



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ELİPTİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN SONLU FARK ŞEMASI
METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

ECRİN POLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Şanlıurfa
2024**

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ELİPTİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN SONLU FARK ŞEMASI
METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

ECRİN POLAT

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mahmut MODANLI**

**ŞANLIURFA
2024**

TEZ ONAY SAYFASI

aaa

Jüri

İmza

ONAY

aa

.....
(İmza)
MATEMATİK Müdürü



TEŐEKKÖR

Tez çalışmam sırasında değerli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile her daim bana yol gösterici ve destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mahmut MODANLI' ya, çalışmam boyunca birçok konuda yanımda olan canım kardeşim Selcan POLAT'a ve tez çalışmalarım esnasında desteğini eksiltmeyen değerli müdürüm şehmus KANLISU'ya teőekkör ederim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel kavramlar	2
1.2. İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları	5
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	16
3. MATERYAL ve YÖNTEM	18
3.1. Materyal	18
3.2. Yöntem	18
3.2.1. Sonlu fark şemasının oluşturulması ve kararlılık	18
3.2.2. Çift Laplace yöntemi	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	26
4.1. Nümerik Sonuçlar	26
4.1.1 Çift Laplace metodu	26
4.1.2. Sonlu fark metodu	30
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	35
5.1. Sonuçlar	35
5.2. Öneriler	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	38

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ELİPTİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN SONLU FARK ŞEMASI METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Ecrin POLAT

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Yıl:2024, Sayfa:38

Bu çalışmada eliptik kısmi diferansiyel denklemin başlangıç-sınır değer koşullarına bağlı yaklaşık çözümü sonlu fark şeması metodu ile incelendi. Bu eliptik kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü için sonlu fark şemaları kuruldu. Bu fark şemalarının kararlılığı gösterildi. Verilen tekniğin geçerliliğini ve uygulanabilirliğini test etmek için örnek problemler verilmiştir. Tam ve yaklaşık çözümler karşılaştırılarak hata analizi yapıldı. Matlab programı yardımıyla tam ve yaklaşık çözümler için grafikler elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemi, Sonlu Fark Metodu, Kararlılık Kestirimleri, Tam çözüm, Yaklaşık Çözüm.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOLUTION OF THE ELLIPTICAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION USING THE FINITE DIFFERENCE SCHEME METHOD

Ecrin POLAT

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2024, Page:38**

In this study, the approximate solution of the elliptic partial differential equation based on initial-boundary value conditions was examined with the finite difference scheme method. Finite difference schemes were established for the approximate solution of this elliptic partial differential equation. The stability of these difference schemes has been demonstrated. Sample problems were given to test the validity and applicability of the given technique. Error analysis was performed by comparing exact and approximate solutions. Graphs for exact and approximate solutions were obtained with the help of Matlab program.

KEY WORDS: Elliptic Partial Differential Equation, Finite Difference Method, Stability Estimates, Exact Solution, Approximate Solution.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. (4.1(4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ aralığı için tam çözüm grafiğidir.....	33
Şekil 2. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ ile $N = M = 50$ aralığı için yaklaşık çözüm grafiğidir.	33
Şekil 3. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ ile $N = M = 100$ aralığı için yaklaşık çözüm grafiğidir.	34
Şekil 4. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ ile $N = M = 100$ aralığı için tam ve yaklaşık çözüm grafiğidir.....	34



ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 4.1. Hata Analizi Tablosu.....	32
--	----



SİMGELER

C: Karmaşık Sayılar

R: Gerçek Sayılar



KISALTMALAR

KDD	Kısmi diferansiyel denklemler
$\mathcal{L}$	Laplace Dönüşüm
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}_x$	x değişkenine göre Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}_t$	t değişkenine göre Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}_x^{-1}$	x değişkenine göre Ters Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}_t^{-1}$	t değişkenine göre Ters Laplace Dönüşümü
RBF-FD	Radial basis function-generated finite difference
RDTM	Reduced Differential Transform Method

1.GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler termodinamik, elastik, mekanik, biyoloji modelleri ve fiziğin farklı alt dallarında önemli bir uygulama alanlarına sahiptir. Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlü üçüncü mertebeden diferansiyel denklem için yerel olmayan sınır değer problemi incelendi (Nayfeh, 1970).

Kısmi diferansiyel denklemler birçok bilim dalında uygulama alanı bulmaktadır. Bu alanlardan bazıları şunlardır: Elastik teori, sismoloji, sıvı akışkanları, fizik, termodinamik ve hidrodinamik. Kısmi diferansiyel denklemleri (KDD) yaklaşık çözmek için faydalı yöntemlerin geliştirilmesi uygulamalı matematiğin temel amacıdır. Bu metotlardan bazıları sonlu eleman metodu, sınır elemanları, sonlu hacim, ve spectral yöntemlerdir. Bu yöntemler KDD'leri test etmek için zayıf ve güçlü formülasyonlar şeklinde sınıflandırılabilir. Bu yöntemlerin tümünde asıl sorun bir dizi alan düğümü ile etki alanı ve sınırlar çözümünün tahmini için herhangi bir ağ gerektirmeyen ayrıklaştırma işlemini gerçekleştirirler. Güçlü formların basit bir algoritması vardır. Gerçekten ağsız bir yöntem olan hesaplama verimliliği, ancak kötü koşullu sistem denklemleri nedeniyle kararsızdırlar. Zayıf form yöntemleri problem alanında küresel veya yerel olarak oluşturulmuş bir sayısal entegrasyon süreci aracılığıyla denklemlerin cebirsel bir sistemini kurar. Zayıf formülasyonlar yaklaşıklık fonksiyonlar üzerinde süreklilik gereksinimlerini azaltarak polinomların kullanımının kolay bir şekilde oluşturulması ve uygulanmasını sağlar. Genel olarak, fiziksel süreçlerin matematiksel tanımı kısmi diferansiyel denklemlerin oluşturulmasını sağlar. Bazı durumlarda, KDD'lerin tam çözüm yöntemleri yansıma yöntemleri süperpozisyon, değişkenlerin ayrılması ve integral dönüşümler gibi analitik araçlar kullanılarak elde edilebilir. Bu KDD'lerin yaklaşık analitik çözümü, pertürbasyon yöntemi (Van Dyke, 1975; Kevorkian ve Cole, 1981; Parlange, 1971), ardışık yaklaşım yöntemi (Tsang, 1960) ve ortogonal fonksiyonlar (Assarı ve Dehghan, 2017) yöntemleri kullanılarak bulunabilir. Yerel ağsız yöntemlerin geliştirilmesi için basit teknikler vardır. Logaritmik çekirdeklere dayalı sayısal yöntemi normal etki

alanlarında ikinci tür iki boyutlu Fredholm integral denklemlerinin yaklaşımına uyguladılar (Bayona ve ark., 2017).

Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için pek çok metot geliştirilmiştir. RBF tarafından oluşturulan sonlu farklar (RBF-FD), son on yılda çok çeşitli KDD'leri çözmek için çok güçlü ve esnek bir sayısal yaklaşım olarak ortaya çıkmıştır. (Khoromskij ve ark., 2017) de, düzensiz (veya düzenli) bölgelerdeki eliptik denklemleri çözerken poliharmonik eğrileri (PHS) çok değişkenli polinomlarla birleştirmenin olağanüstü bir basitlik, doğruluk ve geometrik esneklik kombinasyonu sunduğunu buldular. Multi parametrik eliptik KDD'lerin çözümlerinin rank-1 tensörlerinin sonlu toplamaları ile yaklaşımların yakınsama oranını araştırdılar (Babuska ve ark., 2017). Stokastik katsayılar ve homojen Dirichlet sınır koşulları ile doğrusal bir eliptik problem için iki sayısal yöntemi tanımladı ve analiz etti (Gorial, 2011).

Bir denklemin diferansiyel denklem sayılabilmesi için bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içermesi gerekir. Tek bir bağımsız değişken içeriyorsa adi diferansiyel denklem, iki veya daha fazla bağımsız değişken içeriyorsa kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Diferansiyel denklemlerin genel ve özel olmak üzere iki tür çözümü vardır. Bir diferansiyel denklemin tüm çözümlerini kapsayan çözüm genel çözüm olarak isimlendirilirken, herhangi bir çözüm özel çözüm olarak adlandırılır. t ve x bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olan u değişkeni için, ikinci mertebeden lineer bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak şu şekilde tanımlanır.

