

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
2024-YL-49

EVİRİM CEBİRLERİ ÜZERİNE

Alpaslan AKÇA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN

AYDIN-2024

KABUL VE ONAY

T.C. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans Programı öğrencisi Alpaslan AKÇA tarafından hazırlanan “EVRİM CEBİRLERİ ÜZERİNE” başlıklı tez, aşağıdaki jüri tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 25/07/2024

Jüri Üyeleri

ONAY:

- Başkan : Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU
Aydın Adnan Menderes Üniversitesi
- Üye : Doç. Dr. Erbil ÇETİN
Ege Üniversitesi
- Üye : Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN
Aydın Adnan Menderes Üniversitesi

Bu tez Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri tarafından uygun görülmüş ve Fen Bilimleri Enstitüsünün tarih ve sayılı oturumunda alınan numaralı Yönetim Kurulu kararıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ethem AKTÜRK

Enstitü Müdürü



TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın gerçekleőtirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaőan, kendisine ne zaman danıősam bana kıymetli zamanımı ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden geleni yapan her sorun yaőadıęımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düőündüęüm danışman hocam; Sayın Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN'a teőekkürlerimi sunarım.





BİLİMSEL ETİK BEYANI

“Evrir Cebirleri Üzerine” başlıklı Yüksek Lisans tezindeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Alpaslan AKÇA

25/07/2024



İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	iii
BİLİMSEL ETİK BEYANI	v
SİMGELER DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
ÖZET	xv
ABSTRACT	xvii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
3.1. Temel Tanımlar	7
3.2. Grafın Tanımı ve Yapısı	18
3.2.1. Komşuluk ve Dereceler	20
3.2.2. Alt Graflar	21
3.2.3. Yürüyüş ve Yol Kavramı	22
3.2.4. Yönlü Graflar	23
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	29
4.1. Evrim Cebirleri	29
4.1.1. Evrim Cebiri Tanımı ve Özellikleri	32
4.1.2. Evrim Alt Cebirleri ve Evrim İdealleri	35
4.1.3. Dejenere Olmayan Evrim Cebirleri	39
4.1.4. Evrim Cebirleri ve Graflar	43
4.2. Evrim Cebirlerindeki İdealleri, İlişkili Grafın Kalıtsal Altkümeleri İle İlişkilendirme	45

4.2.1. Maksimal İdealler ve Kalıtsal Alt Kümeler	45
4.2.2. Sonlu Üretilmiş Evrim Cebirleri	58
4.2.3. Absorbsiyon Özelliğini Sağlayan İdealler ve Galois Bağlantısı	62
4.2.4. İlişkili Grafi Basit Olan Evrim Cebirleri	69
5. SONUÇ	73
KAYNAKLAR	75
ÖZ GEÇMİŞ	79



SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{N}	: = $\{0,1,2,\dots\}$ Doğal sayılar kümesi
\mathbb{N}^*	: = $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{Z}	: = $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ Tamsayılar kümesi
\mathbb{Q}	: Rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
1_R	: R halkasının çarpımsal birim elemanı
$0_R = 0$: R halkasının sıfırı
$\text{Span}(B)$: B kümesinin lineer gereni
$\dim_{\mathbb{F}}(V)$: V \mathbb{F} -vektör uzayının boyutu
$\mathcal{L}(X, Y)$: X den Y ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$: X den X e tüm lineer dönüşümlerin kümesi
a^{-1}	: a elemanının tersi
$\text{Im}T$: T lineer dönüşümünün görüntü kümesi
$\text{Ker}T$: T lineer dönüşümünün çekirdeği
A/I	: I ideale göre A nın bölüm cebiri
e	: A cebirinin çarpımsal birim elemanı
$S \triangleright A$: S, A cebirinin ideali
$A \setminus B$: A kümesinin B kümesinden farkının kümesi
$A \oplus B$: A ile B cebirsel yapılarının direkt toplamı
$A \cong B$: A ile B cebirsel yapılarının izomorf olması
$E = (E^0, E^1, r_E, s_E)$: Köşe kümesi E^0 , yay kümesi E^1 olan ve $r_E, s_E : E^1 \rightarrow E^0$ fonksiyonlarından oluşan E yönlü grafi
$r_E(f) = r(f)$: Yönlü bir E grafına ait bir f yayının görüntüsü
$s_E(f) = s(f)$: Yönlü bir E grafına ait bir f yayının kaynağı
$s(\mu)$: μ yolunun kaynağı
$r(\mu)$: μ yolunun görüntüsü
$\text{Path}(E)$: E yönlü grafiadaki tüm yolların kümesi
$T(S)$: S nin ağacı

- $\mathcal{H}_E = \mathcal{H}$: E^0 köşe kümesinin kalıtsal olan tüm alt kümelerinin kümesi
 \bar{S} : S kümesinin kalıtsal kapanışı
 $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$: \mathbb{K} cismi üzerinde $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
 $\text{ann}(\mathbf{A})$: A cebirinin sıfırlayanı
 $\det(\mathbf{M})$: M matrisinin determinanı
 $|\mathbf{A}|$: A kümesinin eleman sayısı
 $\text{supp}_B(\mathbf{u})$: B tabanına bağlı u nun supportu
 \mathbf{M}_B : A evrim cebirinin B doğal tabanı ile bağlantılı yapı matrisi
 \mathbb{K}^\times : $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ çarpımsal grubu
 $s_F = s_{E|F^1}$: s_E fonksiyonunun F^1 kümesine kısıtlanmış
 $r_F = r_{E|F^1}$: r_E fonksiyonunun F^1 kümesine kısıtlanmış
 E/H : H kalıtsal alt kümesine göre E nin bölüm grafi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.2.1.	Basit graf örneği	19
Şekil 3.2.2.	Genel graf örneği	19
Şekil 3.2.3.	Yönlü graf örneği	20
Şekil 3.2.4.	Alt graf örneği	21
Şekil 3.2.5.	G grafından f kenarının ve v_1 köşesinin çıkarılması	21
Şekil 3.2.6.	Bir G grafi içinde bir yürüyüş örneği	22
Şekil 3.2.7.	Bağlantılı olan ve bağlantılı olmayan graf örneği	23





ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1.1. Gametlerden zigotlara geçen aleller	29
Çizelge 4.1.2. Basit Mendel kalıtımı için gametik cebirin çarpım tablosu	30
Çizelge 4.1.3. B kümesindeki elemanların çarpım tablosu	33





ÖZET

EVİRİM CEBİRLERİ ÜZERİNE

Akça, A. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Berna Arslan, Aydın, 2024.

Bu tezde, evrim cebirleri üzerine günümüze kadar yapılan çalışmalarda elde edilen bazı cebirsel sonuçlar derlenerek, bu alanda çalışma yapılması durumunda konu ile ilgili temel bilgilerin bir araya getirilmesi amaçlanmıştır.

Tamamen teorik olan bu tez hazırlanırken evrim cebirleri hakkında daha önce yapılmış çalışmalar incelenmiştir. Bu konuya temel oluşturmak için kitaplardan ve internet kaynaklarından faydalanılmıştır.

Keyfi boyuttaki evrim cebirleri incelenerek evrim alt cebirleri, evrim idealler ve dejenere olmama kavramları araştırılmış, bu kavramlara ilişkin örnekler sunulmuştur. Ayrıca köşeleri evrim cebirinin taban elemanları ile etiketlenen bir yönlü graf tanımlanarak evrim cebirlerine ait bazı cebirsel özellikler incelenmiştir. Bir evrim cebirinin ideallerini ve ilişkili grafın köşelerinin kalıtsal alt kümelerini içeren bir ilişki tanıtılmış ve aralarında bazı özellikler kurulmuştur. Bu ilişki, bir evrim cebirine ait maksimal idealleri ve absorpsiyon özelliğine sahip idealleri, ilişkili grafi temel olarak belirlemeyi sağlar. Ayrıca, biri bir evrim cebirinin idealler kümesinden ilgili grafın kalıtsal alt kümelerine tanımlı, diğeri de ters yönde tanımlı olmak üzere bir çift sıra koruyan dönüşüm ele alınmıştır. Uygun koşullar altında bu dönüşüm, monoton bir Galois bağlantısı oluşturur. Ayrıca belirli kısıtlamalar altında keyfi boyutlu sonlu üretilmiş (cebir olarak) evrim cebirleri, ilişkili grafa göre karakterize edilmiştir. Sonlu üretilmiş mükemmel evrim cebirlerinin basitliği, grafın basitliği temelinde incelenmiştir.

Evrım cebirleri üzerine çalışmak, bu yapının bilinen diğere cebirsel yapılarla bağlantısının daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Bu sebeple literatürde bu konu ile ilgili çalışmaları kavramak ve evrim cebirinin yapısal özelliklerini ilişkili grafa göre incelemek, ileri çalışmalara önemli katkılar sağlayacaktır.

Anahtar kelimeler: Evrim cebiri, Basit cebir, Yönlü graf, Maksimal ideal, Absorbsiyon özelliği, Kalıtsal alt küme, Galois bağlantısı.



ABSTRACT

ON EVOLUTION ALGEBRAS

Akça A. Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics, Master Thesis, Supervisor: Asst. Prof. Berna Arslan, Aydın, 2024.

In this thesis, it is aimed to compile some algebraic results obtained in the studies on evolution algebras to date and to bring together the basic information about the subject in case of a study in this field.

While preparing this thesis, which is purely theoretical, previous studies on evolution algebras were examined. Books and internet resources have been utilized to provide a basis for this subject.

By analyzing evolution algebras of arbitrary dimension, the concepts of evolution subalgebras, evolution ideals and non-degeneracy are investigated and examples are presented. Moreover, some algebraic properties of evolution algebras are studied by defining a directed graph whose vertices are labeled with the base elements of the evolution algebra. A relation involving the ideals of an evolution algebra and the hereditary subsets of the vertices of the associated graph is introduced and some properties are established between them. This relation allows to determine the maximal ideals of an evolution algebra and the ideals with the absorption property based on the associated graph. We also consider a pair of order-preserving maps, one defined from the set of ideals of an evolution algebra to the inherited subsets of the associated graph, and one defined in the opposite direction. Under favorable conditions, this map forms a monotone Galois connection. Also, under certain restrictions, finitely generated evolution algebras of arbitrary dimension (as algebras) are characterized with respect to the associated graph. The simplicity of finitely generated perfect evolution algebras is studied in terms of the simplicity of the graph.

The study of evolution algebras will help to better understand the connection of this structure with other known algebraic structures. For this reason, comprehending the related works in the literature and analyzing the structural properties of the evolution

algebra according to the associated graph will make important contributions to further studies.

Keywords: Evolution algebra, Simple algebra, Directed graph, Maximal ideal, Absorption property, Hereditary subset, Galois connection.



1. GİRİŞ

Evrimsel dinamikler, biyolojik sistemlerde zaman içinde meydana gelen değişim süreçlerini ifade eder. Bu kavram, evrim teorisinde türlerin genetik varyasyonlarının nasıl ortaya çıktığını, nasıl yayıldığını ve nasıl değiştüğünü anlamak için kullanılır.

Evrim cebiri, genetik verilerin matematiksel ifadelerle temsil edilmesini ve evrimsel dinamiklerin matematiksel olarak analiz edilmesini sağlar. Bu alanda yapılan çalışmalar, evrimsel biyolojiye yeni bakış açıları sunabilir ve evrimin temel prensiplerinin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olabilir.

Evrim cebiri, bir popülasyondaki canlıların genetik bilgilerini bir vektör uzayının elemanları olarak temsil ederek genetik gelişimi modellemek için kullanılabilir. Vektör uzayındaki her bir eleman belirli bir genetik dizilime veya genotipe karşılık gelir. Genel olarak evrim cebiri, genetik gelişimi modellemek için bir matematiksel çerçeve sağlayarak araştırmacıların evrimsel süreçlerin dinamiklerini ve sonuçlarını sistematik ve nicel bir şekilde incelemelerine olanak tanır.

Bir evrim cebiri, $i \neq j$ olduğunda $e_i e_j = 0$ olacak şekilde bir $B = \{e_i \mid i \in I\}$ tabanı ile verilen bir A cebirinden ibarettir (böyle bir taban *doğal taban* olarak adlandırılır). Evrim cebirleri teorisini klasik cebir teorisinden farklı kılan şey, evrim cebirlerinde iki farklı türde üreticinin var olmasıdır.

Bir evrim cebiri bir yönlü graf ile ilişkilendirilebilir. Köşeleri evrim cebirinin taban elemanları ile etiketlenen bir yönlü graf tanımlanır. Bu graflar, graf teorideki kavramlar kullanılarak evrim cebirlerine ait cebirsel özelliklerin incelenmesini sağlarlar. Diğer taraftan, evrim cebir özellikleri graf teori diline çevrilebilir ve böylece grafların geometrik özellikleri, evrim cebirleriyle ilgili mevcut sonuçların ispatını basitleştirir ve bu cebirler için yeni sonuçların keşfedilmesine olanak sağlar.

Tez çalışmasında, esas olarak Y. Cabrera Casado, D. Martin Barquero, C. Martin Gonzalez ve A. Tocino'nun 2024 yılında yayınlamış oldukları "*Connecting ideals in evolution algebras with hereditary subsets of its associated graph*" adlı çalışma ele alınarak ilişkili grafın köşelerinin belirli bir alt kümesi, evrim cebirinin idealleriyle ilişkilendirilmiş, ilgili evrim cebirinin belirli özellikleri sağlayan idealler içerip içermediği ve bu ideallerin hangileri olduğunun graf üzerinde tespiti üzerinde durulmuştur. Bu

çalışmada, evrim cebirleri hakkında genel bir bilgi verilmiştir ve keyfi boyuttaki evrim cebirleri incelenerek evrim alt cebirleri, evrim idealler ve dejenere olmama kavramları araştırılmış ve basit evrim cebirleri karakterize edilmiştir.

İlk olarak, bu çalışma boyunca yararlanılacak olan yönlü graflar ve evrim cebirleri teorisi üzerine bazı temel kavramlar ve özellikler hatırlatılmıştır. Doğal tabanı $B = \{e_i \mid i \in I\}$ olan bir evrim \mathbb{K} -cebirinin bir R ideali için, ilişkili grafın köşe kümesinin bir H_R alt kümesi tanımlanmış, ayrıca köşelerin bir H kalıtsal alt kümesi sabitlenerek, bir temel ideal olduğu ortaya çıkan bir R_H alt uzayı tanımlanmıştır. Tez çalışması boyunca da sıklıkla kullanılacak olan bu kavramlar arasındaki bazı özellikler ve bağlantılar Bölüm 4.2.1 de incelenmiştir. Ayrıca, evrim cebirinin R_H idealleri aracılığıyla saturated kalıtsal H alt kümeleri karakterize edilmiştir. Daha sonra A^2 yi kapsayan R maksimal idealleri tanımlanmıştır. Ayrıca, $A^2 \not\subset R$ olacak şekildeki R maksimal idealleri, ilgili grafın köşelerinin maksimal kalıtsal alt kümeleri açısından ele alınmıştır.

Bölüm 4.2.2 de bir evrim cebirinin sonlu üretilmiş olması için gerekli koşullar belirlenmiştir. İlişkili grafın köşe kümesi sonlu bir kümenin kalıtsal kapanışı olmadığında, evrim cebirinin sonlu üretilmediği ispatlanmıştır. Ayrıca, graf sonlu sayıda çatallanmaya sahip olduğu durumda, sonlu üretilmiş evrim cebirleri karakterize edilmiştir.

Bölüm 4.2.3 de, absorpsiyon özelliğine sahip bir evrim cebirinin idealleri için bazı denklikler verilmiştir. Sonlu boyutlu mükemmel evrim cebirlerinde keyfi bir R idealinin absorpsiyon özelliğine sahip olduğu ve H_R kümesi tarafından üretildiği elde edilmiştir. Üstelik R nin bir temel ideal olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu bölümün ikinci kısmında, sonlu boyutlu bir mükemmel evrim cebirinde, tüm kalıtsal ve saturated alt kümelerin kümesi ve belirli dönüşümler yardımıyla absorpsiyon özelliğine sahip olan tüm ideallerin kümesinin monoton bir Galois bağlantısı oluşturduğu gösterilmiştir.

Bölüm 4.2.4 de basit yönlü graf kavramı tanıtılmış ve sonlu üretilmiş mükemmel evrim cebirlerinde cebirin basitliğinin ilişkili grafın basitliğine eşdeğer olduğu kanıtlanmıştır. Yönlü bir E grafi verildiğinde, bir $H \subset E^0$ kalıtsal alt kümesinin maksimal olması için gerek ve yeter şartın E/H bölüm grafının tek kalıtsal alt kümelerinin $(E/H)^0$ ve \emptyset olduğu gösterilmiştir. Ayrıca basit grafların ya bir izole köşeye sahip olduğu ya da kaynak veya alıcı içermeyen bir graf olduğu kanıtlanmıştır.

Tez çalışması boyunca verilen örnekler, çok sayıda evrim cebiri örneği sunmasının yanı sıra, evrim cebirinde belirli özelliklere sahip idealleri bulmak için graf kullanmanın avantajını göstermektedir.





2. KAYNAK ÖZETLERİ

Canlıların sahip olduğu özelliklerin bir kuşaktan sonraki kuşağa nasıl aktarıldığını araştıran biyolojik bilim dalına *genetik (kalıtım bilimi)* adı verilir. Kalıtım mekanizmalarını açıklayan matematiksel çalışmalar, 1856 yılında genetik yasalarını ifade etmek için matematiksel notasyon kullanmanın öncüsü olan Gregor Johann Mendel'in çalışmalarıyla başlamıştır. I.M.H. Etherington tarafından 1941 yılında, Mendel yasalarının birleşmeli olmayan cebirler açısından kesin bir matematiksel formülasyonu yapılmıştır (Etherington, 1941). O zamandan beri bir çok çalışma, birleşmeli olmayan cebirlerin Mendel tipi kalıtımı incelemek için uygun bir matematiksel çerçeve olduğuna işaret etmiştir (Bertrand, 1966; Reed, 1997; Tian, 2008). Bu nedenle, *genetik cebir* terimi, genetikte kalıtımı modellemek için kullanılan cebirleri belirtmek için türetilmiştir.

Evrim cebirleri teorisi, 2006 yılında J.P. Tian tarafından tanıtılmıştır (Jianjun-Paul ve Piotr, 2006). Tian, stokastik süreçler ve genetik üzerine çalışırken, popülasyon genetiğinde bakterilerin üremesinin, eşeysiz üremenin veya genel olarak Mendel dışı kalıtımın (yani kalıtları Mendel yasalarına göre değerlendirilemeyen kalıtım şekilleri) arkasında genel bir matematiksel yapı olduğunu bularak bu konudaki çalışmalarını aydınlatmak için *evrim cebirleri* olarak adlandırılan yeni bir genetik cebir türü tanımlamıştır. Bu çalışmada, evrim cebirlerinin, graf teorisi, grup teorisi, Markov süreçleri, dinamik sistemler, matematiksel fizik gibi matematiğin diğer alanları ile bağlantısı kurularak bazı ileri araştırma konularına işaret edilmiştir (Tian, 2008).

Son yıllarda, evrim cebirlerinin cebirsel özellikleri üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Örneğin, 2008 yılında J.P. Tian, 2013 yılında L.M. Camacho, J.R. Omirov, B.A. Turdibaev ve 2013 yılında M. Ladra ve U. A. Rozikov, evrim cebirlerinde türev kavramını ele almışlar ve lineerlik, Leibniz kuralı ve iç türevler gibi özellikleri incelemiştir (Tian, 2008; Camacho vd., 2013; Ladra ve Rozikov, 2013). Bir evrim cebirinin türevlerinin uzayı literatürde sıkça çalışılan bir konudur, ancak bu uzayın tam bir karakterizasyonunu elde etmek hala açık bir problemdir.

