı söylenebilir. Son olarak Özlem'in Şekil 70 (e)'deki yanıtı incelendiğinde matematiksel semboller kullanmadan yaptığı sözel açıklamanın doğru olduğu

görülmektedir. Ek olarak, Özlem, diğer arkadaşlarından farklı olarak ikizkenar üçgende tabana indirilen dikmenin üçgeni iki eş üçgene ayırdığını ifade etmiştir.

a.
Kaan'ın
Yanıtı

SORU 2.

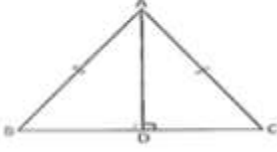


Yanda verilen şeklin üzerindeki işaret ve sembollere bakarak şeklin sahip olduğu matematiksel özellikleri lütfen detaylı bir şekilde yazınız.

$\overline{AB} = \overline{AC}$
 $\angle ADC = \angle ADB = 90^\circ$
 ABC ikizkenar üçgendir.
 ADC ve ADB dik açılı üçgendir.
 $[BC] \perp [AD]$

b.
Deniz'in
Yanıtı

SORU 2.

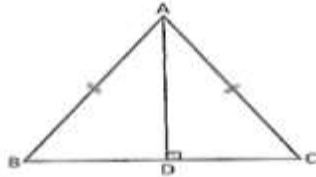


Yanda verilen şeklin üzerindeki işaret ve sembollere bakarak şeklin sahip olduğu matematiksel özellikleri lütfen detaylı bir şekilde yazınız.

İkizkenar üçgendir.
 ADC üçgeninin hipotenüs'ü $[AC]$ 'dir.
 ADB üçgeninin hipotenüs'ü $[AB]$ 'dir.
 $AD \perp [BC]$
 $|BD| = |DC|$
 $\angle ADB$ açısı = $\angle ADC$ açısı

c.
Serap'ın
Yanıtı

SORU 2.

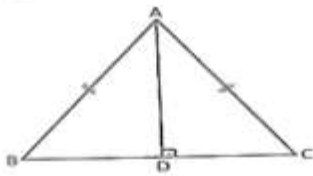


Yanda verilen şeklin üzerindeki işaret ve sembollere bakarak şeklin sahip olduğu matematiksel özellikleri lütfen detaylı bir şekilde yazınız.

Eşkenar bir üçgendir.
 İki tane dik açılı üçgen vardır.

d.
Merve'nin
Yanıtı

SORU 2.

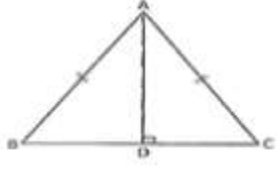


Yanda verilen şeklin üzerindeki işaret ve sembollere bakarak şeklin sahip olduğu matematiksel özellikleri lütfen detaylı bir şekilde yazınız.

AB ve AC kenarları eşit uzunluktadır yani ikizkenar üçgendir.

e.
Özlem'in
Yanıtı

SORU 2.



Yanda verilen şeklin üzerindeki işaret ve sembollere bakarak şeklin sahip olduğu matematiksel özellikleri lütfen detaylı bir şekilde yazınız.

İkizkenar bir üçgenin ortadan itige ayrıldığında yeni oluşan iki üçgenin birbirinin aynısı olduğunu ve açılardan birinin dik olup kalan iki açının aynı olduğunu

Şekil 70 Sözel algıyla ilişkili ikinci soruya verilen yanıtlar

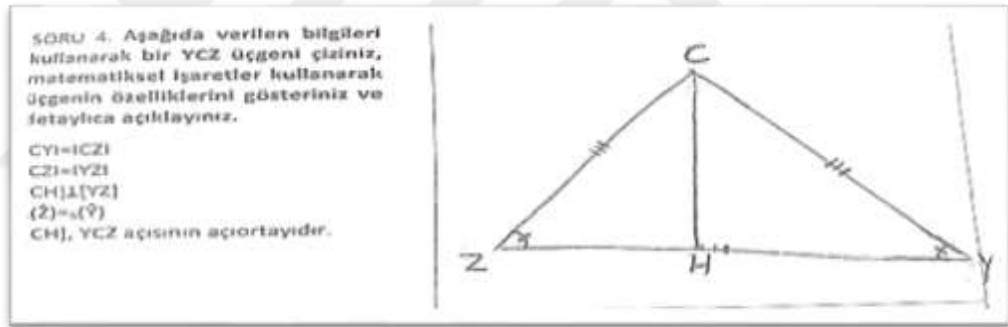
Öğrencilerin sözel algı sürecine yönelik yanıtları karşılaştırıldığında, Serap hariç diğerlerinin şekil üzerinde verilen işaretlerin anlamlarını doğru belirledikleri, böylece sözel algı

becerilerini taşıdıkları söylenebilir. Ayrıca Kaan ve Deniz'in şekil üzerinde verilen işaret ve sembolleri matematiksel semboller aracılığıyla ifade edebildiğini, diğerlerinin ise sözel bir dille açıklayabildikleri iddia edilebilir.

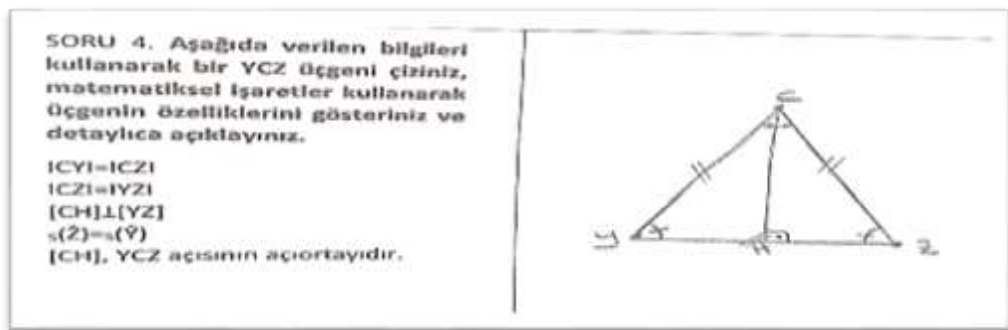
Görsel-Sözel Algı İlişkisine Yönelik Bulgular

Formun dördüncü sorusu eşkenar üçgen ve özelliklerini göstermeye yönelik hem görsel hem de sözel algı ile ilgilidir. Bu nedenle, bu soruya yönelik verilen yanıtlar görsel ve sözel algının ilişkisi ile açıklanmış ve ayrı bir bölüm olarak burada verilmiştir. Bu soruda Kaan'ın Şekil 71 (a)'da görüldüğü gibi sembollerle verilen sözel bilgiyi görsel bilgiye çevirdiği görülmektedir. Deniz, Şekil 71 (b)'de görüldüğü gibi, Serap ise Şekil 71 (c)'de görüldüğü gibi matematiksel sembollerden yararlanarak bu sembollerin anlamına uygun şekilde görsel bilgi elde etmiştir. Merve ise Şekil 71 (d)'de görüldüğü gibi matematiksel sembollerin anlamını hatırlayamadığı için görsel bilgiye eksiksiz bir geçiş gerçekleştirememiştir. Özlem de diğerlerinden tamamen farklı olacak şekilde Şekil 71 (e)'de görüldüğü gibi sadece bir YCZ üçgeni çizmiş ancak sözel bilgilerden görsel bir bilgi elde edememiştir.

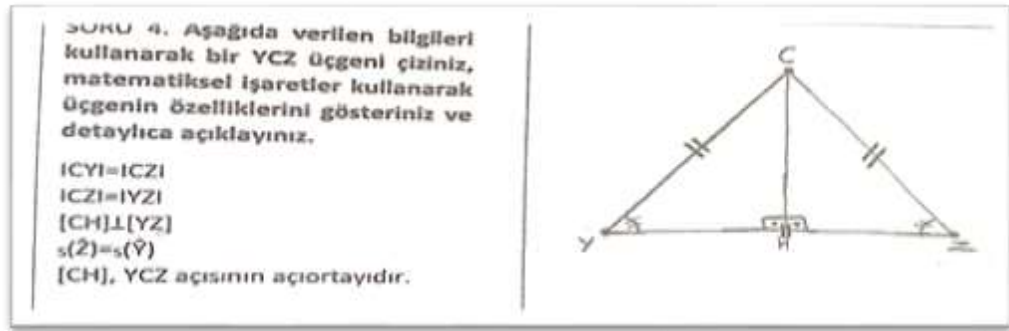
a.
Kaan'ın
Yanıtı



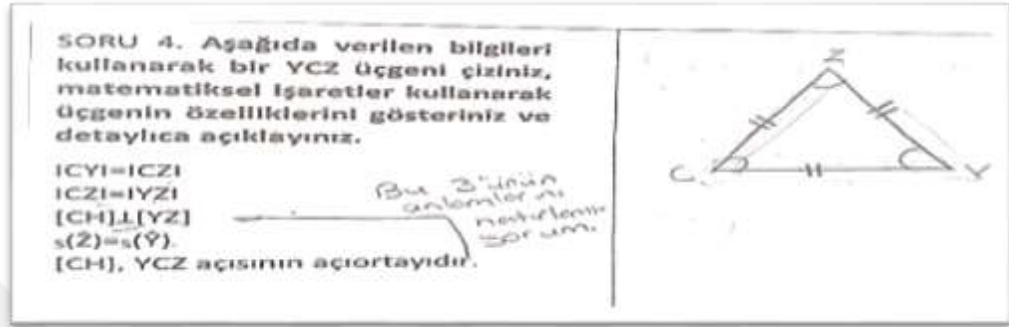
b.
Deniz'in
Yanıtı



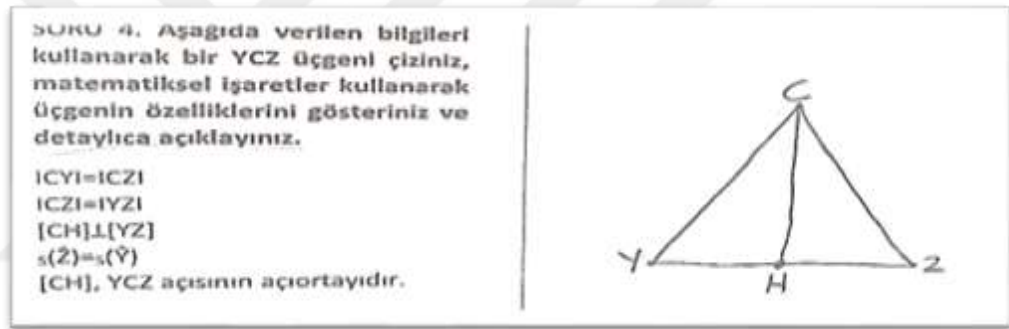
c.
Serap'ın
Yanıtı



d.
Merve'ni
n Yanıtı



e.
Özlem'in
Yanıtı



Şekil 71 Görsel-sözel algıyla ilişkili dördüncü soruya verilen yanıtlar

Öğrencilerin görsel algı ve sözel algı ilişkisine yönelik verdiği yanıtlar karşılaştırıldığında Kaan, Deniz ve Serap'ın sözel ve görsel algı süreçlerinde bir etkileşim gösterdiğini, ancak Merve ve Özlem'in matematiksel sembollerin anlamını tam olarak bilmedikleri için bu algısal süreci başarılı şekilde tamamlayamadıkları iddia edilebilir.

