

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVLI MATEMATİKSEL
MODELLERİN PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ**

Aslı ALKAN

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

TEMMUZ 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

**KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVLİ MATEMATİKSEL MODELLERİN
PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ**

Tez Yazarı
Aslı ALKAN

Danışman
Prof. Dr. Hasan BULUT

İkinci Danışman
Doç. Dr. Tolga AKTÜRK

TEMMUZ 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Başlığı:	Kesirli Mertebeden Türevli Matematiksel Modellerin Periyodik Dalga Çözümlerinin Analizi
Yazarı:	Ash ALKAN
İlk Teslim Tarihi:	13.05.2024
Savunma Tarihi:	05.07.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Hasan BULUT Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	İmza Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Esin İLHAN Ahi Evran Üniversitesi, Mimarlık ve Mühendislik Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ Harran Üniversitesi, Eğitim Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Reşat YILMAZER Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Münevver TUZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Kesirli Mertebeden Türevli Matematiksel Modellerin Periyodik Dalga Çözümlerinin Analizi” Başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

05.07.2024

Ash ALKAN





Anneme...

ÖNSÖZ

Doktora sürecimin her aşamasında yanımda olan, bana yapıcı ve yönlendirici önerilerde bulunan, ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Hasan BULUT'a, değerli görüş ve önerileriyle yol gösteren ikinci danışmanım Doç. Dr. Tolga AKTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aslı ALKAN
ELAZIĞ, 2024



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	V
İÇİNDEKİLER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
TABLolar LİSTESİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	10
2.1. SOLİTONLAR.....	20
2.1.1. Soliter Dalgalar ve Solitonlar	21
2.1.2. Periyodik Dalgalar.....	22
2.1.3. Kink ve Antikink Dalgalar	22
2.1.4. Peakon Dalgalar	22
2.1.5. Cuspon Dalgalar.....	23
3. METOTLARIN ANALİZİ	24
3.1. Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu (GÜFM).....	24
3.2. Uyumlu Kesirli q-Shehu Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (UKq-SHADM)	26
4. METOTLARIN UYGULANMASI.....	30
4.1. Doğrusal Olmayan Uyumlu Zaman-Kesirli Mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa Denkleminde GÜFM'nin Uygulanması	30
4.2. Doğrusal Olmayan (2+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito Denklem Sistemine GÜFM'nin Uygulanması	41
4.3. Doğrusal Olmayan Dullin-Gottwald-Holm Denkleminde GÜFM'nin Uygulanması	54
4.4. Doğrusal Olmayan Uyumlu Kesirli Mertebeden İki Boyutlu Navier-Stokes Denklemlerine UKq-SHADM'nin Uygulanması	66
4.5. Doğrusal Olmayan Uyumlu Kesirli Mertebeden Cahn-Hilliard Denkleminde UKq-SHADM'nin Uygulanması	73
4.6. Doğrusal Olmayan Uyumlu Kesirli Mertebeden Rosenau-Hyman Denkleminde UKq-SHADM'nin Uygulanması	78
5. BULGULAR VE TARTIŞMA	83
6. SONUÇLAR.....	84
ÖNERİLER	89
KAYNAKLAR.....	90
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Kesirli Mertebeden Türevli Matematiksel Modellerin Periyodik Dalga Çözümlerinin Analizi

Aslı ALKAN

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2024, Sayfa: xiii + 97

Bu tez çalışmasında, kesirli mertebeden türevli matematiksel modellerin periyodik dalga ve nümerik çözümleri analiz edilmiştir. Öncelikle, doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler ve doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bu denklemlerle ilgili çözüm metotlarından ve çalışmanın amacından bahsedilmiştir. Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu (GÜFM) ve uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu (UKq-SHADM) ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. İlk olarak doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denklemine, doğrusal olmayan (2+1)-boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sistemine ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denklemine tam çözümlerini elde etmek için GÜFM uygulanmıştır. İkinci olarak da doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerine, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denklemine ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denklemine nümerik çözümlerini elde etmek için UKq-SHADM uygulanmıştır. İncelenen doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa, doğrusal olmayan (2+1)-boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denklemlerinin elde edilen tam çözümlerinin iki boyutlu, üç boyutlu, dış hat ve yoğunluk grafikleri Mathematica yazılım programı yardımıyla çizdirilmiştir. Ayrıca doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denklemlerinin elde edilen nümerik çözümlerinin iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri Maple yazılım programı yardımıyla çizdirilmiştir. Sonuç olarak, çalışmada elde edilen bulgular kullanılan metotların etkili ve başarılı olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu, Uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu, Uyumlu kesirli mertebeden türev.

ABSTRACT

Analysis of Periodic Wave Solutions of Fractional Derivative Mathematical Models

Aslı ALKAN

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

July 2024, Pages: xiii + 97

In this thesis, the periodic wave solutions and the numerical solutions of the fractional order derivative mathematical models were analyzed. First of all, general information about the nonlinear fractional order partial differential equations and the nonlinear partial differential equations is given. The solution methods for these equations and the purpose of the study are mentioned. The modified exponential function method (MEFM) and the conformable fractional q -Shehu homotopy analysis transform method (CFq-SHATM) are explained in detail. First, MEFM is applied to obtain the exact solutions of the nonlinear conformable time-fractional Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa equation, the nonlinear $(2+1)$ -dimensional generalized Hirota-Satsuma-Ito equation system and the nonlinear Dullin-Gottwald-Holm equation. Secondly, CFq-SHATM is applied to obtain the numerical solutions of the nonlinear conformable fractional two-dimensional Navier-Stokes equations, the nonlinear conformable fractional Cahn-Hilliard equation and the nonlinear conformable fractional Rosenau-Hyman equation. The two-dimensional, three-dimensional, contour and density graphs of the obtained the exact solutions of the nonlinear conformable fractional Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa, the nonlinear $(2+1)$ -dimensional generalized Hirota-Satsuma-Ito and the nonlinear Dullin-Gottwald-Holm equations were plotted by using the Mathematica software program. In addition, the two-dimensional and three-dimensional graphs of the obtained numerical solutions of the nonlinear conformable fractional Navier-Stokes, nonlinear conformable fractional Cahn-Hilliard and nonlinear conformable fractional Rosenau-Hyman equations were plotted by using the Maple software program. As a result, the findings obtained in the study showed that the methods used were effective and successful.

Keywords: Modified exponential function method, Conformable fractional q -Shehu homotopy analysis transform method, Conformable fractional derivative.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

- Şekil 4.1.** (4.1.7) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 1.5, A_1 = -2.13, A_2 = -1.59, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.6, t = 0.1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 32
- Şekil 4.2.** (4.1.8) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.70, A_1 = -1.59, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -1.8$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 33
- Şekil 4.3.** (4.1.9) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.48, A_1 = -0.6, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = 0$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 34
- Şekil 4.4.** (4.1.10) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.50, A_1 = -1.53, A_2 = -1.26, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.60$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 35
- Şekil 4.5.** (4.1.11) çözümünün $\lambda = 0, \mu = 0, \theta = 0.5, k = 0.25, A_3 = -0.33, \alpha = 1.35, \beta = 1.3, B_0 = 1.2, A_0 = 0, c = 3.50, A_1 = 0, A_2 = -0.6, B_1 = 0.66, E = 0.82, y = 0.1, r = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 36
- Şekil 4.6.** (4.1.12) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.59, A_1 = -2.40, A_2 = -1.59, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -1.1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 37
- Şekil 4.7.** (4.1.13) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.30, A_1 = -0.98, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.7$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 38
- Şekil 4.8.** (4.1.14) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.52, A_1 = -0.65, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 39
- Şekil 4.9.** (4.1.15) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.50, A_1 = -1.53, A_2 = -1.26, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.60$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 40
- Şekil 4.10.** (4.1.16) çözümünün $\lambda = 0, \mu = 0, \theta = 0.5, k = 0.25, A_3 = -0.33, \alpha = 1.35, \beta = 1.3, B_0 = 1.2, A_0 = 0, c = 3.50, A_1 = 0, A_2 = -0.6, B_1 = 0.66, E = 0.82, y = 0.1, r = 0.7$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 41
- Şekil 4.11.** (4.2.10), (4.2.11) ve (4.2.12) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 2.5, \mu = 1, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -1.23, A_1 = -9.98, A_2 = -14.96, A_3 = -5.62, c = 0.24, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 45
- Şekil 4.12.** (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 1, \mu = 2.5, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.9, A_1 = -6.52, A_2 = -6.52, A_3 = -5.62, c = 0.04, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 47

- Şekil 4.13.** (4.2.16), (4.2.17) ve (4.2.18) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 1, \mu = 0, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.15, A_1 = -1.83, A_2 = -6.52, A_3 = -5.62, c = 0.8, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 49
- Şekil 4.14.** (4.2.19), (4.2.20) ve (4.2.21) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 2, \mu = 1, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.9, A_1 = -7.42, A_2 = -12.15, A_3 = -5.62, c = -1, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 51
- Şekil 4.15.** (4.2.22), (4.2.23) ve (4.2.24) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 0, \mu = 0, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = -0.9, A_3 = -5.62, c = -1, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 53
- Şekil 4.16.** (4.3.6) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, c = 16.12, A_1 = -6.00, A_2 = 2, B_1 = -0.12, E = 0.65, A_3 = 1.5, B_0 = 0.2, A_0 = -2.48, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 56
- Şekil 4.17.** (4.3.7) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -2.90, c = 34.73, A_1 = -0.754, A_2 = -1, B_1 = -0.12, E = 0.65, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 57
- Şekil 4.18.** (4.3.8) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.07, c = 4.44, A_1 = -2.54, A_2 = -1, B_1 = -0.12, E = 0.65, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 58
- Şekil 4.19.** (4.3.9) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -2.31, c = 3.04, A_1 = -3.61, A_2 = 0.5, B_1 = -0.12, E = 0.65$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 59
- Şekil 4.20.** (4.3.10) çözümünün $\lambda = 0, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.18, c = 3.04, A_1 = -0.11, A_2 = -2.5, B_1 = -0.12, E = 0.65$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 60
- Şekil 4.21.** (4.3.11) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.08, c = 3.04, A_1 = 1.44, A_2 = 4.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 62
- Şekil 4.22.** (4.3.12) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.16, c = 2.20, A_1 = 1.62, A_2 = 4.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = -0.19, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 63
- Şekil 4.23.** (4.3.13) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -0.07, c = -1, A_1 = -0.79, A_2 = 1.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.25, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 64
- Şekil 4.24.** (4.3.14) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.03, c = 2.20, A_1 = 0.69, A_2 = 3.12, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.26, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 65
- Şekil 4.25.** (4.3.15) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -0.08, c = 2.20, A_1 = -1.04, A_2 = 0.12, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.26, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri 66
- Şekil 4.26.** (4.4.1) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri 71

Şekil 4.27.	(4.4.2) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri.....	72
Şekil 4.28.	NS denklemlerinin $x = 0.1, y = 0.1, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafikleri	72
Şekil 4.29.	CH denkleminin $h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri	77
Şekil 4.30.	CH denkleminin $h = -1, n = 1$ ve $t = 3$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafikleri.....	77
Şekil 4.31.	RH denkleminin $c = 0.5, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri	81
Şekil 4.32.	RH denkleminin $c = 0.5, t = 3, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafikleri	81



TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1.	$t = 0.01, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere (4.4.1) denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [111] arasındaki mutlak hata.....	73
Tablo 4.2.	$t = 0.01, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere (4.4.2) denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [111] arasındaki mutlak hata.....	73
Tablo 4.3.	$n = 10$ ve $h = -10.223$ olmak üzere CH denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [147] arasındaki mutlak hata	78
Tablo 4.4.	$c = 0.5, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere RH denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [120] arasındaki mutlak hata	82

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

α	: Alfa
β	: Beta
γ	: Gama
δ	: Delta
ε	: Epsilon
θ	: Teta
μ	: Mü
π	: Pi
σ	: Sigma
ω	: Omega

Kısaltmalar

CH	: Cahn Hilliard
GÜFM	: Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklemler
KdV	: Korteweg–de Vries
NS	: Navier Stokes
q-HADM	: q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu
q-HAM	: q-Homotopi Analiz Metodu
RH	: Rosenau–Hyman
UKq-SHADM	: Uyumlu Kesirli q-Shehu Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD) bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarında birden fazla bağımsız değişken içeren fiziksel olayları tanımlamak ve modellemek için kullanılan temel bir matematiksel araçtır. Kısmi diferansiyel denklemler fizik, mühendislik, jeofizik, astronomi, astrofizik, biyoloji, finans, çevre bilimi, bilgisayar grafikleri, malzeme bilimi, tıp ve tıbbi görüntüleme, iklim modellemesi ve kuantum mekaniği gibi alanlarda kullanılmaktadır. Fizik alanında KDD'ler ısı iletimi, akışkanlar dinamiği (örneğin akışkan akışı için Navier-Stokes denklemleri), elektromanyetizma (Maxwell denklemleri) ve kuantum mekaniği (Schrödinger denklemleri) gibi fiziksel olayların tanımlanmasında çok önemlidir. Bu denklemler çeşitli fiziksel niceliklerin zaman ve mekân içinde nasıl değiştiğini anlamamıza yardımcı olmaktadır. Mühendislik alanında KDD'ler makine mühendisliği (örneğin malzemelerdeki gerilimleri ve gerinimleri modellemek için), inşaat mühendisliği (örneğin borulardaki yapısal dinamikleri ve akışkan akışını analiz etmek için), elektrik mühendisliği (örneğin elektromanyetik alanları analiz etmek için) ve kimya mühendisliğinde (örneğin reaksiyon-difüzyon süreçlerini modellemek için) gereklidir. Jeofizik alanında KDD'ler sismik dalgalar, Dünya'nın mantosu içindeki ısı transferi ve yeraltı suyu akışı dâhil olmak üzere çeşitli jeofizik olaylarını modellemek ve analiz etmek için kullanılmaktadır. Astronomi ve astrofizik alanında KDD'ler gezegenlerin hareketi, yıldızların evrimi ve elektromanyetik radyasyonun uzayda yayılması gibi gök cisimlerinin ve doğa olaylarının davranışını tanımlamak için kullanılmaktadır. Biyoloji alanında KDD'ler hastalıkların yayılması, popülasyon dinamikleri ve kimyasalların canlı organizmalar içindeki yayılımı gibi biyolojik süreçlerin modellenmesinde kullanılabilir. Finans alanında KDD'ler Black-Scholes denklemi gibi denklemler kullanılarak opsiyonlar ve vadeli işlem sözleşmeleri gibi finansal türevlerin fiyatlandırılmasını modellemek için kullanılmaktadır. Çevre bilimi alanında KDD'ler çevredeki kirleticilerin taşınması ve yayılmasının yanı sıra havzalardaki yeraltı suyu ve yüzey suyunun akışını modellemek için uygulanmaktadır. Bilgisayar grafikleri alanında KDD'ler bilgisayar tarafından oluşturulan animasyonlarda ve özel efektlerde sıvıların ve malzemelerin davranışlarını, doğal olaylarını simüle etmek ve işlemek kullanılmaktadır. Malzeme bilimi alanında KDD'ler ısı iletimi, stres ve gerinim dağılımı ve malzemeler içindeki kimyasal türlerin difüzyonu dahil olmak üzere çeşitli koşullar altında malzemelerin davranışını anlamak ve tahmin etmek için kullanılmaktadır. Tıp ve tıbbi görüntüleme alanında KDD'ler görüntüleri yeniden oluşturmak ve biyolojik doku ve sıvıların davranışlarını analiz etmek için MRI ve CT taramaları gibi tıbbi görüntüleme tekniklerinde kullanılmaktadır. İklim modellemesi alanında KDD'ler atmosfer, okyanuslar ve buz da dâhil olmak üzere dünyanın iklim sisteminin çeşitli bileşenlerinin

karmaşık etkileşimlerini simüle eden iklim modellerinin temel taşıdır. Kuantum mekaniği alanında KDD'ler dalga fonksiyonlarının davranışını ve kuantum sistemlerinin zaman içindeki evrimini tanımlamak için temel bir araçtır [1].

KDD'ler bilim ve mühendislikteki çok çeşitli olguları anlamak ve tahmin etmek için güçlü bir matematiksel çerçeve sağlamaktadır. Dolayısıyla bu alanlardaki karmaşık sistemlerin modellenmesinde ve analizinde onları kritik bir araç haline getirmektedir. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kökeni çok eski olmasına rağmen 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren birçok ilerleme olmaktadır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri araştırmanın temel nedenlerinden biri doğrusal olmayan dalgalarda yayılma sorunlarını keşfetmektir. Benzer problemler uygulamalı matematik, mühendislik ve akışkanlar dinamiği, optikteki doğrusal olmayan etkiler, katı mekaniği, plazma fiziği ve kuantum alan teorisi gibi çeşitli alanlarda da mevcuttur. Doğrusal olmayan dalga denklemleri çok sayıda yeni çözüm tipine yol açmıştır. Şok dalgaları, ısı dalgaları ve ayrık dalgalar en iyi bilinen örnekleridir. Bununla birlikte son yıllarda doğrusal olmayan dalgalar ve solitonlar oldukça büyük önem kazanmışlardır. Bu geçiş sırasında doğal, kimyasal ve biyolojik süreçlerde de birçok olağanüstü ve şaşırtıcı olay fark edilmiştir. Doğrusal olmayan evrim denklemlerinin çalışmalarında soliton etkileşimlerinin keşfi ile çeşitli kısmi diferansiyel denklemlerin etkili kesin çözümlerini bulmak için ters dağılım yöntemi geliştirilmiştir [2]. Hareketli dalga çözümlerinin incelenmesi fizik bilimindeki doğrusal olmayan problemlerin karakterlerinin anlaşılmasında ve tanımlanmasında önemli bir rol oynamaktadır. Fiziksel sistemlerin ögeleri genellikle çoklu zaman ölçeklerinde çalışmaktadır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler için kapalı form tanımları mevcut olsa da bu formlar açıkça elde edilememektedir. Bu tür problemler özellikle fiziksel sistemlerde çeşitli gerçek problemlerde ortaya çıkmaktadır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, kuantum mekaniği, biyobilim, fizik, kimya ve diğer mühendislik alanlarındaki geniş uygulamaları nedeniyle çok önemli ve faydalı olduğu bilinmektedir [3]. Dalga hareketlerinin modellenmesi okyanus, kıyı, deniz ve deniz mühendisliğindeki önemli rolü nedeniyle birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir. Ayrıca dalgaların çoğunun coğrafi alan için plajlar veya yüzen yapılar üzerindeki çevresel eylemlerin ana kaynağı olduğu düşünülmektedir. Bu problemlerin çoğu doğada genellikle doğrusal olmayan ve kesirli diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen fiziksel olayları ifade etmektedir. Örneğin: ısı iletim sistemleri, doğrusal olmayan kaotik sistemler, plazma dalgaları ve difüzyon süreçleri kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle modellenmektedir [4–7]. Bu nedenle bu tür denklemleri çözmek ve yeni yöntemler geliştirmek için çok sayıda araştırma yapılmıştır. Choucha ve arkadaşları dağıtılmış gecikme, güçlü sönümleme ve kaynak terimlerine sahip bir doğrusal olmayan viskoelastik dalga denklemini incelemişlerdir [8]. Uygun koşulları göz önünde bulundurarak bu dalga denkleminin patlama çözümlerini elde etmişlerdir. Geliştirilmiş alt

denklem yöntemi Jiang ve arkadaşları tarafından çok çeşitli doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [9]. Değiştirilmiş Riemann-Liouville türevine sahip kesirli ve tam sayı mertebeden denklemlerin Riccati denklemlerine dönüştürülerek dalga çözümleri, soliton çözümleri ve karmaşık çözümleri dâhil olmak üzere kesin çözümleri elde edilmiştir [10]. Simbanefayi ve Khalique, Lie simetrisi ve Jacobi eliptik fonksiyon genişletme yöntemlerini kullanarak Korteweg–de Vries–Benjamin–Bona–Mahony denklemi için hareketli dalga çözümlerini elde etmişlerdir [11]. Son yıllarda birçok araştırmacı doğrusal olmayan evrim denklemlerinin hareketli dalga çözümlerini bulmak için farklı yöntemler kullanmışlardır [12-24]. Bu yöntemlerin en yaygın örneklerinden biri belirli bir fonksiyon formuna ihtiyaç duymadan sadece hesaplamayı gerçekleştiren Kudryashov yöntemidir. Kudryashov yöntemlerine örnek olarak genişletilmiş Kudryashov yöntemi [25], genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi [26] ve yeni genişletilmiş-genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi [27] verilebilmektedir. Kaplan ve arkadaşları genelleştirilmiş Kudryashov yöntemini doğrusal olmayan Jaulent-Miodek denklemlerine ve $(2 + 1)$ -boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemlerine etkili bir şekilde uygulamışlardır [28].

Doğrusal olmayan KDD’lerin genel çözümlerini bulmak çoğunlukla mümkün değildir. Birinci mertebeden doğrusal olmayan KDD’lerin genel çözümleri Lagrange-Charpit yöntemi ile bulunabilmektedir. Fakat yüksek mertebeden doğrusal olmayan KDD’lerin genel çözümünün bulunması için belirli bir metot yoktur. Dolayısıyla bu denklemleri sağlayan çözümler tam çözümler olarak adlandırılmaktadır. Tam çözüm yöntemlerinin birçoğu doğrusal olmayan KDD’lerin doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlere hareketli dalga dönüşümü yardımıyla indirgenmesine dayanmaktadır. Son olarak belirlenmiş olan bir diferansiyel denklemin genel çözümünden yola çıkılarak, hareketli dalga çözümleri elde edilir. Ayrıca doğrusal olmayan KDD’lerin birçoğunun genel çözümü elde edilemediği için nümerik metotlar geliştirilmektedir. Nümerik metotlar ile amaç genel çözüme en yakın nümerik çözümlerin elde edilmesidir [29].

Son yıllarda bilim ve teknoloji alanlarında ortaya çıkan reel dünya problemlerini tanımlayan tam sayı ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri analiz etmek için birçok yarı analitik metot geliştirilmiştir. Bu metotlardan bazıları: homotopi pertürbasyon metodu [30-32], Laplace ayrıştırma metodu [33], homotopi pertürbasyon dönüşüm tekniği [34], homotopi analiz dönüşüm metodu ve değiştirilmiş homotopi analiz metodudur [30-39]. Homotopi analiz metodu (HAM) ilk defa 1992 yılında Shijun Liao tarafından doktora tez çalışmasında sunulmuştur [40, 41]. El-Tawil ve Huseen, q-homotopi analiz metodunu (q-HAM) literatüre katmışlardır [42, 43]. q-homotopi analiz dönüşüm metodu (q-HADM), q-HAM ve Laplace dönüşümünün birleşiminden oluşan hibrit bir metottur. Bu metot daha genel formda seri çözümünü bulmak için yardımcı parametre h , gömme parametresi $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $(n \geq 1)$, asimptotik parametre n , yardımcı fonksiyon

$H(x, t)$ ve başlangıç koşulu $u_0(x)$ yardımıyla seri çözümün yakınsamasını sağlamanın basit bir yolunu sunmaktadır [44]. Erol ve arkadaşları, q-homotopi analiz dönüşüm metodunu ve uyumlu kesirli Shehu integral dönüşümünün birleştirilmesi ile yeni bir hibrit metot olan uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodunu geliştirmişlerdir [45]. Bu metot ile oransal gecikmeli uyumlu kesirli mertebeden Swift-Hohenberg denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir [45].

Üstel fonksiyon metodu ilk kez He ve Wu tarafından doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin soliter, periyodik ve sıkıştırmaya benzer çözümlerini araştırmak için geliştirilmiştir [46]. Bu metot hem etkili hem de basit olduğundan yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemle dayanarak geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu önerilmiştir [47]. Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu $(2 + 1)$ -boyutlu Boussinesq su denkleminde uygulanmıştır [48]. Sığ sularda uzun dalgaların çift yönlü yayılımını tanımlayan uyumlu türevli stokastik Broer-Kaup denklemlerinin kesin çözümleri geliştirilmiş üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir [49]. Zaman-kesirli Cahn-Allen denkleminin ve zaman-kesirli Phi-4 denkleminin kesin çözümlerini bulmak için geliştirilmiş üstel fonksiyon yöntemi uygulanmıştır [50]. Optik fiber, nükleer ve parçacık fiziğinde önemli bir role sahip olan ve fiziksel olarak darbe yayılımını temsil ettiği anlamına gelen beta zaman türevli Biswas-Arshed denkleminin kesin çözümleri geliştirilmiş üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir [51]. Genelleştirilmiş beşinci dereceden Korteweg-de Vries denkleminin soliter dalga çözümleri, geliştirilmiş üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir [52]. Geliştirilmiş üstel fonksiyon yöntemi, mikrotübüller için bazı soliter dalga çözümlerini gözlemlemek için kullanılmıştır [53]. Geliştirilmiş üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak $(2 + 1)$ -boyutlu dağıtıcı uzun su dalga sistemi için yeni karmaşık hiperbolik fonksiyon çözümleri elde edilmiştir [54]. Doğrusal olmayan $(1 + 1)$ -boyutlu dağıtıcı modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılarak yeni analitik çözümleri elde edilmiştir [55]. Atangana uyumlu kesirli türev ile değiştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony ve Sharma-Tasso-Olver denklemlerinin geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılarak tam çözümleri elde edilmiştir [56]. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini elde etmek genellikle zordur. Dolayısıyla doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için tam çözüm metotlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Tam çözüm metotları doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri hareketli dalga dönüşümü yardımıyla doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlere indirgemektedir. İndirgenmiş adi diferansiyel denklemin genel çözümünden faydalanılarak hareketli dalga çözümleri bulunmaktadır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri analitik olarak çoğu zaman elde edilemediği için birçok nümerik metot geliştirilmektedir. Teknolojinin getirdiği imkânlarla bu denklemlerin tam çözümlerini Mathematica (v.13.2) ve nümerik çözümlerini Maple (v.13) yazılım programlarını kullanarak çok hızlı bir şekilde bulmak mümkündür.

(2 + 1)-boyutlu Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denklemi birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [57-60]. İlk kez Guo ve Lin uyumlu kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denklemini tanıtmışlardır [61]. Kumar ve arkadaşları [62] sine-Gordon açılımı ve geliştirilmiş Bernoulli alt denklem yöntemleri ile bu denklemin çözümlerini elde etmişlerdir. Doğrusal olmayan conformable (uyumlu) zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denklemi [60, 63]

$$u_{xxxxxy} + 4u_{xxy}u_x + 2u_{xxx}u_y + 6u_{xy}u_{xx} - \alpha u_{yyy} - 2\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\theta u}{\partial t^\theta} \right) \right) = 0 \quad (1.1)$$

formundadır, burada $u = u(x, y, t)$ bilinmeyen fonksiyon, α, β sıfırdan farklı reel sabitlerdir ve $0 < \theta \leq 1$ 'dir.

(2 + 1)-boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sistemi, Jimbo-Miwa sınıfındaki sığ su dalgalarının ve yükselmelerinin çift yönlü yayılımını tanımlamaktadır. Bu denklem dalga genliğinin dalga hızını etkilediği üç boyutta doğrusal olmayan bir ortamda dalgaların yayılmasını açıklamaktadır. Denklemdaki yeni terimler daha zengin ve daha karmaşık dalga davranışına yol açabilen doğrusal olmayan ve dağıtıcı etkiler getirmektedir. Hirota-Satsuma-Ito denklem sisteminin lump, rezonans çoklu-soliton ve lump-soliton gibi farklı çözümleri elde edilmiştir [64-72]. Doğrusal olmayan (2 + 1)-boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sistemi [73]

$$\begin{aligned} v_t + u_{xxt} + 3(uz)_x + \alpha u_x &= 0, \\ u_y &= v_x, \\ u_t &= z_x \end{aligned} \quad (1.2)$$

formundadır, burada u fiziksel alan, v ve z fiziksel alan türevlerinin potansiyelleridir.

Dullin-Gottwald-Holm denklemi, sığ su dalgalarının dinamiğini tanımlamak için kullanılan bir matematiksel modeldir. Bu denklem su dalgalarının yayılmasını, kırılmasını ve etkileşimini incelemek amacıyla geliştirilmiştir. Özellikle doğrusal olmayan ve dispersif (yayılma) etkileri bir arada ele almaktadır. Dullin, Gottwald ve Holm $u(x, t)$ akışkan hızına sahip dağıtıcı tek yönlü su dalgalarını tanımlayan aşağıdaki doğrusal olmayan (1 + 1)-boyutlu modeli incelemişlerdir [74]:

$$m_t + c_0 u_x + u m_x + 2m u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \quad (1.3)$$

Burada $m = u - \alpha^2 u_{xx}$ bir moment değeri ve α bir reel sabittir. $m = u - \alpha^2 u_{xx}$ eşitliği kullanılarak (1.3) eşitliği [75]

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2 (uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}) \quad (1.4)$$

olarak tekrar yazılabilmektedir. Bu denklem su dalgaları için ayrı ayrı integre edilebilen iki soliton modeli içermektedir. Bunlar Korteweg-de Vries (KdV) modeli ve Camassa-Holm modelleridir. Bu modellerden ilki doğrusal dağılımı içerirken ikincisi doğrusal olmayan dağılımı içermektedir.

Cahn-Hilliard (CH) denklemi Amerikalı bilim adamları Cahn ve Hilliard tarafından ortaya atılmıştır [76]. Bu denklem çok fazlı sistemlerde spinodal ayrışma gibi faz ayırma süreçlerini tanımlayan matematiksel fiziğin önemli bir modelidir. CH denkleminin doğrusal olmayan doğası kesin çözümünü bulmayı zorlaştırmaktadır. Difüzyon parametreleri, adveksiyon parametreleri, ara yüzey kalınlığı parametreleri ve reaksiyon terimlerini içerdiğinde daha karmaşık hale gelmektedir. CH denkleminin temel ve önemli bir özelliği sonlu kalınlığa sahip iki faz arasındaki arayüz kalınlığıdır. Literatürde bilim insanları CH denkleminin çeşitli formlarını mühendislik ve bilimin farklı alanlarındaki uygulamalarıyla birlikte araştırıp analiz etmektedir [77-85]. CH denkleminin sayısal çözümleri q-HAM kullanılarak elde edilmiştir [86]. Bouhassoun ve Cherif [87] kesirli mertebeden CH denklemini homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak analiz etmişlerdir. Tripathi ve arkadaşları [88] homotopi analiz yöntemini kullanarak reaksiyon terimi ile zaman-kesirli mertebeden CH denkleminin çözümünü elde etmişlerdir. Zhu ve arkadaşları [89] değişken hareketliliğe sahip CH denkleminin çözümünü elde etmişlerdir. Barrett ve arkadaşları [90] dejenere hareketliliğe sahip CH denkleminin çözümünün davranışını incelemişlerdir. Berti ve Bochicchio [91] termal ve karışım etkilerini içeren genelleştirilmiş CH denklemini analiz etmişlerdir. Colby ve arkadaşları [92] Allen Cahn ve CH denklemlerini sayısal olarak çözmek için uyarlanabilir sinir ağları yaklaşımını kullanmışlardır. Shah ve Siddiqui [93] viskoz CH denklemini çözmek için varyasyonel yineleme yöntemini kullanmışlardır. Hussain ve Shah [94] CH denklemini çözmek için homotopi pertürbasyon yöntemini ve varyasyonel yineleme yöntemini uygulamışlardır. Ara yüzeyin keskin genişliği ve ara yüzeydeki sıçrama süreksizliği nedeniyle CH denkleminin analitik çözümünün elde edilmesinin zor olduğu bilinmektedir. Literatür taraması fiziksel parametreleri içeren CH denkleminin karmaşık yapısı nedeniyle kapsamlı bir şekilde çalışılmadığını ortaya koymaktadır.

Doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denklemi [95]

$$D_t^\alpha w(x, t) - 6w(x, t) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 - 3w^2(x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.5)$$

formundadır. Bu denkleme ait başlangıç koşulu

$$w(x, 0) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.6)$$

ile verilmektedir.

1822’de viskoz sıvı akışının hareketini yöneten Navier-Stokes (NS) denklemleri geliştirilmiştir [96-98]. NS enerji denklemi, süreklilik denklemi ve momentum denkleminin bir karışımıdır ve akışkan maddeler için Newton’un ikinci hareket yasası olarak düşünülmektedir. Bu denklemler borulardaki sıvı akışı, okyanus akıntıları, hava akışı ve kan akışı dahil olmak üzere çeşitli fiziksel olayları temsil etmektedir [99-102]. Salem ve El-Sahed [103], 2005 yılında NS denklemlerinin kesirli mertebeden modellemesini gerçekleştiren ilk bilim insanlarıdır. Klasik NS denklemlerini genelleştirmek için Laplace dönüşümünü, sonlu Fourier sinüs dönüşümünü ve sonlu Hankel dönüşümünü kullanmışlardır [103]. Kumar ve arkadaşları [104] NS denklemlerinin doğrusal olmayan kesirli mertebeden modelini Laplace dönüşümü ve homotopi pertürbasyon yöntemini birleştirerek analitik olarak çözmüşlerdir. Ganji ve arkadaşları [105], Ragab ve arkadaşları [106] doğrusal olmayan kesirli mertebeden NS denklemlerini çözmek için homotopi analiz metodunu kullanmışlardır. Kesirli mertebeden NS denklemlerinin sayısal çözümü için Maitama [107], Momani ve Birajdar [108] Adomian ayrıştırma yöntemini kullanmışlardır. Kumar ve arkadaşları [109], Laplace dönüşümünü ve Adomian ayrıştırma yöntemini birleştirerek zaman-kesirli mertebeden NS probleminin yaklaşık bir sonucunu elde ederken, Kumar ve Chaurasia aynı denklemi Laplace dönüşümü ve sonlu Hankel dönüşümünü birleştirerek çözmüşlerdir [110].

Doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemleri [111]

$$D_t^\alpha w(x, y, t) + w(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + q(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} = \rho \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + \sigma, 0 < \alpha \leq 1, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
& D_t^\alpha q(x, y, t) + w(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial x} + q(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial y} \\
& = \rho \left[\frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial y^2} \right] - \sigma, 0 < \alpha \leq 1
\end{aligned} \tag{1.8}$$

formundadır. Bu denklemlere ait başlangıç koşulları

$$w(x, y, 0) = -\sin(x + y), \tag{1.9}$$

$$q(x, y, 0) = \sin(x + y) \tag{1.10}$$

ile verilmektedir.

Rosenau-Hyman (RH) denklemi, sıkıştırma çözümlerine sahip sıvı damlalarındaki desenlerin oluşumunda meydana gelmektedir. Bu denklem Rosenau ve Hyman tarafından oluşturulmuştur [112]. Rosenau-Hyman denkleminin kompaktan çalışmaları uygulamalı bilimler ve matematiksel fizikte etkin bir rol oynamaktadır [113-118]. Zaman-kesirli mertebeden RH denkleminin sayısal çözümü q-homotopi analizi dönüşüm metodu (q-HADM) ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunun uygulanmasıyla elde edilmiştir [119]. Atangana-Baleanu kesirli mertebeden RH denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için q-homotopi analizi dönüşüm metodunu uygulamışlardır [120].

Doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden doğrusal olmayan Rosenau-Hyman denklemi [121]

$$\begin{aligned}
& D_t^\alpha w(x, t) = w(x, t) \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} + w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + 3 \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \\
& t > 0, 0 < \alpha \leq 1
\end{aligned} \tag{1.10}$$

formundadır. Bu denkleme ait başlangıç koşulu

$$w(x, 0) = -\frac{8}{3}c \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \tag{1.11}$$

ile verilmektedir.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denkleminin, doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sisteminin ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denkleminin GÜFM ile hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. İkinci olarak doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denkleminin ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin UKq-SHADM kullanılarak nümerik çözümleri elde edilmiştir. Analiz edilen doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa, doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denklemlerinin elde edilen tam çözümlerinin iki boyutlu, üç boyutlu, dış hat ve yoğunluk grafikleri Mathematica yazılım programı yardımıyla çizdirilmiştir. Bununla birlikte doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denklemlerinin nümerik çözümlerinin iki ve üç boyutlu grafikleri Maple yazılım programı yardımıyla çizdirilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde yer alan metot ve kavramların anlaşılması için gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. x 'e bağlı bilinmeyen y fonksiyonu ve y bağımlı değişkeninin x bağımsız değişkenine göre türevini ya da türevlerini içeren (2.1) formundaki denklemlere adi diferansiyel denklem adı verilir [29].

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \quad (2.1)$$

Tanım 2.2. İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem adı verilir. z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots \quad (2.3)$$

dir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $z = z(x)$ olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1x_1}, z_{x_1x_2}, \dots) = 0 \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenleri, z ise bağımlı değişkeni göstermektedir ve

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}; i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

ile verilir [29].

Örnek 2.1. İkinci basamaktan sönümlü dalga denklemi

$$z_{tt} + \alpha z_t = z_{xx} \quad (2.6)$$

şeklindedir. Burada α bir reel sabittir [29].

Örnek 2.2. Bir boyutlu ısı denklemi

$$z_t - \alpha z_{xx} = 0 \quad (2.7)$$

şeklindedir. Burada α bir reel sabittir [29].

Tanım 2.3. Bir kısmi diferansiyel denklemde görülen en yüksek türevin derecesine denklemin basamağı denir [29].

Örnek 2.3. $(1 + 1)$ -boyutlu doğrusal olmayan modifiye edilmiş ikinci basamaktan sönümlü dalga denklemi

$$z_{tt} + \alpha z_t = z_{xx} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Burada α bir reel sabittir [29].

Örnek 2.4. $(1 + 1)$ -boyutlu doğrusal olmayan modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemi

$$z_t + z_x - \alpha z^2 z_x + z_{ttt} = 0 \quad (2.9)$$

üçüncü basamaktan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada α bir reel sabittir [122].

Tanım 2.4. Bir kısmi diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken olması halinde bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyor ise bu denkleme doğrusal kısmi diferansiyel denklem denir. Aksi halde doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem denir [29]. Bazı kısmi diferansiyel denklemlerine örnek olarak aşağıdaki ifadeler verilebilir:

Örnek 2.5. İki boyutlu ısı denklemi

$$z_t - k(z_{xx} + z_{yy}) = 0 \quad (2.10)$$

ikinci basamaktan doğrusal bir denklemdir. Burada k bir reel sabittir [29].

Örnek 2.6. Burgers-Huxley denklemi

$$z_t + z_{xx} + \frac{3}{k}zz_x + cz + z^2 + z^3 = 0 \quad (2.11)$$

doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada c ve k lar reel sabitlerdir [123].

Tanım 2.5. Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre doğrusal ise bu denklem yarı doğrusal kısmi diferansiyel denklem adını alır. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları sırasıyla:

$$\begin{aligned} A(x, y, z)z_x + B(x, y, z)z_y &= C(x, y, z), \\ A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} \\ + D(x, y, z, z_x, z_y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

şeklinde verilmektedir [29].

Örnek 2.7. Homojen olmayan konveksiyon-difüzyon denklemi

$$z_t - z_{xx} + cz_x = g(x, t) \quad (2.13)$$

şeklindedir. Burada c bir reel bir sabittir [124].

Örnek 2.8. Boussinesq denklemi

$$z_{tt} - z_{xx} + 3(z^2)_{xx} + z_{xxx} = 0 \quad (2.14)$$

formundadır [125].

Tanım 2.6. Bir kısmi diferansiyel denklemde z bağımlı değişken olmak üzere z 'yi veya z 'nin kısmi türevlerini içeriyorsa bu kısmi diferansiyel denkleme homojendir denir. Aksi halde bu denkleme homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem adı verilir [29].

Örnek 2.9.

$$z_t - z_{xx} = 0 \quad (2.15)$$

kısmi diferansiyel denklemi homojendir [29].

Örnek 2.10.

$$z_t - z_{xx} = t \quad (2.16)$$

kısmi diferansiyel denklemi homojen değildir [29].

Tanım 2.7. (Teklik) $g(x, t)$ ve $\frac{\partial g}{\partial x}$, $R = \{(x, t): |x - x_0| \leq \alpha, |t - t_0| \leq \beta\}$ şeklinde tanımlanmış bir dikdörtgen bölgede sürekli olsun. Başlangıç-değer problemi $|x - x_0| \leq (\alpha, \beta/M)$ aralığında tek bir çözüme sahiptir [29].

Tanım 2.8. $g(x, t)$ fonksiyonu bir dikdörtgensel bölge olan $R = \{(x, t): |x - x_0| \leq \alpha, |t - t_0| \leq \beta\}$ kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli olsun. Başlangıç-değer probleminin $|x - x_0| \leq (\alpha, \beta/M)$ için $y(x)$ şeklinde çözümü vardır. M, R bölgesinde $g(x, t)$ 'nin maksimum değeridir [29].

Tanım 2.9. Bir fiziksel olayın modellenmesinde kolaylık olması için genellikle ikinci basamaktan sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem ele alınarak sınıflandırılmaktadır. Genel hali

$$Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} + Dz_x + Ez_y + Fz + G = 0 \quad (2.17)$$

formunda verilmektedir. Burada A, B, C, D, E, F ve G reel sabitlerdir. Ayrıca diskriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (2.18)$$

olarak tanımlıdır.

Diskriminantın özel durumları:

<i>Diskriminant</i>	<i>Denklem tipi</i>	<i>Örnek</i>	<i>İsimlendirme</i>
$\Delta > 0$	Hiperbolik	$z_{tt} - c^2 z_{xx} = 0$	Dalga denklemi
$\Delta = 0$	Parabolik	$z_t - k z_{xx} = 0$	Isı denklemi
$\Delta < 0$	Eliptik	$z_{xx} + z_{yy} = 0$	Laplace denklemi

şeklindedir [29].

Tanım 2.10. Elastik bir cisim üzerine bırakılan enerji, elastik cisim üzerinde bir hareketlenme meydana getirir. Bu hareket cismin hareketi gibi görünse de aslında cismin üzerine bırakılan enerjinin taşınmasıdır. Bu harekete dalga denir [126].

Tanım 2.11. Sahip oldukları şekli ve hızı koruyarak yayılan ve herhangi bir etkileşim anından sonra da bu etkileşimi korumaya devam eden doğrusal olmayan dalgalara solitonlar denir [126].

Tanım 2.12. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesinden ortaya çıkan dalga denklemlerinin çözümlerinin soliton olabilmesi için sabit hızda hareket ederken şeklini koruyan, diğer solitonlarla yoğun bir şekilde iletişim kurabilen ve karakteristiğini koruyan lokalize doğrusal olmayan bir dalga olması gerekmektedir [126].

Tanım 2.13. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle elde edilen dalga denklemlerinin çözümlerinin dark soliton olabilmesi için arka plandan daha düşük yoğunluklu dalgaları tanımlayan bir dalga çözümüne sahip olması gerekmektedir [126].

Tanım 2.14. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle elde edilen dalga denklemlerinin çözümlerinin bright soliton olabilmesi için maksimum şiddeti arka plandan daha büyük olan dalgaları tanımlayan bir dalga çözümüne sahip olması gerekmektedir [126].

Tanım 2.15. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle elde edilen dalga denklemlerinin çözümlerinin singüler soliton olabilmesi için süresiz türevleri olan tek bir dalga çözümüne sahip olması gerekmektedir [126].

Tanım 2.16. (Lipschitz Şartı) Bir düzgün D bölgesinde apsisleri x , ordinatları y_1 ve y_2 olan iki keyfi nokta olsun. D bölgesinde sürekli bir $f(x, y) = 0$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Keyfi seçilen her nokta çifti için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad (2.19)$$

olacak şekilde bir pozitif $L > 0$ reel sayısı bulunabiliyorsa $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde y 'ye göre Lipschitz koşulunu sağlamıştır denir [29].

Tanım 2.17. (Kesirli Türevler için Leibniz Kuralı) Eğer $f(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonlarının türevleri $[\alpha, t]$ aralığında sürekli ise

$$D_t^\alpha(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^k(t) D_t^{\alpha-k} f(t) \quad (2.20)$$

ifadesi Leibniz kuralı olarak adlandırılır. Leibniz kuralı özellikle kesirli türevi bilinen bir fonksiyon ile bir polinomun çarpımının kesirli türevini hesaplamada çok kullanışlıdır [127, 128].

Tanım 2.18. Gama fonksiyonu $\Gamma(n)$ integral formunda

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (2.21)$$

biçiminde tanımlanır. Gama fonksiyonun bazı temel özellikleri:

a) $\Gamma(1) = 0! = 1,$

b) $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!,$

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$

d) $\Gamma(n)\Gamma(1 - n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}, \quad 0 < n < 1,$

e) Gama fonksiyonuna ait çarpım formülü

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$$

biçimindedir [129].

Tanım 2.19. $f \in C_\mu$ ve $\mu \geq -1$ olmak üzere $\alpha \geq 0$ basamaktan Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali

$$I^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, & \alpha > 0, x > 0, \\ I^0 f(x) = f(x), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada $\Gamma(\cdot)$ sembolü Gama fonksiyonunu göstermektedir [130].

$f \in C_\mu, \mu, \gamma \geq -1, \alpha, \beta \geq 0$ için I^α operatörünün bazı özellikleri:

$$(1) \quad I^\alpha I^\beta f(x) = I^\beta I^\alpha f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x),$$

$$(2) \quad I^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$

şeklindedir.

Tanım 2.20. $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, x > 0, f \in C_{-1}^n$ olmak üzere f fonksiyonunun α basamaktan Caputo kesirli mertebeden türevi

$$D^\alpha f(x) = I^{\alpha-n} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlıdır. D^α operatörünün bazı özellikleri:

$$(1) \quad D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x),$$

$$(2) \quad I^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}, x > 0$$

şeklindedir [130].

Tanım 2.21. $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve α mertebeden g fonksiyonunun uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(g)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}, t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlıdır [131, 132].

Uyumlu kesirli türev ile ilgili temel özellikler:

1. $T_\alpha(pg + qh) = pT_\alpha(g) + qT_\alpha(h)$, $p, q \in \mathbb{R}$,
2. $T_\alpha(t^\lambda) = \lambda t^{\lambda-\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $T_\alpha(gh) = gT_\alpha(h) + hT_\alpha(g)$,
4. $T_\alpha\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{hT_\alpha(g) - gT_\alpha(h)}{h^2}$,
5. g fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $T_\alpha(g)(t) = t^{1-\alpha} \frac{dg}{dt}$

şeklinde verilmektedir [126, 127].

Tanım 2.22. $g, h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve ayrıca g ve h , α diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Öyleyse,

$$T_\alpha(gh)(t) = t^{1-\alpha} h'(t) g'(h(t)) \quad (2.25)$$

dir [131, 132].

Tanım 2.23. $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $I = [0, 1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H: X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g homotopiktir denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g arasında bir homotopidir denir [133].

Tanım 2.24. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g(t)$ fonksiyonunun Shehu dönüşümü

$$\mathbb{S}[g(t)] = V(s; u) = \int_0^\infty \exp\left(\frac{-st}{u}\right) g(t) dt \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlıdır [134].

Teorem 2.1. $g(t)$ fonksiyonunun Shehu dönüşümü $\mathbb{S}[g(t)] = V(s; u)$ olsun. Bazı önemli fonksiyonların Shehu dönüşümleri aşağıda verilmektedir [134]:

i) $g(t) = 1$ ise $\mathbb{S}[1] = \frac{u}{s}$, dir.

ii) $g(t) = t$ ise $\mathbb{S}[t] = \frac{u^2}{s^2}$, dir.

iii) $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ olmak üzere $g(t) = \frac{t^n}{n!}$ ise $\mathbb{S}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}$, dir.

iv) $n \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ olmak üzere $g(t) = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ ise $\mathbb{S}\left[\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\right] = \left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}$, dir.

v) $a \in \mathbb{R}$ için $g(t) = e^{at}$ ise $\mathbb{S}[e^{at}] = \frac{u}{s-au}$, dur.

vi) $a \in \mathbb{R}$ için $g(t) = te^{at}$ ise $\mathbb{S}[te^{at}] = \left(\frac{u}{s-au}\right)^2$, dir.

vii) $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ olmak üzere $g(t) = \frac{t^n e^{at}}{n!}$ ise $\mathbb{S}\left[\frac{t^n e^{at}}{n!}\right] = \left(\frac{u}{s-au}\right)^{n+1}$, dir.

viii) $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ olmak üzere $g(t) = \frac{t^n e^{at}}{\Gamma(n+1)}$ ise $\mathbb{S}\left[\frac{t^n e^{at}}{\Gamma(n+1)}\right] = \left(\frac{u}{s-au}\right)^{n+1}$, dir.

ix) $a \in \mathbb{R}$ için $g(t) = \sin(at)$ ise $\mathbb{S}[\sin(at)] = \frac{au^2}{s^2+a^2u^2}$, dir.

x) $a \in \mathbb{R}$ için $g(t) = \cos(at)$ ise $\mathbb{S}[\cos(at)] = \frac{us}{s^2+a^2u^2}$, dir.

Tanım 2.25. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g(t)$ fonksiyonunun α mertebeden uyumlu kesirli Shehu dönüşümü

$${}_c\mathbb{S}_\alpha[g(t)] = V_\alpha(s; u) = \int_0^\infty \exp\left(\frac{-st^\alpha}{u\alpha}\right) g(t) t^{\alpha-1} dt \quad (2.27)$$

olarak tanımlanır [135].

Tanım 2.26. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g(t)$ fonksiyonunun α mertebeden uyumlu kesirli türevinin uyumlu kesirli Shehu dönüşümü

$$V_\alpha[T_\alpha g(t)](v) = \frac{s}{u} V_\alpha(s; u) - g(0) \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanır [135].

Tanım 2.27. $0 < \alpha \leq 1$ ve $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyonunun α mertebeden uyumlu kesirli Shehu dönüşümü $V_\alpha(s; u)$ olsun. $g(t)$ fonksiyonuna V_α 'nın ters uyumlu Shehu dönüşümü denir ve $({}_c\mathbb{S}_\alpha)^{-1}\{V_\alpha(s; u)\} = g(t)$ ile gösterilir [135].

Tanım 2.28. Doğrusal olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden terim $\frac{d^q u}{d\zeta^q}$ ve en yüksek dereceden doğrusal olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\zeta^r}\right)^s$ ile verilsin. m dengeleme terimi olmak üzere $m + q = mp + s(m + r)$ eşitliği yazılabilir. Örneğin:

$$(1 + \alpha - c^2)u'' + \alpha u + \beta u^3 = 0,$$

$$m + 2 = 3m \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1 \quad (2.29)$$

olarak bulunur [136].

Tanım 2.29. Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerler için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine başlangıç değer problemi denir. Bu şartlara da başlangıç şartları denir. Örneğin:

$$y'' + 2y = e^x,$$

$$y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2 \quad (2.30)$$

başlangıç değer problemidir [29].

Teorem 2.2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (a, b) aralığı üzerinde bir fonksiyon olsun. Bazı $n \in \mathbb{N}^+$ için f , (a, b) açık aralığında n -kez diferansiyellenebilir ve $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğunu varsayalım. Öyleyse,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n \quad (2.31)$$

olacak şekilde $c \in (a, b)$ reel sayısı vardır [137].

2.1. SOLİTONLAR

Dalga fikri genel olarak dalgaların ileri ve geri veya yukarı ve aşağı hareketleriyle karakterize edilen salınım hareketi olarak tanımlanabilir. Diğer bir tanım ise enerjinin transferi ile ilgilidir. Titreşimler tekrarlanan veya tekrarlanmayan özellikler sergileyebilir. Bir dalganın salınım davranışının gücünü karakterize eden parametreye genlik denir. Salınımın kendini tekrarlama hızı frekans olarak gösterilirken, dalganın birbirini izleyen iki tepesi veya çukuru arasındaki uzaysal boyut dalga boyu olarak tanımlanır. Ses dalgaları, ışık dalgaları, su dalgaları ve manyetik dalgalar dâhil olmak üzere çeşitli dalga biçimleri mevcuttur. Dalga denklemi $z(x, t)$ dalganın genliğini ve c 'de dalganın hızını ifade etmek üzere

$$z_{xx} - c^2 z_{tt} = 0 \quad (2.1.1)$$

şeklindedir [126].

D'Alembert çözümü olarak da bilinen çözüm p ve q keyfi fonksiyonları temsil etmek üzere

$$z(x, t) = p(x - ct) + q(x + ct) \quad (2.1.2)$$

şeklinde verilmektedir [126].

Çeşitli p ve q dalgaları hiçbir değişikliğe uğramadan orijinal özelliklerini koruyarak yayılır. Tipik olarak bu fonksiyonlar problemde verilen $u(x, 0)$ ve $u_t(x, 0)$ başlangıç değerleri kullanılarak çözülür. Dalga denkleminin doğrusallığından dolayı süperpozisyon ilkesi ile bu iki çözüm toplanabilmektedir. $q = 0$ alındığında $u_t + u_x = 0$ denkleminin $c = 1$ hızına sahip çözümü olan $z(x, t) = p(x - t)$ denkleminin benzer şekilde dalganın yalnızca sağa doğru yayıldığı gözlemlenebilir. Hareketli dalga, yayılımıyla aynı yönde hareket sergileyen bir dalga türünü ifade etmektedir. Hareket eden dalga olgusu doğrusal olmama özelliği gösterir. Burada dalga $z(x, t) = p(x - t)$ değişkeni tarafından temsil edilir ve yayılma yönü c 'nin pozitif ve negatif değerlerine göre belirlenmektedir. Yayılma yönü diferansiyel denklemlerle ilgili araştırmalarda aktif olarak kullanılmaktadır [126].

Kısmi diferansiyel denklemin yalnızca iki koordinatına bağlı olması nedeniyle şekli değişmeden kaldığında soliter dalga olarak adlandırılır. Soliter bir dalga hareketli dalganın $\xi = -\infty$ noktasındaki asimptotik durumdan $\xi = \infty$ noktasındaki duruma geçişini ξ noktasında sınırlandıran bir tür hareketli dalgayı ifade eder. Bu bağlamda $\xi = x - ct$ ve c dalganın hızını temsil etmektedir [126].

Dalgalar görsel özelliklerine ve hareket modellerine göre çeşitli türlerde sınıflandırılabilir [126]. Bunlar:

- Soliter dalgalar ve solitonlar,
- Periyodik dalgalar,
- Kink dalgalar,
- Peakon dalgalar,
- Cuspon dalgalar,
- Kompakton dalgalarıdır.

2.1.1. Soliter Dalgalar ve Solitonlar

Soliter dalgaların keşfi 1834'te su dalgalarının yapılarını koruyarak ve Edinburgh-Glasgow kanalı boyunca yavaş bir hızda aktığını gözlemleyen John Scott Russell'a atfedilebilir [138]. Bahsi geçen olayı araştırmak için Russell 1844 yılında bir su tankı inşa etmiş ve soliter dalgaların hareketi için $c^2 = g(h + \alpha)$ denklemini içeren deneysel bulgularını sunmuştur. Russell tarafından ifade edilen bu denklem α maksimum genlik, h sonlu su derinliği, g yerçekimi ivmesi ve c dalga hızı gibi değişkenleri içermektedir. Daha sonra bu gözlem ve analizler birçok araştırmacıya ilham kaynağı olmuştur [126, 138].

1895'te her ikisi de Hollanda'dan gelen Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries soliter bir dalganın etkisine maruz kalan sığ su yüzeyinin yükselmesi için matematiksel bir gösterim geliştirmişlerdir. Bu gösterim doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem olarak formüle edilmiştir. Literatürde bahsedilen denklem genel olarak Korteweg-de Vries (KdV) denklemi olarak bilinmektedir [139]. 1965 yılında Norman J. Zabusky ve Martin D. Kruskal tarafından soliter dalgaların etkileşimlerini incelemek amacıyla bir araştırma yürütülmüştür. Bu çalışma, bu özel araştırma alanını keşfetmek için sayısal yöntemlerin uygulanmasını içermektedir [140]. Gözlemciler dalgaların bu etkileşimden şekil ve genliklerini koruyarak ortaya çıktığını görmüşler ve bu dalgaları soliton olarak adlandırmaya teşvik etmişlerdir. Solitonların evrensel olarak kabul edilmiş bir tanımı mevcut olmasa da aşağıdaki özellikleri gösteren doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü olarak tanımlanabilir:

- Çözüm kalıcı formda bir dalga oluşturmalıdır,
- Çözüm sonsuzda ya üstel olarak zayıflayarak sifıra gitmeli ya da bir sabite yaklaşmalıdır,
- Dalgalar diğer dalgalar ile etkileşiminde karakterlerini korumalıdır.

Yukarıda belirtilen tanıma dayanarak solitonların hareketli dalgaların ayrı bir alt kümesi olarak kategorize edilebileceği sonucuna varılabilir. Korteweg-de Vries (KdV) denklemi soliton dalgalarının açıklayıcı bir örneğidir. Bu nitelikteki denklemler için $\psi(x, t) = \text{sech}^2(x, t)$ formundaki soliton çözümleri mevcuttur [126].

2.1.2. Periyodik Dalgalar

Periyodik dalgalar tek boyutlu uzayda sabit hızla hareket eden periyodik fonksiyonlardır.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \vartheta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1.3)$$

formuna sahip bir boyutlu dalga denkleminin periyodik dalga çözümleri $\psi(x, t) = A \cos(kx \pm wt)$ ya da $\psi(x, t) = A \sin(kx \pm wt)$ çözümleridir. Burada w değişkeni açısal frekansı, k ise dalga sayısını temsil etmektedir [126].

2.1.3. Kink ve Antikink Dalgalar

Bir asimptotik durumdan diğer asimptotik duruma geçerken azalan veya artan hareketli dalga çeşitlerine kink ya da antikink dalgalar denir. Kink ve antikink çözümleri sonsuzda bir sabite yakınsamaktadırlar. $\gamma^2 = \frac{1}{1-\vartheta^2}$ olmak üzere $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + m^2 \sin \psi$ formunda ifade edilen sine-Gordon denklemi $\psi(x, t) = 4 \arctan(e^{m\gamma(x-\vartheta t)+\delta})$ çözümü dikkate alındığında γ 'nın pozitif kökleri için Kink ve γ 'nın negatif kökleri için antikink çözümlerini vermektedir [126].

2.1.4. Peakon Dalgalar

Süreksiz bir birinci türev ile karakterize edilen dalgalar akademik literatürde genellikle peakon dalgalar veya solitonlar olarak bilinmektedir. Dalga $e^{-|x|}$ üstel fonksiyonunun grafiğine yapısal bir benzerlik göstermektedir. Grafiklerin yüzeyleri tepe noktası hariç pürüzsüz bir yapıya sahiptir. Bu noktalarda konumuna bağlı olarak türevi işaret değiştirir ve birinci türevde sonlu bir sıçramaya neden olmaktadır. Peakon dalgaları solitonlara benzer şekilde etkileşimler sırasında şekil ve hız koruma özelliğini sergilemektedir. Bu dalgalar Camassa–Holm sıg su dalga denklemi, Degasperis–Procesi denklemi ve Fornberg–Whitham denkleminin çözümlerinde görülmektedir. Örnek olarak $b = 2$ için $\psi_t - \psi_{xxt} + (b + 1)\psi\psi_x = b\psi_x\psi_{xx} + \psi_{xxx}$ formunda verilen Camassa-Holm denkleminin c genlik ve v dalga hızı olmak üzere $\psi(x, t) = ce^{-|x-vt|}$ peakon dalga çözümleri mevcuttur [141, 142, 143].

2.1.5. Cuspon Dalgalar

Solitonların bir çeşidi olan cusponlar tepelerinde zirvelere sahiptir. Peakon dalgalarından farklı olarak zirvedeki türevler sadece işaret olarak farklıdır ve bu noktalarda türev ıraksaktır. Camassa Holm denkleminin bazı özel durumlarında cuspon çözümleri ortaya çıkmaktadır [144].



3. METOTLARIN ANALİZİ

Bu bölümde tezde yer alan GÜFM ve UKq-SHADM hakkında detaylı bilgiler verilmiştir.

3.1. Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu (GÜFM)

Bu kısımda geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır [145].

Adım 1: Genel yapısı aşağıdaki formda olan doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemi ele alalım:

$$P(u, D_\theta, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{tx}, \dots) = 0 \quad (3.1.1)$$

Burada $u = u(x, y, t)$ istenen çözüm fonksiyonudur. P, x, y ve t 'ye bağlı u 'nun kısmi türevlerini içeren bir polinom, D_θ , θ -yüncü mertebeden bir uyumlu kesirli türev operatörüdür.

Adım 2:

$$u(x, y, t) = U(\xi), \xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta} \quad (3.1.2)$$

zaman-kesirli mertebeden hareketli dalga dönüşümünü ele alalım. Burada k, r ve c sıfırdan farklı sabitlerdir. (3.1.2)'deki dönüşüm ve bu fonksiyonun kısmi türevleri (3.1.1) denkleminde yerine yazıldığında (3.1.1) denklemi

$$N(U, U', U'', U''', \dots) = 0 \quad (3.1.3)$$

doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşmektedir. Burada N, U 'ya bağlı bir polinomdur.

Adım 3: (3.1.3) denkleminin hareketli dalga çözümlerinin

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i [e^{-\Psi(\xi)}]^i}{\sum_{j=0}^M B_j [e^{-\Psi(\xi)}]^j} = \frac{A_0 + A_1 e^{-\Psi(\xi)} + \dots + A_N e^{N(-\Psi)} }{B_0 + B_1 e^{-\Psi(\xi)} + \dots + B_M e^{M(-\Psi)} } \quad (3.1.4)$$

formunda olduğu varsayılmaktadır. Burada $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq M$ olmak üzere A_i ve B_j 'ler daha sonra belirlenecek katsayılardır. $A_N \neq 0, B_M \neq 0$ olmak üzere $\Psi = \Psi(\xi)$ fonksiyonu

$$\Psi'(\xi) = e^{-\Psi(\xi)} + \mu e^{\Psi(\xi)} + \lambda \quad (3.1.5)$$

adi diferansiyel denklemini sağlar.

(3.1.5) denklemi çözüldüğünde aşağıdaki beş çözüm ailesi elde edilir [146]:

Set 1: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere,

$$\Psi(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\xi + E) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right) \quad (3.1.6)$$

dir.

Set 2: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere,

$$\Psi(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} (\xi + E) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right) \quad (3.1.7)$$

dir.

Set 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere,

$$\Psi(\xi) = -\ln \left(\frac{\lambda}{e^{\lambda(\xi+E)} - 1} \right) \quad (3.1.8)$$

dir.

Set 4: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere,

$$\Psi(\xi) = \ln \left(-\frac{2\lambda(\xi + E) + 4}{\lambda^2(\xi + E)} \right) \quad (3.1.9)$$

dir.

Set 5: $\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere,

$$\Psi(\xi) = \ln(\xi + E) \quad (3.1.10)$$

dir ve $\xi + E > 0$ dır.