Graf C^* -cebirleri, Leavitt yol cebirleri, yüksek ranklı graf cebirleri, vb. üzerine literatürde, cebirin belirli yapısal özelliklerinin (basitlik, asallık, primitiflik, vb.) ilişkili grafın özellikleri açısından nasıl karakterize edildiğini bulmak mümkündür (Abrams

ve Pino, 2005; Pino vd., 2006; Pino vd., 2009). Aslında bu yaklaşım, evrim cebirleriyle ilgili çok sayıda yayında kullanılmaktadır. Grafların özellikleri ile cebirlerin özellikleri arasındaki bağlantılar ilk kez 2015 yılında A. Elduque ve A. Labra tarafından incelenmiştir (Elduque ve Labra, 2015). Bu çalışmada, bir evrim cebirinin nilpotentliği, ilişkili grafta yönlendirilmiş döngülerin olup olmadığına bağlı olarak incelenmiştir. Ayrıca bir evrim cebirinin ayrıştırılamazlığını ilişkili grafin bağlantılılığı ile ilişkilendirilmiştir. 2021 de I.Qaralleh, F. Mukhamedov tarafından Volterra evrim cebirleri tanıtılmış, Volterra evrim cebirlerinde tanımlı izomorfizmalar ile yönlü grafların izomorfizmaları arasında bir bağlantı kurulmuştur Qaralleh ve Mukhamedov 2021. Bazı evrim cebirlerinin türevlerinin uzayı da ilişkili grafin özellikleri aracılığıyla analiz edilmiştir (Elduque ve Labra, 2021; Cadavid vd., 2020; Cabrera Casado vd., 2021; Qaralleh ve Mukhamedov, 2021). Son zamanlarda, Hilbert evrim cebirleri arasında izomorfizmalar tanımlayabilmek için ilişkili graf üzerinde bazı koşullar oluşturulmuştur (Vidal vd., 2022).

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, Cebir teorisinde iyi bilinen bazı temel kavramlar ile diğer bölümlerde gerekli olacak bazı özellikler alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir.

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. (Hungerford, 2012) R boş olmayan bir küme, $+$ ve \cdot R üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun. Eğer

- (i) $(R, +)$ bir değişmeli grup;
- (ii) her $a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- (iii) her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

koşulları sağlanıyorsa R kümesine bu ikili işlemlere göre bir *halka* denir ve $(R, +, \cdot)$ ile gösterilir. Bunlara ek olarak eğer R halkası,

- (iv) her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ koşulunu sağlıyorsa *değişmeli halka*;
- (v) her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ elemanı varsa *birimli halka* adını alır.

R halkasının $+$ işlemine göre birimine *halkanın sıfırı* denir ve bu eleman 0_R ile gösterilir.

Tanım 3.1.2. (Hungerford, 2012) Birimli ve değişmeli bir $(R, +, \cdot)$ halkasının sıfırdan farklı her elemanının \cdot işlemine göre tersi varsa o zaman bu halkaya *cisim* denir.

Tanım 3.1.3. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. Eğer S , R halkası üzerindeki işlemlere göre bir halka oluyorsa S ye R nin bir *alt halkası* denir.

Tanım 3.1.4. R bir halka ve $\emptyset \neq I$, R nin bir alt halkası olsun. Eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx, xr \in I$ ise I alt halkasına R halkasının *ideali* denir ve $I \triangleright R$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. (Hungerford, 2012) \mathbb{F} (\mathbb{R} veya \mathbb{C}) bir cisim, $(V, +)$ bir değişmeli grup ve $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$ bir dış işlem olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $u, v \in V$ için

- (i) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- (ii) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
- (iii) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
- (iv) $1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$

şartları sağlanıyorsa V ye \mathbb{F} cismi üzerinde bir *vektör uzayı* ya da kısaca \mathbb{F} -vektör uzayı denir. Eğer $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa, V ye bir *reel vektör uzayı*; eğer $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa, V ye bir *kompleks vektör uzayı* denir. Burada V nin elemanlarına *vektör*, \mathbb{F} cisminin elemanlarına da *skaler* adı verilir.

Örnek 3.1.6. \mathbb{R} reel sayılar cismi bir \mathbb{R} -vektör uzayıdır. Genel olarak, her \mathbb{F} cismi bir \mathbb{F} -vektör uzayıdır. (Dış işlem olarak, \mathbb{F} cisminin ikinci işlemi alınır.)

Örnek 3.1.7. $(\mathbb{C}, +)$ grubu bir \mathbb{R} -vektör uzayı; $(\mathbb{R}, +)$ grubu bir \mathbb{Q} -vektör uzayıdır. Genel olarak, \mathbb{F} bir \mathbb{E} cisminin alt cismi ise dış işlem olarak \mathbb{E} cisminin ikinci işlemi alınırsa \mathbb{E} bir \mathbb{F} -vektör uzayı olur.

Örnek 3.1.8. \mathbb{F} cismi içindeki tüm sınırlı dizilerin $l^\infty = \{x = (x_n) \mid (x_n) \text{ sınırlı}\}$ kümesi $x = (x_n), y = (y_n)$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ olmak üzere

$$x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \text{ ve } \alpha \cdot x = (\alpha x_n)$$

işlemleri ile bir \mathbb{F} -vektör uzayıdır.

Tanım 3.1.9. V bir \mathbb{F} -vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. Eğer W , V vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa W kümesine V vektör uzayının bir *alt uzayı* denir. Bu tanım, her $w, u \in W$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için $w + u \in W$ ve $\alpha \cdot w \in W$ olma koşulu ile denktir.

Tanım 3.1.10. $n \geq 1$ tamsayısı için S_1, S_2, \dots, S_n , V \mathbb{F} -vektör uzayının alt kümeleri olsun.

$$W = \{s_1 + s_2 + \dots + s_n \mid 1 \leq i \leq n \text{ için } s_i \in S_i\}$$

kümesine S_1, S_2, \dots, S_n *alt kümelerinin toplamı* denir.

Önerme 3.1.11. (Hungerford, 2012) V bir \mathbb{F} -vektör uzayı olsun. W_1 ve W_2 , V vektör uzayının iki alt uzayı ise $W_1 + W_2$ ve $W_1 \cap W_2$ de V vektör uzayının birer alt uzayıdır.

Tanım 3.1.12. V bir \mathbb{F} -vektör uzayı ve U_1, U_2 , V nin iki alt uzayı olsun. Eğer $V = U_1 + U_2$ ve $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ ise V vektör uzayına, U_1 ile U_2 alt uzaylarının bir *direkt toplamıdır* denir ve $V = U_1 \oplus U_2$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.13. (Hungerford, 2012) V bir \mathbb{F} -vektör uzayı, $n \geq 1$ için $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ sonlu bir küme ve $\emptyset \neq B \subset V$ herhangi bir küme olsun.

(i) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ için A kümesindeki vektörlerin bir *lineer bileşimi* (*lineer kombinasyonu*)

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$$

formunda bir vektördür.

(ii) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ olmak üzere,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{F}}$$

ise A ya *lineer bağımsız küme* denir. A kümesi lineer bağımsız değilse A ya *lineer bağımlı küme* denir. A kümesinin lineer bağımlı olması halinde, v_1, v_2, \dots, v_n vektörlerinin en az biri diğerlerinin bir lineer birleşimi olarak ifade edilir. Örneğin, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$ eşitliği, $\alpha_n \neq 0$ olmak üzere gerçekleşiyorsa A kümesi lineer bağımlı olup, v_n vektörü bu eşitlikten bulunabilir:

$$v_n = \sum_{j=1}^{n-1} b_j v_j \ni b_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_n}, j = 1, 2, \dots, n-1$$

dir. Ayrıca $0_V \in A$ ise A lineer bağımlı alt kümedir.

(iii) B kümesinden alınan her sonlu sayıdaki vektörün tüm lineer bileşimlerinin

$$\text{Span}(B) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}, u_1, u_2, \dots, u_k \in B \right\}$$

kümesi, V vektör uzayının B kümesini kapsayan bir alt uzayıdır. $\text{Span}(B)$ alt uzayına, B kümesinin *lineer gereni* (B ile üretilen alt uzay) denir. B kümesinin elemanlarına $\text{Span}(B)$ alt uzayının *üreteçleri* adı verilir. Eğer B kümesi sonlu ise $\text{Span}(B)$ alt uzayına *sonlu üreteçli*; V \mathbb{F} -vektör uzayına ise *sonlu üretilmiştir* denir. \emptyset ile üretilen alt uzay $\{0_V\}$ olarak kabul edilir.

(iv) Eğer B lineer bağımsız bir küme ve $\text{Span}(B) = V$ ise o zaman B ye V vektör uzayının bir *tabanı*, taban eleman sayısına da V nin *boyutu* denir ve $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ ile gösterilir. $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ sonlu ise bu durumda V ye *sonlu boyutludur* denir. Aksi taktirde V ye *sonsuz boyutludur* denir.

Önerme 3.1.14. (*Hungerford, 2012*) $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere m tane vektör tarafından üretilen her V \mathbb{F} -vektör uzayının bir tabanı vardır ve V nin herhangi bir tabanında yer alan vektör sayısı en fazla m tanedir. V nin herhangi iki tabanı aynı sayıda vektör içerir.

Örnek 3.1.15. \mathbb{R}^n \mathbb{R} -vektör uzayında alınan $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ altkümesindeki vektörler $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ olarak tanımlandığında M kümesi, \mathbb{R}^n için bir tabandır. Bu tabana \mathbb{R}^n nin *standart tabanı* da denir.

Tanım 3.1.16. (Heil, 2017) V , sonlu boyutlu bir \mathbb{F} -vektör uzayı olsun. Eğer W , V nin bir alt uzayı ise, W alt uzayının V içindeki *co-boyutu*, boyutlar arasındaki farktır. Yani,

$$\text{codim}_{\mathbb{F}}(W) = \text{dim}_{\mathbb{F}}(V) - \text{dim}_{\mathbb{F}}(W)$$

dir.

Teorem 3.1.17. (Hungerford, 2012) V bir \mathbb{F} -vektör uzayı ve $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ olsun. B kümesinin V \mathbb{F} -vektör uzayının tabanı olması için gerek ve yeter koşul her $v \in V$ vektörünün $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ olmak üzere

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

formunda tek türlü yazılabilmektedir. Böylece v vektörünü c_1, c_2, \dots, c_n skalerleri belirler.

Tanım 3.1.18. X ve Y birer \mathbb{F} -vektör uzayı ve $T : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x, x_1, x_2 \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$$(i) \quad T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$$

$$(ii) \quad T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$$

şartını sağlıyorsa veya buna denk olarak her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(y)$$

şartını sağlıyorsa T fonksiyonuna bir *lineer dönüşüm* denir. X den Y ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi $\mathcal{L}(X, Y)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}(X, Y)$, fonksiyonlarda bilinen işlemler ile bir \mathbb{F} -vektör uzayıdır. Eğer $T : X \rightarrow X$ bir lineer dönüşüm ise T , X üzerinde bir lineer dönüşümdür denir ve $\mathcal{L}(X, X)$ uzayı, kısaca $\mathcal{L}(X)$ şeklinde yazılır.

Önerme 3.1.19. X ve Y birer \mathbb{F} -vektör uzayı ve $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun. O halde $T(0_X) = 0_Y$ dir.

Tanım 3.1.20. X ve Y birer \mathbb{F} -vektör uzayı ve $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun.

(i) $\text{Im}T = T(X)$ alt uzayına T nin *görüntüsü*;

(ii) $\text{Ker}T = \{x \in X \mid T(x) = 0_Y\} = T^{-1}(\{0_Y\})$ alt uzayına T nin çekirdeği (T nin sıfır uzayı) adı verilir.

Tanım 3.1.21. (Heil, 2017) X bir \mathbb{F} -vektör uzayı ve M, X in bir alt uzayı olsun. X içinde alınan x ve y elemanları için

$$“x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M”$$

ile tanımlanan \sim bağıntısı, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bir $x \in X$ elemanının bu bağıntıya göre denklik sınıfı,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{y \in X \mid y \sim x\} \\ &= \{y \in X \mid y - x \in M\} \\ &= \{y \in X \mid y - x = m, m \in M\} \\ &= \{y \in X \mid y = x + m, m \in M\} \\ &= \{x + m \mid m \in M\} = x + M \end{aligned}$$

dir. Bu kümeye *koset* adı verilir. \sim bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının (kosetlerinin) kümesi, $X/M = \{x + M \mid x \in X\}$ ile gösterilir. X/M kümesinde, kosetlerin toplamı ve skalerle çarpımı, her $\alpha \in \mathbb{F}$, $x, y \in X$ için

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M \quad \text{ve} \quad \alpha \cdot (x + M) = \alpha x + M$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu işlemlerin her biri iyi tanımlıdır:

Her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ için $x_1 + M = x_2 + M$ ve $y_1 + M = y_2 + M$ olsun. Bu durumda $x_1 - x_2 = k \in M$ ve $y_1 - y_2 = l \in M$ dir. Eğer $h \in (x_1 + y_1) + M$ olursa bir $m \in M$ için $h = x_1 + y_1 + m$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$h = (x_2 + k) + (y_2 + l) + m = (x_2 + y_2) + (k + l + m) \in (x_2 + y_2) + M$$

olur. Böylece $(x_1 + y_1) + M \subseteq (x_2 + y_2) + M$ olduğu görülür. Benzer şekilde $(x_2 + y_2) + M \subseteq (x_1 + y_1) + M$ olacağından toplam iyi tanımlıdır.

Her $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 + M = x_2 + M$ olsun. Bu durumda $x_1 - x_2 = k \in M$ dir. Eğer $h \in \alpha x_1 + M$ olursa bir $m \in M$ için $h = \alpha x_1 + m$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$h = \alpha(x_2 + k) + m = \alpha x_2 + \alpha k + m \in \alpha x_2 + M$$

olur. Böylece $\alpha x_1 + M \subseteq \alpha x_2 + M$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\alpha x_2 + M \subseteq \alpha x_1 + M$ olacağından skalerle çarpım iyi tanımlıdır.

Önerme 3.1.22. (Heil, 2017) X bir \mathbb{F} -vektör uzayı ve M , X in bir alt uzayı olmak üzere; yukarıda verilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre X/M bir \mathbb{F} -vektör uzayıdır. Bu uzaya, M alt uzayına göre X in bölüm uzayı (quotient space) adı verilir.

Örnek 3.1.23. $X = \mathbb{R}^3$ \mathbb{R} -vektör uzayının $M_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ alt uzayına göre bölüm uzayı

$$X/M_1 = \left\{ \overline{(0, 0, z)} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

olur.

Teorem 3.1.24. (Heil, 2017) V sonlu boyutlu bir \mathbb{F} -vektör uzayı, $W \subset V$ alt uzay ve $\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ kümeleri de sırasıyla V ve W nun tabanları olsun. Bu durumda $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ kümesi, V/W bölüm uzayının bir tabanıdır ve $\dim_{\mathbb{F}}(V/W) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(W)$ olur.

İspat: $x \in V/W$ ve bir $v \in V$ için $x = \overline{v}$ olsun. O halde $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ için

$$v = \sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

yazılabilir. Dolayısıyla $i \in \{1, \dots, m\}$ için $\overline{w_i} = \overline{0}$ olduğundan

$$x = \overline{v} = \sum_{i=1}^m a_i \overline{w_i} + \sum_{j=1}^n b_j \overline{v_j} = \sum_{j=1}^n b_j \overline{v_j}$$

olur. Yani $\text{Span}(\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}) = V/W$ dir.

Her $j \in \{1, \dots, n\}$ için $b_j \in \mathbb{F}$ ve $\sum_{j=1}^n b_j \overline{v_j} = \overline{0}$ sağlansın. Buna göre, $\sum_{j=1}^n b_j v_j \in W$ olur. Fakat W , $\{w_1, \dots, w_m\}$ kümesi tarafından üretildiğinden $\sum_{i=1}^m a_i w_i = \sum_{j=1}^n b_j v_j$ olacak şekilde $a_i \in \mathbb{F}$ elemanları vardır ve $\sum_{i=1}^m (-a_i) w_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j = 0$ yazılabilir. Dolayısıyla $\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n\}$ kümesinin lineer bağımsızlığı gereği her $j \in \{1, \dots, n\}$ ve her $i \in \{1, \dots, m\}$ için $a_i = b_j = 0$ olmalıdır. Bu ise $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ kümesinin lineer bağımsızlığını gösterir.

Sonuç olarak, $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ kümesi, V/W bölüm uzayı için bir tabandır. O halde $\dim_{\mathbb{F}}(V/W) = \dim_{\mathbb{F}}(V) - \dim_{\mathbb{F}}(W)$ eşitliği açık olarak görülür. \square

Önerme 3.1.25. (Heil, 2017) X bir \mathbb{F} -vektör uzayı ve M, X in bir alt uzayı olmak üzere $\pi : X \rightarrow X/M, \pi(x) = \bar{x}$ ile tanımlı dönüşüm lineer ve örtendir. Ayrıca $\text{Ker}\pi = M$ dir.

Önerme 3.1.26. (Heil, 2017) X ve U, \mathbb{F} cismi üzerinde birer vektör uzayı, $M \subseteq \text{Ker}T$ olacak biçimde $M \subseteq X$ bir alt uzay ve $T : X \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $T = S \circ \pi$ sağlanacak şekilde bir tek $S : X/M \rightarrow U$ lineer dönüşümü vardır.

İspat: $S : X/M \rightarrow U, S(\bar{v}) = T(v)$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda S iyi tanımlıdır. Çünkü $\bar{v} \in X/M$ için $\bar{v} = \bar{v}_1 = \bar{v}_2$ olacak biçimde $v_1, v_2 \in X$ varsa $v_1 = v_2 + w$ olacak şekilde bir $w \in M$ vardır. Böylece,

$$T(v_1) = T(v_2 + w) = T(v_2) + T(w) = T(v_2)$$

olur. Ayrıca T dönüşümü lineer olduğundan S nin lineer olması ve tanımı gereği $T = S \circ \pi$ olduğu açıktır. Kabul edelim ki $L \circ \pi = T = S \circ \pi$ olacak şekilde bir $L : X/M \rightarrow U$ dönüşümü var olsun. O halde her $v \in X$ için $L(\bar{v}) = S(\bar{v})$ olur ki π nin örten olması $L = S$ eşitliğini gerektirir. Yani L dönüşümü tektir. \square

Örneğin, \mathbb{R} üzerinde her mertebeden diferensiyellenebilen fonksiyonların $X = C^\infty(\mathbb{R})$ uzayı, sabit fonksiyonların $M \subseteq X$ uzayı ve $T : X \rightarrow X, T(f) = f'$ diferensiyel operatörü ele alınsın. O halde $M \subseteq \text{Ker}T$ olduğundan $T = S \circ \pi$ olacak şekilde bir tek $S : X/M \rightarrow X$ dönüşümü vardır.

Sonuç 3.1.27. X ve U, F cismi üzerinde vektör uzayları ve $T : X \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $X/\text{Ker}T \cong \text{Im}T$ dir.

Teorem 3.1.28. (Hungerford, 2012) X bir \mathbb{F} -vektör uzayı ve M ile N, X in birer alt uzayı olsun. Buna göre

$$(M + N)/N \cong M/(M \cap N)$$

dir.

Tanım 3.1.29. (Hungerford, 2012) X boş olmayan bir küme ve \preceq, X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer

- (i) her $x \in X$ için $x \preceq x$;
- (ii) her $x, y \in X$ için $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ ise $x = y$;
- (iii) her $x, y, z \in X$ için $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x \preceq z$

şartları sağlanıyorsa \preceq ye X üzerinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir. (X, \preceq) ikilisine *kısmi sıralı yapı* ya da kısaca *poset* denir.

