



**SONLU FARKLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK ZEMİN TABAKALARINDA
KİRLİLİK TAŞINIMININ İNCELENMESİ**

BARIŞ KAÇAK

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi ERTUĞRUL ORDU

2024

T.C.
TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



SONLU FARKLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK ZEMİN TABAKALARINDA
KİRLİLİK TAŞINIMININ İNCELENMESİ

BARIŞ KAÇAK

ORCID: 0009-0003-2687-1285

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi ERTUĞRUL ORDU

HAZİRAN-2024
Her hakkı saklıdır.

ÖZET

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK ZEMİN TABAKALARINDA KİRLİLİK TAŞINIMININ İNCELENMESİ

Barış KAÇAK

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ertuğrul ORDU

Bu çalışma, üç tabakalı bir zemin yapısında kirletici taşınımının 3 boyutlu analizini sunmaktadır. Analiz, Kartezyen koordinatlarda ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kirletici kaynağından yayılan kirleticilerin yeraltı suyunun durgun ve hareketli olduğu zemin ortamlarında yayılma ve taşınma analizi incelenmiştir. Çalışmada belirli zaman aralıklarında (T) ve sabit bir kirletici kaynağı süresi ($t_p = 10$ yıl) boyunca kirletici konsantrasyonlarının değişimi analiz edilmiştir. Analiz sonuçları, kirletici konsantrasyonlarının zamanla nasıl değiştiğini ve konumlarının nasıl etkilendiğini ortaya koymaktadır. Elde edilen bulgular, kirleticilerin farklı zemin tabakalarına ve doğrultulara göre farklılık gösterdiğini vurgulamaktadır. Bu çalışmanın, çevresel koruma stratejilerinin ve yeraltı suyu kirliliği yönetiminin geliştirilmesine katkı sağlaması beklenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Yeraltı Suyu Kirliliği, Kirletici Taşınımı, Üç Boyutlu Analiz, Sonlu Farklar Yöntemi, Advetif Difüzyon Denklemi, Kirletici Yayılımı

ABSTRACT

INVESTIGATION OF POLLUTION TRANSPORT IN GROUND LAYERS USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Bariş KAÇAK

Department of Civil Engineering

MSc. Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ertuğrul ORDU

This study presents a three-dimensional analysis of contaminant transport in a three-layered soil structure. The analysis was conducted using Cartesian coordinates and the finite differences method. The dispersion and migration of contaminants originating from a pollution source were examined in environments where groundwater is stagnant or mobile. The change in contaminant concentrations was analyzed over specific time intervals (T) and a fixed duration for the pollutant source ($t_p = 10$ years). The results of the analysis reveal how contaminant concentrations change over time and are influenced in terms of their locations. The findings underscore the variability of contaminant behavior across different soil layers and directions. It is anticipated that this study will contribute to the development of environmental protection strategies and groundwater pollution management.

Keywords: Groundwater Pollution, Contaminant Transport, Three-Dimensional Analysis, Finite Differences Method, Advection-Diffusion Equation, Contaminant Dispersion

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
SİMGELER DİZİNİ	viii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
TEŞEKKÜR.....	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	2
1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı.....	5
2. YERALTI SUYU KİRLENMESİNİN ADVEKSİYON DISPERSİYON DENKLEMİ İLE MODELLENMESİ.....	6
2.1 Zeminde Kirliliğin Taşınması	6
2.1.1 Adveksiyon	6
2.1.2 Difüzyon	7
2.1.3 Dispersiyon	7
2.2 Doygun Zemin Ortamında Çözünen Kirletici Taşınması İçin Adveksiyon Dispersiyon Denklemi.....	8
3. ADVEKSİYON DISPERSİYON DENKLEMİNİN ZAMAN-UZAYDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	11
3.1 Adveksiyon Terimlerinin Sonlu Farklar Yöntemiyle Bulunması	11
3.2 Dispersiyon Terimlerinin Sonlu Farklar Yöntemiyle Bulunması	12
3.3 Zaman Değişiminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü	15
3.4 Sonlu Farklar Kapalı Yöntem (Implicit Method)	15
3.5 Sonlu Farklar Açık Yöntem (Explicit Method)	16
3.6 Kararlılık Analizi	17
3.6.1 Difüzyon Denklemine Von Neumann Kararlılık Analizi	17
3.6.2 Adveksiyon Dispersiyon Denklemine Von Neumann Kararlılık Analizi	20
4. PROBLEMİN TANIMI VE SINIR KOŞULLARI	26
4.1 Problemin Boyutları Ve Yapılan Kabuller.....	26
4.2 Başlangıç Ve Sınır Koşulları.....	28
4.2.1 Kirletici kaynağı İçin Sınır Koşulları.....	28
4.2.2 Zemin İçin Sınır Koşulları	29

5. PROBLEMİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ.....	31
6. PROBLEMİN SONLU FARKLAR SİMÜLASYONU.....	34
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	48



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Açık yöntem, adveksiyon-dispersiyon denklemi için bazı stabilite koşulları (Bilgin, 2015).....	25
Çizelge 5. 1. Şekil 4.2’de ve Şekil 4.3’te bulunan zeminin boyutları, kirletici kaynağı tabanının zemin üzerindeki konumu ve kirletici konsantrasyonu değerleri	32
Çizelge 5. 2. Şekil 4.2’de Bulunan ZA, ZB ve ZC zemin tabakalarının boyutları ve Alt bölüm 4.1’de tanımlanan parametrelerin değerleri (Chakraborty ve Ghosh, 2013).....	33
Çizelge 5. 3. Denklem 5.2, Denklem 5.3 ve Denklem 5.4’te kullanılan zaman adımı ve x, y, z uzayındaki adım büyüklüklerinin sayısal değerleri	33



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Adveksiyon dispersiyon denkleminin türetilmesi için kullanılan diferansiyel kontrol hacmi (Freeze ve Cherry, 1979)	9
Şekil 3.1. Denklem 3.56'nın faz açısı değişimlerine göre grafikleri a) Denklem 3.56'nın βx faz açısı değişimine göre grafiği b) Denklem 3.56'nın βy faz açısı değişimine göre grafiği c) Denklem 3.56'nın βz faz açısı değişimine göre grafiği	23
Şekil 4.1. Kirletici kaynağı ve tabanında bulunan zemin tabakaları	26
Şekil 4.2. Kirletici kaynağı ve zemin tabakalarında hareketli yeraltı suyunun bulunduğu bölge	27
Şekil 4.3. Kirletici kaynağı tabanının zemin üzerindeki konumu	27
Şekil 4.4. Kirletici kaynağı tabanının t anındaki sınır şartı	29
Şekil 4.5. Zeminde herhangi bir t anında zemin yüzeylerinin sınır şartı.....	30
Şekil 6.1. T=5 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	34
Şekil 6.2. T=10 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	35
Şekil 6.3. T=15 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	36
Şekil 6.4. T=20 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	36
Şekil 6.5. T=25 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	37
Şekil 6.6. T=30 yıl ve $t_p=10$ yıl için kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	38
Şekil 6.7. T=35 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	39
Şekil 6.8. T=40 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	39
Şekil 6.9. T=45 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	40
Şekil 6.10. T=50 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası	41

Şekil 6.11. Maksimum konsantrasyonun zamana ve konuma göre değişimi a) Maksimum konsantrasyon değerinin zamanla değişimi, b) Maksimum konsantrasyon konumunun zamanla değişimi42

Şekil 6.12. Minimum konsantrasyonun zamana ve konuma göre değişimi a) Minimum konsantrasyon değerinin zamanla değişimi, b) Minimum konsantrasyon konumunun zamanla değişimi43



SİMGELER DİZİNİ

ΔN_1	Kararlılık koşulu için hesaplanan en sınırlayıcı zaman adımı
Δt	Zaman aralığı
Δx	Yatay grid (ızgara) aralığı
Δy	Yanal grid (ızgara) aralığı
Δz	Dikey grid (ızgara) aralığı
a_d	Dispersivite
C	Kirletici konsantrasyonu
C_k	Kirletici kaynağı tabanındaki kirletici konsantrasyonu
$c_{m,p,q}^N$	N zamanında m,p,q indislerindeki genlik
D	Dispersiyon katsayısı
dA	Kontrol hacminin akışa dik kesit alanı
dC	Konsantrasyondaki diferansiyel değişim
D_d	Difüzyon katsayısı
dl	Akış doğrultusundaki diferansiyel değişim
d_x	Diferansiyel hacmin yatay boyutu
D_x	Yatay dispersiyon katsayısı
d_y	Diferansiyel hacmin yanal boyutu
D_y	Yanal dispersiyon katsayısı
d_z	Diferansiyel hacmin dikey boyutu
D_z	Dikey dispersiyon katsayısı
f	Difüzyon hızı
F_x	Yatay birim zamanda birim kesit alanından geçen toplam kirletici kütlesi
F_y	Yanal birim zamanda birim kesit alanından geçen toplam kirletici kütlesi
F_z	Dikey birim zamanda birim kesit alanından geçen toplam kirletici kütlesi
k_m	x doğrultusunda m'inci harmonik bileşenin dalga sayısı
k_p	y doğrultusunda p'inci harmonik bileşenin dalga sayısı
k_q	z doğrultusunda q'ncü harmonik bileşenin dalga sayısı
L_x	Zemin yapısının yatay uzunluğu
L_{xk1}	Kirletici kaynağı birinci yanal yüzeyinin yatayda orjinden uzaklığı
L_{xk2}	Kirletici kaynağı ikinci yanal yüzeyinin yatayda orjinden uzaklığı
L_y	Zemin yapısının yanal uzunluğu
L_{yk1}	Kirletici kaynağı birinci yatay yüzeyinin yanalda orjinden uzaklığı

L_{yk2}	Kirletici kaynağı ikinci yatay yüzeyinin yanalda orjinden uzaklığı
L_z	Zemin yapısının dikey uzunluğu
L_{z1}	ZA zemin tabakasının dikey uzunluğu
L_{z2}	ZB zemin tabakasının dikey uzunluğu
L_{z3}	ZC zemin tabakasının dikey uzunluğu
M	x doğrultusundaki harmonik bileşenlerin sayısı
m	x doğrultusundaki konum indisi
N	Ayrık zaman değişkeni
n	Porozite
P	y doğrultusundaki harmonik bileşenlerin sayısı
p	y doğrultusundaki konum indisi
Q	z doğrultusundaki harmonik bileşenlerin sayısı
q	z doğrultusundaki konum indisi
T	Simülasyon süresi
t	Zaman
t_p	Kirletici kaynağının etkin olduğu süre
v_{sx}	Yatay sızıntı hızı
v_{sy}	Yanal sızıntı hızı
v_{sz}	Dikey sızıntı hızı
x	Yatay kartezyen koordinatı
y	Yanal kartezyen koordinatı
z	Dikey kartezyen koordinatı
β_x	x doğrultusundaki faz açısı
β_y	y doğrultusundaki faz açısı
β_z	z doğrultusundaki faz açısı

KISALTMALAR DİZİNİ

PML Perfectly Matched Layer



TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam sűresince bilgisi, sabrı ve yűnlendirmeleri ile bu çalıőmanın űekillenmesinde bana yol gűsteren ve desteęini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeęer hocam Dr. Őęr. Őyesi Ertuęrul Ordu'ya en içten teőekkűrlerimi sunarım. Tezim boyunca rehberlięi, engin bilgi birikimi, teőviki, eleőtirileri, vizyonu ve bana gűsterdięi tahamműl ile çalıőmama deęerli katkılar saęlayan ve bu sűreci baőarıyla tamamlamamda bűyűk rol oynayan deęerli hocam Prof. Dr. Reőat Mutlu'ya űzel bir teőekkűrű borç bilirim. Kendisine sonsuz minnettirim. Ayrıca bu sűrete anlayıőını, sabrını ve desteęini esirgemeyen sevgisiyle bana gű veren deęerli eőim Őeyma Kaçak'a en derin teőekkűrlerimi sunarım. Onun varlıęı, bu zorlu yolculukta en bűyűk motivasyon kaynaęım olmuőtur. Son olarak, her zaman yanımda olan, sevgileri ve destekleriyle beni daima ileriye taőıyan sevgili annem ve babama da sonsuz teőekkűrlerimi sunarım.

Bariş KAÇAK

İnőaat Műhendisi

1. GİRİŞ

Çevresel kirlilik, modern toplumların karşı karşıya olduğu en büyük problemlerden biridir. Özellikle, sanayileşme, tarım faaliyetleri ve kentsel büyüme gibi insan kaynaklı etkenler, çevresel dengeyi ciddi şekilde etkileyerek doğal kaynakların sürdürülebilirliğini tehdit etmektedir. Bu etkenlerin bir sonucu olarak, yeraltı suyu kaynakları giderek artan derecede tehlikeye girmektedir. Yeraltı suyu kirliliği, sadece su kaynaklarını değil, aynı zamanda ekosistemleri ve insan sağlığını da olumsuz etkileyebilmektedir (Ordu, Ordu ve Mutlu, 2022).

Yeraltı suyu kirliliği, genellikle çeşitli kirleticilerin zemin ortamına sızması sonucunda ortaya çıkmaktadır. Bu kirleticiler zemin tabakalarından yeraltı sularına doğru sızarak, çevresel etkilere ve potansiyel sağlık risklerine yol açabilmektedir. Bu nedenle, kirleticilerin taşınma ve yayılma yönünü anlamak ve analiz etmek hayati önem taşımaktadır.

Bu bağlamda, zeminde kirlilik taşınım analizi, çeşitli matematiksel modeller ve bunların yaklaşık çözüm yöntemleriyle elde edilen simülasyonlar, bir araç olarak ön plana çıkmaktadır. Bu modeller, kirleticilerin zemin ortamında nasıl hareket ettiğini ve yayıldığını belirlemek için kullanılmaktadır. Literatürde, bir boyutlu ve üç boyutlu kirlilik taşınım modelleri önerilmekte ve bu modellerin etkinliği çeşitli çalışmalarla incelenmektedir.

Bu tezde, yeraltı suyu kirliliğinin üç boyutta adveksiyon-dispersiyon denklemi ile modellenmesi ve bu denklemin sonlu farklar yöntemiyle çözülmesi ele alınmaktadır. Tez, kirleticilerin durgun ve hareketli yeraltı suyuna sahip zemin tabakalarında taşınma süresince maksimum ve minimum kirletici miktarının zamanla değişimini, konumunu ve varsayılan sınır koşulu durumunda etkilerini incelemektedir.

Bu çalışmanın, mevcut çevresel koruma yöntemleriyle yeraltı suyu kirliliğinin bertaraf edilmesinin geliştirilmesinde ve kirleticilerin sızmış olduğu bir yeraltı suyuna belirli bir mesafede bulunan su kaynaklarına (Akarsu vb.) ulaşma süresinin tahmininde önemli bir katkı sağlaması beklenmektedir. Ayrıca yapılan analizler ve elde edilen sonuçlar, çevresel politikaların ve yeraltı suyu kirliliği kontrolüne yönelik stratejilerin oluşturulmasında rehberlik edebilecek önemli bulgular sunmaktadır.

Tezin 1. bölümünde konuya giriş yapılarak literatür özetleri ve çalışmanın amacı özetlenmektedir. Tezin 2. Bölümünde ‘‘YERALTI SUYU KİRLİLENMESİNİN ADVEKSİYON DISPERSİYON DENKLEMİ İLE MODELLENMESİ’’ başlığı altında, yeraltı suyu kirliliği

tanıtılmakta ve yeraltı suyu kirliliğini tanımlayan matematiksel modelin türetilmesi yapılmaktadır. Tezin 3. Bölümünde “ADVEKSİYON DİSPERSİYON DENKLEMİNİN ZAMAN-UZAYDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ” başlığı altında matematiksel modelin sonlu farklar yöntemi çözümü ve zaman adımı için Von Neumann kararlılık koşulunun ispatı yapılmakta ve yaygın olarak kullanılan bazı kararlılık koşulları gösterilmektedir. Tezin 4. Bölümünde “PROBLEMİN TANIMI VE SINIR KOŞULLARI” başlığı altında incelenen problem için yapılan varsayımlar, problemin geometrisi ve problemin başlangıç ve sınır koşulları tanımlanmaktadır. Tezin 5. Bölümünde “PROBLEMİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ” başlığı altında bir önceki bölümde tanımı ve sınır koşulları belirtilen problem için türetilen denklemlerin sonlu farklar gösterimi yapılmaktadır. Tezin 6. Bölümünde “PROBLEMİN SONLU FARKLAR SİMÜLASYONU” başlığı altında problem için varsayılan parametreler kullanılarak Matlab programında yazılan kodlar çalıştırılarak problemin sonlu farklar simülasyonu gösterilmektedir. Tezin 7. Bölümünde “SONUÇ VE ÖNERİLER” başlığı altında zemin örneğinde kirlilik taşınmasının analizi yapılarak zemine sızan kirletici miktarı, maksimum ve minimum kirletici konsantrasyonu değeriyle maksimum ve minimum kirletici konsantrasyon konumlarının zamanla değişimi dikkate alınarak önerilerde bulunulmuştur.

1.1 Literatür Özeti

Zeminde kirlilik taşınım analizi, çeşitli kirleticilerin zemin ortamına olası etkilerini değerlendirmek amacıyla yapılmaktadır (Finno ve Schubert, 1986; Benson ve Daniel, 1994a, 1994b; Benson, Daniel ve Boutwell, 1999). Kirleticilerin yeraltı sularına sızmasını önlemeye yönelik olarak tasarlanan geçirimsiz malzemelerinin kirletici sahalarına doğru tekniklerle uygulanması kirleticilerin zemin ortamına muhtemel olumsuz etkilerini minimize etmektedir. Yapılan araştırmaların birçoğu suya doygun zemin tabakalarında kirliliğin yayılmasına veya taşınmasına karşı performansını analiz etmektedir (Rowe ve Booker, 1985; Quigley, Fernandez ve Rowe, 1988; Rowe, 1988; Acar ve Haider, 1990).

Literatürde, kirlilik taşıma analizi için tek ve çok boyutlu bazı matematiksel modeller önerilmektedir. Bu matematiksel modeller, kirlilik taşıma analizinde etkili olan parametreleri dikkate alarak uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla kullanılabilir (Chakraborty ve Ghosh, 2013).

Freeze ve Cherry (1979), doymun zemin ortamında reaktif olmayan suda çözülebilen kirleticilerin taşınması için kirletici kaynağının ihmal edildiği, kirleticilerin yeraltı suyunda hem taşınmasını hem de yayılmasını ifade eden üç boyutlu adveksiyon-dispersiyon matematiksel modelini önermektedir.