Burada $A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_M, E, \lambda, \mu$ sabitlerdir ve daha sonra hesaplanacaktır. (3.1.4) eşitliğinde U 'nun en yüksek dereceden doğrusal olmayan terimi ve en yüksek mertebeden türevi arasında homojen dengeleme terimi kullanılarak N ve M arasında bir ilişki kurulur.

Adım 4: (3.1.5) denklemi ve çözüm aileleri (3.1.4) eşitliğinde yerine yazıldığında, $e^{\Psi(\xi)}$ terimlerini içeren bir polinom elde edilir. $A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_M, E, \lambda, \mu$ terimlerini ifade eden cebirsel denklem sistemi $e^{\Psi(\xi)}$ 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bulunur. Son olarak katsayı değerleri eşitlik (3.1.4)'te yerine yazılarak hareketli dalga çözümleri elde edilir.

3.2. Uyumlu Kesirli q-Shehu Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (UKq-SHADM)

Bu kısımda uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır.

$$D_t^\mu v(x, y, t) + Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t) = f(x, y, t), n - 1 < \mu \leq n \quad (3.2.1)$$

kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada M doğrusal operatörü, N doğrusal olmayan operatörü, $f(x, y, t)$ 'de kaynak terimini göstermektedir. D_t^μ , μ -yüncü mertebeden bir uyumlu kesirli türev operatörüdür [45]. (3.2.1) denkleminde $v(x, y, 0) = g(x, y)$ başlangıç şartı

$$v(x, y, 0) = g(x, y) \quad (3.2.2)$$

olsun. İlk önce (3.2.1) denkleminde uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanarak ve başlangıç koşulu kullanılarak

$$\frac{S}{u} \mathbb{S}[v(x, y, t)] - v(x, y, 0) + \mathbb{S}[Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t)] = \mathbb{S}[f(x, y, t)] \quad (3.2.3)$$

eşitliği elde edilir. (3.2.3) denklemi sadeleştirildiğinde

$$\mathbb{S}[v(x, y, t)] - \frac{u}{S} v(x, y, 0) + \frac{u}{S} \mathbb{S}[Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t) - f(x, y, t)] = 0 \quad (3.2.4)$$

ifadesi bulunur. HAM yardımıyla doğrusal olmayan operatör

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, y, t; q)] &= \mathbb{S}[\varphi(x, y, t; q)] - \frac{u}{S} v(x, y, t; q)(0^+) + \frac{u}{S} \mathbb{S}[M\varphi(x, y, t; q) \\ &+ N\varphi(x, y, t; q) - f(x, y, t)] \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q \in [0, \frac{1}{n}]$ 'dir ve $\varphi(x, y, t; q)$, x, y, t ve q 'nin reel bir fonksiyonudur.

Daha sonar

$$(1 - nq) \mathbb{S}[\varphi(x, y, t; q) - v_0(x, y, t)] = hqN[\varphi(x, y, t; q)] \quad (3.2.6)$$

olacak şekilde bir homotopi kurulur. Burada $q \in [0, \frac{1}{n}]$ ($n \geq 1$) gömme parametresini, $h \neq 0$ sıfırdan farklı yardımcı bir parametreyi, $\varphi(x, y, t; q)$ bilinmeyen fonksiyonu, $v_0(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ 'nin başlangıç şartını ve $\mathbb{S}$ sembolü uyumlu kesirli Shehu dönüşümünü göstermektedir. (3.2.6) eşitliğinde sırasıyla $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için

$$\varphi(x, y, t; 0) = v_0(x, y, t), \quad \varphi\left(x, y, t; \frac{1}{n}\right) = v(x, y, t) \quad (3.2.7)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu nedenle q , 0'dan $\frac{1}{n}$ 'ye genişletilerek $\varphi(x, y, t; q)$ çözümü $v_0(x, y, t)$ 'den $v(x, y, t)$ çözümüne yakınsar. Taylor teoremi yardımıyla $\varphi(x, y, t; q)$ ifadesinin q 'nin kuvvet serisine açılımı aşağıdaki şekildedir:

$$\varphi(x, y, t; q) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t) q^m. \quad (3.2.8)$$

Burada,

$$v_m(x, y, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, y, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (3.2.9)$$

şeklindedir. Homotopide uygun n ve h seçimi ile (3.2.8) serisi $q = \frac{1}{n}$ 'de yakınsar ve böylece (3.2.1) denkleminin çözümlerinden biri

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (3.2.10)$$

şeklinde elde edilir. (3.2.6) sıfıncı mertebeden deformasyon denkleminin q 'ya göre m –kez türevi alınır, $m!$ 'e bölünür ve $q = 0$ alınır

$$\mathbb{S}[v_m(x, y, t) - k_m v_{m-1}(x, y, t)] = h \mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1}) \quad (3.2.11)$$

olur. Burada vektörler

$$\vec{v}_m = \{v_0(x, y, t), v_1(x, y, t), \dots, v_m(x, y, t)\} \quad (3.2.12)$$

ile tanımlıdır. (3.2.11) denklemin ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında

$$v_m(x, y, t) = k_m v_{m-1}(x, y, t) + h \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1})] \quad (3.2.13)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1}) = & \mathbb{S}[v_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \left(\frac{u}{s} v_0(x, y, t) + \frac{u}{s} \mathbb{S}[f(x, y, t)]\right) \\ & + \frac{u}{s} \mathbb{S}[M v_{m-1}(x, y, t) + H_{m-1}(x, y, t)] \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

ve

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

dir. (3.2.14)'te H_m bir homotopi polinomudur ve

$$H_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, y, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \varphi(x, y, t; q) = \varphi_0 + q\varphi_1 + q^2\varphi_2 + \dots \quad (3.2.16)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (3.2.13) ve (3.2.14) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} v_m(x, y, t) = & (k_m + h)v_{m-1}(x, y, t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) h ({}_c\mathbb{S}_\alpha)^{-1} \left(\frac{u}{s} v_0(x, y, t) \right. \\ & \left. + \frac{u}{s} \mathbb{S}[f(x, y, t)]\right) + h ({}_c\mathbb{S}_\alpha)^{-1} \left[\frac{u}{s} \mathbb{S}(Mv_{m-1}(x, y, t) + H_{m-1}(x, y, t))\right] \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

genel iterasyon formülü elde edilir. Son olarak (3.2.17) eşitliği çözülerek $v_m(x, y, t)$ yinelemeli terimleri elde edilmektedir. Böylece (3.2.1) denkleminin UKq-SHADM seri çözümü

$$v(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t) \quad (3.2.18)$$

şeklinde verilmektedir.

4. METOTLARIN UYGULANMASI

Bu bölümde, ilk olarak geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ile doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denkleminin, doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sisteminin ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denkleminin hareketli dalga çözümleri elde edilmiş ve bu çözümlerin iki boyutlu, üç boyutlu, dış hat ve yoğunluk grafikleri çizdirilmiştir. İkinci olarak uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu ile doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denkleminin ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiş ve bu çözümlerin iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri çizdirilmiştir.

4.1. Doğrusal Olmayan Uyumlu Zaman-Kesirli Mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa Denklemine GÜFM'nin Uygulanması

Doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denklemini [60, 63]

$$\begin{aligned} & u_{xxxxy} + 4u_{xxy}u_x + 2u_{xxx}u_y + 6u_{xy}u_{xx} - \alpha u_{yyy} - 2\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\theta u}{\partial t^\theta} \right) \right) \\ & = 0, \theta \in (0,1] \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

ele alalım. Burada α ve β sıfırdan farklı reel sabitlerdir. İlk olarak hareketli dalga dönüşümünü

$$u(x, y, t) = u(\xi), \xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta} \quad (4.1.2)$$

yazalım. (4.1.2) ile verilen dönüşüm ve gerekli türev terimleri (4.1.1) denkleminde yerine yazılarak

$$k^4 r u''' + 3k^3 r (u')^2 - (\alpha r^3 - 2k^2 c \beta) u' = 0 \quad (4.1.3)$$

doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemi elde edilmektedir. $u' = V$ değişken değiştirmesi (4.1.3) denkleminde yerine yazıldığında

$$k^4 r V'' + 3k^3 r V^2 - (\alpha r^3 - 2k^2 c \beta) V = 0 \quad (4.1.4)$$

doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşmektedir. Burada $u' = V$ 'dir ve ayrıca integral sabitleri sıfırdır. (4.1.4) denkleminde dengeleme terimi uygulandığında

$$n = m + 2 \quad (4.1.5)$$

ilişkisi elde edilir.

$m = 1$ seçilirse $n = 3$ olarak bulunur. m ve n değerleri için

$$V(\xi) = \frac{A_0 + A_1 e^{-\psi} + A_2 e^{-2\psi} + A_3 e^{-3\psi}}{B_0 + B_1 e^{-\psi}} \quad (4.1.6)$$

eşitliği yazılır. (4.1.4)'teki gerekli terime göre (4.1.6) denkleminin yeniden düzenlendiğinde $e^{-\psi(\xi)}$ katsayılı cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

Mathematica kullanılarak elde edilen bazı uygun katsayılar aşağıda verilmiştir:

Durum-1:

$$A_0 = -2k\mu B_0,$$

$$A_1 = -2k(\lambda B_0 + \mu B_1),$$

$$A_2 = -2k(B_0 + \lambda B_1),$$

$$A_3 = -2k B_1,$$

$$c = \frac{r^3 \alpha - k^4 r (\lambda^2 - 4\mu)}{2k^2 \beta}$$

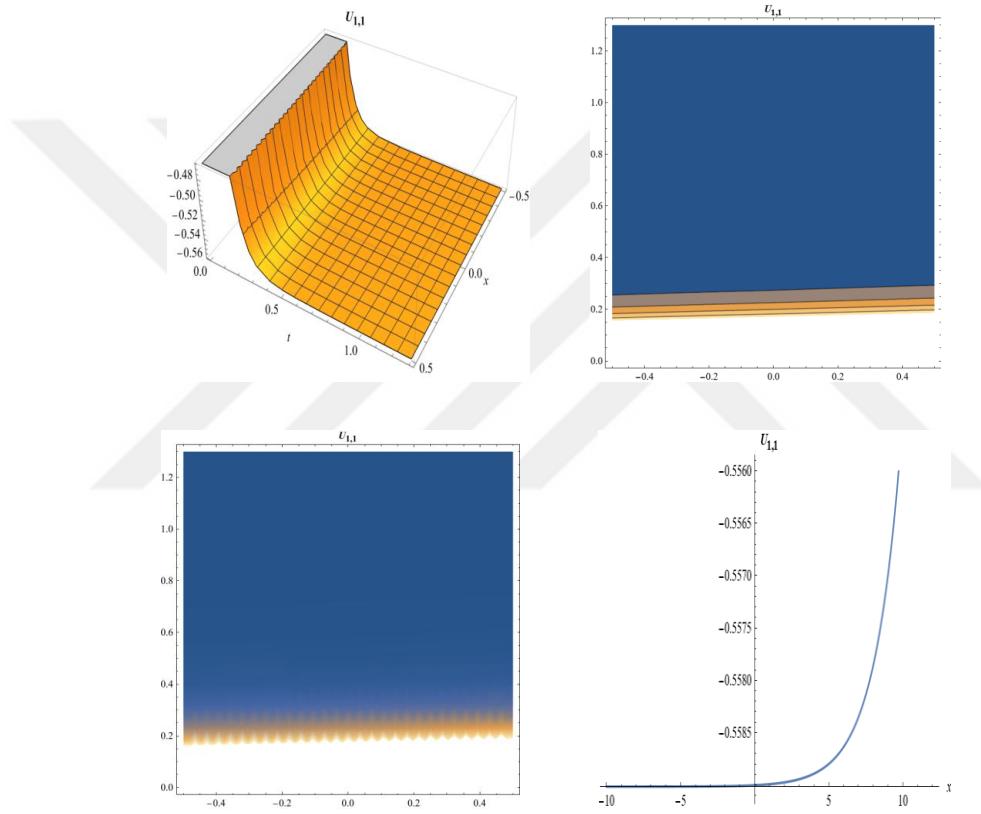
şeklindedir. (4.1.4) denkleminde bu katsayılar kullanılarak çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

Çözüm 4.1.1. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,1}(x, t) = \frac{k.(\lambda^3 - 4\lambda\mu + 2\Gamma\mu\sinh[\vartheta\Gamma])}{\lambda^2 - 2\mu + 2\mu\cosh[\vartheta\Gamma]} \quad (4.1.7)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = kx + ry - c\frac{t^\theta}{\theta}$, $\vartheta = E + \xi$, $\Gamma = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}$ 'dür.

Şekil 4.1'de (4.1.7) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



Şekil 4.1. (4.1.7) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 1.5, A_1 = -2.13, A_2 = -1.59, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.6, t = 0.1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

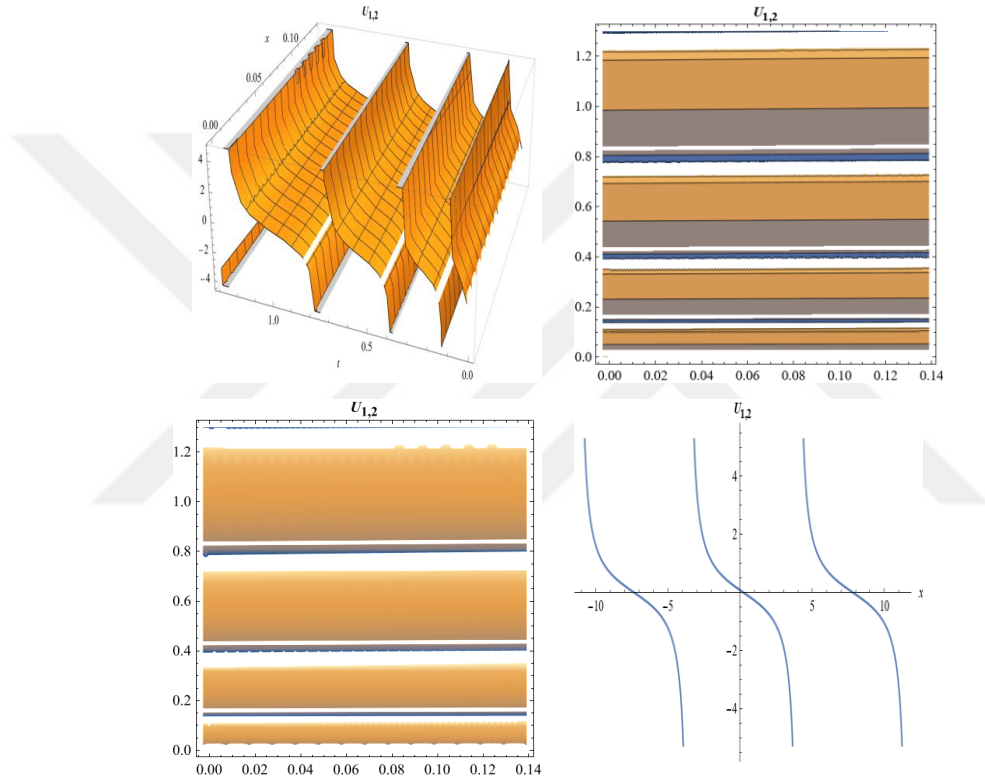
Çözüm 4.1.2. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,2}(x, t) = \left[\frac{1}{3}k(\lambda^2 - 4\mu) \left(-\vartheta + \frac{3\lambda}{\lambda^2 - 2\mu + 2\mu\cos[\vartheta\zeta]} \right) \right]$$

$$+ \frac{2k\zeta\mu \sin[\vartheta\zeta]}{\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cos[\vartheta\zeta]} \Bigg] \quad (4.1.8)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}$, $\vartheta = E + \xi$, $\zeta = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}$ 'dür.

Şekil 4.2'de (4.1.8) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



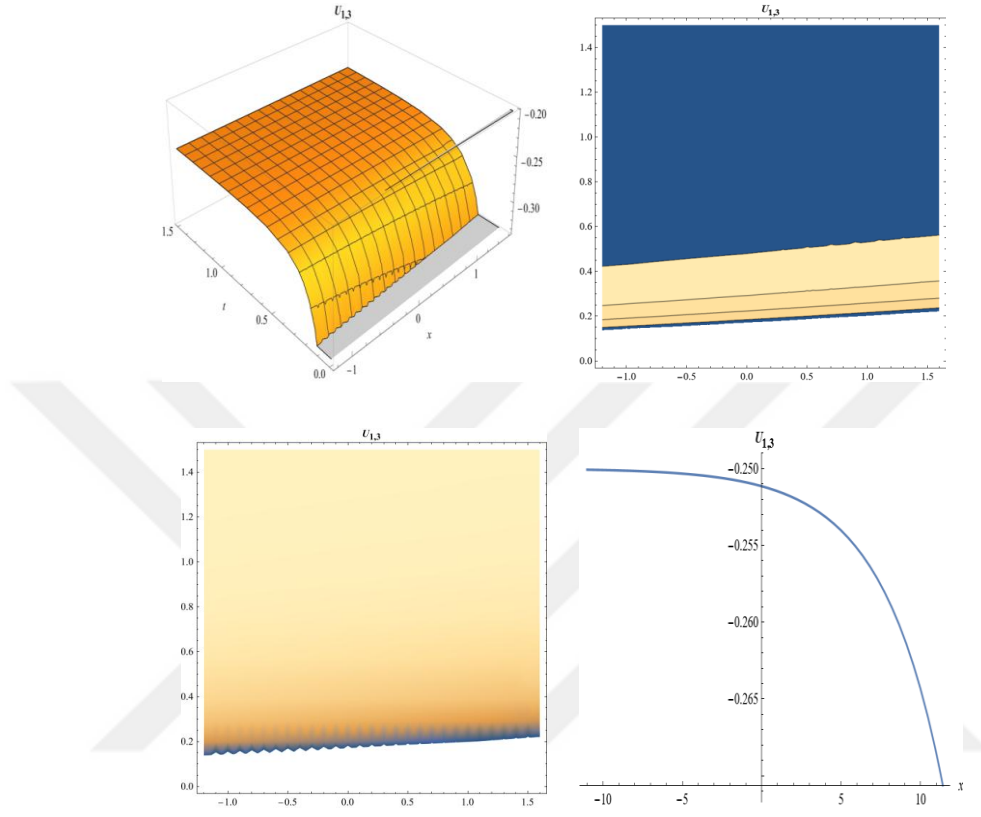
Şekil 4.2. (4.1.8) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.70, A_1 = -1.59, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -1.8$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.1.3. $\mu = 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,3}(x, t) = k\lambda \coth \left[\frac{1}{2} \vartheta \right] \lambda \quad (4.1.9)$$

olarak elde edilir. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}$, $\vartheta = E + \xi$ 'dir.

Şekil 4.3'te (4.1.9) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



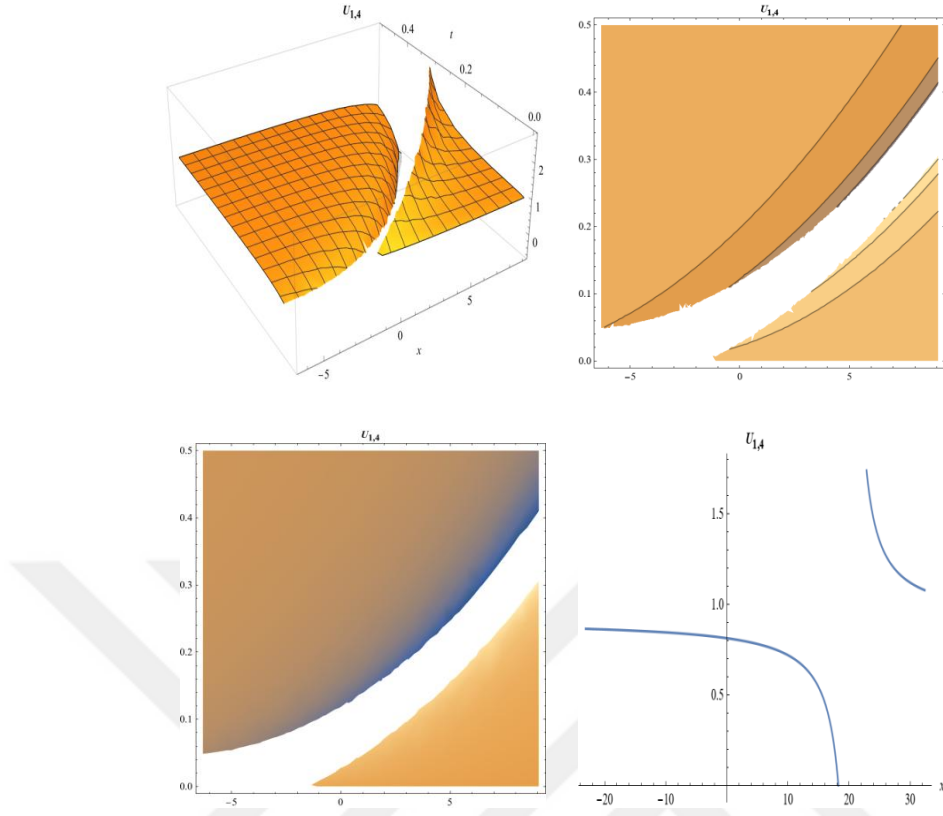
Şekil 4.3. (4.1.9) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, \theta = 0.5, \gamma = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.48, A_1 = -0.6, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = 0$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.1.4. $\mu \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,4}(x, t) = \frac{1}{2} k \left(\frac{4\lambda}{2 + \vartheta\lambda} + \lambda(2 + \vartheta\lambda) - 4\xi\mu \right) \quad (4.1.10)$$

olarak elde edilir. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}, \vartheta = E + \xi$ 'dir.

Şekil 4.4'te (4.1.10) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



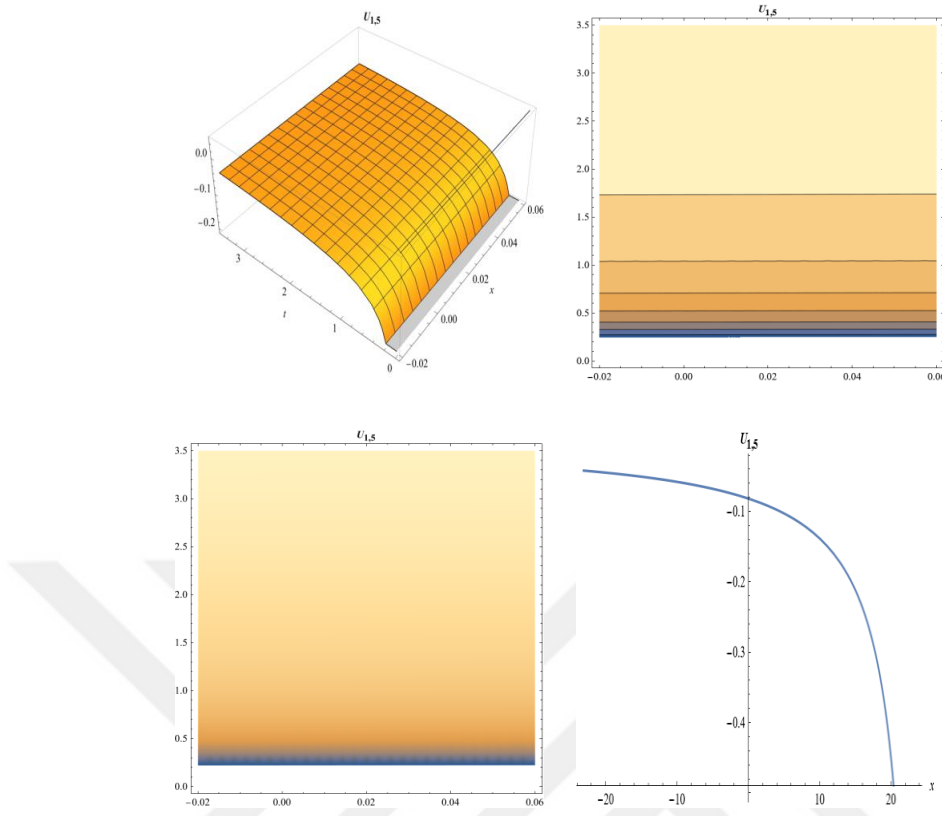
Şekil 4.4. (4.1.10) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, \theta = 0.5, \gamma = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.50, A_1 = -1.53, A_2 = -1.26, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.60$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.1.5. $\mu = 0, \lambda = 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,5}(x, t) = \frac{2k}{\vartheta} \quad (4.1.11)$$

olarak elde edilir. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}, \vartheta = E + \xi$ 'dir.

Şekil 4.5'te (4.1.11) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



Şekil 4.5. (4.1.11) çözümünün $\lambda = 0, \mu = 0, \theta = 0.5, k = 0.25, A_3 = -0.33, \alpha = 1.35, \beta = 1.3, B_0 = 1.2, A_0 = 0, c = 3.50, A_1 = 0, A_2 = -0.6, B_1 = 0.66, E = 0.82, y = 0.1, r = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Durum-2:

$$A_0 = -\frac{1}{3}k(\lambda^2 + 2\mu)B_0,$$

$$A_1 = -\frac{1}{3}k(6\lambda B_0 + (\lambda^2 + 2\mu)B_1),$$

$$A_2 = -2k(B_0 + \lambda B_1),$$

$$A_3 = -2kB_1,$$

$$c = \frac{r^3\alpha + k^4r(\lambda^2 - 4\mu)}{2k^2\beta}$$

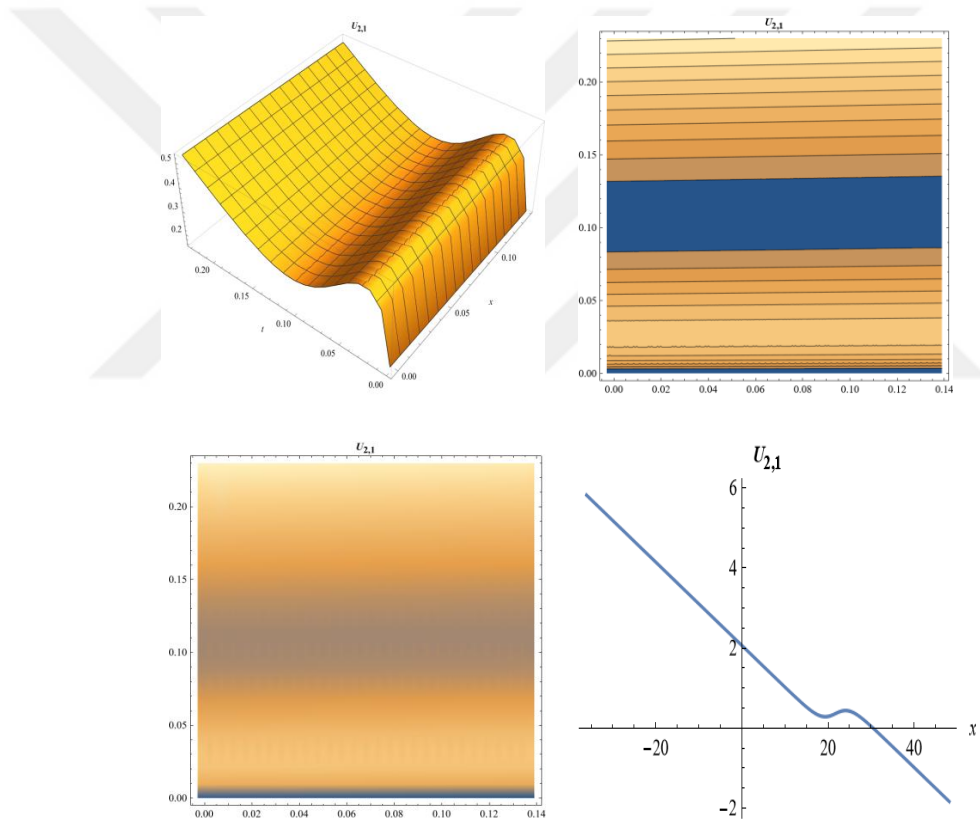
şeklindedir. (4.1.4) denkleminde bu katsayılar kullanılarak çözümler aşağıdaki gibi elde edilir

Çözüm 4.1.6. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,1}(x, t) = \left[\frac{1}{3}k(\lambda^2 - 4\mu) \left(-\vartheta + \frac{3\lambda}{\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cosh[\vartheta\Phi]} \right) + \frac{2k\Phi\mu \sinh[\vartheta\Phi]}{\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cosh[\vartheta\Phi]} \right] \quad (4.1.12)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}$, $\vartheta = E + \xi$, $\Phi = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}$ 'dür.

Şekil 4.6'da (4.1.12) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



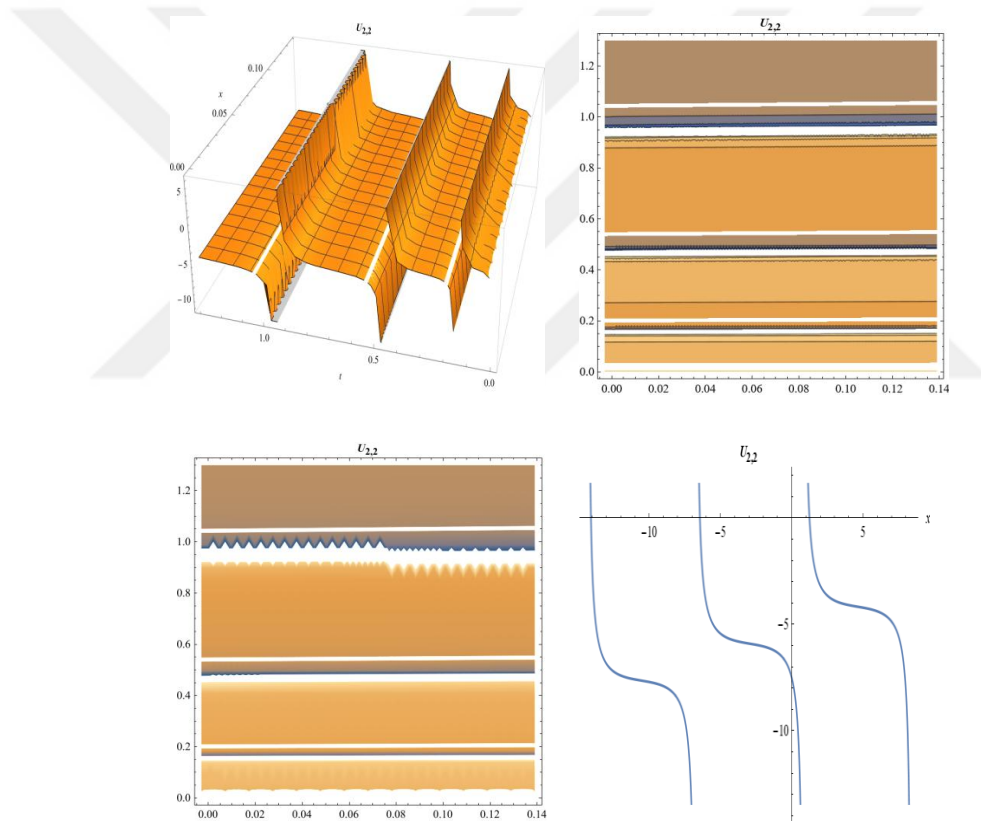
Şekil 4.6. (4.1.12) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.59, A_1 = -2.40, A_2 = -1.59, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -1.1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.1.7. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,2}(x,t) = \left[\frac{1}{3}k(\lambda^2 - 4\mu) \left(-\vartheta + \frac{3\lambda}{\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cosh[\vartheta\zeta]} \right) + \frac{2k\zeta\mu \sinh[\vartheta\zeta]}{\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cosh[\vartheta\zeta]} \right] \quad (4.1.13)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}$, $\vartheta = E + \xi$, $\zeta = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}$ dür.

