**T.C.**
**BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ**
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# LİNEER OLMAYAN DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**


**AYKUT BAYRAK**

**TEZ DANIŞMANI**
**Dr. Öğr. Üyesi HÜSEYİN ERHAN ALTIN**


**BOLU, TEMMUZ - 2024**

# KABUL VE ONAY SAYFASI

**Aykut BAYRAK** tarafından hazırlanan "**LİNEER OLMAYAN DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**" adlı tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliğiyle kabul edilmiştir. 24/07/2024

| **Jüri Üyeleri** | **İmza** |
|---|---|
| Danışman<br>Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin Erhan ALTIN<br>Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi | ............................................ |
| Üye<br>Prof. Dr. Harun KARSLI<br>Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi | ............................................ |
| Üye<br>Doç. Dr. Kadir KANAT<br>Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi | ............................................ |

**Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Onayı**

**Prof. Dr. İbrahim KÜRTÜL**
**Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü**

# ETİK BEYAN

Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir,

aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Teze ilişkin Turnitin adlı programında enstitü müdürlüğünce belirlenen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan benzerlik raporuna göre, tezin benzerlik oranı %30'u geçmemektedir.

……………………………..

**AYKUT BAYRAK**

# ÖZET

**LİNEER OLMAYAN DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**AYKUT BAYRAK**
**BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ**
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ HÜSEYİN ERHAN ALTIN)**

**BOLU, TEMMUZ - 2024**
**IX + 42**

Bu tez, matematiksel analizin yaklaşım teorisindeki lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörlerin yakınsaklık özelliklerini içermektedir.

Tez toplam altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Alman matematikçi Karl Weierstrass tarafından ortaya atılan probleme Bernstein polinomları ile oluşturulan çözümün tarihsel gelişimine yer verilmiştir. İkinci bölümde tez boyunca ihtiyaç duyulacak temel tanımlara ve tezin yaklaşım problemlerini içeren temel teoremlerde gerekli olacak yardımcı sonuçlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörlerin inşa edilmesi için gerekli temel tanımlar ile bu tanımlamalardan karşımıza çıkan yardımcı teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca bu bölümde tanımlanan lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörler için varlık teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Tezin yakınsaklık sonuçlarının verildiği, dördüncü bölümde, üçüncü bölümde tanıtılan operatörlerin ilk olarak Lebesgue noktasındaki yaklaşım durumu ele alınmış, daha sonra sırasıyla $\psi \circ |f|$ ve $f$ fonksiyonlarının süreksizlik noktalarındaki yaklaşım durumlarını incelenmiştir. Son olarakta ise $f$ ve $\psi \circ |f|$ fonksiyonlarının türevlerinin sınırlı salınımlı fonksiyonlar olması durumundaki yaklaşım sonuçlarına yer verilmiştir. Tezin beşinci bölümünde yapılan çalışmalar ile ilgili sonuç verilmiştir ve gelecekteki çalışmalar için düşünceler belirtilmiştir. Tezin altıncı yani son bölümünde çalışma boyunca faydalanılan kaynaklara yer verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Bernstein Polinomları, Lineer olmayan Durrmeyer operatörleri, Sınırlı salınım, Yakınsaklık Hızı

# ABSTRACT

**APPROXIMATION PROPERTIES OF NONLINEAR DURRMEYER TYPE OPERATORS**
**MSC THESIS**
**AYKUT BAYRAK**
**BOLU ABANT IZZET BAYSAL UNIVERSITY**
**INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES**
**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**
**(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. HÜSEYİN ERHAN ALTIN)**

**BOLU, JULY 2024**
**IX + 42**

This thesis deals with the approximation properties of the nonlinear Durrmeyer type operators in the approximation theory of mathematical analysis.

The thesis comprises six chapters in total. The first chapter presents the historical development of the solution, beginning with Bernstein polynomials and addressing the problem posed by the German mathematician Karl Weierstrass. In the second chapter, fundamental definitions essential for the thesis are provided, along with auxiliary results necessary for the fundamental theorems concerning the approximation problems addressed in the thesis. Moving to the third chapter, crucial definitions for constructing nonlinear Durrmeyer-type operators are introduced, along with accompanying auxiliary theorems derived from these definitions. Furthermore, the chapter includes the statement and proof of the existence theorem for these operators. In the fourth chapter, where the convergence results of the thesis are given, the convergence of the operators is discussed at the Lebesgue point, then the convergence properties are analyzed at the points of discontiunity of the functions $\psi \circ |f|$ and $f$ respectively. Finally, the convergence results for these operators are given when the functions $f$ and $\psi \circ |f|$ are derivatives of bounded variation. In the fifth chapter of the thesis, a conclusion about the thesis and ideas for future work are given. The final chapter of the thesis, Chapter six, includes the references that were utilized throughout the study.

**KEYWORDS:** Bernstein Polynomials, Nonlinear Durrmeyer operators, Bounded variation, Rate of convergence

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $[\boldsymbol{a}]$ | : $a$ sayısının tam değeri |
| $\boldsymbol{o}$ | : $a_n = o(b_n)$ ise $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$ anlamında Landau sembolü |
| $\boldsymbol{O}$ | : $a_n = O(b_n)$ ise $n \to \infty$ için $\left\lvert\frac{a_n}{b_n}\right\rvert$ sınırlı anlamında Landau sembolü |
| $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{I}]$ | : $I$ da tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $\boldsymbol{BV}[\boldsymbol{I}]$ | : $I$ da tanımlı, sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı |
| $\boldsymbol{DBV}[\boldsymbol{I}]$ | : $I$ da tanımlı, türevleri sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı |
| $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}}$ | : Bernstein bazı |
| $(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}})$ | : Bernstein polinomları |
| $(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}})$ | : Durrmeyer operatörü |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\bigvee_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{f})$ | : $f$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki toplam salınımı |
| $\boldsymbol{f}(z+)$ | : $f$ fonksiyonunun z noktasındaki sağdan limiti |
| $\boldsymbol{f}(z-)$ | : $f$ fonksiyonunun z noktasındaki soldan limiti |
| $(\boldsymbol{NB}_{\boldsymbol{n}})$ | : Lineer olmayan Bernstein operatörü |
| $(\boldsymbol{ND}_{\boldsymbol{n}})$ | : Lineer olmayan Durrmeyer operatörü |

# TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında beni destekleyen ve motive eden, çalışmanın tamamlanmasında kıymetli zamanını ve yardımlarını asla esirgemeyen, zorlu süreçlerde anlayışla karşılayan ve sabır gösteren çok saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin Erhan Altın'a, engin bilgi birikimi ve tecrübesiyle bize yol gösterici olan ve bilim yolculuğunda bize ışık tutan çok değerli hocam Prof. Dr. Harun Karslı'ya, zor zamanlarımda hep yanımda olan gözümün nuru Didem Kayacan'a ve benden maddi manevi desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen anneme, babama ve kardeşlerime sonsuz teşekkür ederim.

BOLU, Temmuz 2024

Aykut BAYRAK

# 1. GİRİŞ

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897 yılları arasında yaşamış Alman matematikçidir. Analiz alanında değerli katkılar veren Alman matematikçi, günümüzde Weierstrass yaklaşım teoremi olarak bilinen çalışmasını 1885 yılında elde etmiştir. Bu teorem, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış olan polinomlar uzayının $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış olan sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde yoğun olduğunu ifade eder. Buradan $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli her fonksiyona polinomlar yardımıyla düzgün olarak yaklaşılabileceği görülmektedir. Ancak Weierstrass yaklaşım teoremi için uzun ve nispeten karmaşık bir ispat vermiştir. Onun bu ispatı birçok ünlü matematikçiyi teoremin daha basit ve anlaşılır bir ispatını elde etmek için çalışmaya motive etmiştir.

Weierstrass yaklaşım teoremi için basit ve anlaşılır bir ispat 1912 yılında Rus matematikçi Sergei Natanovich Bernstein tarafından verilmiştir. Ünlü matematikçi günümüzde kendi ismiyle anılan Bernstein Polinomlarını $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonlar için

$$(B_n f)(z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(z) \quad , \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $p_{n,k}$ Binom dağılımından elde edilen ve çok iyi bilinen

$$p_{n,k}(z) = \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \qquad z \in [0,1]$$

Bernstein bazıdır (Bernstein, 1912).

Bernstein polinomları gerek basit bir şekilde ifade edilmiş olması gerekse geniş bir teoriye hitap etmesi sebebiyle üzerinde en çok çalışma yapılan lineer pozitif operatörlerdir diyebiliriz. Bernstein polinomlarının bu popülaritesi farklı aralıklarda ve farklı uzaylarda tanımlı birçok genelleştirmesinin yapılması ve çalışılmasının önünü açmıştır. Bu genelleştirmelerin ortak çıkış noktası olasılık teorisinden gelen ve çekirdek fonksiyonunun toplamını veren

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(z) = 1$$

özdeşliğidir.

Bernstein polinomlarının en iyi bilinen genelleştirmeleri $[0,\infty)$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için elde edilen Szász–Mirakyan ve Baskakov operatörleridir. Ancak integrallenebilir fonksiyonlara klasik Bernstein, Szász–Mirakyan ve Baskakov operatörleri ile yaklaşım yeterince uygun olmadığından, bu operatörlerin Durrmeyer ve Kantorovich tipindeki integral modifikasyonları tanımlanmıştır.

$[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşmak için J.L. Durrmeyer (Durrmeyer, 1967) ve ondan bağımsız olarak A. Lupaş (Lupaş,1972) tarafından

$$(D_n f)(z) = \int_0^1 f(t)\, F_n(z,t)dt \quad , \quad n \geq 1$$

klasik Durrmeyer operatörleri tanımlanmıştır. Burada

$$F_n(z,t) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(z)\, p_{n,k}(t)$$

ve $p_{n,k}$ Bernstein bazıdır.

Şimdi lineer ve lineer olmayan operatörlerin yaklaşım teorisindeki ilişkisi hakkında kısa bir açıklama yapmanın uygun olduğunu düşünüyoruz. 1885 yılında Weierstrass yaklaşım teoreminin ifade edilmesi ile başlayan süreç 1912 yılında Bernstein polinomlarının tanımlanması ile matematiksel analizin en popüler ve üretken kısımlarından yaklaşım teorisinin gelişmesine sebep olmuştur. Yaklaşık 100 yıldır lineer operatörler ile yaklaşım özelliklerinin incelendiği çok önemli çalışmalar dikkatle takip edilmektedir. Lineer olmayan operatörler ile çalışmalar nispeten daha yakın bir geçmişe dayanmaktadır. Konvolüsyon tipli lineer olmayan integral operatörlerin yaklaşım sonuçları ilk olarak 1981 yılında J. Musielak tarafından elde edilmiştir (Musielak, 1981) ve ilerleyen yıllarda çalışma arkadaşları C. Bardaro ve G. Vinti ile yazdıkları kaynak kitapları ile gelişmeye devam etmiştir (Bardaro, Musielak ve Vinti, 2003). 1981 yılındaki bu çalışmaya kadar integral operatörlerin singülerliğinin operatörlerin lineerliğiyle yakından ilişkisi olması sebebiyle yaklaşım teorisindeki çalışmalar lineer operatörler ile sınırlıydı. Ancak J. Musielak çalışmasında singüler integral operatörlerin üzerindeki lineerlik şartını, $K_n(z,u)$ çekirdek fonksiyonunun ikinci değişkenine göre Lipschitz şartıyla değiştirerek yeni bir bakış açısı elde etmiştir. Bu bakış açısı ile birçok matematikçi şuanda lineer olmayan integral operatörlerin yaklaşım teorisi olarak adlandırılan bu alanda önemli çalışmalara imza atmışlardır.