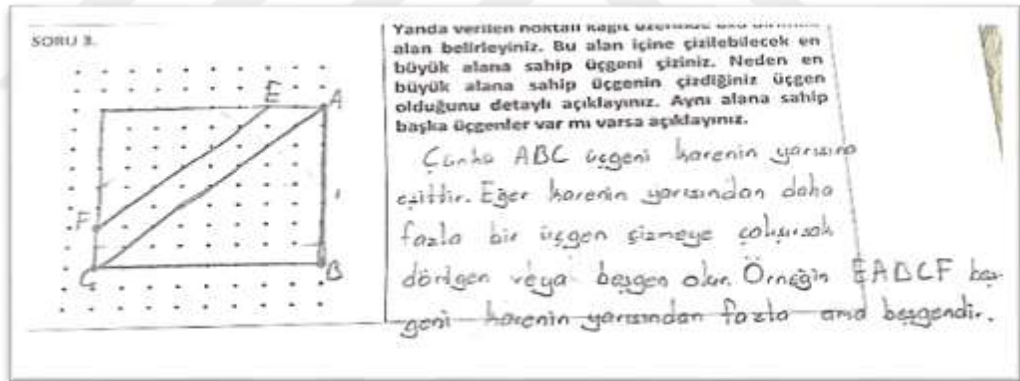
4.2.3. İşlevsel Algıya Ait Bulgular

İşlevsel algıyı değerlendirmek için sorulan soru üçgenin kapladığı alanı hesaplama gerektirmektedir. İşlevsel algı bu soru kapsamında şeklin alt parçalarının yönünü ve konumunu değiştirerek yeni şekiller oluşturma ve verilen geometrik şekil üzerinde değişiklik yapabilmek için sayısal verilere ihtiyaç duymadan doğru çıkarımlarda bulunabilme becerileri üzerinden yorumlanmıştır.

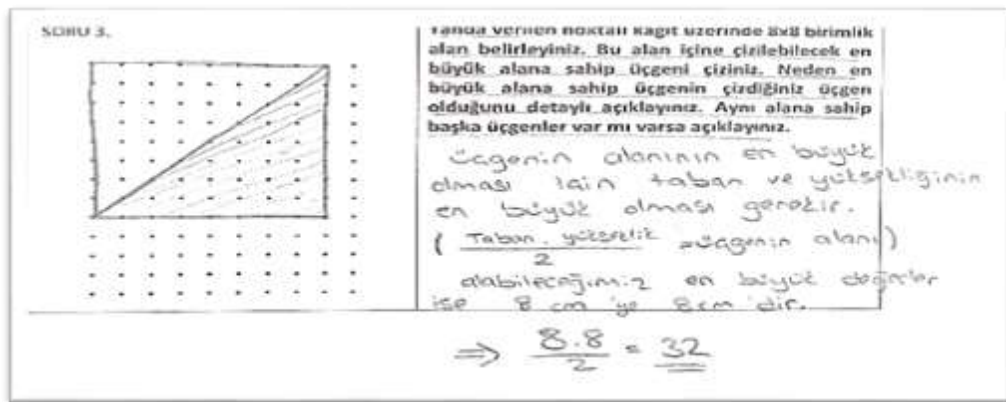
Kaan, 8x8 birimlik bir alan içine çizilebilecek en büyük alana sahip üçgeni belirlerken Şekil 72 (a)'da görüldüğü gibi çizdiği 8x8 birimlik karenin köşelerini isimlendirmiştir. Daha

sonra isimlendirdiği ABC üçgeninin alanının karenin alanının yarısına eşit ve buraya çizilebilecek en büyük üçgen alanı olduğunu “Eğer karenin yarısından daha fazla bir üçgen çizmeye çalışırsak dörtgen veya beşgen olur. Örneğin EABCF beşgeni karenin alanının yarısından fazla ama beşgendir.” şeklinde açıklamıştır. Deniz bu soruda Şekil 72 (b)’de görüldüğü gibi 8x8 birimlik kareyi belirledikten sonra, çizilebilecek en büyük üçgen için şu açıklamayı yapmıştır: “Üçgenin alanının en büyük olması için taban ve yüksekliğin en büyük olması gerekir. Alacağımız en büyük değerler ise 8 birim olacağı için $8 \times 8 / 2$ ’ den 32 birim kare’ dir.” Bu açıklamasını 8x8 birimkarelik karenin alanının yarısı şeklinde olduğunu karenin içine üçgen çizerek göstermiştir. Serap ilk olarak Şekil 72 (c)’de görüldüğü gibi 8x8 birimlik bir kare belirledikten sonra “Çizilebilecek en büyük alana sahip üçgenlerin hepsinin alanları eşit oluyor çünkü 8x8 birimlik olduğu için aynı oluyor” şeklinde açıklamıştır. Açıklamasına uygun olarak da Şekil 72 (c)’de görüldüğü gibi aynı alana sahip farklı üçgenler göstermiştir. Merve Şekil 72 (d)’de görüldüğü gibi 8x8 birimlik bir kare çizmiş ve içine en büyük alana sahip bir üçgen çizmiş, ama ek herhangi bir açıklama yapmamıştır. Son olarak, Özlem, Şekil 72 (e)’de görüldüğü gibi 8x8 birimlik bir alan belirlemiş, belirlediği alan içine bir tane üçgen çizmiş ve bu durumu “Çünkü kenar uzunluklarını en fazla olacak şekilde aldım” şeklinde açıklamıştır.

a.
Kaan’ın
Yanıtı

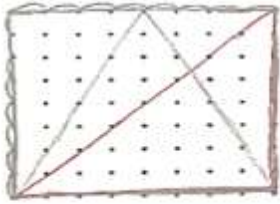


b.
Deniz’in
Yanıtı



c.
Serap'ın
Yanıtı

SORU 3.



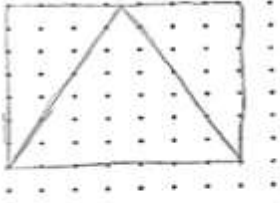
Yanda verilen noktalı kağıt üzerinde 8x8 birimlik alan belirleyiniz. Bu alan içine çizilebilecek en büyük alana sahip üçgeni çiziniz. Neden en büyük alana sahip üçgenin çizdiğiniz üçgen olduğunu detaylı açıklayınız. Aynı alana sahip başka üçgenler var mı varsa açıklayınız.

Çizilebilecek üçgenlerin hepsinin alanları eşit oluyor çünkü 8x8 birimlik olduğu için aynı oluyor.

Aynı alana sahip başka üçgenler vardır.

d.
Merve'ni
n Yanıtı

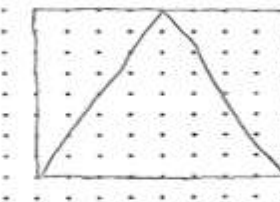
SORU 3.



Yanda verilen noktalı kağıt üzerinde 8x8 birimlik alan belirleyiniz. Bu alan içine çizilebilecek en büyük alana sahip üçgeni çiziniz. Neden en büyük alana sahip üçgenin çizdiğiniz üçgen olduğunu detaylı açıklayınız. Aynı alana sahip başka üçgenler var mı varsa açıklayınız.

e.
Özlem'in
Yanıtı

SORU 3.



Yanda verilen noktalı kağıt üzerinde 8x8 birimlik alan belirleyiniz. Bu alan içine çizilebilecek en büyük alana sahip üçgeni çiziniz. Neden en büyük alana sahip üçgenin çizdiğiniz üçgen olduğunu detaylı açıklayınız. Aynı alana sahip başka üçgenler var mı varsa açıklayınız.

Çünkü kenar uzunluklarını en fazla olacak şekilde aldım.

Aynı alana sahip başka üçgenler vardır kenar uzunlukları farklı alınabilir.

Şekil 72 İşlevsel algıyla ilişkili üçüncü soruya verilen yanıtlar

Öğrencilerin işlevsel algı süreci ile ilgili cevapları karşılaştırıldığında en kapsamlı ve matematiksel dil kullanarak açıklama yapan öğrencilerin Kaan ve Deniz olduğu görülmektedir. Serap ve Özlem birbirlerine yakın cevaplar vermişlerdir ve bu cevapların doğru olduğu görülmektedir. Sadece Özlem ve Serap'ın cevabının Kaan ve Deniz'den farklı olarak yaptıkları açıklamayı sözel bir dille ifade etmiş olmaları şeklinde özetlenebilir. Merve'nin en büyük alana sahip bir üçgen çizebilmesine rağmen herhangi bir açıklama yapamadığı için işlevsel algı özelliklerini diğerlerine göre daha az taşıdığı iddia edilebilir.

4.2.4. Sıralı Algıya Ait Durumlar

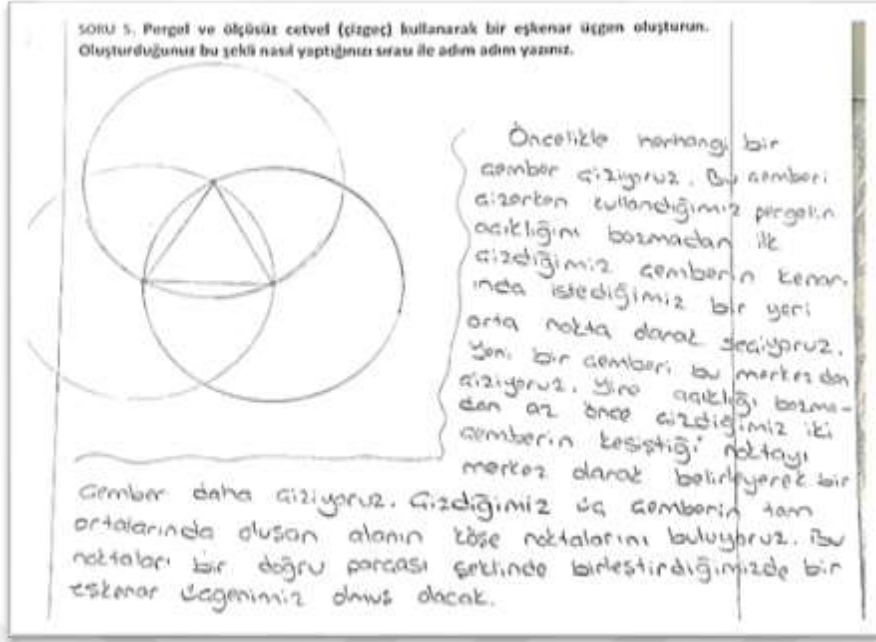
Sıralı algı sürecini değerlendirmek üzere sorulan soruda öğrencilerin eşkenar üçgen oluşturmaları amaçlanmıştır. Sıralı algı bir geometrik şekli bir araç yardımı ile oluşturma ve oluşturduğu şeklin oluşturulma aşamasını adımları ile tarif edebilme olarak ele alınmıştır.

Kaan, Şekil 73'te görüldüğü gibi pergeli ve ölçüsüz cetvel ile eşkenar üçgen inşasını tamamlamış ve bu işlemi adım adım anlatmıştır. Verdiği sıraya göre adımlar gerçekleştirildiğinde 2 tane eş çemberin yarıçap uzunlukları eşitliğinden yararlanarak eşkenar üçgeni oluşturmuştur. Anlattığı sıralı adımlar ile eşkenar üçgenin hatasız oluşturulabildiği test edilmiş ve buradan Kaan'ın eşkenar üçgen oluşturmaya yönelik sıralı algıya ait becerilere sahip olduğu ifade edilebilir.