Şimdi bu tezde kullanılan temel tanım ve teoremleri verelim.

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1: “ $f(t)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.1)$$

integrali ile tanımlanan F fonksiyonu olup;

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ile gösterilir. İntegralin mevcut olduğu bütün s değerleri F fonksiyonunun tanım kümesini oluşturur” (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2: (Türevin Laplace Dönüşümü): “ Bir fonksiyonun n . mertebeden türevinin Laplace dönüşümü:

$f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında sürekli, $f^n(t), [0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve bu fonksiyonların tümü α üstel mertebeden olsunlar. ”
Bu durumda $s > \alpha$ için

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (1.2)$$

olur. Özel olarak $n = 2$ olması durumunda

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - s f(0) - f'(0) \quad (1.3)$$

ve $n = 3$ için ise

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 \mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 \mathcal{L}\{f(0)\} - s f'(0) - f''(0) \quad (1.4)$$

bağıntınları kolayca elde edilebilir” (Podlubny, 1999).

Tanım 1.3: “ $f(t), [0, \infty)$ aralığında sürekli ve $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü denir. Ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (1.5)$$

ile gösterilir”.

olarak tanımlanır” (Podlubny, 1999).

Tanım 1.4: “ xy düzleminin pozitif çeyreğinde, iki değişkenli bir $u(x, t)$ fonksiyonu tanımlansın. $u(x, t)$ fonksiyonu için çift Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{u(x, t)\} = \bar{u}(s, p) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-st} u(x, t) dx dt \quad (1.6)$$

olarak tanımlanır (Dhunde ve Waghmare, 2016). Burada p ve s kompleks sayılardır. Bu tanım

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{U(x)g(t)\} = \bar{u}(p)\bar{g}(s) = \mathcal{L}_x \{u(x)\} \mathcal{L}_t \{g(t)\} \quad (1.7)$$

formunda da yazılabilir”.

Tanım 1.5: “Kompleks çift integral formülü ters çift Laplace dönüşümünü tanımlamak için

$$\mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \{\bar{u}(s, p)\} = u(x, t)$$

formülü kullanılır (Debnath, 2016). Bu formül de

$$\mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \{u(s, p)\} = u(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} dp \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{st} \bar{u}(s, p) ds \right] \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada c ve d bilinen reel sabitler ve $\bar{u}(s, p)$, $\text{Re}(p) \geq c$ ile $\text{Re}(s) \geq d$ eşitsizlikleri ile gösterilen bölgede her bir p ve s için analitik fonksiyonlar olmalıdır.

(Modanlı ve Bajjah, 2021) de tanımlanan çift Laplace dönüşüm formülü herhangi tamsayı mertebeden kısmi türevlerin dönüşümü için

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} \right\} = p^n \bar{u}(s, p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} \mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial^i}{\partial x^i} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \right\} &= s^k \bar{u}(s, p) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{n-1-i} \mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial^j}{\partial x^j} \right\} \\
\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial^{k+n} u(x, t)}{\partial x^n \partial t^k} \right\} &= \\
p^n s^k \left[\bar{u}(s, p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} \mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial^i u(0, t)}{\partial x^i} \right\} - \bar{u}(s, p) \right. \\
&- \sum_{j=0}^{k-1} s^{n-1-j} \mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial x^j} \right\} \\
&\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} p^{-1-i} s^{-1-j} \mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial^{i+j} u(0, 0)}{\partial x^{i+j}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

formülleri ile kullanılır”.

1.2. İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Genel Formları

$$\begin{aligned}
&A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \\
&+ E(x, y) + F(x, y)u = 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

ikinci mertebe kısmi diferansiyel denkleminde x ve y bağımsız değişken $u(x, y)$ bilinmeyen fonksiyondur. $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $D(x, y)$, $E(x, y)$ ve $F(x, y)$ bilinen fonksiyondur. (1.9) denklemini aşağıdaki gibi kanonik forma dönüştürelim.

$$\begin{aligned}
&A_1(t, r) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B_1(t, r) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + C_1(t, r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + D_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial t} + E_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial r} \\
&+ F_1(t, r)u = 0
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

- 1) Hiperbolik durum: $B_1(t, r) \neq 0, A_1(t, r) = C_1(t, r) = 0$
- 2) Parabolik durum: $A_1(t, r) = B_1(t, r) = 0, C_1(t, r) \neq 0$
- 3) Eliptik durum: $B_1(t, r) = 0, A_1(t, r) = C_1(t, r) \neq 0$

Şimdi (1), (2), (3) için kanonik formları verelim.

1) Hiperbolik Denklem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} = \widetilde{D}_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial t} + \widetilde{E}_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial r} + \widetilde{F}_1(t, r)u$$

2) Parabolik Denklem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \widetilde{D}_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial t} + \widetilde{F}_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial r} + \widetilde{F}_1(t, r)u$$

3) Eliptik denklem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = D_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial t} + E_1(t, r) \frac{\partial u}{\partial r} + F_1(t, r)u$$

formundadır. Bir kısmi diferansiyel denklemin iyi tanımlı olması için

i) Bir çözüme sahip olması

ii) Çözümün kararlı (stability) olması gerekir.

Bir kısmi diferansiyel denklemini çözmek için

$$t = t(x, y) ,$$

$$x = x(t, r) ,$$

$$r = r(x, y),$$

$$y = y(t, r)$$

dönüşümlerini ele alalım.

$$U(x, y) \rightarrow u(t, r)$$

dönüşümünde bağımsız değişkene bir zincir kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\
&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial t}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

benzer şekilde;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$$

formülleri elde edilir. Buradan

$$U_{tt}: A_1(t, r) = A(x, y) \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + 2B(x, y) \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial y} + C(x, y) \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \quad (1.10)$$

$$U_{tt}: B_1(t, r) = A(x, y) \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + B(x, y) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + C(x, y) \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (1.11)$$

$$U_{rr}: C_1(t, r) = A(x, y) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2B(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + C(x, y) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2, \quad (1.12)$$

$$U_t: D_1(t, r) = A(x, y) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}$$

$$+C(x, y) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (1.13)$$

$$U_r: E_1(t, r) = A(x, y) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$$

$$+C(x, y) \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad (1.14)$$

$$U: F_1(t, r) = E(x, y) \quad (1.15)$$

formüller yazılabilir. Eğer

$$t = t(x, y) = c_1, r = r(x, y) = c_2$$

alınırsa c_1 ve c_2 katsayılarında

$$\frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial y}} = -\frac{dy}{dx}$$

karakteristik denklemi elde edilir.

$$A(x, y) \left(\frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dy}} \right)^2 + 2B(x, y) \left(\frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dy}} \right) + C(x, y) = 0$$

Son formülden de

$$A(x, y) \left(-\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B(x, y) \frac{dy}{dx} + C(x, y) = 0 \quad (1.16)$$

elde edilir. (1.16) denkleminde (1.9) denkleminin “karakteristik denklemi” denir. (1.16) denkleminde

$$A_m^2 - 2B_m + C = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx} = m \right)$$

yazılabilir. Bu son denklem eğer;

- $B^2 - AC > 0$ ise hiperbolik,
- $B^2 - AC = 0$ ise parabolik,
- $B^2 - AC < 0$ ise eliptik

denklem olur.

Örnek 1.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 9u = 0, \quad (1.17)$$

kısmi diferansiyel denkleminin kanonik formunu elde ediniz.