Şekil 4.7’de (4.1.13) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



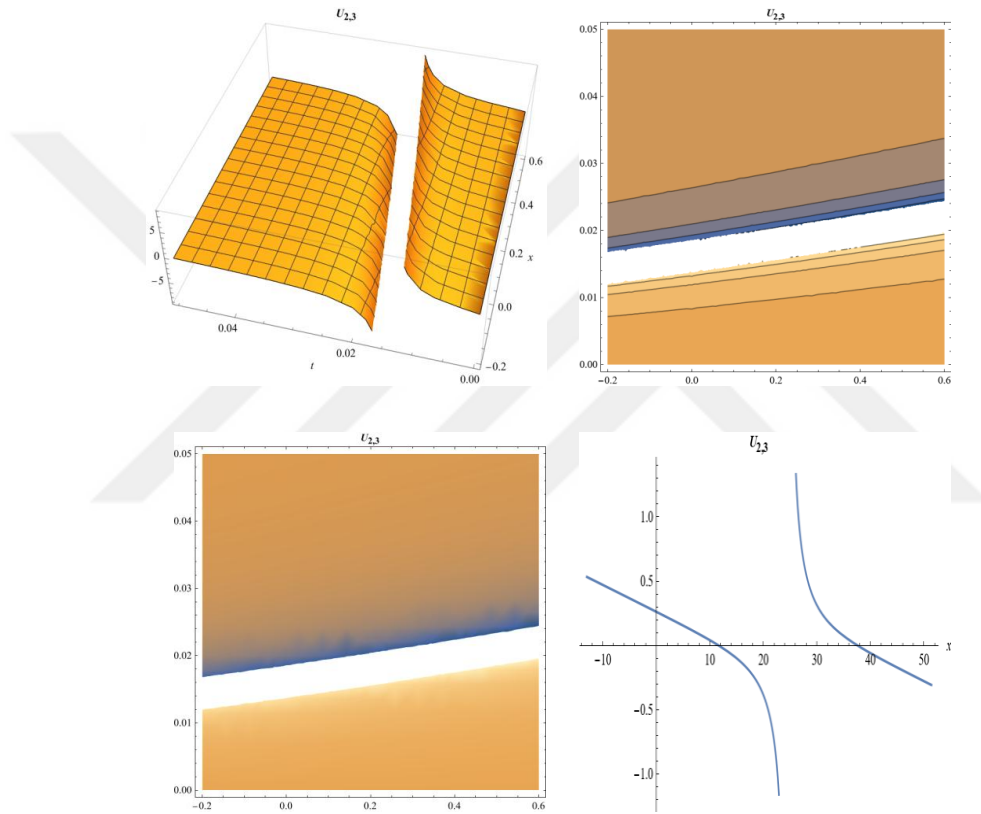
Şekil 4.7. (4.1.13) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.30, A_1 = -0.98, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.7$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.1.8. $\mu = 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,3}(x, t) = -\frac{1}{3}k\vartheta\lambda^2 + k\lambda\coth\left[\frac{1}{2}\vartheta\lambda\right] \quad (4.1.14)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = kx + ry - c\frac{t^\theta}{\theta}$, $\vartheta = E + \xi$ 'dir.

Şekil 4.8'de (4.1.14) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



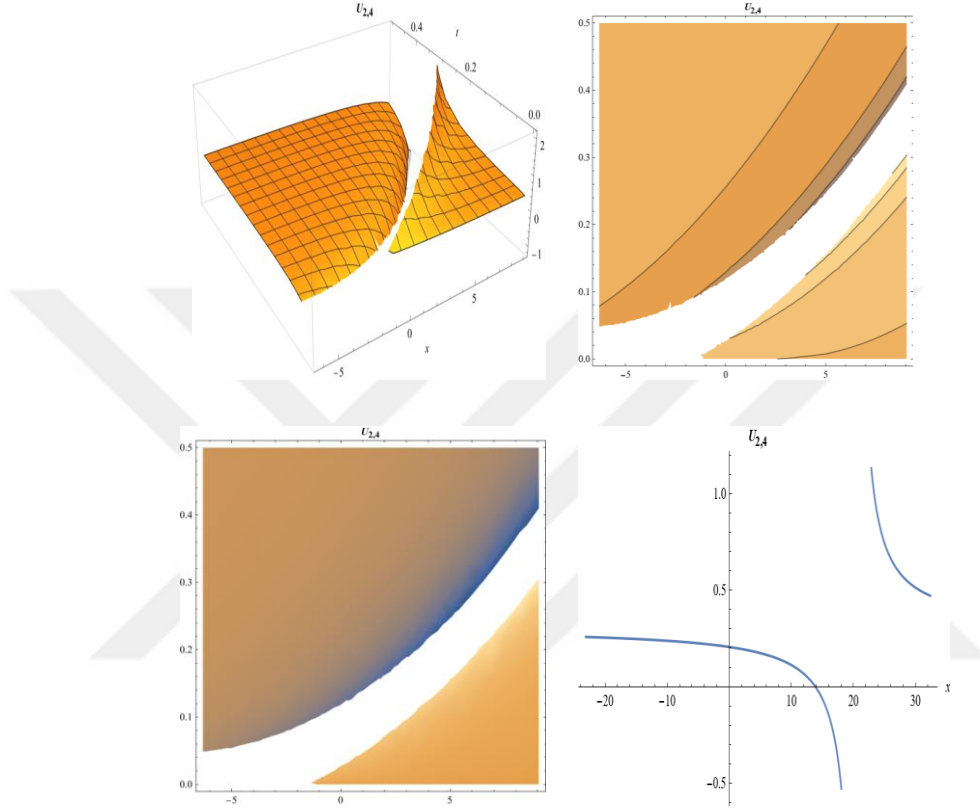
Şekil 4.8. (4.1.14) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.52, A_1 = -0.65, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.1.9. $\mu \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,4}(x, t) = \frac{1}{6}k \left(\frac{12\lambda}{2 + \vartheta\lambda} + \lambda(2 + \vartheta\lambda) - 4\xi\mu \right) \quad (4.1.15)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}, \vartheta = E + \xi$ dir.

Şekil 4.9'da (4.1.15) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



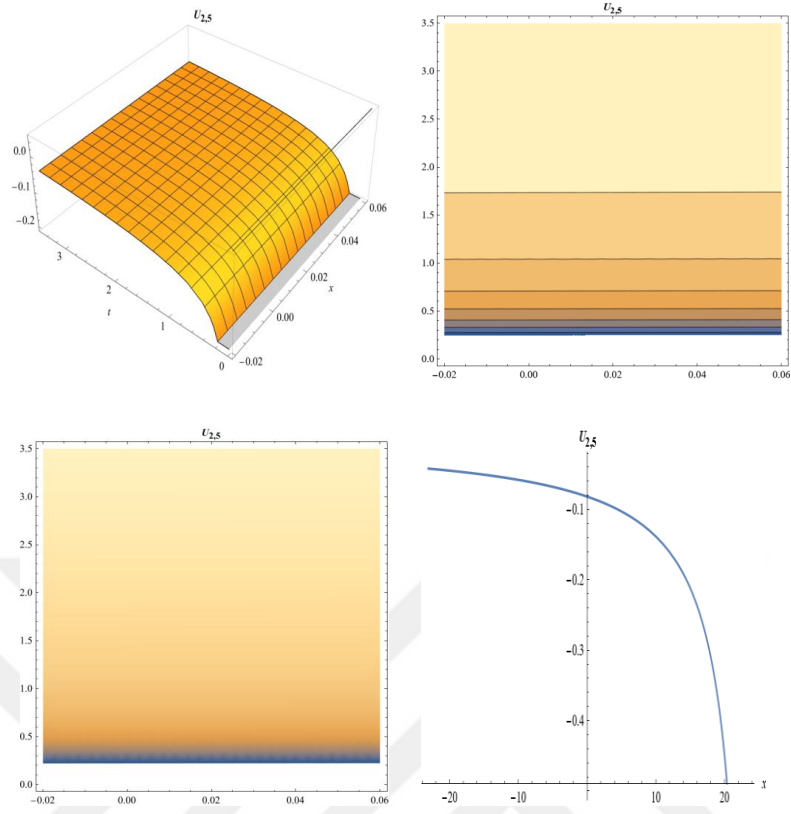
Şekil 4.9. (4.1.15) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.50, A_1 = -1.53, A_2 = -1.26, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.60$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.1.10. $\mu = 0, \lambda = 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,5}(x, t) = \frac{2k}{\vartheta} \quad (4.1.16)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = kx + ry - c \frac{t^\theta}{\theta}, \vartheta = E + \xi$ dir.

Şekil 4.10'da (4.1.16) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



Şekil 4.10. (4.1.16) çözümünün $\lambda = 0, \mu = 0, \theta = 0.5, k = 0.25, A_3 = -0.33, \alpha = 1.35, \beta = 1.3, B_0 = 1.2, A_0 = 0, c = 3.50, A_1 = 0, A_2 = -0.6, B_1 = 0.66, E = 0.82, y = 0.1, r = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

4.2. Doğrusal Olmayan (2+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito Denklem Sistemine GÜFM'nin Uygulanması

Doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sistemini [73]

$$v_t + u_{xxt} + 3(vz)_x + \alpha u_x = 0,$$

$$u_y = v_x, \tag{4.2.1}$$

$$u_t = z_x$$

ele alalım. Burada u fiziksel alan, v ve z fiziksel alan türevlerinin potansiyelleridir İlk olarak hareketli dalga dönüşümlerini

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= u(\xi), \xi = k(x + y - ct), \\ v(x, y, t) &= v(\xi), \xi = k(x + y - ct), \\ z(x, y, t) &= z(\xi), \xi = k(x + y - ct) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

yazalım. (4.2.2) ile verilen dalga dönüşümlerinin (4.2.1) denklem sistemine göre uygun türevleri alınarak

$$\left. \begin{aligned} v_t &= -ckv', \\ u_{xtt} &= -ck^3u''', \\ u_x &= ku', \\ z_x &= kz', \\ u_y &= ku', \\ v_x &= kv', \\ u_t &= -cku' \end{aligned} \right\} \quad (4.2.3)$$

elde edilmektedir. (4.2.3) eşitliğinde elde edilen türev terimleri (4.2.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} -ckv' - ck^3u''' + 3ku'z + 3kuz' + \alpha ku' &= 0, \\ ku' &= kv', \\ -cku' &= kz' \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemine dönüşmektedir. (4.2.4) denklem sistemi yeniden düzenlendiğinde

$$\left. \begin{aligned} -cv' - ck^2u''' + 3(uz)' + \alpha u' &= 0, \\ u' &= v', \\ -cu' &= z' \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Daha sonra (4.2.5)'teki denklemlerin ξ 'ye göre integralleri alınarak

$$\left. \begin{aligned} -cv - ck^2u'' + 3(uz) + \alpha u &= 0, \\ u &= v, \\ -cu &= z \end{aligned} \right\} \quad (4.2.6)$$

bulunur. (4.2.6) denklem sistemi yeniden düzenlendiğinde

$$-cu - ck^2u'' - 3cu^2 + \alpha u = 0 \quad (4.2.7)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. (4.2.7) denkleminde dengeleme prensibi uygulandığında

$$n = m + 2 \quad (4.2.8)$$

ilişkisi bulunur.

$m = 1$ seçilirse $n = 3$ olarak bulunur. m ve n değerleri için

$$u(\xi) = \frac{A_0 + A_1 e^{-\Omega} + A_2 e^{-2\Omega} + A_3 e^{-3\Omega}}{B_0 + B_1 e^{-\Omega}} \quad (4.2.9)$$

eşitliği yazılır. (4.2.6)'daki gerekli terime göre (4.2.9) eşitliği yeniden düzenlendiğinde $e^{-\Psi(\xi)}$ katsayılı cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

Mathematica kullanılarak elde edilen bazı uygun katsayılar aşağıda verilmiştir:

Durum-1:

$$A_0 = -\frac{1}{3}k^2(\lambda^2 + 2\mu)B_0,$$

$$A_1 = -\frac{1}{3}k^2(6\lambda B_0 + (\lambda^2 + 2\mu)B_1),$$

$$A_2 = -2k^2(B_0 + \lambda B_1),$$

$$A_3 = -2k^2B_1,$$

$$c = \frac{\alpha}{1 - k^2(\lambda^2 - 4\mu)}$$

şeklindedir. (4.2.7) denkleminde bu katsayılar kullanılarak çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

Çözüm 4.2.1. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere (4.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

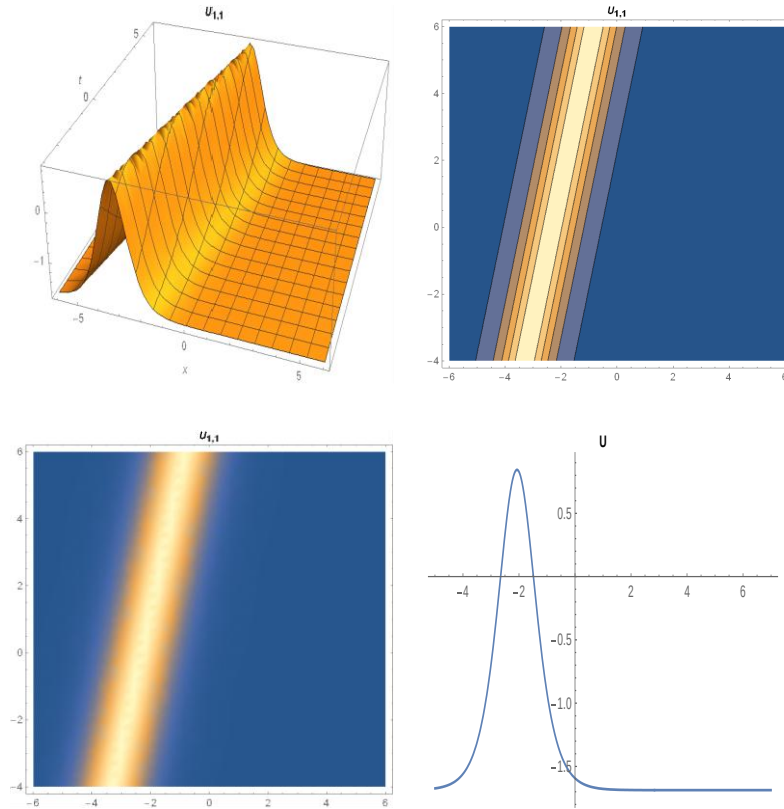
$$u_{1,1}(x, y, t) = \left(\frac{4\mu k^2 \Gamma^2 \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} \Gamma \xi \right]^2}{3 \left(\lambda + \Gamma \tanh \left[\frac{1}{2} (\xi \Gamma) \right] \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{\left(k^2 \Gamma^2 \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} \Gamma \xi \right]^2 \left((\lambda^2 - 2\mu) \cosh[\xi \Gamma] + \lambda \Gamma \sinh[\xi \Gamma] \right) \right)}{3 \left(\lambda + \Gamma \tanh \left[\frac{1}{2} (\xi \Gamma) \right] \right)^2} \right), \quad (4.2.10)$$

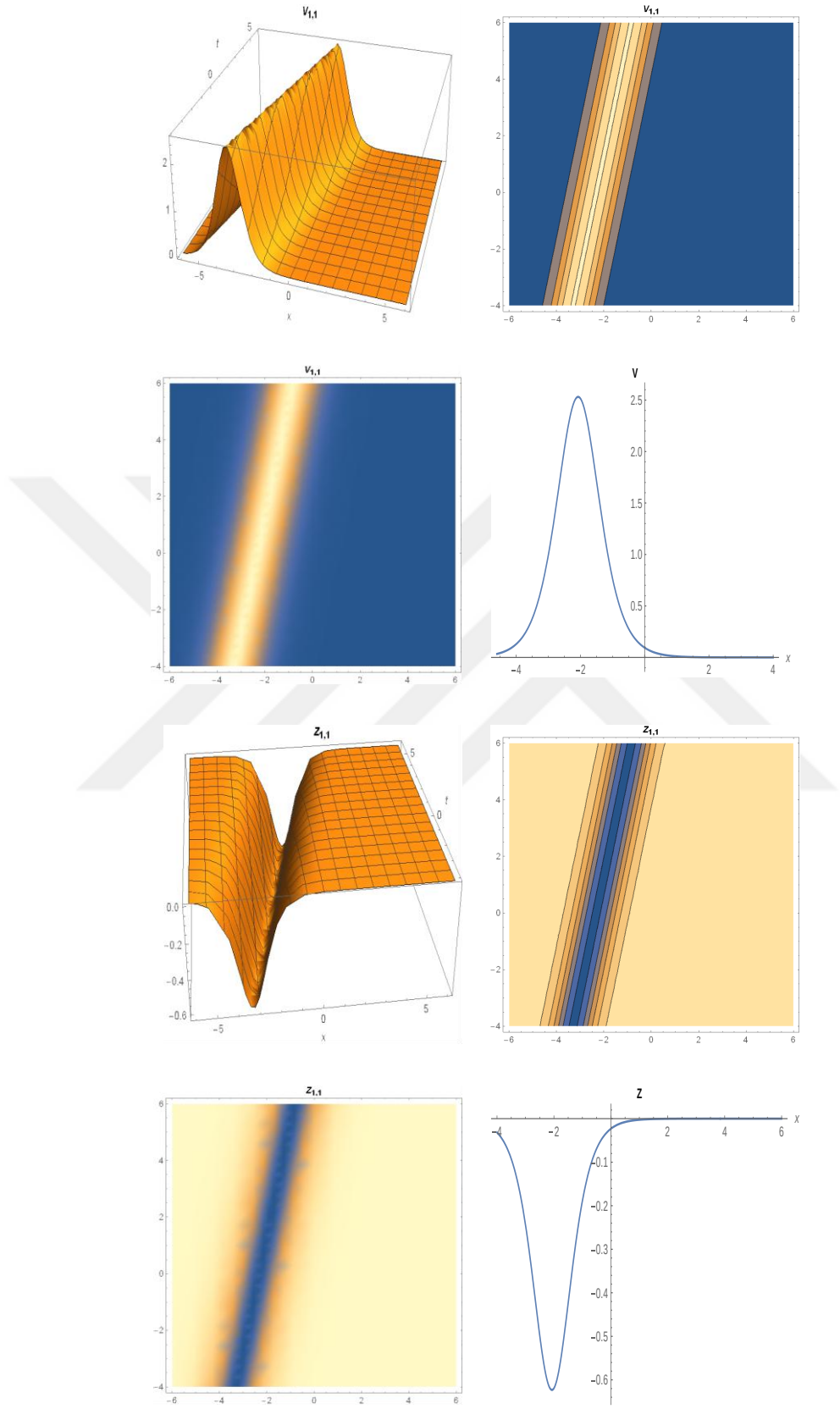
$$v_{1,1}(x, y, t) = \left(\frac{(2k^2 \Gamma^2 \mu (2\mu + (\lambda^2 - 2\mu) \cosh[\xi \Gamma] - \lambda \Gamma \sinh[\xi \Gamma]))}{(\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cosh[\xi \Gamma])^2} \right), \quad (4.2.11)$$

$$z_{1,1}(x, y, t) = - \left(\frac{(2ck^2 \Gamma^2 \mu (2\mu + (\lambda^2 - 2\mu) \cosh[\xi \Gamma] - \lambda \Gamma \sinh[\xi \Gamma]))}{(\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cosh[\xi \Gamma])^2} \right) \quad (4.2.12)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = E + k(-ct + x + y)$, $\Gamma = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}$ dür.

Şekil 4.11’de (4.2.10), (4.2.11) ve (4.2.12) çözümlerine ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.11. (4.2.10), (4.2.11) ve (4.2.12) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 2.5, \mu = 1, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -1.23, A_1 = -9.98, A_2 = -14.96, A_3 = -5.62, c = 0.24, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.2.2. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

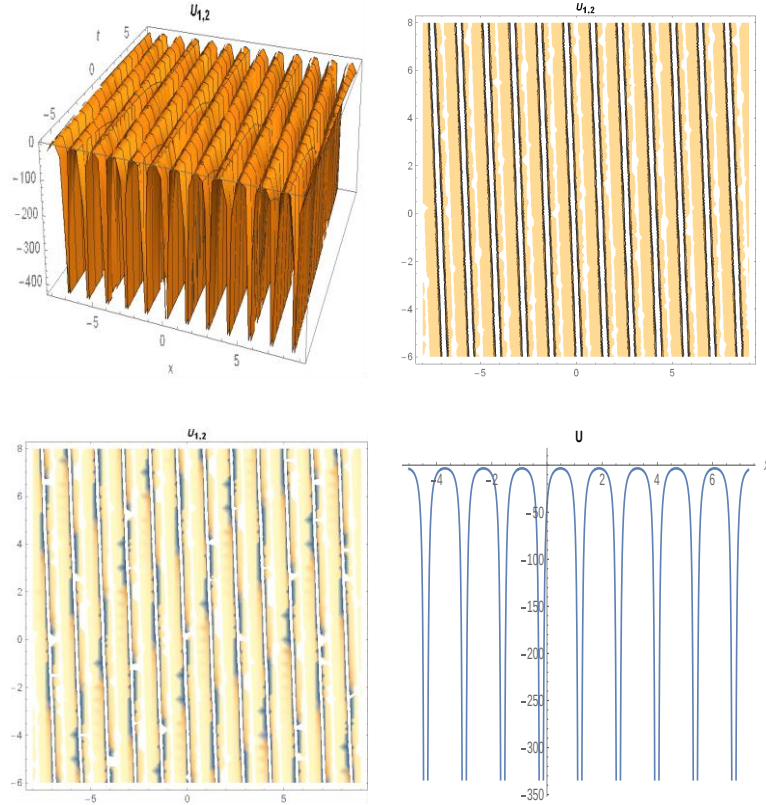
$$u_{1,2}(x, y, t) = \left[\frac{\left(-k^2 \Gamma^2 \sec \left[\frac{1}{2} \theta \xi \right]^2 (4\mu - (\lambda^2 - 2\mu) \cos[\xi \theta]) \right)}{\left(3 \left(\lambda - \Gamma \tanh \left[\frac{1}{2} (\xi \theta) \right] \right)^2 \right)} + \frac{\lambda \Gamma \sin[\xi \theta]}{\left(3 \left(\lambda - \Gamma \tanh \left[\frac{1}{2} (\xi \theta) \right] \right)^2 \right)} \right], \quad (4.2.13)$$

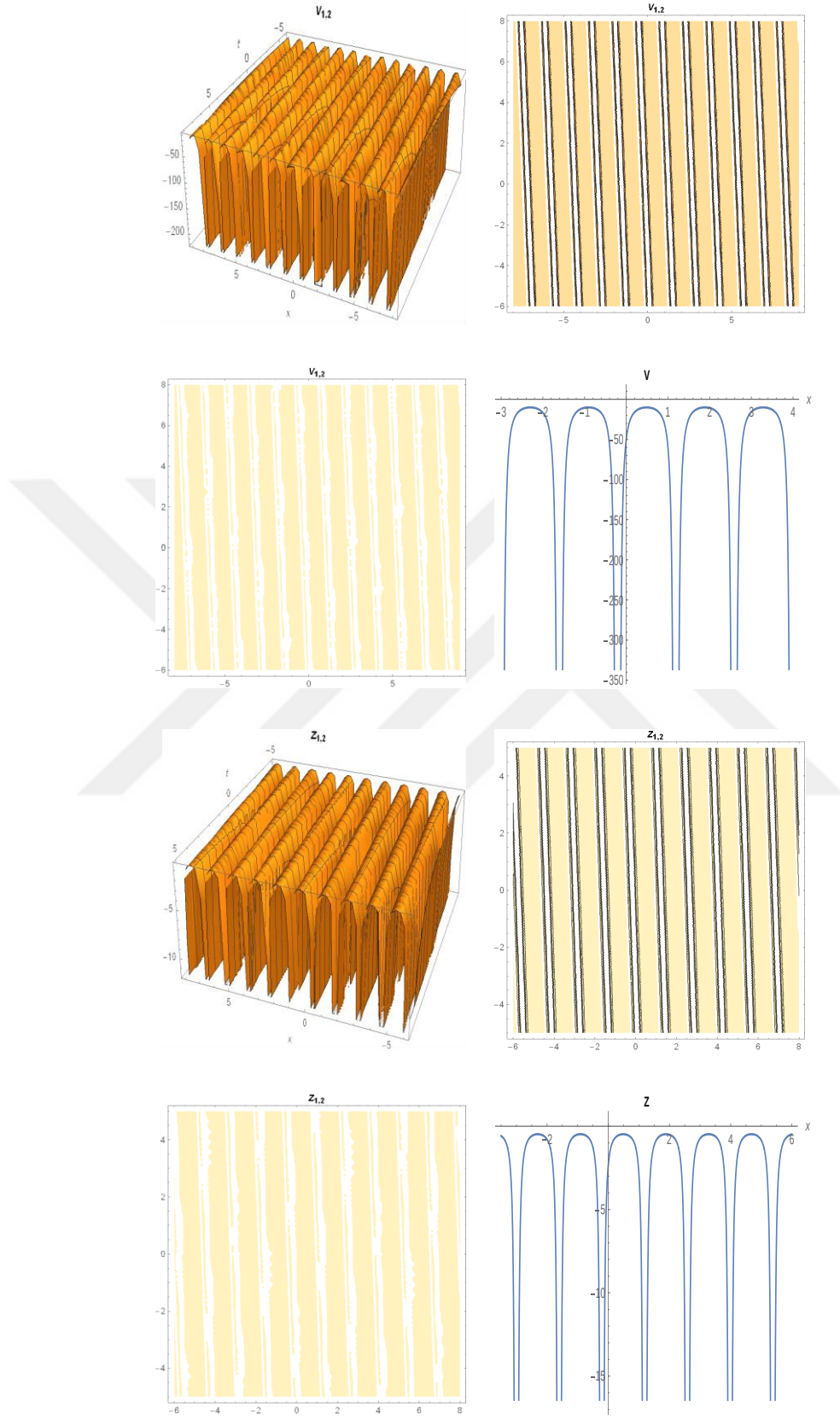
$$v_{1,2}(x, y, t) = \left(\frac{-2k^2 \Gamma^2 \mu (2\mu + (\lambda^2 - 2\mu) \cos[\xi \theta] + \lambda \Gamma \sin[\xi \theta])}{(\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cos[\xi \theta])^2} \right), \quad (4.2.14)$$

$$z_{1,2}(x, y, t) = - \left(\frac{-2ck^2 \Gamma^2 \mu (2\mu + (\lambda^2 - 2\mu) \cos[\xi \theta] + \lambda \Gamma \sin[\xi \theta])}{(\lambda^2 - 2\mu + 2\mu \cos[\xi \theta])^2} \right) \quad (4.2.15)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = E + k(-ct + x + y), \theta = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}$ 'dür.

Şekil 4.12'de (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) çözümlerine ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.12. (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 1, \mu = 2.5, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.9, A_1 = -6.52, A_2 = -6.52, A_3 = -5.62, c = 0.04, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.2.3. $\mu = 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

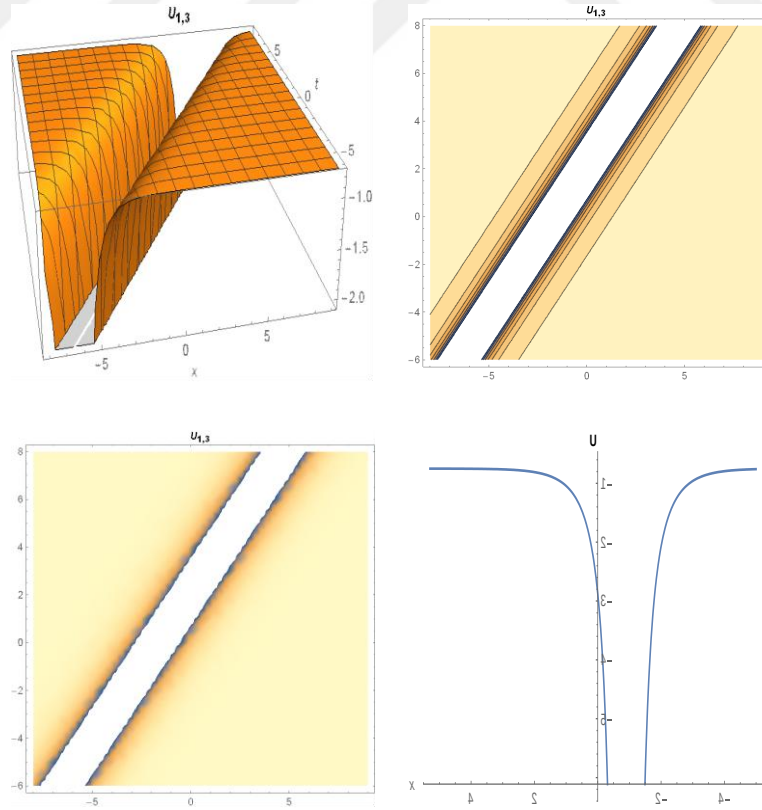
$$u_{1,3}(x, y, t) = -\frac{1}{6}k^2\lambda^2 \left(2 + 3\operatorname{csch} \left[\frac{1}{2}\xi\lambda \right]^2 \right), \quad (4.2.16)$$

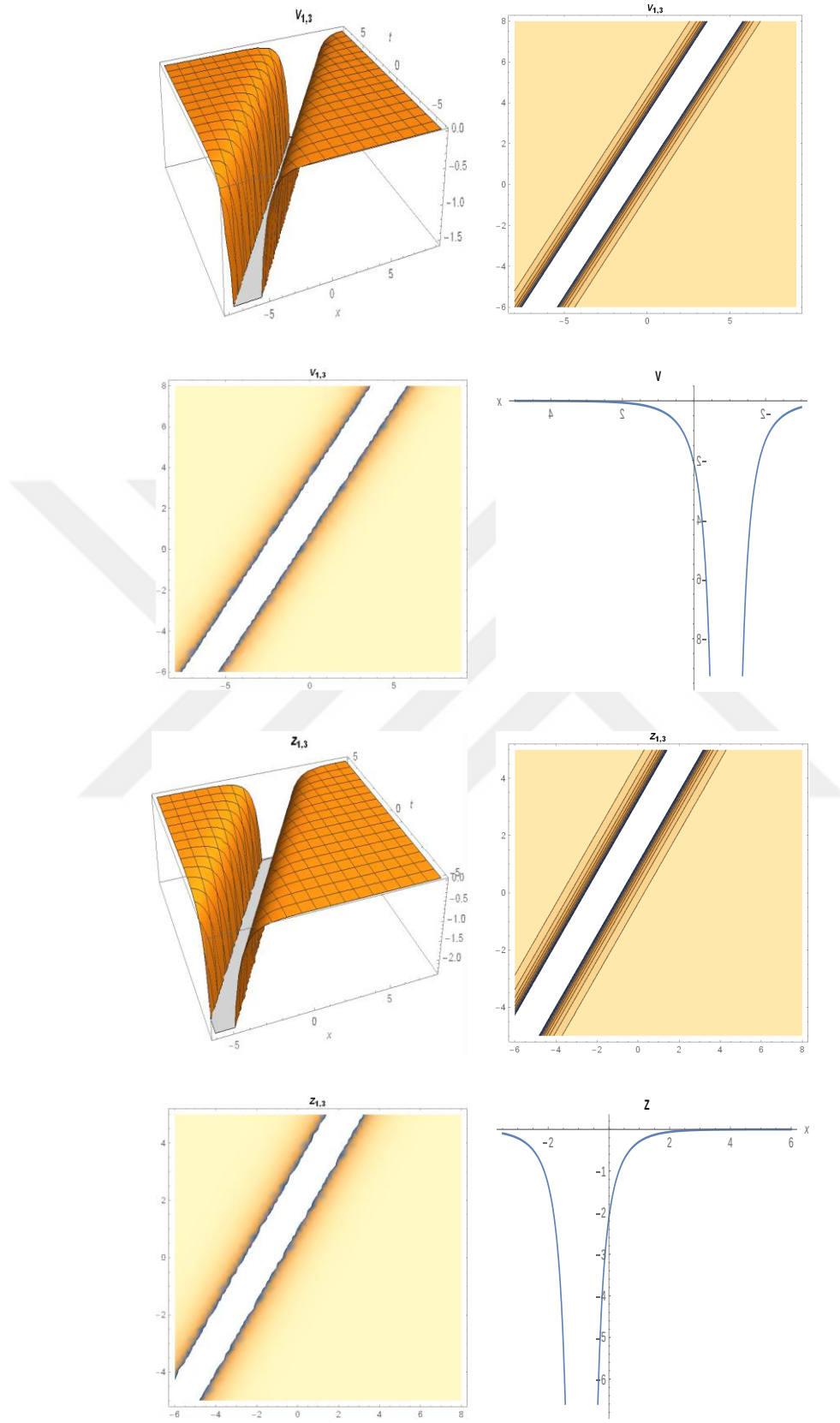
$$v_{1,3}(x, y, t) = -\left(\frac{k^2\lambda^2}{-1 + \cosh \left[\frac{1}{2}\xi\lambda \right]} \right), \quad (4.2.17)$$

$$z_{1,3}(x, y, t) = -\left(\frac{k^2\lambda^2}{-1 + \cosh \left[\frac{1}{2}\xi\lambda \right]} \right) \quad (4.2.18)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = E + k(-ct + x + y)$ 'dir.