Rowe ve Booker (1986) farklı fiziksel özelliklere sahip zemin tabakalarından oluşan bir zemin üzerinde bulunan kirletici kaynağından sızan kirleticilerin, üç boyutlu kirlilik analizi için bir yöntem önermektedir. Bu yöntem, kirletici sahaslarının altındaki zemini fiziksel özelliklerine göre zemini tabakalara ayırarak her bir zemin tabakasında kirliliğin yayılmasını analiz etmektedir. Analizde, Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi matematiksel yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntem, kirletici sahaslarının altındaki zeminde kirlilik yayılmasının uzun yıllarda ve kirletici sahasından uzak mesafelerde etkilerini incelemede oldukça faydalı bir yöntem olarak görülmektedir.

Tsai vd. (1999), Yeraltı suyunda çözülebilen kirleticilerin taşınma analizi için kirleticilerin taşınma ve yayılma faktörleriyle birlikte reaktif, bozunma ve kirletici kaynağı faktörlerini de dikkate alan sonlu analitik sayısal modele dayanan matematiksel bir model önermektedir. Bu model belirli bir alanda yüksek doğruluk derecesine sahip bir model olarak tanımlanmaktadır.

Zeminde kirlilik taşınması için yapılan araştırmaların birçoğu bir boyutludur. Ancak kirletici sahasının boyutları, kirletici sahası altında bulunan killi zemin tabakasının yüksekliğinden çok fazla olması durumunda kirlilik taşınım analizi bir boyut için yapılabilmektedir. Kirletici kaynağının boyutları, kirletici sahası altında bulunan killi zemin tabakasının yüksekliğine yakın değerlerde veya bu değerden küçük olması durumunda ise iki veya üç boyutta yapılması gerekmektedir (Rowe ve Booker, 1986).

Homojen ve suya doymun zemin ortamında kirlilik taşınım denklemleri, dispersiyon veya advektif dispersiyon için türetilmiş kısmi diferansiyel denklemlerini esas almaktadır. (Freeze ve Cherry, 1979).

Domenico ve Robins (1985) kirletici sahasına yakın mesafelerde doymun homojen zeminde kirlilik analizi için kullanılan ve kesin sonuç için bir dizi koşula ihtiyaç duyan süper pozisyon modelini ve kirletici kaynağından daha uzak mesafelerde kullanılabilen genişletilmiş pulse modelini incelemektedir. Genişletilmiş pulse modeli ile elde ettiği sonuçların süper pozisyon modeli için elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Domenico (1987), dikdörtgen bir kirletici kaynağından zemine taşınan kirliliği bir boyutta adveksiyon terimini, üç boyutta dispersiyon terimlerini ve birinci dereceden bozunma için zemin ortamını yarı sonsuz kabul ederek genişletilmiş pulse modeliyle çözmektedir. Bu yöntemin bilgisayarlarda analiz için kolay programlanabilen bir yöntem olduğu görülmektedir. Sagar (1982) bu denklemde bozunmayı ihmal ederek tam ve yarı analitik çözüm sunmaktadır.

Guyonnet ve Neville (2004), kirletici sahası altında bulunan killi zemin tabakasının altına daha geçirgen bir zemin tabakası yerleştirerek, bu tabakada yeraltı suyu akış hızını bir doğrultuda ve tek yönlü olduğu varsayımıyla üç boyutlu kirlilik taşınımı için Domenico (1987) ve Sagar (1982) çözümlerini karşılaştırmaktadır. Yaptığı çalışmanın neticesinde, bozunmanın ihmal durumunda konsantrasyonun değerleri arasında Domenico (1987) ve Sagar (1982) çözümlerinin yaklaşık sonuçlar ürettiği; bozunmanın ihmal edilmediği durumda ise kirlilik konsantrasyonun değerleri arasında Domenico (1987) ve Sagar (1982) çözümlerinin büyük farklılıklar gösterdiğini ortaya koymaktadır.

Homojen ve doymuş zemin ortamı için sonlu farklar yöntemi kullanılarak bir boyutta kirlilik taşınım analizi yapılabilmektedir (Chakraborty ve Ghosh, 2012; Chakraborty ve Ghosh, 2013).

Landage (2014) kapalı yöntem koşulsuz kararlı sonlu farklar yöntemini kullanarak, kirlilik taşınmasında bozunmanın doğrusal olmamasından dolayı diferansiyel denklemlerin doğrusal olmaması durumu için anlık bir kirletici kaynağından salınan kirliliğin analizini incelemektedir. Bu yöntemle elde edilen sonuçlar analitik çözümle elde edilen sonuçlara uyum sağladığı görülmektedir.

Chakraborty ve Ghosh (2013), kirletici sahası altında bulunan suya doymuş killi zemin tabakasının altında suya doymuş ve daha yüksek geçirimsizliğe sahip bir zemin tabakasında yeraltı suyu akışının bir doğrultuda olduğu bir problemi (Guyonnet ve Neville, 2004) sonlu farklar açık yöntemini kullanarak çözmektedir. Chakraborty ve Ghosh (2013), bu çalışmalarında 7 farklı kirletici türü için zeminde kirlilik taşınımının bir boyutlu ve üç boyutlu analizlerini yapmaktadır. Kirlilik taşınım analizinin sonlu farklar yöntemiyle çözümünden elde edilen sonuçların Guyonnet ve Neville (2004)'nin çözümleriyle karşılaştırıp uyumlu olduğunu göstermektedir.

1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu tez, yeraltı suyu kirliliğinin adveksiyon-dispersiyon denklemi kullanılarak modellenmesi ve bu denklemin sonlu farklar yöntemiyle çözülmesini ele almaktadır. Bu kapsamda, farklı zemin özelliklerine ve yeraltı suyu akış doğrultularına sahip bir zemin örneğinde kirleticilerin taşınma süreci incelenmektedir. Tez, kirletici miktarının zamanla değişimini, konumunu ve belirli sınır koşulları altında etkilerini analiz etmektedir.

Çalışmanın amacı, mevcut çevresel koruma yöntemlerinin geliştirilmesine katkı sağlamak ve kirleticilerin yeraltı suyuna sızması sonucu çevresel etkilerin azaltılmasına yönelik stratejilerin oluşturulmasına rehberlik etmektir. Bu amaç doğrultusunda, yapılan analizler ve elde edilen sonuçlar çevresel politika yöneticilerine önemli bilgiler sunmayı hedeflemektedir.

Çalışmanın kapsamı, yeraltı suyu kirliliğinin matematiksel modellenmesi, çözülmesi ve simülasyonlarla incelenmesini içermektedir. Bu doğrultuda, literatürde önerilen çeşitli matematiksel modeller ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyonlar değerlendirilmektedir. Ayrıca, kirleticilerin farklı zemin özelliklerine ve yeraltı suyu akış doğrultularına sahip zeminlerdeki taşınma süreçleri analiz edilmektedir.

Bu tez, çevresel koruma alanında önemli bir konu olan yeraltı suyu kirliliğinin anlaşılmasına ve kontrol altına alınmasına katkıda bulunmayı amaçlamaktadır.

2. YERALTI SUYU KİRLENMESİNİN ADVEKSİYON DİSPERSİYON DENKLEMİ İLE MODELLENMESİ

Bu bölümde, suda çözünebilen kirleticilerin yeraltı suyundaki taşınması ve bu taşıma süreçlerini kontrol eden fiziksel büyüklükler tanıtılmış, ayrıca bu taşıma sürecini tanımlayan adveksiyon dispersiyon denklemi türetilmiştir.

2.1 Zeminde Kirliliğin Taşınması

Zemin yapısı, boşluk ve katı danelerden oluşmaktadır. Boşluklarda kısmen veya tamamen su bulunmaktadır. Homojen, izotrop, doygun ve kararlı akışın olduğu, Darcy yasasının geçerli olduğu zemin ortamında, suda çözünebilen kirleticilerin taşınması diferansiyel denklemlerin türetilmesiyle tanımlanabilir (Freeze ve Cherry, 1979). Zeminde kirlilik taşıma alanı içerisinde bulunan bir kontrol hacmi göz önüne alınırsa; kontrol hacmi içerisinde reaktif olmayan çözünen kirletici kütledeki net değişim miktarı, kontrol hacminden çıkan toplam kirletici miktarı ile kontrol hacmine giren toplam kirletici miktarı arasındaki farktır. Kontrol hacmine giren veya çıkan kirletici akışı, fiziksel olarak yeraltı suyu akış hızına eşit bir hızda taşıma ve çözünen kirleticilerin akış yolunun dışına yayılması şeklinde olacaktır. Bu taşıma olayına adveksiyon, yayılma olayına ise dispersiyon denir (Freeze ve Cherry, 1979).

2.1.1 Adveksiyon

Adveksiyon, su hareketiyle taşınan maddelerin yer değiştirmesini ifade eden bir mekanizmadır ve bu mekanizma, yeraltı suyu kütlesi içinde bulunan kirleticilerin yayılımında belirleyici bir rol oynar. Kirleticilerin taşınımı, yeraltı suyu akış hızı, akış yönü ve hidrojeolojik özelliklere bağlı olarak değişkenlik gösterir ve Denklem 2.1 ile ifade edilir (Freeze ve Cherry, 1979).

$$v_s n C dA \quad (2.1)$$

Burada, v_s sızıntı hızı, n porozite, C kirlilik konsantrasyonu, dA kontrol hacminin akışa dik diferansiyel kesit alanıdır. Sızıntı hızının üç boyuttaki bileşenleri v_{sx} , v_{sy} ve v_{sz} olmak üzere; x , y , z doğrultusunda adveksiyon yoluyla taşıma sırasıyla Denklem 2.2 Denklem 2.3 Denklem 2.4 teki gibi verilir.

$$v_{sx} n C dA \quad (2.2)$$

$$v_{sy}nC_dA \quad (2.3)$$

$$v_{sz}nC_dA \quad (2.4)$$

2.1.2 Difüzyon

Bir sıvıdaki kirletici konsantrasyonunun bir noktadan diğerine değişmesi sürecinde, konsantrasyonun yüksek olduğu noktadan düşük olduğu noktaya doğru olan hareket difüzyon olarak tanımlanmaktadır. Difüzyonun tanımlandığı Denklem 2.5, bu süreci matematiksel olarak ifade eder ve genellikle Fick'in birinci yasasına dayanır. Bu yasa, difüzyon akısının konsantrasyon gradyanı ile doğru orantılı olduğunu belirtir (Denklem 2.5). Yani, birim alandan birim zamanda geçen madde miktarı, konsantrasyon farkı ve difüzyon katsayısı ile çarpılarak bulunur (Freeze ve Cherry, 1979).

$$f = D_d \frac{dC}{dl} \quad (2.5)$$

Burada f birim zamanda ve akışa dik birim kesit (düzlem) alanından geçen kütle veya Difüzyon hızı, D_d difüzyon katsayısı, dC konsantrasyondaki diferansiyel değişim ve dl akış doğrultusunda alınan diferansiyel mesafedir (Freeze ve Cherry, 1979).

2.1.3 Dispersiyon

Zeminde yeraltı suyu kirlilik taşınması, zeminin düzensiz yapısından dolayı adveksiyonla taşımada sadece akış doğrultusunda ilerlemesi beklenirken, akış doğrultusunun dışına doğru da yayılma eğilimi gösterir bu yayılma dispersiyon olarak tanımlanmaktadır (Freeze ve Cherry, 1979). Dispersiyonla kirlilik taşınma miktarı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$nD \frac{\partial C}{\partial l} dA \quad (2.6)$$

Burada, D akış doğrultusundaki dispersiyon katsayısı, $\partial C / \partial l$ Konsantrasyonun l mesafesindeki değişim miktarı veya konsantrasyon değişiminin l mesafesine göre kısmi türevidir. x , y , z doğrultusunda dispersiyon yoluyla taşıma miktarı sırasıyla Denklem 2.7-2.9'da ki gibi verilir;

$$nD_x \frac{\partial C}{\partial x} dA \quad (2.7)$$

$$nD_y \frac{\partial C}{\partial y} dA \quad (2.8)$$

$$nD_z \frac{\partial C}{\partial z} dA \quad (2.9)$$

Dispersiyon katsayısı (D) ile Difüzyon katsayısı D_d arasında takip eden ilişki vardır.

$$D = v_s a_d + D_d \quad (2.10)$$

Burada a_d dispersivite, v_s sızıntı hızıdır. Sızıntı hızının çok düşük olduğu veya su akışının olmadığı zemin ortamlarında kirlilik taşınımında difüzyon, adveksiyon ve dispersiyondan daha etkindir.

2.2 Doygun Zemin Ortamında Çözünen Kirlenici Taşınması İçin Adveksiyon Dispersiyon Denklemi

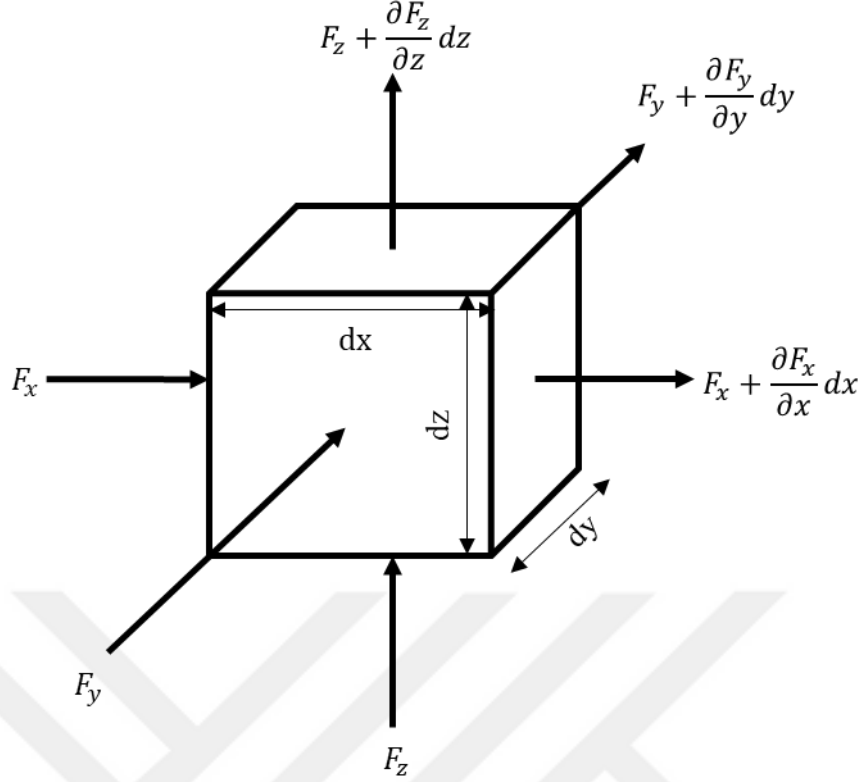
Zemin ortamındaki Şekil 2.1’de görülen kontrol hacmine giren ve çıkan kirlenici miktarı, kirlenici akışı ve kütlelerin korunumu göz önüne alınarak adveksiyon - dispersiyon denklemi türetilebilir. F_x , F_y ve F_z x, y ve z doğrultularında birim zamanda birim enkesit alanından geçen toplam kirlenici kütlesidir ve

$$F_x = v_{sx}nC - nD_x \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$F_y = v_{sy}nC - nD_y \frac{\partial C}{\partial y} \quad (2.12)$$

$$F_z = v_{sz}nC - nD_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (2.13)$$

olarak hesaplanır. Burada dispersiyonla taşınmanın önünde ‘ - ’ işareti kullanılmasının sebebi kirlenicinin daha düşük konsantrasyonun bulunduğu bölgeye yayılma eğilimidir.



Şekil 2.1. Adveksiyon dispersiyon denkleminin türetilmesi için kullanılan diferansiyel kontrol hacmi (Freeze ve Cherry, 1979)

Bu durumda kontrol hacmine (Şekil 2.1) giren toplam kirletici kütlesi,

$$F_x dydz + F_y dx dz + F_z dx dy \quad (2.14)$$

olur. Burada dx, dy ve dz sırasıyla x, y ve z doğrultularındaki diferansiyel hacmin eleman boyutlarıdır.

Kontrol hacmini terk eden toplam diferansiyel kirletici kütlesi

$$\left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz\right) dx dy \quad (2.15)$$

olarak verilir. Kontrol hacmine giren ve kontrol hacmini terk eden kirletici kütlesi arasındaki fark, çözünen kirleticinin reaktif olmaması sebebiyle kontrol hacmi içerisindeki kirletici kütlesine eşit olacaktır (Denklemler 2.14 ve 2.15).

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (2.16)$$

Kontrol hacmi içerisindeki kirleticinin kütledeki değişim hızı ise

$$-n \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) d_x d_y d_z \quad (2.17)$$

olacaktır. Birim zamanda kontrol hacminde biriken kirletici kütlesi ise,

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = -n \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) \quad (2.18)$$

bulunur. Denklem 2.11, Denklem 2.12 ve Denklem 2.13, Denklem 2.18'de yerine yazılırsa,

$$v_{sx} n \frac{\partial C}{\partial x} - n D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + v_{sy} n \frac{\partial C}{\partial y} - n D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + v_{sz} n \frac{\partial C}{\partial z} - n D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = -n \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) \quad (2.19)$$

Denklem 2.19'a gerekli sadeleştirme ve düzenleme işlemleri yapılırsa,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v_{sx} \frac{\partial C}{\partial x} - v_{sy} \frac{\partial C}{\partial y} - v_{sz} \frac{\partial C}{\partial z} \quad (2.20)$$

elde edilir. Denklem 2.20 homojen izotrop ve kararlı akışın olduğu zemin ortamına ait adveksiyon-dispersiyon denklemdir. Denklem 2.20'de adveksiyon terimleri,

$$v_{sx} \frac{\partial C}{\partial x} + v_{sy} \frac{\partial C}{\partial y} + v_{sz} \frac{\partial C}{\partial z} \quad (2.21)$$

x, y ve z doğrultusundaki sızıntı hızına bağlı terimlerdir. Denklem 2.20'de dispersiyon terimleri,

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (2.22)$$

x, y ve z doğrultusundaki dispersiyon katsayılarına bağlı terimlerdir.

3. ADVEKSİYON DİSPERSİYON DENKLEMİNİN ZAMAN-UZAYDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Sonlu farklar yöntemi, adveksiyon-dispersiyon denkleminin (Denklem 2.20), sayısal çözümlerinde yaygın ve etkin bir yöntemdir. Bu bölümde, adveksiyon-dispersiyon denkleminin zaman-uzayda sonlu farklar yöntemiyle çözümü ele alınacaktır.