Çözüm: (1.17) denklemdeki

$$A = 1, B = 2, C = -5, D = 6, E = 3, F = -9$$

katsayılar $B^2 - AC$ formülünde yerine yazılırsa

$$B^2 - AC = 4 - 1(-5) = 9 > 0$$

elde edilir ki bu da denklemin hiperbolik olduğunu gösterir. Bu durumda karakteristik denklem

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4 \frac{dy}{dx} - 5 = 0$$

olup buradan

$$m^2 - 4m - 5 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$m_1 = -1, m_2 = 5$$

olarak bulunur. Buradan ;

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow y + x = c_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \Rightarrow y - 5x = c_2$$

$$\begin{aligned} t &= y + x \\ r &= y - 5x \end{aligned}$$

olarak alınır ve (1.10)-(1.15) formüllerinde yerine yazılırsa

$$A_1(t, r) = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 0$$

$$B_1(t, r) = 1 \cdot 1(-5) + 2(-5 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + (-5) \cdot 1 \cdot 1 = -5 - 8 - 5 = -18 \neq 0$$

$$C_1 = 1 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot 1(-5) - 5 \cdot 1^2 = 0$$

$$D_1 = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 9$$

$$E_1 = 6(-5) + 3 \cdot 1 = -27$$

$$F_1 = -9$$

yazılabilir. Böylece

$$-2 \cdot 18u_{tr} + 9u_t - 27u_r - 9 = 0$$

olup buradan da

$$u_{tr} = \frac{1}{4}u_t - \frac{3}{4}u_r - \frac{1}{4}u$$

hiperbolik denklemi elde edilir. Bu denklem istenen çözümün kanonik formu olur.

$$u_{tr} = f(t, r, u, u_t, u_r) \quad (1.18)$$

(1.18) denkleminde $t + r = \rho$ ve $t - r = \lambda$ alınır

$$u_{\rho\rho} - u_{\lambda\lambda} = f_1(\rho, \lambda, u, u_\rho, u_\lambda) \quad (1.19)$$

elde edilir. Bu denkleme hiperbolik denklemin karakteristik formu denir.

Örnek 1.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0 \quad (1.20)$$

kısmi diferansiyel denkleminin karakteristik formunu bulunuz. İyi tanımlı ve iyi tanımlı olmayan problem için gerekli bölgeleri belirtiniz.

Çözüm:

$$A(x, y) = 1, B(x, y) = -6, C(x, y) = 9, D(x, y) = 2, E(x, y) = 5, F(x, y) = -1$$

katsayılarından

$$B^2 - AC = 9 - 1 \cdot 9 = 0$$

olduğundan bu denklem paraboliktir. Bu denklemin karakteristik denklemi;

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6 \frac{dy}{dx} + 9 = 0, \quad m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = -3, \quad y + 3x = c$$

olup buradan

$$t = y + 3x$$

elde edilir.

$$r = r(x, y)$$

alınır

$$J = \begin{vmatrix} t_x & t_y \\ r_x & r_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$r = y$ alınırsa

$$J = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

NOT: $r = y$ seçimi tek değildir. Bunun yerine

$$r = x, \quad r = x + y,$$

formülü alınabilir. Bu denklem ve türevleri (1.10-1.15) formüllerinde yerine yazılırsa

$$A_1(t, r) = 1 \cdot 3^2 + 2(-3) \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 0$$

$$B_1(t, r) = 1 \cdot 3 \cdot 0 - 3(3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + 9 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$C_1(t, r) = 1 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 \cdot 1 + 9 \cdot 1^2 = 9 \neq 0$$

$$D_1(t, r) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9 \neq 0$$

$$E_1(t, r) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$$

$$F_1(t, r) = -1$$

bulunur. Elde edilen değerler kanonik form formülünde yerine yazılırsa;

$$9 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 9 \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial r} - u = 0$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{9} u$$

bu son denklemde $t_1 = -t$ alınırsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{9} u \quad (1.21)$$

parabolik denklemi elde edilir.

Örnek 1.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0 \quad (1.22)$$

denkleminin kanonik formunu elde ediniz.

Çözüm:

$$A(x, y) = 1, B(x, y) = 1, C(x, y) = 5, D(x, y) = 1, E(x, y) = -2, \\ F(x, y) = -3$$

değerleri için

$$B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) = 1^2 - 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

olduğundan (1.21) denklemi eliptiktir. (1.21) denkleminin karakteristik denklemini bulmak için

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \frac{dy}{dx} + 5 = 0$$

formülü kullanılırsa

$$m^2 - 2m + 5 = 0$$

ikinci dereceden denklemin kökleri

$$m_{1,2} = 1 \mp 2i$$

olarak bulunur. Buradan da

$$\frac{dy}{dx} = 1 \mp 2i$$

olup

$$\begin{aligned} y &= x \pm 2xi + c \\ y - x &= \mp 2xi + c \\ y - x \mp 2xi &= c \end{aligned}$$

denklemlerinden

$$t = y - x, \quad r = 2x$$

olarak alınır ve (1.10)-(1.15) formüllerinde yerine yazılırsa

$$A_1(t, r) = 1(-1)^2 + 2 \cdot 1(-1)^{+5} \cdot 1^2 = 4 > 0,$$

$$B_1(t, r) = 1 \cdot ((-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2) = 0,$$

$$C_1(t, r) = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2 = 4 > 0,$$

$$D_1(t, r) = -3,$$

$$E_1(t, r) = 2,$$

$$F_1(t, r) = -3$$

şeklinde bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa, (1.22) denkleminin kanonik formu

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} - 3u = 0$$

olup buradan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3}{4} u = f(u, u_t, u_r)$$

bulunur.

Bu çalışmada, aşağıdaki başlangıç-sınır değer koşullarına bağlı eliptik kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü

$$\begin{cases} \alpha u_{tt}(t, x) + \beta u_{tx}(t, x) + \lambda u_{xx}(t, x) + \nu u(t, x) = f(t, x), \\ 0 < x < l, \ 0 < t < T, \ \alpha, \beta, \lambda, \nu > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), \ u_t(0, x) = g_2(x), \ 0 \leq x \leq l, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \ 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.23)$$

inceleyeceğiz. Burada, $g_1(x)$, $g_2(x)$ ve $f(t, x)$ bilinen fonksiyonlar $u(t, x)$ çözümü bilinmeyen belirli bir fonksiyondur. (1.23) denkleminin eliptik bir kısmi diferansiyel denklem olması için

$$\beta^2 - 4\alpha\lambda < 0$$

koşulu sağlanmalıdır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi diferansiyel denklemler mekanik, termodinamik, elastistik, biyoloji modelleri ve fiziğin çeşitli alanlarında önemli bir uygulama alanlarına sahiptir. Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlü üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem için yerel olmayan sınır değer problemi incelendi (Ashyralyev ve Şimşek, 2017). Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sonlu fark metodu (Modanlı, 2018). Sabit katsayılı ve karışık türevli iki boyutlu bir eliptik denklem için yerel olmayan integral koşuluna sahip bir sınır değer problemini ele aldılar (Berikelashvil ve ark.,2003). Bochner uzaylarındaki soyut eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipi yerel olmayan sınır değer probleminin iyi tanımlılığını belirlediler. Bu problemin yaklaşık çözümü için ikinci derece doğruluk farkı şemasını dikkate aldı. Bu fark şemasının çözümü için zorlayıcı eşitsizlikler oluşturdu. Uygulamalarda, eliptik denklem için yerel olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için fark şemalarının çözümüne yönelik neredeyse zorlayıcı kararlılık ve zorlayıcı kararlılık tahminleri elde etti (Ashyralyev, 2010). Pozitif A operatörüne sahip keyfi bir Banach uzayı E'de yerel olmayan sınır değer problemi ele alındı. Bu sınır değer probleminin düzgün fonksiyon uzaylarında iyi konumlanmış olduğunu tespit etti. Eliptik denklemler için sınır değer problemlerinin çözümlerine ilişkin yeni kesin Schauder tahminleri elde etti (Ashyralyev,2003). Makalesinde $(L^p([0, T]; E))$ uzaylarındaki soyut eliptik diferansiyel denklemlerin sayısal analizine ayırdı (Ashyralyev ve ark., 2008). Çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklemler için Bitsadze-Samarskii tipi yerel olmayan sınır değer probleminin çözümü için sayısal bir yöntem önerdiler (Ashyralyev ve Öztürk, 2009). Kararlılığı ifade eden sabitler için keskin bir eşitsizlik tahmin elde edemediler. Bu nedenle, sayısal deneylerin aşağıdaki sonuçlarını verdiler. Bitsadze-Samarskii-Dirichlet problemini:

$$-\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u = f(t, x), \quad 0 < t < 1, 0 < x < 1,$$

ele aldılar (Ashyralyev ve Ozesenli Tetikoglu, 2012).