2014-2016 yılları arasında H. Karslı, İ. U. Tiryaki ve H. E. Altın, Musielak'ın tekniğini kullanarak, $[0,1]$ kapalı aralığında sınırlı fonksiyonlar için lineer olmayan Bernstein operatörlerini

$$(NB_nf)(z)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}\left(z,f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

olarak ifade etmiş ve $P_{n,k}$ çekirdeğinin uygun şartları sağladığı durumlarda bu operatörlerin yakınsaklık özelliklerini farklı uzaylarda incelemişlerdir.

2014-2017 yılları arasında ise H. Karslı, $[0,1]$ kapalı aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonlar için lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörleri

$$(ND_nf)(z)=\int_0^1 K_n\big(z,t,f(t)\big)\,dt \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

olarak tanımlamış ve $K_n$ çekirdeğinin uygun şartları sağladığı durumlarda bu operatörlerin yakınsaklık özelliklerini farklı uzaylarda incelemiştir. Biz tezimizde 2014-2017 yılları arasında yapılmış ve farklı dergilerde yayınlanmış bu çalışmaları ele alarak (Karsli, 2014-2015-2017), lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörlerin yakınsaklık sonuçlarını vereceğiz.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR VE YARDIMCI TEOREMLER

Bu bölümde, tez çalışması boyunca kullanılan bazı temel tanımlara yer verilmiştir. Ayrıca operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenirken ihtiyaç duyacağımız bazı sonuçların ispatları elde edilmiştir.

**Tanım 2.1 ($L_p$ Uzayları)**

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $p$. kuvveti Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların oluşturduğu kümeye $L_p$ denir. $f \in L_p$ için

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^p dz \right\}^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır (Butzer ve Nessel, 1971).

**Tanım 2.2 (Lebesgue Noktası)**

$I$, $\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir aralık olmak üzere, $f \in L_1(I)$ fonksiyonu için

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(z+t) - f(z)|\, dt = 0 \tag{2.1}$$

eşitliğinin sağlandığı $z \in I$ noktasına $f$ fonksiyonunun Lebesgue noktası veya $L$-noktası denir (Butzer ve Nessel, 1971).

**Tanım 2.3 (Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar)**

$f(z)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon

olsun. $[a, b]$ aralığını

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b$$

olacak şekilde alt aralıklara ayırdıktan sonra

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|$$

toplamını elde edelim. Bütün olası $V$ toplamlarının oluşturduğu kümenin en küçük üst sınırına $f$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerindeki toplam salınımı denir ve

$$\bigvee_a^b (f)$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$\bigvee_a^b (f) < +\infty$$

ise $f$ fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınımlı veya sonlu salınımlı fonksiyon denir. $[a, b]$ aralığı üzerindeki tüm sınırlı salınımlı fonksiyonların kümesi $BV[a, b]$ ile gösterilir (Natanson, 1955).

**Tanım 2.4 (Türevleri Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar)**

$\varphi$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı salınımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = f(0) + \int_0^z \varphi(t)dt \quad , \quad z \in [a, b]$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara türevleri sınırlı salınımlı diferansiyellenebilir fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu küme

$$DBV[a, b] = \{f : f' \in BV[a, b]\}$$

olarak gösterilir (Bojanic ve Cheng, 1989).

**Tanım 2.5 (Stieltjes İntegrali)**

$f$ ve $g$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı iki fonksiyon

olsun. $[a, b]$ aralığını

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b$$

olacak şekilde alt aralıklara ayırdıktan sonra $k = 0,1,2, \dots, n-1$ için her bir $[z_k, z_{k+1}]$ alt aralığından $\xi_k$ noktasını seçelim ve

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)|g(z_{k+1}) - g(z_k)|$$

toplamını elde edelim. Eğer

$$\lambda = max(z_{k+1} - z_k) \to 0$$

olduğunda $\sigma$ ile tanımlanan toplam hem alt aralıkların parçalanmasından hem de $\xi_k$ noktalarının seçiminden bağımsız olarak sonlu bir $I$ limit değerine yaklaşıyor ise bu değere $f$ fonksiyonunun $g$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(z)dg(z)$$

şeklinde gösterilir. $\int_a^b f(z)dg(z)$ ve $\int_a^b g(z)df(z)$ integrallerinden birinin varlığı diğerinin de varlığını gerektirir. Bu durumda

$$[f(z)g(z)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(z)dg(z) + \int_a^b g(z)df(z) = [f(z)g(z)]_a^b$$

eşitliğine $f$ ve $g$ fonksiyonlarının Stieltjes kısmi integrasyon formülü denir. $g(z) = z$ alındığında Riemann integralinin, Stieltjes integralinin özel bir hali olduğu açıkça görülür (Natanson, 1964).

**Teorem 2.6 (Korovkin Teoremi)**

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende $|f(z)| \leq M_f$ olsun. Eğer $(L_n)$ lineer pozitif operator dizisi, her $z \in [a,b]$ için

*i.* $(L_n 1)(z) \rightrightarrows 1$
*ii.* $(L_n t)(z) \rightrightarrows z$
*iii.* $(L_n t^2)(z) \rightrightarrows z^2$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ de $(L_n f)(z) \rightrightarrows f(z)$ dir (Korovkin, 1953).

**Lemma 2.7**

$(D_n f)$ klasik Durrmeyer operatörü için

*i.* $(D_n 1)(z) = 1$
*ii.* $(D_n t)(z) = z + \frac{1-2z}{n+2}$
*iii.* $(D_n t^2)(z) = z^2 + \frac{[4n-6(n+1)z]}{(n+2)(n+3)} z + \frac{2}{(n+2)(n+3)}$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:**

$$i. \qquad (D_n 1)(z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} dt$$

olup burada

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = (n-1)!$$

Gama fonksiyonu ve

$$\beta(z, y) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(y)}{\Gamma(z+y)}$$

Beta fonksiyonunu kullanırsak

$$\begin{aligned}
(D_n 1)(z) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\binom{n}{k}\beta(k+1, n-k+1)\right\} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}\right\} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}\right\} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\frac{1}{n+1}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

*ii.* $$(D_n t)(z) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}t\,dt$$

ifadesinde Gama ve Beta fonksiyonlarını kullanırsak

$$\begin{aligned}
(D_n t)(z) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\binom{n}{k}\beta(k+2, n-k+1)\right\} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+3)}\right\} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+2)!}\right\} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\left\{\frac{k+1}{(n+2)(n+1)}\right\} \\
&= \frac{1}{(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}\{k+1\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} k + \frac{1}{(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{(n+2)} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} z^k (1-z)^{n-k} + \frac{1}{(n+2)}$$

$$= \frac{nz}{(n+2)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} z^k (1-z)^{n-k-1} + \frac{1}{(n+2)}$$

$$= \frac{nz}{n+2} (z + (1-z))^{n-1} + \frac{1}{(n+2)} = \frac{nz}{n+2} + \frac{1}{n+2}$$

$$= z + \frac{1-2z}{n+2}$$

elde edilir.

$$iii. \quad (D_n t^2)(z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} t^2 dt$$

ifadesinde Gama ve Beta fonksiyonlarını kullanırsak

$$(D_n t^2)(z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \left\{ \binom{n}{k} \beta(k+3, n-k+1) \right\}$$

$$= (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \left\{ \binom{n}{k} \frac{\Gamma(k+3)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+4)} \right\}$$

$$= (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \left\{ \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{(k+2)!\,(n-k)!}{(n+3)!} \right\}$$

$$= (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \left\{ \frac{(k+2)(k+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \{k^2 + 3k + 2\}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} k^2$$

$$+ \frac{3}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} k$$

$$+ \frac{2}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} (k-1+1)z^k (1-z)^{n-k}$$
$$+ \frac{3nz}{(n+2)(n+3)} + \frac{2}{(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} z^k (1-z)^{n-k}$$
$$+ \frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} z^k (1-z)^{n-k}$$
$$+ \frac{3nz}{(n+2)(n+3)} + \frac{2}{(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!\,(n-k-2)!} z^{k+2} (1-z)^{n-k-2}$$
$$+ \frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!} z^{k+1} (1-z)^{n-k-1}$$
$$+ \frac{3nz}{(n+2)(n+3)} + \frac{2}{(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{n(n-1)z^2}{(n+2)(n+3)} + \frac{nz}{(n+2)(n+3)} + \frac{3nz}{(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{2}{(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{n(n-1)z^2}{(n+2)(n+3)} + \frac{4nz}{(n+2)(n+3)} + \frac{2}{(n+2)(n+3)}$$
$$= z^2 + \frac{[4n-6(n+1)z]}{(n\ +\ 2)\ (n\ +\ 3)} z + \frac{2}{(n\ +\ 2)\ (n\ +\ 3)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Bu eşitlikler yardımıyla

$$(D_n(t-z))(z) = \frac{1-2z}{n+2}$$

ve

$$(D_n(t-z)^2)(z) \leq \frac{2nz(1-\ z)\ +\ 2}{n^2}$$

ifadelerini de kolayca elde edebiliriz.

# 3. LİNEER OLMAYAN DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörleri inşa etmeye çalışacağız. Bunun için öncelikle ihtiyacımız olan bazı tanımları ve bir sonraki bölümde kullanacağımız bazı lemmaları ifade ve ispat edeceğiz.

**Tanım 3.1**

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ tanımlı tüm Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesini $X$ ile gösterelim.

**Tanım 3.2**

$\psi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tanımlı sürekli, konkav ve azalmayan bir fonksiyon olsun öyle ki $\psi(0) = 0$ ve $\mathrm{u} > 0$ için $\psi(\mathrm{u}) > 0$ şartlarını sağlasın. Bu şekilde tanımlı fonksiyonlara $\psi$ −fonksiyonları denir ve bütün $\psi$ −fonksiyonlarının kümesi $\Psi$ ile gösterilir.

**Tanım 3.3**

$\mu: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tanımlı sürekli ve artan bir fonksiyon olsun öyle ki $\lim_{n\to\infty} \mu(n) = \infty$ şartını sağlasın.

**Tanım 3.4**

$H_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı $H_n(0) = 0$ şartını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere, $K_n: [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı

$$K_n(z, t, u) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(z)\, p_{n,k}(t) H_n(u) \tag{3.1}$$

şeklinde $\{K_n(z, t, u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisini tanımlayalım. Burada $p_{n,k}$ iyi bilinen Bernstein bazıdır.