Şekil 4.13'te (4.2.16), (4.2.17) ve (4.2.18) çözümlerine ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.13. (4.2.16), (4.2.17) ve (4.2.18) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 1, \mu = 0, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.15, A_1 = -1.83, A_2 = -6.52, A_3 = -5.62, c = 0.8, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.2.4. $\mu \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

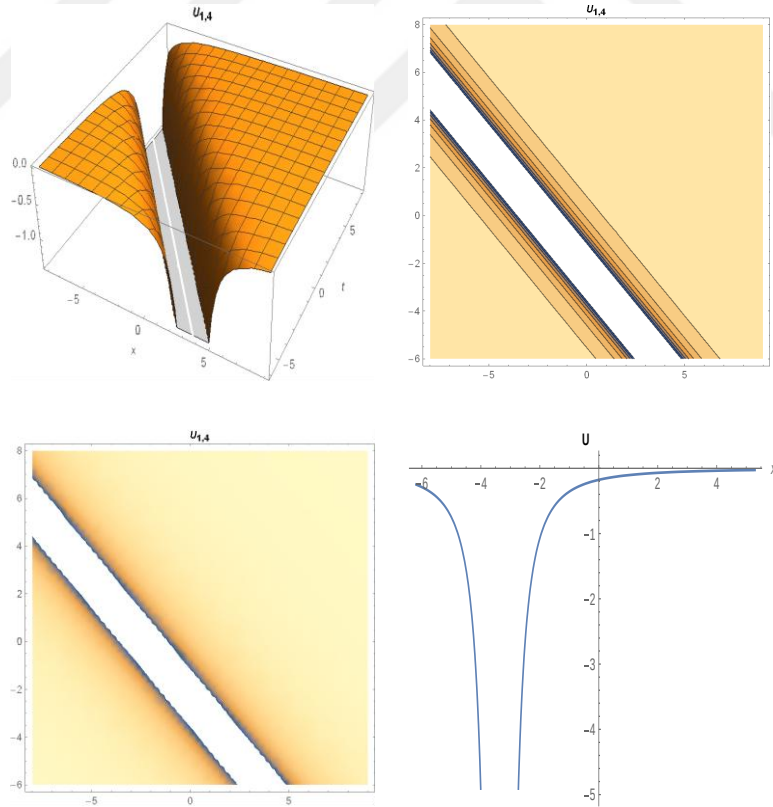
$$u_{1,4}(x, y, t) = \frac{1}{6}k^2 \left(\frac{\lambda^2(-8 + \xi\lambda(4 + \varsigma))}{(2 + \varsigma)^2} - 4\mu \right), \quad (4.2.19)$$

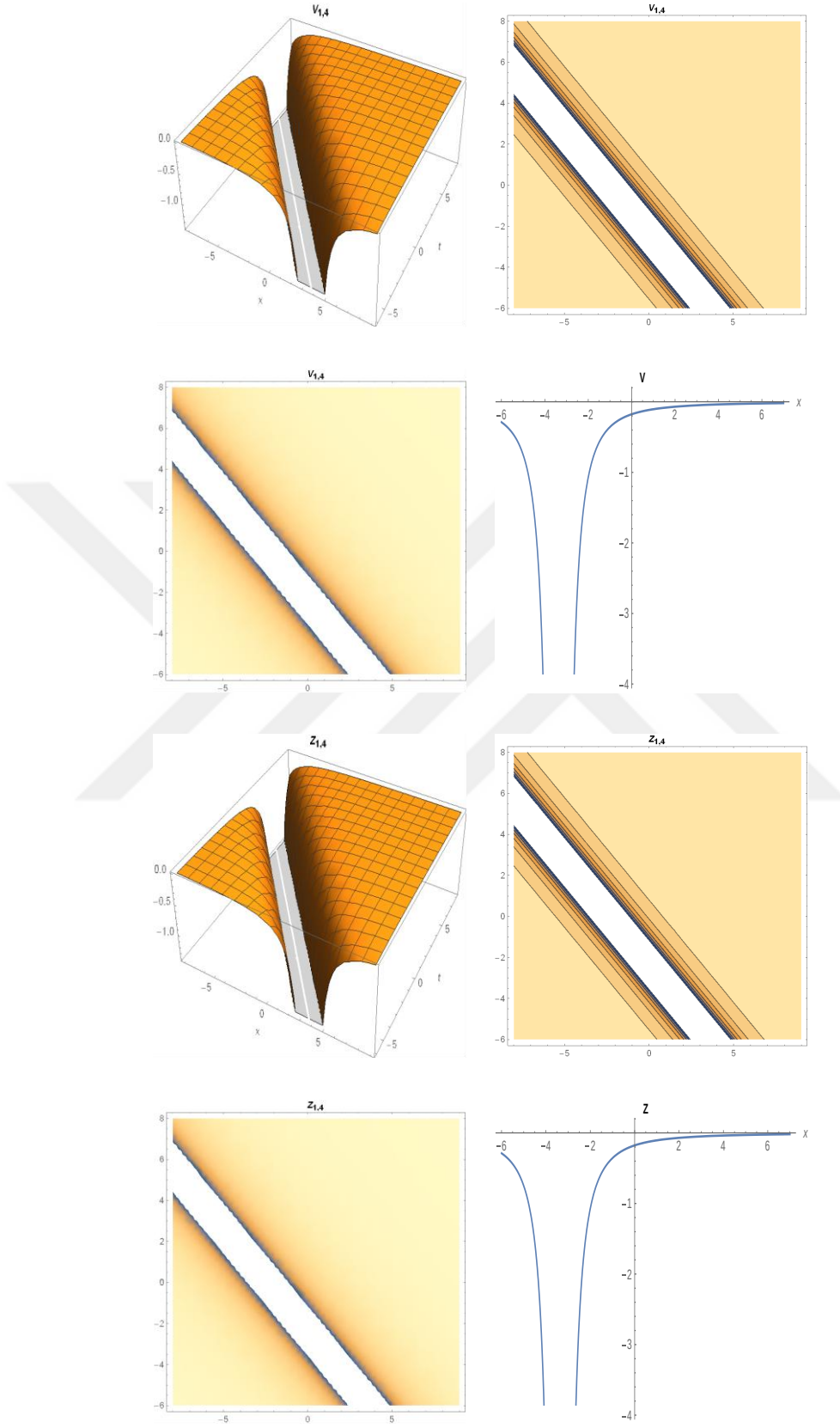
$$v_{1,4}(x, y, t) = -\frac{2k^2\lambda^2}{(2 + \varsigma)^2}, \quad (4.2.20)$$

$$z_{1,4}(x, y, t) = \frac{2ck^2\lambda^2}{(2 + \varsigma)^2} \quad (4.2.21)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = E + k(-ct + x + y), \varsigma = E\lambda + k(-ct + x + y)\lambda$ 'dır.

Şekil 4.14'te (4.2.19), (4.2.20) ve (4.2.21) çözümlerine ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.14. (4.2.19), (4.2.20) ve (4.2.21) çözümlerinin sırasıyla $\lambda=2, \mu=1, B_0=0.2, k=1.5, \alpha=-1, B_1=1.25, A_0=-0.9, A_1=-7.42, A_2=-12.15, A_3=-5.62, c=-1, y=1.2, t=1, E=0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.2.5. $\mu = 0, \lambda = 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

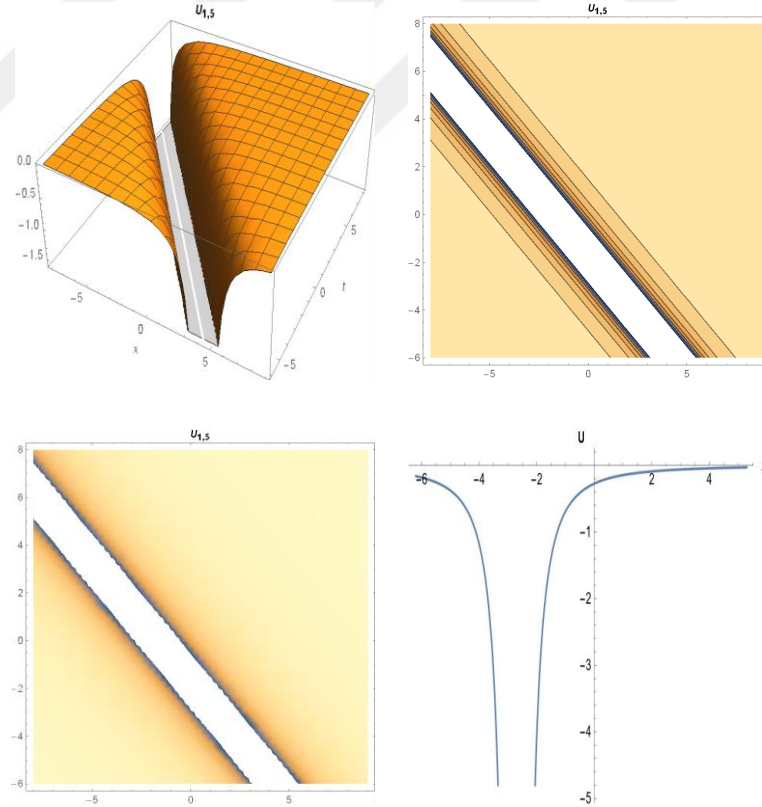
$$u_{1,5}(x, y, t) = -\frac{2k^2}{\xi^2}, \quad (4.2.22)$$

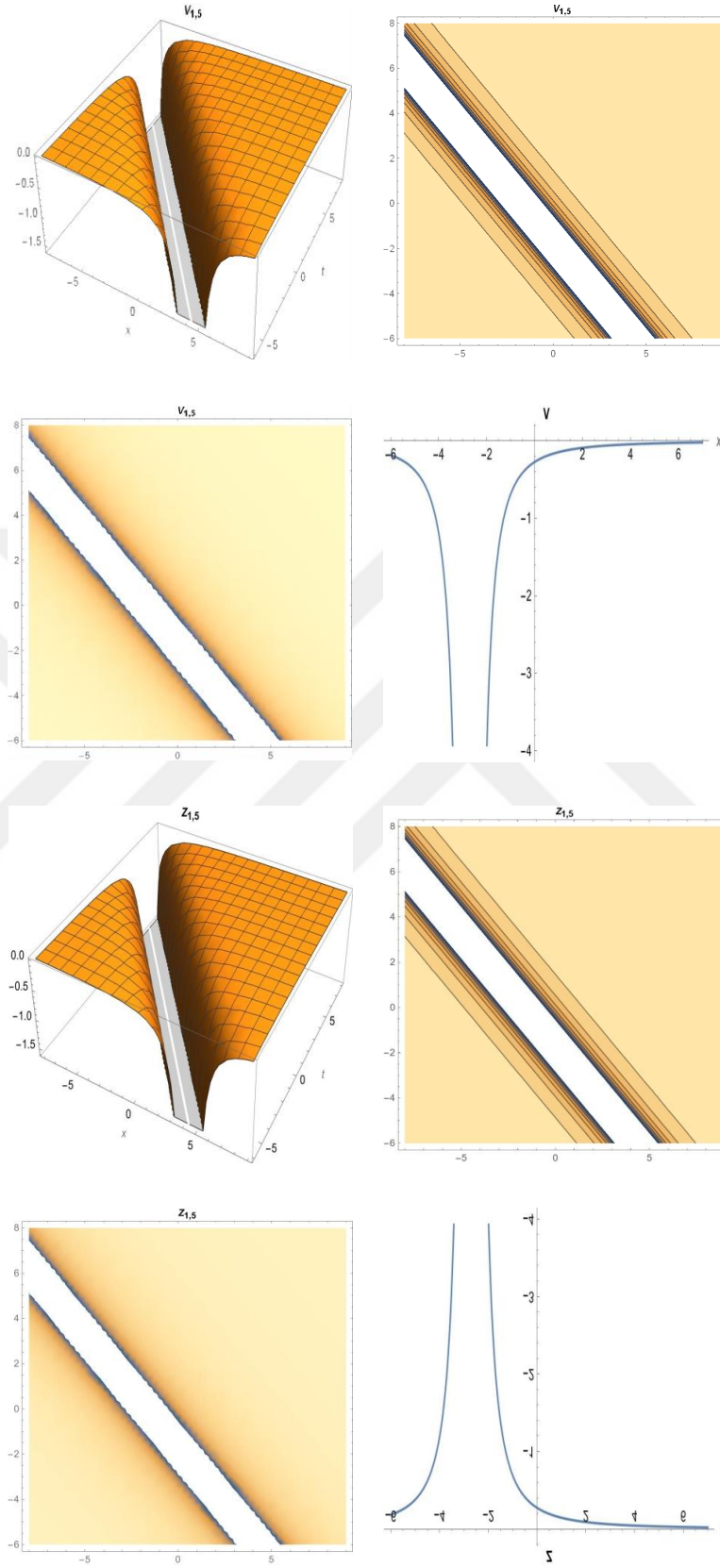
$$v_{1,5}(x, y, t) = -\frac{2k^2}{\xi^2}, \quad (4.2.23)$$

$$z_{1,5}(x, y, t) = \frac{2ck^2}{\xi^2} \quad (4.2.24)$$

olarak bulunur. Burada $\xi = E + k(-ct + x + y)$ 'dir.

Şekil 4.15'te (4.2.22), (4.2.23) ve (4.2.24) çözümlerine ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.15. (4.2.22), (4.2.23) ve (4.2.24) çözümlerinin sırasıyla $\lambda = 0, \mu = 0, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = -0.9, A_3 = -5.62, c = -1, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

4.3. Doğrusal Olmayan Dullin-Gottwald-Holm Denkleminin GÜFM'nin Uygulanması

Doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denklemini [74]

$$u_t + c_0 u_x + 3uu_x - \alpha^2(u_{xxt} + uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}) + \gamma u_{xxx} = 0 \quad (4.3.1)$$

ele alalım. İlk olarak hareketli dalga dönüşümünü

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = k(x - ct) \quad (4.3.2)$$

yazalım. (4.3.2) ve bunların gerekli türev terimleri (4.3.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$(c_0 - c)u + \alpha^2 k^2 (cu'' - (u')^2 - uu'' + u') + \frac{3}{2}u^2 + \gamma k^2 u'' = R \quad (4.3.3)$$

doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemi elde edilmektedir. Burada R integral sabitidir.

(4.3.3) denkleminde dengeleme prensibi uygulandığında

$$n = m + 2 \quad (4.3.4)$$

ilişkisi kurulur.

$m = 1$ seçilirse $n = 3$ olarak bulunur. m ve n değerleri için

$$u(\xi) = \frac{A_0 + A_1 e^{-\Omega} + A_2 e^{-2\Omega} + A_3 e^{-3\Omega}}{B_0 + B_1 e^{-\Omega}} \quad (4.3.5)$$

eşitliği yazılır. (4.3.3)'teki gerekli terime göre (4.3.5) eşitliği yeniden düzenlendiğinde $e^{-\Psi(\xi)}$ katsayılı cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

Mathematica kullanılarak elde edilen bazı uygun katsayılar aşağıda verilmiştir:

Durum-1:

$$A_0 = \frac{(-k^4\gamma^2(\lambda^2 + 8\mu)A_3 + \sqrt{k^4\gamma^2(6R + k^4\gamma^2(\lambda^2 - 4\mu)^2)A_3^2})B_0}{3k^2\gamma A_3},$$

$$A_1 = \frac{1}{12} \left((\lambda^2 + 8\mu)A_3 - \frac{\sqrt{k^4\gamma^2(6R + k^4\gamma^2(\lambda^2 - 4\mu)^2)A_3^2}}{k^4\gamma^2} - 48k^2\gamma\lambda B_0 \right),$$

$$A_2 = \lambda A_3 - 4k^2\gamma B_0,$$

$$B_1 = -\frac{A_3}{4k^2\gamma},$$

$$c = \frac{\sqrt{k^4\gamma^2(6R + k^4\gamma^2(\lambda^2 - 4\mu)^2)A_3^2}}{k^2\gamma A_3} + c_0$$

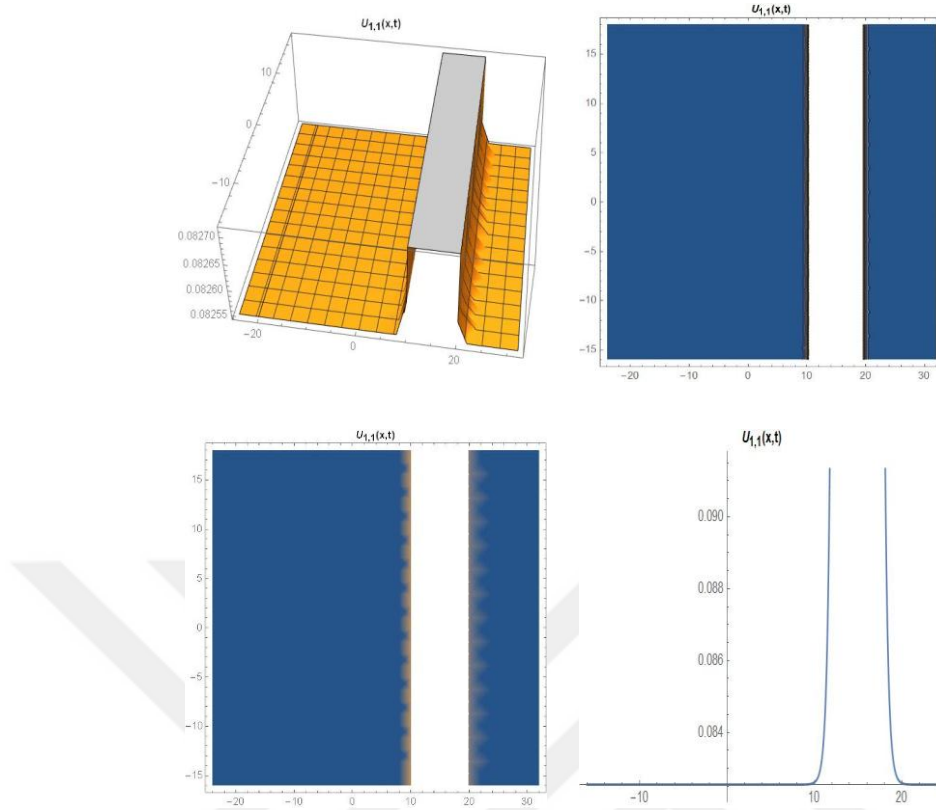
şeklindedir. (4.3.3) denkleminde bu katsayılar kullanılarak çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

Çözüm 4.3.1. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,1}(x, t) = sech \left[\frac{1}{2} \Lambda \right]^2 \left(\frac{-k^4\gamma^2(\lambda^2 - 4\mu)(-10\mu + \Gamma + \lambda\Phi)A_3}{3k^2\gamma A_3 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[\frac{1}{2} \Lambda \right] \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{(2\mu + \Gamma + \lambda\Phi) \sqrt{k^4\gamma^2(6R + k^4\gamma^2(\lambda^2 - 4\mu)^2)A_3^2}}{3k^2\gamma A_3 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[\frac{1}{2} \Lambda \right] \right)^2} \right) \quad (4.3.6)$$

olarak bulunur. Burada $\Lambda = (E + \xi)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}$, $\Gamma = (\lambda^2 - 2\mu)\cosh[\Lambda]$, $\Phi = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\sinh[\Lambda]$ 'dır.

Şekil 4.16'da (4.3.6) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



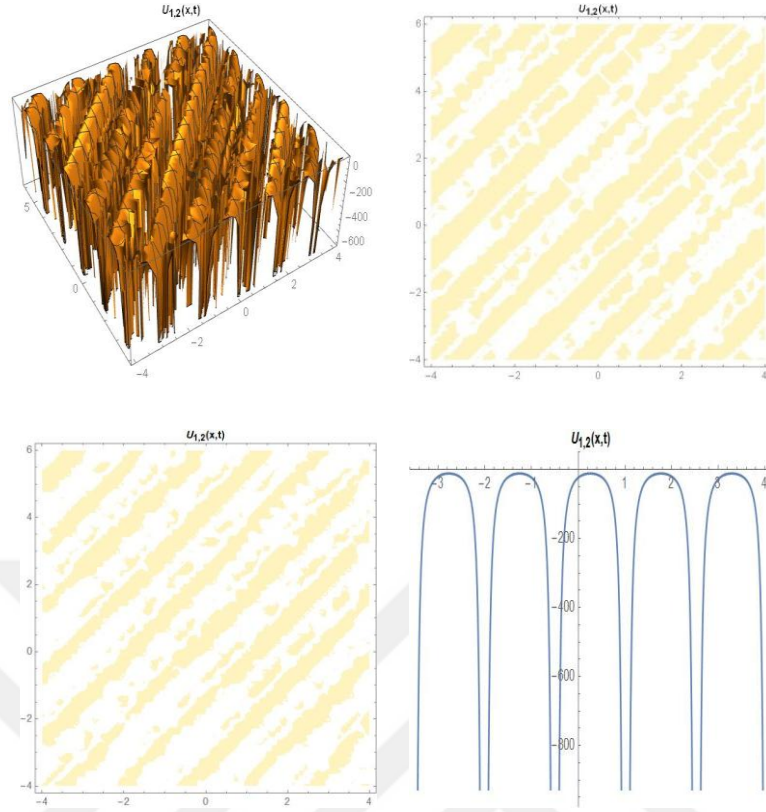
Şekil 4.16. (4.3.6) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, c = 16.12, A_1 = -6.0, A_2 = 2, B_1 = -0.12, E = 0.65, A_3 = 1.5, B_0 = 0.2, A_0 = -2.48, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.3.2. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$\begin{aligned}
 u_{1,2}(x, t) = & \sec \left[\frac{1}{2} \vartheta \right]^2 \left(\frac{k^4 \gamma^2 (\lambda^2 - 4\mu) (10\mu - (\lambda^2 - 2\mu) \cos[\vartheta] + \lambda\beta) A_3}{3k^2 \gamma A_3 \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left[\frac{1}{2} \vartheta \right] \right)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{(2\mu + (\lambda^2 - 2\mu) \cos[\vartheta] - \lambda\beta) \sqrt{k^4 \gamma^2 (6R + k^4 \gamma^2 (\lambda^2 - 4\mu)^2) A_3^2}}{3k^2 \gamma A_3 \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left[\frac{1}{2} \vartheta \right] \right)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

olarak bulunur. Burada $\vartheta = (E + \xi) \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}, \beta = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \sinh[\vartheta]$ 'dür.

Şekil 4.17'de (4.3.7) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



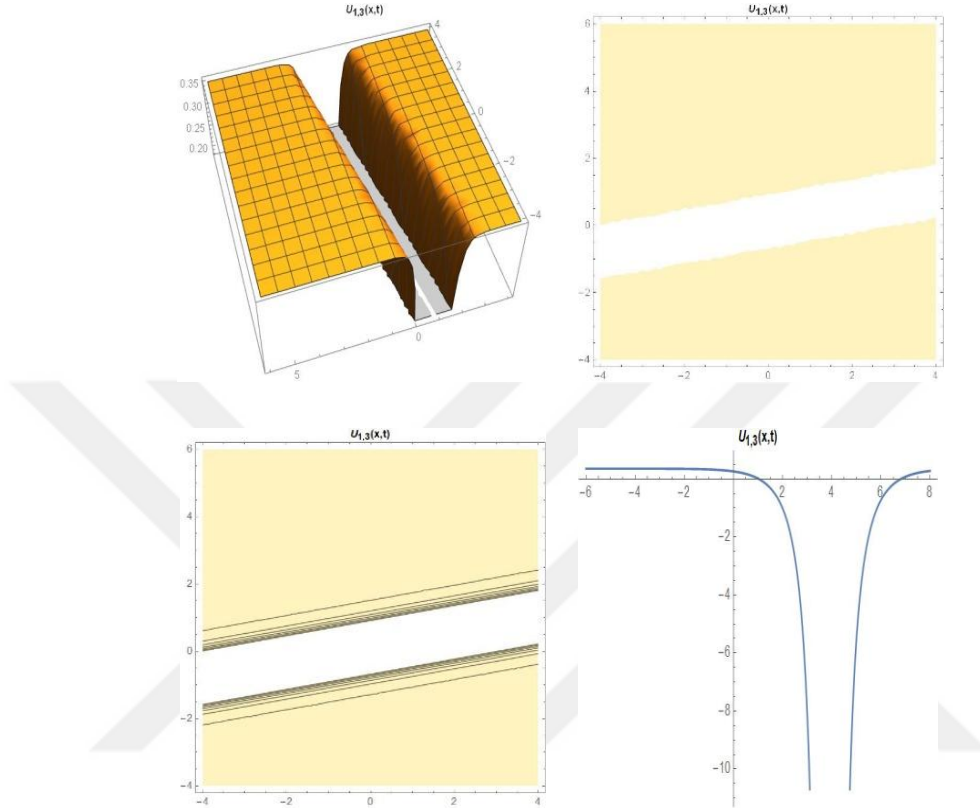
Şekil 4.17. (4.3.7) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -2.90, c = 34.73, A_1 = -0.75, A_2 = -1, B_1 = -0.12, E = 0.65, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.3.3. $\mu = 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,3}(x, t) = \left(\frac{\frac{\lambda^3 A_3}{\delta^3} + \frac{(-k^4 \gamma^2 \lambda^2 A_3 + \zeta) B_0}{3k^2 \gamma A_3} + \frac{\lambda^2 (\lambda A_3 - 4k^2 \gamma B_0)}{\delta^2}}{-\frac{\lambda A_3}{4\delta k^2 \gamma} + B_0} + \frac{\frac{\lambda \left(\lambda^2 A_3 - \frac{\zeta}{k^4 \gamma^2} - 48k^2 \gamma \lambda B_0 \right)}{12\delta}}{-\frac{\lambda A_3}{4\delta k^2 \gamma} + B_0} \right) \quad (4.3.8)$$

olarak bulunur. Burada $\sigma = (E + \xi)\lambda, \delta = -1 + e^\sigma, \zeta = \sqrt{k^4 \gamma^2 (6R + k^4 \gamma^2 \lambda^4) A_3^2}$, dir.

Şekil 4.18’de (4.3.8) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



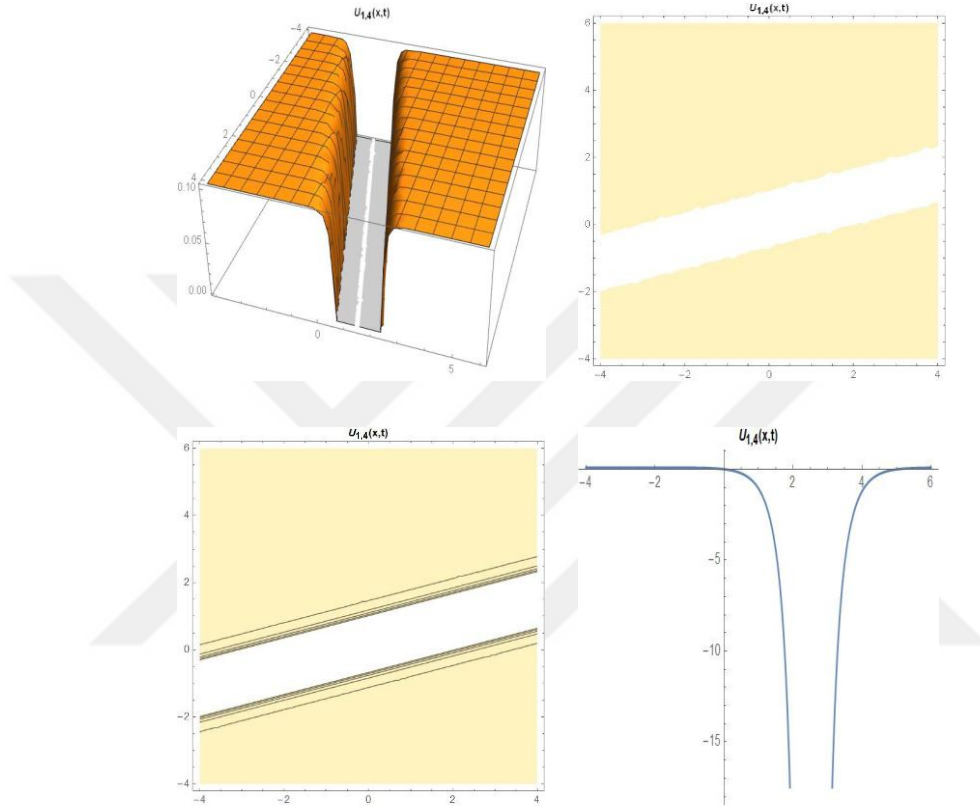
Şekil 4.18. (4.3.8) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.07, c = 4.44, A_1 = -2.54, A_2 = -1, B_1 = -0.12, E = 0.65, t = 1$ değerleri değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.3.4. $\mu \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{1,4}(x, t) = \left(\frac{\frac{\lambda^3 A_3}{\theta^3} + \frac{(-k^4 \gamma^2 \lambda^2 A_3 + \zeta) B_0}{3k^2 \gamma A_3} + \frac{\lambda^2 (\lambda A_3 - 4k^2 \gamma B_0)}{\theta^2}}{-\frac{\lambda A_3}{4\theta k^2 \gamma} + B_0} + \frac{\lambda \left(\lambda^2 A_3 - \frac{\zeta}{k^4 \gamma^2} - 48k^2 \gamma \lambda B_0 \right)}{\frac{12\theta}{-\frac{\lambda A_3}{4\theta k^2 \gamma} + B_0}} \right) \quad (4.3.9)$$

olarak bulunur. Burada $\sigma = (E + \xi)\lambda$, $\theta = -1 + e^\sigma$, $\zeta = \sqrt{k^4\gamma^2(6R + k^4\gamma^2\lambda^4)A_3^2}$, dir.