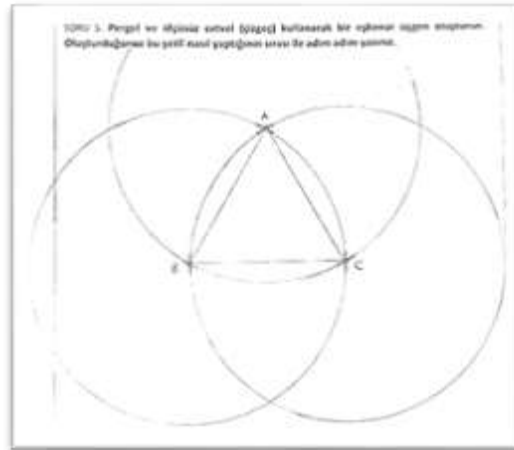
Şekil 73 Kaan'ın sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt

Kaan iki eş çember ve bunların yarıçap özelliğinden yararlanırken Deniz'in farklı olarak üç eş çemberin yarıçap özelliğinden yararlandığı görülmektedir. Deniz, pergeli ve ölçüsüz cetvel aracılığıyla eşkenar üçgen oluşturmaya gerektiren bu soruya Şekil 74'te görüldüğü şekilde cevap vermiştir. Verdiği yanıt incelendiğinde birbirine eş üç çemberin yarıçap uzunlukları eşitliğinden yararlanarak eşkenar üçgeni oluşturduğu görülmektedir. Buradan Deniz'in eşkenar üçgen oluşturmaya yönelik sıralı algı gerektiren becerilere sahip olduğu söylenebilir.



Şekil 74 Deniz'in sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt

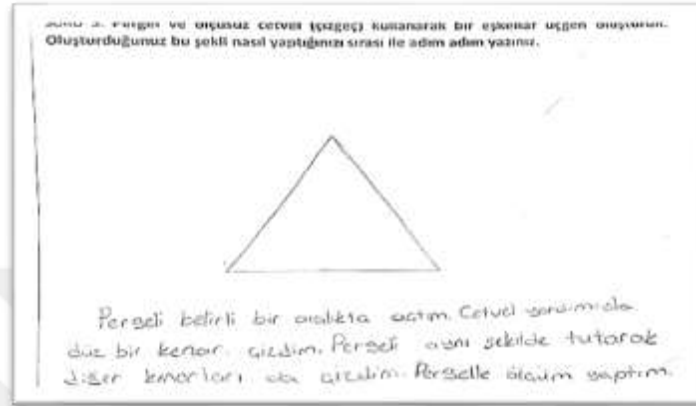
Serap ise, sıralı algı becerisi gerektiren bu soruda Deniz'e benzer şekilde bir inşaa gerçekleştirmiştir. Çizdiği eşkenar üçgen için üç eş çember ve bu çemberlerin yarıçap eşitliğinden yararlandığı görülmektedir. Bu soruya Şekil 75'te görülen yanıtı detaylı incelendiğinde adımların doğru olduğu ve yazdığı sıralı adımlar yardımı ile eşkenar üçgen oluşturulabildiği görülmektedir. Buradan Serap'ın eşkenar üçgen çizimine yönelik sıralı algı gerektiren becerilere sahip olduğu iddia edilebilir.



Pergel rastgele açtım. Yarıçapları eşit olacak şekilde üç tane çember çizdim. Sonra çemberlerin yarıçapları eşit olduğu için merkez noktaları belirledim. Merkez noktaları belirledikten sonra cetvel yardımıyla merkezleri birleştirdim. Çemberlerin yarıçapları eşit olduğu için eşkenar üçgenimi oluşturdum.

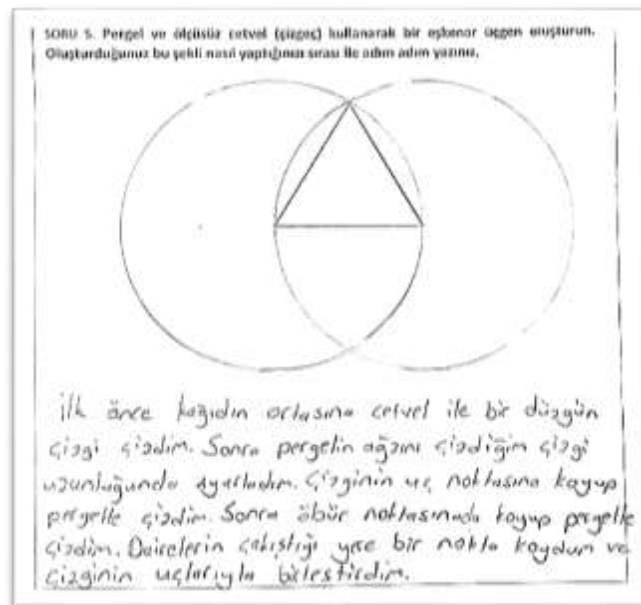
Şekil 75 Serap'ın sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt

Merve'nin, diğer öğrencilerden farklı şekilde eşkenar üçgen inşası için verdiği yanıt Şekil 76'da görülmektedir. Verdiği yanıt incelendiğinde herhangi bir çember ya da yay çizmediği görülmektedir. Bu nedenle öğrencinin pergeli çember çizimi için değil eşkenar üçgenin kenar uzunluğunu belirlemek için pergel aralığını bozmadan cetvel gibi bir araç olarak kullandığı söylenebilir. Bu sebeple eşkenar üçgen oluşturmaya yönelik sıralı algı gerektiren becerilere sahip olmadığı iddia edilebilir.



Şekil 76 Merve'nin sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt

Son olarak Özlem'in verdiği yanıt incelendiğinde inşayı Kaan'ın yanıtına benzer şekilde iki eş çemberden yararlanarak oluşturduğu görülmektedir. Verdiği yanıtta eşkenar üçgen oluşturmak için Şekil 77'de görüldüğü gibi iki eş çember ve yarıçap eşitliklerinden yararlandığı görülmektedir. Verdiği yanıt detaylı incelendiğinde adımların doğru olduğu ve yazdığı sıralı adımlar yardımı ile eşkenar üçgen oluşturulabildiği görülmektedir. Buradan Özlem'in eşkenar üçgen oluşturmaya yönelik sıralı algı gerektiren becerilere sahip olduğu söylenebilir.



Şekil 77 Özlem'in sıralı algı ile ilgili soruya verdiği yanıt

Öğrencilerin sıralı algı sürecine yönelik deneyimleri karşılaştırıldığında, Kaan ve Özlem'in 2 tane eş çemberden yararlandığı Deniz ve Serap'ın ise üç eş çemberden yararlandığı görülmüştür. Merve ise çemberden yararlanmadan pergelin açıklığından yararlanarak kenar uzunluğunu eşit olarak çizmeyi tercih etmiştir. Burada Merve'nin çemberin merkez ve yay özelliğinden yararlanmadan pergelin açıklığını kenar uzunluğu belirlemek için araç olarak kullandığı görülmektedir. Sonuç olarak Merve hariç diğer öğrencilerin eşkenar üçgen oluşturmaya yönelik sıralı algı gerektiren becerilere sahip olduğu söylenebilir. Merve'nin görsel algı gerektiren becerilerini de tam yansıtamadığı gözlemlenmişti. Bu nedenle işlevsel algı becerisinin ortaya çıkabilmesi için şeklin görsel olarak iyi bilinmesi ve görsel özelliklerinin farkına varılması dolayısıyla görsel algı becerilerini iyi taşımak gerektiği iddia edilebilir.



BÖLÜM 5

TARTIŞMA

Bu bölümde özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakeme süreci, bilişsel ve algısal geometrik muhakeme becerileri açısından tartışılacaktır. Ayrıca öğrencilerin bilişsel ve algısal muhakeme süreçleri arasındaki etkileşim ilgili literatür çerçevesinde tartışılmıştır.

5.1. Öğrencilerin Bilişsel Muhakeme Süreci

Bu çalışmada öğrencilerin üçgenlere yönelik geometrik muhakeme süreçlerinde kendi aralarında farklılıklar gözlemlenmiştir. Bu farklılaşma öğrencilerin etkinliklerde yaptıkları muhakemelerin doğal ya da teorik olmasından veya muhakemelerin süreç içinde derinleşmesinden ortaya çıkmaktadır. Muhakeme sürecini açıklayıcı şekilde ortaya koyan öğrenciler olduğu gibi, bazı etkinliklerde muhakeme gerçekleştiremeyen öğrencilerin olması bu sonucu desteklemektedir. Araştırmada literatürden farklı olarak katılımcılar özel yetenekli öğrencilerden oluşmaktadır. Özel yetenekli olmayan öğrencilerde de benzer bulgulara (Cheung, 2011; Duval, 1998; Jones, 2000) ulaşılmıştır. Dolayısıyla bireysel farklılıkların bilişsel süreçlerde önemli bir rol oynadığı ifade edilebilir.

Bu araştırmada özel yetenekli öğrencilerin etkinlik sorularının tamamında yer alan keşfetme temelli açık uçlu sorulara sıklıkla çözüm aradıkları gözlenmiştir. Özel yetenekli öğrencilerin bilişsel potansiyellerini ortaya çıkarmak ve akıl yürütme becerilerini geliştirmek için, öğretim programlarında bu tarz keşfetme etkinliklerine daha çok yer verilmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu öğrencilerle yürütülen etkinliklerin sadece sonucundan ziyade bilişsel gelişim süreçlerine odaklanmak ve bu süreçlerine rehberlik etmek önemlidir (Kanbur Tekerek & Argün, 2022).

Araştırmada birbirini etkileyen boyutlardan görselleştirme boyutu becerilerinin her zaman muhakemeye yardımcı olmadığı gözlemlenmiştir. Bu bulgu, Duval (1998) ve Karpuz (2018)'un sonuçları ile uyumludur. Duval (1998), görselleştirmenin muhakeme sürecine her zaman katkı sağlamadığını ve öğrencilerin geometrik şekilleri bazen görselleştirmelerine rağmen, bu görseller üzerinden doğru muhakeme yapamadıklarını belirtmiştir. Jones (1998) ise görselleştirmenin öğrencilerin geometrik şekiller arasındaki ilişkileri anlamalarına yardımcı olabileceğini, ancak bu görsel anlayışın her zaman bilişsel muhakemeye dönüşmediğini belirtmiştir. Bu durum, öğrencilerin şekilleri görsel olarak tanıyabilmelerine rağmen, bu bilgiyi mantıksal çıkarımlar yaparak kullanamadıkları anlamına gelmektedir. Karpuz (2018) öğrencilerin görselleştirme yapabilme yeteneklerinin yüksek olmasına rağmen, bu

görselleştirmeleri kullanarak doğru matematiksel sonuçlara ulaşmada zorlandıklarını belirtmiştir. Dolayısıyla, geometri öğretiminde görselleştirme becerilerinin yanı sıra, bu görselleri doğru muhakeme süreciyle birleştirme becerisinin de geliştirilmesi gerektiği söylenebilir. Ayrıca, Karpuz (2018) dinamik geometri yazılımlarının görselleştirmeyi desteklemesine rağmen, öğrencilerin bu yazılımlar yardımıyla yaptıkları görsel inşaların muhakeme yeteneklerine beklenen düzeyde katkı sağlamadığını iddia etmiştir. Bu nedenle, etkili geometri öğretimi için sadece görselleştirme değil, aynı zamanda öğrencilerin bilişsel süreçlerini de beraberinde geliştirecek etkinlikler gerçekleştirilmesi gerektiği söylenebilir. Duval (1995)'in benzer şekilde bilişsel muhakeme boyutlarını ayrı ele almış olmasına rağmen bu boyutların birbirleriyle etkileşimini sağlayarak geliştirilmesi gerektiğini savunmaktadır. Dolayısıyla geometri alt öğrenme alanında üçgenler konusunun öğretiminde geometrik muhakemenin daha iyi gerçekleştirilmesi için interaktif ve çok yönlü etkinliklerden yararlanılabileceği düşünülmektedir. Örneğin, üçgenlerin görsellerini ve ilgili açı-kenar ölçülerini inceleyerek farklarını ve benzerliklerini belirlemek veya birden fazla üçgeni birleştirerek daha karmaşık geometrik yapılar oluşturmak öğrencilerin ispat yapma süreçlerini ve mantıksal akıl yürütmelerini destekleyebilir.