Şimdi aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

a) Her $u, v \in \mathbb{R}$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $\psi \in \Psi$ için $H_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(L - \psi)$ $Lipschitz$

şartını

$$|H_n(u) - H_n(v)| \le \psi(|u - v|) \tag{3.2}$$

sağlasın.

b) Kabul edelim ki

$$F_n(z,t) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(z)\, p_{n,k}(t) \tag{3.3}$$

ve $\beta > 0$ ve $\gamma \geq 1$ olmak üzere herhangi sabit $z \in (0,1)$ için

$$A_n(z) = \int_{z-\frac{z}{n^{\gamma/\beta}}}^{z+\frac{1-z}{n^{\gamma/\beta}}} F_n(z,t)dt \tag{3.4}$$

olarak tanımlansın. $A_n(z)$ fonksiyonları $z$ noktasının çok yakınındaki yaklaşım davranışlarını incelemek için kullanılır. Ayrıca $\beta > 0$ ve $\gamma \geq 1$ olmak üzere $z \in (0,1)$ için

$$n^{\gamma/\beta} D_n\left(|t-z|^{\beta}; z\right) \leq B_n(z) \leq B(z)$$

olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ dan bağımsız sınırlı bir $B(z)$ fonksiyonu var olsun.

c) $u \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için, $r_n(u) = H_n(u) - u$ şeklinde tanımlı $r_n(u)$ fonksiyonları düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(u)| = 0$$

şartını sağlasın. Başka bir ifadeyle, yeterince büyük $n$ değerleri için

$$\sup_u |r_n(u)| = \sup_u |H_n(u) - u\,| \leq \frac{1}{\mu(n)}$$

sağlansın.

**Tanım 3.5**

Herhangi bir $f$ fonksiyonunun her $z \in (0,1)$ için $f(z+)$ ve $f(z-)$ tek taraflı limitleri mevcut ise,

$$f_z(t) = \begin{cases} f(t) - f(z+) & , \quad z < t \leq 1 \\ 0 & , \quad t = z \\ f(t) - f(z-) & , \quad 0 \leq t < z \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır.

**Lemma 3.6**

Her $\mathtt{z} \in (0,1)$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$D_n\left((t-\mathtt{z})^{\beta};\mathtt{z}\right)=\int_0^1 F_n(\mathtt{z},u)\,(u-\mathtt{z})^{\beta}du \leq \frac{B(\mathtt{z})}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}\ ,(\beta>0) \tag{3.6}$$

olsun. Bu durumda,

$$\lambda_n(\mathtt{z},z)=\int_0^z F_n(\mathtt{z},u)\,du \leq \frac{B(\mathtt{z})}{(\mathtt{z}-z)^{\beta}n^{\frac{\gamma}{\beta}}}\ ,0\leq z<\mathtt{z} \tag{3.7}$$

ve

$$1-\lambda_n(\mathtt{z},z)=\int_z^1 F_n(\mathtt{z},u)\,du \leq \frac{B(\mathtt{z})}{(z-\mathtt{z})^{\beta}n^{\frac{\gamma}{\beta}}}\ ,\mathtt{z}<z<1 \tag{3.8}$$

ifadeleri sağlanır.

**İspat:**

İlk olarak $0 \leq z < \mathtt{z}$ için

$$\lambda_n(\mathtt{z},z)=\int_0^z F_n(\mathtt{z},u)\,du \leq \int_0^z F_n(\mathtt{z},u)\left(\frac{\mathtt{z}-u}{\mathtt{z}-z}\right)^{\beta}du$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\lambda_n(\mathtt{z},z)=\int_0^z F_n(\mathtt{z},u)\,du \leq \frac{1}{(\mathtt{z}-z)^{\beta}}\int_0^1 F_n(\mathtt{z},u)\,|u-\mathtt{z}|^{\beta}du$$

olacağından, (3.6) ifadesinin yardımıyla

$$\lambda_n(\mathtt{z},z)\leq \frac{B(\mathtt{z})}{(\mathtt{z}-z)^{\beta}n^{\frac{\gamma}{\beta}}}$$

elde edilir. (3.8) ifadesinin ispatı da benzer şekilde görülebilir.

**Lemma 3.7**

$\psi \in \Psi$ olmak üzere, eğer $\mathtt{z}_0 \in \mathbb{R}$ noktası $f$ fonksiyonunun Lebesgue noktası ise, $h \to 0$ olduğunda

$$\left|\int_0^h \psi(|f(\mathtt{z}_0+t)-f(\mathtt{z}_0)|)dt\right| = o(|h|) \tag{3.9}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

Lemmamızı ispatlamak için $h \to 0^+$ olduğunda

$$\left| \int_0^h \psi(|f(z_0+t)-f(z_0)|)dt \right| = o(h)$$

ve $h \to 0^-$ olduğunda

$$\left| \int_h^0 \psi(|f(z_0+t)-f(z_0)|)dt \right| = o(-h)$$

olduğunu göstermeliyiz. $\psi$ konkav bir fonksiyon olduğundan, $h > 0$ için

$$\frac{1}{h}\int_0^h \psi(|f(z_0+t)-f(z_0)|)dt \le \psi\left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(z_0+t)-f(z_0)|dt\right)$$

ve $h < 0$ için

$$\frac{1}{-h}\int_h^0 \psi(|f(z_0+t)-f(z_0)|)dt \le \psi\left(\frac{1}{-h}\int_h^0 |f(z_0+t)-f(z_0)|dt\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu durumda $\psi$ fonksiyonunun sürekliliği ve $\psi(0)=0$ olduğunun kullanılmasıyla istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi $0 \le z \le 1$ için

$$(ND_n f)(z) = \int_0^1 K_n\big(z,t,f(t)\big)\, dt \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlı lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörleri ele alalım. Burada $K_n\big(z,t,f(t)\big)$ çekirdeği

$$K_n\big(z,t,f(t)\big) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(z)\, p_{n,k}(t) H_n\big(f(t)\big) = F_n(z,t) H_n\big(f(t)\big)$$

olarak açık şekilde ifade edilebilir. Bu operatörlerin $L_1[0,1]$ kümesinden $L_1[0,1]$ kümesine tanımlı oldukları ile ilgili aşağıdaki teoremi inceleyebiliriz. Genel olarak bu operatörlerin $DomND_nf$ in $X$ kümesinin bir alt kümesi olduğunda her $f \in DomND_nf$ için iyi tanımlı olduğunu kabul edebiliriz.

**Teorem 3.8**

$K_n(z,t,u)$ çekirdek fonksiyonu (a) şartını sağlasın. Eğer $f \in L_1[0,1]$ ise bu durumda $ND_n f \in L_1[0,1]$ olur ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|ND_n f\|_{L_1[0,1]} \leq \psi\left(\|f\|_{L_1[0,1]}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:**

$K_n(z,t,u)$ çekirdek fonksiyonun sağladığı şartlar göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 |(ND_n f)(z)|\, dz = \int_0^1 \left| \int_0^1 F_n(z,t)\, H_n\big(f(t)\big) dt \right| dz$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 F_n(z,t) \left|H_n\big(f(t)\big)\right| dt dz \leq \int_0^1 \int_0^1 F_n(z,t) \left|H_n\big(f(t)\big)\right| dz dt$$

$$\leq \int_0^1 \psi(|f(t)|) \int_0^1 F_n(z,t)\, dz dt$$

olup

$$\int_0^1 F_n(z,t)\, dt = \int_0^1 F_n(z,t)\, dz$$

olduğunun kullanılmasıyla

$$\int_0^1 |(ND_n f)(z)|\, dz \leq \int_0^1 \psi(|f(t)|)\, dt$$

elde edilir. $\psi$ konkav bir fonksiyon olduğundan

$$\int_0^1 |(ND_n f)(z)|\, dz \leq \psi\left( \int_0^1 |f(t)|\, dt \right) = \psi\left(\|f\|_{L_1[0,1]}\right)$$

olup bu da ispatımızı tamamlar.

# 4. YAKINSAKLIK SONUÇLARI

Bu bölümde (3.10) eşitliği ile verdiğimiz lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörlerin yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz. İlk olarak operatörün Lebesgue noktasındaki yaklaşım durumunu ele alacağız. Daha sonra sırasıyla $\psi \circ |f|$ ve $f$ fonksiyonlarının süreksizlik noktalarındaki yaklaşım durumlarını inceleyeceğiz. Son olarakta $f$ ve $\psi \circ |f|$ fonksiyonlarının türevlerinin sınırlı salınımlı olması durumundaki yaklaşım sonuçlarını vereceğiz.

**Teorem 4.1**

$\psi \in \Psi$ ve $f \in L_1([0,1])$ için $\psi \circ |f| \in BV([0,1])$ olsun. Kabul edelim ki $K_n(z, t, u)$ çekirdeği (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda (2.1) eşitliğini sağlayan her $z \in (0,1)$ için her $\varepsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$|(ND_n f)(z) - f(z)|$$

$$\leq \varepsilon B_n^*(z)\mu^{\beta-1}(n) + \frac{B_n^*(z)}{\mu^\beta(n)}\left[\bigvee_0^1 \psi(|f_z|) + \sum_{k=1}^{[\mu^\beta(n)]} \bigvee_{z-\frac{z}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{z+\frac{(1-z)}{k^{\frac{1}{\beta}}}} \psi(|f_z|)\right]$$

$$+\frac{1}{\mu(n)}$$

ifadesi sağlanır. Burada $\beta > 0$ olmak üzere $B_n^*(z) = B_n(z)\max\{z^{-\beta}, (1-z)^{-\beta}\}$ şeklinde tanımlıdır.

**İspat:**

$\delta > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$z + \delta < 1 \quad ve \quad z - \delta > 0$$

olsun. Bu durumda

$$|I_n(z)| = \left|\int_0^1 K_n\big(z, t, f(t)\big)dt - f(z)\right|$$

eşitliğini ele alalım. (3.10) ifadesi ve (c) şartını dikkate alırsak, $|I_n(z)|$ ifadesini

$$
\begin{aligned}
|I_n(\text{z})| &\leq \left| \int_0^1 K_n\big(\text{z}, t, f(t)\big)dt - \int_0^1 K_n\big(\text{z}, t, f(\text{z})\big)dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^1 K_n\big(\text{z}, t, f(\text{z})\big)dt - f(\text{z}) \right| \\
&= I_{n,1}(\text{z}) + I_{n,2}(\text{z})
\end{aligned}
$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. (b) ve (c) koşullarından yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terimin $\frac{1}{\mu(n)}$ ifadesinden küçük veya ona eşit olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten de, yeterince büyük $n$ değerleri için;

$$
\begin{aligned}
I_{n,2}(\text{z}) &= \left| \int_0^1 K_n\big(\text{z}, t, f(\text{z})\big)dt - f(\text{z}) \right| = \left| \big[H_n\big(f(\text{z})\big) - f(\text{z})\big] \int_0^1 F_n(\text{z}, t)dt \right| \\
&= \left| H_n\big(f(\text{z})\big) - f(\text{z}) \right| \int_0^1 F_n(\text{z}, t)dt \leq \frac{1}{\mu(n)}
\end{aligned}
$$

sağlanır. $I_{n,1}(\text{z})$ ifadesi için (a) koşulunu kullanırsak

$$
\left| I_{n,1}(\text{z}) \right| \leq \int_0^1 F_n(\text{z}, t)\psi(|f(t) - f(\text{z})|)dt
$$

eşitsizliğini elde ederiz. (b) şartını kullanarak bu son integrali

$$
\begin{aligned}
\left| I_{n,1}(\text{z}) \right| &\leq \left( \int_0^{\text{z} - \frac{\text{z}}{\mu(n)}} + \int_{\text{z} - \frac{\text{z}}{\mu(n)}}^{\text{z} + \frac{1-\text{z}}{\mu(n)}} + \int_{\text{z} + \frac{1-\text{z}}{\mu(n)}}^{1} \square \right) \psi\,(|f(t) - f(\text{z})|)dt\,\big(\lambda_n(\text{z}, t)\big) \\
&= I_1(n, \text{z}) + I_2(n, \text{z}) + I_3(n, \text{z})
\end{aligned}
$$