3.1 Adveksiyon Terimlerinin Sonlu Farklar Yöntemiyle Bulunması

Adveksiyonla taşıma için elde edilen denklemde (Denklem 2.21) x yönündeki birinci kısmi türev için sonlu fark yaklaşımının elde edilmesi gerekmektedir. x doğrultusunda, $C(x,y,z,t)$ fonksiyonu bir x noktasında Taylor serisine açıldığında ve Δx artımı için $x+\Delta x$ noktasındaki değeri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} C(x + \Delta x, y, z, t) = & C(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^1}{1!} \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \\ & + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 C(x, y, z, t)}{\partial x^4} + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

elde edilir. Buradan $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun x'e göre birinci türevi çekilirse, x doğrultusunda, $C(x,y,z,t)$ fonksiyonun x'e bağlı kısmi birinci türevinin birinci mertebeden hataya sahip ileri fark formülü elde edilir (Denklem 3.2).

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} \cong \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) - C(x, y, z, t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.2)$$

Burada $O(\Delta x)$ (Denklem 3.3) hata terimidir. Seçilen adım (Δx) ne kadar küçük olursa, hata terimi de o oranda küçük olacaktır:

$$O(\Delta x) = -\frac{\Delta x^1}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^3}{4!} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} - \dots \quad (3.3)$$

x doğrultusunda $C(x,y,z,t)$ fonksiyonu x noktasındaki Taylor serisine açıldığında ve $-\Delta x$ artımı için $x-\Delta x$ noktasındaki değeri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} C(x - \Delta x, y, z, t) = & C(x, y, z, t) - \Delta x \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \\ & - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 C(x, y, z, t)}{\partial x^4} - \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Buradan $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun birinci türevi çekilirse, x doğrultusunda, $C(x,y,z,t)$ fonksiyonu x 'e bağlı kısmi birinci türevinin birinci mertebeden hataya sahip geri fark formülü,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial x} &\cong \frac{C(x,y,z,t) - C(x - \Delta x, y, z, t)}{\Delta x} + \frac{\Delta x^1}{2!} \frac{\partial^2 C(x,y,z,t)}{\partial x^2} \\ &- \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 C(x,y,z,t)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^3}{4!} \frac{\partial^4 C(x,y,z,t)}{\partial x^4} - \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. İleri fark formülüyle (Denklem 3.2) geri fark formülü (Denklem 3.5) taraf tarafa toplandığında x doğrultusunda $C(x,y,z,t)$ fonksiyonu x 'e bağlı kısmi türevinin ikinci mertebe hataya sahip merkezi fark formülü,

$$\frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial x} \cong \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) - C(x - \Delta x, y, z, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.6)$$

olarak elde edilir. Burada $O(\Delta x^2)$ (Denklem 3.7) hata terimidir. Seçilen adım (Δx) ne kadar küçük olursa hata terimi de o oranda küçük olacaktır:

$$O(\Delta x^2) = -\frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 C(x,y,z,t)}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^4}{5!} \frac{\partial^5 C(x,y,z,t)}{\partial x^5} - \dots \quad (3.7)$$

Adveksiyonla taşıma denkleminin terimleri 3 boyutta merkezi sonlu farklar ile

$$\begin{aligned} &v_{sx} \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial x} + v_{sy} \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial y} + v_{sz} \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial z} \\ &= v_{sx} \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) - C(x - \Delta x, y, z, t)}{2\Delta x} + v_{sy} \frac{C(x, y + \Delta y, z, t) - C(x, y - \Delta y, z, t)}{2\Delta y} \\ &+ v_{sz} \frac{C(x, y, z + \Delta z, t) - C(x, y, z - \Delta z, t)}{2\Delta z} + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta z^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak ifade edilebilir.

3.2 Dispersiyon Terimlerinin Sonlu Farklar Yöntemiyle Bulunması

Dispersiyonla taşıma için elde edilen Denklemin (Denklem 2.22) çözümü için ikinci türev sonlu fark yaklaşımının elde edilmesi gerekmektedir. x doğrultusunda, $C(x,y,z,t)$ fonksiyonu x noktasında Taylor serisine açıldığında ve $2\Delta x$ artımı için $x+2\Delta x$ noktasındaki değeri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
C(x + 2\Delta x, y, z, t) &= C(x, y, z, t) + \frac{2\Delta x}{1!} \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \\
&+ \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial x^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 C(x, y, z, t)}{\partial x^4} + \dots
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. x doğrultusunda C(x,y,z,t) fonksiyonu x'e bağlı kısmi birinci türevlerin yok edilmesi için Denklem 3.1, -2 ile çarpılıp Denklem 3.9 ile taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
C(x + 2\Delta x, y, z, t) - 2C(x + \Delta x, y, z, t) &= -C(x, y, z, t) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \\
&+ \Delta x^3 \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial x^3} + \dots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Buradan ikinci türev çekilirse, x doğrultusunda C(x, y, z, t) fonksiyonunun x 'e bağlı kısmi ikinci türevinin birinci merteye hataya sahip ileri fark formülü,

$$\frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \cong \frac{C(x + 2\Delta x, y, z, t) - 2C(x + \Delta x, y, z, t) + C(x, y, z, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \tag{3.11}$$

olarak elde edilir. x doğrultusunda, C(x,y,z,t) fonksiyonu x noktasında Taylor serisine açıldığında ve -2Δx artımı için x-2Δx noktasındaki değeri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
C(x - 2\Delta x, y, z, t) &= C(x, y, z, t) - \frac{2\Delta x}{1!} \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \\
&- \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial x^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 C(x, y, z, t)}{\partial x^4} + \dots
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak elde edilir. x doğrultusunda C(x,y,z,t) fonksiyonu x'e bağlı kısmi birinci türevlerin yok edilmesi için Denklem 3.4, -2 ile çarpılıp Denklem 3.12 ile taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
C(x - 2\Delta x, y, z, t) - 2C(x - \Delta x, y, z, t) &= -C(x, y, z, t) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \\
&- \Delta x^3 \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial x^3} + \dots
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Buradan ikinci türev çekilirse, x doğrultusunda C(x,y,z,t) fonksiyonu x'e bağlı kısmi ikinci türevinin birinci merteye hataya sahip geri fark formülü,

$$\frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} \cong \frac{C(x - 2\Delta x, y, z, t) - 2C(x - \Delta x, y, z, t) + C(x, y, z, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \tag{3.14}$$

olarak elde edilir. $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun ileri fark (Denklem 3.1) ve geri fark (Denklem 3.4) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$C(x + \Delta x, y, z, t) + C(x - \Delta x, y, z, t) = 2C(x, y, z, t) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{2\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 C(x, y, z, t)}{\partial x^4} + \dots \quad (3.15)$$

elde edilir. Buradan ikinci türev çekilirse, x doğrultusunda $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun x'e bağlı kısmi ikinci türevinin ikinci mertebe hataya sahip merkezi fark formülü,

$$\frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} = \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) + C(x - \Delta x, y, z, t) - 2C(x, y, z, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. Adveksiyon-dispersiyon denkleminin dispersiyonla taşıma terimleri 3 boyutta merkezi sonlu farklar ile

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial z^2} \\ &= D_x \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) + C(x - \Delta x, y, z, t) - 2C(x, y, z, t)}{\Delta x^2} \\ &+ D_y \frac{C(x, y + \Delta y, z, t) + C(x, y - \Delta y, z, t) - 2C(x, y, z, t)}{\Delta y^2} \\ &+ D_z \frac{C(x, y, z + \Delta z, t) + C(x, y, z - \Delta z, t) - 2C(x, y, z, t)}{\Delta z^2} + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) \\ &+ O(\Delta z^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

olarak ifade edilebilir. $O(\Delta x^2)+O(\Delta y^2)+O(\Delta z^2)$ ihmal edilerek

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial z^2} \\ &\cong D_x \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) + C(x - \Delta x, y, z, t) - 2C(x, y, z, t)}{\Delta x^2} \\ &+ D_y \frac{C(x, y + \Delta y, z, t) + C(x, y - \Delta y, z, t) - 2C(x, y, z, t)}{\Delta y^2} \\ &+ D_z \frac{C(x, y, z + \Delta z, t) + C(x, y, z - \Delta z, t) - 2C(x, y, z, t)}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir.

3.3 Zaman Değişiminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü

Kirliliğin zamanla değişimi ileri fark yaklaşımıyla çözülecektir. $C(x,y,z,t)$ fonksiyonu t anında Taylor serisine açıldığında Δt artımı için $t+\Delta t$ anındaki değeri hesaplanırsa,

$$C(x, y, z, t + \Delta t) = C(x, y, z, t) + \frac{\Delta t^1}{1!} \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 C(x, y, z, t)}{\partial t^4} + \dots \quad (3.19)$$

elde edilir. Buradan $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun birinci türevi çekilirse, $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun t 'ye bağlı kısmi türevinin birinci mertebeden hataya sahip ileri fark formülü,

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} \cong \frac{C(x, y, z, t + \Delta t) - C(x, y, z, t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t^1}{2!} \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial t^2} + O(\Delta t) \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. $O(\Delta t)$ (Denklem 3.21) birinci mertebeden hata terimi olmak üzere, seçilen zaman adımı (Δt) ne kadar küçük olursa, hata terimi de o oranda küçük olacaktır.

$$O(\Delta t) = - \frac{\Delta t^1}{2!} \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 C(x, y, z, t)}{\partial t^3} - \frac{\Delta t^3}{4!} \frac{\partial^4 C(x, y, z, t)}{\partial t^4} - \dots \quad (3.21)$$

olarak bulunur.

Sonlu farklar yöntemi, diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bir sayısal yöntemdir. Bu yöntem, genellikle iki farklı yaklaşıma sahiptir. Bu yöntemler sonlu farklar kapalı (implicit) yöntem ve sonlu farklar açık (explicit) yöntemleridir. Her iki yöntem de diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde önemlidir ve kullanımı, problem için istenen doğruluk ile kararlılık seviyesine bağlıdır.

3.4 Sonlu Farklar Kapalı Yöntem (Implicit Method)

Kapalı yöntem, bir sonraki zaman adımındaki değerleri hesaplamak için mevcut ve gelecek zaman adımlarındaki değerleri kullanır. Bu yöntemler, daha karmaşık hesaplamalar gerektirmektedir. Ancak kapalı yöntemler, genellikle daha kararlıdır ve daha büyük zaman adımlarında da kararlı sonuçlar verebilmektedir.

Üç boyutta zamana bağlı adveksiyon-dispersiyon denklemi için $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $t+\Delta t$ anındaki çözümü sonlu farklar kapalı yöntemle şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
& C(x, y, z, t + \Delta t) \cong C(x, y, z, t) \\
& + \Delta t D_x \frac{C(x + \Delta x, y, z, t + \Delta t) - 2C(x, y, z, t + \Delta t) + C(x - \Delta x, y, z, t + \Delta t)}{\Delta x^2} \\
& + \Delta t D_y \frac{C(x, y + \Delta y, z, t + \Delta t) - 2C(x, y, z, t + \Delta t) + C(x, y - \Delta y, z, t + \Delta t)}{\Delta y^2} \\
& + \Delta t D_z \frac{C(x, y, z + \Delta z, t + \Delta t) - 2C(x, y, z, t + \Delta t) + C(x, y, z - \Delta z, t + \Delta t)}{\Delta z^2} \\
& - \Delta t v_{sx} \frac{C(x + \Delta x, y, z, t + \Delta t) - C(x - \Delta x, y, z, t + \Delta t)}{2\Delta x} \\
& - \Delta t v_{sy} \frac{C(x, y + \Delta y, z, t + \Delta t) - C(x, y - \Delta y, z, t + \Delta t)}{2\Delta y} \\
& - \Delta t v_{sz} \frac{C(x, y, z + \Delta z, t + \Delta t) - C(x, y, z - \Delta z, t + \Delta t)}{2\Delta z}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.5 Sonlu Farklar Açık Yöntemi (Explicit Method)

Açık yöntemde, bir sonraki zaman adımındaki değerler hesaplanırken sadece mevcut ve önceki zaman adımlarındaki değerler kullanılmaktadır. Bu yöntem, zaman adımlarında gelecek adımlara doğru ilerler ve genellikle daha basit hesaplamalar gerektirir. Uygulaması kolay olan açık yöntemler, daha az hesaplama gücü gerektirir. Ancak, kararlılık açısından bazı sınırlamalar yapılmadığı takdirde, özellikle büyük zaman adımlarında kararsız hale gelebilmektedir.

Üç boyutta zamana bağlı adveksiyon-dispersiyon denklemi için $C(x,y,z,t)$ fonksiyonunun $t+\Delta t$ anındaki çözümü açık yöntemle şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
& C(x, y, z, t + \Delta t) = C(x, y, z, t) \\
& + \Delta t D_x \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) - 2C(x, y, z, t) + C(x - \Delta x, y, z, t)}{\Delta x^2} \\
& + \Delta t D_y \frac{C(x, y + \Delta y, z, t) - 2C(x, y, z, t) + C(x, y - \Delta y, z, t)}{\Delta y^2} \\
& + \Delta t D_z \frac{C(x, y, z + \Delta z, t) - 2C(x, y, z, t) + C(x, y, z - \Delta z, t)}{\Delta z^2} \\
& - \Delta t v_{sx} \frac{C(x + \Delta x, y, z, t) - C(x - \Delta x, y, z, t)}{2\Delta x} \\
& - \Delta t v_{sy} \frac{C(x, y + \Delta y, z, t) - C(x, y - \Delta y, z, t)}{2\Delta y} \\
& - \Delta t v_{sz} \frac{C(x, y, z + \Delta z, t) - C(x, y, z - \Delta z, t)}{2\Delta z}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Bu çalışmada sonlu farklar açık yöntemi (Explicit method) kullanılmıştır.

3.6 Kararlılık Analizi

Zaman-uzayda sonlu farklar yöntemiyle adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümü sırasında, belirli bir değerle sınırlanmayan hataların ortaya çıkması durumunda, elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle uyumlu olmayabilir. Bu durum, sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sonuçların analitik çözümlere yaklaşma eğiliminde olmadığını, aksine analitik çözümlerden uzaklaştığını gösterir. Ancak, bu hataların kontrol altına alınması veya sınırlanması, kararlılık analizi yoluyla mümkündür. Bu bağlamda, adveksiyon-dispersiyon denkleminde, dispersiyon terimleri (Denklem 2.22) ve adveksiyon-dispersiyon denklemi (Denklem 2.20) için kararlılık analizi yapılarak, sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sonuçların zaman adımı için kararlılık koşulu belirlenecektir.

3.6.1 Difüzyon Denkleminin Von Neumann Kararlık Analizi

Bu bölümde Difüzyon denklemi'nin sonlu fark çözümünde kullanılan ve önemli bir analiz yöntemi olan Von Neumann kararlık analizi incelenecektir. Von Neumann Kararlılık Analizi, difüzyon denkleminin sonlu fark çözümünde kararlılık şartını belirlemek için sıkça kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, sonlu fark denklemi genellikle Fourier serisine açılarak incelenir. Fourier serisinin bu çözümdeki rolü, uzayda ve zamanda kirliliğin değişimini temsil etmek için periyodik fonksiyonların nasıl kullanılabileceğini göstermesidir. Fourier serileri, sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sayısal sonuçların istikrarını ve güvenilirliğini değerlendirmek için önemlidir. Von Neumann analiz yöntemi, çözümün istikrarlılığını değerlendirmek ve doğruluğunu artırmak için temel bir araçtır (Hoffmann ve Chiang, 2000).

Difüzyon denkleminin (Denklem 3.23) ayrık zamanda Fourier serisi açılımı,

$$C(m, p, q, N) = \sum_{m=-M}^M \sum_{p=-P}^P \sum_{q=-Q}^Q c_{m,p,q}^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} \quad (3.24)$$

olmaktadır. Burada M, P ve Q, sırasıyla x, y ve z doğrultularındaki harmonik bileşenlerin toplam sayısını temsil eder. m, p ve q, x, y ve z doğrultularındaki harmonik bileşenlerin indisleridir ve -M, -P, -Q'dan M, P, Q'ya kadar değişir. k_m , k_p ve k_q , x, y ve z doğrultularında m, p ve q'ncü harmonik bileşenlerin dalga sayılarıdır. Δx , Δy ve Δz , x, y ve z doğrultularındaki uzay adım büyüklüklerini veya grid noktaları arasındaki mesafeyi temsil eder. $c_{m,p,q}^N$, N zaman

adımında m , p ve q indislerindeki harmonik bileşenlerin genliğidir. i ise $\sqrt{-1}$ değerine eşit olan birim sanal sayıyı sembolize eder (Hirsch, 2007).