Bir (X, \preceq) posetinin boş olmayan bir C alt kümesi verilsin. Her $x, y \in C$ için $x \preceq y$ veya $y \preceq x$ oluyorsa C ye bir *zincir* denir.

Bir (X, \preceq) poseti ve bir $A \subseteq X$ alt kümesi verildiğinde her $a \in A$ için $a \preceq x$ özelliğini sağlayan (X, \preceq) içindeki bir x elemanına, A için bir *üst sınır* adı verilir.

$m \in X$ olsun. Eğer $m \preceq x$ olacak şekilde bir $m \neq x \in X$ elemanı yoksa m ye X in bir *maksimal elemanı* denir.

Önerme 3.1.30. (Zorn Lemma) (Hungerford, 2012) (X, \preceq) bir poset olsun. Eğer X deki her C zinciri bir üst sınıra sahip ise X in bir maksimal elemanı vardır.

Tanım 3.1.31. (Hungerford, 2012) (A, \preceq) ve (B, \preceq) kısmi sıralı iki yapı, $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $u, v \in A$ için $u \preceq v$ iken $f(u) \preceq f(v)$ koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna *sıra koruyan fonksiyon* denir.

Tanım 3.1.32. (Tian, 2008) \mathbb{K} bir cisim ve $(A, +)$ bir \mathbb{K} - vektör uzayı olsun. Eğer A üzerinde

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

ile tanımlanan çarpma işlemi,

- (i) her $a, b, c \in A$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$;
- (ii) her $a, b \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için $(\alpha \cdot a)b = \alpha \cdot (ab) = a(\alpha \cdot b)$

şartlarını sağlıyorsa A vektör uzayına bir \mathbb{K} -cebir veya A, \mathbb{K} cismi üzerinde bir cebirdir denir.

Örnek 3.1.33. \mathbb{C} kompleks vektör uzayı, \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde bir cebirdir. Ayrıca \mathbb{F} cisminin bir \mathbb{K} alt cismi için \mathbb{F} cismi, \mathbb{K} üzerinde bir cebirdir.

Tanım 3.1.34. (Tian, 2008) A bir \mathbb{K} -cebir olsun. Eğer her $a, b \in A$ için $ab = ba$ ise A ya *değişmeli cebir* denir.

Tanım 3.1.35. (Tian, 2008) A bir \mathbb{K} -cebir olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için $a(bc) = (ab)c$ ise A ya *birleşmeli cebir* denir.

Aksi belirtilmedikçe, bir A \mathbb{K} -cebiri, birleşmeli olmayan bir cebir olarak alınacaktır. *Birleşmeli olmayan cebirler*, zorunlu olarak birleşmeli olmayan cebirler anlamında kullanılmaktadır.

Tanım 3.1.36. (Tian, 2008) A bir \mathbb{K} -cebir olsun. Eğer her $a \in A$ için $ae = ea = a$ koşulunu sağlayan bir $e \in A$ varsa A ya *birimli cebir* adı verilir.

Örnek 3.1.37. $GL(n, \mathbb{K})$, girdileri \mathbb{K} cisminden alınan $n \times n$ tipindeki bütün terslenebilir matrislerin kümesi olsun. Bu küme, \mathbb{K} üzerinde bir cebirdir ve çarpımı da birleşmeli olduğundan birleşmeli bir cebirdir. Ayrıca $n \times n$ tipindeki I_n birim matrisi de $GL(n, \mathbb{K})$ cebirine ait olduğundan $GL(n, \mathbb{K})$, aynı zamanda bir birimli cebirdir.

Birleşmeli olmayan cebirlere bir örnek olarak Lie cebirleri verilebilir:

Örnek 3.1.38. \mathbb{F} bir cisim ve L bir \mathbb{F} -vektör uzayı olsun. $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ fonksiyonu her $x, y, z \in L$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

- (1) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ ve $[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]$
- (2) $[x, x] = 0$
- (3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

koşullarını sağlıyorsa $[\cdot, \cdot]$ operatörüne *Lie operatörü*, üzerine tanımlı olduğu L vektör uzayına da *Lie cebiri* denir. (2) özelliği kullanılarak her $x, y \in L$ için

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

olup

$$[x, y] = -[y, x]$$

bulunur. $x, y, z \in L$ için (3) özelliğinde bu eşitlik kullanılırsa,

$$[x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] = [[z, x], y] + [[x, y], z]$$

olduğu, yani $[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$ olduğu görülür. Dolayısıyla L Lie cebiri birleşmeli değildir.

Tanım 3.1.39. A ve B , \mathbb{K} cismi üzerinde iki cebir olsun. Eğer her $a, b \in A$ için, $\psi : A \rightarrow B$ lineer dönüşümü,

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$$

koşulunu gerçekleştiriyorsa ψ ye bir *cebiri homomorfizması* adı verilir.

Eğer ψ cebiri homomorfizması bire-bir ve örten ise o zaman bu homomorfizma bir *cebiri izomorfizması* adını alır.

Tanım 3.1.40. A bir \mathbb{K} -cebiri ve W , A nın boş olmayan bir alt uzayı olsun. Eğer her $a, b \in W$ için $ab \in W$ oluyorsa W alt uzayına A nın bir *alt cebiri* denir.

Örnek 3.1.41. \mathbb{R} reel sayılar cebiri, \mathbb{C} kompleks sayılar cebirinin bir alt cebiridir.

Tanım 3.1.42. A bir \mathbb{K} -cebiri ve I , A nın boş olmayan bir alt uzayı olsun. Her $a \in A$ ve her $x \in I$ için $xa \in I$ ve $ax \in I$ oluyorsa I alt uzayına A nın bir (*cebirsal*) *ideali* denir.

Bu tanımlamalara göre açıktır ki her ideal bir alt cebiri olur. Fakat bunun karşıtı doğru olmayabilir.

Tanım 3.1.43. A bir \mathbb{K} -cebiri olsun. Eğer $A^2 \neq 0$ ve A nın sıfır ve kendisinden başka ideali yok ise o zaman A ya bir *basit cebiri* denir.

Tanım 3.1.44. A bir \mathbb{K} -cebiri ve I , A nın bir ideali olsun. Bu durumda her $a, b \in A$ için

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

çarpma işlemi ile birlikte A/I bir cebirdir. Bu cebire, I idealine göre A nın *bölüm cebiri* (*quotient algebra*) adı verilir.

Tanım 3.1.45. A , n -boyutlu bir \mathbb{F} -cebiri ve $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, A nın bir tabanı olsun. Taban elemanları arasındaki çarpım tablosu bilindiğinde A cebirinin herhangi x ve y elemanının çarpımı, B ile *bağlantılı yapı matrisi* $M_k(B)$ ile belirlenebilir:

$x, y \in A$ olduğundan,

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n \text{ ve } y = d_1e_1 + d_2e_2 + \dots + d_ne_n$$

olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{F}$ vardır. x ile y elemanlarının çarpımı, dağılıma kurallarına bağlı olarak, şu şekilde elde edilir:

$$xy = c_1d_1e_1e_1 + c_1d_2e_1e_2 + \dots + c_id_je_ie_j + \dots + c_nd_ne_nen.$$

Sabitlenmiş i ve j indisleri alalım. $e_i e_j$ vektörü için $e_i e_j = \gamma_{ij} e_1 + \gamma_{2ij} e_2 + \dots + \gamma_{nij} e_n$ olacak şekilde tek türlü belirlenen $\gamma_{ij}, \gamma_{2ij}, \dots, \gamma_{nij} \in \mathbb{F}$ skalerleri vardır ve B tabanına

göre $e_i e_j$ vektörünün koordinat vektörü $\begin{bmatrix} \gamma_{ij} \\ \gamma_{2ij} \\ \vdots \\ \gamma_{nij} \end{bmatrix}$ olur;

$$\text{Buna göre, } xy = \left(\sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \left(\sum_{j=1}^n d_j e_j \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n c_i d_j \gamma_{kij} \right) e_k \text{ dır.}$$

Boyutu n olan her cebir, B tabanı ile bağlantılı yapı sabitleri olarak bilinen n^3 adet γ_{kij} sayısı tarafından belirlenir. $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$M_k(B) := \begin{bmatrix} \gamma_{k11} & \cdots & \gamma_{k1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{kn1} & \cdots & \gamma_{kn n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisini tanımlayarak n matris içindeki yapı sabitlerini düzenlersek, $\alpha^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, $\beta^T =$

$\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ olmak üzere A daki çarpma şu şekilde verilir:

$$xy = \left(\sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \left(\sum_{j=1}^n d_j e_j \right) = \sum_{k=1}^n (\alpha M_k(B) \beta^T) e_k.$$

Örnek 3.1.46. $n = 2$, $n^3 = 8$ olsun.

$$e_1^2 = e_1 e_1 = \gamma_{111} e_1 + \gamma_{211} e_2$$

$$e_1 e_2 = \gamma_{112} e_1 + \gamma_{212} e_2$$

$$e_2 e_1 = \gamma_{121} e_1 + \gamma_{221} e_2$$

$$e_2^2 = e_2 e_2 = \gamma_{122} e_1 + \gamma_{222} e_2$$

Eğer $x = c_1e_1 + c_2e_2$ ve $y = d_1e_1 + d_2e_2$ ise, $B = \{e_1, e_2\}$ tabanına göre xy vektörünün $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ koordinat vektörü,

$$z_1 = c_1d_1\gamma_{111} + c_1d_2\gamma_{112} + c_2d_1\gamma_{121} + c_2d_2\gamma_{122}$$

$$z_2 = c_1d_1\gamma_{211} + c_1d_2\gamma_{212} + c_2d_1\gamma_{221} + c_2d_2\gamma_{222}$$

eşitlikleri ile verilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} xy &= z_1e_1 + z_2e_2 \\ &= \sum_{k=1}^2 (c_1d_1\gamma_{k11} + c_1d_2\gamma_{k12} + c_2d_1\gamma_{k21} + c_2d_2\gamma_{k22}) e_k \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i,j=1}^2 c_id_j\gamma_{kij} \right) e_k \end{aligned}$$

olur. Başka bir ifadeyle, $k = 1, 2$ için $M_k(B) := \begin{bmatrix} \gamma_{k11} & \gamma_{k12} \\ \gamma_{k21} & \gamma_{k22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ tanımlansın. $\alpha^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

ve $\beta^T = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere xy vektörü şu şekilde verilir:

$$xy = \left(\sum_{i=1}^2 c_i e_i \right) \left(\sum_{j=1}^2 d_j e_j \right) = \sum_{k=1}^2 (\alpha M_k(B) \beta^T) e_k.$$

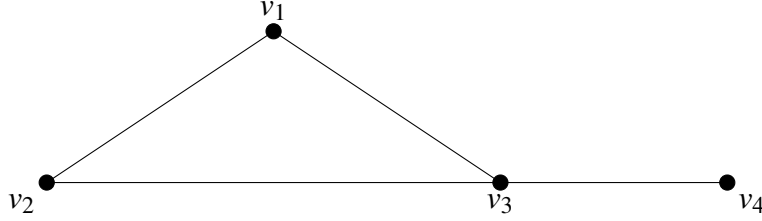
3.2. Grafın Tanımı ve Yapısı

Bir G grafi, elemanlarına *köşe* adı verilen boş olmayan sonlu bir G^0 kümesi ve *kenar* adı verilen G^0 kümesinin sıralı olmayan ikililerinin bir ailesi olan G^1 kümesinden oluşur ve $G = (G^0, G^1)$ ile gösterilir. G^0 ve G^1 kümelerine, sırasıyla, G grafının *köşe* ve *kenar kümeleri* adı verilir.

Bir $\{v, w\}$ kenarı için v ve w köşelerini *birleştirir* denir ve kısaca vw ile gösterilir.

G grafında bir köşeyi yine kendisiyle birleştiren kenara *ilmek* denir. Aynı köşe çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar* denir. Bir graf çoklu kenar ve ilmek

içermiyorsa böyle graflara *basit graf*, aksi durumda ise *genel graf* (ya da basitçe *graf*) denir (Wilson, 1979).

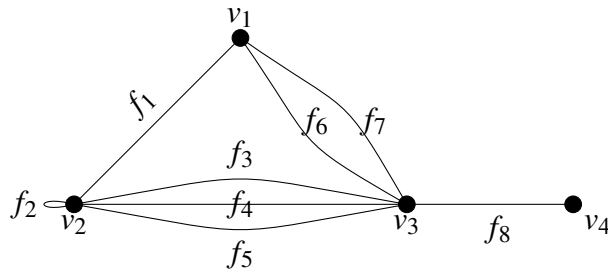


Şekil 3.2.1. Basit graf örneği

Örneğin, Şekil 3.2.1 de, köşe kümesi $G^0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve elemanları v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3 ve v_3v_4 olan G^1 kenar kümesinden oluşan basit bir G grafi temsil edilmektedir.

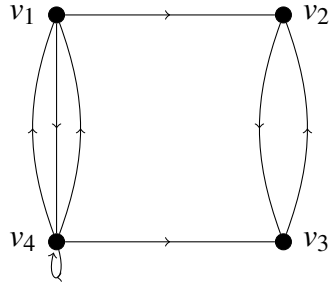
Köşe kümesi ve kenar kümesi sonlu olan bir graf, *sonlu graf* olarak adlandırılır.

Örnek 3.2.1. Köşe kümesi $G^0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve kenar kümesi $G^1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ olarak verilen sonlu bir $G = (G^0, G^1)$ grafının şekli aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.2.2. Genel graf örneği

Kenarları doğrultuya sahip veya kenarları sıralanmış olan graflara *yönlendirilmiş* ya da *yönlü graf* denir. Burada herhangi iki köşe v_i, v_j arasındaki kenar olan $f = v_iv_j$ için $v_iv_j \neq v_jv_i$ dir.



Şekil 3.2.3. Yönlü graf örneği

3.2.1. Komşuluk ve Dereceler

Bir G grafının köşe kümesi olan G^0 dan alınan iki köşe v_i ve v_j olsun. Alınan bu köşeler arasında bir kenar varsa bu köşelere *komşudur* denir. Ayrıca, birbirinden farklı f_i ve f_j kenarları ortak bir köşe noktasına sahip ise bu kenarlara komşudur denir (Wilson, 1979).

Bir G grafında herhangi bir v köşesinin *derecesi*, v köşesi ile komşu olan köşelerin sayısıdır ve $der(v)$ ile gösterilir. Her bir köşe, komşu olduğu köşeye bir 1 derece kazandırır. Bir ilmekte ise köşe kendisine komşu olduğundan ilmeğin dereceye olan katkısı 2 olur. Derecesi 0 olan bir köşeye *izole köşe* ve derecesi 1 olan köşeye ise *uç köşe* denir.

Şekil 3.2.2 deki graf ele alınırca, grafın bir adet uç köşe, bir adet derecesi 3 olan köşe ve iki adet derecesi 6 olan köşeye sahip olduğu görülür.

Teorem 3.2.2. (Wilson, 1979) *Herhangi bir grafta köşe derecelerinin tamamının toplamı çifttir.*

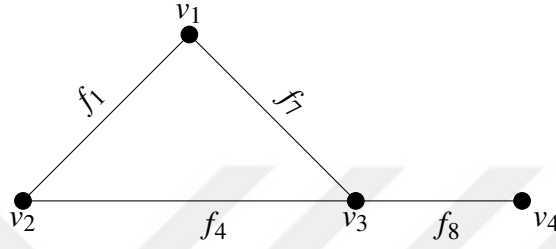
İspat: Her kenar, dereceler toplamına tam olarak 2 defa katkıda bulunduğundan tüm köşe derecelerinin toplamı, kenarların sayısının iki katına eşittir. Bu nedenle dereceler toplamı çift bir sayıdır. \square

Sonuç 3.2.3. *Herhangi bir grafta tek dereceye sahip köşelerin sayısı çifttir.*

İspat: Eğer tek dereceye sahip köşelerin sayısı tek olsaydı, o zaman köşe derecelerinin toplamı da tek olurdu. Bu ise Teorem 3.2.2 ile çelişmektedir. Dolayısıyla tek dereceye sahip köşelerin sayısı çifttir. \square

3.2.2. Alt Graflar

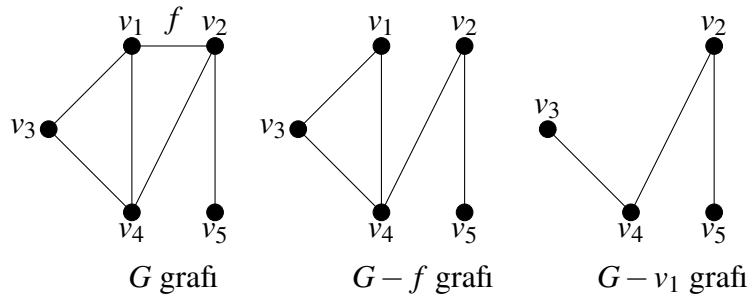
$G = (G^0, G^1)$ ve $H = (H^0, H^1)$ birer graf olsun. Eğer $H^0 \subseteq G^0$ ve $H^1 \subseteq G^1$ şartı sağlanıyorsa, H grafi G grafının bir *alt grafidir* denir. Yani H grafi, köşeleri G de bulunan ve kenarları da G deki aynı köşe çiftleri arasındaki ilişkiyi koruyan graftır (Wilson, 1979). Şekil 3.2.2 deki grafın bir alt grafi aşağıdaki gibi gösterilebilir:



Şekil 3.2.4. Alt graf örneği

Bir grafa ait köşe veya kenarları silerek o grafın alt grafları elde edilebilir. Eğer f kenarı, G grafına ait ise G grafından f kenarının silinmesi ile elde edilen graf, $G - f$ ile gösterilir. Daha genel olarak, G grafının kenarlarının herhangi bir alt kümesi F olmak üzere G grafından F içindeki kenarların silinmesi ile elde edilen graf, $G - F$ ile gösterilir.

Benzer olarak, eğer v , G nin bir köşesi ise G den v köşesinin ve v ile bitişik olan bütün kenarların silinmesi ile elde edilen graf, $G - v$ ile gösterilir. Daha genel olarak, G içindeki köşelerin herhangi bir kümesi S olmak üzere G grafından S içindeki köşelerin ve bu köşelerle bitişik olan bütün kenarların silinmesi ile elde edilen graf, $G - S$ ile gösterilir. Şekil 3.2.5 de bir örnek gösterilmiştir.



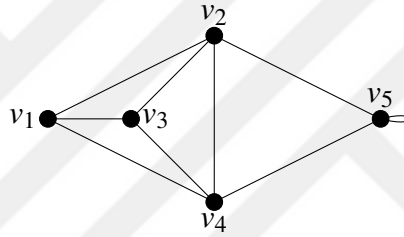
Şekil 3.2.5. G grafından f kenarının ve v_1 köşesinin çıkarılması

3.2.3. Yürüyüş ve Yol Kavramı

Köşe kümesi $G^0 = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ olan bir G grafi içindeki bir *yürüyüş*, ardışık kenarların birbirinin komşusu ya da aynısı olduğu $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$ ya da $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ şeklinde kenarların sonlu bir dizisidir. v_0 ve v_m köşelerine, sırasıyla, yürüyüşün *başlangıç* ve *bitiş köşesi* denir. Bir yürüyüş içindeki kenarların sayısı o yürüyüşün *uzunluğu* olarak adlandırılır (Wilson, 1979). Örneğin, Şekil 3.2.6 da,

$$v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3$$

v_1 den v_3 e 7 uzunluğunda bir yürüyüştür.