şeklinde üç parçaya ayırabiliriz. İlk olarak $I_2(n, \text{z})$ ifadesini hesaplayalım $t \in \left[\text{z} - \frac{\text{z}}{\mu(n)}, \text{z} + \frac{1-\text{z}}{\mu(n)}\right]$ için

$$\left|I_{n,2}(z)\right| = \int_{z-\frac{z}{\mu(n)}}^{z+\frac{1-z}{\mu(n)}} \psi\left(|f(t) - f(z)|\right) dt\left(\lambda_n(z,t)\right)$$

$$\leq \int_{z-\frac{z}{\mu(n)}}^{z} \psi\left(|f(t) - f(z)|\right) dt\left(\lambda_n(z,t)\right)$$

$$+ \int_{z}^{z+\frac{1-z}{\mu(n)}} \psi\left(|f(t) - f(z)|\right) dt\left(\lambda_n(z,t)\right) = I_{2,1}(n,z) + I_{2,2}(n,z)$$

olur. Şimdi

$$G(t) = \int_{t}^{z} \psi\left(|f(y) - f(z)|\right) dy$$

olarak tanımlarsak, (3.9) ifadesinden dolayı, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki her $0 < z - t \leq \delta$ için

$$G(t) \leq \varepsilon(z - t) \tag{4.1}$$

olur. Şimdi $\delta$ değerini sabitleyerek sırasıyla $I_{2,1}(n,z)$ ve $I_{2,2}(n,z)$ ifadelerini hesaplayalım. Lebesgue-Stieltjes integral gösteriminden faydalanarak $I_{2,1}(n,z)$ ifadesini

$$I_{2,1}(n,z) = \int_{z-\frac{z}{\mu(n)}}^{z} dt\left(\lambda_n(z,t)\right) d\left(G(t)\right) \tag{4.2}$$

şeklinde yazabiliriz. (4.2) ifadesine Lebesgue-Stieltjes kısmi integrasyonunu uygulayıp, (4.1) ifadesini kullanırsak

$$I_{2,1}(n,z) = -G\left(z - \frac{z}{\mu(n)}\right) dt\left(\lambda_n\left(z, z - \frac{z}{\mu(n)}\right)\right)$$

$$+ \int_{z-\frac{z}{\mu(n)}}^{z} G(t) \frac{\partial}{\partial t} d_t(\lambda_n(z,t)) dt$$

$$\leq -G\left(z - \frac{z}{\mu(n)}\right) d_t\left(\lambda_n\left(z, z - \frac{z}{\mu(n)}\right)\right)$$

$$+ \int_{z-\frac{z}{\mu(n)}}^{z} G(t) \frac{\partial}{\partial t} d_t(\lambda_n(z,t)) dt$$

$$\leq \varepsilon \frac{\mathrm{z}}{\mu(n)} d_t\left(\lambda_n\left(\mathrm{z}, \mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)\right)+\varepsilon \int_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}} (\mathrm{z}-t) \frac{\partial}{\partial t} d_t(\lambda_n(\mathrm{z}, t))\, dt$$

ifadesini elde ederiz. Kısmi integrasyonun tekrar uygulanmasıyla

$$I_{2,1}(n, \mathrm{z})=\varepsilon \frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\; d_t\left(\lambda_n\left(\mathrm{z}, \mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)\right)$$

$$+\left\{-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)} d_t\;\left(\lambda_n(\mathrm{z}, \mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)+\int_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}} d_t\;(\lambda_n(\mathrm{z}, t))\right\}$$

$$=\varepsilon \int_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}} d_t\;(\lambda_n(\mathrm{z}, t))$$

elde edilir. Burada

$$I_{2,1,1}(n, \mathrm{z})=\int_{-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{0} d_t\;(\lambda_n(\mathrm{z}, t+\mathrm{z}))$$

dersek, (3.7) ifadesinden dolayı

$$I_{2,1}(n, \mathrm{z})=\varepsilon I_{2,1,1}(n, \mathrm{z})=\varepsilon\left(\lambda_n\left(\mathrm{z}, \mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)\right) \int_{-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{0} dt=\varepsilon B_n(\mathrm{z}) \mathrm{z}^{-\beta} \mu^{\beta-1}(n)$$

olarak bulunur. $I_{2,2}(n, \mathrm{z})$ ifadesi için de (3.8) den faydalanarak

$$I_{2,2}(n, \mathrm{z}) \leq \varepsilon B_n(\mathrm{z})(1-\mathrm{z})^{-\beta} \mu^{\beta-1}(n)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi $I_1(n, \mathrm{z})$ ifadesini hesaplayalım. Lebesgue-Stieltjes kısmi integrasyonunu kullanırsak

$$|I_1(n, \mathrm{z})|=\int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}} \psi\;(|f_{\mathrm{z}}(t)|)\, d_t\;(\lambda_n(\mathrm{z}, t))$$

$$=\psi\left(\left|f_{\mathrm{z}}\left(\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)\right|\right) \lambda_n\left(\mathrm{z}, \mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)$$

$$-\int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}} \lambda_n(\mathrm{z}, t)\, d_t\big(\psi\;(|f_{\mathrm{z}}(t)|)\big)$$

elde ederiz. Burada $y=\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}$ seçersek, (3.7) ifadesinden dolayı,

$$\lambda_n(\mathrm{z}, y) \leq B_n(\mathrm{z}) \mathrm{z}^{-\beta} \mu^{\beta-1}(n) \tag{4.3}$$

olduğu açıktır. Burada

$$\psi\left(\left|f_{\mathrm{z}}\left(\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)\right|\right)=\left|\left(\left|f_{\mathrm{z}}\left(\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)\right|\right)-\psi\left(f_{\mathrm{z}}(\mathrm{z})\right)\right|\leq\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)$$

olduğunu görebiliriz. Kısmi integrasyon uygulayıp, (4.3) ifadesini dikkate alırsak

$$|I_1(n,\mathrm{z})|\leq\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\left|\lambda_n\left(\mathrm{z},\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}\right)\right|+\int_{\mathrm{z}}^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}\lambda_n(\mathrm{z},t)\,d_t\left(-\bigvee_t^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right)$$

$$\leq\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)B_n(\mathrm{z})\mathrm{z}^{-\beta}\mu^{\beta-1}(n)$$

$$+\frac{B_n(\mathrm{z})}{\mu(n)}\int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}(\mathrm{z}-t)^{-\beta}d_t\left(-\bigvee_t^{\mathrm{z}}\psi\left(f_{\mathrm{z}}\right)\right)$$

$$=\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}}\psi\left(f_{\mathrm{z}}\right)B_n(\mathrm{z})\mathrm{z}^{-\beta}\mu^{\beta-1}(n)$$

$$+\frac{B_n(\mathrm{z})}{\mu(n)}\left[-\mathrm{z}^{-\beta}\mu^{\beta}(n)\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)+\mathrm{z}^{-\beta}\bigvee_0^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right.$$

$$\left.+\int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}\bigvee_t^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\frac{\beta}{(\mathrm{z}-t)^{\beta+1}}\,dt\right]$$

$$=\frac{B_n(\mathrm{z})}{\mu^{\beta}(n)}\left[\mathrm{z}^{-\beta}\bigvee_0^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)+\int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}\bigvee_t^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\frac{\beta}{(\mathrm{z}-t)^{\beta+1}}\,dt\right]$$

elde ederiz. Son integralde $t$ yerine $\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{u^{\frac{1}{\beta}}}$ dönüşümü uygularsak,

$$\int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\mu(n)}}\bigvee_0^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\frac{\beta}{(\mathrm{z}-t)^{\beta+1}}\,dt=\mathrm{z}^{\frac{1}{\beta}}\int_1^{\mu^{\beta}(n)}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{u^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)du\leq\mathrm{z}^{\frac{1}{\beta}}\sum_{k=1}^{[\mu^{\beta}(n)]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$|I_1(n,z)| \le \frac{B_n(z)}{\mu^{\beta}(n)} z^{-\beta}\left[\bigvee_{0}^{z}\psi\left(|f_z|\right)+\sum_{k=1}^{[\mu^{\beta}(n)]}\bigvee_{z-\frac{z}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{z}\psi\left(|f_z|\right)\right]$$

olduğu görülür. Benzer bir hesaplama kullanılarak

$$|I_3(n,z)| \le \frac{B_n(z)}{\mu^{\beta}(n)}(1-z)^{-\beta}\left[\bigvee_{z}^{1}\psi\left(|f_z|\right)+\sum_{k=1}^{[\mu^{\beta}(n)]}\bigvee_{z}^{z+\frac{1-z}{k^{\frac{1}{\beta}}}}\psi\left(|f_z|\right)\right]$$

bulunur. Elde edilenler bir araya toplandığında istenilen sonuca ulaşılır.

**Teorem 4.2**

$\psi \in \Psi$ ve $f \in L_1([0,1])$ için $\psi \circ |f| \in BV([0,1])$ olsun. Kabul edelim ki $K_n(z,t,u)$ çekirdeği (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda (2.1) eşitliğini sağlayan her $z \in (0,1)$ için

$$\lim_{n\to\infty}|(ND_n f)(z)-f(z)|=0$$

sağlanır.

**İspat:**

Herhangi $\varepsilon > 0$ değeri için Teorem 4.1 ve (c) koşulu dikkate alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.3**

$\psi \in \Psi$ ve $f \in L_1([0,1])$ için $\psi \circ |f| \in BV([0,1])$ olsun. Kabul edelim ki $K_n(z,t,u)$ çekirdeği (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}|(ND_n f)(z)-f(z)|=0$$

ifadesi $(0,1)$ aralığındaki hemen hemen her nokta için sağlanır.

**İspat:**

Hemen hemen her $z \in (0,1)$ noktası $f \in L_1([0,1])$ fonksiyonunun Lebesgue noktası olduğundan, Teorem 4.2 istediğimiz sonucu verecektir.

**Teorem 4.4**

$\psi \in \Psi$ ve $f \in L_1([0,1])$ için $\psi \circ |f| \in BV([0,1])$ olsun. Kabul edelim ki $K_n(z,t,u)$ çekirdeği (a) ve (b) koşullarını sağlasın. Bu durumda $f(z+)$ ve $f(z-)$ tek taraflı limitlerinin var olduğu sabit her $z \in (0,1)$ noktasında

$$
\begin{aligned}
&(ND_n f)(\mathrm{z}) - \left[\psi\left(\left|\frac{f(\mathrm{z}+)+f(\mathrm{z}-)}{2}\right|\right)+\psi\left(\left|\frac{f(\mathrm{z}+)-f(\mathrm{z}-)}{2}\right|\right)\right] \\
&\qquad \le B_n^*(\mathrm{z})\left[\bigvee_0^1 \psi(|f_{\mathrm{z}}|) + \sum_{k=1}^{[\mu^\gamma]} \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{(1-\mathrm{z})}{k^{\frac{1}{\beta}}}} \psi(|f_{\mathrm{z}}|)\right] + A_n(\mathrm{z}) \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{(1-\mathrm{z})}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \psi(|f_{\mathrm{z}}|)
\end{aligned}
$$

ifadesi sağlanır. Burada $\beta > 0$ olmak üzere $B_n^*(\mathrm{z}) = B_n(\mathrm{z})\max\{\mathrm{z}^{-\beta}, (1-\mathrm{z})^{-\beta}\}$ şeklinde tanımlıdır.