Şekil 4.19’da (4.3.9) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



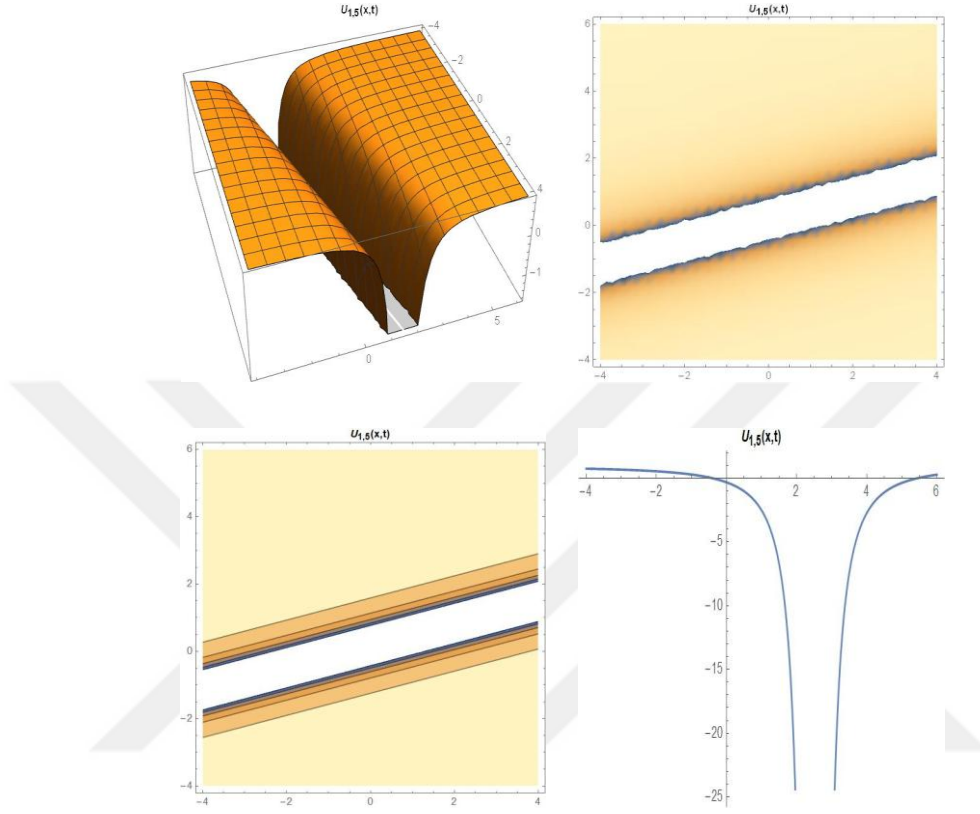
Şekil 4.19. (4.3.9) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -2.31, c = 3.04, A_1 = -3.61, A_2 = 0.5, B_1 = -0.12, E = 0.65$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Çözüm 4.3.5. $\mu = 0, \lambda = 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{5,1}(x, t) = \frac{-12k^4\gamma^2A_3 + \sqrt{6}\sigma^2\sqrt{k^4R\gamma^2A_3^2}}{3k^2\sigma^2\gamma A_3} \quad (4.3.10)$$

olarak bulunur. Burada $\sigma = (E + \xi)\lambda$ ’dır. GÜFM ile elde edilen $u_{5,1}(x, t)$ çözümünün verilen şartlar altında singüler olduğu görülmektedir.

Şekil 4.20’de (4.3.10) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:



Şekil 4.20. (4.3.10) çözümünün $\lambda = 0, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.18, c = 3.04, A_1 = -0.11, A_2 = -2.5, B_1 = -0.12, E = 0.65$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

Durum-2:

$$A_0 = \frac{B_0((\lambda^2 + 8\mu)A_3 + 4B_1(c - c_0))}{12B_1},$$

$$A_1 = \frac{1}{12} \left(A_3 \left(\lambda^2 + 8\mu + \frac{12\lambda B_0}{B_1} \right) + 4B_1(c - c_0) \right),$$

$$A_2 = A_3 \left(\lambda + \frac{B_0}{B_1} \right),$$

$$\gamma = -\frac{A_3}{4k^2 B_1},$$

$$R = \frac{-(\lambda^2 - 4\mu)^2 A_3^2 + 16B_1^2(c - c_0)^2}{96B_1^2},$$

$$\alpha = 0$$

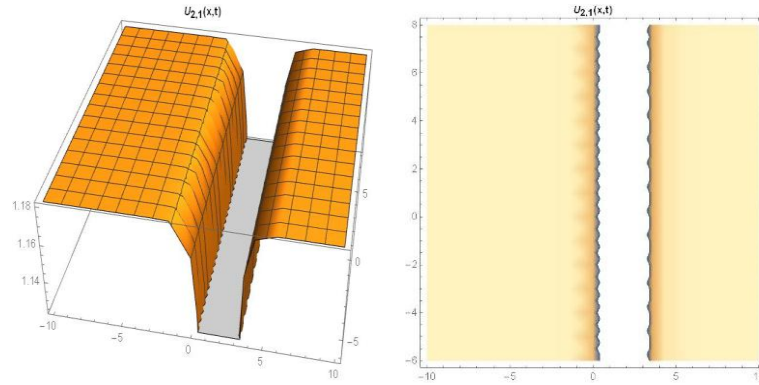
şeklindedir. (4.3.3) denkleminde bu katsayılar kullanılarak çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

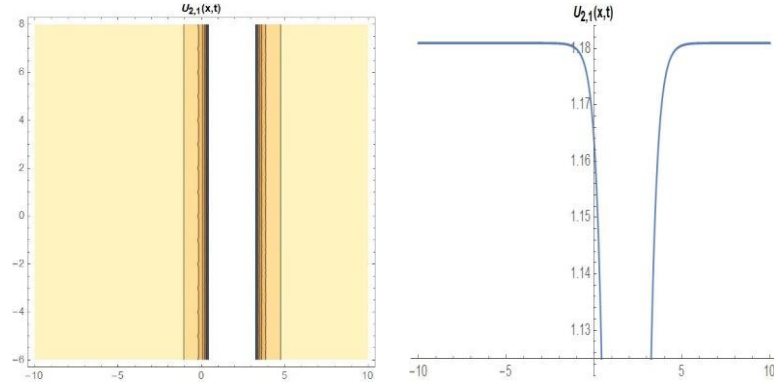
Çözüm 4.3.6. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,1}(x,t) = \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} \Lambda \right]^2 \left(\frac{(\lambda^2 - 4\mu)(-10\mu + (\lambda^2 - 2\mu)\cosh[\Lambda] + \lambda\Phi)A_3}{12B_1 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[\frac{1}{2} \Lambda \right] \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{4(-2\mu - (\lambda^2 - 2\mu)\cosh[\Lambda] - \lambda\Phi)B_1(c - c_0)}{12B_1 \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[\frac{1}{2} \Lambda \right] \right)^2} \right) \quad (4.3.11)$$

olarak bulunur. Burada $\Lambda = (E + \xi)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}$, $\Phi = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\sinh[\Lambda]$ 'dir.

Şekil 4.21'de (4.3.11) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





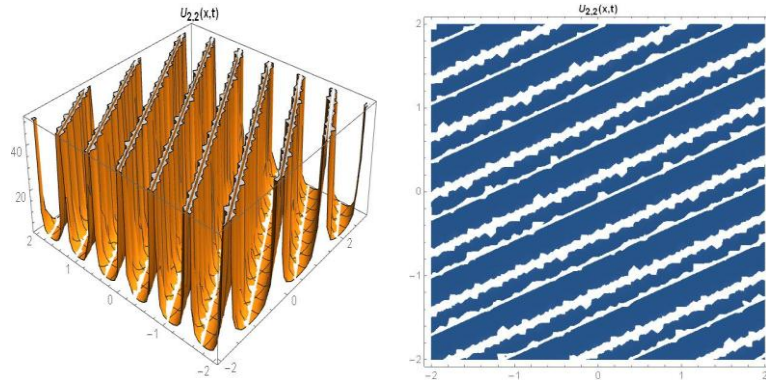
Şekil 4.21. (4.3.11) çözümünün $\lambda = 3, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.08, c = 3.04, A_1 = 1.44, A_2 = 4.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

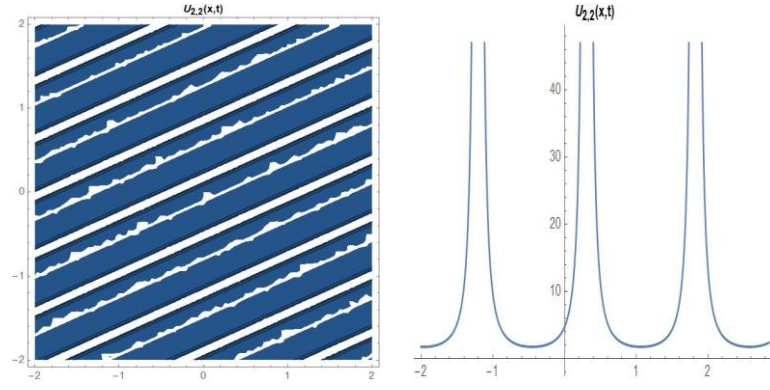
Çözüm 4.3.7. $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,1}(x, t) = \sec \left[\frac{1}{2} \vartheta \right]^2 \left(\frac{(\lambda^2 - 4\mu)(-10\mu + (\lambda^2 - 2\mu)\cos[\vartheta] + \lambda\beta)A_3}{12B_1 \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left[\frac{1}{2} \vartheta \right] \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{4(-2\mu - (\lambda^2 - 2\mu)\cos[\vartheta] - \lambda\beta)B_1(c - c_0)}{12B_1 \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left[\frac{1}{2} \vartheta \right] \right)^2} \right) \quad (4.3.12)$$

olarak bulunur. Burada $\vartheta = (E + \xi)\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}, \beta = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}\sinh[\vartheta]$ 'dür.

Şekil 4.22'de (4.3.12) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





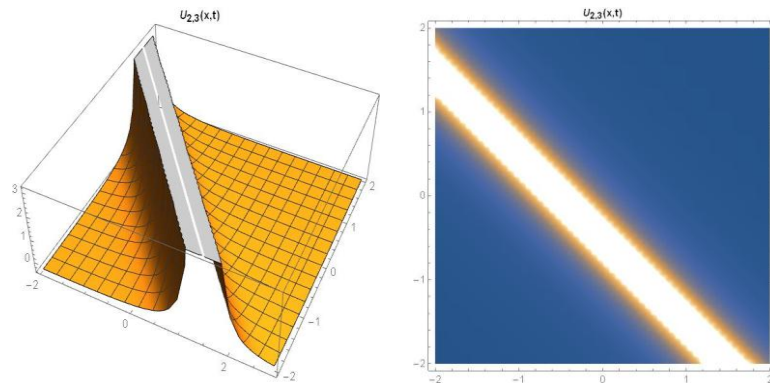
Şekil 4.22. (4.3.12) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 3, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.16, c = 2.20, A_1 = 1.62, A_2 = 4.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = -0.19, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

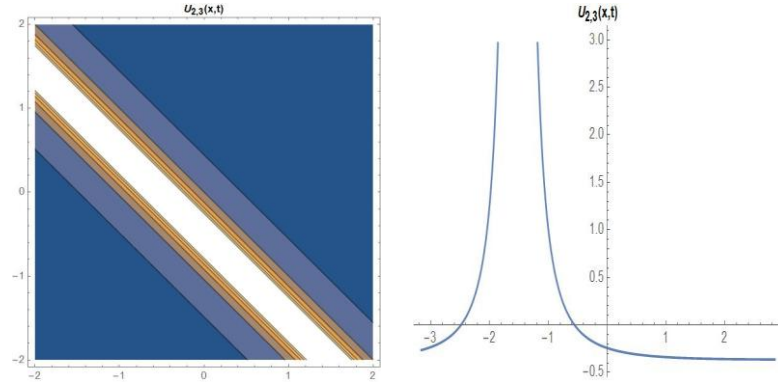
Çözüm 4.3.8. $\mu = 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,3}(x, t) = \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda^2 (1 + 3 \operatorname{csch}[2\sigma]^2) A_3}{B_1} + 4(c - c_0) \right) \quad (4.3.13)$$

olarak bulunur. Burada $\sigma = (E + \xi)\lambda$ 'dır.

Şekil 4.23'te (4.3.13) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





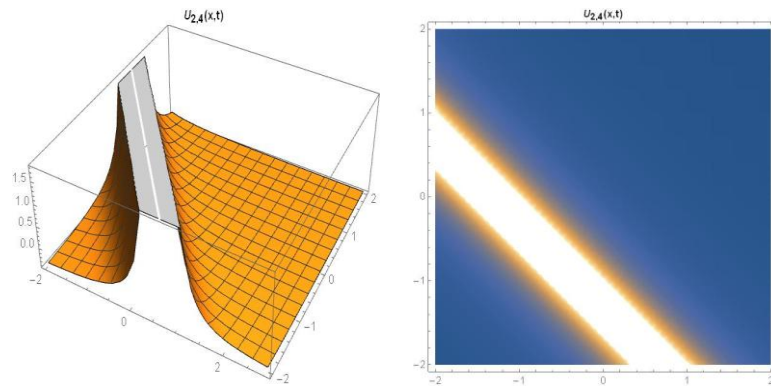
Şekil 4.23. (4.3.13) çözümünün $\lambda = 1, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -0.07, c = -1, A_1 = -0.79, A_2 = 1.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.25, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

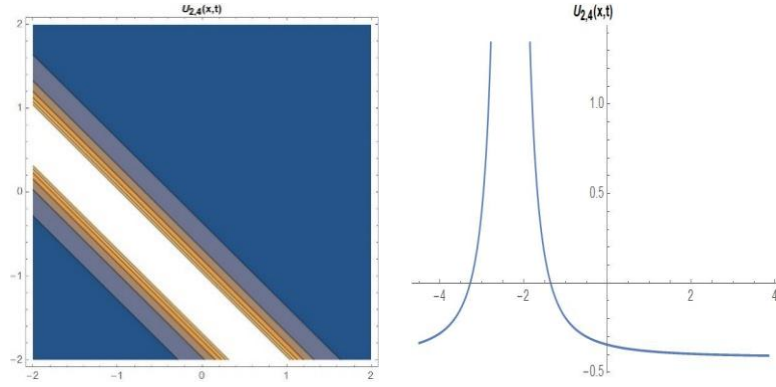
Çözüm 4.3.9. $\mu \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,4}(x, t) = \frac{1}{6} \left(2c + \frac{\left(\frac{\lambda^2(2 - \sigma)(4 + \sigma)}{(2 + \sigma)^2} + 4\mu \right) A_3}{B_1} - 2c_0 \right) \quad (4.3.14)$$

olarak bulunur. Burada $\sigma = (E + \xi)\lambda$ 'dır.

Şekil 4.24'te (4.3.14) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





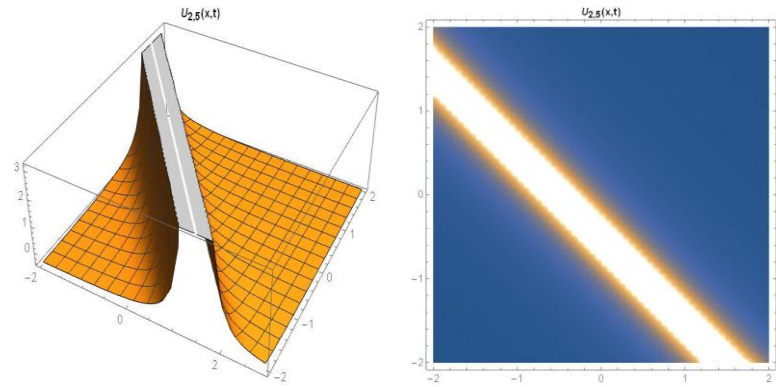
Şekil 4.24. (4.3.14) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.03, c = 2.20, A_1 = 0.69, A_2 = 3.12, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.26, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

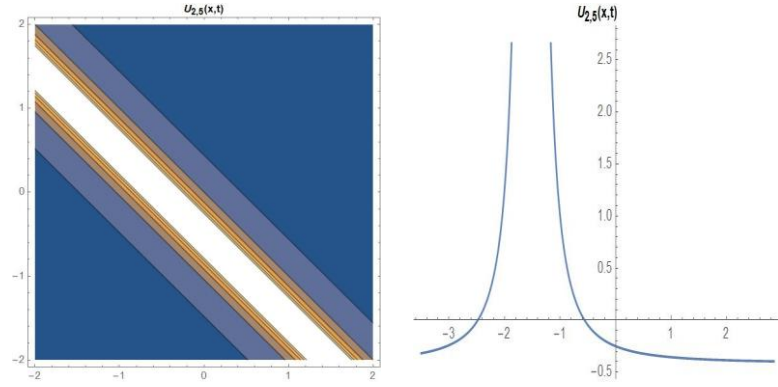
Çözüm 4.3.10. $\mu = 0, \lambda = 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u_{2,5}(x, t) = \frac{A_3}{\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 B_1} + \frac{1}{3}(c - c_0) \quad (4.3.15)$$

olarak bulunur. Burada $\sigma = (E + \xi)\lambda$ 'dır. GÜFM ile elde edilen $u_{2,5}(x, t)$ çözümünün verilen şartlar altında singüler olduğu görülmektedir.

Şekil 4.25'te (4.3.15) çözümüne ait iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.25. (4.3.15) çözümünün $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -0.08, c = 2.20, A_1 = -1.04, A_2 = 0.12, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.26, t = 1$ değerleri altındaki iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk, dış hat grafikleri

4.4. Doğrusal Olmayan Uyumlu Kesirli Mertebeden İki Boyutlu Navier-Stokes Denklemlerine UKq-SHADM'nin Uygulanması

Doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerini [111]

$$D_t^\alpha w(x, y, t) + w(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + q(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.4.1)$$

$$= \rho \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + \sigma, 0 < \alpha \leq 1,$$

$$D_t^\alpha q(x, y, t) + w(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial x} + q(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.4.2)$$

$$= \rho \left[\frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial y^2} \right] - \sigma, 0 < \alpha \leq 1$$

ele alalım. Bu denklemin başlangıç koşulları

$$w(x, y, 0) = -\sin(x + y), \quad (4.4.3)$$

$$q(x, y, 0) = \sin(x + y) \quad (4.4.4)$$

şeklindedir. İlk önce (4.4.1) – (4.4.2) denklemlerine uyumlu kesirli Shehu dönüşümü

uygulanarak ve (4.4.3) – (4.4.4) başlangıç koşulları kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{s}{u} {}_c\mathbb{S}_\alpha[w(x, y, t)] - w(x, y, 0) + {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[w(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + q(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right. \\ & \left. - \rho \left\{ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right\} - \sigma \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{s}{u} {}_c\mathbb{S}_\alpha[q(x, y, t)] - q(x, y, 0) + {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[w(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial x} + q(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial y} \right. \\ & \left. - \rho \left\{ \frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial y^2} \right\} + \sigma \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

elde edilir. (4.4.5) – (4.4.6) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında (4.4.7) – (4.4.8) denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} & {}_c\mathbb{S}_\alpha[w(x, y, t)] - \frac{u}{s} w(x, y, 0) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[w(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right. \\ & \left. + q(x, y, t) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} - \rho \left\{ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right\} - \sigma \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} & {}_c\mathbb{S}_\alpha[q(x, y, t)] - \frac{u}{s} q(x, y, 0) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[w(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial x} + q(x, y, t) \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial y} \right. \\ & \left. - \rho \left\{ \frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial y^2} \right\} + \sigma \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

HAM kullanılarak $\varphi(x, t; q)$ ve $\psi(x, t; q)$ reel fonksiyonları için doğrusal olmayan operatörler

$$\begin{aligned} N^1[\varphi(x, y, t; q)] &= {}_c\mathbb{S}_\alpha[\varphi(x, y, t; q)] - \frac{u}{s} \varphi(x, y, t; q) (0^+) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha[\varphi(x, y, t; q) \\ & \times \frac{\partial \varphi(x, y, t; q)}{\partial x} + \psi(x, y, t; q) \frac{\partial \varphi(x, y, t; q)}{\partial y} - \rho \left\{ \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t; q)}{\partial y^2} \right\} \\ & - \sigma], \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

$$\begin{aligned} N^2[\psi(x, y, t; q)] &= {}_c\mathbb{S}_\alpha[\psi(x, y, t; q)] - \frac{u}{s} \psi(x, y, t; q) (0^+) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha[\varphi(x, y, t; q) \\ & \times \frac{\partial \psi(x, y, t; q)}{\partial x} + \psi(x, y, t; q) \frac{\partial \psi(x, y, t; q)}{\partial y} - \rho \left\{ \frac{\partial^2 \psi(x, y, t; q)}{\partial x^2} \right. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \psi(x, y, t; q)}{\partial y^2} \right\} + \sigma \Bigg]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ’dir. Önerilen algoritma uygulanarak m . mertebeden deformasyon denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}_c\mathbb{S}_\alpha[w_m(x, y, t) - k_m w_{m-1}(x, y, t)] = h\mathcal{R}_{1,m}(\vec{w}_{m-1}), \quad (4.4.11)$$

$${}_c\mathbb{S}_\alpha[q_m(x, y, t) - k_m q_{m-1}(x, y, t)] = h\mathcal{R}_{2,m}(\vec{q}_{m-1}). \quad (4.4.12)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,m}(\vec{w}_{m-1}) = & {}_c\mathbb{S}_\alpha[w_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{u}{s} w_0(x, y, t) \\ & + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} w_r(x, y, t) \frac{\partial w_{m-1-r}(x, y, t)}{\partial x} + \sum_{r=0}^{m-1} q_r(x, y, t) \frac{\partial w_{m-1-r}(x, y, t)}{\partial y} \right. \\ & \left. - \rho \left\{ \frac{\partial^2 w_{m-1}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{m-1}(x, y, t)}{\partial y^2} \right\} - \sigma \right], \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,m}(\vec{q}_{m-1}) = & {}_c\mathbb{S}_\alpha[q_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{u}{s} q_0(x, y, t) \\ & + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} w_r(x, y, t) \frac{\partial q_{m-1-r}(x, y, t)}{\partial x} + \sum_{r=0}^{m-1} q_r(x, y, t) \frac{\partial q_{m-1-r}(x, y, t)}{\partial y} \right. \\ & \left. - \rho \left\{ \frac{\partial^2 q_{m-1}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_{m-1}(x, y, t)}{\partial y^2} \right\} + \sigma \right] \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

şeklindedir. (4.4.11) – (4.4.12) denklemlerine ters uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulandığında

$$w_m(x, y, t) = k_m w_{m-1}(x, y, t) + h({}_c\mathbb{S}_\alpha)^{-1}[\mathcal{R}_{1,m}(\vec{w}_{m-1})], \quad (4.4.15)$$

$$q_m(x, y, t) = k_m q_{m-1}(x, y, t) + h({}_c\mathbb{S}_\alpha)^{-1}[\mathcal{R}_{2,m}(\vec{q}_{m-1})] \quad (4.4.16)$$

olarak bulunur ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$w_0(x, y, t) = -\sin(x + y), \quad (4.4.17)$$

$$q_0(x, y, t) = \sin(x + y) \quad (4.4.18)$$

elde edilir. (4.4.15) – (4.4.16) eşitliklerinde $m = 1, m = 2$ alınarak $w_1(x, y, t), w_2(x, y, t), q_1(x, y, t)$ ve $q_2(x, y, t)$ değerleri:

$$w_1(x, y, t) = -\frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha}, \quad (4.4.19)$$

$$q_1(x, y, t) = \frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha}, \quad (4.4.20)$$

$$w_2(x, y, t) = (n + h) \left[-\frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha} \right] - \left[\frac{4\rho^2 h^2 \sin(x + y) t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right], \quad (4.4.21)$$

$$q_2(x, y, t) = (n + h) \left[\frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha} \right] + \left[\frac{4\rho^2 h^2 \sin(x + y) t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right] \quad (4.4.22)$$

olarak bulunur. Böylece (4.4.1) – (4.4.2) denklemlerinin uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m = -\sin(x + y) - \frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha} \quad (4.4.23)$$

$$+ (n + h) \left[-\frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha} \right] - \left[\frac{4\rho^2 h^2 \sin(x + y) t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right] + \dots$$

$$q(x, y, t) = q_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} q_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m = \sin(x + y) + \frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha} \quad (4.4.24)$$

$$+ (n + h) \left[\frac{2\rho h \sin(x + y) t^\alpha}{\alpha} \right] + \left[\frac{4\rho^2 h^2 \sin(x + y) t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right] + \dots$$

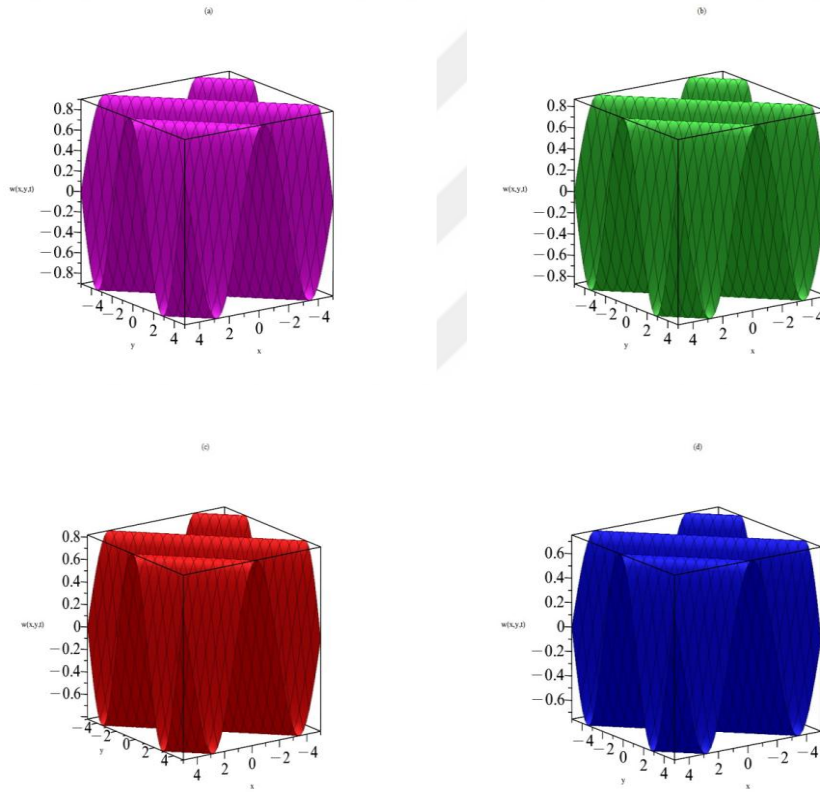
$\alpha = 1, h = -1, n = 1$ ve $\sigma = 0$ için $\sum_{m=1}^N w_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m$ ve $\sum_{m=1}^N q_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m$ çözümleri $N \rightarrow \infty$ iken

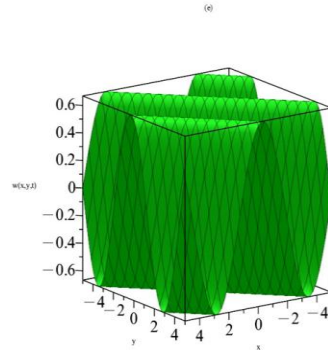
$$w(x, y, t) = -\sin(x + y) \left[1 - \frac{2\rho t}{1!} + \frac{(2\rho t)^2}{2!} - \dots \right] = -e^{-2\rho t} \sin(x + y), \quad (4.4.25)$$

$$q(x, y, t) = \sin(x + y) \left[1 - \frac{2\rho t}{1!} + \frac{(2\rho t)^2}{2!} - \dots \right] = e^{-2\rho t} \sin(x + y) \quad (4.4.26)$$

(4.4.1) – (4.4.2) denklemlerinin analitik çözümlerine yakınsamaktadır.