Bu çalışmada, başlangıç-sınır değer koşullarına bağlı eliptik kısmi diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} \alpha u_{tt}(t, x) + \beta u_{tx}(t, x) + \lambda u_{xx}(t, x) + vu(t, x) = f(t, x), \\ 0 < x < l, \ 0 < t < T, \alpha, \beta, \lambda, s > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), \ u_t(0, x) = g_2(x), \ 0 \leq x \leq l, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \ 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.1)$$

sonlu fark şeması metodu ile incelendi. Burada $g_1(x)$, $g_2(x)$ bilinen fonksiyonlar ve $u(t, x)$ bilinmeyen fonksiyondur. Denkleminin eliptik bir kısmi diferansiyel denklem olması için

$$\beta^2 - 4\alpha\lambda < 0$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu şart altında bu problemin yaklaşık çözümünü bulmak için sonlu fark şeması ve analitik veya yarı-analitik çözümünü bulmak için de Çift Laplace dönüşüm metodu kullanıldı. Bu metotlar karşılaştırılarak hata analizi yapıldı.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu tezimde daha ayrıntılı bir çalışma sunmak için konuyla ilgili daha önceden yayınlanmış makalelere, dergilere ve yapılan yüksek lisans tezlerine ulaşıp gerekli literatür taramaları yapıldı.

3.2. Yöntem

Eliptik kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili geçmişte ve günümüzde yapılan çalışmalar incelendi. Sonlu fark şeması metodu kullanılarak eliptik kısmi diferansiyel denklemler için yaklaşık çözümler bulundu. Yaklaşık çözüm ve tam çözümler karşılaştırılarak ait hata analiz çizelgesi oluşturuldu. Matlab programı kullanılarak tam çözüm ve yaklaşık çözüme ait simülasyonlar çizildi.

3.2.1. Sonlu fark şemasının oluşturulması ve kararlılık

(2.1) probleminin yaklaşık çözümünü hesaplamak için grid (ızgara) aralığı

$$[0, T]_{\tau} = \{ t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N, N\tau = T \},$$

$$[0, l]_h = \{ x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = L \},$$

$$W_{\tau,h} = [0, T]_{\tau} \times [0, l]_h = \{ (t_k, x_n), t_k \in [0, T]_{\tau}, x_n \in [0, l]_h \}$$

şeklindedir. Bu aralıklar

$$(t_k, x_n), (t_{k+1}, x_n), (t_k, x_{n+1}), (t_{k+1}, x_{n+1}) \in W_{\tau,h}$$

dır.

$t = t_k, x = x_n$ alınır (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\alpha u_{tt}(t_k, x_n) + \beta u_{tx}(t_k, x_n) + \lambda u_{xx}(t_k, x_n) + \nu u(t_k, x_n) = f(t_k, x_n)$$

bulunur. Taylor açılımı kullanılırsa,

$$u_{tt}(t_k, x_n) = \frac{u(t_{k+1}, x_n) - 2u(t_k, x_n) + u(t_{k-1}, x_n)}{\tau^2} + O(\tau^2), \quad (3.1)$$

$$u_{tx}(t, x) = \frac{u(t_k, x_n) - u(t_{k-1}, x_n) - u(t_k, x_{n-1}) + u(t_{k-1}, x_{n-1})}{\tau h} + O(\tau^2 + h^2), \quad (3.2)$$

$$u_{xx}(t_k, x_n) = \frac{u(t_k, x_{n+1}) - 2u(t_k, x_n) + u(t_k, x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (3.3)$$

(3.1), (3.2) ve (3.3) formüllerinde küçük terimler ihmal edilirse,

$$u_{tt}(t_k, x_n) \cong \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2}, \quad (3.4)$$

$$u_{tx}(t, x) \cong \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k+1} + u_{n-1}^{k-1}}{\tau h}, \quad (3.5)$$

$$u_{xx}(t_k, x_n) \cong \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2}, \quad (3.6)$$

yazılabilir. (3.4), (3.4) ve (3.5) formülleri kullanılır, küçük terimler ihmal edilir (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \alpha \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \beta \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k+1} + u_{n-1}^{k-1}}{\tau h} \\ \lambda \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + v \frac{u_n^{k+1} + u_n^{k-1}}{2} = \frac{f_n^{k+1} + f_n^{k-1}}{2}, \\ 1 < k < N - 1, 1 < n < M - 1 \\ u_n^0 = g_1(x_n), \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = g_2(x_n), 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{cases}, \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu fark şeması

$$\begin{aligned} & + \left(\frac{-\beta}{h^2} \right) u_{n-1}^{k+1} + \left(\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} \right) u_n^{k+1} + \left(\frac{\beta}{\tau h} \right) u_{n+1}^{k+1} + \left(\frac{\lambda}{h^2} \right) u_{n-1}^k + \left(\frac{-2}{\tau^2} - \frac{2\lambda}{h^2} \right) u_n^k \\ & + \left(\frac{\lambda}{h^2} \right) u_{n+1}^k + \left(\frac{\beta}{\tau h} \right) u_{n-1}^{k-1} + \left(\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} \right) u_n^{k-1} + \left(-\frac{\beta}{\tau h} \right) u_{n+1}^{k-1} \\ & = \frac{f_n^{k+1} + f_n^{k-1}}{2} \end{aligned}$$

olarak da yazılabilir. Bu da

$$au_{n+1}^{k+1} + bu_n^{k-1} + cu_n^k + du_n^{k+1} + eu_{n-1}^{k+1} = f_n^{k+1}$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$\varphi_n^k = \frac{f_n^{k+1} + f_n^{k-1}}{2},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

burada, $p = \frac{\lambda}{h^2}$, $a = \frac{\beta}{\tau h}$ dir,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

burada $b = \frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2}$, $c = \frac{-2}{\tau^2} - \frac{2\lambda}{h^2}$, $d = \frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2}$, ve

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k & e & f & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

burada, $k = \frac{\beta}{\tau h}$, $e = \frac{\lambda}{h^2}$, $f = -\frac{\beta}{\tau h}$, dir. Buradan da

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = \varphi_n^k,$$

matris formu elde edilir. Burada A, B ve C matrisleri $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutludur.

Teorem 3.1.

$$16 \frac{\alpha \lambda}{\tau^2 h^2} + 16 \frac{\lambda^2}{h^4} \leq +4 \frac{\alpha v}{\tau^2} + v^2 + 16 \frac{\beta^2}{\tau^2 h^2}$$

koşulu altında (3.4) sonlu fark şeması kararlıdır.

İspat: Teoremin ispatı için Von-Neumann analiz formülünü kullanalım. Bu formül

$$u_n^k = r^k e^{in\theta} \quad (3.8)$$

olarak verilir. (3.8) formülü, (3.7) formülünde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \alpha \frac{r^{k+1} e^{in\theta} - 2r^k e^{in\theta} + r^{k-1} e^{in\theta}}{\tau^2} \\ + \beta \frac{r^{k+1} e^{i(n+1)\theta} - r^{k-1} e^{i(n-1)\theta} - r^{k+1} e^{i(n-1)\theta} + r^{k-1} e^{i(n+1)\theta}}{\tau h} \\ \lambda \frac{r^k e^{i(n+1)\theta} - 2r^k e^{in\theta} + r^k e^{i(n-1)\theta}}{h^2} + v \frac{r^{k+1} + r^{k-1}}{2} e^{in\theta} = \frac{f_n^{k+1} + f_n^{k-1}}{2}, \\ u_n^0 = g_1(x_n), \quad \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = g_2(x_n), \quad 0 \leq n \leq M \\ u_0^k = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (3.9)$$

bulunur. (3.9) formülünde $n = 0, k = 1$ ve $f_0^0, f_0^2 \rightarrow 0$ alınır

$$\begin{cases} \alpha \frac{r^2 - 2r + 1}{\tau^2} + \beta \frac{r^2 e^{i\theta} - e^{in\theta} - r^2 e^{-i\theta} + e^{-i\theta}}{\tau h} \\ + \lambda r \frac{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}}{h^2} + v \frac{r^2 + 1}{2} = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

(3.10) denklemi düzenlenirse,

$$\left[\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{\beta}{\tau h} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{v}{2} \right] r^2 + \left[-\frac{2\alpha}{\tau^2} + \frac{\lambda}{h^2} (e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) \right] r + \left[\left(\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{\beta}{\tau h} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{v}{2} \right) \right] = 0 \quad (3.11)$$

olup

$$e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta} = 2\cos\theta - 2 = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ifadesi göz önüne alınır ve (3.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{2\beta i}{\tau h} \sin\theta + \frac{v}{2} \right] r^2 + \left[-\frac{2\alpha}{\tau^2} - 4\frac{\lambda}{h^2} \sin^2\frac{\theta}{2} \right] r + \left[\frac{\alpha}{\tau^2} - \frac{2i\beta}{\tau h} \sin\theta + \frac{v}{2} \right] = 0$$

bulunur.