Süper pozisyon prensibine göre lineer bir denklemin farklı çözümleri toplandığında da yine aynı denklemin yeni bir çözümü elde edilmektedir. Denklem 3.23 lineer olduğu için Fourier serisinin sadece bir terimin kullanılması yeterli olacaktır. N zaman adımında Fourier serisinin bir terimi yazılırsa

$$C(m, p, q, N) = c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} \quad (3.25)$$

şeklinde olacaktır. Denklem 3.25, $N+1$ zaman adımı için yazılırsa,

$$C(m, p, q, N + 1) = c^{N+1} e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} \quad (3.26)$$

elde edilir. N zaman adımında $m \pm 1$, $p \pm 1$ ve $q \pm 1$ indisleri için ise,

$$C(m \pm 1, p, q, N) = c^N e^{i(m \pm 1)k_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z} \quad (3.27)$$

$$C(m, p \pm 1, q, N) = c^N e^{i(mk_m \Delta x + (p \pm 1)k_p \Delta y + qk_q \Delta z)} \quad (3.28)$$

$$C(m, p, q \pm 1, N) = c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + (q \pm 1)k_q \Delta z)} \quad (3.29)$$

şeklinde olacaktır. Denklem 3.23 yalnızca difüzyon terimleri için indis formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned} C(m, p, q, N + 1) &= C(m, p, q, N) \\ &+ \Delta N D_x \frac{C(m + 1, p, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m - 1, p, q, N)}{\Delta x^2} \\ &+ \Delta N D_y \frac{C(m, p + 1, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p - 1, q, N)}{\Delta y^2} \\ &+ \Delta N D_z \frac{C(m, p, q + 1, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p, q - 1, N)}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir. $a_x = D_x \frac{\Delta N}{\Delta x^2}$, $a_y = D_y \frac{\Delta N}{\Delta y^2}$ ve $a_z = D_z \frac{\Delta N}{\Delta z^2}$ olmak üzere, Denklem 3.30 düzenlenirse,

$$\begin{aligned} C(m, p, q, N + 1) &= C(m, p, q, N) + a_x (C(m + 1, p, q, N) - 2C(m, p, q, N) \\ &+ C(m - 1, p, q, N)) + a_y (C(m, p + 1, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p - 1, q, N)) \\ &+ a_z (C(m, p, q + 1, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p, q - 1, N)) \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. Denklem 3.25, Denklem 3.26, Denklem 3.27, Denklem 3.28 ve Denklem 3.29 Denklem 3.31’de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
c^{N+1} e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} &= c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} \\
&+ a_x c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-i k_m \Delta x}) \\
&+ a_y c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_p \Delta y} - 2 + e^{-i k_p \Delta y}) \\
&+ a_z c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_q \Delta z} - 2 + e^{-i k_q \Delta z})
\end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir. Denklem 3.32 ortak çarpan parantezine alınıp sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned}
c^{N+1} &= c^N (a_x (e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-i k_m \Delta x}) + a_y (e^{ik_p \Delta y} - 2 + e^{-i k_p \Delta y}) \\
&+ a_z (e^{ik_q \Delta z} - 2 + e^{-i k_q \Delta z}))
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. $\beta_x = k_m \Delta x$, $\beta_y = k_p \Delta y$ ve $\beta_z = k_q \Delta z$ faz açısı olarak tanımlanırsa,

$$\cos(\beta_x) = 0.5(e^{ik_m \Delta x} + e^{-ik_m \Delta x}) \tag{3.34}$$

$$\cos(\beta_y) = 0.5(e^{ik_p \Delta y} + e^{-i k_p \Delta y}) \tag{3.35}$$

$$\cos(\beta_z) = 0.5(e^{ik_q \Delta z} + e^{-i k_q \Delta z}) \tag{3.36}$$

elde edilir. Denklem 3.34, Denklem 3.35 ve Denklem 3.36 Denklem 3.33’te yerine yazılırsa,

$$c^{N+1} = c^N (1 - 2a_x (1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y (1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z (1 - \cos(\beta_z))) \tag{3.37}$$

elde edilir. Kararlı bir çözüm için $n+1$ anındaki genliğin (c^{n+1}), n anındaki genliğe (c^n) oranının mutlak değeri 1’den küçük veya eşit olmalıdır. Bu oran büyütme çarpanı (G) olarak ifade edilmektedir. Denklem 3.37 büyütme çarpanının kararlılık şartına uygunluğu

$$|1 - 2a_x (1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y (1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z (1 - \cos(\beta_z))| \leq 1 \tag{3.38}$$

olarak ifade edilebilir. Denklem 3.38 iki farklı durum ortaya koymaktadır. Bunlar,

$$(1 - 2a_x (1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y (1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z (1 - \cos(\beta_z))) \leq 1 \tag{3.39}$$

$$(1 - 2a_x (1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y (1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z (1 - \cos(\beta_z))) \geq -1 \tag{3.40}$$

durumlarıdır. a_x , a_y ve a_z pozitiftir ve $\cos(\beta_x)$, $\cos(\beta_y)$ ve $\cos(\beta_z)$, -1 ile 1 kapalı aralığında olacağı için β_x , β_y ve β_z , ye verilecek tüm değerler Denklem 3.39'u sağlamaktadır. Bu durumda çözümün kararlılığında Denklem 3.40 koşulu değerlendirilecektir. a_x , a_y ve a_z 'nin minimum değerinde olması için $1-\cos(\beta_x)$, $1-\cos(\beta_y)$ ve $1-\cos(\beta_z)$ 'nin en büyük değerleri alınmalıdır. Bu değer 2'dir. Denklem 3.40'ta $1-\cos(\beta_x)$, $1-\cos(\beta_y)$ ve $1-\cos(\beta_z)$ 'nin yerine 2 değeri yazılırsa,

$$a_x + a_y + a_z \leq 0.5 \quad (3.41)$$

elde edilir. a_x , a_y ve a_z değerleri Denklem 3.41'de yerine yazılıp zaman adımı çekilirse,

$$\Delta N \leq \frac{1}{2 \left(\frac{D_x}{\Delta x^2} + \frac{D_y}{\Delta y^2} + \frac{D_z}{\Delta z^2} \right)} \quad (3.42)$$

elde edilir. Denklem 3.42, x, y ve z doğrultusunda 3 boyutlu difüzyon denklemi zaman adımı için kararlılık koşuludur (Chakraborty ve Ghosh, 2013).

3.6.2 Adveksiyon Dispersiyon Denklemine Von Neumann Kararlık Analizi

Bu bölümde adveksiyon-dispersiyon denklemi'nin sonlu fark çözümünde kullanılan ve önemli bir analiz yöntemi olan Von Neumann Kararlık Analizi incelenecektir. Önceki bölümde ele alınan Difüzyon denkleminin analizine paralel olarak, bu bölümde de sonlu fark çözümün kararlılık koşulu incelenecektir. Adveksiyon-dispersiyon denklemi (Denklem 3.22) indis formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned} C(m, p, q, N + 1) &= C(m, p, q, N) \\ &+ \Delta N D_x \frac{C(m + 1, p, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m - 1, p, q, N)}{\Delta x^2} \\ &+ \Delta N D_y \frac{C(m, p + 1, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p - 1, q, N)}{\Delta y^2} \\ &+ \Delta N D_z \frac{C(m, p, q + 1, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p, q - 1, N)}{\Delta z^2} \\ &- \Delta N v_{sx} \frac{C(m + 1, p, q, N) - C(m - 1, p, q, N)}{2\Delta x} \\ &- \Delta N v_{sy} \frac{C(m, p + 1, q, N) - C(m, p - 1, q, N)}{2\Delta y} \\ &- \Delta N v_{sz} \frac{C(m, p, q + 1, N) - C(m, p, q - 1, N)}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. $b_x = v_{sx} \frac{\Delta N}{\Delta x}$, $b_y = v_{sy} \frac{\Delta N}{\Delta y}$ ve $b_z = v_{sz} \frac{\Delta N}{\Delta z}$ olmak üzere, Denklem 3.43 düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
C(m, p, q, N + 1) &= C(m, p, q, N) + a_x(C(m + 1, p, q, N) - 2C(m, p, q, N) \\
&+ C(m - 1, p, q, N)) + a_y(C(m, p + 1, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p - 1, q, N)) \\
&+ a_z(C(m, p, q + 1, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p, q - 1, N)) \\
&- 0.5b_x(C(m + 1, p, q, N) - C(m - 1, p, q, N)) \\
&- 0.5b_y(C(m, p + 1, q, N) - C(m, p - 1, q, N)) \\
&- 0.5b_z(C(m, p, q + 1, N) - C(m, p, q - 1, N))
\end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. Denklem 3.25, Denklem 3.26, Denklem 3.27, Denklem 3.28 ve Denklem 3.29 Denklem 3.44'te yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
c^{N+1} e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} &= c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} \\
&+ a_x c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-i k_m \Delta x}) \\
&+ a_y c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_p \Delta y} - 2 + e^{-i k_p \Delta y}) \\
&+ a_z c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_q \Delta z} - 2 + e^{-i k_q \Delta z}) \\
&- 0.5b_x c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_m \Delta x} - e^{-i k_m \Delta x}) \\
&- 0.5b_y c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_p \Delta y} - e^{-i k_p \Delta y}) \\
&- 0.5b_z c^N e^{i(mk_m \Delta x + pk_p \Delta y + qk_q \Delta z)} (e^{ik_q \Delta z} - e^{-i k_q \Delta z})
\end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. Denklem 3.45 düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
c^{N+1} &= c^N (1 + a_x (e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-i k_m \Delta x}) + a_y (e^{ik_p \Delta y} - 2 + e^{-i k_p \Delta y}) \\
&+ a_z (e^{ik_q \Delta z} - 2 + e^{-i k_q \Delta z}) - 0.5b_x (e^{ik_m \Delta x} - e^{-i k_m \Delta x}) \\
&- 0.5b_y (e^{ik_p \Delta y} - e^{-i k_p \Delta y}) - 0.5b_z (e^{ik_q \Delta z} - e^{-i k_q \Delta z}))
\end{aligned} \tag{3.46}$$

elde edilir. $\beta_x = k_m \Delta x$, $\beta_y = k_p \Delta y$ ve $\beta_z = k_q \Delta z$ olarak tanımlanan faz açıları,

$$\sin(\beta_x) = \frac{(e^{ik_m \Delta x} - e^{-i k_m \Delta x})}{2i} \tag{3.47}$$

$$\sin(\beta_y) = \frac{(e^{ik_p \Delta y} - e^{-i k_p \Delta y})}{2i} \tag{3.48}$$

$$\sin(\beta_z) = \frac{(e^{ik_q \Delta z} - e^{-i k_q \Delta z})}{2i} \tag{3.49}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Denklem 3.34, Denklem 3.35, Denklem 3.36, Denklem 3.47, Denklem 3.48 ve Denklem 3.49, Denklem 3.46'da yerine yazılıp düzenlenirse,

$$G = c^{N+1}/c^N = (1 - 2a_x(1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y(1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z(1 - \cos(\beta_z)) - i(b_x \sin(\beta_x) + b_y \sin(\beta_y) + b_z \sin(\beta_z))) \quad (3.50)$$

elde edilir. Denklem 3.50'de büyütme çarpanı (G) karmaşık sayıdır. Bu karmaşık sayının reel ve sanal (imajiner) kısmı

$$(1 - 2a_x(1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y(1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z(1 - \cos(\beta_z))) \quad (3.51)$$

$$-i(b_x \sin(\beta_x) + b_y \sin(\beta_y) + b_z \sin(\beta_z)) \quad (3.52)$$

olarak yazılabilir. Kararlı bir çözüme ulaşmak için büyütme çarpanı (G) sınırlandırılmalıdır.

$$|G|^2 \leq 1 \quad (3.53)$$

olarak sınırlandırılması daha sade bir analiz sağlar çünkü kare alma işlemi mutlak değer alınmasını gerektirmez. Denklem 3.53 düzenlenirse,

$$|G|^2 = G \cdot \bar{G} = [1 - 2a_x(1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y(1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z(1 - \cos(\beta_z)) - i(b_x \sin(\beta_x) + b_y \sin(\beta_y) + b_z \sin(\beta_z))][1 - 2a_x(1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y(1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z(1 - \cos(\beta_z)) + i(b_x \sin(\beta_x) + b_y \sin(\beta_y) + b_z \sin(\beta_z))] \quad (3.54)$$

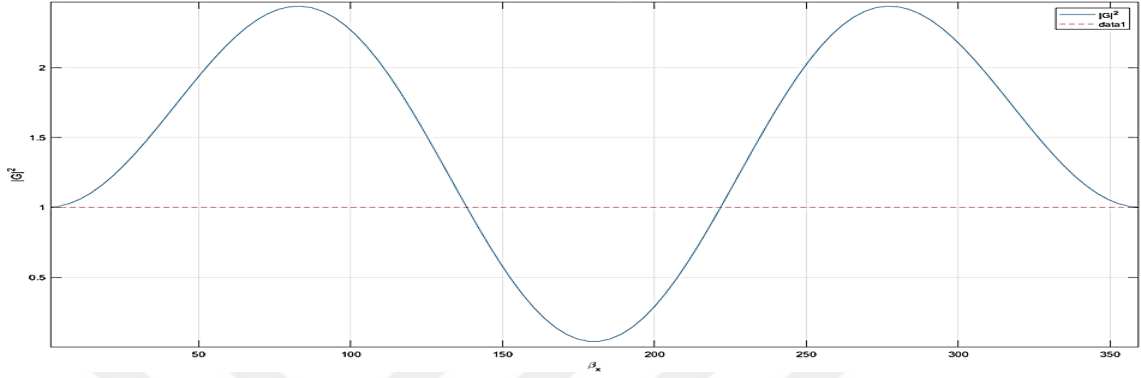
elde edilir. Denklem 3.54 düzenlenirse;

$$|G|^2 = (1 - 2a_x(1 - \cos(\beta_x)) - 2a_y(1 - \cos(\beta_y)) - 2a_z(1 - \cos(\beta_z)))^2 + (b_x \sin(\beta_x) + b_y \sin(\beta_y) + b_z \sin(\beta_z))^2 \quad (3.55)$$

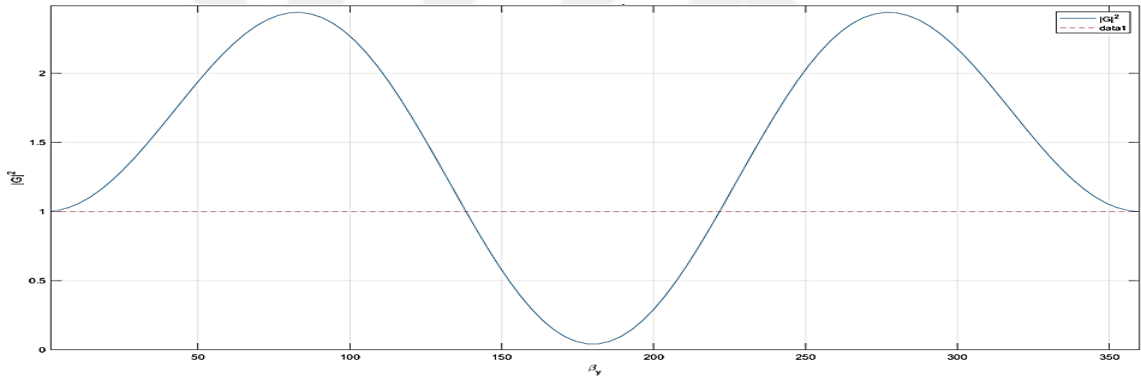
elde edilir. Denklem 3.55 düzenlenirse,

$$\begin{aligned} |G|^2 &= (4a_x^2 - b_x^2)\cos(\beta_x)^2 + (4a_y^2 - b_y^2)\cos(\beta_y)^2 + (4a_z^2 - b_z^2)\cos(\beta_z)^2 \\ &+ 8a_x a_y \cos(\beta_x) \cos(\beta_y) + 8a_x a_z \cos(\beta_x) \cos(\beta_z) + 8a_y a_z \cos(\beta_y) \cos(\beta_z) \\ &+ 2b_x b_y \sin(\beta_x) \sin(\beta_y) + 2b_x b_z \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) + 2b_y b_z \sin(\beta_y) \sin(\beta_z) \\ &+ (4a_x \cos(\beta_x) + 4a_y \cos(\beta_y) + 4a_z \cos(\beta_z))(1 - 2(a_x + a_y + a_z)) \\ &+ 4(a_x + a_y + a_z)(a_x + a_y + a_z - 1) + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 + 1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

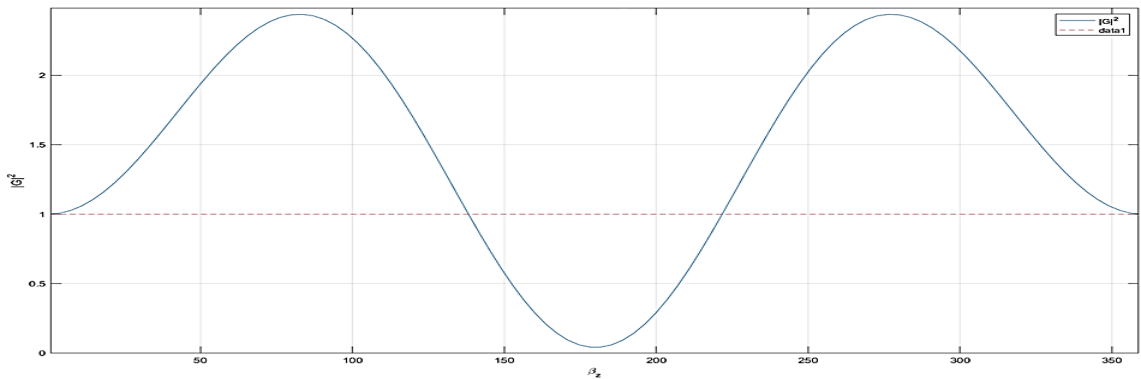
elde edilir. Denklem 3.56 kuadratik bir denklemdir. Bu denklem hem iç bükey (minimum) hem de dış bükey (maksimum) eğrilere sahiptir. Bu denklemin kararlılık koşulu için bu iki eğrinin uygunluğu değerlendirilmelidir. $a_x = a_y = a_z = 0.1$ ve $b_x = b_y = b_z = 0.5$ varsayımıyla üç boyutta çözümü yapılan denklemin grafiği, β_x, β_y ve β_z faz açıları için ayrı ayrı çizimi, şekil 3.1’de gösterilmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.1. Denklem 3.56’nın faz açısı değişimlerine göre grafikleri a) Denklem 3.56’nın β_x faz açısı değişimine göre grafiği b) Denklem 3.56’nın β_y faz açısı değişimine göre grafiği c) Denklem 3.56’nın β_z faz açısı değişimine göre grafiği

Denklem 3.56 için çözümün kararlı olabilmesi $|G|^2 \leq 1$ koşuluna bağlıdır. Bu denklemin kararlı bir çözümü için maksimum noktasının olmaması gerektiği, şekil 3.1’de görülmektedir. Ayrıca Denklem 3.56 iç bükey eğrilerin (minimum noktasının) olması durumunda kararlı olduğu da Şekil 3.1’de görülmektedir. $\cos(\beta_x), \cos(\beta_y)$ veya $\cos(\beta_z)$ ’ye göre birinci kısmi türevlerinin sıfıra eşit olduğu değerlerde Denklem 3.56 maksimum değerde olacaktır. Fakat şekil 3.1’de bu durum açıkça görüldüğü için bu durumu bu yöntemle de göstermeye gerek duyulmamıştır. İç bükey eğrilerin (minimum noktasının) olması durumu için, Denklem 3.54’te $\cos(\beta_x), \cos(\beta_y)$ veya $\cos(\beta_z)$ ’ye göre ikinci kısmi türevlerinin sıfırdan büyük olduğu değerler incelenecektir. Denklem 3.56’da $\cos(\beta_x), \cos(\beta_y)$ veya $\cos(\beta_z)$ ’ye göre ikinci kısmi türevler alınır;

$$2(4a_x^2 - b_x^2) \quad (3.57)$$

$$2(4a_y^2 - b_y^2) \quad (3.58)$$

$$2(4a_z^2 - b_z^2) \quad (3.59)$$

denklemleri elde edilir. Denklem 3.57’nin, Denklem 3.58’in ve Denklem 3.59’un pozitif olduğu koşul uygulanırsa;

$$2(4a_x^2 - b_x^2) \geq 0 \Rightarrow 2a_x \geq b_x \quad (3.60)$$

$$2(4a_y^2 - b_y^2) \geq 0 \Rightarrow 2a_y \geq b_y \quad (3.61)$$

$$2(4a_z^2 - b_z^2) \geq 0 \Rightarrow 2a_z \geq b_z \quad (3.62)$$

koşulları elde edilir. Denklem 3.60, Denklem 3.61 ve Denklem 3.62 denklemleri taraf tarafa toplanırsa;

$$2(a_x + a_y + a_z) \geq b_x + b_y + b_z \quad (3.63)$$

elde edilir. Denklem 3.41 dikkate alınarak Denklem 3.63 düzenlenirse,

$$1 \geq b_x + b_y + b_z \quad (3.64)$$

koşulu elde edilir. $b_x = v_{sx} \frac{\Delta N}{\Delta x}$, $b_y = v_{sy} \frac{\Delta N}{\Delta y}$ ve $b_z = v_{sz} \frac{\Delta N}{\Delta z}$ değerleri denklem 3.64’de yerine yazılırsa zaman adımı için kararlılık koşulu,

$$v_{sx} \frac{\Delta N}{\Delta x} + v_{sy} \frac{\Delta N}{\Delta y} + v_{sz} \frac{\Delta N}{\Delta z} \leq 1 \Rightarrow \Delta N \leq \frac{1}{\frac{v_{sx}}{\Delta x} + \frac{v_{sy}}{\Delta y} + \frac{v_{sz}}{\Delta z}} \quad (3.65)$$

olarak elde edilir. Üç boyutta adveksiyon-dispersiyon denklemi sonlu farklar çözümünde kararlılık koşulu için yapılan işlemlerde Denklem 3.42 ve Denklem 3.65 koşullarından sınırlayıcılığı yüksek olan tercih edilmektedir (Chakraborty ve Ghosh, 2013).