**İspat:**

$f(\mathrm{z}+)$ ve $f(\mathrm{z}-)$ tek taraflı limitleri var olan her $f$ fonksiyonu (3.5) ifadesi ve Bojanic-Cheng gösterimi yardımıyla

$$
\begin{aligned}
f(t) = {} & \frac{f(\mathrm{z}+)+f(\mathrm{z}-)}{2} + f_{\mathrm{z}}(t) + \frac{f(\mathrm{z}+)-f(\mathrm{z}-)}{2} sgn(t-\mathrm{z}) \\
& + \delta_{\mathrm{z}}(t)\left[f(\mathrm{z}) - \frac{f(\mathrm{z}+)+f(\mathrm{z}-)}{2}\right] \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$
\delta_{\mathrm{z}}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad \mathrm{z} = t \\ 0 & , \quad \mathrm{z} \neq t \end{cases}
$$

olarak tanımlıdır. (3.10) ifadesinin (4.4) eşitliğine uygulanması, (3.1) eşitliği ile (c) koşulunun dikkate alınmasıyla

$$
\begin{aligned}
(ND_n f)(\mathrm{z}) &= \int_0^1 K_n\left(\mathrm{z}, t, f(t)\right) dt = \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t) H_n\left(f(t)\right) dt \\
&\le \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t)\psi\left(|f(t)|\right) dt \\
&\le \psi\left(\left|\frac{f(\mathrm{z}+)+f(\mathrm{z}-)}{2}\right|\right)\int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t)dt + \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t)\psi\left(|f_{\mathrm{z}}(t)|\right)dt \\
&+ \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t)\psi\left(\left|\frac{f(\mathrm{z}+)-f(\mathrm{z}-)}{2}\right| |sgn(t-\mathrm{z})|\right)dt \\
&+ \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t)\psi\left(\left|f(\mathrm{z}) - \frac{f(\mathrm{z}+)+f(\mathrm{z}-)}{2}\right|\delta_{\mathrm{z}}(t)\right)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $(ND_n\delta_{\mathrm{z}})(\mathrm{z}) = 0$ olduğu açıktır. (4.4) kullanılırsa

$$(ND_nf)(z) \leq \left[\psi\left(\left|\frac{f(z+)+\ f(z-)}{2}\right|\right)+\psi\left(\left|\frac{f(z+)-\ f(z-)}{2}\right|\right)\right]\int_0^1 F_n(z,t)dt$$
$$+\int_0^1 F_n(z,t)\ \psi(|f_z(t)|)dt$$

elde edilir. Lemma 2.7 den faydalanarak

$$(ND_nf)(z)-\left[\psi\left(\left|\frac{f(z+)+\ f(z-)}{2}\right|\right)+\psi\left(\left|\frac{f(z+)-\ f(z-)}{2}\right|\right)\right]$$
$$\leq \int_0^1 F_n(z,t)\ \psi(|f_z(t)|)dt \tag{4.5}$$

olduğu görülür. İspatı tamamlamak için,

$$\int_0^1 F_n(z,t)\ \psi(|f_z(t)|)dt$$

ifadesini hesaplamalıyız. (3.3) ifadesi yardımıyla son integrali

$$\int_0^1 F_n(z,t)\ \psi(|f_z(t)|)dt \ \leq \left(\int_0^{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} + \int_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{1-z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} + \int_{z+\frac{1-z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{1} \square\right)\psi\ (|f_z(t)|)F_n(z,t)dt$$
$$=|I_1(n,z)|+|I_2(n,z)|+|I_3(n,z)| \tag{4.6}$$

şeklinde üç parçaya ayırabiliriz. İlk olarak $I_2(n,z)$ ifadesini hesaplayalım. $f_z(z)=0$ ve $t\in\left[z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}, z+\frac{1-z}{n^{\gamma/\beta}}\right]$ için $\psi(0)=0$ olduğu kullanılırsa,

$$|I_2\ (n,z)| = \int_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{1-z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} [\psi\ (|f_z(t)|)\text{–}\ \psi\ (|f_z(z)|)]F_n(z,t)dt$$

olup, (b) şartının kullanılmasıyla

$$|I_2(n,z)| \leq \bigvee_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{1-z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \psi\ (|f_z|) \int_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{1-z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} F_n(z,t)dt \leq A_n(z) \bigvee_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{1-z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \psi\ (|f_z|) \tag{4.7}$$

elde edilir. Şimdi $I_2(n,\mathrm{z})$ ifadesini hesaplayalım. Lebesgue-Stieltjes kısmi integrasyonunu kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
|I_1(n,\mathrm{z})| &= \int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}(t)|\right) F_n(\mathrm{z},t)\,dt \\
&= \psi\left(\left|f_{\mathrm{z}}\left(\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}\right)\right|\right)\lambda_n\left(\mathrm{z},\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}\right) \\
&\quad - \int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}} \lambda_n(\mathrm{z},t)\,d_t\left(\psi\left(|f_{\mathrm{z}}(t)|\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Burada $y=\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}$ dersek, (3.7) ifadesinden

$$
\lambda_n(\mathrm{z},y) \leq B(\mathrm{z})\mathrm{z}^{-\beta} n^{\gamma(\beta-1)/\beta} \tag{4.8}
$$

bulunur. Burada

$$
\psi\left(\left|f_{\mathrm{z}}\left(\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}\right)\right|\right) = \psi\left(\left|f_{\mathrm{z}}\left(\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}\right)\right|\right) - \psi\left(|f_{\mathrm{z}}(\mathrm{z})|\right) \leq \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)
$$

olduğu açıktır. Kısmi integrasyon uygulayıp, (4.8) ifadesinin kullanılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
|I_1(n,\mathrm{z})| &\leq \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\left|\lambda_n\left(\mathrm{z},\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}\right)\right| + \int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}} \lambda_n(\mathrm{z},t)\,d_t\left(-\bigvee_t^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right) \\
&\leq \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) B(\mathrm{z})\mathrm{z}^{-\beta} n^{\frac{\gamma(\beta-1)}{\beta}} \\
&\quad + B(\mathrm{z})n^{-\gamma/\beta} \int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\gamma/\beta}}} (\mathrm{z}-t)^{-\beta}\,d_t\left(-\bigvee_t^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) B(\mathrm{z})\mathrm{z}^{-\beta} n^{\gamma(\beta-1)/\beta}$$

$$+ \; B(\mathrm{z})n^{-\gamma/\beta}\left[\frac{-\mathrm{z}^{-\beta}}{n^{-\gamma}} \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right.$$

$$\left. + \; \mathrm{z}^{-\beta} \bigvee_{0}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) \int_{0}^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \bigvee_{t}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) \frac{\beta}{(\mathrm{z} \; - \; t)^{\beta+1}} dt\right]$$

$$= B(\mathrm{z})n^{-\gamma/\beta}\left[\mathrm{z}^{-\beta} \bigvee_{0}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) + \int_{0}^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \bigvee_{t}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) \frac{\beta}{(\mathrm{z} \; - \; t)^{\beta+1}} dt\right]$$

elde edilir. $t$ yerine $\mathrm{z} - \frac{\mathrm{z}}{u^{1/\beta}}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_{0}^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \bigvee_{t}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) \frac{\beta}{(\mathrm{z} \; - \; t)^{\beta+1}} dt = \frac{1}{\mathrm{z}^{\beta}} \int_{1}^{n^{\gamma}} \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{u^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) du \leq \frac{1}{\mathrm{z}^{\beta}} \sum_{k=1}^{[n^{\gamma}]} \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$|I_1(n,\mathrm{z})| \leq B(\mathrm{z})n^{-\frac{\gamma}{\beta}}\mathrm{z}^{-\beta}\left[\bigvee_{0}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) + \sum_{k=1}^{[n^{\gamma}]} \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right] \tag{4.9}$$

olduğu görülür. Benzer metodu kullanırsak,

$$|I_3(n,\mathrm{z})| \leq B(\mathrm{z})n^{-\frac{\gamma}{\beta}}(1-\mathrm{z})^{-\beta}\left[\bigvee_{\mathrm{z}}^{1} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) + \sum_{k=1}^{[n^{\gamma}]} \bigvee_{\mathrm{z}}^{\mathrm{z}+\frac{(1-\mathrm{z})}{k^{\frac{1}{\beta}}}} \psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right] \tag{4.10}$$

ifadesini elde ederiz. (4.7), (4.9) ve (4.10) ifadelerinin (4.6) içinde kullanılmasıyla,

$$\int_0^1 F_n(\mathrm{z},t)\psi\left(|f_{\mathrm{z}}(t)|\right)dt$$

$$\leq B(\mathrm{z})n^{-\frac{\gamma}{\beta}}\mathrm{z}^{-\beta}\left[\bigvee_0^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)+\sum_{k=1}^{[n^\gamma]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right]$$

$$+B(\mathrm{z})n^{-\frac{\gamma}{\beta}}(1-\mathrm{z})^{-\beta}\left[\bigvee_{\mathrm{z}}^{1}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)+\sum_{k=1}^{[n^\gamma]}\bigvee_{\mathrm{z}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right]$$

$$+A_n(\mathrm{z})\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)$$

$$\leq B^*(\mathrm{z})n^{-\frac{\gamma}{\beta}}\left[\bigvee_0^{1}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)+\sum_{k=1}^{[n^\gamma]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right)\right]$$

$$+A_n(\mathrm{z})\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}\psi\left(|f_{\mathrm{z}}|\right) \qquad (4.11)$$

elde edilir. (4.5) ve (4.11) bir araya getirildiğinde istenen sonuç elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

**Sonuç 4.5**

Teorem 4.4 de $f\in C[0,1]$ seçersek $\beta>0$ için $B_n^*(\mathrm{z})=B_n(\mathrm{z})\max\{\mathrm{z}^{-\beta},(1-\mathrm{z})^{-\beta}\}$ olmak üzere

$$(ND_nf)(\mathrm{z})-\psi(|f(\mathrm{z})|)$$

$$\leq B_n^*(\mathrm{z})\left[\bigvee_0^1\psi(|f_{\mathrm{z}}|)+\sum_{k=1}^{[\mu^\gamma]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{(1-\mathrm{z})}{k^{\frac{1}{\beta}}}}\psi(|f_{\mathrm{z}}|)\right]+A_n(\mathrm{z})\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{(1-\mathrm{z})}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}\psi(|f_{\mathrm{z}}|)$$

ifadesini elde ederiz.