$$r_1 + r_2 = \frac{\frac{2\alpha}{\tau^2} + 4\frac{\lambda}{h^2} \sin^2\frac{\theta}{2}}{\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} + \frac{2\beta i}{\tau h} \sin\theta} < 2$$

şartının sağlanıp sağlanmadığını gösterelim. Kökler karmaşık sayı olduğundan bu kökler için herhangi bir sıralama yapılamayacaktır. Bu problemi aşmak için Hilbert uzayındaki norm kullanılırsa

$$\|r_1 + r_2\| = \frac{\left| \frac{2\alpha}{\tau^2} + 4\frac{\lambda}{h^2} \sin^2\frac{\theta}{2} \right|}{\left| \frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} + \frac{2\beta i}{\tau h} \sin\theta \right|} = \frac{\left| \frac{2\alpha}{\tau^2} + 4\frac{\lambda}{h^2} \sin^2\frac{\theta}{2} \right|}{\left| \frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} + \frac{2\beta i}{\tau h} \sin\theta \right|} \leq 4$$

yazılabilir. Buradan da

$$\left(\frac{2\alpha}{\tau^2} + 4\frac{\lambda}{h^2} \sin^2\frac{\theta}{2} \right)^2 \leq 4 \left[\left(\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} \right)^2 + \left(\frac{2\beta}{\tau h} \sin\theta \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

elde edilir.

$$\frac{2\alpha}{\tau^2} + 4\frac{\lambda}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq \frac{2\alpha}{\tau^2} + 4\frac{\lambda}{h^2}, \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta}{\tau h} \sin \theta\right)^2 \leq \left(\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta}{\tau h}\right)^2 \quad (3.14)$$

(3.13) ve (3.14) formülleri (3.12) formülünde yazılırsa,

$$\left(\frac{2\alpha}{\tau^2} + 4\frac{\lambda}{h^2}\right)^2 \leq 4 \left[\left(\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta}{\tau h}\right)^2 \right] \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) formülünden

$$\frac{4\alpha^2}{\tau^4} + 16\frac{\alpha\lambda}{\tau^2 h^2} + 16\frac{\lambda^2}{h^4} \leq \frac{4\alpha^2}{\tau^4} + 4\frac{\alpha v}{\tau^2} + v^2 + 16\frac{\beta^2}{\tau^2 h^2}$$

elde edilir. Buradan da

$$16\frac{\alpha\lambda}{\tau^2 h^2} + 16\frac{\lambda^2}{h^4} \leq 4\frac{\alpha v}{\tau^2} + v^2 + 16\frac{\beta^2}{\tau^2 h^2}$$

Bu koşul altından da $r_1 + r_2 \leq 2$ şartının sağlandığı söylenebilir.

Şimdi de

$$r_1 r_2 = \frac{\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} - \frac{2i\beta}{\tau h} \sin \theta}{\frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} + \frac{2\beta i}{\tau h} \sin \theta}$$

hesaplayalım. Çünkü,

$$x = \frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2}, y = \frac{2i\beta}{\tau h} \sin \theta$$

olarak alınırsa,

$$r_1 r_2 = \frac{x-iy}{x+iy}$$

kompleks değerli kökler elde edilir. Kompeks sayılarda sıralama yapılamayacağından Hilber uzayındaki norm kullanılırsa,

$$\|r_1 r_2\| = \left| \frac{x-iy}{x+iy} \right| = \frac{|x-iy|}{|x+iy|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

elde edilir ki bu da $\|r_1 r_2\| \leq 1$ olduğunu gösterir. Böylece $r_1 < 1$ ve $r_2 < 1$ olur. Dolayısıyla

$$|u_n^k| = |r^k e^{in\theta}| \leq |r^k| \leq 1$$

olup (3.4) sonlu fark şeması karalıdır.

3.2.2. Çift Laplace Metodu

$$\begin{cases} \alpha u_{tt}(t, x) + \beta u_{tx}(t, x) + \lambda u_{xx}(t, x) + vu(t, x) = f(t, x), \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad \alpha, \beta, \lambda, v > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), \quad u_t(0, x) = g_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.16)$$

(3.16) probleminin çözümü için çift Laplace metodunu oluşturalım.

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{u(t, x)\} = U(s, p)$$

olsun. (3.16) denkleminin her tarafının $\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t$ Laplace dönüşümü alınır,

$$\alpha s^2 U(s, p) - \alpha s U(0, p) - \alpha U_t(0, p) = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{-\beta u_{tx}(t, x) - \lambda u_{xx}(t, x) - vu(t, x) + f(t, x)\} \quad (3.17)$$

formülü elde edilir. (3.17) formülü düzenlenip yeniden yazılırsa

$$U(s, p) = \frac{1}{s} U(0, p) + \frac{1}{s^2} U_t(0, p) + \frac{F(s, p)}{s^2} + \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \frac{1}{\alpha s^2} \{-\beta u_{tx}(t, x) - \lambda u_{xx}(t, x) - vu(t, x)\} \quad (3.18)$$

bulunur buradan da

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{f(t, x)\} = F(s, p)$$

dır. (3.18) denkleminin her tarafının $\mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1}$ alınır, (3.16) problemindeki başlangıç değerleri de kullanılırsa

$$\begin{aligned} u(t, x) = \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \{U(s, p)\} = & \alpha g_1(x) + \alpha t g_2(x) + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{F(s, p)}{s^2} \right\} \\ & + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha s^2} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{ -\beta u_{tx}(t, x) - \lambda u_{xx}(t, x) - v u(t, x) \} \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

yazılır. (3.19) denkleminin çözümü için

$$u(t, x) = \sum_{p=0}^{\infty} u_n(t, x) \quad (3.20)$$

sonsuz serisi kullanılırsa, (3.20) denklemi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha s^2} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left(-\beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - \right. \right. \\ \left. \left. v \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) \right) \right\} + \alpha g_1 x + \alpha t g_2 x + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{F(s, p)}{s^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (3.16) denkleminin çözümü

$$u_0(t, x) = \alpha g_1 x + \alpha g_2(x) t + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{F(s, p)}{s^2} \right\}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t, x) = \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha s^2} \left(\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left(-\beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - v \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

genel formülü bulunur.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümünü sonlu fark ve Çift Laplace dönüşüm metodunu kullanarak bir örnek problem üzerinde test edeceğiz.

4.1.1. Çift Laplace Metodu

Örnek 4.1. (3.9) denkleminde $\alpha = -1, \beta = 1, \lambda = -1, v = 1$ alınırsa denklem

$$\begin{cases} -u_{tt}(t, x) + u_{tx}(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) = e^{-t\pi}(\sin(\pi x) - \pi^2 \cos(\pi x)) \\ u(0, x) = \sin(\pi x), \quad u_t(0, x) = -\pi \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

eliptik denklem olur. Bu denkleminin çözümünü çift Laplace yöntemiyle hesaplayalım.

$$U(s, p) = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{u(t, x)\} \quad (4.2)$$

olsun. (4.1) denkleminin her tarafının $\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t$ Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} s^2 U(s, p) - sU(0, p) - U_t(0, p) &= \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{-u_{tx}(t, x) + u_{xx}(t, x) \\ &\quad - u(t, x) + e^{-t\pi}(\sin(\pi x) - \pi^2 \cos(\pi x))\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) formülü düzenlenirse,

$$\begin{aligned} -s^2 U(s, p) &= -\frac{\pi s}{p^2 + \pi^2} + \frac{\pi^2}{p^2 + \pi^2} + \frac{1}{s + \pi} \left(\frac{\pi}{p^2 + \pi^2} - \frac{\pi^2 p}{p^2 + \pi^2} \right) \\ &\quad + \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{u_{tx}(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x)\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

olup burada

$$U(s, p) = \frac{\pi}{s(p^2 + \pi^2)} - \frac{\pi^2}{s^2(p^2 + \pi^2)} - \frac{1}{s^2(s + \pi)} \left(\frac{\pi}{p^2 + \pi^2} - \frac{\pi^2 p}{p^2 + \pi^2} \right) - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{u_{tx}(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x)\} \quad (4.5)$$