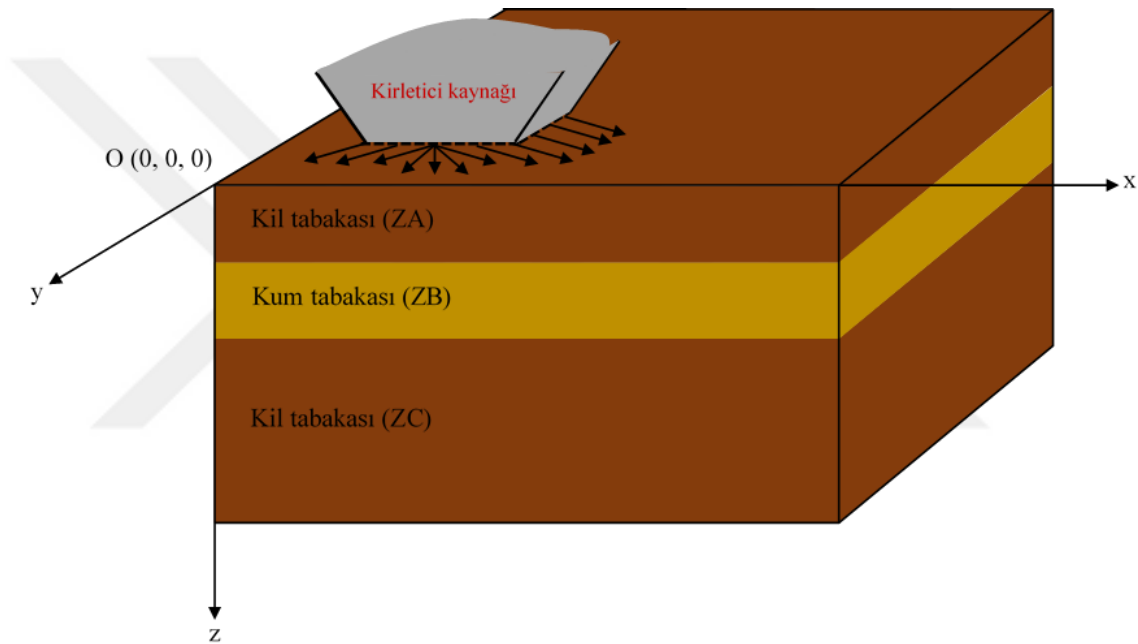
Açık yöntem adveksiyon-dispersiyon denklemi için kararlılık analizinin farklı yöntemleri de mevcuttur. Bunlardan bazıları, upwind açık yöntemi, ikinci mertbe upwind yöntemi ve dördüncü mertbe upwind yöntemidir.

Çizelge 3.1. Açık yöntem, adveksiyon-dispersiyon denklemi için bazı stabilite koşulları (Bilgin, 2015)

Yöntem	Stabilite koşulu
Von Neumann	$\Delta N \leq \frac{1}{2 \left(\frac{D_x}{\Delta x^2} + \frac{D_y}{\Delta y^2} + \frac{D_z}{\Delta z^2} \right)}$ veya $\Delta N \leq \frac{1}{\left(\frac{v_{sx}}{\Delta x} + \frac{v_{sy}}{\Delta y} + \frac{v_{sz}}{\Delta z} \right)}$
Upwind	$\Delta N \leq \frac{1}{2 \left(\frac{D_x}{\Delta x^2} + \frac{D_y}{\Delta y^2} + \frac{D_z}{\Delta z^2} \right) + \frac{v_{sx}}{\Delta x} + \frac{v_{sy}}{\Delta y} + \frac{v_{sz}}{\Delta z}}$
İkinci mertbe upwind yöntemi	$\Delta N \leq \frac{2}{\left(\frac{v_{sx}}{\Delta x} + \frac{v_{sy}}{\Delta y} + \frac{v_{sz}}{\Delta z} \right)} - 2 \left(\frac{D_x}{v_{sx}^2} + \frac{D_y}{v_{sy}^2} + \frac{D_z}{v_{sz}^2} \right)$
Dördüncü mertbe upwind yöntemi	$\Delta N \leq \frac{2}{2 \left(\frac{D_x}{\Delta x^2} + \frac{D_y}{\Delta y^2} + \frac{D_z}{\Delta z^2} \right) + \frac{v_{sx}}{\Delta x} + \frac{v_{sy}}{\Delta y} + \frac{v_{sz}}{\Delta z}}$

4. PROBLEMİN TANIMI VE SINIR KOŞULLARI

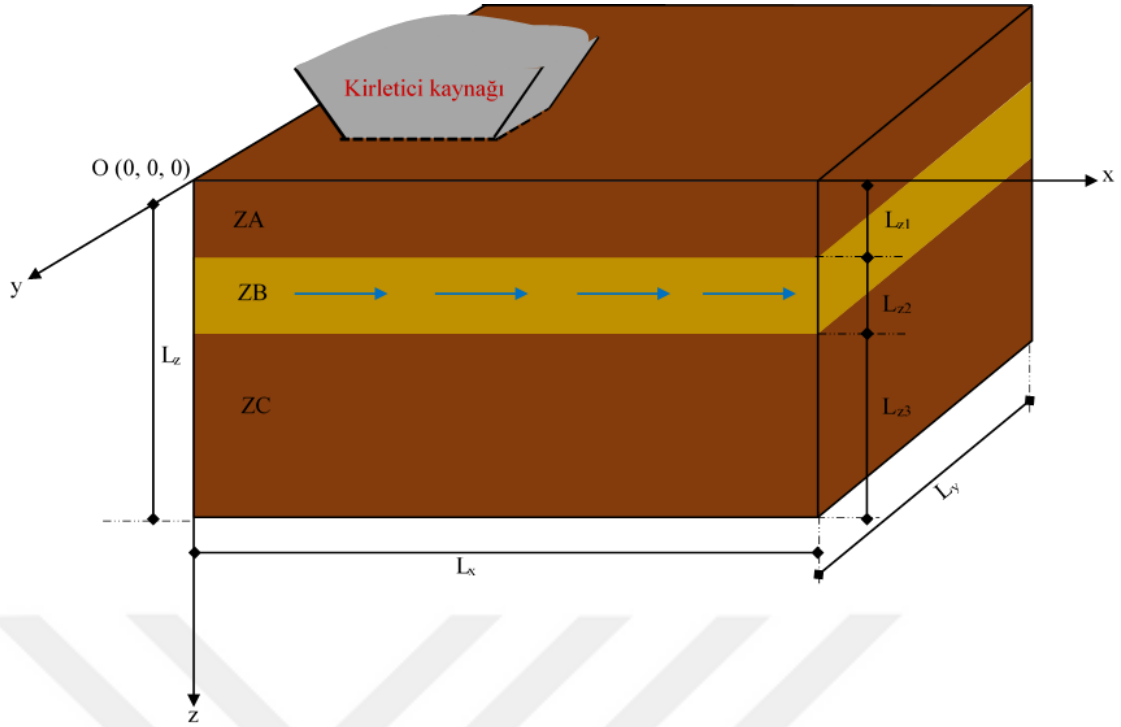
Bu bölümde incelenen problem tanımlanmış, problemin geometrisi ve problemin başlangıç ve sınır koşulları verilmiş, problemin çözümü için yapılan kabuller açıklanmıştır. Şekil 4.1’de incelenen kirlilik probleminin yapısı görülebilir. Dikdörtgenler prizması şeklinde bir zeminin içinde ilgili problem incelenecektir. İki kil tabakası arasında kum tabakası bulunan bir zemin üzerinde bir kirlenici kaynağı bulunmaktadır. Bu kirlenici kaynağı tabanından zemine kirlenici sızmaktadır. Kirlenici kaynağı tabanının hemen altında sırasıyla kil tabakası (ZA), kum tabakası (ZB) ve kil tabakası (ZC) bulunmaktadır (Şekil 4.1). Bu zemin tabakaları homojen, izotrop ve suya doygunudur.



Şekil 4.1. Kirlenici kaynağı ve tabanında bulunan zemin tabakaları

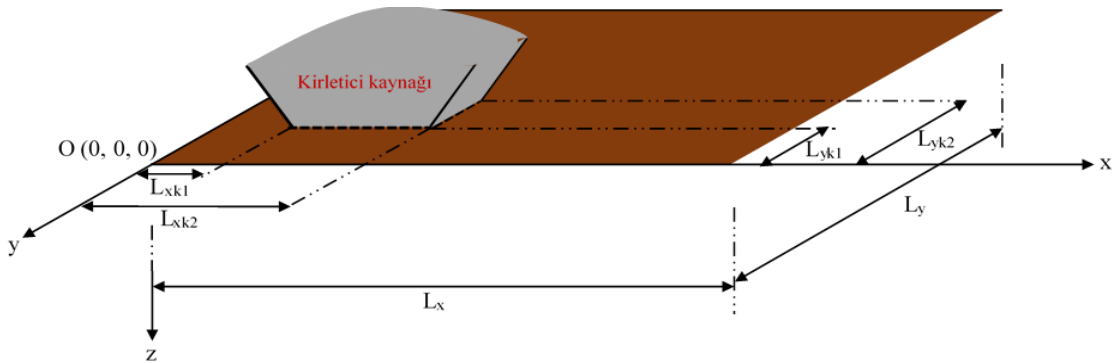
4.1 Problemin Boyutları Ve Yapılan Kabuller

Şekil 4.1’de ZA, ZB ve ZC zemin tabakalarından ZA ve ZC zemin tabakalarında yeraltı suyu durgunken, ZB zemin tabakasında ($0 \leq x \leq L_x$, $-L_y \leq y \leq 0$, $L_{z1} < z < (L_{z1} + L_{z2})$) sadece x doğrultusunda akış mevcuttur (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Kirlenmiş kaynağı ve zemin tabakalarında hareketli yeraltı suyunun bulunduğu bölge

Kirlenmiş kaynağı (katı atık sahası, petrol sızımları vs.) tabanının konumu, $z = 0$ yüzeyinde $L_{xk1} \leq x \leq L_{xk2}$ ve $-L_{yk2} \leq x \leq -L_{yk1}$, aralıklarının sınırladığı bölgededir. Kirlenmiş sahasından sızan kirlenmişler hidrolik yük farkı oluşturmamaktadır. Bu bölgede t_p süre (yıl) boyunca kirlenmiş konsantrasyonu sabit ve C_k 'dir (şekil 4.3).



Şekil 4.3. Kirlenmiş kaynağı tabanının zemin üzerindeki konumu

Bu çalışmada Şekil 4.1'deki zeminde kirlilik taşınmasının analizi Kartezyen koordinatlarda 3 boyutta ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca $x = 0$ ve $x = L_x$ yüzeylerinin ($-L_y \leq y \leq 0$ ve $0 \leq z \leq L_z$), $y = -L_y$ ve $y = 0$ yüzeylerinin ($0 \leq x \leq L_x$ ve $0 \leq z \leq L_z$) ve $z = 0$ ve $z = L_z$ yüzeylerinin ($0 \leq x \leq L_x$ ve $-L_y \leq y \leq 0$) sınırladığı zemin yapısında alt bölüm 4.2'de belirtilen sınır koşulları çerçevesinde kirlilik taşınımını incelenmiştir. Analizler,

5 yıldan ($T = 5$ yıl) başlayarak 50 yıla ($T = 50$ yıl) kadar, 5'er yıl aralıklarla her bir zaman dilimi için ($T = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ ve 50 yılları) gerçekleştirilmiştir.

ZB zemin tabakasında ($0 \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq 0$ ve $L_{z1} < z < (L_{z1} + L_{z2})$) x, y ve z doğrultusunda yeraltı suyu sızıntı hızları sırasıyla v_{xs2}, v_{ys2} ve v_{zs2} 'dir. Bu bölgede x, y ve z doğrultusunda dispersiyon katsayıları ise sırasıyla, D_{x2}, D_{y2} ve D_{z2} 'dir. ZA ($0 \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq 0$ ve $0 \leq z < L_{z1}$) ve ZC ($0 \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq 0$ ve $(L_{z1} + L_{z2}) < z \leq L_z$) tabakalarında ise yeraltı suyu durgundur. ZA ve ZC zemin tabakalarında x, y ve z doğrultusunda sızıntı hızları sırasıyla v_{xs13}, v_{ys13} ve v_{zs13} olmak üzere sıfırdır. ZA ve ZC zemin tabakalarında dispersiyon katsayıları difüzyon katsayılarına eşit olup x, y ve z doğrultusunda sırasıyla D_{x13}, D_{y13} ve D_{z13} 'tür.

4.2 Başlangıç Ve Sınır Koşulları

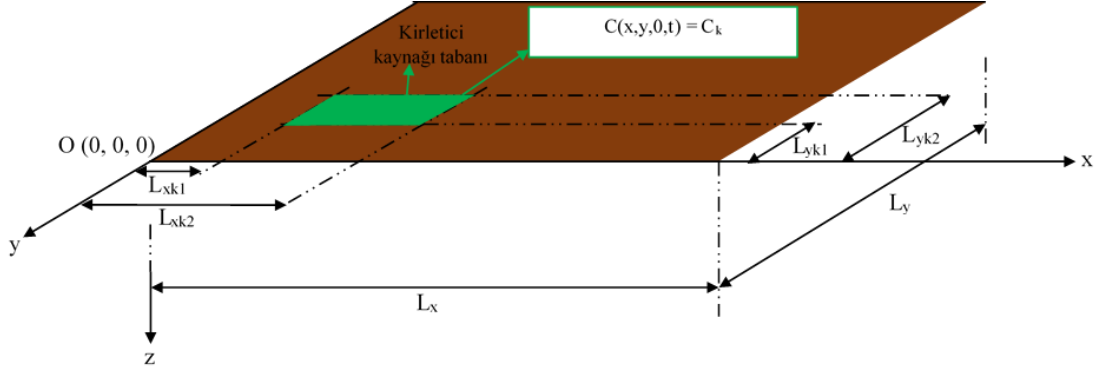
Bu bölümde Şekil 4.2'de verilen zeminin $x = 0$ ve $x = L_x$ yüzeylerinde, $-L_y \leq y \leq 0$ ve $0 \leq z \leq L_z$ aralıkların, $y = -L_y$ ve $y = 0$ yüzeylerinde, $0 \leq x \leq L_x$ ve $0 \leq z \leq L_z$ aralıklarının ve $z = 0$ ve $z = L_z$ yüzeylerinde, $0 \leq x \leq L_x$ ve $-L_y \leq y \leq 0$ aralıklarının sınırladığı bölgelerin sınır koşulları tanımlanmaktadır.

4.2.1 Kirletici kaynağı İçin Sınır Koşulları

Şekil 4.3'de boyutları verilen kirletici kaynağının tabanına ait başlangıç ve sınır koşulları Şekil 4.4'te verilmekte ve $L_{xk1} \leq x \leq L_{xk2}, -L_{yk2} \leq y \leq -L_{yk1}$ ve $z = 0$ için sınır koşulu;

$$C(x, y, 0, t) = \begin{cases} C_k, & 0 \leq t \leq t_p \\ 0, & t_p < t \leq T \end{cases} \quad (4.1)$$

olarak tanımlanmıştır. $0 \leq t \leq t_p$ olmak üzere herhangi bir t anında kirletici konsantrasyonu sabit ve C_k 'dir. Bu durum kirletici kaynağın alt yüzeyinin yani Şekil 4.4'te yeşil olarak gösterilen tabanının Dirichlet sınır koşulu olduğu anlamına gelir (Denklem 4.1).