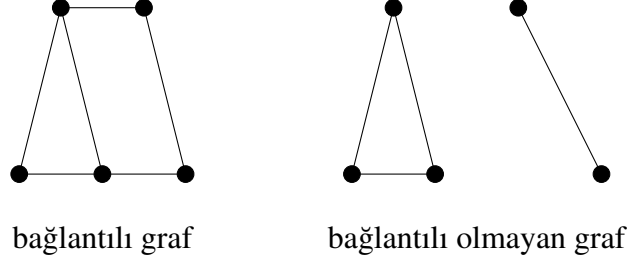


Şekil 3.2.6. Bir G grafi içinde bir yürüyüş örneği

Bütün kenarları birbirinden farklı olan bir yürüyüşe *yol* adı verilir. Bir yürüyüş veya yol eğer $v_0 = v_m$ ise o zaman *kapalıdır*. Tek bir köşe kendi başına bir yol teşkil eder. Başlangıç ve bitiş noktaları hariç tüm köşeleri farklı ve tüm kenarları farklı olan kapalı yürüyüşe *döngü* adı verilir. Şekil 3.2.6 daki grafi ele alacak olursak, $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$ bir yol olup, $v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ bir döngüdür.

Bir ilmek, uzunluğu 1 olan bir döngüdür ve bir çift çoklu kenar, uzunluğu 2 olan bir döngüdür. $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$ gibi 3 uzunluğundaki bir döngü ise bir üçgendir.

Bir G grafindan alınan her iki köşe arasında bir yol varsa bu grafa *bağlantılıdır* denir.



Şekil 3.2.7. Bağlantılı olan ve bağlantılı olmayan graf örneği

3.2.4. Yönlü Graflar

Yönlendirilmiş ya da *yönlü* bir E grafi, elemanları *köşeler* olarak adlandırılan bir E^0 kümesi ile E^0 dan ayrık olan ve elemanları *yaylar* (ya da *yönlendirilmiş kenarlar*) olarak adlandırılan E^1 kümesi ve $r_E, s_E : E^1 \rightarrow E^0$ fonksiyonlarından oluşur ve $E = (E^0, E^1, r_E, s_E)$ 4-lüsü ile gösterilir (Wilson, 1979).

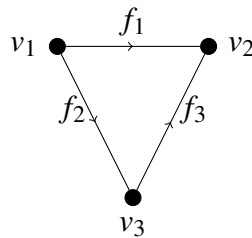
E^1 ve E^0 kümeleri herhangi bir kardinaliteye sahip olabilir. Üstelik, $f \in E^1$ için $r_E(f)$ ye f nin *görüntüsü*, $s_E(f)$ ye f nin *kaynağı* denir. Ele alınan grafla ilgili herhangi bir karışıklık yoksa, sırasıyla, $r(f)$ ve $s(f)$ yazılabilir.

Eğer her $v \in E^0$ için $s^{-1}(v)$ sonlu bir küme ise grafa *satır-sonlu* denir. Yani, $s : E^1 \rightarrow E^0, f \mapsto s(f)$ fonksiyonu için

$$s^{-1}(v) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v\}$$

ön görüntü kümesinin sonlu olması demek, kaynağı v olan yayların sayısının sonlu olması demektir.

Örnek 3.2.4. Köşe kümesi $E^0 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ve yönlendirilmiş kenar kümesi $E^1 = \{f_1, f_2, f_3\}$ olarak verilen E yönlü grafi için,



$$s^{-1}(v_1) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v_1\} = \{f_1, f_2\}$$

$$s^{-1}(v_2) = \emptyset$$

$$s^{-1}(v_3) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v_3\} = \{f_3\}$$

olduğundan bu graf satır-sonludur.

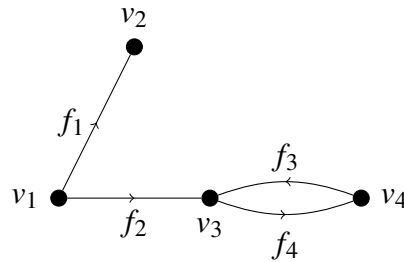
Eğer E^0 kümesi sonlu ve E grafi satır-sonlu ise o zaman E^1 kümesi de sonlu olmak zorundadır. Bu durumda kısaca E grafına *sonludur* denir.

Bir $v \in E^0$ için $s^{-1}(v) = \emptyset$ ise o zaman v köşesine *alıcı* denir. Yani kenar yaymayan bir köşe alıcıdır.

Bir $v \in E^0$ için $r^{-1}(v) = \emptyset$ ise o zaman v köşesine *kaynak* denir. Yani bir köşe hiçbir yayın görüntüsü değil ise bu köşe kaynaktır.

Bir $v \in E^0$ köşesi için $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$ ise v ye *düzenli köşe* denir.

Örnek 3.2.5. Köşe kümesi $E^0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve yönlendirilmiş kenar kümesi $E^1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ olan E yönlü grafi aşağıdaki gibi verilsin:



$s^{-1}(v_2) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v_2\} = \emptyset$ olduğundan v_2 köşesi bir alıcıdır.

$r^{-1}(v_1) = \{f \in E^1 \mid r(f) = v_1\} = \emptyset$ olduğundan v_1 köşesi bir kaynaktır.

Daha önceki kısımlarda graflar için verilen tanımların çoğunun benzeri yönlü graflar için yazılabilir.

Yönlü graflarda yol kavramı şu şekilde verilir:

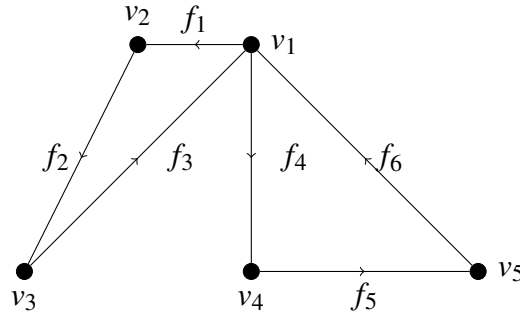
Tanım 3.2.6. (Wilson, 1979) Yönlü bir E grafında bir μ yolu, $i = 1, \dots, m-1$ için $r(f_i) = s(f_{i+1})$ olacak şekilde yayların sonlu bir $\mu = f_1 \dots f_m$ dizisidir. Bu durumda $s(\mu) := s(f_1)$ e μ nün *kaynağı* (μ yolunun başlangıç köşesi) ve $r(\mu) := r(f_m)$ ye μ nün *görüntüsü* (μ yolunun bitiş köşesi) denir. m ye μ nün *uzunluğu* denir ve $|\mu| = m$ ile gösterilir.

Ayrıca μ ye $s(f_1)$ den $r(f_m)$ ye bir *yoldur* denir ve μ yolunun köşelerinin kümesi μ^0 ile gösterilir. Yani $\mu^0 := \{s(f_1), r(f_1), \dots, r(f_m)\}$ dir. E^0 köşe kümesinin elemanlarını, uzunluğu 0 olan yollar olarak görebiliriz. Bir E yönlü grafındaki tüm yolların kümesi $\text{Path}(E)$ ile gösterilir.

$\mu = f_1 f_2 \dots f_m \in \text{Path}(E)$ olsun. Eğer $m = |\mu| \geq 1$ ise ve $v = s(\mu) = r(\mu)$ ise μ ye *kapalı yol* denir.

Eğer $\mu = f_1 f_2 \dots f_n$ bir kapalı yol ve her $i \neq j$ için $s(f_i) \neq s(f_j)$ ise, yani çakışan başlangıç ve bitiş köşeleri dışında hiçbir köşenin birden fazla görünmediği μ yoluna *döngü* adı verilir.

Örnek 3.2.7. Köşe kümesi $E^0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ve yönlendirilmiş kenar kümesi $E^1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ olan E yönlü grafi aşağıdaki gibi verilsin:



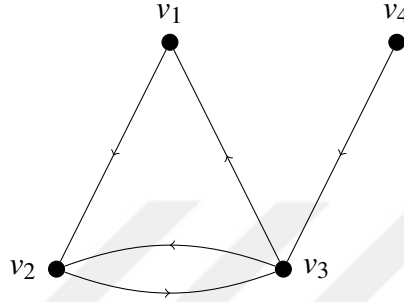
$s(f_1) = v_1 = s(f_4)$ olduğundan $\mu = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6$ yolu bir döngü değildir.

Yönlü grafların bağlantılılığı da tanımlanır:

Tanım 3.2.8. (Wilson, 1979) Bir E yönlü grafi, iki yönlü grafın birleşimi olarak ifade edilemezse, o zaman E yönlü grafi *bağlantılıdır* denir. Ayrıca E yönlü grafının v ve w gibi herhangi iki farklı köşesi için v den w ya yönlendirilmiş bir yol varsa, E yönlü grafi *kuvvetli bağlantılıdır* denir.

Her kuvvetli bağlantılı yönlü graf bağlantılıdır, ancak her bağlantılı yönlü graf kuvvetli bağlantılı değildir.

Örnek 3.2.9. Aşağıdaki şekilde verilen yönlü graf bağlantılıdır, ancak v_2 köşesinden v_4 köşesine bir yol olmadığından bu yönlü graf kuvvetli bağlantılı değildir.



Tanım 3.2.10. (Casado, Barquero vd., 2024) E bir yönlü graf ve $S \subset E^0$ ise,

$$T(S) = \{v \in E^0 \mid s(\lambda) = u, r(\lambda) = v, \exists \lambda \in \text{Path}(E), \exists u \in S\}$$

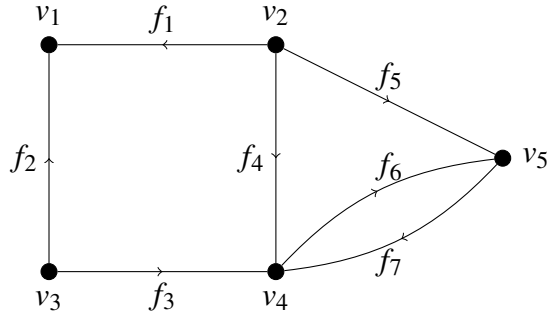
kümesine S nin *ağacı* denir. Yani $T(S)$, başlangıç köşesi S kümesinden alınan yolların bitiş köşelerinin kümesidir. Eğer $S = \{u\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise $T(\{u\})$ yerine $T(u)$ yazılabilir.

Tanım 3.2.11. (Casado, Barquero vd., 2024) E bir yönlü graf olsun. E^0 köşe kümesindeki iki köşe arasında en fazla bir yay var ise E grafi *Sing koşulunu sağlar* denir.

Tanım 3.2.12. (Casado, Barquero vd., 2024) E bir yönlü graf ve $u \in E^0$ olsun. Eğer $|s^{-1}(u)| \geq 2$ ise u ya bir *çatallanma köşesi* denir, ya da u da bir *çatallanma vardır* denir.

Tanım 3.2.13. (Casado, Barquero vd., 2024) E bir yönlü graf ve $H \subset E^0$ olsun. Eğer her $u \in H$ için $T(u) \subset H$ oluyorsa H alt kümesine *kalıtsaldır* (*hereditary subset*) denir.

Örnek 3.2.14. Aşağıdaki şekilde E yönlü grafi verilsin. $H = \{v_1, v_4, v_5\} \subset E^0$ olsun.



$$T(v_1) = \emptyset \subset H$$

$$T(v_4) = \{v_4, v_5\} \subset H$$

$$T(v_5) = \{v_4, v_5\} \subset H$$

olduğundan her $v \in H$ için $T(v) \subset H$ olur. O halde H alt kümesi kalıtsaldır.

E^0 köşe kümesinin kalıtsal olan tüm alt kümelerinin kümesini \mathcal{H}_E ile gösterelim. Eğer herhangi bir karışıklığa sebep olmayacaksa bu küme, \mathcal{H} ile gösterilecektir.

Tanım 3.2.15. (Casado, Barquero vd., 2024) E bir yönlü graf ve $S \subset E^0$ olsun. S yi kapsayan en küçük kalıtsal alt küme S nin *kalıtsal kapanışı* adı verilir ve \bar{S} ile gösterilir.

Tanım 3.2.16. (Casado, Barquero vd., 2024) E bir yönlü graf ve H, \mathcal{H} kümesinin $H \neq E^0$ koşulunu sağlayan bir elemanı olsun. $H \subset H'$ koşulunu sağlayan her $H' \in \mathcal{H}$ için ya $H' = H$ ya da $H' = E^0$ oluyorsa H kümesine *maksimal* denir.

Tanım 3.2.17. (Casado, Barquero vd., 2024) E bir yönlü graf ve $H \subset E^0$ olsun. Eğer herhangi bir $u \in E^0$ düzenli köşesi için $r(s^{-1}(u)) \subset H$ iken $u \in H$ oluyorsa H a *saturated küme* denir.

Örnek 3.2.18. Örnek 3.2.14 de verilen E yönlü grafı ele alınsın. $H = \{v_3, v_4, v_5\} \subset E^0$ olsun.

v_2 düzenli köşesi için $s^{-1}(v_2) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v_2\} = \{f_1, f_4, f_5\}$ olup

$$\begin{aligned} r(s^{-1}(v_2)) &= \{r(f) \mid f \in s^{-1}(v_2)\} \\ &= \{r(f_1), r(f_4), r(f_5)\} \\ &= \{v_1, v_4, v_5\} \not\subset H \end{aligned}$$

dır. v_3 düzenli köşesi için $s^{-1}(v_3) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v_3\} = \{f_2, f_3\}$ olup

$$\begin{aligned} r(s^{-1}(v_3)) &= \{r(f) \mid f \in s^{-1}(v_3)\} \\ &= \{r(f_2), r(f_3)\} \\ &= \{v_1, v_4\} \not\subset H \end{aligned}$$

dır. v_4 düzenli köşesi için $s^{-1}(v_4) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v_4\} = \{f_6\}$ olup

$$\begin{aligned} r(s^{-1}(v_4)) &= \{r(f) \mid f \in s^{-1}(v_4)\} \\ &= \{r(f_6)\} \\ &= \{v_5\} \subset H \end{aligned}$$

iken $v_4 \in H$ dır. v_5 düzenli köşesi için $s^{-1}(v_5) = \{f \in E^1 \mid s(f) = v_5\} = \{f_7\}$ olup

$$\begin{aligned} r(s^{-1}(v_5)) &= \{r(f) \mid f \in s^{-1}(v_5)\} \\ &= \{r(f_7)\} \\ &= \{v_4\} \subset H \end{aligned}$$

iken $v_5 \in H$ dır. Bu durumda H bir saturated kümedir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, ilk olarak evrim cebir tanımı verilecek ve bu kavram ile ilgili temel teorem ve özelliklere değinilecektir. Daha sonra graf yapısı evrim cebirleriyle ilişkilendirilerek bir evrim cebirinin herhangi bir doğal tabanına bağlı yönlü graflar tanımlanacak ve bazı örnekler verilecektir. Bu bilgiler ışığında Y. Cabrera Casado, D. Martin Barquero, C. Martin Gonzalez ve A. Tocino'nun 2024 yılında yayınlamış oldukları “*Connecting ideals in evolution algebras with hereditary subsets of its associated graph*” adlı çalışmaları incelenecektir (Casado, Barquero vd., 2024).

4.1. Evrim Cebirleri

Genetiğin matematiği incelenmeden önce, biyolojideki bazı terimlerin bilinmesi gerekir. Bir *gen* basitçe kalıtsal bilgi birimidir. Bir organizmanın genetik kodu kromozomlar üzerinde taşınır. Bir kromozom üzerindeki her genin alabileceği farklı formlar vardır. Bu formlar alel olarak adlandırılır. Örneğin, insanlarda kan grubunu belirleyen genin üç farklı aleli vardır: A, B ve 0. İnsanlar diploid organizmalar olduklarından (yani her ebeveynden bir tane olmak üzere çift kromozom seti taşıdığımızdan), kan grupları iki alel tarafından belirlenir.

Bir organizmanın *genotipi*, her bir gen için sahip olduğu alellerin kombinasyonunu belirtir. *Fenotip* ise canlının rengi, şekli, büyüklüğü gibi dış görünüş ve ölçülebilen özelliklerin tümüdür. Diploid organizmalar çoğaldığında, mayoz adı verilen bir süreçle tek bir kromozom seti taşıyan gametler (eşey hücreleri) üretilir. Bu gametler birleşerek diploid *zigot* hücresi oluşturur. Zigot, kalıtsal bilginin çift kromozom setinde taşındığı bir hücredir. Gametlerin birleşmesi, doğal bir çarpma işlemine benzetilebilir.

Doğal bir ilk örnek olarak, iki aleli A ve a olan tek bir gen için basit Mendel kalıtımını ele alalım. Bu durumda, bir zigot oluşturmak için birleşen iki gamet, Çizelge 4.1.1 de gösterilen ve Punnett karesi olarak adlandırılan çarpım tablosunu verir.

Çizelge 4.1.1. Gametlerden zigotlara geçen aleller

	A	a
A	AA	Aa
a	aA	aa

AA ve aa zigotları aynı alelin iki kopyasını taşırlar ve bu durumda, AA , A alelini ve aa , a alelini aktarır. Ancak, Aa ve aA zigotlarının (eşdeğer olan) her biri iki farklı alel taşır. Basit Mendel kalıtım kuralları, bir sonraki neslin A yı ve a yı eşit oranda alacağını gösterir. Dolayısıyla, iki gamet birleştiğinde, kalıtsal bilginin bir sonraki nesle nasıl aktarılacağını gösteren bir çarpma meydana gelir. Bu çarpım aşağıdaki kurallar ile verilir:

$$A \times A = A, \quad (4.1)$$

$$A \times a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a, \quad (4.2)$$

$$a \times A = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}A, \quad (4.3)$$

$$a \times a = a. \quad (4.4)$$

Kural (4.1) ve (4.4), her iki gametin de aynı aleli taşıması durumunda yavrunun bu aleli taşıyacağını gösterir. Kural (4.2) ve (4.3) ise, A ve a aleli taşıyan gametler birleştiğinde, yavrunun A ve a alellerini yarı yarıya taşıyacağını gösterir. Bu kurallar, basit Mendel kalıtım kurallarının cebirsel bir gösterimidir. Bu çarpım tablosu Çizelge 4.1.2 de gösterilmiştir. Burada fenotiplerle değil, sadece genotiplerle (genetik yapı) ilgilenilmektedir. Bu nedenle alellerin baskın ya da çekinik özelliklerinden bahsedilmeyecektir.

Çizelge 4.1.2. Basit Mendel kalıtımı için gametik cebirin çarpım tablosu

	A	a
A	A	$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a$
a	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}A$	a

A ve a sembolleri üzerinde bir çarpım tanımladığımızı göre, \mathbb{R} üzerinde iki boyutlu cebiri, $\{A, a\}$ tabanı ve Tablo 4.2 deki gibi çarpım tablosu ile matematiksel olarak tanımlayabiliriz. Bu cebir, iki alelli basit Mendel kalıtımı için *gametik cebir* olarak adlandırılır (Tian, 2008).

İlgili "popülasyona" bağlı olarak, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koşulunu sağlayan gametik cebirin keyfi bir $\alpha A + \beta a$ genel elemanı bir popülasyonu, popülasyonun tek bir bireyini veya tek bir gameti temsil edebilir. Her durumda, α ve β skalerleri ilgili alelin frekans yüzdesini ifade eder. Yani, eğer eleman bir popülasyonu

temsil ediyorsa, o zaman α söz konusu gen üzerinde A alelini taşıyan bireylerin yüzdesidir. Benzer şekilde, β , a aleline sahip olan bireylerin yüzdesidir.

Gametik cebirlerin popülasyonları temsil eden elemanları için, bu tür iki elemanın çarpımı iki popülasyon arasında rastgele eşleşmeyi temsil eder. Popülasyonların eşleşme sırası önemlidir. Yani, P popülasyonu Q popülasyonu ile eşleşir ve ardından ortaya çıkan popülasyon R ile eşleşirse, ortaya çıkan popülasyon, P nin Q ve R nin eşleşmesinden elde edilen popülasyonla eşleşmesinden ortaya çıkan popülasyonla aynı değildir. Sembolik olarak, $(P \times Q) \times R$, $P \times (Q \times R)$ ye eşit değildir. Dolayısıyla, tamamen biyolojik bir bakış açısıyla, genetikte ortaya çıkan cebirler birleşme özelliğini karşılamaz.