da olarak yazılır. (4.5) denkleminin her tarafının $\mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \{U(s, p)\} \\ &= \sin \pi x - t \sin \pi x + \frac{1}{\pi^2} (1 - \pi t - e^{-t\pi}) (\sin \pi x - \pi^2 \cos \pi x) \\ &+ \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t (-u(t, x) - u_{tx}(t, x) + u_{xx}(t, x)) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) formülünden

$$u_0(t, x) = \sin \pi x - t \sin \pi x + \frac{1}{\pi^2} (1 - \pi t - e^{-t\pi}) (\sin \pi x - \pi^2 \cos \pi x) \quad (4.7)$$

olarak bulunur. $u_0(t, x)$ fonksiyonunun kısmi türevleri

$$(u_0)_t(t, x) = -\pi \sin \pi x + \frac{1}{\pi} (\sin \pi x - \pi^2 \cos \pi x) - \frac{1}{\pi} e^{-t\pi} (\sin \pi x - \pi^2 \cos \pi x)$$

$$(u_0)_{tt}(t, x) = t e^{-t\pi} (\sin \pi x - \pi^2 \cos \pi x) - \frac{1}{\pi} e^{-t\pi} (\sin \pi x - \pi^2 \cos \pi x) \quad (4.8)$$

$$(u_0)_{tx}(t, x) = -\pi^2 \cos \pi x + \cos \pi x + \pi^2 \sin \pi x - e^{-t\pi} \cos \pi x - \pi^2 e^{-t\pi} \sin \pi x \quad (4.9)$$

$$(u_0)_x(t, x) = \pi \cos \pi x - \pi^2 t \cos \pi x + \frac{1}{\pi} (-1 + \pi t + e^{-t\pi}) (\cos \pi x + \pi^2 \sin \pi x)$$

$$(u_0)_{xx}(t, x) = -\pi^2 \sin \pi x + \pi^3 t \sin \pi x + (-1 + \pi t + e^{-t\pi}) (-\sin \pi x + \pi^2 \cos \pi x) \quad (4.10)$$

şeklinde bulunur.

$$u_{n+1}(t, x) = \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left(-(u_n)_{tt}(t, x) + (u_n)_{tx}(t, x) - (u_n)_{xx}(t, x) \right) \right\} \quad (4.11)$$

genel formülünde $n = 0$ için (4.8)-(4.10) kısmi türevleri (4.11) formülünde yazarsak

$$u_1(t, x) = \left(-2\pi^2 t + \frac{1}{\pi^2} t + \frac{1}{6} t^3 \left(\pi^3 - \frac{1}{\pi} \right) + \left(1 - \frac{1}{\pi^4} \right) (-1 + e^{-t\pi} + t\pi) \right) \sin \pi x \\ + \left(\left(\frac{1}{6} t^3 (\pi^3 + \pi) + \left(\frac{2 + \pi - \pi^2}{\pi^2} \right) (-1 + t\pi + e^{-t\pi}) - 2t \right) \cos \pi x \right)$$

elde edilir. Benzer işlem diğer adımlar için de yapılabilir.

Örnek 4.2. Eliptik

$$\begin{cases} -u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + u_{tx}(t, x) + u(t, x) = e^{-t}(\sin x - \cos x) \\ u(0, x) = \sin x, \quad u_t(0, x) = -\sin x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

denkleminin çözümünü çift Laplace yöntemiyle hesaplayalım.

$$U(s, p) = L_x L_t \{u(t, x)\} \quad (4.13)$$

olsun. (4.13) denkleminin her tarafının $L_x L_t$ Laplace dönüşümü alınır

$$-(s^2 U(s, P) - sU(0, p) - U_t(0, p)) = L_x L_t \{u_{xx}(t, x) - u_{tx}(t, x) - u(t, x) + e^{-t}(\sin x - \cos x)\} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) formülü düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
-s^2 U(s, p) + \frac{s}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} &= \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} \right) + L_x L_t \{u_{xx}(t, x) - u_{tx}(t, x) - \\
u(t, x)\} \quad -s^2 U(s, p) &= -\frac{s}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} \right) + L_x L_t \{u_{xx}(t, x) - \\
u_{tx}(t, x) - u(t, x)\}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olup burada

$$\begin{aligned}
U(s, p) &= \frac{1}{s(p^2+1)} - \frac{1}{s^2(p^2+1)} - \frac{1}{s^2(s+1)} \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} \right) - \frac{1}{s^2} L_x L_t \{u_{xx}(t, x) - \\
u_{tx}(t, x) - u(t, x)\}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak yazılır. (4.16) denkleminin her tarafının $L_x^{-1} L_t^{-1}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \frac{1}{s(p^2+1)} - \frac{1}{s^2(p^2+1)} - \frac{1}{s^2(s+1)} \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} \right) \right\} + \\
L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ -\frac{1}{s^2} L_x L_t (u_{xx}(t, x) - u_{tx}(t, x) - u(t, x)) \right\}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) formülünden

$$\begin{aligned}
u_0(t, x) &= \sin x - t \sin x + \frac{1}{\pi^2} (1 - t - e^{-t}) (\sin x - \cos x) \\
&= \sin x (1 - t + 1 - t - e^{-t}) - (1 - t - e^{-t}) \cos x \\
u_0(t, x) &= \sin x (2 - 2t - e^{-t}) + (-1 + t + e^{-t}) \cos x
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olarak bulunur.

$$u_{n+1}(t, x) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ -\frac{1}{s^2} L_x L_t ((u_n)_{xx}(t, x) - (u_n)_{tx}(t, x) - u_n(t, x)) \right\}$$

genel formülünde $n = 0$ alınırsa;

$$u_1(t, x) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ -\frac{1}{s^2} L_x L_t ((u_0)_{xx}(t, x) - (u_0)_{tx}(t, x) - u_0(t, x)) \right\} \tag{4.19}$$

şeklinde olup, $u_0(t, x)$ fonksiyonunun kısmi türevleri ise

$$(u_0)_{xx}(t, x) = \sin x(2t - 2 + e^{-t}) + (1 - t - e^{-t})\cos x$$

$$(u_0)_t(t, x) = \sin x(-2 + e^{-t}) + (1 - e^{-t})\cos x$$

$$(u_0)_{tx}(t, x) = \cos x(-2 + e^{-t}) + (e^{-t} - 1)\sin x$$

şeklinde dir. $u_0(t, x)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini (4.19) denkleminde yazarsak;

$$\begin{aligned} & ((u_0)_{xx}(t, x) - (u_0)_{tx}(t, x) - u_0(t, x)) = (-3 + 4t + e^{-t})\sin x + \\ & (4 - 2t - 2e^{-t})\cos x \\ & L_x L_t \{ (u_0)_{xx}(t, x) - (u_0)_{tx}(t, x) - u_0(t, x) \} = \left(-\frac{3}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s+1} \right) \frac{1}{p^2+1} + \left(\frac{4}{s} - \frac{2}{s^2} - \right. \\ & \left. \frac{2}{s+1} \right) \frac{p}{p^2+1} \\ & u_1(t, x) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \left(-\frac{3}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s+1} \right) \frac{1}{p^2+1} + \left(\frac{4}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s+1} \right) \frac{p}{p^2+1} \right\} \\ & u_1(t, x) = \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + 1 - t - e^{-t} \right) \sin x + \left(-2t^2 + \frac{1}{3}t^3 - 2 + 2t \right. \\ & \quad \left. + 2e^{-t} \right) \cos x \\ & u_1(t, x) = \left(1 - t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 - e^{-t} \right) \sin x + \left(-2 + 2t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \right. \\ & \quad \left. 2e^{-t} \right) \cos x \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Benzer şekilde $u_2(t, x)$ denlemini bulalım.

$$u_2(t, x) = L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ -\frac{1}{s^2} L_x L_t \left((u_1)_{xx}(t, x) - (u_1)_{tx}(t, x) - u_1(t, x) \right) \right\} \quad (4.21)$$

şeklinde olup, $u_1(t, x)$ fonksiyonunun kısmi türevleri ise

$$(u_1)_{xx}(t, x) = \left(-1 + t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 + e^{-t} \right) \sin x + \left(2 - 2t + 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 2e^{-t} \right) \cos x,$$

$$(u_1)_t(t, x) = (-1 + 3t - 2t^2 + e^{-t})\sin x + (2 - 4t + t^2 - 2e^{-t})\cos x,$$

$$(u_1)_{tx}(t, x) = (-1 + 3t - 2t^2 + e^{-t})\cos x + (-2 + 4t - t^2 + 2e^{-t})\sin x$$