Çalışmada yer alan katılımcıların bazı etkinliklerde doğal bir dil kullanarak sözel muhakeme yapabildikleri fakat teorik muhakemeyi tam olarak gerçekleştiremedikleri gözlenmiştir. Ancak öğrencilerin muhakeme süreci derinleştikçe ve çıkarımları genişledikçe yaptıkları muhakemelerin doğal muhakemeden çıkıp teorik muhakemeye doğru geliştiği iddia edilebilir. Karpuz (2018) ve Mutluoğlu ve Erdoğan (2020) tarafından yapılan araştırmada da benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Karpuz (2018) öğrencilerin çoğunlukla günlük dil kullanarak geometrik şekiller üzerine sözel açıklamalar yaptıklarını, ancak teorik temelli muhakemeye geçişte zorlandıklarını belirtmiştir. Benzer şekilde, Mutluoğlu ve Erdoğan (2020), öğrencilerin geometrik muhakeme sürecinde sözel ifadeleri tercih ettiklerini ve genellikle teorik muhakeme yapamadıklarını ortaya koymuştur. Bu durum, öğrencilerin üçgenlerle ilgili soyut matematiksel kavramları anlamlandırmada sözel açıklamalarla yetinmeleri ve teorik bağlantıları kurmada yetersiz kalmalarıyla açıklanabilir. Bu bulgular kapsamında öğrencilerin teorik muhakeme becerilerini geliştirmek için, üçgen öğretiminde çeşitli ve farklılaştırılmış etkinliklere yer verilebileceği düşünülmektedir. Örneğin, üçgen öğretiminde fiziksel materyaller ve teknoloji kullanılarak, bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu keşfettiren, dış açılarının ölçüleri toplamının 360° olduğunu ispatlamalarını gerektiren ve üçgen çeşitlerini özellikleri çerçevesinde sınıflandıracak, benzerlik ve farklılıklarını açıklayacak kavram

haritaları oluşturma gibi etkinliklere yer verilmesinin teorik muhakeme süreci için önemli olduğu düşünülmektedir.

Bu araştırmada özel yetenekli öğrencilerin üçgende iç açı ölçüleri toplamının 180° , dış açı ölçüleri toplamının 360° olduğunu keşfetme temelli etkinliklerde ispat ve çıkarım yapabildikleri gözlemlenmiştir. Chen ve diğerleri (2021) öğrencilerin üçgenin iç açılar toplamının 180° olduğunu ispat ettirmeye yönelik çalışmasında seviye olarak üst düzey öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin iyi olduğunu, orta seviye öğrencilerin ispat yapma becerilerinin hala geliştirilmeye ihtiyaç olduğunu ve daha düşük seviyedeki öğrencilerin ispat oluşturma becerilerinin zayıf olduğunu sonuçlandırmıştır. Çalışmaya dahil edilen etkinlikler bir bütün olarak değerlendirildiğinde, özel yetenekli öğrencilerin süreci anlamlandırmaları, geometrik önermelere kendi keşifleri ile ulaşabilmeleri, etkinlikteki sözel çıkarımları ve etkinlikleri başarılı bir şekilde tamamlamaları bu durumu kanıtlar niteliktedir. Bilim ve Sanat Merkezleri (BİLSEM) öğretim programlarında uzun süredir var olan bu tür keşfetme etkinliklerine, artık Millî Eğitim Bakanlığı'nın genel öğretim programlarında da yer vermeye başladığı görülmektedir. Özellikle, MEB (2024) öğretim programında geometri içeriğinde yer alan neredeyse bütün konularda ayrıntılı keşfetme temelli yaklaşımların benimsenmesi, bu gelişimin somut bir örneğidir.

Çalışmada üçgen eşitsizliği konusundaki bilişsel muhakeme süreçlerini farklı araç ve gereçler (geometri şeritleri, kâğıt katlama, pergel, cetvel ve GeoGebra) kullanarak inceleyen çeşitli etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Farklı materyal kullanımı öğrencilerin sahip oldukları bilgiyi test etmelerini ve yaptıkları çıkarımların eksikliklerini fark etmelerini sağlamıştır. Öğrenciler, üçgen oluşturma sürecinde başlangıçta uzun kenarın uzunluğunun diğer iki kenarın uzunluğunun toplamından küçük olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Geometri şeritleri, pergel-cetvel, kâğıt katlama ve GeoGebra gibi farklı materyaller sunulduğunda uzun kenar uzunluğunun diğer iki kenar uzunluğu toplamına eşit olması durumunda da üçgen oluşturmadığını fark etmişlerdir. Bu durum geometri öğretiminde farklı araç gereç kullanımının muhakeme sürecinde önemli olduğunu göstermektedir (Erduran & Yeşildere, 2010; Kurtuluş & Uygan, 2016). Benzer şekilde Özdemir ve Çakır (2019) çalışmasında, dinamik geometri yazılımlarının geometri öğretiminde önemli bir araç olarak kabul edilmesine rağmen, tek başına kullanıldığında yeterli olmadığı sonucuna ulaşmışlardır. Öğrenciler farklı materyaller yardımı ile etkinlikte matematiksel çıkarımlarındaki hatalarını fark ederek bilişsel muhakeme süreçleri içinde doğal olarak tespit edebilmişlerdir. Kâğıt-kalem veya dinamik geometri yazılımlarının kullanıldığı ortamlarda yapılan üçgen inşası etkinliklerinin, öğrencilerin muhakeme ve akıl yürütme süreçlerinde olumlu etkiler yarattığı araştırmalar mevcuttur (Şengün & Kabaca, 2016;

Tapan Broutin, 2014). Sonuç olarak, çeşitli araç ve gereçler kullanarak yapılan benzer etkinliklerin tekrarlanmasının, öğrencilerin geometrik kavramları daha derinlemesine anlamalarına ve geometrik muhakeme süreçlerini geliştirmelerine önemli katkı sağladığı söylenebilir.

5.2.Fiziksel ve Teknolojik Araçlar ile Zenginleştirilmiş Öğretim Ortamları

Bu çalışmada bilişsel muhakeme süreçlerinin farklı öğretim araçları ile desteklenmesinin geometri öğretimini olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin katılımcılar GeoGebra'nın etkileşimli özellikleri sayesinde soyut matematiksel kavramları daha somut ve anlaşılır hale getirebilmişlerdir. Katılımcılar GeoGebra'nın dinamik ve etkileşimli yapısını eğlenceli ve kolaylaştırıcı bulduklarını ifade etmişlerdir. Benzer sonuçlara ulaşan literatürde pek çok araştırma mevcuttur (Cheung, 2011; Jones, 2000; Şimşek & Yaşar, 2019; Ünlü & Ertekin, 2020). Cheung (2011), dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin geometrik kavramları görselleştirmelerine ve anlamalarına önemli ölçüde katkıda bulunduğunu göstermiştir. Benzer şekilde, Jones (2000) da GeoGebra gibi yazılımların, öğrencilere soyut matematiksel ilişkileri somutlaştırma ve daha kolay anlama imkânı sunduğunu belirtmiştir. Ayrıca, Doğan ve İçel (2010) de benzer şekilde sekizinci sınıf öğrencilerinin üçgenler konusunda, GeoGebra kullanımının öğrencilerin öğrenme süreçlerini daha interaktif hale getirdiği ve konuların daha iyi anlaşılmasını sağlayarak öğrenci başarılarını olumlu yönde etkilediğine ulaşırken, Ünlü ve Ertekin (2020) ise bu tür dinamik yazılımların, öğrencilerin kavramsal anlayışlarını derinleştirdiğini ve öğrenme süreçlerini kolaylaştırdığını vurgulamıştır. Dolayısıyla, geometri öğretiminde farklı araç gereç kullanımının bilişsel muhakeme sürecini olumlu etkilediğini ifade edebiliriz. Bu konuda Şimşek ve Yaşar (2019) ise dinamik geometri programlarının dinamik özelliği sayesinde kolaylıkla hareket ettirilebilir olmasından kaynaklı geometrik kavramların öğretimini kolaylaştırdığını ifade etmektedir. Bu sonuçlar çerçevesinde GeoGebra'nın geometri öğretimini olumlu etkilediğini ve öğrencilerin programın sürüklemeye özelliğinden kaynaklı olarak geometrik şekiller arası ilişkilerde daha iyi muhakeme yapabildikleri gözlemlenmiştir.

Üçgende açılı etkinliğinde, öğrencilerin tamamının iç açıyı üçgen üzerinde doğru bir şekilde göstermelerine rağmen çoğunun dış açıyı üçgen üzerinde yanlış gösterdiği görülmüştür. Bunun nedeni olarak, 6. sınıf seviyesinde işlenen açılar konusunda açılı çeşitlerinden sadece tümler, bütünler, komşu bütünler, komşu tümler ve ters açılı kavramlarını öğrenmiş olmalarının olduğu düşünülmektedir. Ayrıca diğer bir neden olarak en küçük çokgen olan üçgen öğretilirken dış açılı kavramına yer verilmemiş olduğu düşünülmektedir. Bu sonuç, Çetin'in

(2020), üçgenin en küçük çokgen olması sebebiyle diğer çokgenlerin ve geometrik ilişkilerin anlaşılması için bütün özelliklerinin iyi şekilde bilinmesi gerekmektedir sonucuna benzerdir. Üçgende açı etkinliğinin sonunda, öğrencilerin çoğu, fiziksel materyaller yardımı ile iç açılarının ölçüleri toplamının 180 derece, dış açılarının ölçülerinin toplamının ise 360 derece olduğunu açıklayabilmişlerdir. Etkinliklerin aşamalı olarak farklı ortamlarda gerçekleştirilmeye uygun olması sebebiyle ilk etkinlikte yapamadıkları muhakemeyi etkinliğin devamında pergeli-cetveli veya GeoGebra kullandıktan sonra doğru yapabilmesi farklı öğretim ortam ve araçlarının muhakemeyi olumlu etkilediği şeklinde yorumlanabilir. Literatürde de bu sonuca ulaşan araştırmalar mevcuttur. (örn., Battista, 2002; Erduran & Yeşildere, 2010; Kurtuluş & Uyan, 2016). Fakat bazı öğrencilerin GeoGebra ve pergeli sadece araç olarak kullanıp, programın sağladığı tüm özelliklerden yararlanmadığı da görülmüştür. Bu sonucu destekleyecek şekilde, bu öğrencilerin üçgende açı-kenar ilişkisini anladıktan sonra çeşitkenar üçgen, eşkenar üçgen, ikizkenar üçgen gibi üçgenlerin açı-kenar özelliklerini daha iyi yorumladıkları söylenebilir. Bu nedenle, 5. Sınıf düzeyinde yer alan üçgen çeşitlerinin bağımsız bir şekilde verilmesi yerine, 8. sınıf düzeyinde yer alan üçgende açı-kenar bağıntıları ile ilişkilendirilerek birbirini tamamlayacak şekilde aynı düzeyde öğretilmesinin öğrenme sürecini kolaylaştıracağı iddia edilebilir. Bu sonuç MEB'in 2024 yılında yayınladığı öğretim programında sadece üçgen çeşitlerinin açı ve kenar özelliklerine dair çıkarımda bulunabilmelerine yönelik çalışmalara 5. sınıf seviyesinde yer verilmesi bu araştırma sonuçlarını destekler niteliktedir.