Basit Mendel kalıtımı için gametik cebirlerin çarpım tablolarını incelersek, cebirlerin değişmeli olduğunu hemen görebiliriz. Biyolojik açıdan bakıldığında, P ve Q popülasyonları eşleşiyorsa, P nin Q ile eşleştiğini ya da Q nun P ile eşleştiğini söylemek arasında bir fark yoktur. Ancak, beklendiği üzere, bu cebirler birleşme özelliğini karşılamamaktadır. Örneğin, gametik cebirde çarpım kuralları ve dağılıma özelliği uygulanarak $A \times (A \times a) = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}a$ olduğu görülür. Ancak, $(A \times A) \times a = A \times a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a$ dır. Dolayısıyla, birleşme özelliği gametik cebir için geçerli değildir. Genel olarak, genetikte ortaya çıkan cebirler değişmelidir ancak birleşmeli değildir.

Gametik cebirler, iki alelli tek bir gen için basit Mendel kalıtımının özel bir örneğine karşılık geliyordu. Şimdi gametik cebirler için daha genel bir tanım vereceğiz. n farklı gameti olan rastgele eşleşen bir popülasyonumuz olduğunu varsayalım. Bu gametlere a_1, \dots, a_n diyelim. Ayrıca nesilden nesile aynı çevresel koşulların korunduğunu kabul edelim. a_i ve a_j gametlerinin rastgele birleşmesiyle $a_i a_j$ tipi zigotlar oluşur. $a_i a_j (= a_j a_i)$ olmak üzere $n(n+1)/2$ zigotik tür olacaktır.

Tabanı $\{a_1, \dots, a_k, \dots, a_n\}$ ve çarpım tablosu $a_i a_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{kij} a_k$ olan n-boyutlu \mathbb{R} -cebir, ele alınan kalıtım türü için *gametik cebir* olarak adlandırılır. Burada

- (1) $0 \leq \gamma_{kij} \leq 1, \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\}$
- (2) $\sum_{k=1}^n \gamma_{kij} = 1 \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$
- (3) $\gamma_{kij} = \gamma_{kji} \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\}$

olur. γ_{kij} , zigotik $a_i a_j$ türünde bir birey tarafından üretilen rastgele bir gametin a_k tipinde olma olasılığıdır.

E. Baur ve C. Correns'in çalışmalarından sonra, çoklu aleller veya eşeysiz kalıtım gibi birçok kalıtsal mekanizmanın Mendel yasalarına uymadığı anlaşılmıştır. Çekirdek genlerinin kalıtımının çoğu Mendel yasalarına uysa da, organellerin kalıtımı Mendelci değildir.

Şimdi, eşeysiz kalıtım sürecini matematiksel olarak formüle edelim.

Bir hücre veya hücre klonundaki bir organel popülasyonunu ele alalım ve e_1, \dots, e_n popülasyon tarafından üretilen genetik olarak farklı gametler olsun. Gametik cebirin, bu e_1, \dots, e_n gametleri tarafından üretilen vektör uzayı üzerinde aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlandığını biliyoruz:

$$e_i e_j = \gamma_{1j} e_1 + \dots + \gamma_{nj} e_n$$

Tek ebeveynli kalıtım söz konusu olduğundan farklı gametlerin çaprazlanması imkansızdır.

Dolayısıyla $e_i e_j$ nin zigot olarak yorumlanması, $e_i \neq e_j$ ise biyolojik olarak bir anlam ifade etmez, ancak $e_i e_i$ yine de kendini kopyalama olarak yorumlanabilir. Matematiksel olarak, $e_i e_j = 0$ diyebiliriz.

Bu nedenle, eşeysiz kalıtımda, bir cebir tanımlamak için aşağıdaki bağıntıları kullanabiliriz:

$$e_i e_i = \gamma_{1i} e_1 + \dots + \gamma_{ni} e_n, \quad e_i e_j = 0, \quad i \neq j$$

4.1.1. Evrim Cebiri Tanımı ve Özellikleri

Tanım 4.1.1. (Tian, 2008) \mathbb{K} bir cisim ve A bir \mathbb{K} -cebir olsun. Eğer A da,

$$\begin{cases} e_i e_j = 0 & , i \neq j \text{ olacak şekilde her } i, j \in I \text{ için} \\ e_i^2 = e_i e_i := \sum_{k \in I} a_{ki} e_k & , i \in I \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir $B = \{e_i \mid i \in I\}$ tabanı varsa A ya bir *evrim cebiri* denir. Burada I boş olmayan bir indis kümesidir ve B tabanı, A nın *doğal tabanı* olarak adlandırılır.

Burada $a_{ki} \in \mathbb{K}$ skalerlerine A nın B ile bağlantılı yapı sabitleri denir ve $M_B := [a_{ki}]$ matrisine A nın B ile bağlantılı yapı matrisi denir. Her $i \in I$ için $|\{k \in I \mid a_{ki} \neq 0\}| < \infty$ dur. Böylece M_B , her sütununda en fazla sonlu sayıda sıfırdan farklı girdisi olan $|I| \times |I|$

tipinde bir matristir. Sonlu n -boyutlu bir A cebirinin bir evrim cebiri olması için gerek ve yeter koşul aşağıda Çizelge 4.1.3 ile verilen çarpım tablosuna sahip bir $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ tabanının var olmasıdır:

Çizelge 4.1.3. B kümesindeki elemanların çarpım tablosu

	e_1	\dots	e_i	\dots	e_n
e_1	$\sum_{k=1}^n a_{k1}e_k$	\dots	0	\dots	0
\vdots	\vdots				\vdots
e_i	0	\dots	$\sum_{k=1}^n a_{ki}e_k$	\dots	0
\vdots	\vdots				\vdots
e_n	0	\dots	0	\dots	$\sum_{k=1}^n a_{kn}e_k$

Bu durumda, A evrim cebirinin B doğal tabanı ile bağlantılı yapı matrisi, $M_B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ şeklindedir. Başka bir ifadeyle, A sonlu boyutlu bir evrim cebiri ve $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, A nın bir doğal tabanı ise B ile bağlantılı yapı sabitleri, $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$M_k(B) = \begin{bmatrix} a_{k1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{k2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{kn} \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlayarak da düzenlenebilir.

Şimdi bir evrim cebirindeki herhangi iki elemanın çarpımını tanımlayalım:

Tanım 4.1.2. (Tian, 2008) A bir evrim cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı olsun. $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ olmak üzere A da $a = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ ve $b = \sum_{i \in I} \beta_i e_i$ elemanlarını alalım. O halde a ve b elemanlarının çarpımı,

$$ab = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i e_i^2 = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i \left(\sum_{j \in I} a_{ji} e_j \right) = \sum_{i, j \in I} \alpha_i \beta_i a_{ji} e_j$$

şeklindedir. Aynı zamanda, $\alpha^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $\beta^T = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ olmak üzere A daki çarpma şu şekilde de verilir:

$$ab = \sum_{k \in I} (\alpha M_k(B) \beta^T) e_k.$$

Genel olarak, evrim cebirleri birleşmeli değildir. Gerçekten, A bir evrim cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı olsun. Genel durumda, uygun bir i indisi için $e_i e_i = \sum_{j \in I} a_{ji} e_j$ dir.

A evrim cebirinden iki keyfi eleman, $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ ve $y = \sum_{i \in I} \beta_i e_i$ olarak alınsın. O halde

$$\begin{aligned} (x \cdot x) \cdot y &= \left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \right) \left(\sum_{i \in I} \beta_i e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i, j \in I} \alpha_i^2 a_{ji} e_j \right) \left(\sum_{i \in I} \beta_i e_i \right) = \sum_{i, j \in I} \alpha_i^2 \beta_j a_{ji} e_j^2 \end{aligned}$$

dir. Ancak

$$\begin{aligned} x \cdot (x \cdot y) &= \left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{i \in I} \beta_i e_i \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{i, j \in I} \alpha_i \beta_j a_{ji} e_j \right) = \sum_{i, j \in I} \alpha_j \alpha_i \beta_j a_{ji} e_j^2 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(x \cdot x) \cdot y \neq x \cdot (x \cdot y)$$

dir.

Önerme 4.1.3. (Tian, 2008) *Evrin cebirleri değişmelidir.*

İspat: A bir evrim cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı olsun. $x, y \in A$ alalım.

O halde $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ olmak üzere $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ ve $y = \sum_{i \in I} b_i e_i$ için,

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(\sum_{i \in I} a_i e_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i e_i \right) = \sum_{i \in I} a_i b_i e_i^2 = \sum_{i \in I} b_i a_i e_i^2 \\ &= \left(\sum_{i \in I} b_i e_i \right) \left(\sum_{i \in I} a_i e_i \right) = y \cdot x \end{aligned}$$

olduğundan A evrim cebiri değişmelidir. \square

4.1.2. Evrim Alt Cebirleri ve Evrim İdealleri

Keyfi boyuttaki evrim cebirlerinin ilk cebirsel çalışması 2016 yılında Y.C. Casado, M.S. Molina ve M.V. Velasco tarafından sunulmuştur. Bu bölümde, evrim alt cebir ve evrim ideal kavramları tanıtılacaktır (Casado, Molina vd., 2016).

İlk olarak, evrim cebirleri sınıfının alt cebirler altında kapalı olmadığı gösterilecektir.

Örnek 4.1.4. A , doğal tabanı $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ olan ve çarpma işlemi $e_1^2 = e_1 + e_2 = -e_2^2$ ve $e_3^2 = -e_2 + e_3$ ile tanımlı 3-boyutlu bir evrim cebiri olsun.

$u_1 := e_1 + e_2$ ve $u_2 := e_1 + e_3$ tanımlansın. Bu durumda u_1 ile u_2 vektörleri lineer bağımsızdır. u_1 ve u_2 ile üretilen $A_1 = \text{Span}(\{u_1, u_2\})$ alt uzayı, A nın bir alt cebiridir:

Gerçekten her $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} u_1^2 &= (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1^2 + e_2^2 = e_1 + e_2 + (-e_1 - e_2) = 0 \\ u_1 u_2 &= (e_1 + e_2)(e_1 + e_3) = e_1^2 = e_1 + e_2 = u_1 \\ u_2^2 &= (e_1 + e_3)(e_1 + e_3) = e_1^2 + e_3^2 = e_1 + e_2 + (-e_2 + e_3) = e_1 + e_3 = u_2 \end{aligned}$$

olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} (\alpha u_1 + \beta u_2)(\gamma u_1 + \delta u_2) &= \alpha \gamma u_1^2 + (\alpha \delta + \beta \gamma) u_1 u_2 + \beta \delta u_2^2 \\ &= (\alpha \delta + \beta \gamma) u_1 + \beta \delta u_2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece A_1 , A nın bir alt cebiridir. Ancak A_1 , bir evrim cebiri değildir. Çünkü A_1 in bir doğal tabanı yoktur:

Varsayalım ki A_1 alt uzayında bir $\{f_1, f_2\}$ doğal tabanı var olsun. O halde $f_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ ve $f_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ vardır ve $f_1 f_2 = 0$ koşulundan dolayı $(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) u_1 + \alpha_2 \beta_2 u_2 = 0$ olup u_1 ve u_2 vektörlerinin lineer bağımsızlığı gereği $\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 0$ ve $\alpha_2 \beta_2 = 0$ elde edilir. Buna göre ya $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ya $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ya da $\beta_1 = \beta_2 = 0$ dır.

Eğer $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ise $f_1 = 0$ olur. Eğer $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ise $f_2 = 0$ olur. Eğer $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ise $f_1 = \alpha_1 u_1$ ve $f_2 = \beta_1 u_1$ olur. Her üç durum için de f_1 ile f_2 vektörleri lineer bağımlıdır.

Bu ise $\{f_1, f_2\}$ kümesinin A_1 in bir tabanı oluşu ile çelişir. O halde A_1 bir evrim cebiri değildir.

Bir evrim cebirinin her alt cebirinin bir evrim cebiri olması gerekmediğinden, evrim alt cebiri kavramının ortaya çıkması doğaldır.

Tanım 4.1.5. (Casado, Molina vd., 2016) A bir evrim cebiri ve $A' \subseteq A$ bir alt cebiri olsun. Eğer A' cebirinin bir doğal tabanı varsa, yani A' de bir evrim cebiri ise, A' ye A nın bir *evrim alt cebiri* denir.

Bir değişmeli A cebirinin S alt uzayının $SA \subseteq S$ ise bir *ideal* olduğu belirtilmişti. Şimdi ise her evrim alt cebirin bir ideal olması gerekmediğine dair bir örnek verilecektir.

Örnek 4.1.6. A , doğal tabanı $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ olan ve çarpma işlemi $e_1^2 = e_2$, $e_2^2 = e_1$ ve $e_3^2 = e_3$ ile tanımlı bir evrim cebiri olsun. $A_1 = \text{Span}(\{e_1 + e_2, e_3\})$ alt uzayı, A nın bir alt cebiridir. Gerçekten her $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} & (\alpha(e_1 + e_2) + \beta e_3)(\gamma(e_1 + e_2) + \delta e_3) \\ &= \alpha\gamma(e_1 + e_2)^2 + \alpha\delta(e_1 + e_2)e_3 + \beta\gamma e_3(e_1 + e_2) + \beta\delta e_3^2 \\ &= \alpha\gamma(e_1^2 + e_2^2) + \beta\delta e_3^2 \\ &= \alpha\gamma(e_2 + e_1) + \beta\delta e_3 \end{aligned}$$

eşitliğinden A_1 , A nın bir alt cebiri olur. Üstelik A_1 , bir $B' = \{e_1 + e_2, e_3\}$ doğal tabanı ile bir evrim cebiridir. Yani A_1 , A nın bir evrim alt cebiridir. Ancak

$$e_1(e_1 + e_2) = e_1^2 = e_2 \notin A_1$$

olduğundan A_1 , A nın bir ideali değildir.

Bir evrim cebirinin her idealinin bir doğal tabanı olmayabilir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 4.1.7. A , doğal tabanı $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ olan ve çarpma işlemi $e_1^2 = e_2 + e_3$, $e_2^2 = e_1 + e_2$ ve $e_3^2 = -(e_1 + e_2)$ ile tanımlı bir evrim cebiri olsun. $u_1 := e_1^2$ ve $u_2 := e_2^2$ tanımlansın.

Bu durumda u_1 ile u_2 lineer bağımsızdır. u_1 ve u_2 ile üretilen alt uzay

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\alpha u_1 + \beta u_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\} \\
&= \{\alpha e_1^2 + \beta e_2^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\} \\
&= \{\alpha(e_2 + e_3) + \beta(e_1 + e_2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\} \\
&= \{\beta e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + \alpha e_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}
\end{aligned}$$

dır. Her $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ için,

$$\begin{aligned}
&(\beta e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + \alpha e_3)(\delta e_1 + (\gamma + \delta)e_2 + \gamma e_3) \\
&= \beta \delta e_1^2 + (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)e_2^2 + \alpha \gamma e_3^2 \\
&= \beta \delta (e_2 + e_3) + (\alpha \gamma + \alpha \delta + \beta \gamma + \beta \delta)(e_1 + e_2) + \alpha \gamma (-e_1 - e_2) \\
&= (\alpha \gamma + \alpha \delta + \beta \gamma + \beta \delta - \alpha \gamma)e_1 + (\beta \delta + \alpha \gamma + \alpha \delta + \beta \gamma + \beta \delta - \alpha \gamma)e_2 + \beta \delta e_3 \\
&= (\alpha \delta + \beta \gamma + \beta \delta)e_1 + (2\beta \delta + \alpha \delta + \beta \gamma)e_2 + \beta \delta e_3
\end{aligned}$$

olup $(\beta e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + \alpha e_3)(\delta e_1 + (\gamma + \delta)e_2 + \gamma e_3) \in A_1$ dir. O halde A_1 , A nın bir alt cebiridir. Üstelik,

$$\begin{aligned}
e_1 u_1 &= e_1 e_1^2 = e_1(e_2 + e_3) = e_1 e_2 + e_1 e_3 = 0 \\
e_2 u_1 &= e_2 e_1^2 = e_2(e_2 + e_3) = e_2^2 = u_2 \\
e_3 u_1 &= e_3 e_1^2 = e_3(e_2 + e_3) = e_3^2 = -(e_1 + e_2) = -e_2^2 = -u_2 \\
e_1 u_2 &= e_1 e_2^2 = e_1(e_1 + e_2) = e_1^2 = u_1 \\
e_2 u_2 &= e_2 e_2^2 = e_2(e_1 + e_2) = e_2^2 = u_2 \\
e_3 u_2 &= e_3 e_2^2 = e_3(e_1 + e_2) = 0
\end{aligned}$$

olduğundan A_1 , A nın bir idealidir. Buna rağmen, A_1 in bir doğal tabanı yoktur. Varsayalım ki A_1 idealinde bir $\{f_1, f_2\}$ doğal tabanı var olsun. O halde $f_1 = \beta_1 e_1 + (\alpha_1 + \beta_1)e_2 + \alpha_1 e_3$ ve $f_2 = \beta_2 e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \alpha_2 e_3$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ vardır.

$$f_1 f_2 = \beta_1 \beta_2 u_1 + [(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) - \alpha_1 \alpha_2] u_2$$

olup $f_1 f_2 = 0$ koşulundan dolayı $\beta_1 \beta_2 = 0$ ve $(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2$ dir. $\beta_1 \beta_2 = 0$ iken ya $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 \neq 0$ ya $\beta_1 \neq 0$ ve $\beta_2 = 0$ ya da $\beta_1 = \beta_2 = 0$ dir.

Eğer $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 \neq 0$ ise $\alpha_1\beta_2 = 0$ olup $\alpha_1 = 0$ olur. Bu durumda $f_1 = 0$ bulunur.

Eğer $\beta_1 \neq 0$ ve $\beta_2 = 0$ ise $\beta_1\alpha_2 = 0$ olup $\alpha_2 = 0$ olur. Bu durumda $f_2 = 0$ bulunur.

Eğer $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ ise $f_1 = \alpha_1e_2 + \alpha_1e_3 = \alpha_1(e_2 + e_3) = \alpha_1e_1^2$ ve $f_2 = \alpha_2e_2 + \alpha_2e_3 = \alpha_2(e_2 + e_3) = \alpha_2e_1^2$ olur.

Her üç durum için de f_1 ile f_2 vektörleri lineer bağımlıdır. Bu ise $\{f_1, f_2\}$ kümesinin A_1 in bir tabanı oluşu ile çelişir. O halde A_1 idealinin bir doğal tabanı yoktur.

Bu durum, aşağıdaki tanımın verilmesini haklı çıkarmaktadır.

Tanım 4.1.8. (Casado, Molina vd., 2016) A bir evrim cebiri ve S, A nın bir ideali olsun. Eğer S nin bir doğal tabanı varsa S ye A nın bir *evrim ideali* denir.

Açıkça, her evrim ideali bir evrim alt cebiridir. Ancak bunun karşısı Örnek 4.1.6 da gösterildiği üzere doğru olmayabilir. Çünkü bir evrim alt cebiri bir ideal olmak zorunda değildir. Aynı zamanda Örnek 4.1.7, bir evrim cebirinin her idealinin bir evrim ideal olmadığını kanıtlar.

Lemma 4.1.9. (Casado, Molina vd., 2016) A bir evrim cebiri ve A_1, A nın bir ideali olsun. O halde A/A_1 bölüm cebiri bir evrim cebiridir.