Şekil 4.4. Kirlenici kaynağı tabanının t anındaki sınır şartı

4.2.2 Zemin İçin Sınır Koşulları

Şekil 4.2’de verilen zeminin $x = 0$, $x = L_x$, $y = -L_y$, $y = 0$, $z = 0$ ve $z = L_z$ doğrularının sınırladığı yüzey Şekil 4.5’te gösterilmekte olup sınır koşulları;

$$0 \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } 0 \leq z \leq L_z \text{ bölgesi için, } C(x, y, z, 0) = 0 \quad (4.3)$$

$$x = 0, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } 0 \leq z < L_{z1} \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

$$x = 0, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } L_{z1} \leq z \leq L_{z1} + L_{z2} \text{ bölgesi için, } C(x, y, z, t) = 0 \quad (4.5)$$

$$x = 0, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } L_{z1} + L_{z2} < z \leq L_z \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

$$x = L_x, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } 0 \leq z < L_{z1} \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

$$x = L_x, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } L_{z1} \leq z \leq L_{z1} + L_{z2} \text{ bölgesi için, } C(x, y, z, t) = 0 \quad (4.8)$$

$$x = L_x, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } L_{z1} + L_{z2} < z \leq L_z \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

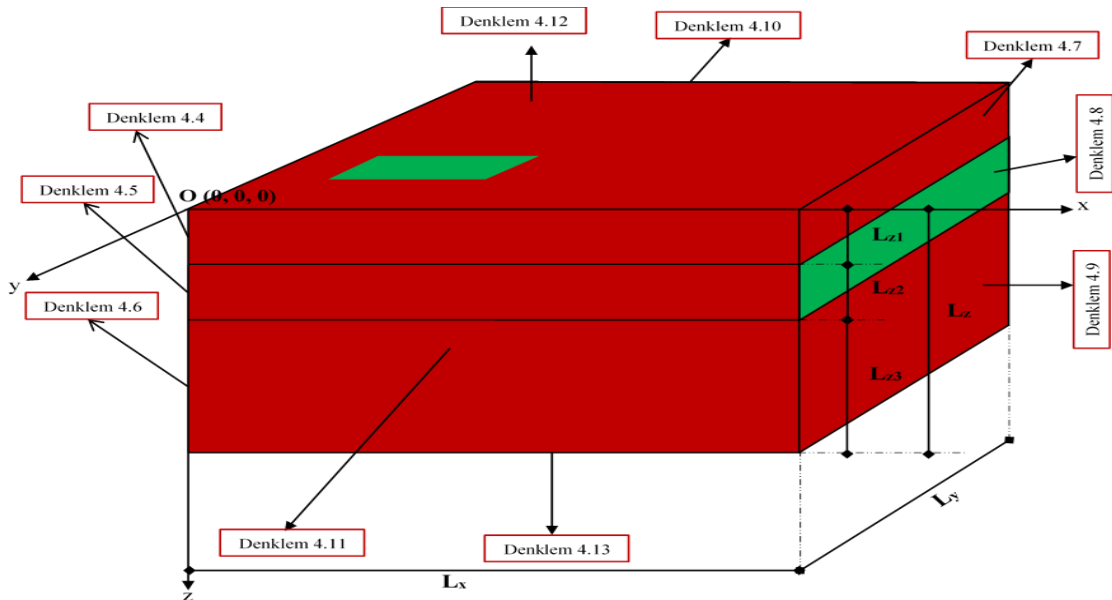
$$0 \leq x \leq L_x, y = -L_y \text{ ve } 0 \leq z \leq L_z \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} = 0 \quad (4.10)$$

$$0 \leq x \leq L_x, y = 0 \text{ ve } 0 \leq z \leq L_z \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} = 0 \quad (4.11)$$

$$x < L_{xk1}, x > L_{xk2}, y > -L_{yk1}, y < -L_{yk2} \text{ ve } z = 0 \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

$$0 \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq 0 \text{ ve } z = L_z \text{ bölgesi için, } \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

olarak tanımlanmıştır. $t = 0$ anında yani başlangıçta zemin içinde kirletici yoktur (Denklem 4.3). Başlangıçta veya herhangi bir t anında $x = 0$ ve $x = L_x$ 'te, ZA ve ZC zemin tabakalarının y - z dış yüzeylerinde kirletici konsantrasyon fonksiyonunun türevi sifira eşittir (Denklem 4.4, Denklem 4.6, Denklem 4.7 ve Denklem 4.9). Bu durum yüzeylerin x doğrultusunda geçirimsiz olduğu anlamını taşımaktadır, yani Neumann sınır şartıdır. Başlangıçta veya herhangi bir t anında $x = 0$ ve $x = L_x$ 'te, ZB zemin tabakasının y - z dış yüzeylerinde kirletici konsantrasyon fonksiyonunun değeri sifira eşittir (Denklem 4.5 ve Denklem 4.8). Bu durum yüzeylerin x doğrultusunda geçirimli olduğu anlamını taşımaktadır, yani Dirichlet sınır şartıdır. Başlangıç veya herhangi bir t anında $y = -L_y$ 'de ve $y = 0$ 'da x - z yüzeylerinde kirletici konsantrasyon fonksiyonunun türevi sifira eşittir (Denklem 4.10 ve Denklem 4.11). Bu durum incelenen zeminin y doğrultusunda geçirimsiz olduğu anlamını taşımaktadır, yani Neumann sınır şartıdır. Başlangıç veya herhangi bir t anında $z=0$ 'da kirletici kaynağı taban yüzeyi olarak tanımlanan yüzeyin dışında kalan x - y yüzeyinde ve $z = L_z$ 'deki x - y yüzeyinde kirletici konsantrasyon fonksiyonunun türevi sifira eşittir (Denklem 4.12 ve Denklem 4.13). Bu durum yüzeyin z doğrultusunda geçirimsiz olduğu anlamını taşımaktadır, yani Neumann sınır şartıdır.



Şekil 4.5. Zeminde herhangi bir t anında zemin yüzeylerinin sınır şartı

5. PROBLEMİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Alt bölüm 4.1'de boyutları ve fiziksel özellikleri detaylı olarak tanımlanan problem, alt bölüm 4.2'de başlangıç ve sınır koşulları belirlenmiş olan bir senaryoyu içermektedir. Bu senaryoda, kirleticinin yayılımını incelemek için Şekil 4.2'de gösterilen zemin yapısı esas alınmıştır. Problemin çözümü için, her bir tabaka için adveksiyon-dispersiyon denklemi ayrı ayrı formüle edilmiştir. Sonlu farklar yöntemi, bu tür karmaşık problemleri sayısal olarak çözmek için etkili bir yöntem olup, her bir tabaka için oluşturulan denklemler, zamana bağlı değişimler ve sınır koşulları ile birlikte değerlendirilmiştir. Böylece, kirleticinin farklı zemin tabakaları arasındaki geçişleri ve yayılım mekanizmaları, adveksiyon ve dispersiyon süreçleri doğrultusunda modellenmiş ve çözümlenmiştir.

ZA ve ZC zemin tabakaları için alt bölüm 4.1'de tanımlanan dispersiyon katsayıları ve sızıntı hızlarıyla, adveksiyon-dispersiyon denklemini (Denklem 3.23) ilgili Matlab kodunda kullanmak üzere tamsayı indisli formu,

$$\begin{aligned} C(m, p, q, N + \Delta N) = & C(m, p, q, N) \\ + \Delta N D_{x13} \frac{C(m + 1, p, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m - 1, p, q, N)}{\Delta x^2} \\ + \Delta N D_{y13} \frac{C(m, p + 1, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p - 1, q, N)}{\Delta y^2} \\ + \Delta N D_{z13} \frac{C(m, p, q + 1, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p, q - 1, N)}{\Delta z^2} \\ - \Delta N v_{xs13} \frac{C(m + 1, p, q, N) - C(m - 1, p, q, N)}{2\Delta x} \\ - \Delta N v_{ys13} \frac{C(m, p + 1, q, N) - C(m, p - 1, q, N)}{2\Delta y} \\ - \Delta N v_{zs13} \frac{C(m, p, q + 1, N) - C(m, p, q - 1, N)}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (5.1)$$

olarak elde edilir. Burada m, p ve q sırasıyla x, y ve z doğrultusundaki konum indisleridir. N ayrık zaman değişkenidir.

ZB zemin tabakası için alt bölüm 4.1'de tanımlanan dispersiyon katsayıları ve sızıntı hızlarıyla adveksiyon-dispersiyon denklemini (Denklem 3.23) ilgili Matlab kodunda kullanmak üzere tamsayı indisli formu,

$$\begin{aligned}
& C(m, p, q, N + \Delta N) = C(m, p, q, N) \\
& + \Delta N D_{x^2} \frac{C(m + 1, p, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m - 1, p, q, N)}{\Delta x^2} \\
& + \Delta N D_{y^2} \frac{C(m, p + 1, q, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p - 1, q, N)}{\Delta y^2} \\
& + \Delta N D_{z^2} \frac{C(m, p, q + 1, N) - 2C(m, p, q, N) + C(m, p, q - 1, N)}{\Delta z^2} \\
& - \Delta N v_{xs^2} \frac{C(m + 1, p, q, N) - C(m - 1, p, q, N)}{2\Delta x} \\
& - \Delta N v_{ys^2} \frac{C(m, p + 1, q, N) - C(m, p - 1, q, N)}{2\Delta y} \\
& - \Delta N v_{zs^2} \frac{C(m, p, q + 1, N) - C(m, p, q - 1, N)}{2\Delta z} \tag{5.2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şekil 4.2’de boyutları verilen zeminin ve Şekil 4.3’te konumu belirtilen kirlenici kaynağının, kirlilik analizi çözümünde kullanılan parametrelerin sayısal değerleri Çizelge 5.1’de verilmiştir.

Çizelge 5. 1. Şekil 4.2’de ve Şekil 4.3’te bulunan zeminin boyutları, kirlenici kaynağı tabanının zemin üzerindeki konumu ve kirlenici konsantrasyonu değerleri

Simge	Değeri	Birim
L_x	2000.0	Metre
L_y	2000.0	Metre
L_z	40.0	Metre
L_{z1}	3.0	Metre
L_{z2}	7.0	Metre
L_{z3}	30.0	Metre
L_{xk1}	200.0	Metre
L_{xk2}	240.0	Metre
L_{yk1}	200.0	Metre
L_{yk2}	240.0	Metre
C_k	1000.0	Gram/metre küp

Şekil 4.2’de boyutları gösterilen ve Denklem 5.1 ve Denklem 5.2’de tamsayı indisli formu türetilen ZA, ZB ve ZC zemin tabakalarında kirlilik analizinin çözümü için kullanılan

parametrelerin sayısal değerleri Çizelge 5.2’de verilmektedir. ZA ve ZC zemin tabakalarında yeraltı suyu durgun olduğu için bu tabakalarda sızıntı hızlarının değerleri sıfıra eşittir. Bu durumda dispersiyon katsayıları difüzyon katsayılarına eşit olacaktır. Dolayısıyla kirlilik, difüzyon terimlerinin etkisiyle yayılma şeklinde gerçekleşecektir. ZB zemin tabakasında ise sadece x doğrultusunda akış mevcuttur. Bu durum kirliliğin hem yayılma hem de taşınma şeklinde gerçekleşeceği anlamını taşımaktadır.

Çizelge 5. 2. Şekil 4.2’de Bulunan ZA, ZB ve ZC zemin tabakalarının boyutları ve Alt bölüm 4.1’de tanımlanan parametrelerin değerleri (Chakraborty ve Ghosh, 2013)

Simge	Değeri	Birim
$V_{xs13}, V_{ys13}, V_{zs13}$	0.0, 0.0, 0.0	Metre/gün
$D_{x13}, D_{y13}, D_{z13}$	0.001	Metre ² /gün
$V_{xs2}, V_{ys2}, V_{zs2}$	0.02, 0, 0	Metre/gün
D_{x2}, D_{y2}, D_{z2}	0.017, 0.005, 0.001	Metre ² /gün

Çizelge 5.3’te Denklem 5.1, Denklem 5.2 ve Denklem 5.3 için belirlenen zaman adımı (ΔN_1), Çizelge 3.1’deki yöntemlerle hesaplanmış ve sınırlayıcılığı en yüksek değer seçilmiştir. Daha sonra değerleri 0 ile 1 arasında değişen bir katsayı (K_k) ile seçilen zaman adımı değeri (ΔN_1) çarpılarak, ΔN_1 ’den daha küçük bir zaman adımı (ΔN) bu denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Ayrıca bu denklemlerde kullanılan x, y ve z uzayındaki adım büyüklüklerinin ($\Delta x, \Delta y$ ve Δz) sayısal değerleri de Çizelge 5.3’te verilmiştir.

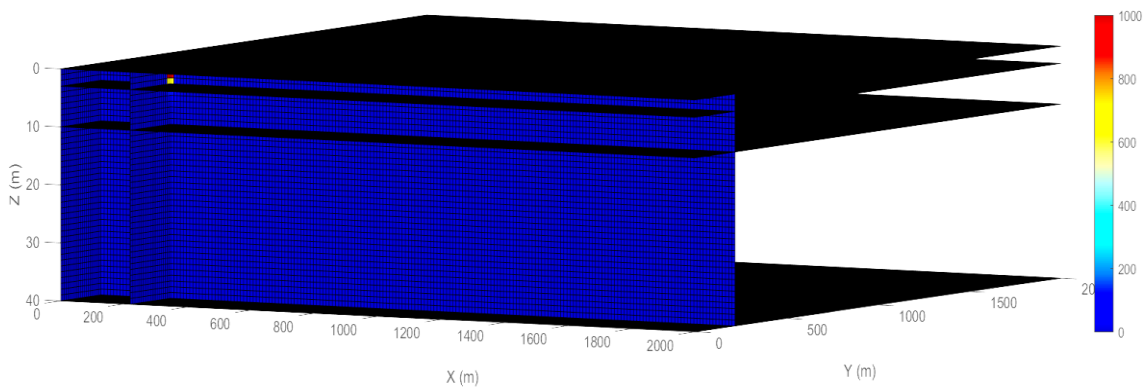
Çizelge 5. 3. Denklem 5.2, Denklem 5.3 ve Denklem 5.4’te kullanılan zaman adımı ve x, y, z uzayındaki adım büyüklüklerinin sayısal değerleri

Simge	Değeri	Birim
ΔN_1	225.225	gün
K_k	0.5	-
ΔN	112.6125	gün
Δx	10	Metre
Δy	10	Metre
Δz	1	Metre

6. PROBLEMİN SONLU FARKLAR SİMÜLASYONU

Bu çalışmada, alt bölüm 4.1’de boyutları ve alt bölüm 4.2’de sınır koşulları belirtilen problem, Bölüm 5’teki gibi sonlu farklar yöntemi uygulanarak çözülmüştür. Çözüm sürecinde, Çizelge 5.1, Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3’te verilen parametreler kullanılarak yazılan Matlab kodları çalıştırılmış ve elde edilen sonuçlar analiz edilmiştir. Kirletici kaynağı tabanında t_p süresince (yıl) kirletici konsantrasyonu C_k ’dır. Kirletici kaynağından kirleticinin zeminde yayılması ve taşınması T süresince (yıl) incelenmektedir. Yani gerekli simülasyon T süresince yapılmıştır. Şekil 6.1’den Şekil 6.10’a kadar olan görsellerde, farklı simülasyon zamanları (T) ve $t_p=10$ yıl süresi için yapılan çözümler neticesinde kirletici konsantrasyonlarının değişimi gösterilmektedir.

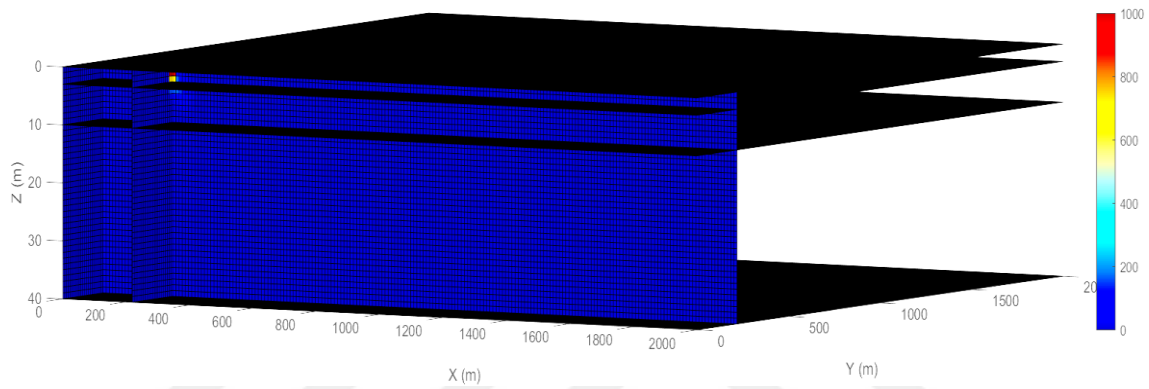
T=5 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirletici konsantrasyonunun en yüksek değeri $949,76 \text{ g/m}^3$ olarak bulunmuştur. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=220$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirletici konsantrasyonu değeri ise $7,53320 \times 10^{-43} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton kütesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=200$, $y=-30$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirleticilerin yayılımı, incelenen süre boyunca ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında gerçekleşmiştir. Ayrıca, bu zaman zarfında kirleticilerin Şekil 6.1’de görüldüğü üzere, ZA zemin tabakasının altında bulunan ZB zemin tabakasına ulaştığı da görülmektedir.



Şekil 6.1. T=5 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

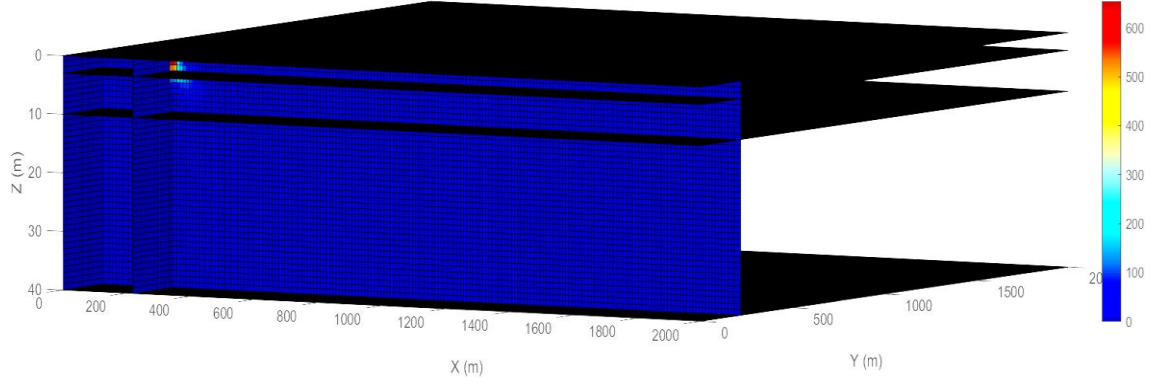
T=10 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirletici konsantrasyonunun en yüksek değeri $959,767 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum

konsantrasyonun $x=220$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirletici konsantrasyonu değeri ise $5,03932 \times 10^{-95}$ g/m³ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m³ başına bir proton kütesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=200$, $y=-550$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirleticilerin yayılımı, incelenen süre boyunca ZA zemin tabakasının x, y ve z doğrultularında devam etmiştir. Ayrıca, bu zaman zarfında kirleticilerin Şekil 6.2’de görüldüğü üzere, ZB zemin tabakasında yayılması incelendiğinde, özellikle x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularındaki yayılmaya göre daha fazla olduğu görülmüştür.