**Teorem 4.6**

$\psi \in \Psi$ ve $f \in L_1([0,1])$ için $\psi \circ |f| \in BV([0,1])$ olsun. Kabul edelim ki $K_n(\mathrm{z}, t, u)$ çekirdeği (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda $f(\mathrm{z}+)$ ve $f(\mathrm{z}-)$ tek taraflı limitlerinin var olduğu sabit her $\mathrm{z} \in (0,1)$ noktasında

$$\left|(ND_n f)(\mathrm{z}) - \frac{f(\mathrm{z}+) + f(\mathrm{z}-)}{2}\right|$$
$$\leq B_n^*(\mathrm{z}) n^{-\frac{\gamma}{\beta}} \left[ \bigvee_0^1 \psi(|f_\mathrm{z}|) + \sum_{k=1}^{[\mu^\gamma]} \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{(1-\mathrm{z})}{k^{\frac{1}{\beta}}}} \psi(|f_\mathrm{z}|) \right]$$
$$+ A_n(\mathrm{z}) \bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{\mathrm{z}+\frac{(1-\mathrm{z})}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \psi(|f_\mathrm{z}|) + \psi\left(\left|\frac{f(\mathrm{z}+) - f(\mathrm{z}-)}{2}\right|\right) + \frac{1}{\mu(n)}$$

ifadesi sağlanır. Burada $\beta > 0$ olmak üzere $B_n^*(\mathrm{z}) = B_n(\mathrm{z}) \max\{\mathrm{z}^{-\beta}, (1-\mathrm{z})^{-\beta}\}$ şeklinde tanımlıdır.

**İspat:**

Herhangi bir $f \in X$ için

$$\left|(ND_n f)(\mathrm{z}) - \frac{f(\mathrm{z}+)\ +\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right| = \left|\int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t) H_n(f(t)) dt - \frac{f(\mathrm{z}+)\ +\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right|$$
$$\leq \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t) \psi\left(\left|f(t) - \frac{f(\mathrm{z}+)\ +\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right|\right) dt$$
$$+ \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t) \left|H_n\left(\frac{f(\mathrm{z}+)\ +\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right) - \frac{f(\mathrm{z}+)\ +\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right| dt$$
$$\leq \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t) \psi\ (|f_\mathrm{z}(t)|) dt$$
$$+ \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t) \psi\left(\left|f(\mathrm{z}) - \frac{f(\mathrm{z}+) + f(\mathrm{z}-)}{2}\right| \delta_\mathrm{z}(t)\right) dt$$
$$+ \psi\left(\left|\frac{f(\mathrm{z}+)\ -\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right|\right)$$
$$+ \left|H_n\left(\frac{f(\mathrm{z}+)\ +\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right) - \left(\frac{f(\mathrm{z}+)\ +\ f(\mathrm{z}-)}{2}\right)\right| \int_0^1 F_n(\mathrm{z}, t) dt$$

yazılabilir. Teorem 4.4'ün ispatına benzer şekilde

$$\left|(ND_n f)(z) - \frac{f(z+) + f(z-)}{2}\right|$$

$$\leq B^*(z) n^{\frac{-\gamma}{\beta}} \left[ \bigvee_0^1 \psi(|f_z|) + \sum_{k=1}^{[n^\gamma]} \bigvee_{z-\frac{z}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{z+\frac{1-z}{k^{\frac{1}{\beta}}}} \psi(|f_z|) \right]$$

$$+ A_n(z) \bigvee_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{1-z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \psi(|f_z|) + \psi\left(\frac{|f(z+) - f(z-)|}{2}\right)$$

$$+ \left|H_n\left(\frac{f(z+) + f(z-)}{2}\right) - \left(\frac{f(z+) + f(z-)}{2}\right)\right|$$

elde edilir. (c) şartından dolayı $\sup_u |H_n(u) - u| \leq \frac{1}{\mu(n)}$ olduğu kullanılırsa ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.7**

Teorem 4.6 da $f \in C[0,1]$ seçersek $\beta > 0$ için $B_n^*(z) = B_n(z) \max\{z^{-\beta}, (1-z)^{-\beta}\}$ olmak üzere

$$|(ND_n f)(z) - f(z)| \leq B_n^*(z) n^{-\frac{\gamma}{\beta}} \left[ \bigvee_0^1 \psi(|f_z|) + \sum_{k=1}^{[\mu^\gamma]} \bigvee_{z-\frac{z}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{z+\frac{(1-z)}{k^{\frac{1}{\beta}}}} \psi(|f_z|) \right]$$

$$+ A_n(z) \bigvee_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{(1-z)}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} \psi(|f_z|) + \frac{1}{\mu(n)}$$

ifadesini elde ederiz.

**Sonuç 4.8**

Teorem 4.6 da $f \in C[0,1]$ ve $\psi(t) = t$ seçersek $\beta > 0$ için $B_n^*(z) = B_n(z)\max\{z^{-\beta}, (1-z)^{-\beta}\}$ olmak üzere

$$|(ND_nf)(z) - f(z)|$$
$$\leq B_n^*(z) n^{-\frac{\gamma}{\beta}}\left[\bigvee_0^1 (|f_z|) + \sum_{k=1}^{[\mu^\gamma]} \bigvee_{z-\frac{z}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{z+\frac{(1-z)}{k^{\frac{1}{\beta}}}} (|f_z|)\right] + A_n(z) \bigvee_{z-\frac{z}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}}^{z+\frac{(1-z)}{n^{\frac{\gamma}{\beta}}}} (|f_z|)$$
$$+ \frac{1}{\mu(n)}$$

ifadesini elde ederiz.

**Teorem 4.9**

$\psi \in \Psi$ ve $f$ de $[0,1]$ aralığı üzerinde türevi sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $z \in (0,1)$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$|(ND_nf)(z) - f(z)|$$
$$\leq \left|\frac{f'(z+) - f'(z-)}{2}\right| \sqrt{\frac{2nz(1-z)+2}{n^2}}$$
$$+ \frac{2(n+1)}{n^2 z(1-z)} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z+\frac{(1-z)}{k}} (f_z') + \frac{1}{\mu(n)}$$

ifadesi sağlanır. Burada $\bigvee_a^b (f_z')$ ifadesi $f_z'$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerindeki toplam salınımını göstermektedir.

**İspat:**

Genel olarak, singüler bir integral operatörü

$$(T_nf)(z) = \int_a^b f(t) K_n(z,t)\,dt$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $a \leq z, t \leq b$ için $K_n(z,t)$ çekirdek fonksiyonu uygun koşulları sağladığı durumda, belirli bir uzaydan alınan $f(z)$ ve $n \to \infty$ için $(T_nf)(z)$, $f(z)$ değerine yakınsar.

$(ND_n f)(z)$ ile $f(z)$ arasındaki fark, singüler Stieltjes integrali şeklinde

$$\left(ND_n f(z) - f(z)\right) = \int_0^1 H_n\big(f(t)\big)F_n(z,t)dt - f(z)$$

$$= \int_0^1 \left[H_n\big(f(t)\big) - f(t)\right]F_n(z,t)dt$$

$$+ \int_0^1 [f(t) - f(z)]F_n(z,t)dt = I_{n,1}(z) + I_{n,2}(z)$$

olarak yazılabilir. İlk olarak

$$I_{n,2}(z) = \int_0^1 [f(t) - f(z)]F_n(z,t)dt \tag{4.12}$$

integralini hesaplayalım. $f(t) \in DBV[0,1]$ olduğundan (4.12) ifadesini

$$I_{n,2}(z) = \int_0^z [f(t) - f(z)]F_n(z,t)dt + \int_z^1 [f(t) - f(z)]F_n(z,t)dt$$

$$= -\int_0^z \left[\int_t^z f'(u)du\right]F_n(z,t)dt$$

$$+ \int_z^1 \left[\int_z^t f'(u)du\right]F_n(z,t)dt = -I_1(z) + I_2(z)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Burada

$$I_1(z) = \int_0^z \left[\int_t^z f'(u)du\right]F_n(z,t)dt \tag{4.13}$$

ve

$$I_2(z) = \int_z^1 \left[\int_z^t f'(u)du\right]F_n(z,t)dt \tag{4.14}$$

şeklindedir. Herhangi bir $f(t) \in DBV[0,1]$ fonksiyonunu

$$f'(t) = \frac{f'(z+) + f'(z-)}{2} + f_z{}'(t) + \frac{f'(z+) - f'(z-)}{2} sgn(t - z)$$

$$+ \delta_z(t)\left[f'(z) - \frac{f'(z+) + f'(z-)}{2}\right]$$

olarak parçalayabiliriz. Burada

$$\delta_z(t) = \begin{cases} 1 & , \quad z = t \\ 0 & , \quad z \neq t \end{cases}$$

dir. Bu parçalanmayı, (4.13) ve (4.14) ifadelerinde kullanırsak

$$I_1(z) = \frac{f'(z+) + f'(z-)}{2}\int_0^z (z-t)F_n(z,t)dt + \int_0^z \left[\int_t^z f_z'(u)du\right]F_n(z,t)dt$$

$$-\frac{f'(z+) - f'(z-)}{2}\int_0^z (z-t)F_n(z,t)dt$$

$$+\left[f'(z) - \frac{f'(z+) + f'(z-)}{2}\right]\int_0^z \left[\int_t^z \delta_z(u)du\right]F_n(z,t)dt$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\int_t^z \delta_z(u)du = 0$ olduğunun kullanılmasıyla

$$I_1(z) = \left[\frac{f'(z+) + f'(z-)}{2} - \frac{f'(z+) - f'(z-)}{2}\right]\int_0^z (z-t)F_n(z,t)dt$$

$$+\int_0^z \left[\int_t^z f_z'(u)du\right]F_n(z,t)dt \tag{4.15}$$

ve, $I_2(z)$ için de benzer bir hesaplamayla

$$I_2(z) = \left[\frac{f'(z+) + f'(z-)}{2} - \frac{f'(z+) - f'(z-)}{2}\right]\int_z^1 (t-z)F_n(z,t)dt$$

$$+\int_z^1 \left[\int_z^t f_z'(u)du\right]F_n(z,t)dt \tag{4.16}$$

bulunur (4.15) ve (4.16) ifadelerini bir araya getirdiğimizde

$$-I_1(z) + I_2(z)$$

$$= \frac{f'(z+) + f'(z-)}{2}\int_0^1 (t-z)F_n(z,t)dt$$

$$+\frac{f'(z+) - f'(z-)}{2}\int_0^1 |t-z|F_n(z,t)dt$$

$$-\int_0^z \left[\int_t^z f_z'(u)du\right]F_n(z,t)dt + \int_z^1 \left[\int_z^t f_z'(u)du\right]F_n(z,t)dt$$

olarak elde ederiz. Son eşitliğin yardımıyla (4.12) ifadesini

$$I_{n,2}(z) = \frac{f'(z+) + f'(z-)}{2} \int_0^1 (t-z) F_n(z,t)dt$$

$$+ \frac{f'(z+) - f'(z-)}{2} \int_0^1 |t-z| F_n(z,t)dt$$

$$- \int_0^z \left[ \int_t^z f_z'(u)du \right] F_n(z,t)dt + \int_z^1 \left[ \int_z^t f_z'(u)du \right] F_n(z,t)dt \quad (4.17)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\int_0^1 |t-z| F_n(z,t)dt = (D_n\, |t-z|)(z)$$