5.3. Öğrencilerin Algısal Muhakeme Süreçleri

Öğrencilerin algısal muhakeme süreçlerinin incelenmesi sonucunda, görsel, sözel, sıralı ve işlevsel algı becerilerinde farklılıklar olduğu; bazı öğrencilerin sözel algıda bazı öğrencilerin ise görsel algıda daha kapsamlı cevaplar verdiği gözlemlenmiştir. Görsel algı sorularında bazı öğrencilerin üçgen içinde verilen dörtgenleri fark edemediği, bazı öğrencilerin ise fark ettiği geometrik şekli matematiksel semboller kullanarak ifade edemediği görülmüştür. Ancak işlevsel ve sıralı algı gerektiren sorularda verilen yanıtlarda belirgin bir farklılaşma görülmemiştir. Gürhan ve Tapan Broutin (2017) araştırmasında öğrencilerin sözel ve görsel algı süreçlerinde farklılıklar olduğunu belirtmişlerdir. Bu çalışmada da benzer şekilde sadece sözel ve görsel algı süreçlerinde belirgin farklılığa rastlanmıştır. Gagatsis ve diğerleri (2010) geometrik şekilleri; görsel, işlevsel ve sıralı algı düzeyleri yönünden karşılaştırdığı araştırmasında ise, öğrencilerin geometrik şekil anlayışının bu üç düzeyde farklılaştığını, özellikle görsel algı süreçlerinde öğrencilerin geometrik şekilleri tanıma ve bu şekiller

arasındaki ilişkileri belirleme becerilerinde belirgin farklılıklar görüldüğünü ifade etmişlerdir. Çalışmanın sonuçları bu yönüyle Gagatsis ve diğerlerinin (2010) sonuçları ile farklılaşmaktadır.

Çalışmada görsel ve işlevsel algı ilişkisi incelendiğinde; görsel algı gerektiren sorulara detaylı cevap veremeyen öğrencilerin işlevsel algı sorularında da eksik cevaplar verdiği görülmüştür. Michael ve Gagatsis (2013) araştırmalarında bu çalışmanın sonuçlarına benzer şekilde, görsel algıdaki eksikliğin sıklıkla işlevsel algının uygun şekilde kullanılmasına engel olduğu sonucuna ulaşmışlardır. İşlevsel algı, şekli farklı bakış açıları ile görmeyi gerektirdiği için, işlevsel algı için görsel algının çok ötesine geçmek gerekmektedir (Gürhan & Tapan Broutin, 2017). Dolayısıyla, iyi düzeyde işlevsel algıya sahip olabilmek için, iyi düzeyde görsel algının ön koşul olduğu iddia edilebilir.

Farklı araçlar kullanılarak yapılan muhakeme etkinliklerinde öğrencilerin genel olarak sıralı algı süreçlerini hem matematiksel hem de sözel olarak doğru ifade ettikleri gözlemlenmiştir. Mutluoğlu ve Erdoğan (2020), farklı araçlarla gerçekleştirilen inşa deneyimlerinin, öğrencilerin geometrik şekilleri daha iyi anlamalarına ve bu şekillerin oluşturulma süreçlerini kavramalarına yardımcı olduğunu belirtmiştir. Farklı araç kullanmak şekillerin oluşturma sürecini anlamak bakımından sıralı algı sürecine katkı sağlamaktadır. Köse ve diğerleri de (2012), matematik öğretmen adaylarıyla yürüttükleri çalışmalarında, geometrik inşa problemlerinin çözümünde çeşitli araçların kullanılmasının öğrencilerin sıralı algı becerilerini geliştirdiğini belirtmiştir.

5.4. Öğrencilerin Bilişsel ve Algısal Süreçleri Arasındaki Etkileşim

Bilişsel süreçler genellikle öğrencilerin derinlemesine matematiksel düşünme ve problem çözme yeteneklerini desteklerken, algısal süreçler bu düşünme sürecini destekleyen görsel, sözel, sıralı ve işlevsel bir ilişki sağlamaktadır. Duval (1998) bilişsel ve algısal süreçler arasındaki etkileşimin öğrencilerin geometrik muhakeme becerilerinin geliştirilmesinde kritik bir rol oynadığını ifade etmektedir. Bu çalışmada; oluşturma-görsel algı, oluşturma-sıralı algı ve görsel algı-muhakeme alt boyutlarında etkileşim olduğu gözlemlenmiştir.

Çalışmada öğrenciler oluşturma ve görsel algı süreçlerini kullanarak geometrik şekilleri tanımlamış ve bu şekilleri özelliklerine göre oluşturmuşlardır. Örneğin; üçgen inşası sorusuna daha hızlı ve detaylı cevap veren öğrenciler görsel algı sorularına da detaylı cevaplar vermişlerdir. Üçgeni inşa ederken görsel algı süreçlerinden yararlandıkları gözlemlenmiştir. Oluşturma-sıralı algı sürecinde, üçgen inşasını farklı araç gereçlerle hatasız gerçekleştiren öğrencilerin sıralı algı adımlarını yazarken daha detaylı cevaplar verdiği gözlemlenmiştir. Hatta bu öğrencilerin sıralı algının adımlarını anlatırken matematiksel sembollerden yararlandığı

görülmüştür. Görsel algı-muhakeme sürecinde, öğrencilerin üçgen oluştururken üçgenin görsel olarak matematiksel özelliklerini iyi algılayan öğrencilerin üçgen üzerindeki özelliklerden yararlanarak üçgenlerle ilgili doğru çıkarımlar yapabildikleri görülmüştür.

Algısal ve bilişsel süreçler arasında etkileşim kapsamında öğrenciler, görsel olarak üçgenleri inceleyerek, bu üçgenlerin farklı açıları ve kenarları arasındaki ilişkileri üzerine çıkarım yapabilmiş ve bu çıkarımları kullanarak yaptıkları çıkarımdan yola çıkarak matematiksel önermeler şeklinde ifade edebilmek için bilişsel süreçlerden yararlanmışlardır. Ayrıca GeoGebra ile desteklenen veya pergel cetvel gibi araçlar dahil edilen etkinlikler aracılığıyla, öğrencilerin eşkenar üçgen, çeşitkenar üçgen ve ikizkenar üçgen gibi farklı üçgen türlerini inşa etmelerini ve bu üçgenlerin geometrik özelliklerini eşkenar üçgenin açı ve kenar özelliklerinden yararlanarak diğer üçgen çeşitlerini analiz etmelerini sağlamıştır.

Üçgenler konusu özelinde bilişsel muhakeme becerilerini güçlü bir şekilde sergileyen öğrencilerin, algısal süreç becerilerini de daha etkin bir şekilde ortaya koydukları gözlemlenmiştir. Literatürde bilişsel ve algısal muhakeme süreçlerindeki etkileşimi ele alan çalışmaya rastlanmamıştır. Ancak Duval (1998) ve Karpuz'un (2018) araştırmasında bilişsel ve algısal süreçler her ne kadar ayrı olarak ele alınsa da her iki çalışmada da anlamlı bir muhakeme süreci için algısal ve bilişsel becerilerin birlikte geliştirilmesi vurgulanmıştır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, özel yetenekli öğrencilerin geometrik muhakeme sürecinde, farklı öğretim araçları ve ortamlarının kullanımının önemini vurgulamaktadır. GeoGebra gibi dinamik geometri yazılımlarının yanı sıra, pergel ve cetvel gibi geleneksel araçların da geometrik muhakeme sürecinde etkili olduğu görülmüştür. Bu tip zenginleştirilmiş farklı öğrenme ortamlarının öğrencilerin algısal ve bilişsel muhakeme süreçleri arasındaki etkileşimin desteklenmesine, onların geometrik kavramları daha iyi anlamalarına ve uygulamalarına yardımcı olduğu görülmektedir. Bu bağlamda, öğretim sürecinde bu etkileşimi destekleyecek yöntem ve araçların kullanılması önerilmektedir. Bu sonuçlar gelecekteki araştırmalar ve öğretim uygulamaları için önemli bir temel oluşturmaktadır.

Dış açı kavramının 6. sınıfta üçgenler konusu özelinde verilmesi yerine, 7. Sınıfta yer alan çokgenler konusu ile ilişkilendirerek öğretilmesinin ve böylece iç ve dış açı kavramlarının ilişkili biçimde öğretilmesinin daha uygun olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, en küçük çokgen olan üçgenler konusunun öğretiminde sadece iç açı kavramına değil dış açı kavramına da odaklanmak olumsuz bu durumu değiştireceği söylenebilir. Üçgenler konusundaki bu önerinin MEB (2024) programında önerildiği şekilde hatta 6. Sınıf seviyesinde yer aldığı görülmektedir. Dolayısı ile MEB (2024) öğretim programı uygulanmadan yapılan bu önerinin program uygulandıktan sonraki değerlendirmeler ile karşılaştırılması önerilmektedir. Ek olarak, üçgen çeşitleri ile üçgende açı-kenar ilişkisinin ayrı seviyelerde değil, birlikte ve aynı seviyede ele alınmasının öğrencilerin geometrik muhakeme becerilerinin geliştirilmesi açısından daha etkili olacağı söylenebilir. Ayrıca literatürde yer alan ve bu araştırmada öğrencilerin üçgenin dış açısını gösterirken hatalı da olsa sık sık ele aldığı yansık (refleks) açı kavramına MEB (2024) öğretim programında yer verilmediği görülmektedir. Bu kavramın öğretilmesinin önemli olduğu, bu nedenle yeni programların güncellemelerinde yer alması önerilmektedir.

Matematik öğretim programlarında geometri alt öğrenme alanı için önerilen etkinliklerin öğrencilerin bilişsel ve algısal süreçlerini destekleyecek şekilde yapılandırılmasının geometrik muhakeme için önemli olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin, geometrik kavramları hem görselleştirme hem de teorik olarak açıklayabilme becerilerini geliştirmeleri için öğretim materyalleri ve etkinlikler çeşitlendirilmelidir. Ayrıca öğrencilerin görselleştirme ve teorik muhakeme becerilerini geliştirmek için çeşitlendirilen öğrenme ortamında öğretmenlerin uygun araçları derslerde kullanma becerileri hizmet içi eğitimlerle desteklenmelidir.

En küçük çokgen olan üçgen konusunun detaylı ve keşfetmeye yönelik etkinliklerle öğretilmesinin öğrencinin diğer geometrik şekiller ve özellikleri arasında daha iyi ilişki kuracağı bu nedenle üçgen öğretimi ile ilgili çalışmalara daha çok ağırlık verilmesi önerilmektedir.

Öğrencilerin bilişsel ve algısal süreçleri arasındaki etkileşimi daha iyi anlamak için daha fazla nitel araştırma yapılması önerilmektedir. Yürütülecek araştırmaların, geometri öğretim stratejilerinin geliştirilmesine ve öğrencilerin geometrik muhakeme becerilerinin gelişimine katkıda bulunacağı düşünülmektedir.