şeklinde dir. $u_1(t, x)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini (4.21) denkleminde yazarsak;

$$\begin{aligned} u_2(t, x) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ -\frac{1}{s^2} L_x L_t \left((-2t - 2t^2 + \frac{4}{3}t^3)\sin x + (5 - 7t + 6t^2 - \frac{2}{3}t^3 - 5e^{-t})\cos x \right) \right\} \\ u_2(t, x) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ -\frac{1}{s^2} \left((-\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2}{3}\frac{6}{s^4}) \frac{1}{p^2+1} + (\frac{5}{s} - \frac{7}{s^2} + \frac{12}{s^3} - \frac{2}{3}\frac{6}{s^4} - \frac{5}{s+1}) \frac{p}{p^2+1} \right) \right\} \\ u_2(t, x) &= L_x^{-1} L_t^{-1} \left\{ \left((\frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^5} - \frac{8}{s^6}) \frac{1}{p^2+1} + (-\frac{5}{s^3} + \frac{7}{s^4} - \frac{12}{s^5} + \frac{4}{s^6} + \frac{5}{s^2(s+2)}) \frac{p}{p^2+1} \right) \right\} \\ u_2(t, x) &= (\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{15}t^5)\sin x + (-\frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{30}t^5 - 5 + 5t + 5e^{-t})\cos x \end{aligned} \quad (4.22)$$

şeklinde bulunur. (4.18), (4.20) ve (4.22) formülleri toplanırsa;

$$\begin{aligned} u_0(t, x) + u_1(t, x) + u_2(t, x) &= \left(3 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \dots - 2e^{-t} \right) \sin x + \\ &+ \left(8 + 8t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^3 - \dots + 8e^{-t} \right) \cos x \\ u_0(t, x) + u_1(t, x) + u_2(t, x) &= \left(3 \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \dots \right) - 2e^{-t} \right) \sin x + \\ &+ \left(-8 \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \dots \right) + 8e^{-t} \right) \cos x \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.12) denkleminde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = (3e^{-t} - 2e^{-t}) \sin x = e^{-t} \sin x$$

tam çözümü elde edilir.

4.1.2. Sonlu Fark Metodu

Bu bölümde kısmi diferansiyel denklemin çözümünü sonlu fark şeması metodunu kullanarak (4.1) örnek problem üzerinde test edeceğiz. Bunun için başlangıç sınır değer koşullarına bağlı aşağıdaki eliptik kısmi diferansiyel problemini ele alalım. (4.1) problemi için sonlu fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k+1} + u_{n-1}^{k-1}}{4h^2} \\ -\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_n^{k+1} + u_n^{k-1}}{2} = \frac{f_n^{k+1} + f_n^{k-1}}{2}, \\ 1 < k < N - 1, 1 < n < M - 1, \\ u_n^0 = \sin(\pi x_n), \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = -\pi \sin(\pi x_n), 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{array} \right. \quad (4.24)$$

şeklindedir. Bu problem çözmek için Modifiye Gauss Eliminasyon metodu kullanıldı. Birinci mertebeden doğruluk fark şeması uygulanarak hata analizi tablosu elde edildi. $u(t_k, x_n)$ tam çözümü ve u_n^k nümerik çözüm olmak üzere,

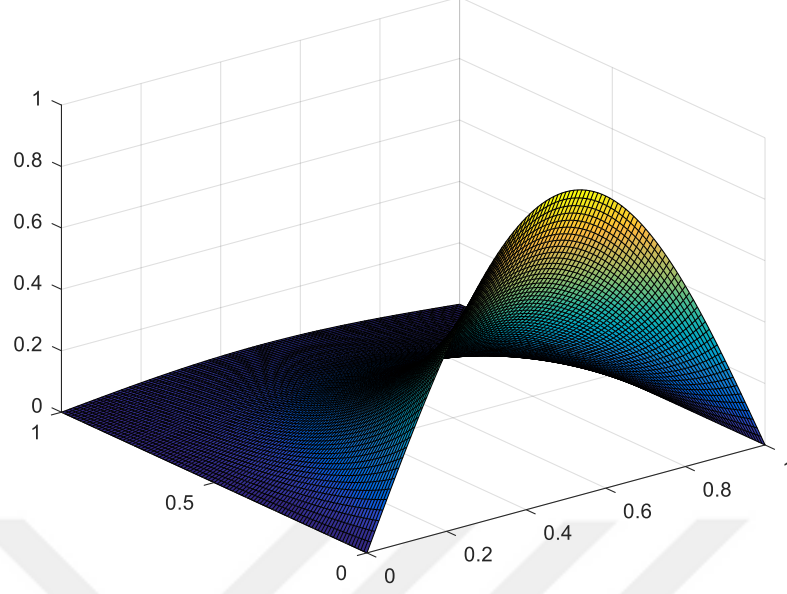
$$E_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|$$

formüllü kullanılarak nümerik hesaplamalar bulundu. Bulunan bu nümerik sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 4.1. Hata Analizi

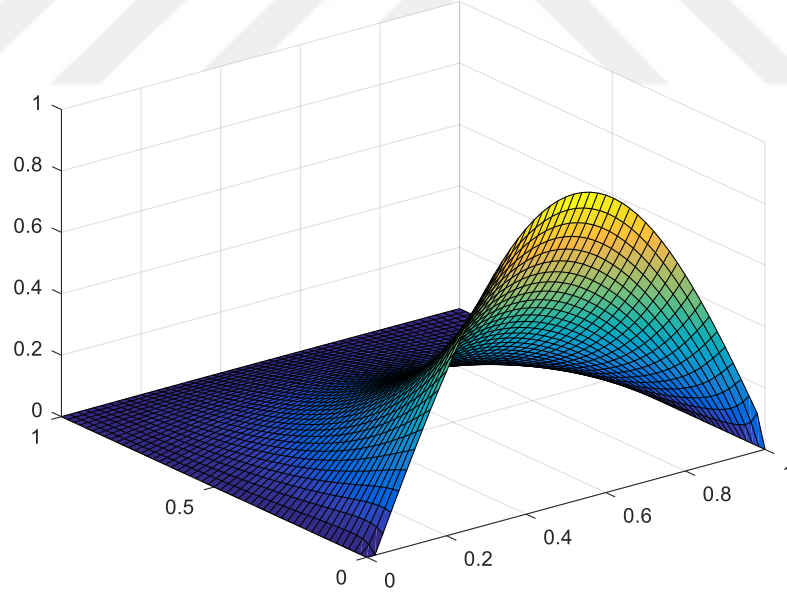
$h = \frac{1}{M}, \tau = \frac{1}{N}$	Hata Analizi(€)
$N = M = 10$	0.309016994374947
$N = M = 25$	0.125333233564304
$N = M = 50$	0.062790519529313
$N = M = 100,$	0.042358660077758

Şekil 1

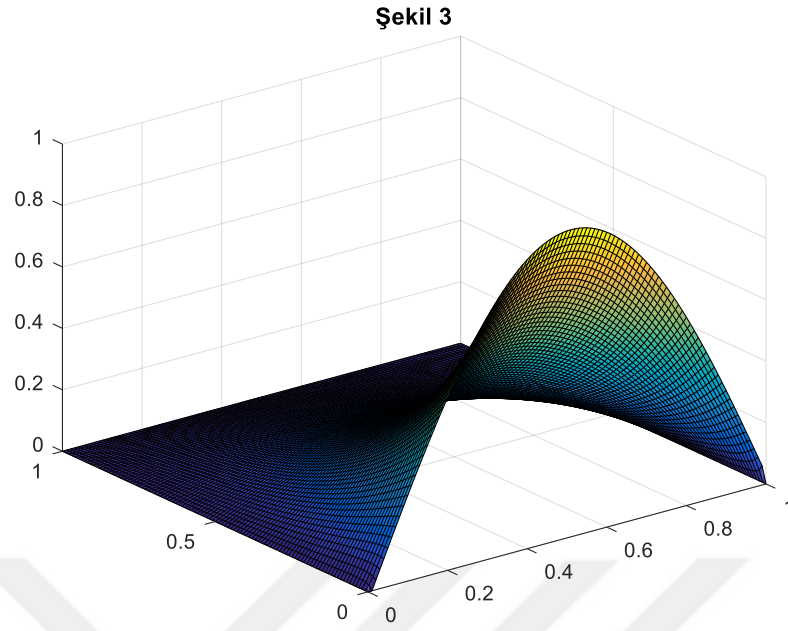


Şekil 1. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ aralığı için tam çözüm grafiğidir.