ve

$$\int_0^1 (t-z) F_n(z,t)dt = \big(D_n(t-z)\big)(z)$$

olduğunun kullanılmasıyla, (4.17) ifadesinin mutlak değeri

$$\left|I_{n,2}(z)\right| \le \left|\frac{f'(z+) + f'(z-)}{2}\right| \left|\big(D_n(t-z)\big)(z)\right|$$

$$+ \left|\frac{f'(z+) - f'(z-)}{2}\right| \left|(D_n\, |t-z|)(z)\right|$$

$$+ \left| - \int_0^z \left[ \int_t^z f_z'(u)du \right] F_n(z,t)dt \right|$$

$$+ \left| \int_z^1 \left[ \int_z^t f_z'(u)du \right] F_n(z,t)dt \right| \quad (4.18)$$

olarak yeniden ifade edilebilir. (3.7) ifadesi dikkate alındığında

$$\int_0^z \left[ \int_t^z f_z'(u)du \right] F_n(z,t)dt = \int_0^z \left[ \int_t^z f_z'(u)du \right] \frac{\partial}{\partial t} \lambda_n(z,t)dt \quad (4.19)$$

yazılabilir. (4.19) ifadesinin sağ tarafında kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^z \left[ \int_t^z f_z'(u)du \right] \frac{\partial}{\partial t} \lambda_n(z,t)dt = \int_0^z f_z'(t)\, \lambda_n(z,t)dt$$

elde edilir. Buradan

$$\left| - \int_0^z \left[ \int_t^z f_z'(u)du \right] F_n(z,t)dt \right| \le \int_0^z |f_z'(t)|\, \lambda_n(z,t)dt$$

ve

$$\left|-\int_0^{z}\left[\int_t^{z} f_z'(u)du\right]F_n(z,t)dt\right| \le \int_0^{z-\frac{z}{\sqrt{n}}} |f_z'(t)|\ \lambda_n(z,t)dt + \int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} |f_z'(t)|\ \lambda_n(z,t)dt$$

elde edilir. $f_z'(z) = 0$ ve $\lambda_n(z,t) \le 1$ olduğunun kullanılmasıyla

$$\int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} |f_z'(t)|\ \lambda_n(z,t)dt = \int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} |f_z'(t) - f_z'(z)|\ \lambda_n(z,t)dt \le \int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} \bigvee_t^{z}(f_z')dt$$

bulunur. Burada $t = z - \frac{z}{u}$ değişken değişimi yapıldığında,

$$\int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} \bigvee_t^{z}(f_z')dt \le \bigvee_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z}(f_z') \int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} dt$$

elde edilir. (3.7) ifadesinden dolayı

$$\int_0^{z-\frac{z}{\sqrt{n}}} |f_z'(t)|\ \lambda_n(z,t)dt \le \frac{2nz(1-z)+\ 2}{n^2}\int_0^{z-\frac{z}{\sqrt{n}}} \bigvee_t^{z}(f_z')\frac{dt}{(z-t)^2}$$

olur. Tekrardan $t = \frac{z}{u}$ değişken değişimi yaptığımızda,

$$\int_0^{z-\frac{z}{\sqrt{n}}} \bigvee_t^{z}(f_z')\frac{dt}{(z-t)^2} = \int_1^{\sqrt{n}} \bigvee_{z-\frac{z}{u}}^{z}(f_z')\frac{\left(\frac{z}{u^2}\right)du}{\left(-\frac{z}{u}\right)^2} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z}(f_z')$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\left|-\int_0^{z}\left[\int_t^{z} f_z'(u)du\right]F_n(z,t)dt\right| \le \frac{z}{\sqrt{n}}\bigvee_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z}(f_z') + \frac{2nz(1-z)+2}{n^2 z}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z}(f_z')$$

olup

$$\frac{z}{\sqrt{n}}\bigvee_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z}(f_z') \le \frac{2z}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z}(f_z')$$

olduğunun kullanılmasıyla

$$\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{z}}(f_{\mathrm{z}}{}') + \frac{2n\mathrm{z}(1-\mathrm{z})+2}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(f_{\mathrm{z}}{}')$$

$$\leq \frac{2\mathrm{z}}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(f_{\mathrm{z}}{}') + \frac{2n\mathrm{z}(1-\mathrm{z})+2}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(f_{\mathrm{z}}{}')$$

$$\leq \frac{2(n+1)}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(f_{\mathrm{z}}{}')$$

bulunur. O halde

$$\left|-\int_0^{\mathrm{z}}\left[\int_t^{\mathrm{z}} f_{\mathrm{z}}{}'(u)du\right]F_n(\mathrm{z},t)dt\right| \leq \frac{2(n+1)}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(f_{\mathrm{z}}{}')$$

şeklindedir. Benzer bir hesaplamayla

$$\left|\int_{\mathrm{z}}^{1}\left[\int_{\mathrm{z}}^{t} f_{\mathrm{z}}{}'(u)du\right]F_n(\mathrm{z},t)dt\right| \leq \frac{2(n+1)}{n^2(1-\mathrm{z})}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{k}}(f_{\mathrm{z}}{}')$$

elde edilir. Elde edilen hesaplamalar birleştirildiğinde

$$\left|I_{n,2}(\mathrm{z})\right| \leq \left|\frac{f'(\mathrm{z}+)-f'(\mathrm{z}-)}{2}\right|\sqrt{\frac{2n\mathrm{z}(1-\mathrm{z})+2}{n^2}} + \frac{2(n+1)}{n^2(1-\mathrm{z})}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{k}}(f_{\mathrm{z}}{}')$$

olduğu görülür. Burada (c) şartından dolayı

$$\left|I_{n,1}(\mathrm{z})\right| = \left|\int_0^1\left[H_n\big(f(t)\big)-f(t)\right]F_n(\mathrm{z},t)dt\right| \leq \int_0^1\left|H_n\big(f(t)\big)-f(t)\right|F_n(\mathrm{z},t)dt$$

$$\leq \frac{1}{\mu(n)}$$

olduğu açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 4.10**

$\psi \in \Psi$ ve $f \in X$ için $\psi \circ |f| \in DBV([0,1])$ olsun. Bu durumda her $z \in (0,1)$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$
\begin{aligned}
&|(ND_n f)(z) - f(z)| \\
&\qquad \leq \left| \frac{(\psi \circ |f|)'(z-) - (\psi \circ |f|)'(z+)}{2} \right| \sqrt{\frac{2nz(1-z)+2}{n^2}} \\
&\qquad + \frac{2(n+1)}{n^2 z(1-z)} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z+\frac{(1-z)}{k}} (\psi \circ |f|)'_z + \frac{1}{\mu(n)}
\end{aligned}
$$

ifadesi sağlanır.

**İspat:**

$(ND_n f)(z)$ ile $f(z)$ arasındaki fark, singüler Stieltjes integrali şeklinde

$$
\begin{aligned}
\left|\left(ND_n f(z) - f(z)\right)\right| &= \left| \int_0^1 \left[H_n\big(f(t)\big)\right] F_n(z,t)\,dt - f(z) \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| H_n\big(f(t)\big) - H_n(f(z) \right| F_n(z,t)\,dt \\
&+ \int_0^1 \left| H_n\big(f(z)\big) - f(z) \right| F_n(z,t)\,dt \\
&\leq \int_0^1 \psi\,(|f(t) - f(z)|) F_n(z,t)\,dt \\
&+ \int_0^1 \left| H_n\big(f(z)\big) - f(z) \right| F_n(z,t)\,dt = I_{n,1}(z) + I_{n,2}(z)
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. $\psi$ azalmayan fonksiyonu için

$$
-\psi(|f(t) - f(z)|) \leq \psi(|f(t)|) - \psi(|f(z)|)
$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\psi(|f(t)|) \in DBV[0,1]$ olduğunu kullanarak

$$I_{n,1}(\mathrm{z}) = \int_{\mathrm{z}}^{0} [\psi(|f(t)|) - \psi(|f(\mathrm{z})|)]\, F_n(\mathrm{z},t)dt$$

$$+ \int_{1}^{\mathrm{z}} [\psi(|f(t)|) - \psi(|f(\mathrm{z})|)]\, F_n(\mathrm{z},t)dt$$

$$= \int_{0}^{\mathrm{z}} \left[\int_{t}^{\mathrm{z}} (\psi \circ |f|)'(u)du\right] F_n(\mathrm{z},t)dt$$

$$+ \int_{\mathrm{z}}^{1} \left[\int_{t}^{\mathrm{z}} (\psi \circ |f|)'(u)du\right] F_n(\mathrm{z},t)dt = I_1(\mathrm{z}) - I_2(\mathrm{z})$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$I_1(\mathrm{z}) = \int_{0}^{\mathrm{z}} \left[\int_{t}^{\mathrm{z}} (\psi \circ |f|)'(u)du\right] F_n(\mathrm{z},t)dt \tag{4.20}$$

ve

$$I_2(\mathrm{z}) = \int_{\mathrm{z}}^{1} \left[\int_{\mathrm{z}}^{t} (\psi \circ |f|)'(u)du\right] F_n(\mathrm{z},t)dt \tag{4.21}$$

şeklindedir. Herhangi $(\psi \circ |f|)(t) \in DBV[0,1]$ fonksiyonu

$$(\psi \circ |f|)'(t) = \frac{(\psi \circ |f|)'(\mathrm{z}+) + (\psi \circ |f|)'(\mathrm{z}-)}{2} (\psi \circ |f|)'_{\mathrm{z}}(t)$$

$$+ \frac{(\psi \circ |f|)'(\mathrm{z}+) - (\psi \circ |f|)'(\mathrm{z}-)}{2}\, sgn(t-x)$$

$$+ \delta_{\mathrm{z}}(t)\left[(\psi \circ |f|)'(\mathrm{z}) - \frac{(\psi \circ |f|)'(\mathrm{z}+) + (\psi \circ |f|)'(\mathrm{z}-)}{2}\right]$$

olarak parçalanabilir. Burada

$$\delta_{\mathrm{z}}(t) = \begin{cases} 1, & \mathrm{z} = t \\ 0, & \mathrm{z} \neq t \end{cases}$$

şeklindedir. Bu eşitliği (4.20) ve (4.11) ifadelerinde kullanırsak

$$I_1(z) = \int_0^z \left\{ \int_t^z \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} + (\psi \circ |f|)'_z(u) \right.$$

$$+ \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) - (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} sgn(u-z)$$

$$+ \delta_z(u) \left[ (\psi \circ |f|)'(z) \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \right] du \right\} F_n(z,t)dt$$

ve

$$I_2(z) = \int_z^1 \left\{ \int_z^t \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} + (\psi \circ |f|)'_z(u) \right.$$

$$+ \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) - (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} sgn(u-z)$$

$$+ \delta_z(u) \left[ (\psi \circ |f|)'(z) \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \right] du \right\} F_n(z,t)dt$$

elde edilir. İlk olarak $I_1(z)$ ifadesini hesaplayalım.