İspat: A evrim cebirinin bir $B = \{e_i \mid i \in I\}$ doğal tabanını alalım. A_1 idealine göre B deki tüm elemanların kosetlerinin kümesi

$$B' := \{\bar{e}_i = e_i + A_1 \mid i \in I\}$$

olup bu küme A/A_1 bölüm cebirini üretir. Üstelik $i \neq j$ için $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ dır. Böylece B' içinde seçilen lineer bağımsız bir alt küme A/A_1 in bir doğal tabanıdır. \square

Not. B' kümesi, A/A_1 bölüm cebirinin bir doğal tabanı olmak zorunda değildir. Örneğin, A evrim cebirini ve A_1 idealini Örnek 4.1.7 deki gibi alabiliriz. Bu durumda $B' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ kümesi, A/A_1 bölüm cebirinin boyutu (bir vektör uzayı olarak) 1 olduğundan, A/A_1 bölüm cebirinin bir tabanı değildir. Buna rağmen, B' kümesi her zaman A/A_1 in bir doğal tabanını içerir.

Not. A bir evrim cebiri ve A_1, A nın bir ideali olsun. O halde $\pi : A \rightarrow A/A_1, \pi(a) = \bar{a}$ ile tanımlı fonksiyon bir evrim cebir homomorfizmasıdır ve $\text{Ker}\pi = A_1$ dir. $\text{Ker}\pi = A_1$, her zaman A nın bir evrim ideali olmayabilir. Örneğin, A evrim cebirini ve A_1 idealini Örnek

4.1.7 deki gibi alabiliriz. Bu durumda A_1 in bir doğal tabanı olmadığından A_1 bir evrim ideali olamaz.

Şimdi ise evrim cebirleri sınıfının homomorfik görüntüler altında kapalı olduğunu gösteren bir sonuç verilecektir.

Sonuç 4.1.10. A ve B birer evrim cebiri ve $f : A \rightarrow B$ bir evrim cebir homomorfizması olsun. O halde $\text{Im}f$ bir evrim cebiridir.

İspat: $\text{Ker}f$ uzayı, A evrim cebirinin bir ideali olduğundan Lemma 4.1.9 gereği, $A/\text{Ker}f$ bir evrim cebiridir. $\text{Im}f$ uzayının, $A/\text{Ker}f$ evrim cebirine izomorf olduğu kullanılarak istenen elde edilir. \square

4.1.3. Dejenere Olmayan Evrim Cebirleri

Tanım 4.1.11. (Casado, Molina vd., 2016) A bir evrim cebiri olsun. Eğer A nın her $i \in I$ için $e_i^2 \neq 0$ olacak şekilde bir $B = \{e_i \mid i \in I\}$ doğal tabanı varsa A ya *dejenere olmayan evrim cebiri* denir. Aksi halde A evrim cebiri *dejenere*dir.

Değişmeli bir A cebirinin *sıfırlayanı* şu şekilde tanımlanır:

$$\text{ann}(A) := \{x \in A \mid xA = 0\}.$$

Önerme 4.1.12. (Casado, Molina vd., 2016) A bir evrim cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$ bir doğal tabanı olsun. $I_0(B) := I_0 = \{i \in I \mid e_i^2 = 0\}$ kümesi tanımlansın. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\text{ann}(A) = \text{Span}(\{e_i \in B \mid i \in I_0\})$ dir.

(ii) $\text{ann}(A) = 0 \Leftrightarrow I_0 = \emptyset$ dir.

(iii) $\text{ann}(A)$, A nın bir evrim idealidir.

(iv) A nın her B' doğal tabanı için $|I_0(B)| = |I_0(B')|$ olur.

İspat: (i) $0 \neq x \in \text{ann}(A)$ olsun. O halde $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in A$ öyle ki $xA = 0$ dir. Buradan $\alpha_i \neq 0$ olan her i için, $0 = xe_i = \alpha_i e_i^2$ olur ve böylece $e_i^2 = 0$ dir. Dolayısıyla $x \in \text{Span}(\{e_i \in B \mid i \in I_0\})$ olur. Yani $\text{ann}(A) \subseteq \text{Span}(\{e_i \in B \mid i \in I_0\})$ dir.

Diğer taraftan, en az bir i için $e_i^2 = 0$ olsun. Bu durumda $e_i A = 0$ dir. Çünkü her $j \neq i$ için $e_i e_j = 0$ dir. Dolayısıyla $e_i \in \text{ann}(A)$ olur. Yani $\text{Span}(\{e_i \in B \mid i \in I_0\}) \subseteq \text{ann}(A)$

dır. Böylece istenen eşitlik ispatlanmış olur. Yani A nın sıfırlayıcı, karesi sıfır olan taban elemanlarının lineer gerenden oluşur.

(ii) (i) den açıktır.

(iii) (i) den açıktır.

(iv) $|I_0(B)| = \dim_{\mathbb{K}}(\text{ann}(A))$ olduğundan (iv) sağlanır. \square

Sonuç 4.1.13. *A bir evrim cebiri olsun. A nın dejenere olmaması için gerek ve yeter koşul $\text{ann}(A) = 0$ olmasıdır. Böylece dejenere olmayan evrim cebiri kavramı ilgili doğal tabana bağlı kalmaz.*

İspat: Tanımı gereği, A evrim cebirinin dejenere olmaması için gerek ve yeter koşul $I_0 = \emptyset$ olmasıdır. Önerme 4.1.12 (ii) den, istenen elde edilir. \square

Tanım 4.1.14. (Casado, Molina vd., 2016) A bir evrim cebiri ve A_1 , A nın bir ideali olsun. Eğer $xA \subseteq A_1$ iken $x \in A_1$ oluyorsa A_1 e absorbsiyon özelliğini sağlar denir.

Örnek 4.1.15. A , doğal tabanı $\{e_1, e_2, e_3\}$ olan ve çarpma işlemi $e_1^2 = e_2$, $e_2^2 = e_1$ ve $e_3^2 = e_3$ ile tanımlı bir evrim cebiri olsun. A_1 , A nın bir ideali ve $\{e_1, e_2\}$, A_1 in bir tabanı olsun. A_1 idealinin, absorbsiyon özelliğini sağladığını gösterelim. $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$ olsun. Her

$$y = \sum_{i=1}^3 \beta_i e_i \in A \text{ için}$$

$$xy = \alpha_1 \beta_1 e_1^2 + \alpha_2 \beta_2 e_2^2 + \alpha_3 \beta_3 e_3^2 = \alpha_1 \beta_1 e_2 + \alpha_2 \beta_2 e_1 + \alpha_3 \beta_3 e_3 \in A_1$$

olsun. O halde $\alpha_3 \beta_3 = 0$ olmalıdır. Bu durumda ya $\alpha_3 = 0$ ya da $\beta_3 = 0$ dır. Dolayısıyla ya $x \in A_1$ ya da $y \in A_1$ dir. A nın değişmeli olduğu göz önüne alınarak A dan alınan herhangi iki elemanın çarpımı A_1 e düştüğünde bu elemanlardan biri de A_1 de olmak zorunda kaldığından A_1 ideali absorbsiyon özelliğini sağlar.

Lemma 4.1.16. [Casado, Molina vd. 2016, Lemma 2.24] A bir evrim cebiri ve A_1 , A nın bir ideali olsun. A_1 in absorbsiyon özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul $\text{ann}(A/A_1) = \bar{0}$ olmasıdır.

İspat: A_1 ideali, absorbsiyon özelliğini sağlasın. $\bar{a} \in \text{ann}(A/A_1)$ alalım. O halde $\bar{a}(A/A_1) = \bar{0}$ dir. Yani her $\bar{b} \in A/A_1$ için, $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{0} = A_1$ olup her $b \in A$ için $ab \in A_1$ olur. Buradan $aA \subseteq A_1$ elde edilir. Hipotez gereği $a \in A_1$ olup $\bar{a} = \bar{0}$ dir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
aA &\subseteq A_1 \\
\Rightarrow \bar{a}(A/A_1) &= \bar{0} \\
\Rightarrow \bar{a} \in \text{ann}(A/A_1) &= \bar{0} \\
\Rightarrow \bar{a} &= \bar{0} \\
\Rightarrow a &\in A_1
\end{aligned}$$

bulunur. Yani A_1 ideali absorpsiyon özelliğini sağlar. \square

Lemma 4.1.17. (Casado, Molina vd., 2016) A bir evrim cebiri ve A_1 , A nın sıfırdan farklı bir ideali olsun. $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı olsun. Eğer A_1 , absorpsiyon özelliğini sağlıyor ise B_1 , A_1 in bir doğal tabanı olacak şekilde bir $B_1 \subseteq B$ alt kümesi mevcuttur. Özel olarak, A_1 bir evrim idealidir.

İspat: Lemma 4.1.9 gereği, A/A_1 bir evrim cebiridir. $\bar{B} := \{\bar{e}_i \mid i \in I_2\}$ kümesi, A/A_1 in bir doğal tabanı olacak şekilde bir $I_2 \subseteq I$ alt kümesi alalım. $I_1 = I \setminus I_2$ olsun. $B_1 = \{e_i \mid i \in I_1\}$ tanımlansın. B_1 kümesinin, A_1 in bir doğal tabanı olduğunu iddia edelim.

$e_i \in B_1$ olsun. O halde $\bar{e}_i(A/A_1) = \bar{0}$ dir. Yani $\bar{e}_i \in \text{ann}(A/A_1)$ olup Lemma 4.1.16 dan $\bar{e}_i = \bar{0}$ dir. Böylece $e_i \in A_1$ dir. A_1 idealinin B_1 kümesi ile üretildiğini gösterelim. Bunun için $y \in A_1$ alalım ve uygun $k_i \in \mathbb{K}$ skalerleri için $y = \sum_{i \in I_1} k_i e_i + \sum_{i \in I_2} k_i e_i$ yazalım. Buradan

$$\bar{0} = \bar{y} = \sum_{i \in I_2} k_i \bar{e}_i \in \text{Span}(\bar{B})$$

olduğu görülür. \bar{B} bir taban olduğundan tüm k_i ($i \in I_2$) skalerleri sıfır olmak zorundadır. Bu ise $y = \sum_{i \in I_1} k_i e_i \in \text{Span}(B_1)$ olmasını gerektirir. O halde B_1 , A_1 idealinin bir doğal tabanıdır. Böylece A_1 bir evrim ideali olur. \square

Tanım 4.1.18. A bir evrim cebiri olsun. Eğer $A^2 = A$ ise A ya *mükemmel evrim cebiri* adı verilir. Sonlu boyutlu evrim cebirleri için bu kavram B , A nın bir doğal tabanı olmak üzere $\det(M_B) \neq 0$ oluşuyla denktir [Casado, Kanuni vd. 2019, Önerme 2.7 ve Önerme 2.9].

Tanım 4.1.19. (Casado, Barquero vd., 2024) A bir evrim cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı olsun. $u = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in A$ olmak üzere

$$\text{supp}_B(u) = \{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\}$$

kümesine B ye bağlı u nun supportu denir.

Tanım 4.1.20. (Casado, Kanuni vd., 2019) A bir evrim cebiri ve A_1 , A nın bir evrim ideali olsun. Eğer A_1 deki bir doğal taban, A evrim cebirinin bir doğal tabanına genişletilebiliyorsa A_1 e bir *temel ideal* denir.

Örnek 4.1.21. A , doğal tabanı $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ olan ve çarpma işlemi $e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2^2 = -e_1 - e_2 + e_3$ ve $e_3^2 = 0$ ile tanımlı 3-boyutlu bir evrim cebiri olsun. $A_1 = \text{Span}(\{e_1 + e_2, e_3\})$ alt uzayı, A nın bir alt cebiridir. Gerçekten, her $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} & (\alpha(e_1 + e_2) + \beta e_3)(\gamma(e_1 + e_2) + \delta e_3) \\ &= \alpha\gamma(e_1 + e_2)^2 + \alpha\delta(e_1 + e_2)e_3 + \beta\gamma e_3(e_1 + e_2) + \beta\delta e_3^2 \\ &= \alpha\gamma(e_1^2 + e_2^2) + \beta\delta e_3^2 \\ &= \alpha\gamma(e_1 + e_2 + e_3 - e_1 - e_2 + e_3) \\ &= 2\alpha\gamma e_3 \end{aligned}$$

eşitliğinden A_1 , A nın bir alt cebiri olur. Üstelik A_1 , bir $B' = \{e_1 + e_2, e_3\}$ doğal tabanı ile bir evrim cebiridir. Ancak B' doğal tabanı, A nın bir doğal tabanına genişletilemez. Varsayalım ki $\{f_1, f_2, f_3\}$, A nın bir doğal tabanı olacak şekilde A_1 alt uzayında bir $\{f_1, f_2\}$ doğal tabanı var olsun. O halde $f_1 = \alpha_1(e_1 + e_2) + \alpha_2 e_3$, $f_2 = \beta_1(e_1 + e_2) + \beta_2 e_3$ ve $f_3 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}$ vardır.

$f_1 \cdot f_2 = 0$ koşulundan dolayı

$$\alpha_1 \beta_1 = 0 \tag{4.5}$$

dır. $f_1 \cdot f_3 = 0$ koşulundan dolayı

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \gamma_1 e_1^2 + \alpha_1 \gamma_2 e_2^2 + \alpha_2 \gamma_3 e_3^2 = 0 \\ & \Rightarrow \alpha_1 \gamma_1 (e_1 + e_2 + e_3) + \alpha_1 \gamma_2 (-e_1 - e_2 + e_3) = 0 \\ & \Rightarrow (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) e_1 + (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) e_2 + (\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) e_3 = 0 \\ & \Rightarrow \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2 = 0 \text{ ve } \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\alpha_1 (\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \text{ ve } \alpha_1 (\gamma_1 + \gamma_2) = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. $f_2 \cdot f_3 = 0$ koşulundan dolayı

$$\begin{aligned}\beta_1 \gamma_1 e_1^2 + \beta_1 \gamma_2 e_2^2 + \beta_2 \gamma_3 e_3^2 &= 0 \\ \Rightarrow \beta_1 \gamma_1 (e_1 + e_2 + e_3) + \beta_1 \gamma_2 (-e_1 - e_2 + e_3) &= 0 \\ \Rightarrow (\beta_1 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2) e_1 + (\beta_1 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2) e_2 + (\beta_1 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_2) e_3 &= 0 \\ \Rightarrow \beta_1 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2 = 0 \text{ ve } \beta_1 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_2 = 0\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\beta_1(\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \text{ ve } \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) = 0 \quad (4.7)$$

elde edilir. Buna göre, (4.5) den ya $\alpha_1 = 0$ ve $\beta_1 \neq 0$ ya $\alpha_1 \neq 0$ ve $\beta_1 = 0$ ya da $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ dır.

1. Eğer $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ ise (4.7) den $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ dır ve $f_1 = \alpha_2 e_3$, $f_3 = \gamma_3 e_3$ olur.
2. Eğer $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$ ise (4.6) den $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ve $f_2 = \beta_2 e_3$, $f_3 = \gamma_3 e_3$ olur.
3. Eğer $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ise $f_1 = \alpha_2 e_3$, $f_3 = \beta_2 e_3$ olur.

Her üç durum da $\{f_1, f_2, f_3\}$ kümesinin A nın bir tabanı oluşu ile çelişir. O halde A_1 , A nın bir temel ideali değildir.

4.1.4. Evrim Cebirleri ve Graflar

Evrin cebiri teorisi ve graf teorisi arasında bir bağlantı kurulabilir. Köşeleri evrim cebirinin taban elemanları ile etiketlenen bir yönlü graf tanımlanır. Bu yönlü graflar, graf teorisindeki kavramlar kullanılarak evrim cebirlerine ait cebirsel özelliklerin incelenmesini sağlarlar. Diğer taraftan, evrim cebiri özellikleri graf teorisi diline çevrilebilir ve böylece grafların geometrik özellikleri, evrim cebirleriyle ilgili mevcut sonuçların ispatını basitleştirir ve bu cebirler için yeni sonuçların keşfedilmesine olanak sağlar.

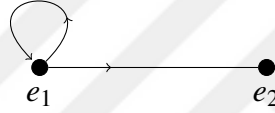
Tanım 4.1.22. (Casado, Barquero vd., 2024) A bir evrim cebiri, $B = \{e_i \mid i \in I\}$ A nın bir doğal tabanı ve $M_B = [a_{ji}]$, A nın B ile bağlantılı yapı matrisi olsun. Bir E yönlü grafında köşelerin kümesi $E^0 = \{e_i \mid i \in I\}$ ile tanımlansın. Eğer B tabanına göre e_i^2 nin j . inci koordinatı $a_{ji} \neq 0$ ise her $f \in E^1$ için $s(f) = e_i$ ve $r(f) = e_j$ olsun. Buna göre tanımlanan $E = (E^0, E^1, r, s)$ yönlü grafına, B doğal tabanına göre A evrim cebiriyle ilişkili graf denir.

Bir evrim cebiriyle ilişkili graf, seçilen doğal tabana bağlıdır.

Örnek 4.1.23. A bir evrim cebiri ve $B = \{e_1, e_2\}$, A nın bir doğal tabanı olmak üzere A daki çarpım $e_1^2 = e_1 + e_2$ ve $e_2^2 = 0$ ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} e_1^2 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 &\Rightarrow e_1 + e_2 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ &\Rightarrow (1 - a_{11})e_1 + (1 - a_{21})e_2 = 0 \\ &\Rightarrow a_{11} = 1 = a_{21} \end{aligned}$$

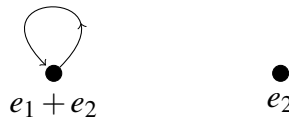
dir. $a_{11} \neq 0$ olduğundan $s(f_1) = e_1$ ve $r(f_1) = e_1$ olacak şekilde bir $f_1 \in E^1$ vardır. Ayrıca $a_{21} \neq 0$ olduğundan $s(f_2) = e_1$ ve $r(f_2) = e_2$ olacak şekilde bir $f_2 \in E^1$ vardır. Buna göre, B tabanı ile ilişkili graf şu şekildedir:



Şimdi de $B' = \{e_1 + e_2, e_2\}$ doğal tabanını ele alalım.

$$\begin{aligned} (e_1 + e_2)^2 = a_{11}(e_1 + e_2) + a_{21}e_2 &\Rightarrow e_1^2 + e_2^2 = a_{11}e_1 + a_{11}e_2 + a_{21}e_2 \\ &\Rightarrow e_1 + e_2 = a_{11}e_1 + a_{11}e_2 + a_{21}e_2 \\ &\Rightarrow e_1 + e_2 = a_{11}(e_1 + e_2) + a_{21}e_2 \\ &\Rightarrow (1 - a_{11})(e_1 + e_2) + (-a_{21})e_2 = 0 \\ &\Rightarrow 1 - a_{11} = 0 \text{ ve } -a_{21} = 0 \\ &\Rightarrow a_{11} = 1 \neq 0 \text{ ve } a_{21} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $s(f_3) = e_1 + e_2$ ve $r(f_3) = e_1 + e_2$ olacak şekilde bir $f_3 \in E^1$ vardır. Buna göre, B' tabanı ile ilişkili graf şu şekildedir:



Bu tez boyunca bir evrim cebiri ile ilişkili yönlü grafların satır sonlu olduğu ve Sing koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

4.2. Evrim Cebirlerindeki İdealleri, İlişkili Grafın Kalıtsal Altkümeleri İle İlişkilendirme

4.2.1. Maksimal İdealler ve Kalıtsal Alt Kümeler

Bu bölümde, bir yandan köşelerin bir alt kümesi, diğer yandan da kalıtsal bir alt kümeden inşa edilen ve bir temel ideal olduğu ortaya çıkan bir alt uzay tanımlanacaktır. Bu iki kümenin maksimal ideallerini tanıtan bazı özellikler kanıtlanacaktır. Üstelik bu idealler bir evrim cebiriyle ilişkili grafta tanımlanacaktır. Mükemmel evrim cebirleri için tüm maksimal idealler maksimal kalıtsal alt kümelerle ilişkili ideallerden oluştuğu gösterilecektir (Casado, Barquero vd., 2024).