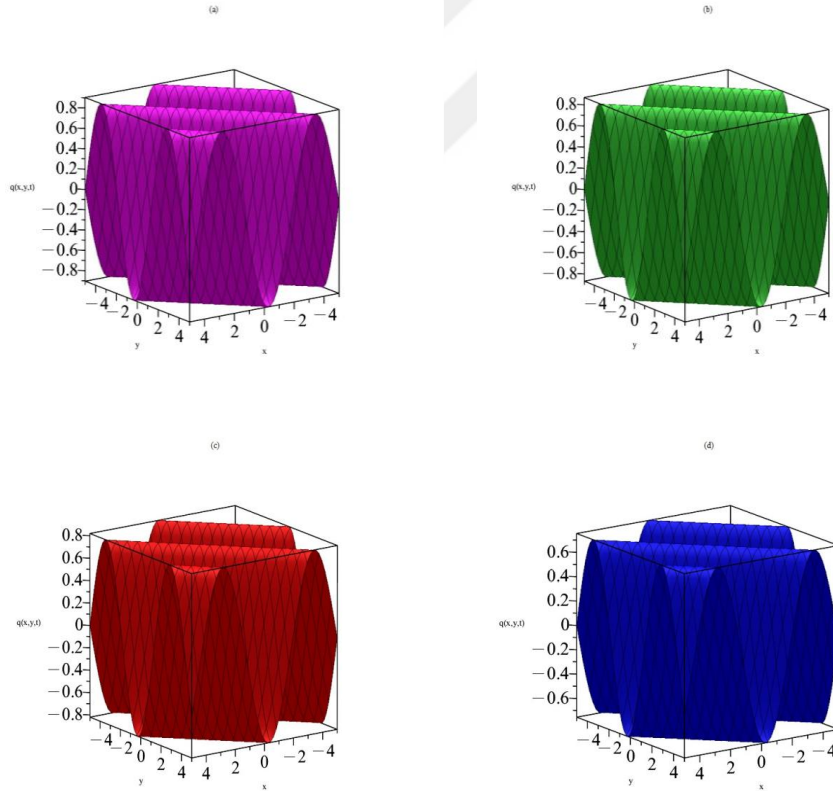
Şekil 4.26’da (4.4.1) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri gösterilmektedir:

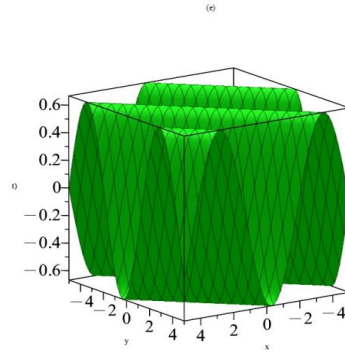




Şekil 4.26. (4.4.1) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri
(a) $\alpha = 1$ için, **(b)** $\alpha = 0.9$ için, **(c)** $\alpha = 0.8$ için, **(d)** $\alpha = 0.7$ için, **(e)** $\alpha = 0.6$ için

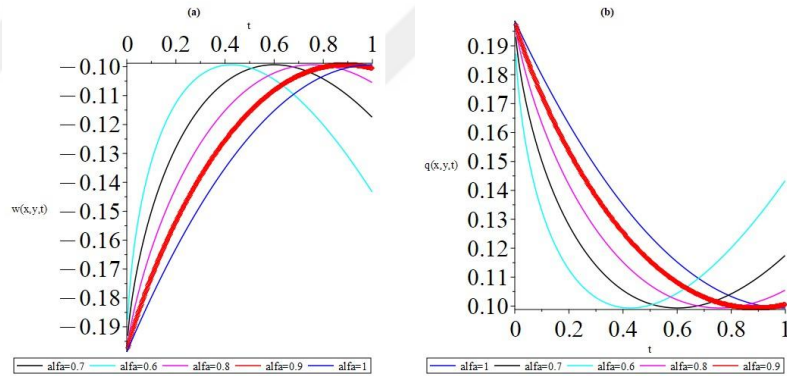
Şekil 4.27’de (4.4.2) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.27. (4.4.2) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri
(a) $\alpha = 1$, (b) $\alpha = 0.9$, (c) $\alpha = 0.8$, (d) $\alpha = 0.7$, (e) $\alpha = 0.6$

Şekil 4.28’de (4.4.1) – (4.4.2) denklemlerinin $x = 0.1, y = 0.1, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümlerinin iki boyutlu grafikleri gösterilmektedir:



Şekil 4.28. NS denklemlerinin $x = 0.1, y = 0.1, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafikleri
(a) (4.4.1) denklemi, (b) (4.4.2) denklemi

Tablo 4.1’de (4.4.1) denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü arasındaki mutlak hatanın $t = 0.01, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1, h = -1$ ve $\alpha = 1$ için sayısal değerleri gösterilmektedir:

Tablo 4.1. $t = 0.01, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere (4.4.1) denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [111] arasındaki mutlak hata

x/y	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.01	3.3×10^{-9}	4.9×10^{-9}	6.6×10^{-9}	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}
0.02	4.9×10^{-9}	6.6×10^{-9}	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}
0.03	6.6×10^{-9}	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}	1.3×10^{-8}
0.04	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}	1.3×10^{-8}	1.4×10^{-8}
0.05	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}	1.3×10^{-8}	1.4×10^{-8}	1.6×10^{-8}

Tablo 4.2’de (4.4.2) denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü arasındaki mutlak hatanın $t = 0.01, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1, h = -1$ ve $\alpha = 1$ için sayısal değerleri gösterilmektedir:

Tablo 4.2. $t = 0.01, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere (4.4.2) denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [111] arasındaki mutlak hata

x/y	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.01	3.3×10^{-9}	4.9×10^{-9}	6.6×10^{-9}	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}
0.02	4.9×10^{-9}	6.6×10^{-9}	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}
0.03	6.6×10^{-9}	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}	1.3×10^{-8}
0.04	8.3×10^{-9}	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}	1.3×10^{-8}	1.4×10^{-8}
0.05	9.9×10^{-9}	1.1×10^{-8}	1.3×10^{-8}	1.4×10^{-8}	1.6×10^{-8}

4.5. Doğrusal Olmayan Uyumlu Kesirli Mertebeden Cahn-Hilliard Denkleminin UKq-SHADM’nin Uygulanması

Doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denklemini [95]

$$\begin{aligned}
 D_t^\alpha w(x, t) - 6w(x, t) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 - 3w^2(x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\
 + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0, 0 < \alpha \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

ele alalım. Bu denklemin başlangıç koşulu

$$w(x, 0) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (4.5.2)$$

şeklindedir. İlk önce (4.5.1) denklemine uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanarak ve (4.5.2) başlangıç koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{s}{u} {}_c\mathbb{S}_\alpha[w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[-6w(x, t) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 - 3w^2(x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

elde edilir. (4.5.3) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında (4.5.4) denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} {}_c\mathbb{S}_\alpha[w(x, t)] - \frac{u}{s} w(x, 0) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[-6w(x, t) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 - 3w^2(x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

HAM kullanılarak $\psi(x, t; q)$ reel fonksiyonu için doğrusal olmayan operatör aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} N[\psi(x, t; q)] = {}_c\mathbb{S}_\alpha[\psi(x, t; q)] - \frac{u}{s} \psi(x, t; q) (0^+) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[-6\psi(x, t; q) \times \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \psi(x, t; q)}{\partial x} \right)^2 - 3\psi^2(x, t) \frac{\partial^2 \psi(x, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi(x, t; q)}{\partial x^4} - \frac{\partial \psi(x, t; q)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ dir. Önerilen algoritma uygulanarak m . mertebeden deformasyon denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}_c\mathbb{S}_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}). \quad (4.5.6)$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = & {}_c\mathbb{S}_\alpha[w_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{u}{s} w_0(x, t) \\
& + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[-6 \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r w_j \frac{\partial w_{r-j}}{\partial x} \right) \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial x} - 3 \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r w_j w_{r-j} \right) \frac{\partial^2 w_{m-1-r}}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial w_{m-1}(x, t)}{\partial x} \right]
\end{aligned} \quad (4.5.7)$$

şeklindedir. (4.5.6) denkleminde uyumlu kesirli ters Shehu dönüşümü uygulandığında

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h({}_c\mathbb{S}_\alpha)^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})] \quad (4.5.8)$$

olarak bulunur ve başlangıç koşulu kullanılarak

$$w_0(x, t) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (4.5.9)$$

elde edilir.

$w_1(x, t)$ ve $w_2(x, t)$ değerini bulmak için (4.5.8) eşitliğinde $m = 1, m = 2$ alınarak

$$w_1(x, t) = -\frac{h\sqrt{2}t^\alpha}{2\alpha} \operatorname{sech}^{2^2}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right), \quad (4.5.10)$$

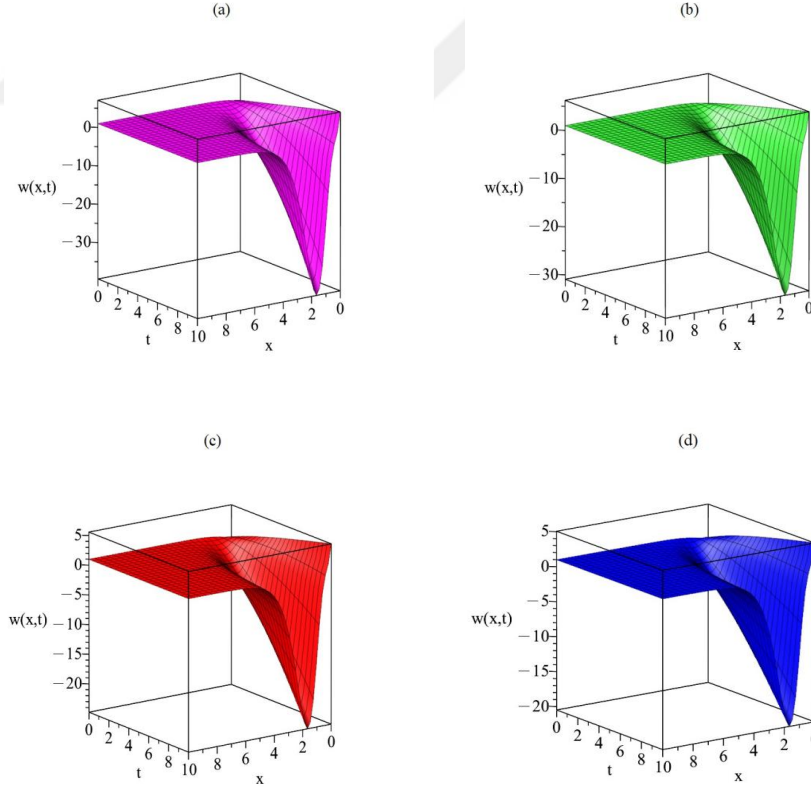
$$\begin{aligned}
w_2(x, t) = & (n + h) \left(\frac{-h\sqrt{2}t^\alpha}{2\alpha} \operatorname{sech}^{2^2}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \right) + h \left(-\frac{3}{\alpha} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \tanh\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \right) \\
& \times \left[-\tanh^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) t^\alpha + \frac{ht^{2\alpha}\sqrt{2}}{2\alpha} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \left(\cosh^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{3}{2} \right) \tanh\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{ht^{2\alpha}}{6\alpha^2} \right]
\end{aligned} \quad (4.5.11)$$

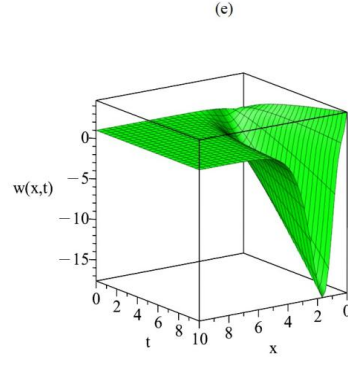
bulunur.

Sonuç olarak (4.5.1) denkleminin UKq-SHADM çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m &= \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{h\sqrt{2}t^\alpha}{2\alpha} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &+ (n+h) \left(\frac{-h\sqrt{2}t^\alpha}{2\alpha} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)\right) + h \left(-\frac{3}{\alpha} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \tanh\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
 &\times \left[-\tanh^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) t^\alpha + \frac{ht^{2\alpha}\sqrt{2}}{2\alpha} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \left(\cosh^2\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{3}{2}\right) \tanh\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)\right. \\
 &\left. + \frac{ht^{2\alpha}}{6\alpha}\right] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

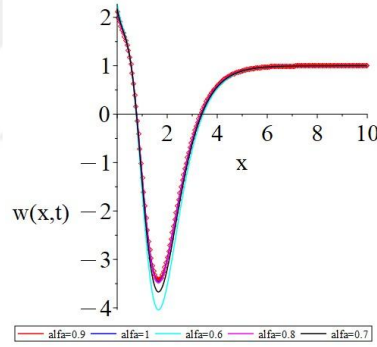
Şekil 4.29.'da CH denkleminin $n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.29. CH denkleminin $h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri
(a) $\alpha = 1$, **(b)** $\alpha = 0.9$, **(c)** $\alpha = 0.8$, **(d)** $\alpha = 0.7$, **(e)** $\alpha = 0.6$

Şekil 4.30’da CH denkleminin $n = 1$, $h = -1$ ve $t = 3$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümlerinin iki boyutlu grafikleri gösterilmektedir:



Şekil 4.30. CH denkleminin $h = -1$, $n = 1$ ve $t = 3$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafiği

Tablo 4.3’te CH denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü arasındaki mutlak hatanın $n = 10$ ve $h = -10.223$ için sayısal değerleri gösterilmektedir:

Tablo 4.3. $n = 10$ ve $h = -10.223$ olmak üzere CH denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [147] arasındaki mutlak hata

x/t	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.1	9.8×10^{-6}	1.8×10^{-5}	2.3×10^{-5}	2.6×10^{-5}	2.5×10^{-5}
0.2	7.9×10^{-5}	1.5×10^{-4}	2.2×10^{-4}	2.8×10^{-4}	3.4×10^{-4}
0.3	2.5×10^{-4}	5.0×10^{-4}	7.4×10^{-4}	9.7×10^{-4}	1.2×10^{-3}
0.4	5.7×10^{-4}	1.1×10^{-3}	1.6×10^{-3}	2.2×10^{-3}	2.7×10^{-3}
0.5	1.0×10^{-3}	2.0×10^{-3}	3.0×10^{-3}	4.0×10^{-3}	5.0×10^{-3}

4.6. Doğrusal Olmayan Uyumlu Kesirli Mertebeden Rosenau–Hyman Denklemine UKq-SHADM’nin Uygulanması

Doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denklemini [121]

$$D_t^\alpha w(x, t) = w(x, t) \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} + w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + 3 \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.6.1)$$

$$t > 0, 0 < \alpha \leq 1$$

ele alalım. Bu denklemin başlangıç koşulu

$$w(x, 0) = -\frac{8}{3}c \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \quad (4.6.2)$$

şeklindedir. İlk olarak (4.6.1) denkleminde uyumlu kesirli Shehu dönüşümü uygulanarak ve (4.6.2) başlangıç koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{s}{u} {}_c\mathbb{S}_\alpha[w(x, t)] - w(x, 0) + {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[-w(x, t) \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right. \\ \left. - 3 \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

elde edilir.

(4.6.3) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} {}_c\mathbb{S}_\alpha[w(x,t)] - \frac{u}{s}w(x,0) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[-w(x,t) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} - w(x,t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right. \\ \left. - 3 \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

HAM kullanılarak $\psi(x,t;q)$ reel fonksiyonu için doğrusal olmayan operatör aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} N[\psi(x,t;q)] = {}_c\mathbb{S}_\alpha[\psi(x,t;q)] - \frac{u}{s}\psi(x,t;q) (0^+) + \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha[-\psi(x,t;q) \\ \times \frac{\partial^3 \psi(x,t;q)}{\partial x^3} - \psi(x,t;q) \frac{\partial \psi(x,t;q)}{\partial x} - 3 \frac{\partial \psi(x,t;q)}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi(x,t;q)}{\partial x^2}]. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Burada $q \in [0, \frac{1}{n}]$ 'dir. Önerilen algoritma uygulanarak m . mertebeden deformasyon denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}_c\mathbb{S}_\alpha[w_m(x,t) - k_m w_{m-1}(x,t)] = h \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}). \quad (4.6.6)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = {}_c\mathbb{S}_\alpha[w_{m-1}(x,t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{u}{s} w_0(x,t) - \frac{u}{s} {}_c\mathbb{S}_\alpha \left[\sum_{j=0}^{m-1} (w_j \right. \\ \left. \times \frac{\partial^3 w_{m-1-j}(x,t)}{\partial x^3} \right) + \sum_{j=0}^{m-1} w_j \frac{\partial w_{m-1-j}(x,t)}{\partial x} + 3 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial w_j(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_{m-1-j}(x,t)}{\partial x^2} \Big] \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

şeklindedir. (4.6.6) denkleminde uyumlu kesirli ters Shehu dönüşümü uygulandığında

$$w_m(x,t) = k_m w_{m-1}(x,t) + h ({}_c\mathbb{S}_\alpha)^{-1} [\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})] \quad (4.6.8)$$

olarak bulunur ve başlangıç koşulu kullanılarak

$$w_0(x, t) = -\frac{8}{3}c \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \quad (4.6.9)$$

elde edilir.

$w_1(x, t)$ ve $w_2(x, t)$ değerlerini bulmak için (4.6.8) eşitliğinde $m = 1, m = 2$ alınarak

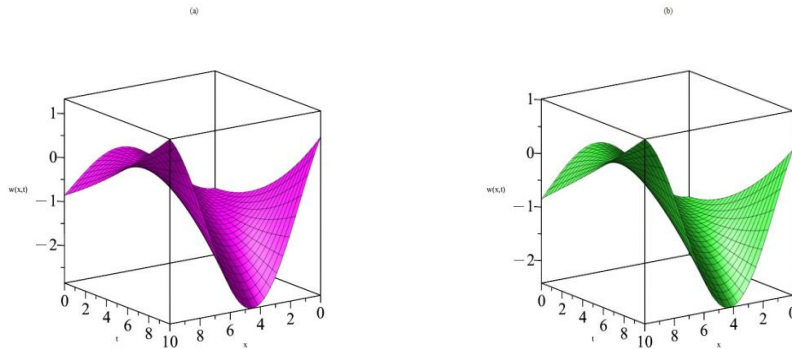
$$w_1(x, t) = \frac{2hc^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) t^\alpha}{3\alpha}, \quad (4.6.10)$$

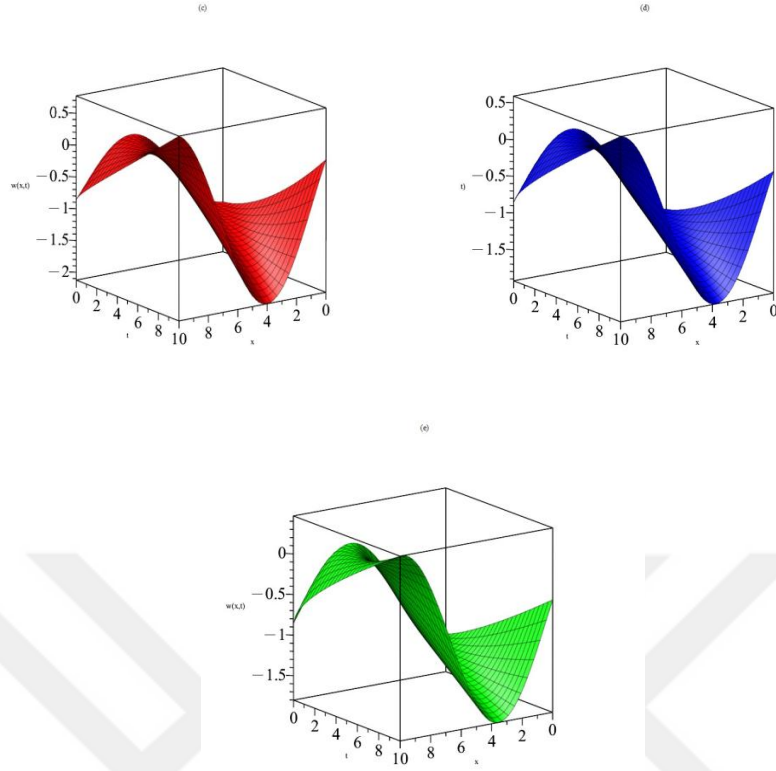
$$w_2(x, t) = (n + h) \left(-\frac{8}{3}c \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \right) + \frac{h^2 c^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) t^{2\alpha}}{6\alpha^2} \quad (4.6.11)$$

bulunur. Böylece (4.6.1) denkleminin uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu ile çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m = & -\frac{8}{3}c \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{2hc^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) t^\alpha}{3\alpha} \\ & + (n + h) \left(-\frac{8}{3}c \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \right) + \frac{h^2 c^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) t^{2\alpha}}{6\alpha^2} + \dots \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

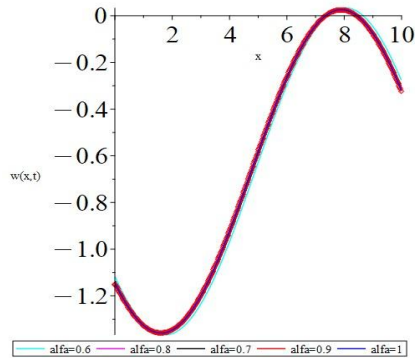
Şekil 4.31.'de RH denkleminin UKq-SHADM çözümünde $n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için üç boyutlu grafikleri gösterilmektedir:





Şekil 4.31. RH denkleminin $c = 0.5, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafikleri
(a) $\alpha = 1$, (b) $\alpha = 0.9$, (c) $\alpha = 0.8$, (d) $\alpha = 0.7$, (e) $\alpha = 0.6$

Şekil 4.32’de RH denkleminin $c = 0.5, t = 3, n = 1$ ve $h = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümlerinin iki boyutlu grafikleri gösterilmektedir:



Şekil 4.32. RH denkleminin $c = 0.5, t = 3, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafiği

Tablo 4.4'te RH denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü arasındaki mutlak hatanın $c = 0.5, n = 1$ ve $h = -1$ için sayısal değerleri gösterilmektedir:

Tablo 4.4. $c = 0.5, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere RH denkleminin UKq-SHADM çözümü ile analitik çözümü [120] arasındaki mutlak hata

x/t	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.1	8.5×10^{-11}	6.7×10^{-10}	2.2×10^{-9}	5.2×10^{-9}	1.0×10^{-8}
0.2	1.7×10^{-10}	1.3×10^{-9}	4.5×10^{-9}	1.0×10^{-8}	2.0×10^{-8}
0.3	2.5×10^{-10}	2.0×10^{-9}	6.9×10^{-9}	1.6×10^{-8}	3.1×10^{-8}
0.4	3.4×10^{-10}	2.7×10^{-9}	9.2×10^{-9}	2.1×10^{-8}	4.2×10^{-8}
0.5	4.2×10^{-10}	3.4×10^{-9}	1.1×10^{-8}	2.7×10^{-8}	5.3×10^{-8}

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, bazı kısmi diferansiyel denklemlerin ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerini ve yeni nümerik çözümlerini analiz etmek için geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ve uyumlu kesirli q-Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu kullanılmıştır.

GÜFM'nin doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denklemi, doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklem sistemi ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denkleminde uygulanması literatüre yeni tam çözümler sunmaktadır. Bu metot doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denkleminde başarıyla uygulanmış ve sonuçlar yeni tam çözümlere yol açmıştır. Bu metot doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sistemine etkili bir şekilde uygulanmış ve sonuçlar yeni tam çözümlere yol açmıştır. Bu metot doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denkleminde başarıyla uygulanmış ve yeni tam çözümler elde edilmiştir.

UKq-SHADM'nin doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerine, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denkleminde ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminde uygulanması literatüre yeni nümerik çözümler sunmaktadır. Bu metot doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denkleminde başarıyla uygulanmış ve sonuçlar yeni nümerik çözümlere yol açmıştır. Bu metot doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denkleminde etkili bir şekilde uygulanmış ve sonuçlar yeni nümerik çözümlere yol açmıştır. Bu metot doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminde başarıyla uygulanmış ve yeni nümerik çözümler elde edilmiştir. GÜFM ve UKq-SHADM analitik ve nümerik çözümleri incelemek için doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere ve doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilen etkin ve tutarlı metotlardır.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denkleminin, doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sisteminin ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek ve adi diferansiyel denklemlere indirgenmiş formlarıyla çözümlere ulaşmak için gidiş adımları incelenmiştir. İncelenen denklemlerin hareketli dalga çözümlerini bulmak için GÜFM kullanılmıştır. Bu metotta kullanılan dengeleme terimi sayesinde daha basit forma indirgenerek çözüm kolaylığı sağlanmıştır. Farklı durumdaki parametre değerleri için çözüm aileleri Mathematica yazılım programı kullanılarak elde edilmiştir. Bununla birlikte doğrusal olmayan uyumlu zaman-kesirli mertebeden Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa denkleminin, doğrusal olmayan $(2 + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş Hirota-Satsuma-Ito denklem sisteminin ve doğrusal olmayan Dullin-Gottwald-Holm denkleminin trigonometrik, rasyonel ve hiperbolik fonksiyon cinsinden çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Bulunan çözüm fonksiyonlarının hesaplamaları, elde edilen çözümlerin iki boyutlu, üç boyutlu, dış hat ve yoğunluk grafiklerinin çizdirilmesi gibi tüm işlemler Mathematica yazılım programında yapılmıştır. GÜFM ile bulunan çözüm fonksiyonlarına uygun parametreler belirlenerek elde edilen grafiklerin bu fonksiyonların karakteristik özelliklerini taşıdığı gözlenmiştir. Bulunan sonuçlar ışığında, GÜFM doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerinin bulunmasında etkin ve tutarlı bir metot olduğu görülmüştür. Bu çalışma kapsamında incelenen denklemlerin çözüm fonksiyonlarına literatürde rastlanmamıştır. Dolayısıyla, elde edilen tüm çözüm fonksiyonları geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ile literatüre katkı yapmıştır. Bunlarla birlikte, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denkleminin ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin nümerik çözümleri UKq-SHADM kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin, doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Hilliard denkleminin ve doğrusal olmayan uyumlu kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin bulunan nümerik çözümlerinin iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri Maple yazılım programında çizdirilmiştir. Farklı α değerleri için elde edilen nümerik çözümlerin davranışları iki ve üç boyutlu α değerinin birden uzaklaştıkça denklemlerin analitik çözümünden uzaklaştığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, bulunan nümerik çözümlerden hesaplanan mutlak hataların oldukça küçük olduğu ortaya çıkmıştır. İncelenen denklemlerin nümerik çözümlerine literatürde rastlanmamıştır. Dolayısıyla elde edilen tüm nümerik çözümler literatüre katkı sağlamış ve UKq-SHADM'nin etkin ve tutarlı olduğunu göstermiştir.

Hareketli dalgaların çoğu kısmi diferansiyel denklemlerle modellenir. Hareketli dalga çözümleri çeşitli doğa ve mühendislik sistemlerindeki dalga benzeri davranışın anlaşılmasında ve modellenmesinde önemli bir rol oynayarak bu sistemlerin dinamiklerini yöneten temel süreçlere ilişkin öngörüler sağlar. Bu çalışmada reel ve karmaşık yapılara sahip üstel, rasyonel, trigonometrik fonksiyon içeren bazı önemli dalga çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen dalga çözümlerinin analiz edilebilmesi için iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.1.'de (4.1.7) çözümündeki, $\lambda = 3, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 1.5, A_1 = -2.13, A_2 = -1.59, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.6, t = 0.1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.2.'de (4.1.8) çözümündeki $\lambda = 1, \mu = 3, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.70, A_1 = -1.59, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -1.8$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.3.'te (4.1.9) çözümündeki $\lambda = 1, \mu = 0, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.48, A_1 = -0.6, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = 0$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.4.'te (4.1.10) çözümündeki $\lambda = 2, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.50, A_1 = -1.53, A_2 = -1.26, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.60$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.5.'te (4.1.11) çözümündeki $\lambda = 0, \mu = 0, \theta = 0.5, k = 0.25, A_3 = -0.33, \alpha = 1.35, \beta = 1.3, B_0 = 1.2, A_0 = 0, c = 3.50, A_1 = 0, A_2 = -0.6, B_1 = 0.66, E = 0.82, y = 0.1, r = 0.75$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.6.'da (4.1.12) çözümündeki $\lambda = 3, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.59, A_1 = -2.40, A_2 = -1.59, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -1.1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.7.'de (4.1.13) çözümündeki $\lambda = 1, \mu = 3, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.30, A_1 = -0.98, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 =$

1.2, $A_0 = -0.7$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.8.'de (4.1.14) çözümündeki $\lambda = 1, \mu = 0, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.52, A_1 = -0.65, A_2 = -0.93, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.9.'da (4.1.15) çözümündeki $\lambda = 2, \mu = 1, \theta = 0.5, y = 0.1, \beta = 1.3, \alpha = 1.35, k = 0.25, r = 0.75, c = 3.50, A_1 = -1.53, A_2 = -1.26, B_1 = 0.66, E = 0.82, A_3 = -0.33, B_0 = 1.2, A_0 = -0.60$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.10.'da (4.1.16) çözümündeki $\lambda = 0, \mu = 0, \theta = 0.5, k = 0.25, A_3 = -0.33, \alpha = 1.35, \beta = 1.3, B_0 = 1.2, A_0 = 0, c = 3.50, A_1 = 0, A_2 = -0.6, B_1 = 0.66, E = 0.82, y = 0.1, r = 0.75$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.11.'de (4.2.10), (4.2.11) ve (4.2.12) çözümlerindeki $\lambda = 2.5, \mu = 1, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -1.23, A_1 = -9.98, A_2 = -14.96, A_3 = -5.62, c = 0.24, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.12.'de (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) çözümlerindeki $\lambda = 1, \mu = 2.5, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.9, A_1 = -6.52, A_2 = -6.52, A_3 = -5.62, c = 0.04, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.13.'te (4.2.16), (4.2.17) ve (4.2.18) çözümlerindeki $\lambda = 1, \mu = 0, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.15, A_1 = -1.83, A_2 = -6.52, A_3 = -5.62, c = 0.8, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.14.'te (4.2.19), (4.2.20) ve (4.2.21) çözümlerindeki $\lambda = 2, \mu = 1, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = -0.9, A_1 = -7.42, A_2 = -12.15, A_3 = -5.62, c = -1, y = 1.2, t = 1, E = 0.75$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.15.'te (4.2.22), (4.2.23) ve (4.2.24) çözümlerindeki $\lambda = 0, \mu = 0, B_0 = 0.2, k = 1.5, \alpha = -1, B_1 = 1.25, A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = -0.9, A_3 = -5.62, c = -1, y = 1.2, t = 1, E =$

0.75 sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.16.'da (4.3.6) çözümündeki $\lambda = 3, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, c = 16.12, A_1 = -6.00, A_2 = 2, B_1 = -0.12, E = 0.65, A_3 = 1.5, B_0 = 0.2, A_0 = -2.48, t = 1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.17.'de (4.3.7) çözümündeki $\lambda = 1, \mu = 3, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -2.90, c = 34.73, A_1 = -0.754, A_2 = -1, B_1 = -0.12, E = 0.65, t = 1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.18.'de (4.3.8) çözümündeki $\lambda = 1, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.07, c = 4.44, A_1 = -2.54, A_2 = -1, B_1 = -0.12, E = 0.65, t = 1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.19.'da (4.3.9) çözümündeki $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -2.31, c = 3.04, A_1 = -3.61, A_2 = 0.5, B_1 = -0.12, E = 0.65$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.20.'de (4.3.10) çözümündeki $\lambda = 0, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = 2, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.18, c = 3.04, A_1 = -0.11, A_2 = -2.5, B_1 = -0.12, E = 0.65$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.21.'de (4.3.11) çözümündeki $\lambda = 3, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.08, c = 3.04, A_1 = 1.44, A_2 = 4.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, t = 1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.22.'de (4.3.12) çözümündeki $\lambda = 3, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, R = 1.3, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.08, c = 3.04, A_1 = 1.44, A_2 = 4.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, t = 1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.23.'te (4.3.13) çözümündeki $\lambda = 1, \mu = 0, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -0.07, c = -1, A_1 = -0.79, A_2 = 1.62, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.25, t = 1$

sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.24.'te (4.3.14) çözümündeki $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = 0.03, c = 2.20, A_1 = 0.69, A_2 = 3.12, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.26, t = 1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.25.'te (4.3.15) çözümündeki $\lambda = 2, \mu = 1, c_0 = 0.25, \gamma = -0.09, k = 1.25, A_3 = 1.5, \alpha = 0, B_0 = 0.2, A_0 = -0.08, c = 2.20, A_1 = -1.04, A_2 = 0.12, B_1 = 2.5, E = 0.65, R = 0.26, t = 1$ sabitleri için hareketli dalga çözümünün iki boyutlu, üç boyutlu, yoğunluk ve dış hat grafikleri çizdirilmiştir.

Şekil 4.26.'da (4.4.1) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafiği çizdirilmiştir.

Şekil 4.27.'de (4.4.2) denkleminin $\rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafiği çizdirilmiştir.

Şekil 4.28.'de (4.4.1) ve (4.4.2) denklemlerinin $x = 0.1, y = 0.1, \rho = 0.5, \sigma = 0, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafiği çizdirilmiştir.

Şekil 4.29.'da CH denkleminin $n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafiği çizdirilmiştir.

Şekil 4.30.'da CH denkleminin $t = 3, n = 1$ ve $h = -1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafiği çizdirilmiştir.

Şekil 4.31.'de RH denkleminin $c = 0.5, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün üç boyutlu grafiği çizdirilmiştir.

Şekil 4.32.'de RH denkleminin $t = 3, c = 0.5, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için UKq-SHADM çözümünün iki boyutlu grafiği çizdirilmiştir.