KAYNAKÇA

- Akdemir, M. (2022). *Ortaokul öğrencilerinin çokgenler konusundaki geometrik muhakemelerinin incelenmesi*. [Doktora Tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Aktaş, S. (2020). Bilim ve sanat merkezlerinin eğitimdeki rolü ve etkisi. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, 45(5), 305-320.
- Alphayta, B. (2022). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik muhakeme becerileri ile öz-yeterlik algıları arasındaki ilişkinin incelenmesi*. [Yüksek Lisans Tezi]. Ordu Üniversitesi.
- Altun, H. (2018). Lise öğrencilerinin geometri ders başarılarının Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre incelenmesi. *Turkish Studies Educational Sciences*, 13(11), 157-168.
- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, M., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Matematik ve Geometri: Temel Kavramlar ve İlkeler*. Pegem Akademi Yayıncılık.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., ve Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Baki, A. (2001). Bilişim teknolojisi ışığı altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 149(1), 26-31.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (2. Baskı). Harf Eğitim Yayıncılık
- Bal, A. (2012). Öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri ve geometriye yönelik tutumları, *Eğitim Bilimleri Araştırma Dergisi*, 2(1), 17- 34.
- Bal, A. (2014). Predictor variables for primary school students related to Van Hiele geometric thinking. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 10(1), 259-278.
- Batdal Karaduman, G. & Davashgil, Ü. (2020). Farklılaştırılmış geometri öğretiminin üstün yetenekli öğrencilerdeki yaratıcılık, uzamsal yetenek ve erişime etkisi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 13(2), 1305-1337.
- Battista, M. T. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment. *Teaching Children Mathematics*, 8, 333-339.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (843-908). Information Age Publishing.
- Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik eğitimi* (1. Baskı). Pegem Akademi Yayıncılık.
- Bilsem matematik programı, (2023). *Millî Eğitim Bakanlığı Bilim ve Sanat Merkezleri matematik dersi çerçeve öğretim programı*. <https://bilsem.meb.gov.tr/>
- Bilsem Yönergesi, (2018). *Millî Eğitim Bakanlığı Bilim ve Sanat Merkezleri yönergesi*. https://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2016_10/07031350_bilsem_yonergesi.pdf
- Casanova, J. R., Cantoria, C. C. C., & Lapinid, M. R. C. (2021). Students geometric thinking on triangles: much improvement is needed. *Infinity Journal of Mathematics Education* 10(2), 217-234. <https://doi.org/10.22460/infinity.v10i2.p217-234>
- Chen, J., Zhou, Y., Wijaya, T. T. & Tamur, M. (2021). Is a triangle 180 degrees? Using relevant material to explore elementary school students reasoning ability. *International Journal of Education and Learning*, 3(3), 199-212.

- Cheung, L. H. (2011). *Enhancing students' ability and interest in geometry learning through geometric constructions* [Unpublished Master Thesis]. The University of Hong Kong.
- Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children*. J. V. Copley, (Ed.), *Mathematics in Early Years* (s. 66-79).
- Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (420–464). New York: Macmillan.
- Creswell, J. W. (2018). *Nitel araştırma yöntemleri* (M. Bütün ve S. B. Demir, Çev.). Siyasal Kitabevi.
- Creswell, J. W. (2020). *Eğitim araştırmaları: Nicel ve nitel araştırmanın planlanması, yürütülmesi ve değerlendirilmesi*. H. Ekşi (Çev.). (3. Baskı). Edam Yayınları.
- Çetin, İ. (2020). Üçgenler ve Öğretimi. E. Ertekin ve M. Ünlü (Ed.), *Geometri ve ölçme öğretimi*. (1. Baskı, s.167-215) içinde. Pegem Akademi.
- Çiftçi, O. & Tatar, E. (2014). Pergel-cetvel ve dinamik bir yazılım kullanımının başarıya etkilerinin karşılaştırılması. *Journal of Computer and Education Research*, 2(4), 111-133.
- Davaslıgil, Ü. (2004). Millî Eğitim Bakanlığı Özel Eğitim ve Rehberlik Dairesi Başkanlığı. *Üstün yetenekli çocuklar ve eğitimleri ön rapor*. Ankara. https://orgm.meb.gov.tr/www/icerik_goruntule.php?KNO=31
- Delice & Sevimli, (2016). Matematik eğitiminde çoklu temsiller. E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ.Ö. Zembat, (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 519-535) içinde. Pegem Akademi.
- Deliyanni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A. & Panaoura, A. (2010). Atheoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 696-705.
- Doğan, M. & İçel, R. (2010). Effect of using geogebra on students' success: an example about triangles. *First Euroasia Meeting of Geogebra (Mayıs 11-13)*. İstanbul Kültür Üniversitesi.
- Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J. E. & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking: A guide for teachers grades. 5–10*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Duatepe, A. (2004). *Drama temelli öğretimin yedinci sınıf öğrencilerinin geometri başarısına, Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine, matematiğe ve geometriye karşı tutumlarına etkisi*. [Doktora tezi]. Ortadoğu Teknik üniversitesi.
- Duval, R. (1995). *Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings*. R. Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). *Geometry from a Cognitive Point of View*. C. Mammana and V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*. Dordrecht: Kluwer
- Duval, R. (1999). Representations, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1*, 3–26.
- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara, M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 55-69.

- Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62(1), 107– 115. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x>
- Erduran, A., & Yesildere, S. (2010). The use of a compass and straightedge to construct geometric structures. *Elementary Education Online*, 9(1), 331-345.
- Erez, M., & Yerushalmy, M. (2006) If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle: Young students' experience the dragging tool, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271-299.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 139-162.
- Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.
- Fleischmann, M. (2016). Early abstract thinking in gifted students: A geometric perspective. *Journal of Advanced Educational Studies*, 28(3), 234-248.
- Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P. & Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematica*, 10, 35-50.
- Ginsburg, H. P. (1997) *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. New York: Cambridge University Press.
- Gür, H. & Kobak Demir, M. (2017). Pergel cetvel kullanarak temel geometrik çizimlerin öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerine ve tutumlarına etkisi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama Dergisi*, 13(1), 88-110.
- Gürhan, S., & Tapan Broutin, M. S. (2017). Bir matematiksel problem durumu: Kesik üçgenler. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 8(3), 408-437.
- Güven, B., & Karataş, İ. (2003). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile geometri öğrenme: öğrenci görüşleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2(2), 10- 18.
- Güven, B., & Karpuz, Y. (2016). Geometrik muhakeme: Bilişsel perspektifler. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ.Ö. Zembat, (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (245-263). Pegem Akademi.
- Güven, B. (2002). *Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek geometri öğrenme* [Yüksek Lisans Tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Güven, B. (2008). Using dynamic geometry software to gain insight into a proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(3), 251-262.
- Güven, Y. (2006). Farklı geometrik çizim yöntemleri kullanımının öğrencilerin başarı, tutum ve Van Hiele geometri anlama düzeylerine etkisi. [Yüksek Lisans Tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165.
- Jones, K. (1998), Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(12), 29-34.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55–85.

- Jones, L. (2017). Triangles as tools for developing abstract reasoning. *Mathematics and Learning Journal*, 42(4), 245-260.
- Kabaca, T. (2017). Matematik eğitiminde teknoloji kullanımına dair teorik yaklaşımlar. E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ.Ö. Zembat, (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (819-838) Ankara: Pegem Akademi.
- Kaleli Yılmaz, G., & Yüksel, M. (2019). Tasarlanan farklı öğrenme ortamlarının 7. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerine etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(2), 426-455. <https://doi.org/10.16949/turkbilmat.459195>.
- Kanbur Tekerek, B., & Argün, Z. (2022). Üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerilerinin incelenmesi. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 8(2), 306-332.
- Karakuş, F. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik inşa etkinliklerine yönelik görüşleri. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, 7(4), 408-435.
- Karpuz, Y. (2018) *Duval'in bilişsel modeline uygun tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi*. [Doktora Tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Karpuz, Y., & Atasoy, E. (2019). Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension. *European Journal of Educational Research*, 8(1), 285-300.
- Karpuz, Y., & Güven, B. (2022). Are 9th grade students ready to engage in the theoretical discursive process in geometry. *Journal of Research in Mathematics Education (REDİMAT)*, 11(1), 86-112.
- Karpuz, Y., Koparan, T. & Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 108-118.
- Kaya S., Tapan Broutin S., Arslan Ç. & Ezentaş R. (2023). Sekizinci sınıf matematik ders kitabında bulunan çözümlü örnekler ve liselere geçiş sınavındaki soruların kavrayış türleri açısından incelenmesi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 14(1), 96-125.
- Kemankaşlı, N. (2010) 10. sınıflarda öğrenme ortamı tasarımı: Üçgenler ünitesi örneği. [Doktora Tezi]. Balıkesir Üniversitesi.
- Kılıç, Ç. (2003). İlköğretim 5. sınıf matematik dersinde Van Hiele düzeylerine göre yapılan geometri öğretiminin öğrencilerin akademik başarıları, tutumları ve hatırd tutma düzeyleri üzerindeki etkisi. [Yüksek lisans tezi]. Anadolu Üniversitesi.
- Kızıltoprak, A. (2020). Ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin geometrik muhakemelerinin gelişimi. [Doktora tezi]. Anadolu Üniversitesi.
- Kobal, A. (2020). 10. Sınıf çokgenler, dörtgenler ve yamuk konularında 5E öğrenme döngüsü modeline dayalı öğretimin öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine etkisi. [Yüksek Lisans Tezi]. Bahçeşehir Üniversitesi.
- Kondratieva, M. (2013). Geometrical constructions in dynamic and interactive mathematics learning environment. *Online Submission*, 3(3), 50-63.
- Köse, N. Y., Tanışlı, D., Erdoğan, E. Ö. & Ada, T. Y. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının teknoloji destekli geometri dersindeki geometrik oluşum edinimleri. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(3), 102-121.
- Kurtuluş, A. & Uygan, C. (2016). Geometri öğretiminde Google Sketchup yazılımının kullanılması. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (1)40, 191-207.

- Kutluca, T., & Zengin, Y. (2011). Matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı hakkında öğrenci görüşlerinin değerlendirilmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17, 160-172.
- Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students construction of meaning in geometry. In *Meaning in Mathematics Education* (pp. 159-179). Berlin: Springer.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, CA: Sage.
- Martin, G. E. (2012). *Geometric constructions*. Springer Science & Business Media.
- Maxwell, J. (1992). Understanding and validity in qualitative research. *Harvard Educational Review*, 62(3), 279-301.
- Michael Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E. & Kuzniak, A. (2011). Middle and high school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematica*, 11, 47-57.
- Michael Chrysanthou, P., Panaoura, A., Gagatsis, A., & Elia, I. (2024). Exploring secondary school students' geometrical figure apprehension: cognitive structure and levels of geometrical ability. *Educational Studies in Mathematics*, 2(116), 1-20.
- Michael Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: An obstacle or heuristic tool? *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematica*, 13, 17-32.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (2015). *Nitel veri analizi*. (S. Akbaba-Altun, ve A. Ersoy, Çev. Ed.). Pegem A Yayıncılık.
- Miller, R., & Thompson, K. (2018). Developing critical thinking through triangle problem solving. *Educational Practices in Mathematics*, 48(6), 325-338.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], (2018). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 8. sınıflar)*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], (2024). *Matematik dersi öğretim programı (ortaokul 5, 6, 7 ve 8.sınıflar)*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence*, 35(138), 365.
- Mutluoğlu, A. & Erdoğan, A. (2020). 6. sınıf öğrencilerinin dörtgenler hakkındaki geometrik muhakeme süreçleri. *Uluslararası Toplum Araştırmaları Dergisi (OPUS)*, 16(28), 125-144.
- Nacar, S. (2017). 2005-2014 yılları arasında üstün yeteneklilerin matematik eğitimi üzerine yapılan çalışmalar. *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 4(8), 48-65.
- Napitupulu, B. (2001). *An exploration of students' understanding and van hiele levels of thinking on geometric constructions*. [Yüksek lisans tezi], Simon Fraser University.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2001). *Navigating through Geometry in Grades. 9-12*. Reston, VA: NCTM.
- Olkun, S. & Aydoğdu, T. (2003). Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Araştırması (TIMSS) nedir? neyi sorgular? Örnek geometri soruları ve etkinlikler. *İlköğretim Online* 2(1), 28-35.