Tanım 4.2.1. A bir evrim \mathbb{K} -cebir; $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı; R , A nın bir ideali ve E, B tabanına göre A ile ilişkili yönlü graf olsun. E^0 köşe kümesinin bir H_R alt kümesi $H_R := \{e_i \in E^0 \mid e_i^2 \in R\}$ olarak tanımlansın. Her bir $H \subset E^0$ kalıtsal alt kümesi için $R_H := \bigoplus_{e_i \in H} \mathbb{K}e_i = \text{Span}(H)$ alt uzayı tanımlansın. $R_\emptyset = \{0\}$ dır.

Lemma 4.2.2. A bir evrim \mathbb{K} -cebir, $B = \{e_i \mid i \in I\}$ bir doğal taban ve E, B tabanına göre A ile ilişkili yönlü graf olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) Eğer H, E^0 köşe kümesinin bir kalıtsal alt kümesi ise o zaman R_H, A nın bir temel idealidir.

(2) Eğer R, A nın bir ideali ise o zaman H_R, E^0 köşe kümesinin bir kalıtsal alt kümesidir.

İspat: (1) H, E^0 kümesinin kalıtsal bir alt kümesi olsun. O halde her $u \in H$ için $T(u) \subset H$ dır. Yani başlangıç köşesi u olan yolların bitiş köşelerinin kümesi, H ın bir alt kümesi olur. $R_H := \bigoplus_{e_i \in H} \mathbb{K}e_i = \text{Span}(H)$ kümesinin, A nın bir temel ideali olduğunu gösterelim. Bunun için R_H, A nın bir evrim ideali olmalıdır ve R_H daki bir doğal taban, A nın bir doğal tabanına genişletilebilmelidir.

R_H kümesi, A nın bir idealidir. Çünkü her $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in A$, her $\sum_{j \in J} \beta_j e_j \in H$ ve $J \subseteq I$ için H bir kalıtsal alt küme olduğundan

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j e_j \right) = \sum_{j \in J} \alpha_j \beta_j e_j^2 = \sum_{j \in J} \alpha_j \beta_j \left(\sum_{i \in J} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i, j \in J} \alpha_j \beta_j a_{ij} e_i \in R_H$$

dır. Ayrıca tanımdan $\text{Span}(H) = R_H$ olup $H \subset E^0$ olduğundan H, E^0 in lineer bağımsız bir alt kümesidir. O halde H, R_H in bir doğal tabanıdır. Yani R_H, A nın bir evrim idealidir. Dolayısıyla R_H, A nın bir temel idealidir.

(2) $e_j \in H_R$ alıcı olmayan herhangi bir köşe olsun. Eğer $s(f) = e_j$ ve $r(f) = e_k \in E^0$ olacak şekilde bir $f \in E^1$ alalım. O halde $e_j^2 = ke_k + \sum_i k_i e_i$ öyle ki $k, k_i \in \mathbb{K}, k \neq 0, e_i \in B \setminus \{e_k\}$ yazılabilir. $e_j^2 \in R$ olduğundan $ke_k e_j^2 \in R$ dir. Buradan $R \ni e_k e_j^2 = ke_k^2$ dir ve $k \neq 0$ olduğundan $k^{-1} \in \mathbb{K}$ olup $e_k \in H_R$ dir.

Şimdi $s(f_1) = e_j$ ve $r(f_k) = e_k$ olan bir $\lambda = f_1 \dots f_k \dots f_q$ yolu alalım. Bir önceki adımda verilen durum gereği $r(f_1) \in H_R$ olduğu bilinmektedir. Bu argümanı bu yoldaki tüm yaylar için yineleyerek sonunda $r(f_q) = e_k \in H_R$ sonucuna ulaşılır.

Böylece bir evrim \mathbb{K} -cebirinin herhangi bir R ideali için, yukarıda inşa edilen özel H_R kümesi, aşağıdaki önermede kanıtlanacak olan bir $R_{H_R} \supset R$ ideali üretir. \square

Not. Her $S \subset E^0$ için $R_{T(S)} = \bigoplus_{e_i \in T(S)} \mathbb{K}e_i \triangleleft A$ dir.

Bir A evrim \mathbb{K} -cebirinin tüm ideallerinin kümesini \mathcal{R} ile gösterelim ve A ile ilişkili olan yönlü grafın doğal bir tabanını sabitleyen tüm kalıtsal alt kümelerini \mathcal{H} ile gösterelim.

Önerme 4.2.3. *A bir \mathbb{K} -evrim cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$ bir doğal taban olsun. O halde*

- (1) *Eğer $H, H' \in \mathcal{H}$ ise o zaman $H \cap H', H \cup H' \in \mathcal{H}$ dir.*
- (2) *Eğer $H, H' \in \mathcal{H}$ ve $R, R' \in \mathcal{R}$ ise o zaman $R_{H \cap H'} = R_H \cap R_{H'}$ ve $R_{R \cap R'} = R_R \cap R_{R'}$ olur.*
- (3) *$R_{H \cup H'} = R_H + R_{H'}$ olur. Eğer $H \cap H' = \emptyset$ ise, o zaman $R_{H \cup H'} = R_H \oplus R_{H'}$ olur.*
- (4) *$R \subset R_{H_R}$ ve $H \subset H_{R_H}$ dir.*
- (5) *$R_H = A$ olması için gerek ve yeter koşul $H = E^0$ olmasıdır.*
- (6) *$R_{H_R} = A$ olması için gerek ve yeter koşul $A^2 \subset R$ olmasıdır.*
- (7) *$H \in \mathcal{H}$ olsun. $H_{R_H} = H$ olması için gerek ve yeter koşul H in bir saturated küme olmasıdır.*
- (8) *$H_R = R \cap B$ ise o zaman H_R bir saturated kümedir.*
- (9) *Eğer $H \in \mathcal{H}$ ise o zaman $H = R_H \cap B$ dir.*

İspat: (1) $e_i \in H \cap H'$ alalım. O halde $e_i \in H$ ve $e_i \in H'$ dir. $H, H' \in \mathcal{H}$ olduğundan $T(e_i) \subset H$ ve $T(e_i) \subset H'$ olup $T(e_i) \subset H \cap H'$ elde edilir. O halde $H \cap H' \in \mathcal{H}$ dir. Şimdi de $e_i \in H \cup H'$ alalım. O halde $e_i \in H$ veya $e_i \in H'$ dir. Eğer $e_i \in H$ ise $T(e_i) \subset H \subset H \cup H'$

olacağından $H \cup H' \in \mathcal{H}$ dır. Diğer taraftan $e_i \in H'$ ise $T(e_i) \subset H' \subset H \cup H'$ olacağından $H \cup H' \in \mathcal{H}$ dır.

(2) $x \in R_{H \cap H'}$ olsun. Bu durumda $x \in R_H$ ve $x \in R_{H'}$ olacağı aşikardır. O halde $x \in R_H \cap R_{H'}$ olur. Yani $R_{H \cap H'} \subseteq R_H \cap R_{H'}$ bulunur. Diğer taraftan, $y \in R_H \cap R_{H'}$ olsun. O halde $y \in R_H$ ve $y \in R_{H'}$ olur. $y \in R_H$ ise $y \in \bigoplus_{e_i \in H} \mathbb{K}e_i$ olur. $y \in R_{H'}$ ise $y \in \bigoplus_{e_j \in H'} \mathbb{K}e_j$ olur. $H = \{e_i \mid i \in I_1\}$, $H' = \{e_j \mid j \in I_2\}$ ve $I_3 = I_1 \cap I_2$ olarak alalım. Bu durumda $c_i, c_k \in \mathbb{K}$ ve $k \in I_1 \setminus I_3$ olmak üzere

$$y = \sum_{i \in I_3} c_i e_i + \sum_k c_k e_k$$

şeklindedir ve $d_i, d_l \in \mathbb{K}$ ve $l \in I_2 \setminus I_3$ olmak üzere

$$y = \sum_{i \in I_3} d_i e_i + \sum_l d_l e_l$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_3} c_i e_i + \sum_k c_k e_k &= \sum_{i \in I_3} d_i e_i + \sum_l d_l e_l \\ \Rightarrow \sum_{i \in I_3} (c_i - d_i) e_i + \sum_k c_k e_k - \sum_l d_l e_l &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_i = d_i \text{ öyle ki } i \in I_3;$$

$$c_k = 0 \text{ öyle ki } k \in I_1 \setminus I_3;$$

$$d_l = 0 \text{ öyle ki } l \in I_2 \setminus I_3$$

elde edilir. O halde $y = \sum_{i \in I_3} c_i e_i \in R_{H \cap H'}$ olur. Bu ise $R_H \cap R_{H'} \subseteq R_{H \cap H'}$ olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $R_H \cap R_{H'} = R_{H \cap H'}$ olur.

Şimdi de $e_i \in H_{R \cap R'}$ olsun. $e_i^2 \in R \cap R'$ olur. Bu durumda $e_i^2 \in R$ ve $e_i^2 \in R'$ dir. O halde $e_i \in H_R$ ve $e_i \in H_{R'}$ olur. Böylece $e_i \in H_R \cap H_{R'}$ dir. O halde $H_{R \cap R'} \subseteq H_R \cap H_{R'}$ olur. Diğer taraftan, $e_i \in H_R \cap H_{R'}$ olsun. O halde $e_i \in H_R$ ve $e_i \in H_{R'}$ dir. Böylece $e_i \in H_R$ olduğundan $e_i^2 \in R$ dir ve $e_i \in H_{R'}$ olduğundan $e_i^2 \in R'$ dir. $e_i^2 \in R \cap R'$ olur. O halde $e_i \in H_{R \cap R'}$ bulunur. Yani $H_R \cap H_{R'} \subseteq H_{R \cap R'}$ olur. Sonuç olarak, $H_{R \cap R'} = H_R \cap H_{R'}$ gösterilmiş olur.

(3) $x \in R_{H \cup H'}$ olsun. $H = \{e_i \mid i \in I_1\}$ ve $H' = \{e_j \mid j \in I_2\}$ alalım. O halde $I_3 = I_1 \setminus I_2$ olmak üzere

$$x = \sum_{i \in I_3 \subset I_1} \alpha_i e_i + \sum_{j \in I_2} \beta_j e_j \in R_H + R_{H'}$$

olduğundan $R_{H \cup H'} \subset R_H + R_{H'}$ olur. Diğer taraftan, $x \in R_H + R_{H'}$ olsun. O halde $x = y + z$ olacak şekilde $y \in R_H$ ve $z \in R_{H'}$ vardır. Buna göre

$$x = \sum_{i \in I_1} \alpha_i e_i + \sum_{j \in I_2} \beta_j e_j$$

yazılabilir. O halde

$$x = \sum_{i \in I_1 \cap I_2} (\alpha_i + \beta_i) e_i + \sum_{i \in I_1 \setminus I_2} \alpha_i e_i + \sum_{j \in I_2 \setminus I_1} \beta_j e_j = \sum_{i \in I_1 \cup I_2} \gamma_i e_i \in R_{H \cup H'}$$

olur. Dolayısıyla $R_H + R_{H'} \subset R_{H \cup H'}$ bulunur. O halde $R_{H \cup H'} = R_H + R_{H'}$ olur.

Şimdi de $H \cap H' = \emptyset$ olsun. (2) den dolayı $R_H \cap R_{H'} = R_{H \cap H'} = R_{\emptyset} = \{0\}$ dır. Böylece $R_{H \cup H'} = R_H \oplus R_{H'}$ olduğu görülür.

(4) $R_{H_R} = \bigoplus_{e_i \in H_R} \mathbb{K} e_i = \text{Span}(H_R)$ ve $H_{R_H} = \{e_i \in E^0 \mid e_i^2 \in R_H\}$ dır. $\lambda_i \in \mathbb{K}^\times$ olmak üzere,

$$0 \neq x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in R$$

alalım. Bu durumda

$$e_i x = \lambda_i e_i^2 \in R$$

olup $e_i^2 \in R$ elde edilir. Tanımdan, $e_i \in H_R$ olur ve böylece $x \in R_{H_R}$ bulunur. O halde $R \subset R_{H_R}$ dir.

Şimdi de $e_j \in H$ olsun. H bir kalıtsal alt küme olduğundan $T(e_j) \subset H$ dır.

$$e_j^2 = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

olarak yazıldığında H bir kalıtsal alt küme olduğundan $e_i \in H$ olur. Böylece $e_j^2 \in R_H$ olup $e_j \in H_{R_H}$ dır. O halde $H \subset H_{R_H}$ dır.

(5) $H = E^0$ olsun. $R_H = A$ olduğunu gösterelim. $R_H = \text{Span}(H)$ ve $H = E^0$ olduğundan $R_H = \text{Span}(E^0) = A$ dır. Diğer taraftan, $R_H = A$ olsun. $H = E^0$ olduğunu gösterelim:

$A = \text{Span}(H)$ dır. Varsayalım ki $H \neq E^0$ olsun. $H \subset E^0$ olduğu bilinmektedir. $H \subset E^0$ olduğundan H, E^0 ın lineer bağımsız bir alt kümesidir. $A = \text{Span}(H)$ olduğundan H, A için bir taban olur.

$H \neq E^0$ olduğundan en az bir $e_i \in E^0 \setminus H$ vardır. $A = \text{Span}(H)$ ve $e_i \in A$ olduğundan $e_j \in H$ olacak şekilde $e_i = \sum \lambda_j e_j$ olarak yazılabilir. Ancak $e_i \in E^0$ elemanı, bazı e_j lerin lineer bileşimi şeklinde yazıldığından bu durum E^0 ın lineer bağımsız oluşuyla çelişir. O halde $H = E^0$ olmalıdır.

(6) $A = R_{H_R}$ olduğundan $x = \sum_{e_i \in H_R} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{e_i \in H_R} \beta_i e_i \in A$ olmak üzere

$$xy = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i e_i^2 \in A^2$$

dir. $e_i \in H_R$ olduğundan da $e_i^2 \in R$ dir. Dolayısıyla $xy \in R$ dir.

Şimdi de $A^2 \subset R$ olsun. $R_{H_R} = A$ olduğunu gösterelim. $R_{H_R} \subseteq A$ olduğu açıktır. $x \in A$ alalım. O halde $x = \sum \lambda_i e_i$ yazılabilir. Buradan

$$xe_i = \lambda_i e_i^2 \in A^2 \subset R$$

olup $\lambda_i e_i^2 \in R$ dir. Yani $e_i^2 \in R$ dir. O halde $e_i \in H_R$ ve $x = \sum \lambda_i e_i$ olduğundan $x \in R_{H_R}$ dir. Böylece $A \subseteq R_{H_R}$ dir.

(7) $H = H_{R_H}$ olsun. $e_j \in E^0$ alıcı olmayan bir köşe olacak şekilde $r(s^{-1}(e_j)) \subset H$ olduğunu kabul edelim. B tabanına göre $e_j^2 = \sum_{i \in I} a_{ij} e_i$ nin i . koordinatı $a_{ij} \neq 0$ iken her $f \in E^1$ için $s(f) = e_j$ ve $r(f) = e_i$ dir. Buna göre $f \in s^{-1}(e_j)$ olup $e_i = r(f) \in r(s^{-1}(e_j)) \subset H$ olduğundan $e_i \in H$ olur. O halde $e_j^2 = \sum_{e_i \in H} k_i e_i$, $k_i \in \mathbb{K}$ yazılabilir. $e_j^2 \in R_H$ olur. O halde $e_j \in H_{R_H} = H$ olup $e_j \in H$ dır. Bu durumda H bir saturated kümedir.

Diğer taraftan, H bir saturated küme olsun. $H_{R_H} \subset H$ olduğunu gösterelim. $e_j \in H_{R_H}$ olsun. O halde $e_j^2 \in R_H$ dır ve $e_j^2 = \sum_{e_i \in H} k_i e_i$, $k_i \in \mathbb{K}$ dır. Buradan $r(s^{-1}(e_j)) \subset H$ olur. H bir saturated küme olduğundan $e_j \in H$ dır. Böylece $H_{R_H} \subset H$ olur. $H \subset H_{R_H}$ olduğu (4) şikkında gösterilmişti. O halde $H_{R_H} = H$ elde edilir.

(8) $H_R = \{e_i \in E^0 \mid e_i^2 \in R\}$ dir. $0 \neq e^2$ (e bir düzenli köşe) ve $r(s^{-1}(e)) \subset H_R$ olacak şekilde bir $e \in B$ alalım. O halde

$$e^2 = \sum_{e_i \in H_R} \lambda_i e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

yazılabilir. $H_R = R \cap B$ olduğundan $e^2 \in R$ olup $e \in H_R$ dir. O halde H_R bir saturated kümedir.

(9) $e_i \in H$ olsun. O halde $e_i \in R_H$ dir. Dolayısıyla $e_i \in R_H \cap B$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $e_i \in R_H \cap B$ olsun. $e_i \in R_H$ ve $e_i \in B$ dir. $e_i \in R_H$ iken $e_i \notin H$ olduğunu kabul edelim. Bu durum B nin lineer bağımsız küme oluşu ile çelişir. O halde $e_i \in H$ dir. Böylece istenen eşitlik elde edilmiş olur. \square

R_{H_R} nin R nin bir alt kümesi olmayabileceğine dair bir örnek aşağıda gösterilmiştir:

Örnek 4.2.4. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve doğal tabanı $B = \{e_1, e_2\}$ olsun. $e_1^2 = e_1 + e_2$, $e_2^2 = -e_1 - e_2$ olarak tanımlansın. $R = \text{Span}(\{e_1 + e_2\})$ alalım.

$H_R = \{e_i \in E^0 \mid e_i^2 \in R\} = \{e_1, e_2\} = B$ dir. O halde Önerme 4.2.3 (5) gereği $R_{H_R} = A$ olur. Böylece $R \subsetneq R_{H_R}$ dir. Çünkü A , R nin bir alt kümesi değildir. Örneğin $e_1 \in A$ dir, ancak $e_1 \notin R$ dir.

H_{R_H} nin H in bir alt kümesi olmayabileceğine dair bir örnek aşağıda gösterilmiştir:

Örnek 4.2.5. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve doğal tabanı $B = \{e_1, e_2\}$ olsun. $e_1^2 = e_1$ ve $e_2^2 = e_1$ olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} e_1^2 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ \Rightarrow e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ \Rightarrow (1 - a_{11})e_1 + (-a_{21})e_2 &= 0 \\ \Rightarrow a_{11} &= 1 \neq 0 \text{ ve } a_{21} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $s(f_1) = e_1$ ve $r(f_1) = e_1$ olacak şekilde bir $f_1 \in E^1$ vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} e_2^2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \\ \Rightarrow e_1 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \\ \Rightarrow a_{12} &= 1 \neq 0 \text{ ve } a_{22} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $s(f_2) = e_2$ ve $r(f_2) = e_1$ olacak şekilde bir $f_2 \in E^1$ vardır. Buna göre, B tabanı ile ilişkili graf şu şekildedir:



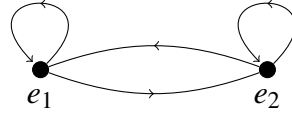
$H = \{e_1\}$ alalım. O halde $e_1 \in H$ için $T(e_1) = \{e_1\} \subset H$ dir. Böylece H bir kalıtsal alt kümedir. Bu durumda $R_H = \text{Span}(\{e_1\})$ olur. Dolayısıyla

$$H_{R_H} = \{e_i \in E^0 \mid e_i^2 \in R_H\} = \{e_1, e_2\} = B$$

dir. O halde H_{R_H}, H ın bir alt kümesi değildir. Yani $H \subsetneq H_{R_H}$ dir.