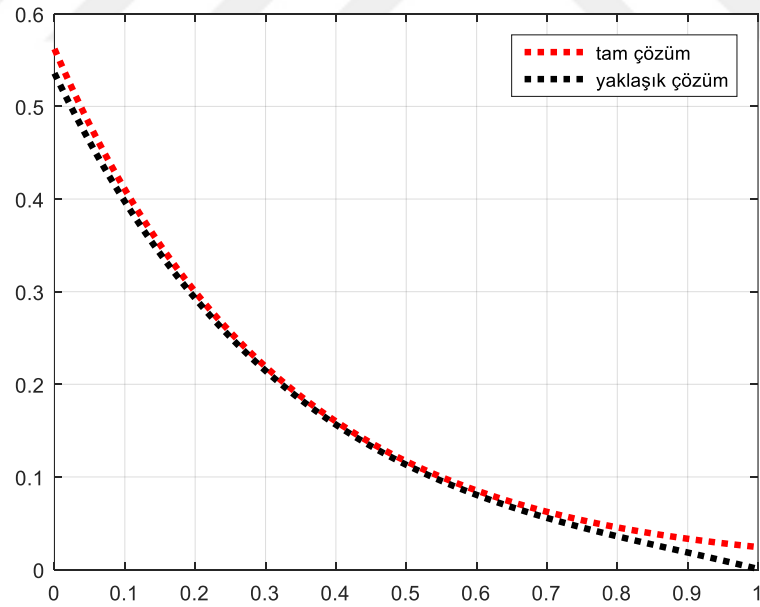
Şekil 2



Şekil 2. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ ile $N = M = 50$ aralığı için yaklaşık çözüm grafiğidir.



Şekil 3. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ ile $N = M = 100$ aralığı için yaklaşık çözüm grafiğidir.



Şekil 4. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ ile $N = M = 100$ aralığı için tam ve yaklaşık çözüm grafiğidir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, eliptik kısmi diferansiyel denklemin çözümü sonlu fark şeması ve çift Laplace metodu kullanılarak elde edildi. Bu problem için uygulama alanları giriş kısmında verildi. Bu problem için sonlu fark şemaları kuruldu. Bu fark şemaları ile oluşturulan metodunun karalılık kestirimleri gösterildi. Bu problemin yaklaşık çözümü için bu metodunun kullanışlı ve elverişli olduğu örnek problem üzerinde gösterildi. İşlem zorluklarından dolayı (4.1) örneği Çift Laplace metodu ancak iki adım için uygulandı. Ancak (4.2) örneğinde yakınsama sağladığından elde edilen çözüm tam çözüme karşılık gelen çözüm olarak bulundu. Matlab programı kullanılarak bu örnek problemlerin tam ve yaklaşık çözümler için grafikler çizildi.

5.2. Öneriler

Laplace Dönüşüm Kolokasyonu Metodu (LDKM) ile Residual Kuvvet serisi metotları eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Abdulazeez, S.T., & Modanli, M., 2023. Analytic Solution Of Fractional Order Pseudo-Hyperbolic Telegraph Equation Using Modified Double Laplace Transform Method. *International Journal Of Mathematics And Computer In Engineering*, 1(1), 105-114.
- Abdulazeez, S.T., & Modanli, M., 2022. Solutions Of Fractional Order PseudoHyperbolic Telegraph Partial Differential Equations Using Finite Difference Method, *Alexandria Engineering Journal*, 61(12), 12443-12451, 2022.
- Ashyralyev, A., 2010. Nonlocal Boundary-Value Problems For Elliptic Equations: Well-Posedness In Bochner Spaces. In *Aip Conference Proceedings* (Vol. 1309, No. 1, Pp. 66-84). American Institute Of Physics.
- Ashyralyev, A. (2003). On well-posedness of the nonlocal boundary value problems for elliptic equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 24(1-2), 1-15.
- Ashyralyev, A., & Sımsek, S. N., 2017. An Operator Method For A Third Order Partial Differential Equation. *Numerical Functional Analysis And Optimization*, 38(10), 1341-1359.
- Ashyralyev, A., & Ozesenli Tetikoglu, F. S., 2012. Fdm For Elliptic Equations With Bitsadze-Samarskii-Dirichlet Conditions. In *Abstract And Applied Analysis* (Vol. 2012), Hindawi.
- Ashyralyev, A., & Öztürk, E., 2009. Numerical Solutions Of Bitsadze-Samarskii Problem For Elliptic Equations, In *Further Progress In Analysis* (Pp. 698-706).
- Assari, P., & Dehghan M., 2017. The Numerical Solution Of Two dimensional Logarithmic Integral Equations On Normal Domains Using Radial Basis Functions With Polynomial Precision. *Eng.comput* 33(4):853–870.
- Babuska, I., Tempone, R., & Zouraris, G. E., 2004. Galerkin Finite Element Approximations Of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations, *Siam Journal On Numerical Analysis*, 42(2), 800-825.
- Bayona, V., Flyer, N., Fornberg, B., & Barnett, G. A., 2017. On The Role Of Polynomials In Rbf-Fd Approximations: Ii. Numerical Solution Of Elliptic Pdes. *Journal Of Computational Physics*, 332, 257-273.
- Berikelashvili, G., Ionkin, N. I. & Morzova, V. A., 2001. On A Nonlocal BoundaryValue Problem For Two-Dimensional Elliptic Equation. *Computational Methods İn Applied Mathematics*, 3(1), 62-71.
- Debnath, L., 2016. The Double Laplace Transforms And Their Properties With Applications To Functional, İntegral And Partial Differential Equations. *International Journal Of Applied And Computational Mathematics*, 2, 223-241.
- Dhunde, R. R., & Waghmare, G. L., 2016. Double Laplace Transform Method For Solving Space And Time Fractional Telegraph Equations. *International Journal Of Mathematics And Mathematical Sciences*, 2016
- Kevorkian, J., & Cole J. D., 1981. *Perturbation Methods İn Applied Mathematicaspringer-Verlag*, New York, 1981.
- Khan, A., Khan, T. T. , Syam, M.I., Ve Khan, H., 2019. Analytical Solutions Of Time-Fractional Wave Equation By Double Laplace Transform Method. *The European Physical Journal Plus*, 134(4), 163.

- Khoromskij, B. N., Ve Schwab, C., 2011. Tensor-Structured Galerkin Approximation Of Parametric And Stochastic Elliptic Pdes. *Siam Journal On Scientific Computing*, 33(1), 364-385.
- Modanli, M., 2022. Comparison Of Caputo And Atangana–Baleanu Fractional Derivatives For The Pseudohyperbolic Telegraph Differential Equations. *Pramana*, 96(1), 7.
- Modanli, M. Ve Bajjah B., 2023. Double Laplace Decomposition Method And Finite Difference Method Of Time Fractional Schrödinger Pseudoparabolic Partial Differential Equation With Caputo Derivative, *Journal Of Mathematics*, 2021(7113205), 1-10, 2021.
- Nayfeh, A.H., *Perturbation Method*~ Wiley Interscience, New York, 1973.
- Parlange, J.Y., *Theory Of Water Movements In Soils I: One-Dimensional Absorption*, *Soil Sci.*, 111, 134-170 (1971).
- Podlubny, L., 1999. *Fractional Differential Equations*, Vol. 198 Of *Mathematics In Science And Engineering*. Academic Press, San Diego, Calif., Usa, 1-81.
- Podlubny, L., 1998. *Fractional Differential Equations: An Introduction To Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, To Methods Of Their Solution And Some Of Their Applications*. Elsevier. *Problems For Elliptic Equations. Numerical Functional Analysis And Optimization*, 24(1-2), 1-15.
- Tsang, T., *Transient State Heat Transfer And Diffusion Problems*, *Ind. Eng.Chem.* 52:707 (1960).
- Van Dyke M., *Perturbation Methods In Fluid Mechanic*~ Parabolic Press, Paloalto, 1975.
- Veerasha, P., Prakasha, D.G., Singh, J., Khan I., & Kumar, D., 2020. Analytical Approach For Fractional Extended Fisher–Kolmogorov Equation With MittagLeffler Kernel. *Advances In Difference Equations*, 2020, 1-17.