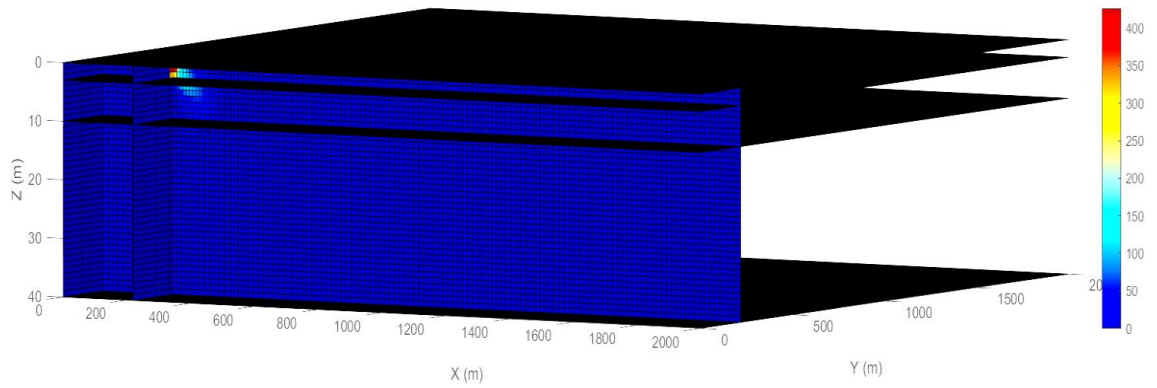
Şekil 6.2. T=10 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

T=15 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirletici konsantrasyonunun en büyük değeri 637,5 g/m³ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=220$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirletici konsantrasyonu değeri ise $3,37105 \times 10^{-142}$ g/m³ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m³ başına bir proton kütesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=200$, $y=-710$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Ayrıca, bu zaman zarfında kirleticilerin Şekil 6.3’te görüldüğü üzere, ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında devam etmiştir. Kirleticilerin ZB zemin tabakasında yayılması incelendiğinde, özellikle x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularındaki yayılmaya göre daha fazla olduğu görülmüştür.



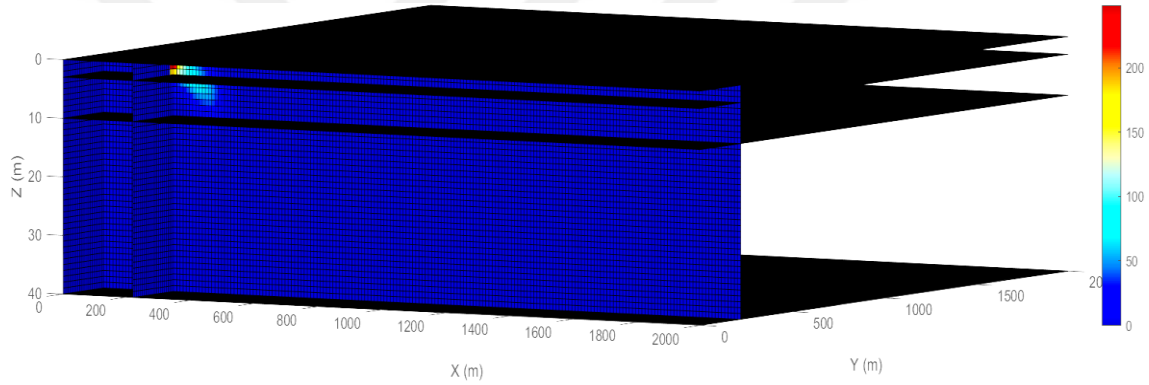
Şekil 6.3. T=15 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

T=20 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirlenici konsantrasyonunun en büyük değeri $412,86 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=220$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirlenici konsantrasyonu değeri ise $2,25506 \times 10^{-189} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton kütesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=200$, $y=-870$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirlenicilerin yayılımı, incelenen süre boyunca ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında devam etmiş olup, x doğrultusundaki yayılmasının y ve z doğrultularındaki yayılmasından daha fazla olduğu gözlemlenmiştir. Kirlenicilerin ZB zemin tabakasında yayılması incelendiğinde, özellikle x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularındaki yayılmaya göre daha fazla olduğu görülmüştür. Ayrıca, bu zaman zarfında kirlenicilerin Şekil 6.4'te görüldüğü üzere, tüm zeminde x doğrultusundaki yayılma hızının, y ve z doğrultularındaki yayılma hızlarından daha fazla olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 6.4. T=20 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

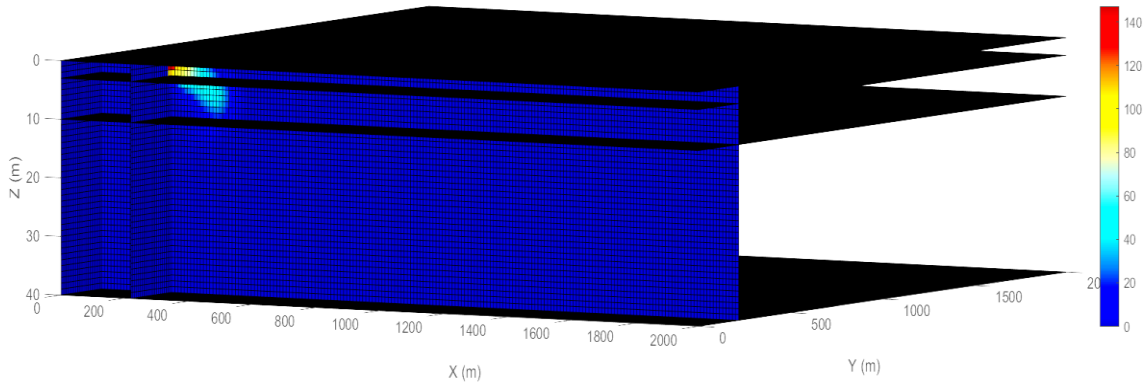
T=25 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirlenici konsantrasyonunun en büyük değeri $240,1 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=220$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirlenici konsantrasyonu değeri ise $1,69878 \times 10^{-239} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton külesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=200$, $y=-1040$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirlenicilerin yayılımı, gözlem süresi boyunca ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında devam etmiştir. Bu tabakada x doğrultusundaki yayılmanın, y doğrultusuna kıyasla daha belirgin bir biçimde arttığı görülmektedir. Şekil 6.5'te görüldüğü üzere özellikle, ZB zemin tabakasının üst sınırından itibaren x doğrultusundaki yayılmanın diğer doğrultulara göre daha fazla olduğu gözlenmiştir.



Şekil 6.5. T=25 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

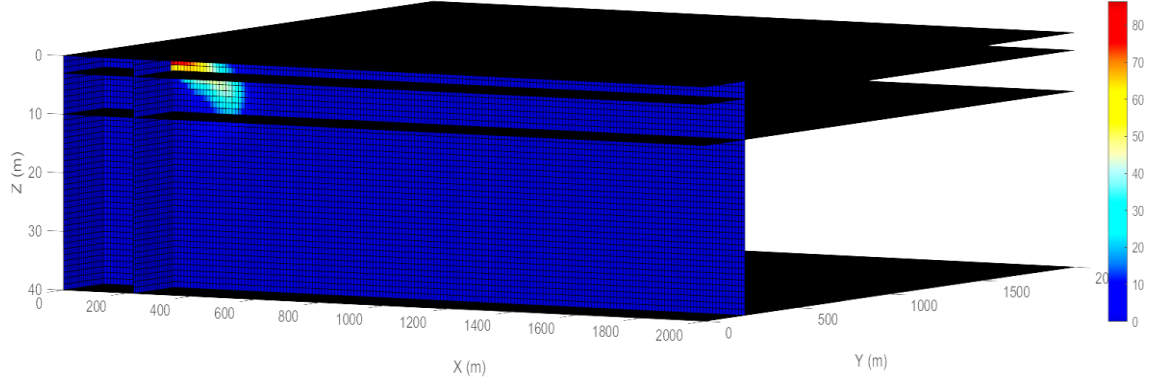
T=30 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirlenici konsantrasyonunun en büyük değeri $142,16 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=220$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirlenici konsantrasyonu değeri ise $1,13640 \times 10^{-286} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton külesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=200$, $y=-1200$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirlenicilerin yayılımı, bu zaman zarfında ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında devam etmiştir. x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularına kıyasla daha belirgin bir biçimde arttığı görülmektedir. Şekil 6.6'da görüldüğü üzere özellikle, ZB zemin tabakasının üst sınırından itibaren x doğrultusundaki yayılmanın diğer doğrultulara göre

daha fazla olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, bu zaman zarfında kirleticilerin, ZB zemin tabakasının altında bulunan ZC zemin tabakasına ulaştığı da görülmektedir.



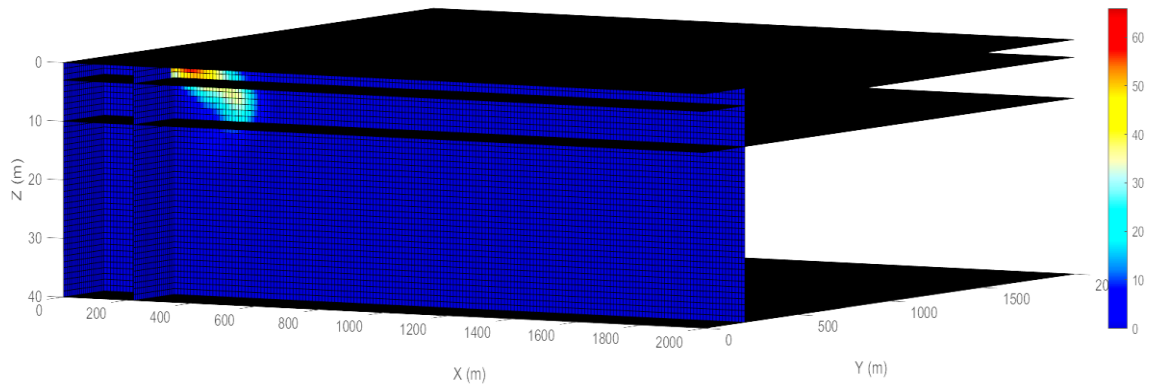
Şekil 6.6. T=30 yıl ve $t_p=10$ yıl için kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

T=35 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirletici konsantrasyonunun en büyük değeri $83,44 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=220$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirletici konsantrasyonu değeri ise $5,58294 \times 10^{-322} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton kütlelerinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=120$, $y=-1280$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirleticilerin yayılımı, bu zaman zarfında ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında devam etmiştir. x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularına kıyasla daha belirgin bir biçimde arttığı görülmektedir. Özellikle, ZB zemin tabakasının üst sınırından itibaren x doğrultusundaki yayılmanın diğer doğrultulara göre daha fazla olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, bu zaman zarfında kirleticilerin Şekil 6.7’de görüldüğü üzere, ZC zemin tabakasında ki yayılmasının ZB zemin tabakasındaki kirletici yayılmasıyla karşılaştırıldığında ZC zemin tabakasında x doğrultusunda ki yayılmanın daha yavaş olduğu görülmektedir.



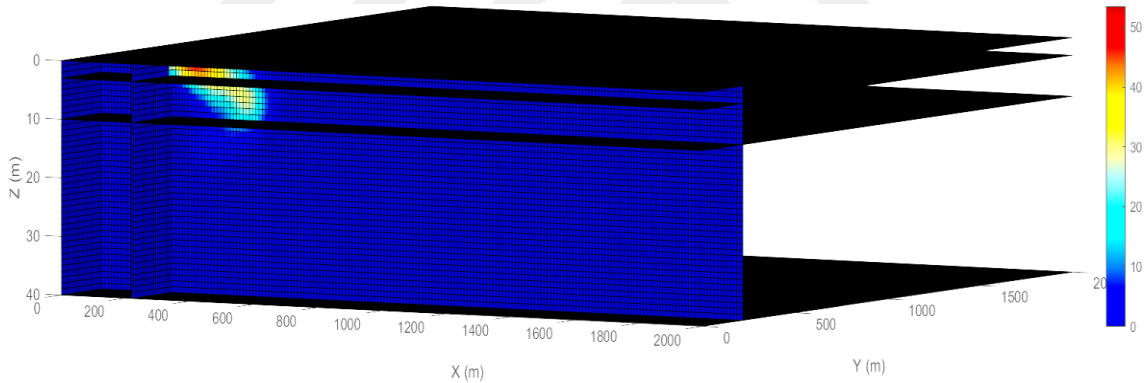
Şekil 6.7. T=35 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

T=40 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirlenici konsantrasyonunun en büyük değeri $64,9 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=270$, $y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirlenici konsantrasyonu değeri ise $6,45608 \times 10^{-297} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton kütesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=20$, $y=-1320$ ve $z=3$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirlenicilerin yayılımı, bu zaman zarfında ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında devam etmiştir. x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularına kıyasla daha belirgin bir biçimde arttığı görülmektedir. Şekil 6.8’de görüldüğü üzere, özellikle, ZB zemin tabakasının üst sınırından itibaren x doğrultusundaki yayılmanın diğer doğrultulara göre daha fazla olduğu gözlenmiştir. Ayrıca ZC zemin tabakasında ki kirlenici yayılmasının ZB zemin tabakasındaki kirlenici yayılmasıyla karşılaştırıldığında ZC zemin tabakasında x doğrultusunda ki yayılmanın daha yavaş olduğu görülmektedir.



Şekil 6.8. T=40 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

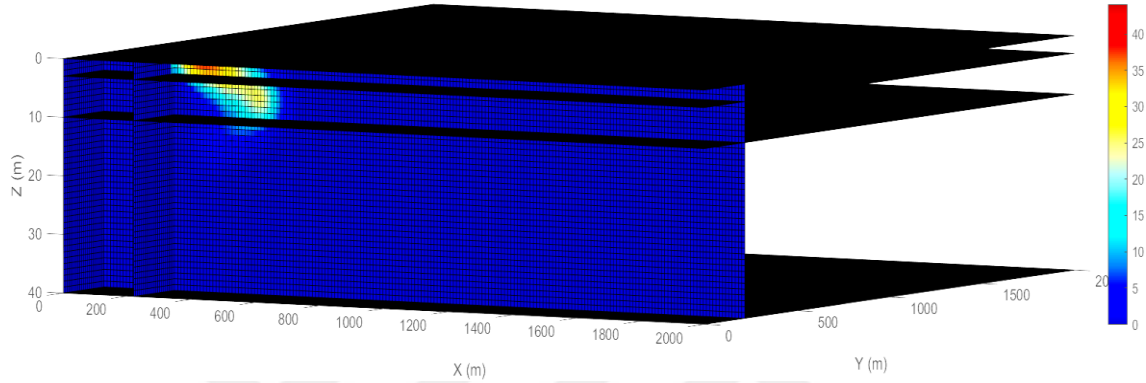
T=45 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirletici konsantrasyonunun en büyük değeri $52,72 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=290, y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirletici konsantrasyonu değeri ise $5,58294 \times 10^{-322} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton külesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=70, y=-1500$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirleticilerin yayılımı, bu zaman zarfında ZA zemin tabakasında x, y ve z doğrultularında devam etmiştir. x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularına kıyasla daha belirgin bir biçimde arttığı görülmektedir. Özellikle, ZB zemin tabakasının üst sınırından itibaren x doğrultusundaki yayılmanın diğer doğrultulara göre daha fazla olduğu gözlenmiştir. ZB zemin tabakasındaki bu durum tüm zeminde kirletici yayılmasının x doğrultusunda artmasına sebep olmaktadır. Ayrıca bu zaman zarfında kirleticilerin Şekil 6.9'da görüldüğü üzere, ZC zemin tabakasında ki yayılmasının ZB zemin tabakasındaki kirletici yayılmasıyla karşılaştırıldığında ZC zemin tabakasında x doğrultusunda ki yayılmanın daha yavaş olduğu görülmektedir.



Şekil 6.9. T=45 yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

T=50 yıl ve $t_p=10$ yıl için yapılan çözümler neticesinde, kirletici konsantrasyonunun en büyük değeri $43,53 \text{ g/m}^3$ olarak tespit edilmiştir. İncelenen bölgede maksimum konsantrasyonun $x=320, y=-210$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. İncelenen bölgedeki en düşük kirletici konsantrasyonu değeri ise $5,58294 \times 10^{-322} \text{ g/m}^3$ olarak saptanmıştır (Bu değer sıfırdan farklı olduğu için verilmiştir. Bu m^3 başına bir proton külesinden daha düşük olduğu için pratik olarak oraya yayılmadığı kabul edilebilir). Minimum konsantrasyonun $x=50, y=-1540$ ve $z=0$ koordinatları ile tanımlı noktada oluştuğu görülmüştür. Kirleticilerin yayılımı, bu zaman zarfında ZA zemin tabakasında x ve y doğrultularında devam

etmiştir. x doğrultusundaki yayılmanın, y ve z doğrultularına kıyasla daha belirgin bir biçimde arttığı görülmektedir. Özellikle, ZB zemin tabakasının üst sınırından itibaren x doğrultusundaki yayılmanın diğer doğrultulara göre daha fazla olduğu gözlenmiştir. ZB zemin tabakasındaki bu durum tüm zeminde kirletici yayılmasının x doğrultusunda artmasına sebep olmaktadır. Ayrıca bu zaman zarfında kirleticilerin Şekil 6.10'da görüldüğü üzere, ZC zemin tabakasında ki yayılmasının ZB zemin tabakasındaki kirletici yayılmasıyla karşılaştırıldığında ZC zemin tabakasında x doğrultusunda ki yayılmanın daha yavaş olduğu görülmektedir.