$$I_1(z) = \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_0^z (z-t)\, F_n(z,t)dt$$

$$+ \int_0^z \left[ \int_t^z (\psi \circ |f|)'_z(u)du \right] F_n(z,t)dt$$

$$- \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) - (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_0^z (z-t)\, F_n(z,t)dt$$

$$+ \left[ (\psi \circ |f|)'(z) \right.$$

$$\left. - \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \right] \int_0^z \left[ \int_t^z \delta_z(u)du \right] F_n(z,t)dt$$

olacağından, $\int_t^z \delta_z(u)du = 0$ olduğunun kullanılmasıyla

$$I_1(z) = \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_0^{z} (z-t)\, F_n(z,t)dt$$

$$+ \int_0^{z} \left[ \int_t^{z} (\psi \circ |f|)'_z(u)du \right] F_n(z,t)dt$$

$$- \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) - (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_0^{z} (z-t)\, F_n(z,t)dt \qquad (4.22)$$

elde edilir. Benzer bir hesaplamayla

$$I_2(z) = \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_z^{1} (t-z)\, F_n(z,t)dt$$

$$+ \int_z^{1} \left[ \int_z^{t} (\psi \circ |f|)'_z(u)du \right] F_n(z,t)dt$$

$$- \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) - (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_z^{1} (t-z)\, F_n(z,t)dt \qquad (4.23)$$

elde edilir. (4.22) ve (4.23) bir araya geldiğinde

$$I_1(z) - I_2(z) = \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) + (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_0^{1} (z-t)\, F_n(z,t)dt$$

$$- \frac{(\psi \circ |f|)'(z+) - (\psi \circ |f|)'(z-)}{2} \int_0^{1} |t-z|\, F_n(z,t)dt$$

$$+ \int_0^{z} \left[ \int_t^{z} (\psi \circ |f|)'_z(u)du \right] F_n(z,t)dt$$

$$- \int_z^{1} \left[ \int_z^{t} (\psi \circ |f|)'_z(u)du \right] F_n(z,t)dt$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_0^{1} |t-z|\, F_n(z,t)dt = D_n(|t-z|; z) \le \sqrt{D_n(t-z)^2(z)} = \sqrt{\frac{2nz(1-z)+2}{n^2}}$$

ve

$$\int_0^1 (t-\mathrm{z})\, F_n(\mathrm{z},t)dt = (D_n(t-\mathrm{z}))(\mathrm{z}) = \frac{1-2\mathrm{z}}{n+2}$$

olduğunun kullanılmasıyla $I_1(\mathrm{z}) - I_2(\mathrm{z})$ farkını

$$I_1(\mathrm{z}) - I_2(\mathrm{z}) \leq \frac{(\psi\circ|f|)'(\mathrm{z}+) - (\psi\circ|f|)'(\mathrm{z}-)}{2}\sqrt{\frac{2n\mathrm{z}(1-\mathrm{z})+2}{n^2}}$$

$$+\int_0^{\mathrm{z}}\left[\int_t^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]F_n(\mathrm{z},t)dt$$

$$-\int_{\mathrm{z}}^{1}\left[\int_{\mathrm{z}}^{t}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]F_n(\mathrm{z},t)dt$$

şeklinde yeniden ifade edebiliriz. Burada

$$\int_0^{\mathrm{z}}\left[\int_t^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]F_n(\mathrm{z},t)dt = \int_0^{\mathrm{z}}\left[\int_t^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]\frac{\partial}{\partial t}\lambda_n(\mathrm{z},t)dt$$

olduğundan, ifadenin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^{\mathrm{z}}\left[\int_t^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]\frac{\partial}{\partial t}\lambda_n(\mathrm{z},t)dt = \int_0^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(t)\lambda_n(\mathrm{z},t)dt$$

ve

$$\int_0^{\mathrm{z}}\left[\int_t^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]\frac{\partial}{\partial t}\lambda_n(\mathrm{z},t)dt$$

$$= \int_0^{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(t)\lambda_n(\mathrm{z},t)dt + \int_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(t)\lambda_n(\mathrm{z},t)dt$$

elde edilir. $(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(\mathrm{z}) = 0$ ve $\lambda_n(\mathrm{z},t) \leq 1$ olduğundan,

$$\int_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(t)\lambda_n(\mathrm{z},t)dt \leq \int_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{z}}\bigvee_t^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}dt$$

olup, burada $t = \mathrm{z} - \frac{\mathrm{z}}{u}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} \bigvee_{t}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z} dt \leq \bigvee_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z} dt \int_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} dt$$

elde edilir. (3.7) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_{0}^{z-\frac{z}{\sqrt{n}}} (\psi \circ |f|)'_{z} \lambda_n(z,t) dt \leq \frac{2nz(1-z)+2}{n^2} \int_{0}^{z-\frac{z}{\sqrt{n}}} \bigvee_{t}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z} \frac{dt}{(z-t)^2}$$

yazabiliriz. Tekrardan $t = z - \frac{z}{u}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{2nz(1-z)+2}{n^2} \int_{0}^{z-\frac{z}{\sqrt{n}}} \bigvee_{t}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z} \frac{dt}{(z-t)^2}$$

$$= \frac{2nz(1-z)+2}{n^2} \int_{1}^{\sqrt{n}} \bigvee_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z} \frac{\left(\frac{z}{u^2}\right)}{\left(-\frac{z}{u}\right)^2} du$$

$$= \frac{2nz(1-z)+2}{n^2 z} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z}$$

ve dolayısıyla,

$$\int_{0}^{z} \left[ \int_{t}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z}(u) du \right] \frac{\partial}{\partial t} \lambda_n(z,t) dt$$

$$\leq \frac{z}{\sqrt{n}} \bigvee_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z} + \frac{2nz(1-z)+2}{n^2 z} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z}$$

ifadesine ulaşılır. O halde,

$$\frac{z}{\sqrt{n}} \bigvee_{z-\frac{z}{\sqrt{n}}}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z} \leq \frac{2z}{n} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{z-\frac{z}{k}}^{z} (\psi \circ |f|)'_{z}$$

olduğunun kullanılmasıyla

$$\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}$$

$$+\frac{2n\mathrm{z}(1-\mathrm{z})+2}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}$$

$$\leq\frac{2\mathrm{z}}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}+\frac{2n\mathrm{z}(1-\mathrm{z})+2}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}$$

$$\leq\frac{2(n+1)}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^{\mathrm{z}}\left[\int_t^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]\frac{\partial}{\partial t}\lambda_n(\mathrm{z},t)dt\leq\frac{2(n+1)}{n^2\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}-\frac{\mathrm{z}}{k}}^{\mathrm{z}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}$$

ve benzer şekilde

$$-\int_{\mathrm{z}}^{1}\left[\int_{\mathrm{z}}^{t}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}(u)du\right]F_n(\mathrm{z},t)dt\leq\frac{2(n+1)}{n^2(1-\mathrm{z})}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{k}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}$$

elde edilir. Böylece,

$$I_{n,1}(\mathrm{z})\leq\frac{(\psi\circ|f|)'(\mathrm{z}-)-(\psi\circ|f|)'(\mathrm{z}+)}{2}\sqrt{\frac{2n\mathrm{z}(1-\mathrm{z})+2}{n^2}}$$

$$+\frac{2(n+1)}{n^2(1-\mathrm{z})}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{\mathrm{z}}^{\mathrm{z}+\frac{1-\mathrm{z}}{k}}(\psi\circ|f|)'_{\mathrm{z}}$$

elde edilir. (c) koşulundan doalyı, yeterince büyük $n$ değerleri için

$$I_{n,2}(\mathrm{z})=\int_0^1\left|H_n\big(f(t)\big)-f(t)\right|F_n(\mathrm{z},t)dt\leq\frac{1}{\mu(n)}$$

olacağından, elde edilen hesaplamalar bir araya getirildiğinde teoremin ispatı tamamlanmış olur.

# 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

1885 yılında Weierstrass'ın ortaya attığı problem ve 1912 yılında Bernstein'ın bu probleme ürettiği yapıcı çözüm ile çok popüler bir hale gelen ve matematiksel analizin son 100 yılda en üretken alanlarından biri olan yaklaşımlar teorisi, özellikle de lineer pozitif operatörler yardımıyla bir fonksiyona kendisinden daha iyi özelliklere sahip polinomlar veya operatörler ile yaklaşma fikri, 1981 yılında Musielak'ın ortaya koyduğu koşul ve arkadaşlarıyla birlikte yaptığı çalışmalar öncülüğünde, lineer olmayan integral operatörler yardımıyla yaklaşım problemlerini de içine alarak son 40 yılda birçok matematikçinin ilgisini çekmeyi başarmıştır.

Lineer ve lineer olmayan operatörler ile yaklaşım problemleri günümüzde matematiksel analiz ve uygulamalı matematiğin birçok konusu ile iç içe geçerek popülerliğini korumuş ve gelecekte mühendislik ve tıp alanları başta olmak üzere birçok alanda karşılaşacak problemlere çözüm getireceği düşüncesiyle günden güne değer kazanmaktadır.

Tezimizde H. Karslı'nın 2014-2017 yılları arasında yaptığı çalışmalardan yola çıkarak, lineer olmayan Durrmeyer tipli operatörlerin yakınsaklık sonuçlarını ele aldık. Ancak teorinin geldiği noktanın daha iyi anlaşılması için H. Karslı'nın ve birlikte çalışma yaptığı birçok değerli matematikçinin literatüre yaptıkları önemli katkıların dikkatle incelenmesi gerektiğini düşünüyoruz.

# 6. KAYNAKLAR

(Bu tez çalışmasında APA atıf sistemi kullanılmıştır.)


Bardaro, C., Musielak, J., & Vinti, G. (2003). Nonlinear integral operators and applications. Walter de Gruyter.

Bernstein, S. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Сообщенія Харьковскаго математическаго общества, 13(1), 1-2.

Bojanic, R., & Cheng, F. (1989). Rate of convergence of Bernstein polynomials for functions with derivatives of bounded variation. Journal of mathematical analysis and applications, 141(1), 136-151.

Butzer, P. L., & Nessel, R. J. (1971). Fourier analysis and approximation, Vol. 1. Reviews in Group Representation Theory, Part A (Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 7).

Durrmeyer, J. L. (1967). Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: Applications à la théorie des moments (Doctoral dissertation).

Karsli, H. (2014). On convergence of a sequence of nonlinear Durrmeyer operators, PanAmerican Math. Journal, 24(2), 1-13.

Karsli, H. (2015). On convergence of certain nonlinear Durrmeyer operators at Lebesgue points. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 41(3), 699-711.

Karsli, H. (2017). Approximation properties of a certain nonlinear Durrmeyer operators. Filomat, 31(5), 1367-1380.

Karslı, H., & Altın, E. (2015a). Convergence of certain nonlinear counterpart of the Bernstein operators. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 64(1), 75-86.

Karsli, H., & Altin, H. E. (2015b). A Voronovskaya-type theorem for a certain nonlinear Bernstein operators. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, 60(2).

Karsli, H., Tiryaki, I. U., & Altin, H. E. (2014). Some approximation properties of a certain nonlinear Bernstein operators. Filomat, 28(6), 1295-1305.

Karsli, H., Tiryaki, I. U., & Altin, H. E. (2016). On convergence of certain nonlinear Bernstein operators. Filomat, 30(1), 141-155.

Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. In Dokl. Akad. Nauk SSSR (Vol. 90, No. 953, pp. 961-964).

Lupaş, A. (1972). Die Folge der Betaoperatoren (Doctoral dissertation).

Musielak, J. (1981). On some approximation problems in modular spaces. Constructive function theory, 81, 455-461.

Natanson, I. P. (1955). Theory of functions of a real variable, Volume I. Frederick Ungar Publishing Co., New York.