ÖNERİLER

Bu tez çalışması kapsamında bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ve bazı doğrusal olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri ve nümerik çözümleri ile bu alanda çalışma yapmayı düşünen araştırmacılar için bazı öneriler aşağıda sıralanmaktadır:

- Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler uyumlu kesirli türev operatörü ile incelenmiştir. Buradaki türev operatörünün yerine, Grunwald-Letnikov, Weyl, Riesz, Atangana-Baleanu, Caputo, Caputo-Fabrizio gibi farklı kesirli mertebeden türev operatörleri kullanılarak çözümler elde edilebilir.
- Bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ile hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Literatürde var olan tam çözüm metotları ile bu doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri elde edilebilir.
- Bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ile hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Literatürde var olan diğer doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri için de geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılabilir.
- Bazı uyumlu kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin uyumlu kesirli q -Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu ile nümerik çözümleri elde edilmiştir. Gelecekte üretilecek yeni nümerik metodlar ile bu denklemlerin yeni nümerik çözümleri elde edilebilir.
- Bazı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin uyumlu kesirli q -Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu ile nümerik çözümleri elde edilmiştir. Literatürde var olan diğer doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümler için de uyumlu kesirli q -Shehu homotopi analiz dönüşüm metodu kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hirota, R. (2004). *The direct method in soliton theory*, Cambridge University Press, New York
- [2] Munteanu, L. ve Donescu, S. (2004). *Introduction to soliton theory: applications to mechanics*, Springer Science & Business Media, New York
- [3] Yokuş, A. ve Kaya, D. (2020). Comparison exact and numerical simulation of the traveling wave solution in nonlinear dynamics. *International Journal of Modern Physics B*, cilt 34(29), 2050282. doi:10.1142/S02179792205028
- [4] Baleanu, D., Wu, G.C. ve Zeng, S.D. (2017). Chaos Analysis and Asymptotic Stability of Generalized Caputo Fractional Differential Equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, C. 102, 99-105. doi:10.1016/j.chaos.2017.02.007
- [5] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. ve Trujillo, J.J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, New York
- [6] Baleanu, D., Zibaei, S., Namjoo, M. ve Jajarmi, A. (2021). A nonstandard finite difference scheme for the modeling and nonidentical synchronization of a novel fractional chaotic system. *Advances in Difference Equations*, cilt 2021(1), ss. 308. doi:10.1186/s13662-021-03454-1
- [7] İlhan, E. ve Kıymaz, İ.O. (2020). A generalization of truncated M-fractional derivative and applications to fractional differential equations. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, cilt 5(1), ss. 171-188. doi:10.2478/amns.2020.1.00016
- [8] Choucha, A., Boulaaras, S., Ouchenane, D., Alkhalaf, S. ve Jan, R. (2022). General decay for a system of viscoelastic wave equation with past history, distributed delay and Balakrishnan-Taylor damping terms. *Electronic Research Archive*, cilt 30(10), ss. 3902-3929. doi:10.3934/era.2022199
- [9] Jiang, J., Feng, Y. ve Li, S. (2020). Improved fractional subequation method and exact solutions to fractional partial differential equations. *Journal of Function Spaces*, cilt 2020, ss. 1-18. doi:10.1155/2020/5840920
- [10] Feng, Q.H. (2013). Exact solutions for fractional differential-difference equations by an extended Riccati Sub-ODE method. *Communications in Theoretical Physics*, cilt 59(5), ss. 521. doi: 10.1088/0253-6102/59/5/01
- [11] Simbanefayi, I. ve Khalique, C.M. (2018). Travelling wave solutions and conservation laws for the Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony equation. *Results in Physics*, cilt 8, ss. 57-63. doi:10.1016/j.rinp.2017.10.041
- [12] Zhang, L. (2011). Explicit traveling wave solutions of five kinds of nonlinear evolution equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, cilt 379(1), ss. 91-124. doi:10.1016/j.jmaa.2010.12.032
- [13] Yokuş, A. (2021). Construction of different types of traveling wave solutions of the relativistic wave equation associated with the Schrödinger equation. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, cilt 1(1), ss. 24-31. doi:10.53391/mmnsa.2021.01.003
- [14] Li, Z. (2022). Bifurcation and traveling wave solution to fractional Biswas-Arshed equation with the beta time derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 160, ss. 112249
- [15] Alam, L.M.B. ve Jiang, X. (2021). Exact and explicit traveling wave solution to the time-fractional phi-four and (2+1) dimensional CBS equations using the modified extended tanh-function method in mathematical physics. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, cilt 4, ss. 1-11
- [16] Wang, K. (2022). Exact traveling wave solution for the fractal Riemann wave model arising in ocean science. *Fractals*, cilt 30(07), ss. 2250143
- [17] Cheemaa, N. ve Younis, M. (2016). New and more general traveling wave solutions for nonlinear Schrödinger equation. *Waves in Random and Complex Media*, cilt 26(1), ss. 30-41
- [18] Salako, R.B. ve Shen, W. (2018). Existence of traveling wave solutions of parabolic-parabolic chemotaxis systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, cilt 42, ss. 93-119

- [19] Alam, M.N. (2023). An analytical technique to obtain traveling wave solutions to nonlinear models of fractional order. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, cilt 8, ss. 100533
- [20] Durur, H. ve Yokuş, A. (2022). Discussions on diffraction and the dispersion for traveling wave solutions of the (2+1)-dimensional paraxial wave equation. *Mathematical Sciences*, cilt 16(3), ss. 269-279
- [21] Yang, X.J., Machado, J.T. ve Baleanu, D. (2017). Exact traveling-wave solution for local fractional Boussinesq equation in fractal domain. *Fractals*, cilt 25(04), ss. 1740006
- [22] Lu, D., Seadawy, A.R. ve Ali, A. (2018). Dispersive traveling wave solutions of the equal-width and modified equal-width equations via mathematical methods and its applications. *Results in Physics*, cilt 9, ss. 313-320
- [23] Abdullah, Z., Ripai, A., Syafwan, M. ve Hidayat, W. (2023). Traveling wave solutions for explicit-time nonlinear photorefractive dynamics equation. *Nonlinear Dynamics*, cilt 111(17), ss. 16515-16526
- [24] Rezazadeh, H., Korkmaz, A., Eslami, M., Vahidi, J. ve Asghari, R. (2018). Traveling wave solution of conformable fractional generalized reaction Duffing model by generalized projective Riccati equation method. *Optical and Quantum Electronics*, cilt 50, ss. 1-13
- [25] Alotaibi, H. (2021). Traveling wave solutions to the nonlinear evolution equation using expansion method and addendum to Kudryashov's method. *Symmetry*, cilt 13(11), 2126
- [26] El-Sayed, Z.E.S.M. ve Al-Nowehy, A.G. (2016). Exact traveling wave solutions for nonlinear PDEs in mathematical physics using the generalized Kudryashov method. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, cilt 13(2), ss. 203-227
- [27] Hosseini, K., Bekir, A. ve Kaplan, M. (2017). New exact traveling wave solutions of the Tzitzéica-type evolution equations arising in non-linear optics. *Journal of Modern Optics*, cilt 64(16), ss. 1688-1692
- [28] Kaplan, M., Bekir, A. ve Akbulut, A. (2016). A generalized Kudryashov method to some nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Nonlinear Dynamics*, cilt 85, ss. 2843-2850
- [29] Koca, K. (2008). *Kısmi türevli denklemler*, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara
- [30] He, J.H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, cilt 178(3-4), ss. 257-262
- [31] He, J.H. (2003). Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*, cilt 135(1), ss. 73-79
- [32] He, J.H. (2006). Addendum: new interpretation of homotopy perturbation method. *International Journal of Modern Physics B*, cilt 20(18), ss. 2561-2568
- [33] Khuri, S.A. (2001). A Laplace decomposition algorithm applied to a class of nonlinear differential equations. *Journal of Applied Mathematics*, cilt 1, ss. 141-155
- [34] Khan, Y. ve Wu, Q. (2011). Homotopy perturbation transform method for nonlinear equations using He's polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, cilt 61(8), ss. 1963-1967
- [35] Kumar, D., Singh, J. ve Kumar, S. (2015). A fractional model of Navier–Stokes equation arising in unsteady flow of a viscous fluid. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, cilt 17, ss. 14-19
- [36] Kumar, S., Kumar, A., Kumar, D., Singh, J. ve Singh, A. (2015). Analytical solution of Abel integral equation arising in astrophysics via Laplace transform. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, cilt 23(1), ss. 102-107
- [37] Khan, M., Gondal, M.A., Hussain, I. ve Vanani, S. K. (2012). A new comparative study between homotopy analysis transform method and homotopy perturbation transform method on a semi infinite domain. *Mathematical and Computer Modelling*, cilt 55(3-4), ss. 1143-1150

- [38] Kumar, D., Singh, J. ve Kumar, S. (2014). Numerical computation of Klein–Gordon equations arising in quantum field theory by using homotopy analysis transform method. *Alexandria Engineering Journal*, cilt 53(2), ss. 469-474
- [39] Yin, X.B., Kumar, S. ve Kumar, D. (2015). A modified homotopy analysis method for solution of fractional wave equations. *Advances in Mechanical Engineering*, cilt 7(12), ss. 1687814015620330
- [40] Liao, S.J. (1992). *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*, Shanghai, PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University
- [41] Liao, S.J. (2003). *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*, Chaoman and Hall/CRC Press, Boca Raton
- [42] El-Tawil, M.A. ve Huseen, S.N. (2012). The q-homotopy analysis method (q-HAM). *Int. J. Appl. Math. Mech*, cilt 8(15), ss. 51-75
- [43] El-Tawil, M. A. ve Huseen, S.N. (2013). On convergence of the q-homotopy analysis method. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, cilt 8(10), ss. 481-497
- [44] Singh, J., Kumar, D., Swroop, R. ve Kumar, S. (2018). An efficient computational approach for time-fractional Rosenau–Hyman equation. *Neural Computing and Applications*, cilt 30, ss. 3063-3070
- [45] Erol, A.S., Anaç. H. ve Olgun, A. (2023). Numerical solutions of conformable time-fractional Swift-Hohenberg equation with proportional delay by the novel methods. *Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi*, cilt 5(1), ss. 1-24
- [46] He, J.H. ve Wu, X.H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, cilt 30(3), ss. 700-708
- [47] He, Y., Li, S. ve Long, Y. (2012). Exact solutions of the Klein-Gordon equation by modified Exp-function method. *In Int. Math. Forum*, cilt 7(4), ss. 175-182
- [48] Özpınar, F., Baskonus, H.M. ve Bulut, H. (2015). On the complex and hyperbolic structures for the $(2+1)$ -dimensional Boussinesq water equation. *Entropy*, cilt 17(12), ss. 8267-8277
- [49] Yasmin, H., Pandir, Y., Aktürk, T. ve Gurefe, Y. (2023). Exact Solutions of the Stochastic Conformable Broer–Kaup Equations. *Axioms*, cilt 12(9), ss. 889
- [50] Tian, Y. ve Liu, J. (2021). A modified exp-function method for fractional partial differential equations. *Thermal Science*, cilt 25(2 Part B), ss. 1237-1241
- [51] Pandir, Y., Aktürk, T., Gurefe, Y. ve Juya, H. (2023). The Modified Exponential Function Method for Beta Time Fractional Biswas-Arshed Equation. *Advances in Mathematical Physics*, cilt 2023, ss. 1091355
- [52] Shakeel, M., Alaoui, M.K., Zidan, A.M. ve Shah, N.A. (2022). Closed form solutions for the generalized fifth-order KDV equation by using the modified exp-function method. *Journal of Ocean Engineering and Science*. doi:10.1016/j.joes.2022.06.037
- [53] Shakeel, M., Attaullah, Shah, N.A. ve Chung, J.D. (2023). Modified exp-function method to find exact solutions of microtubules nonlinear dynamics models. *Symmetry*, cilt 15(2), ss. 360
- [54] Bulut, H. ve Baskonus, H.M. (2016). New complex hyperbolic function solutions for the $(2+1)$ -dimensional dispersive long water–wave system. *Mathematical and Computational Applications*, cilt 21(2), ss. 6
- [55] Baskonus, H.M. ve Bulut, H. (2015). Analytical studies on the $(1+1)$ -dimensional nonlinear dispersive modified Benjamin–Bona–Mahony equation defined by seismic sea waves. *Waves in Random and Complex Media*, cilt 25(4), ss. 576-586
- [56] Aktürk, T. (2021). Modified exponential function method for nonlinear mathematical models with Atangana conformable derivative. *Revista Mexicana de Física*, cilt 67(4), ss. 1-18
- [57] Younis, M., Seadawy, A.R., Bilal, M., Rizvi, S.T.R., Althobaiti, S. ve Alkafafy, M. (2021). Nonlinear dynamical wave structures to the Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation and its modulation instability analysis. *Modern Physics Letters B*, cilt 35(18), ss. 2150300

- [58] Iqbal, M.A., Wang, Y., Miah, M. M. ve Osman, M.S. (2021). Study on date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation with conformable derivative dependent on time parameter to find the exact dynamic wave solutions. *Fractal and Fractional*, cilt 6(1), ss. 4
- [59] Tanwar, D.V. ve Kumar, M. (2021). Lie symmetries, exact solutions and conservation laws of the Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation. *Nonlinear Dynamics*, cilt 106, ss. 3453-3468
- [60] Ismael, H. F., Seadawy, A. ve Bulut, H. (2021). Rational solutions, and the interaction solutions to the (2+1)-dimensional time-dependent Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation. *International Journal of Computer Mathematics*, cilt 98(12), ss. 2369-2377
- [61] Guo, F. ve Lin, J. (2019). Interaction solutions between lump and stripe soliton to the (2+ 1)-dimensional Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation. *Nonlinear Dynamics*, cilt 96, ss. 1233-1241
- [62] Kumar, A., Ilhan, E., Ciancio, A., Yel, G. ve Baskonus, H.M. (2021). Extractions of some new travelling wave solutions to the conformable Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa equation. *AIMS Mathematics*, cilt 6, ss. 4238–4264
- [63] Iqbal, M.A., Wang, Y., Miah, M.M. ve Osman, M.S. (2021). Study on date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation with conformable derivative dependent on time parameter to find the exact dynamic wave solutions. *Fractal and Fractional*, cilt 6(1), ss. 4
- [64] Kumar, S., Nisar, K.S. ve Kumar, A. (2021). A (2+1)-dimensional generalized Hirota–Satsuma–Ito equations: Lie symmetry analysis, invariant solutions and dynamics of soliton solutions. *Results in Physics*, cilt 28, ss. 104621
- [65] Ma, W.X., Li, J. ve Khalique, C.M. (2018). A study on lump solutions to a generalized Hirota–Satsuma–Ito equation in (2+1)-dimensions. *Complexity*, cilt 2018, ss. 1-7
- [66] Chen, S.J., Ma, W.X. ve Lü, X. (2020). Bäcklund transformation, exact solutions and interaction behaviour of the (3+1)-dimensional Hirota–Satsuma–Ito-like equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, cilt 83, ss. 105135
- [67] Kumar, S., Nisar, K.S. ve Kumar, A. (2021). A (2+1)-dimensional generalized Hirota–Satsuma–Ito equations: Lie symmetry analysis, invariant solutions and dynamics of soliton solutions. *Results in Physics*, cilt 28, ss. 104621
- [68] Liu, Y., Wen, X.Y. ve Wang, D.S. (2019). The N-soliton solution and localized wave interaction solutions of the (2+1)-dimensional generalized Hirota–Satsuma–Ito equation. *Computers & Mathematics with Applications*, cilt 77(4), ss. 947-966
- [69] Guan, S.N., Wei, G.M. ve Li, Q. (2021). Lie symmetry analysis, optimal system and conservation law of a generalized (2+ 1)-dimensional Hirota–Satsuma–Ito equation. *Modern Physics Letters B*, cilt 35(35), ss. 2150515
- [70] Kuo, C.K. ve Ghanbari, B. (2019). Resonant multi-soliton solutions to new (3+1)-dimensional Jimbo–Miwa equations by applying the linear superposition principle. *Nonlinear Dynamics*, cilt 96(1), ss. 459-464
- [71] Wu, Z.J. ve Tian, S.F. (2023). Breather-to-soliton conversions and their mechanisms of the (2+ 1)-dimensional generalized Hirota–Satsuma–Ito equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, cilt 210, ss. 235-259
- [72] Yang, D. ve Jiang, X. (2023). Line-soliton, lump and interaction solutions to the (2+ 1)-dimensional Hirota–Satsuma–Ito equation with time-dependent via Hirota bilinear forms. *Results in Physics*, cilt 53, ss. 106904
- [73] Liu, Y., Wen, X.Y. ve Wang, D.S. (2019). The N-soliton solution and localized wave interaction solutions of the (2+1)-dimensional generalized, Hirota–Satsuma–Ito equation. *Computers & Mathematics with Applications*, cilt 77(4), ss. 947-966
- [74] Dullin, H.R., Gottwald, G.A. ve Holm, D.D. (2001). An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion. *Physical Review Letters*, cilt 87(19), ss. 194501
- [75] Ju, L. (2006). On solution of the Dullin–Gottwald–Holm equation. *International Journal of Nonlinear Science*, cilt 1(1), ss. 43-48

- [76] Cahn, J.W. ve Hilliard, J.E. (1958). Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *The Journal of Chemical Physics*, cilt 28(2), ss. 258-267
- [77] Bertozzi, A.L., Esedoglu, S. ve Gillette, A. (2006). Inpainting of binary images using the Cahn–Hilliard equation. *IEEE Transactions on Image Processing*, cilt 16(1), ss. 285-291
- [78] Kim, J., Lee, S., Choi, Y., Lee, S.M. ve Jeong, D. (2016). Basic principles and practical applications of the Cahn–Hilliard equation. *Mathematical Problems in Engineering*, cilt 2016, ss. 9532608
- [79] Miranville, A., Pietrus, A., ve Rakotoson, J.M. (1998). Dynamical aspect of a generalized Cahn–Hilliard equation based on a microforce balance. *Asymptotic Analysis*, cilt 16(3-4), ss. 315-345
- [80] Nicolaenko, B., Scheurer, B. ve Temam, R. (1987). Some global dynamical properties of a class of pattern formation equations. *Communications Partial Differential Equations*, cilt 14, ss. 245-297
- [81] Novick-Cohen, A. ve Segel, L.A. (1984). Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, cilt 10(3), ss. 277-298
- [82] Gurtin, M.E. (1996). Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, cilt 92(3-4), ss. 178-192
- [83] Choksi, R., Peletier, M.A. ve Williams, J.F. (2009). On the phase diagram for microphase separation of diblock copolymers: an approach via a nonlocal Cahn–Hilliard functional. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, cilt 69(6), ss. 1712-1738
- [84] Tang, P., Qiu, F., Zhang, H. ve Yang, Y. (2005). Phase separation patterns for diblock copolymers on spherical surfaces: A finite volume method. *Physical Review E*, cilt 72(1), ss. 016710
- [85] Hu, S.Y. ve Chen, L.Q. (2001). A phase-field model for evolving microstructures with strong elastic inhomogeneity. *Acta Materialia*, cilt 49(11), ss. 1879-1890
- [86] Hussain, S., Shah, A., Ullah, A. ve Haq, F. (2022). The q-homotopy analysis method for a solution of the Cahn–Hilliard equation in the presence of advection and reaction terms. *Journal of Taibah University for Science*, cilt 16(1), ss. 813-819
- [87] Bouhassoun, A. ve Hamdi Cherif, M. (2015). Homotopy perturbation method for solving the fractional Cahn-Hilliard equation. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, cilt 18(5), ss. 513-524
- [88] Tripathi, N.K., Das, S., Ong, S.H., Jafari, H. ve Al Qurashi, M.M. (2017). Solution of time-fractional Cahn–Hilliard equation with reaction term using homotopy analysis method. *Advances in Mechanical Engineering*, cilt 9(12), ss. 1687814017740773
- [89] Zhu, J., Chen, L.Q., Shen, J. ve Tikare, V. (1999). Coarsening kinetics from a variable-mobility Cahn-Hilliard equation: Application of a semi-implicit Fourier spectral method. *Physical Review E*, cilt 60(4), ss. 3564-3572
- [90] Barrett, J.W., Blowey, J.F. ve Garcke, H. (1999). Finite element approximation of the Cahn--Hilliard equation with degenerate mobility. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, cilt 37(1), ss. 286-318
- [91] Berti, A. ve Bochicchio, I. (2011). A mathematical model for phase separation: a generalized Cahn–Hilliard equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, cilt 34(10), ss. 1193-1201
- [92] Wight, C.L. ve Zhao, J. (2020). Solving Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations using the adaptive physics informed neural networks. *arXiv preprint arXiv:2007.04542*
- [93] Shah, A. ve Siddiqui, A.A. (2012). Variational iteration method for the solution of viscous Cahn-Hilliard equation. *World Applied Sciences Journal*, cilt 16(11), ss. 1589-1592
- [94] Hussain, S. ve Shah, A. (2011). An analysis of two iterative techniques for solution of Cahn-Hilliard equation. *International Journal of Nonlinear Science*, cilt 12(1), ss. 42-47
- [95] Hussain, S., Shah, A., Ullah, A. ve Haq, F. (2022). The q-homotopy analysis method for a solution of the Cahn–Hilliard equation in the presence of advection and reaction terms. *Journal of Taibah University for Science*, cilt 16(1), ss. 813-819
- [96] Poincaré, H. (1885). Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Bulletin Astronomique, Observatoire de Paris*, cilt 2(1), ss. 109-118

- [97] Adomian, G. (1995). Analytical solution of Navier-Stokes flow of a viscous compressible fluid. *Foundations of Physics Letters*, cilt 8, ss. 389-400
- [98] Krasnoschok, M., Pata, V., Siryk, S.V. ve Vasylyeva, N. (2020). A subdiffusive Navier–Stokes–Voigt system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, cilt 409, ss. 132503
- [99] Wang, Y., Zhao, Z., Li, C. ve Chen, Y. (2009). Adomian’s method applied to Navier-Stokes equation with a fractional order. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, cilt 49019, ss. 1047-1054
- [100] Yu, Q., Song, J., Liu, F., Anh, V. ve Turner, I. (2009). An approximate solution for the Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative model using the Adomian decomposition method. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, cilt 3(4), ss.553-572
- [101] Krasnoschok, M., Pata, V., Siryk, S.V. ve Vasylyeva, N. (2020). Equivalent definitions of Caputo derivatives and applications to subdiffusion equations. *Dynamics of Partial Differential Equations*, cilt 17(4), ss. 383-402
- [102] Bazhlekova, E., Jin, B., Lazarov, R. ve Zhou, Z. (2015). An analysis of the Rayleigh–Stokes problem for a generalized second-grade fluid. *Numerische Mathematik*, cilt 131(1), ss. 1-31
- [103] El-Shahed, M. ve Salem, A. (2004). On the generalized Navier–Stokes equations. *Applied Mathematics and Computation*, cilt 156(1), ss. 287-293
- [104] Kumar, D., Singh, J. ve Kumar, S. (2015). A fractional model of Navier–Stokes equation arising in unsteady flow of a viscous fluid. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, cilt 17, ss.14-19
- [105] Ganji, Z.Z., Ganji, D.D., Ganji, A.D. ve Rostamian, M. (2010). Analytical solution of time-fractional Navier–Stokes equation in polar coordinate by homotopy perturbation method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, cilt 26(1), ss. 117-124
- [106] Ragab, A.A., Hemida, K.M., Mohamed, M.S. ve Abd El Salam, M.A. (2012). Solution of time-fractional Navier–Stokes equation by using homotopy analysis method. *Gen. Math. Notes*, cilt 13(2), ss. 13-21
- [107] Maitama, S. (2018). Analytical solution of time-fractional Navier–Stokes equation by natural homotopy perturbation method. *Prog. Fract. Differ. Appl*, cilt 4(2), ss. 123-131
- [108] Birajdar, G.A. (2014). Numerical solution of time fractional Navier-Stokes equation by discrete Adomian decomposition method. *Nonlinear Engineering*, cilt 3(1), ss. 21-26
- [109] Kumar, S., Kumar, D., Abbasbandy, S. ve Rashidi, M.M. (2014). Analytical solution of fractional Navier–Stokes equation by using modified Laplace decomposition method. *Ain Shams Engineering Journal*, cilt 5(2), ss. 569-574
- [110] Chaurasia, V.B.L. ve Kumar, D. (2011). Solution of the time-fractional Navier–Stokes equation. *Gen. Math. Notes*, cilt 4(2), ss. 49-59
- [111] Mukhtar, S., Shah, R. ve Noor, S. (2022). The numerical investigation of a fractional-order multi-dimensional Model of Navier–Stokes equation via novel techniques. *Symmetry*, cilt 14(6), ss. 1102
- [112] Rosenau, P. ve Hyman, J.M. (1993). Compactons: solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, cilt 70(5), ss. 564
- [113] Mihaila, B., Cardenas, A., Cooper, F. ve Saxena, A. (2010). Stability and dynamical properties of Rosenau-Hyman compactons using Padé approximants. *Physical Review E*, cilt 81(5), ss. 056708
- [114] Bazeia, D., Das, A., Losano, L. ve Santos, M.J.D. (2010). Traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations. *Applied Mathematics Letters*, cilt 23(6), ss. 681-686
- [115] Rus, F. ve Villatoro, F.R. (2007). Self-similar radiation from numerical Rosenau–Hyman compactons. *Journal of Computational Physics*, cilt 227(1), ss. 440-454
- [116] Rus, F. ve Villatoro, F.R. (2007). Padé numerical method for the Rosenau–Hyman compacton equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, cilt 76(1-3), ss. 188-192

- [117] Rus, F. ve Villatoro, F.R. (2009). A repository of equations with cosine/sine compactons. *Applied Mathematics and Computation*, cilt 215(5), ss. 1838-1851
- [118] Rus, F., ve Villatoro, F.R. (2008). Numerical methods based on modified equations for nonlinear evolution equations with compactons. *Applied Mathematics and Computation*, cilt 204(1), ss. 416-422
- [119] Singh, J., Kumar, D., Swroop, R. ve Kumar, S. (2018). An efficient computational approach for time-fractional Rosenau–Hyman equation. *Neural Computing and Applications*, cilt 30, ss. 3063-3070
- [120] Yasmin, H., Alshehry, A.S., Saeed, A.M., Shah, R. ve Nonlaopon, K. (2023). Application of the q-Homotopy Analysis Transform Method to Fractional-Order Kolmogorov and Rosenau–Hyman Models within the Atangana–Baleanu Operator. *Symmetry*, cilt 15(3), ss. 671
- [121] Akgül, A., Aliyu, A.I., Inc, M., Yusuf, A. ve Baleanu, D. (2020). Approximate solutions to the conformable Rosenau-Hyman equation using the two-step Adomian decomposition method with Pad é approximation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, cilt 43(13), ss. 7632-7639
- [122] Baskonus, H.M. ve Bulut, H. (2015). Analytical studies on the (1+1)-dimensional nonlinear dispersive modified Benjamin–Bona–Mahony equation defined by seismic sea waves. *Waves in Random and Complex Media*, cilt 25(4), ss. 576-586.
- [123] Singh, B.K., Arora, G. ve Singh, M.K. (2016). A numerical scheme for the generalized Burgers–Huxley equation. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, cilt 24(4), ss. 629-637.
- [124] Singh, J., Swroop, R. ve Kumar, D. (2018). A computational approach for fractional convection-diffusion equation via integral transforms. *Ain Shams Engineering Journal*, cilt 9(4), ss. 1019-1028
- [125] Akbar, M.A., Akinyemi, L., Yao, S.W., Jhangeer, A., Rezazadeh, H., Khater, M.M.A., Ahmad, H. ve İnç, M. (2021). Soliton solutions to the Boussinesq equation through sine-Gordon method and Kudryashov method. *Results in Physics*, cilt 25, ss. 104228
- [126] Gu, C. (2013). *Soliton theory and its applications*, Springer Science & Business Media, New York
- [127] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego
- [128] Miller, K.S. ve Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York
- [129] Oldham, K.B. ve Spanier, J. (1974). *The fractional calculus*, Academic Press, New York
- [130] Hilfer, R. (2000). *Application of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific Publishing Company, Singapore
- [131] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative, *Journal of computational and applied mathematics*, cilt 264, ss. 65-70
- [132] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, cilt 279, ss. 57-66
- [133] Liao, S. (2009). Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, cilt 14(4), ss. 983-997
- [134] Maitama, S. ve Zhao, W. (2019). New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations. *arXiv preprint arXiv:1904.11370*
- [135] Benattia, M.E. ve Belghaba, K. (2021). Shehu conformable fractional transform, theories and applications. *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, cilt 18(1), ss. 24-32.
- [136] Aktürk, T., Bulut, H. ve Yel, G. (2018). An application of the modified expansion method to nonlinear partial differential equation. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, cilt 10, ss. 202-206

- [137] Odibat, Z. M. ve Shawagfeh, N. T. (2007). Generalized Taylor's formula. *Applied Mathematics and computation*, cilt 186(1), ss. 286-293
- [138] Russell, J.S. (1885). *The wave of translation in the oceans of water, air, and ether*, Trübner & Company, London
- [139] Korteweg, D.J. ve De Vries, G. (2011). XLI. On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *Philosophical magazine*, cilt 91(4-6), ss. 1007-1028
- [140] Zabusky, N.J. ve Kruskal, M.D. (1965). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, cilt 15(6), ss. 240
- [141] Liu, Z. ve Qian, T. (2002). Peakons of the Camassa–Holm equation. *Applied Mathematical Modelling*, cilt 26(3), ss. 473-480
- [142] Vakhnenko, V.O. ve Parkes, E.J. (2004). Periodic and solitary-wave solutions of the Degasperis–Procesi equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, cilt 20(5), ss. 1059-1073
- [143] Çelikkaya, İ. (2021). Travelling peakon and solitary wave solutions of modified Fornberg–Whitham equations with nonhomogeneous boundary conditions. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, cilt 24(2), ss. 661-671
- [144] Parker, A. (2007). Cusped solitons of the Camassa–Holm equation. I. Cuspon solitary wave and antipeakon limit. *Chaos, Solitons & Fractals*, cilt 34(3), ss. 730-739
- [145] He, Y., Li, S. ve Long, Y. (2012). Exact solutions of the Klein-Gordon equation by modified Exp-function method. *In Int. Math. Forum*, cilt 7(4), ss. 175-182
- [146] Naher, H. ve Abdullah, F.A. (2013). New approach of (G'/G)-expansion method and new approach of generalized (G'/G)-expansion method for nonlinear evolution equation. *AIP Advances*, cilt 3(3), ss. 032116
- [147] Ugurlu, Y. ve Kaya, D. (2008). Solutions of the Cahn–Hilliard equation. *Computers & Mathematics with Applications*, cilt 56(12), ss. 3038-3045

ÖZGEÇMİŞ

Ash ALKAN

[illegible]

[REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED]

[REDACTED]

AKADEMİK FAALİYETLER

Makaleler:

1. Alkan, A., Aktürk, T., Bulut, H., Güllüoğlu, N. (2024). The Traveling Wave Solutions of Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa Equation with Conformable Derivative Dependent on Time Parameter. *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 14 (1) , 2146-6440. DOI: 10.54370/ordubtd.1312038.
2. Alkan, A., Bulut, H., Aktürk, T., Engin, Ö. ve Güllüoğlu, N. (2024). Analysis of Nonlinear Partial Differential Equation of Traveling Wave Solutions with an Effective Method, *Sigma: Journal of Engineering & Natural Sciences*. DOI: 10.14744/sigma.2024.00085.

Bildiriler:

1. Bulut, H., Aktürk, T., Alkan A. (2021). Investigation of the Wave Solutions of the Nonlinear Partial Differential Equations with the Modified Exponential Function Method. *5th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, (CMES-2021)*, 8-10 June 2021, Van, Turkey.
2. Alkan, A., Aktürk, T., Güllüoğlu, N., & Bulut, H. (2022). The Traveling Wave Solutions of Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa Equation with Conformable Derivative Dependent on Time Parameter. *6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2022)*, 20-22 May, Ordu, Turkey.
3. Alkan, A., Aktürk, T., Bulut, H. (2023). Analysis of Nonlinear Partial Differential Equation of Traveling Wave Solutions with an Effective Method. *7th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2023)*, 20-21 May, Elazığ, Turkey.

4. Alkan, A., Aktürk, T., Bulut, H. (2024). The Novel Numerical Solutions of the Cahn-Hilliard Equation via the Novel Method. *8th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2024)*, 17-19 May, Şanlıurfa, Turkey.
5. Alkan, A., Aktürk, T., Bulut, H. (2024). The New Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equation with the New Hybrid Method. *8th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2024)*, 17-19 May, Şanlıurfa, Turkey.
6. Alkan, A., Aktürk, T., Bulut, H. (2024). The Novel Numerical Solutions of the Rosenau-Hyman Equation via the Novel Hybrid Method. *8th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2024)*, 17-19 May, Şanlıurfa, Turkey.