- Öztürk, T. & Güven, B. (2012). Etkili bir matematik öğrenme ortamının sahip olması gereken özelliklerine ilişkin öğretmen görüşleri. *X. Ulusal Fen Ve Matematik Alanlar Eğitimi Kongresi*, Niğde Üniversitesi.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (M. Bütün ve S.B. Demir, Çev. Ed.). Ankara: Pegem Akademi.
- Rizki, H. T. N., Frentika, D. & Wijaya, A. (2018). Öğrencilerin uyarlanabilir akıl yürütme becerilerini ve Van Hiele'nin geometrik düşünme düzeylerini araştırmak: Geometride bir örnek olay. *Journal of Physics*: 983(1).
- Sağır Gürlevik, M. (2017). *Üstün/özel yetenekli öğrencilerin geometri düzeylerinin bazı değişkenler açısından belirlenmesi*. [Yüksek lisans tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Sak, U. (2005). *The three mathematical minds model for the identification of mathematically gifted students*. [Doktora Tezi]. Arizona Üniversitesi.
- Sak, U. (2013). *Üstün zekâlılar*. Vize Yayıncılık, Ankara.
- Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2015). *5000 years of geometry: Mathematics in history and culture*. Springer.
- Senk, S. L., & Usiskin, Z. (2014). The development of students' understanding of geometrical proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 121-136.
- Smart, J. R. (1993). *Modern Geometries*. Pacific Grove, Calif.: Brooks
- Smith, J. K. (2017). The effectiveness of dynamic geometry software in geometry instruction. *Journal of Mathematics Education*, 5(2), 110-125.
- Smith, J. (2019). Geometric foundations and the role of triangles. *Journal of Mathematics Education*, 55(3), 167-182.
- Şengün, K. Ç. & Kabaca, T. (2016). Dinamik geometri ortamında üçgen inşa sürecinde akıl yürütme çabaları. *Eğitim Bilimlerinde Yenilik ve Nitelik Arayışı*. (1099-1107). Pegem Akademi Yayınları.
- Şimşek, N., & Yaşar, A. (2019). GeoGebra ile ilgili lisansüstü tezlerin tematik ve yöntemsel eğilimleri: Bir içerik analizi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(2), 290-313.
- Tapan Broutin, M. (2014). Matematiksel nesnelerin yapısı ve temsiller: klasik semiyotik üçgenin geometri öğretimine yansımalarının analizi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27(1), 255-282.
- Tatar, E., Kağızmanlı, T. B., & Akkaya, A. (2014). Dinamik bir yazılımın çemberin analitik incelenmesinde başarıya etkisi ve matematik öğretmeni adaylarının görüşleri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 8(1), 153-177.
- Toluk, Z., Olkun, S. & Durmuş, S. (2002). Problem merkezli ve görsel modellerle destekli geometri öğretiminin sınıf öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine etkisi. *Beşinci Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 16-18 Eylül, Ankara.
- Tosun, N. (2019). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. [Yüksek lisans tezi]. Balıkesir Üniversitesi.

- Türnüklü, E., Gündoğdu Alaylı, F., & Akkaş, E. N. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgenlere ilişkin algı ve imgelerinin incelenmesi. *Eğitim Bilimleri: Teori ve Uygulama*, 13 (2), 1225-1232.
- Türnüklü, E., Aydoğdu, M. Z., & Ergin, A. S. (2017). 8. sınıf öğrencilerinin üçgenler konusunda problem kurma çalışmalarının incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(24), 467-486.
- Ubuz, B., Üstün, I., & Erbaş, A. K. (2009). Effect of dynamic geometry environment on immediate and retention level achievements of seventh grade students. *Eurasian Journal of Educational Research*, 9(35), 147-164.
- Ulusoy, F. (2019). Matematik öğretmeni adaylarının pergel-cetvel ve dinamik geometri yazılımı kullanarak yaptıkları geometrik inşalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(2), 336-372. <https://doi.org/10.16949/turkbilmat.496853>
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. CDASSG Project.
- Uygun, T., & Akyüz, D. (2016). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının üçgenler konusunda tanım oluşturma sürecindeki öğrenmeleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16(4), 2002-2022.
- Ünlü, M. & Ertekin, E. (2020). Geometri Öğretimi. E. Ertekin ve M. Ünlü (Ed.), *Geometri ve Ölçme Öğretimi*. (1. Baskı, 37-62) Pegem Akademi.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim* (S. Durmuş, Çev. Ed., 7. baskı). Ankara: Nobel Yayınevi.
- Van Hiele, P. M. (1986) *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Orlando, Florida: Academic Press.
- Yalın, H. İ. (2007). *Öğretim teknolojileri ve materyal geliştirme*, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Yıldırım, A & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz, K. (2019). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine göre problem kurma süreçlerinin incelenmesi*. [Yüksek Lisans Tezi]. Ahi Evran Üniversitesi.
- Yiğit Koyunkaya, M. (2020). Geometrik düşünmenin gelişimi ve önemi. E. Ertekin ve M. Ünlü (Ed.), *Geometri ve Ölçme Öğretimi*. (1. Baskı, s.63-89) içinde. Pegem Akademi.
- Yiğit Koyunkaya, M. (2023). Teknoloji destekli etkinliklerin tasarlama ve uygulama sürecinde öğretmenin rolü, *Matematik Dünyası Dergisi*, 1(1) 115.

EKLER

EK-1 ETİK BEYANI

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi beyan ederim.

09/07/2024

Özge ÇAKIOĞLU

EK-2 ORJİNALLİK RAPORU



MERSİN ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

MERSİN ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞINA

Tarih:27/06/2024

Tezin Adı: **Özel Yetenekli Öğrencilerin Üçgenler Konusuna Yönelik Geometrik Muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi**

Yukarıda adı verilen tez çalışmamın tamamının (kapak sayfası, özetler, ana bölümler, kaynakça) aşağıdaki filtreler kullanılarak **Turnitin** adlı intihal programı aracılığı ile kontrol edildiğini beyan ederim. Kontrol sonucu aşağıda sunulmaktadır:

Rapor Tarihi	03/06/2024	Tez Savunma Tarihi	27/06 /2024
Sayfa Sayısı	135	Benzerlik Endeksi	%15
Karakter Sayısı	184270	Gönderim Numarası	2394839248

Uygulanan filtreler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar dâhil
- 3- 10 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Mersin Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini, aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

İmza

Adı Soyadı: Özge ÇAKIOĞLU
Öğrenci No: 21013430001
Ana Bilim Dalı: Matematik ve Fen Bilimleri
Programı: Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans
Statüsü: ☒ Yüksek Lisans ☐ Doktora

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Doç. Dr. Gamze KURT BİREL

EK-3 ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Özge ÇAKIOĞLU
Doğum Tarihi :
E-Posta :
Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
....			



EK-4 ETİK KURUL BELGESİ



EK-5 ARAŞTIRMA İZİN BELGESİ



T.C.
SİLİFKE KAYMAKAMLIĞI
İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü



Sayı : E-23216609-605.01-91498866
Konu : Özge ÇAKIOĞLU'nun
Araştırma İzni

07.12.2023

SİLİFKE CUMHURİYET BİLİM VE SANAT MERKEZİ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21.01.2020 tarihli ve 1563890 sayılı " *Araştırma Uygulama İzinleri* " Konulu (2020/2 No.lu) Genelgesi.
b) Mersin Üniversitesi Rektörlüğünün 31.10.2023 tarih ve 2519078 sayılı yazısı.
c) 04.12.2023 tarihli ve 91091569 sayılı Valilik Oluru.

İl Milli Eğitim Müdürlüğünün 05.12.2023 tarih ve 91305032 sayılı yazısı; Mersin Üniversitesi Eğitim Bilimler Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi İlköğretim Matematik Eğitimi yüksek lisans programı öğrencisi Özge ÇAKIOĞLU'nun "*Özel Yetenekli Öğrencilerin Üçgenler Konusuna Yönelik geometrik muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi*" konulu araştırma izin talebi komisyonumuz tarafından incelenmiştir.

Araştırmanın, 2023-2024 eğitim öğretim yılında, Mersin İlindeki resmi bilim sanat merkezleri öğrencilerine eğitim öğretim faaliyetlerini aksatmadan, gönüllülük esasına göre ve uygulama sırasında ekte gönderilen, veri toplama araçlarının kullanılarak çalışmaya konu kişilerden, aile üyelerinden ad ve soyad, telefon, adres ile din, mezhep, etnik gruba mensubiyet gibi hassas bilgilerin istenmemesi ve uygulama sonucunda hazırlanacak raporun basılı ve dijital ortamda İl Milli Eğitim Müdürlüğümüze vermek şartı ile uygulanmasına ilgi (a) Genelge doğrultusunda ilgi (c) Valilik Oluru ile izin verilmiştir. Buna göre yazının okulunuzdaki öğrencilere duyurusunun yapılması husunda;

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Ali İLGİLİ
Müdür a.
Şube Müdürü

Ek:

- 1-Valilik Oluru (1 Sayfa)
- 2-Veri Toplama Araçları (3 Sayfa)
- 3- Yazı (1 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Saray Mahallesi Fevzi Çakmak Caddesi No:41 Silifke/Mersin

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Telefon No : 0 (324) 715 01 70

Bilgi için: Hayriye SELVİ

E-Posta: silifke33_arage@meb.gov.tr

Unvan : Memur

Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

İnternet Adresi: meb@hs01.kep.tr

Faks:3247144832

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır, <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 262e-a1f2-3a87-be39-a5a3 kodu ile teyit edilebilir.

EK-6 VELİ ONAM FORMU BELGESİ

VELİ ONAM FORMU

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, “Özel Yetenekli Öğrencilerin Üçgenler Konusuna Yönelik Geometrik Muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi” adıyla, 15 Kasım 2023-20 Ocak 2024 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Bu çalışma ile özel yetenekli öğrencilerin üçgenler konusunda geometrik muhakeme becerilerinin nasıl olduğunu algısal ve bilişsel muhakeme süreçleri özelinde incelemek ve bu süreçler arası etkileşimi ortaya koymak hedeflenmektedir.

Araştırma Uygulaması: Test / Görüşme / Gözlem şeklindedir.

Araştırma T.C. Millî Eğitim Bakanlığı'nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleştirilmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir. Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : Özge ÇAKIOĞLU
İletişim bilgileri :

Velisi bulunduğum sınıfı numaralı öğrencisi

.....'in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum. (Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz).*

...../...../.....