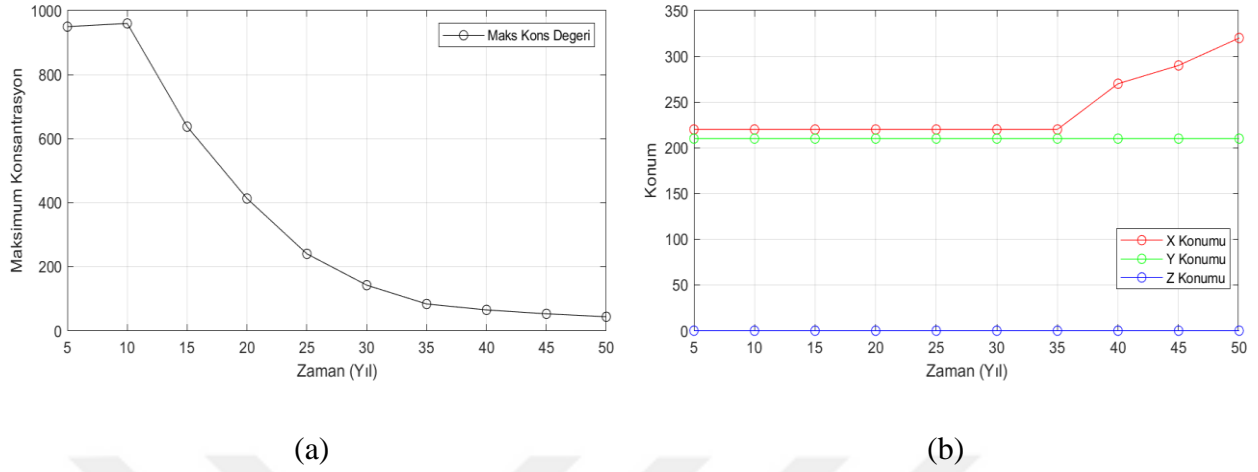
Şekil 6.10. $T=50$ yıl ve $t_p=10$ yıl için hesaplanan kirlilik konsantrasyonu analizinin 3 boyutlu renk haritası

Maksimum konsantrasyon değerleri ve konumlarının zamanla değişimini incelemek üzere yapılan simülasyonlarda 50 yıl boyunca 5 yıllık aralıklarla gerekli veriler toplanmıştır. Bu verilerin analizi için iki grafik kullanılmıştır. İlk grafik, maksimum konsantrasyon değerlerinin zaman içindeki değişimini göstermektedir. İkinci grafik ise maksimum konsantrasyonun x, y ve z konumlarında zamanla değişimini vermektedir (Şekil 6.11).

İlk 10 yılda ZA zemin tabakasında maksimum konsantrasyon değerlerinde artış gözlenmektedir. Bu artış, kirletici kaynağının bu zaman zarfında etkin olduğunu göstermektedir. Kirletici kaynağının etkisinin kalktığı andan itibaren (10. yıldan sonra), maksimum kirletici konsantrasyonu değeri yüksek bir eğimle eksponansiyel fonksiyonu andıran bir şekilde azalmaktadır. Daha sonra 40. yıldan itibaren maksimum konsantrasyonun sabit bir eğimle düşme eğilimine girmiştir. (Şekil 6.11. a).

Başlangıçta maksimum kirletici konsantrasyonun x doğrultusundaki konumu 220 metrede sabit kalmaktadır. Ancak 35. yıldan sonra kirletici kaynağından uzaklaşarak 50. yılda orijine göre 320 metre mesafede olduğu görülmektedir. Maksimum kirletici konsantrasyonun y doğrultusundaki konumu orijinden 210 metre mesafede sabit olup zamanla değişmediği

gözlemlenmektedir. z doğrultusunda ise konumunun değişmediği ve zemin yüzeyinde olduğu görülmektedir (Şekil 6.11. b).



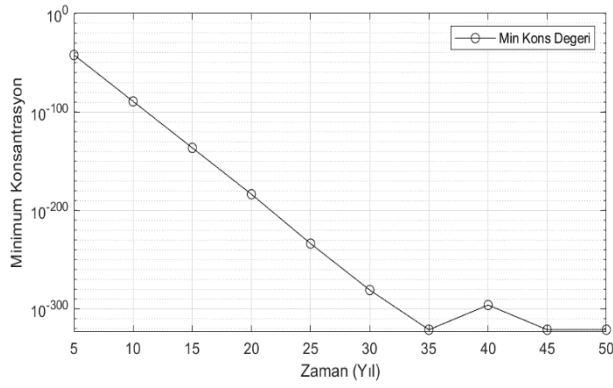
Şekil 6.11. Maksimum konsantrasyonun zamana ve konuma göre değişimi a) Maksimum konsantrasyon değerinin zamanla değişimi, b) Maksimum konsantrasyon konumunun zamanla değişimi

Minimum konsantrasyon değerleri ve konumların zamanla değişimini incelemek üzere 50 yıl boyunca 5 yıllık aralıklarla veriler toplanmıştır. Bu verilerin analizi için iki grafik kullanılmıştır. İlk grafik, minimum konsantrasyon değerlerinin zaman içindeki değişimini göstermektedir. İkinci grafik ise minimum konsantrasyonun x, y ve z konumlarında zamanla değişimi incelenmektedir (Şekil 6.12).

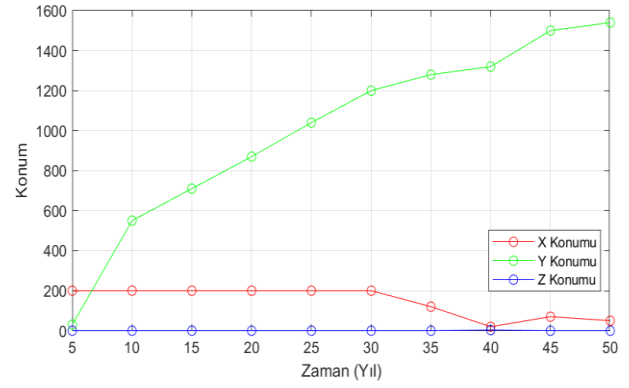
Minimum konsantrasyon değerlerinin zamanla değişimini gösteren grafik logaritmik bir ölçekle çizilmiştir çünkü konsantrasyon değerleri çok küçük seviyelerdedir (10^{-43} - 10^{-322}). Logaritmik ölçek kullanılması, bu küçük değerlerin daha net bir şekilde görselleştirilmesini sağlamaktadır. İlk yıllarda minimum konsantrasyon değerlerinde belirgin bir azalma gözlenmektedir ve bu azalma zamanla devam etmektedir. Ancak, yaklaşık 35. yıldan itibaren konsantrasyon değerleri stabilize olup çok düşük seviyelerde kalmaktadır (Şekil 6.12. a).

Başlangıçta minimum kirletici konsantrasyonun x doğrultusunda ki konumu 200 metrede sabit kalmaktadır. Ancak 35. yıldan itibaren hızlı bir şekilde orijine yaklaşarak 50. yılda 50 metre mesafede olduğu görülmektedir. Minimum kirletici konsantrasyonun y doğrultusundaki konumu başlangıçta 30 metredeyken, zamanla orijinden uzaklaşarak ve 50. yılda 1540 metreye ulaşmaktadır. Bu durum, kirleticilerin y doğrultusunda sürekli yayıldığı anlamı taşımaktadır. Minimum kirletici konsantrasyonun z doğrultusundaki konumu ise

genellikle orijin seviyesinde sabit kalmaktadır. Ancak, 35. yılda kısa bir süre için 3 metre orijinden uzaklaşmakta ve zamanla tekrar eski konumuna dönmektedir (Şekil 6.12. b).



(a)



(b)

Şekil 6.12. Minimum konsantrasyonun zamana ve konuma göre değişimi a) Minimum konsantrasyon değerinin zamanla değişimi, b) Minimum konsantrasyon konumunun zamanla değişimi

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, üç tabakalı bir zemin yapısında kirletici taşınımı ve yayılımının 3 boyutlu analizi yapılmıştır. Analiz, kartezyen koordinatlarda ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İncelenen problemde, kirletici kaynağından yayılan kirleticilerin, yeraltı suyunun durgun ve hareketli olduğu tabakalardan yayılma ve taşınma analizi yapılmıştır. Hareketli yeraltı suyunun bulunduğu zemin ortamının sınırları için Dirichlet sınır şartı kullanılırken durgun yeraltı suyunun bulunduğu zemin tabakalarının sınırlarında Neumann sınır şartı kullanılmıştır. Çalışmada belirli zaman aralıklarında (t) ve sabit kirletici giriş zamanı ($t_p = 10$ yıl) için kirletici konsantrasyonunun değişimi analiz edilmiştir (Şekil 6.1- 6.10).

Şekil 6.11 ve Şekil 6.12’de her bir zaman diliminde, zemin içinde hesaplanan maksimum kirletici konsantrasyonunun konumunun ve değerinin zamana bağlı olarak değişimi incelenmiştir. İlk 10 yılda maksimum konsantrasyon değerlerinde artış gözlenmiş, bu durum kirletici kaynağının etkin olduğunu göstermiştir. Kaynağın etkisi kalktıktan sonra (10. yıldan itibaren) maksimum konsantrasyon değerleri hızlı bir şekilde azalmış ve 40. yıldan itibaren bu azalma yavaşlayarak stabil olma eğilimine girmiştir. Başlangıçta maksimum konsantrasyonun x doğrultusundaki konumu 220 metre olarak sabit kalmış, ancak 35. yıldan sonra kirletici kaynağından uzaklaşmaya başlamış, 50. yılda kaynağın mesafesi 320 metreye ulaşmıştır. Maksimum konsantrasyonun y doğrultusundaki konumu 210 metre mesafede sabit kalırken, z doğrultusunda zemin yüzeyinde olduğu gözlemlenmiştir.

Zemin içinde minimum kirletici konsantrasyonunun ve konumunun zamana bağlı olarak değişimi de analiz edilmiştir. Minimum konsantrasyon değerleri logaritmik ölçekle gösterilmiş ve ilk yıllarda belirgin bir azalma gözlenmiştir. Yaklaşık 35. yıldan itibaren konsantrasyon değerleri stabilize olmuş ve çok düşük seviyelerde kalmıştır. Minimum konsantrasyonun x doğrultusundaki konumu başlangıçta 200 metre olarak sabit kalmış, ancak 35. yıldan itibaren hızlı bir şekilde orijine doğru yaklaşmaya başlamış ve 50. yılda 50 metreye ulaşmıştır. Minimum konsantrasyonun y doğrultusundaki konumu başlangıçta 30 metre iken, zamanla orijinden uzaklaşarak 50. yılda 1540 metreye ulaşmıştır. z doğrultusunda ise konumunun genellikle orijin seviyesinde sabit kaldığı, ancak 35. yılda kısa bir süre için 3 metre orijinden uzaklaştığı ve daha sonra tekrar eski konumuna döndüğü gözlemlenmiştir.

Bu bulgular, kirletici yayılımının zaman içinde nasıl değiştiğini ve bu yayılımın zemindeki farklı tabakalara ve doğrultulara göre nasıl farklılık gösterdiğini ortaya koymaktadır.

Durgun yeraltı suyunun bulunduğu kil (ZA) zemin tabakasında kirleticilerin çok önemli bir bölümü yeraltı suyunun akış doğrultusunda ve yönünde (x doğrultusunda) yayılarak taşındığı gözlemlenmiştir. y doğrultusunda da kirleticiler geniş bir alana yayılmış olmakla birlikte, kirletici miktarının x doğrultusuna göre çok daha düşük değerlerde olduğu görülmüştür. Z doğrultusunda ise kirleticiler yayılarak ilerlemiş, fakat hareketli yeraltı suyunun bulunduğu kum tabakasına (ZB) ulaştığında kirleticiler x doğrultusunda taşınarak ilerlemiştir. Bu nedenle z doğrultusundaki kirlilik yayılımı ve taşınımı x ve y doğrultularına göre yavaş olduğu görülmüştür. Özellikle, hareketli yeraltı suyunun bulunduğu kum tabakasında (ZB), kirleticilerin daha hızlı yayılarak taşındığı ve bu tabakanın geçirgenlik özelliklerinin kirletici taşınımında önemli bir rol oynadığı tespit edilmiştir.

Bu tez çalışması, belirli sınır koşulları ve varsayımlar altında gerçekleştirilmiştir. Gelecekte yapılacak çalışmalar için aşağıdaki öneriler dikkate alınabilir:

Daha gerçekçi sonuçlar elde edebilmek için heterojen ve anizotropik zemin koşulları dikkate alınarak geliştirilecek bir model, farklı zemin türlerinin ve yapılarının kirletici yayılımına etkilerini daha doğru bir şekilde yansıtacaktır.

Farklı kirletici türleri ve yayılma mekanizmaları (kimyasal reaksiyonlar, biyolojik bozunma) da kullanılan modele eklenebilir, bu da kirleticilerin farklı davranışlarının ve etkileşimlerinin modellenmesini sağlayacaktır.

Mevcut çalışmada kirletici taşınım ve yayılımının $T=50$ yıl ile sınırlandırılmasının sebebi dış yüzey sınır koşullarının etkisini ortadan kaldırmaktır. Kirletici yayılımının uzun vadeli etkilerini daha iyi anlayabilmek için uzun süreli simülasyonlar yapılabilir. Farklı iklim koşulları ve yeraltı suyu seviyelerindeki değişiklikler de dikkate alınarak model güncellenebilir.

Mevcut çalışmada varsayılan Dirichlet sınır koşulları yerine, Mükemmel Sönümleyici Sınır Koşulları (PML - Perfectly Matched Layer) kullanılabilir. PML kullanımı, yayılım sınırlarına ulaştığında kirleticilerin yapay yansımalarını azaltarak daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesini sağlayabilir. Bu yöntem, özellikle dalga yayılımı ve yayılım sınırlarının uzak etkilerinin modellenmesinde faydalıdır. Ayrıca sınır koşullarının çeşitlendirilmesi ve bu koşullar altında deneyler yapılarak verilerin toplanması, modelin daha doğru bir şekilde kalibre edilmesine olanak tanır.

Farklı kirletici kaynaklarının ve bunlara ait farklı sınır koşullarının modele eklenmesi, kirletici yayılımının daha karmaşık etkileşimlerini ortaya koyabilir.

Bu şekilde simülasyon kullanarak elde edilen sonuçlar, yeraltı suyu kirliliğine karşı önleyici tedbirlerin ve yönetim stratejilerinin geliştirilmesine katkıda bulunabilir. Örneğin kirletici kaynaklarının kontrolü ve izlenmesi için stratejiler geliştirilebilir. Farklı sınır koşulları altında geliştirilen yönetim stratejileri, farklı senaryolara karşı esneklik sağlayabilir ve daha etkin bir kirlilikle mücadele yönetimi sunabilir.

Bu çalışma, 3 tabakalı bir zeminde yeraltı suyu kirliliği ve kirletici taşınımı konusunda önemli bulgular sağlamış olup, gelecekte yapılacak benzeri çalışmalar için bir temel oluşturmuştur. İleriye dönük çalışmalarda, modelin daha da geliştirilmesi ve genişletilmesi ile daha kapsamlı ve detaylı sonuçlar elde edebilir. Sınır koşullarının ve varsayımların çeşitlendirilmesi, modelin gerçek dünya koşullarına daha uygun hale getirilmesine yardımcı olacaktır. Özellikle PML (Mükemmel Sönümleyici Sınır Koşulları) kullanımı, sınır etkilerinin daha doğru bir şekilde modellenmesine katkıda bulunabilir.

KAYNAKLAR

- Acar, Y. B., & Haider, L. (1990). Transport of low-concentration contaminants in saturated earthen barriers. *Journal of Geotechnical Engineering*, 116(7), 1031-1052.
- Benson, C. H., & Daniel, D. E. (1994a). Minimum thickness of compacted soil liners: I. Stochastic models. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(1), 129-152.
- Benson, C. H., & Daniel, D. E. (1994b). Minimum thickness of compacted soil liners: II. Analysis and case histories. *Journal of geotechnical engineering*, 120(1), 153-172.
- Benson, C. H., Daniel, D. E., & Boutwell, G. P. (1999). Field performance of compacted clay liners. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(5), 390-403.
- Bilgin, A. M. (2015). *Adveksiyon–Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Farklar İle Çözümü* (Yüksek Lisans Tezi), Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Chakraborty, R., & Ghosh, A. (2012). Analysis of 1D contaminant migration through saturated soil media underlying aquifer using FDM. *Journal of Hazardous, Toxic, and Radioactive Waste*, 16(3), 229-242.
- Chakraborty, R., & Ghosh, A. (2013). Three-dimensional analysis of contaminant migration through saturated homogeneous soil media using FDM. *International Journal of Geomechanics*, 13(6), 699-712.
- Domenico, P. A. (1987). An analytical model for multidimensional transport of a decaying contaminant species. *Journal of Hydrology*, 91(1-2), 49-58.
- Domenico, P. A., & Robbins, G. A. (1985). A new method of contaminant plume analysis. *Groundwater*, 23(4), 476-485.
- Finno, R. J., & Schubert, W. R. (1986). Clay liner compatibility in waste disposal practice. *Journal of Environmental Engineering*, 112(6), 1070-1084.
- Freeze, R. A., & Cherry, J. A. (1979). Ground water contamination. *Groundwater*. (383-456). Ontario. Canada: Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Guyonnet, D., & Neville, C. (2004). Dimensionless analysis of two analytical solutions for 3-D solute transport in groundwater. *Journal of Contaminant Hydrology*, 75(1-2), 141-153.
- Hirsch, C. (2007). Consistency, Stability and Error Analysis of Numerical Schemes. *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid Dynamics*, (2nd ed.) (283-333). Burlington: Elsevier.
- Hoffmann, K. A., & Chiang, S. T. (2000). Computational fluid dynamics volume I. *Engineering education system*, 113-152.
- Landage, A. B. (2014). Groundwater contaminant transport 1-D FDM approach. *Advanced in water society interactions proceedings of IC-WRS*.
- Ordu, S., Ordu, E., & Mutlu, R. (2022). Axisymmetric spilled pollutant analysis in steady-state using finite difference method. *Feb-Fresenius Environmental Bulletin*, 9587-9592.

- Quigley, R. M., Fernandez, F., & Rowe, R. K. (1988). Clayey barrier assessment for impoundment of domestic waste leachate (southern Ontario) including clay-leachate compatibility by hydraulic conductivity testing. *Canadian Geotechnical Journal*, 25(3), 574-581.
- Rowe, R. K. (1988). Eleventh Canadian Geotechnical Colloquium: Contaminant migration through groundwater—The role of modelling in the design of barriers. *Canadian Geotechnical Journal*, 25(4), 778-798.
- Rowe, R. K., & Booker, J. R. (1985). 1-D pollutant migration in soils of finite depth. *Journal of Geotechnical Engineering*, 111(4), 479-499.
- Rowe, R. K., & Booker, J. R. (1986). A finite layer technique for calculating three-dimensional pollutant migration in soil. *Geotechnique*, 36(2), 205-214.
- Tsai, W. F., Shen, C. Y., Fu, H. H., & Kou, C. C. (1999). Study of parallel computation for ground-water solute transport. *Journal of Hydrologic Engineering*, 4(1), 49-56.