İsim-Soyisim İmza:

Veli Adı-Soyadı:

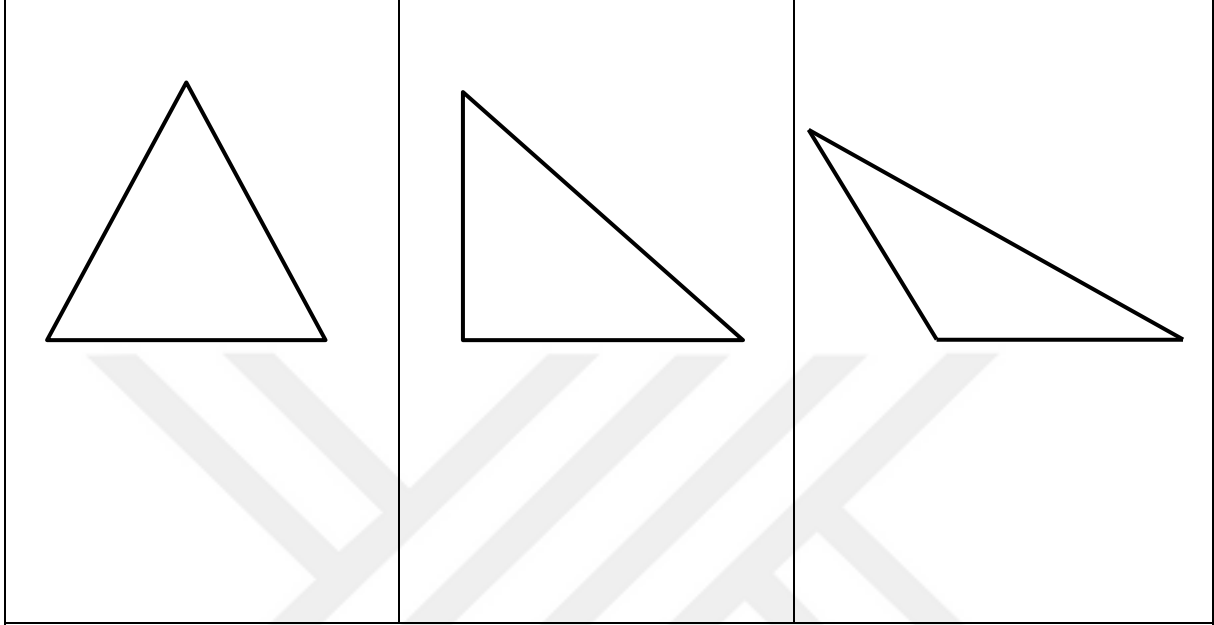
Telefon Numarası:

EK-7 ÜÇGENDE AÇI ETKİNLİK KÂĞIDI

BİLİŞSEL MUHAKEME SÜREÇLERİNİ İNCELEMeye YÖNELİK HAZIRLANAN ETKİNLİKLER

ETKİNLİK 1:

1) Aşağıdaki üçgenlerin iç ve dış açılarını gösteriniz.



2) Bir kâğıda üçgen çizebilir misin? Çizdiğin bu üçgenin iç açılar toplamının 180 derece dış açılar toplamının 360 derece olduğunu açıklayacak bir yöntem bulabilir misin? Bulduğun yöntemi lütfen detaylı şekilde açıkla mısın? (Üçgen çizdiğin kâğıdı dilediğin gibi kullanabilirsin. Örneğin; kesme, yapıştırma, katlama vb.)

3) Üçgenin iç açılar toplamının 180 derece dış açılar toplamının 360 derece olduğunu GeoGebra programından yararlanarak gösteriniz ve gösterdiğiniz yöntemi detaylı olarak açıklayabilir misiniz?

EK-8 ÜÇGENDE AÇI-KENAR İLİŞKİSİ ETKİNLİK KAĞIDI

ETKİNLİK 2:

1) GeoGebra programı kullanarak bir ABC üçgeni oluşturunuz. Oluşturduğunuz üçgenin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini bularak aşağıdaki tabloya not alınız.

Tablo 1. Birinci ABC üçgenine ait bilgiler

Kenar	Kenar uzunluğu	Açı ölçüsü	Açı

Daha sonra oluşturulan ilk üçgeni köşe noktalarından hareket ettirerek ilk üçgenden farklı üçgenler oluşturup kenar uzunlukları ve açı ölçülerini aşağıdaki tablolara not alınız.

Tablo 2. İkinci ABC üçgenine ait bilgiler

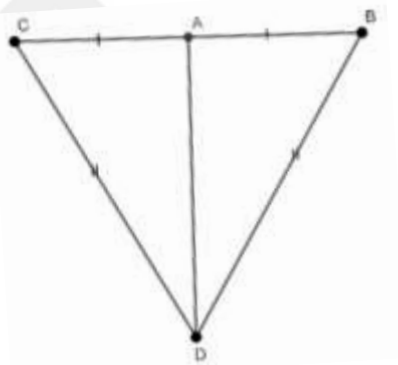
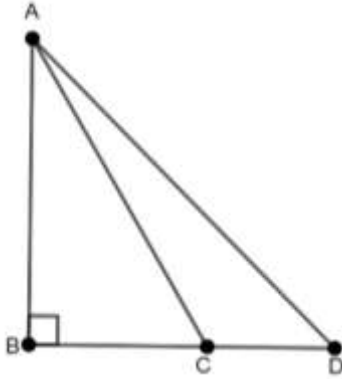
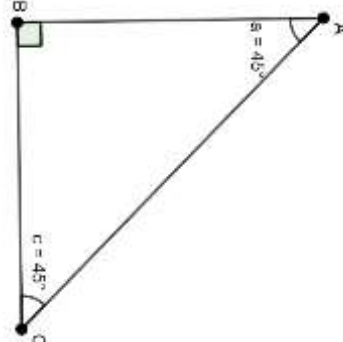
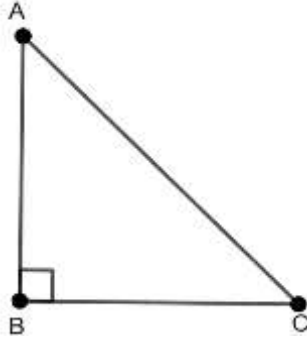
Kenar	Kenar uzunluğu	Açı ölçüsü	Açı

Tablo 3. Üçüncü ABC üçgenine ait bilgiler

Kenar	Kenar uzunluğu	Açı ölçüsü	Açı

Elde edilen verilere göre üçgenin kenar uzunlukları ve açı ölçüleri arasında matematiksel bir ilişki var mı? Cevabınız evet ise bu ilişkiyi açıklayınız?

2) Aşağıdaki üçgenlerde kenar-açı ilişkileri göz önüne alındığında hangi matematiksel özelliklere ulaşabilirsiniz? Ulaştığınız bilgileri üçgenlerin altına detaylı açıklayınız?



3) Şimdi size verilen üçgenin kenarlarını birbirlerinin üzerine katlayarak kenar uzunlukları için neler söyleyebilirsiniz? Bu durumdan yola çıkarak elde edilecek matematiksel durumları detaylı olarak açıklayabilir misiniz?

EK-9 ÜÇGEN EŞİTSİZLİĞİ ETKİNLİK KAĞIDI

ETKİNLİK 3:

1) Herhangi üç doğru parçası ile üçgen çizilebilir mi?

2) Elinizde bulunan farklı uzunluklarda verilen geometri şeritlerini birleştirerek üçgen oluşturmaya çalışınız. Hangi uzunluktaki geometri şeritleri ile üçgen oluşturdunuz? Hangi uzunluklar ile üçgen oluşturmadınız? Bu bilgileri tabloya not alınız.

Tablo 1. Geometri şeritleri ile üçgen oluşturma tablosu

1. kenar uzunluğu	2. kenar uzunluğu	3. kenar uzunluğu	Üçgen oluştu / üçgen oluşmadı

Elde edilen verilere göre üçgen oluşturan ve oluşturmayan uzunluklar arasında bir ilişki var mı? Eğer var ise bu ilişkiyi nasıl açıklarsınız?

3) Kağıt üzerinde sadece pergeli ve cetveli kullanarak kenar uzunluğu 3 cm, 4 cm ve 10 cm olan bir üçgen oluşturabilir misiniz? Üçgen oluşturma sürecini nasıl açıklarsınız?

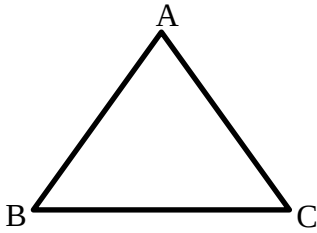
4) GeoGebra programında sadece sürgü, pergel ve cetvel araç menülerini kullanarak kenar uzunlukları 3 cm, 4 cm ve 8 cm olan bir üçgen çizebilir misin? Sürgüleri hareket ettirerek üçgen oluşturmak için kenar uzunlukları hakkında elde ettiğiniz verileri tabloya not alınız. Üçgen oluşturma sürecini nasıl açıklarsınız?

Not: GeoGebra programında sürgü aracında değişken 1'er cm artacak ve tamsayı olacak şekilde ayarlama yapınız.

Tablo 2. GeoGebra programında oluşturulan üçgen oluşturma tablosu

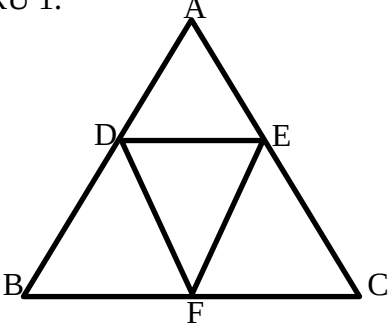
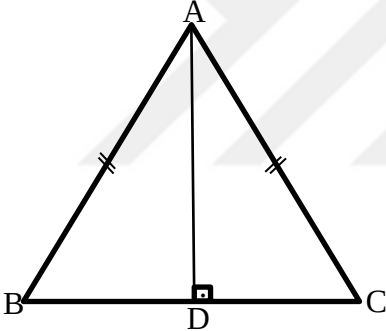
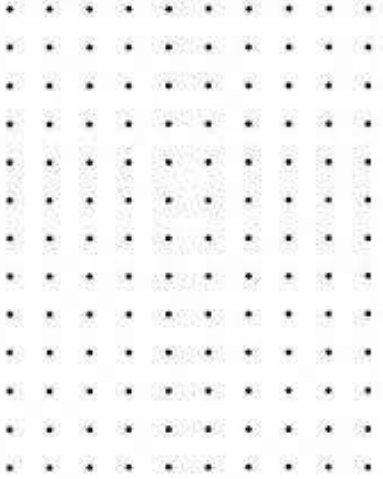
1. kenar uzunluğu	2. kenar uzunluğu	3. kenar uzunluğu	Üçgen oluştu / üçgen oluşmadı

4) Bir üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak nasıl açıklarsınız? Aşağıdaki ABC üçgeninden yararlanabilirsiniz.



EK-10 ALGISAL SÜREÇ İNCELEME FORMU (ASİF)

ALGISAL MUHAKEME SÜREÇLERİNİ İNCELEMeye YÖNELİK HAZIRLANAN FORM

SORU 1. 	Yandaki şekle baktığınızda şeklin özellikleri ile ilgili ne görüyorsunuz? Lütfen detaylı şekilde açıklayınız.
SORU 2. 	Yanda verilen şeklin üzerindeki işaret ve sembollere bakarak şeklin sahip olduğu matematiksel özellikleri lütfen detaylı bir şekilde yazınız.
SORU 3. 	Yanda verilen noktalı kağıt üzerinde 8x8 birimlik alan belirleyiniz. Bu alan içine çizilebilecek en büyük alana sahip üçgeni çizin. Neden en büyük alana sahip üçgenin çizdiğiniz üçgen olduğunu detaylı açıklayınız. Aynı alana sahip başka üçgenler var mı varsa açıklayınız.

SORU 4. Aşağıda verilen bilgileri kullanarak bir YCZ üçgeni çizin, matematiksel işaretler kullanarak üçgenin özelliklerini gösteriniz ve detaylıca açıklayınız.

$$ICYI=ICZI$$

$$ICZI=IYZI$$

$$[CH] \perp [YZ]$$

$$s(\hat{Z})=s(\hat{Y})$$

$[CH]$, YCZ açısının açıortayıdır.

H noktası $[YZ]$ 'nin orta noktasıdır.

SORU 5. Pergel ve ölçüsüz cetvel (çizgeç) kullanarak bir eşkenar üçgen oluşturun. Oluşturduğunuz bu şekli nasıl yaptığınızı sırası ile adım adım yazınız.