Önerme 4.2.3 (8) deki ifadenin karşınının genellikle doğru olmadığına dair bir örnek aşağıda verilmiştir. Yani H_R bir saturated küme iken $H_R \neq R \cap B$ olabileceğini görelim:

Örnek 4.2.6. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ doğal tabanı olsun. $e_1^2 = e_2^2 = e_1 + e_2$ ve $e_3^2 = e_3$ olarak tanımlansın. $R = \text{Span}(\{e_1 + e_2\})$ idealini alalım. O halde $H_R = \{e_1, e_2\}$ dir. Aşağıdaki grafa göre, H_R bir kalıtsal alt kümedir.

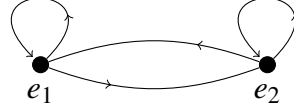


$e_1, e_2, e_3 \in E^0$ düzenli köşeleri için $r(s^{-1}(e_1)) = \{e_1, e_2\} \subset H_R$ olup $e_1 \in H_R$ dir. Ayrıca $r(s^{-1}(e_2)) = \{e_1, e_2\} \subset H_R$ olup $e_2 \in H_R$ dir. $r(s^{-1}(e_3)) = \{e_3\} \not\subset H_R$ dir. O halde H_R bir saturated kümedir. Fakat $R \cap B = \emptyset \neq H_R$ dir.

Not. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve B bir doğal tabanı olsun. H, B nin bir maksimal kalıtsal alt kümesi olsun. O halde ya $\{e_i \in B \mid e_i^2 = 0\} \subset H$ dir ya da $H \cup \{e_i\} = B$ olacak şekilde en fazla bir tane e_i alıcı köşe vardır.

Aşağıdaki örnek bir maksimal idealin varlığının, maksimal kalıtsal alt kümenin varlığına ihtiyaç duymadan ortaya çıkabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.2.7. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $B = \{e_1, e_2\}$ bir doğal tabanı olsun. $e_1^2 = e_1 + e_2$, $e_2^2 = e_1 + e_2$ olarak tanımlansın. Buna göre, B tabanı ile ilişkili graf şu şekildedir:



Eğer $H = \{e_1\}$ ise $T(e_1) = \{e_1, e_2\} \not\subset H$ olur. Eğer $H = \{e_2\}$ ise $T(e_2) = \{e_1, e_2\} \not\subset H$ olur. Bu durumda B nin boş kümeden farklı kalıtsal alt kümeleri yoktur.

$R = \text{Span}(\{e_1 + e_2\})$ alalım. Her $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{K}$ için,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta(e_1 + e_2)) &= \alpha_1 \beta e_1(e_1 + e_2) + \alpha_2 \beta e_2(e_1 + e_2) = \alpha_1 \beta e_1^2 + \alpha_2 \beta e_2^2 \\ &= (\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta)(e_1 + e_2) \in R \end{aligned}$$

olduğundan R, A nın bir idealidir.

Şimdi R nin A nın bir maksimal ideal olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için bir sonraki önermenin (1) maddesini kullanalım. İlk olarak $A^2 \subset R$ olduğunu görelim.

$x \in A$ alalım. $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ vardır. $x^2 = \alpha_1^2 e_1^2 + \alpha_2^2 e_2^2 = \alpha_1^2(e_1 + e_2) + \alpha_2^2(e_1 + e_2) \in R$ olduğundan $A^2 \subset R$ dir. Ayrıca $\dim_{\mathbb{K}}(A/R) = \dim_{\mathbb{K}}(A) - \dim_{\mathbb{K}}(R) = 2 - 1 = 1$ olduğundan Önerme 4.2.8 (1) gereği R, A nın bir maksimal idealidir.

Önerme 4.2.8. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

- (1) R, A nın bir ideali ve $A^2 \subset R$ olsun. O halde R nin A nın bir maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul $\dim_{\mathbb{K}}(A/R) = 1$ olmasıdır.
- (2) Eğer R, A nın bir maksimal ideali ve $A^2 \not\subset R$ ise, o zaman $R = R_{H_R}$ dir.
- (3) Eğer R_H, A nın bir maksimal ideali ise, o zaman H, \mathcal{H} kümesinin bir maksimal elemanıdır. Diğer taraftan, eğer H, \mathcal{H} kümesinin bir maksimal elemanı ve R_H, S nin bir alt kümesi olmamak üzere $A^2 \subset S \subsetneq A$ olacak şekilde bir S alt uzayı varsa o zaman R_H bir maksimal idealdir.

İspat: (1) R, A nın bir maksimal ideali olsun. O halde $x \notin R$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. $R + \mathbb{K}x, A$ nın bir idealidir. S, A cebirinin $A^2 \subset S \subset A$ şartını sağlayan bir alt uzayı iken S, A nın bir idealidir. Çünkü her $s \in S$ ve her $a \in A$ için $sa \in A^2 \subset S$ ve $as \in A^2 \subset S$ dir. O halde

$$A^2 \subset R \subset R + \mathbb{K}x \subset A$$

olduğundan $R + \mathbb{K}x, A$ nın bir idealidir. R idealinin maksimalliğinden, $R + \mathbb{K}x = A$ dır. Böylece Teorem 3.1.28 gereği

$$(R + \mathbb{K}x)/R \cong \mathbb{K}x/(\mathbb{K}x \cap R) \text{ olup } A/R \cong \mathbb{K}x$$

dir. O halde $\dim_{\mathbb{K}}(A/R) = 1$ olur.

Diğer taraftan J, A nın bir ideali ve $R \subsetneq J \subset A$ olsun. Hipotez gereği $A^2 \subset R \subsetneq J$ dir ve $A/J \subsetneq A/R$ dir. $\dim_{\mathbb{K}}(A/R) = 1$ olduğundan $A = J$ dir. O halde R, A nın bir maksimal ideali olur.

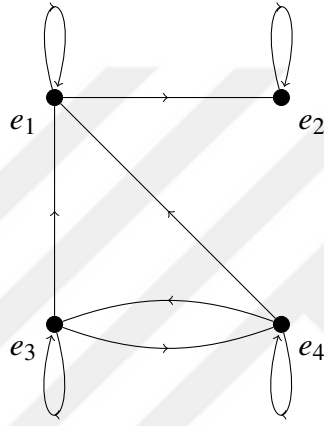
(2) Önerme 4.2.3 (4) gereği, $R \subset R_{H_R}$ dir. Önerme 4.2.3 (6) gereği de $R_{H_R} \neq A$ dır. Böylece hipotez gereği R, A nın bir maksimal ideali olduğundan $R = R_{H_R}$ olmak zorundadır.

(3) İlk olarak, $H \subset H'$ olacak şekilde bir $H' \in \mathcal{H}$ olduğunu kabul edelim. O halde $R_H \subset R_{H'}$ olur. R_H, A nın bir maksimal ideali olduğundan iki durum söz konusudur: ya $R_{H'} = R_H$ dır ya da $R_{H'} = A$ dır. İlk durum geçerli olursa, her $e \in H'$ için $e \in R_{H'}$ dır ve dolayısıyla $e \in R_H$ olur. Buradan $e \in H$ bulunur. O halde $H' \subset H$ dır. Böylece $H' = H$ elde edilir. Eğer ikinci durum geçerli olursa, Önerme 4.2.3 (5) gereği $H' = E^0$ olur. Yani her iki durumdan H in \mathcal{H} kümesinin bir maksimal elemanı olduğu sonucu çıkar.

Diğer taraftan H, \mathcal{H} kümesinin bir maksimal elemanı olsun. $A^2 \subset S \subsetneq A$ şartını sağlayan her S alt uzayı için R_H in S nin bir alt kümesi olmadığını kabul edelim. J, A nın bir ideali ve $R_H \subset J \neq A$ olsun. O halde Önerme 4.2.3 (4) gereği $H \subset H_{R_H} \subset H_J$ dir. Böylece H_{R_H} da bir kalıtsal alt küme olup ya $H_J = H$ dır ya da $H_J = E^0$ dır. Eğer $H_J = E^0$ olursa, o zaman Önerme 4.2.3 (5) gereği $R_{H_J} = A$ olur. Buradan $J_{H_J} = A$ olup Önerme 4.2.3 (6) gereği $A^2 \subset J$ dir. Böylece $A^2 \subset J \subsetneq A$ olur ki bu $R_H \subset J$ oluşu ile çelişir. O halde $H_J \neq E^0$ dır. Bu durumda $H_J = H$ dır. O zaman $J \subset J_{H_J} = \text{Span}(H_J) = R_{H_J} = R_H$ olup $R_H = J$ dir. Böylece R_H, A nın bir maksimal idealidir. \square

Önerme 4.2.8 (2) deki ifadenin karşıtı ile Önerme 4.2.8 (3) ün ilk kısmındaki ifadenin karşıtı genellikle doğru değildir. Yani, tüm $H \in \mathcal{H}$ maksimal elemanları, R_H maksimal ideallerini üretmez:

Örnek 4.2.9. A , doğal tabanı $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olan ve çarpımı $e_1^2 = e_1 + e_2$, $e_2^2 = e_2$, $e_3^2 = e_1 + e_3 + e_4$, $e_4^2 = e_1 + e_3 + e_4$ ile tanımlı bir evrim \mathbb{K} -cebir olsun. Buna göre, B tabanı ile ilişkili graf şu şekildedir:



O halde $H = \{e_1, e_2\}$, B nin bir maksimal kalıtsal alt kümesidir. Çünkü $e_1, e_2 \in H$ için $T(e_1) = \{e_1, e_2\} \subset H$ ve $T(e_2) = \{e_2\} \subset H$ olduğundan H bir kalıtsal alt kümedir. $H' \neq H$ ve $H' \neq E^0$ şartını sağlayan bir $H \subset H' \subset E^0$ kümesi, ya $\{e_1, e_2, e_3\}$ ya da $\{e_1, e_2, e_4\}$ olabilir.

Ancak $T(e_3) = \{e_1, e_3, e_4\}$ ve $T(e_4) = \{e_1, e_3, e_4\}$ olacağından $T(e_3)$ ile $T(e_4)$ kümeleri, H' nün alt kümeleri değildirler. Yani H' bir kalıtsal alt küme olamaz. O halde ya $H = H'$ dir ya da $H' = E^0$ dir. Dolayısıyla H, B nin bir maksimal kalıtsal alt kümesidir.

Ancak $R_H = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2$, A nın bir maksimal ideali değildir. Çünkü $J = \text{Span}(\{e_1, e_2, e_3 + e_4\})$, A nın bir ideali olup $R_H \subset J$ ve $J \neq A$ dir. O halde Önerme 4.2.8 (3) ün ilk kısmındaki ifadenin karşıtı doğru olmayabilir. Eğer R ideali, $R := \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2$ olarak alınırsa $R = R_{H_R}$ olur. A^2 , R nin bir alt kümesi değildir ancak R bir maksimal ideal de değildir. Yani Önerme 4.2.8 (2) deki ifadenin karşıtı doğru değildir.

Sonuç 4.2.10. *A bir mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri olsun. Eğer R , A 'nın bir maksimal ideali ise o zaman $R = R_H$ olacak şekilde bir H maksimal kalıtsal alt küme vardır. Üstelik, $H = H_R$ dir ve R bir temel idealdir.*

İspat: R , A 'nın bir maksimal ideali olsun. O halde $R = R_H$ alındığında R_H bir maksimal ideal olur. Önerme 4.2.8 (3) gereği H, \mathcal{H} da bir maksimal kalıtsal alt kümedir.

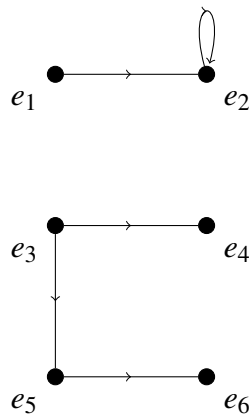
A bir mükemmel evrim cebiri olduğundan A^2 , R 'nin bir alt kümesi değildir. Ayrıca R bir maksimal ideal olduğundan Önerme 4.2.8 (2) gereği $R = R_{H_R}$ dir. $R = R_H$ kabulünden de $R_H = R_{H_R}$ olur. Bu ise her $e_i \in H$ için $e_i^2 \in H$ olmasını gerektirir. Böylece $H = H_R$ dir. Lemma 4.2.2 (1) gereği de R_H , A 'nın bir temel idealidir. $R_H = R$ olduğundan R , A 'nın bir temel idealidir. \square

Not. Önerme 4.2.8 dan, $A^2 \subset R \subsetneq A$ koşulunu sağlayan R maksimal idealleri dışındaki tüm maksimal ideallerin, bir evrim cebiriyle ilişkili graftan elde edilebileceği görülür. Özetle, bir evrim cebirinin maksimal ideallerinin iki şekilde var olduğunu söyleyebiliriz:

- (1) A^2 yi kapsayan A 'nın 1 co-boyutlu alt uzayları.
- (2) $H \in \mathcal{H}$ bir maksimal kalıtsal alt küme ve S kümesi, $A^2 \subset S \subsetneq A$ şartını sağlayan bir alt uzay olmak üzere S tarafından kapsanmayan R_H idealleri.

Örnek 4.2.11, A^2 yi kapsayan sonsuz sayıda maksimal idealin varlığını gösterir.

Örnek 4.2.11. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ doğal tabanı olsun. $e_1^2 = e_2$, $e_2^2 = e_2$, $e_3^2 = e_4 + e_5$, $e_4^2 = 0$, $e_5^2 = e_6$, $e_6^2 = 0$ olarak tanımlansın. B tabanı ile ilişkili graf şu şekildedir:



$H_1 = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ve $H_2 = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$ maksimal kalıtsal alt kümeler olmak üzere $R_1 = \text{Span}(H_1)$ ve $R_2 = \text{Span}(H_2)$ maksimal ideallerdir. Çünkü $A^2 = \text{Span}(\{e_2, e_4 + e_5, e_6\})$ olmak üzere $A^2 \subset R_1$ ve $A^2 \subset R_2$ dir. Üstelik $\det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) \neq 0$ olacak şekilde $R' = \text{Span}(\{e_2, e_4 + e_5, e_6, \alpha e_1 + \beta e_3, \gamma e_1 + \delta e_3\})$ alt uzayı için $A^2 \subset R' \subset A$ dir. Bu şekilde sonsuz sayıda R' maksimal ideali bulunur.

Önerme 4.2.12. *A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$ doğal tabanı olsun. $J \triangleleft A$ bir maksimal ideal olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

- (1) *Eğer $e \in B \setminus J$ ise, o zaman her $e_i \in B$ için ya $e_i \in T(e)$ dir ya da $e_i^2 \in J$ dir. Bir başka deyişle, $B = T(e) \cup H_J$ dir.*
- (2) *Eğer $\dim_{\mathbb{K}}(A/J) \neq 1$ ise, o zaman her $e \in B$ için $e^2 \in J$ ise $e \in J$ dir, yani $H_J = J \cap B$ dir.*

İspat: (1) $e_i \notin T(e)$ olduğunu kabul edelim. $e \notin J$ olduğundan ve J bir maksimal ideal olduğundan, $J + J_{T(e)} = A$ dir. Çünkü $T(e)$, başlangıç köşesi e olan yolların bitiş köşelerinin kümesi olup her $u \in T(e)$ için $T(u) \subset T(e)$ dir. Yani $T(e)$ kalıtsal bir alt kümedir. Lemma 4.2.2 (1) den, $J_{T(e)} = \text{Span}(T(e)) = \bigoplus_{e_j \in T(e)} \mathbb{K}e_j$, A nın bir idealidir. $J_{T(e)}$, J nin bir alt kümesi olmadığından $J + J_{T(e)} = A$ dir.

O halde $x \in J$ ve $z = \sum_j \lambda_j e_j$ öyle ki $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $e_j \in T(e)$ olmak üzere $e_i = x + z$ yazılabilir. Bu durumda $e_i \notin T(e)$ olduğundan $e_i^2 = e_i(x + z) = e_i x + e_i z = e_i x \in J$ olur. Buradan $e_i \in H_J$ dir.

(2) Her $e \in B$ için $e^2 \in J$ olsun. $J \subset J + \mathbb{K}e \triangleleft A$ dir. $J \triangleleft A$ bir maksimal ideal olduğundan ya $J + \mathbb{K}e = J$ ya da $J + \mathbb{K}e = A$ olur. İlk durum geçerli olursa, $e \in J$ olur. İkinci durum geçerli olursa, iki ihtimal söz konusudur:

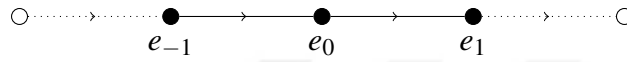
- (i) Eğer $J \cap \mathbb{K}e \neq \{0_A\}$ ise bir $0_A \neq x \in J \cap \mathbb{K}e$ vardır. O halde $x \in J$ ve $x \in \mathbb{K}e$ dir. $x = \alpha e$ olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{K}$ vardır. Bu durumda $\alpha e \in J$ dir. J , A nın bir ideali olduğundan $e \in J$ dir.
- (ii) Eğer $J \cap \mathbb{K}e = \{0_A\}$ ise, Teorem 3.1.28 gereği $(J + \mathbb{K}e)/J \cong \mathbb{K}e/(\mathbb{K}e \cap J)$ olup $A/J \cong \mathbb{K}e$ dir. Bu ise $\dim_{\mathbb{K}}(A/J) \neq 1$ oluşu ile çelişir. O halde, $H_J \subset J \cap B$ dir. Diğer taraftan, $J \cap B \subset H_J$ olduğu açıktır. Böylece $H_J = J \cap B$ dir.

□

Aşağıdaki örnek, maksimal idealleri veya maksimal kalıtsal alt kümeleri olmayan sonsuz boyutlu bir evrim \mathbb{K} -cebirini göstermektedir.

Örnek 4.2.13. A bir evrim \mathbb{K} -cebirini ve doğal tabanı $B = \{e_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Her $i \in \mathbb{Z}$ için $e_i^2 = e_{i+1}$ olarak tanımlansın. B tabanı ile ilişkili graf

E :



şeklindedir. A cebiri bir mükemmel evrim cebiridir. Her bir $H_n = \{e_i \mid i \geq n\}$ kümesi bir kalıtsal alt kümedir ve hiç maksimal kalıtsal alt küme yoktur. Üstelik R , A nın bir ideali olmak üzere $R_{H_n} = \bigoplus_{i \geq n} \mathbb{K}e_i$ de bir idealdir. Bu durumda A da hiç maksimal ideal de bulunmamaktadır.

Genel olarak, keyfi seçilen cebirlerde maksimal ideallerin kesin olarak varlığı söylenemez. Buna rağmen, eğer bir A \mathbb{K} -cebirini sonlu üretilmiş ise, o zaman Önerme 3.1.30 gereği A nın maksimal idealleri vardır. Buna bir örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 4.2.14. A bir evrim \mathbb{K} -cebirini ve doğal tabanı $B = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ olsun. A daki çarpım $e_1^2 = e_1 + e_2$ ve her $i \geq 2$ için $e_i^2 = e_{i+1}$ olarak tanımlansın. B tabanı ile ilişkili graf

E :



şeklindedir. Her $x \in A$ için $x = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} c_i e_i$ olacak şekilde $c_i \in \mathbb{K}$, $i \in \mathbb{N}^*$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
x &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + \sum_{i \geq 3} c_i e_i \\
&= c_1 e_1 + c_2 e_2 + \sum_{i \geq 2} c_{i+1} e_{i+1} \\
&= c_1 e_1 + c_2 e_2 + \sum_{i \geq 2} c_{i+1} e_i^2 \\
&= c_1 e_1 + c_2 e_2 + \sum_{i \geq 2, j \geq 1} c_{i+1} a_{ji} e_j \\
&\vdots \\
&= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2
\end{aligned}$$

olacak şekilde uygun $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ bulunur. Yani A , $\{e_1, e_2\}$ kümesi ile üretilir. $R = \text{Span}(\{e_2\})$ ideali, Önerme 3.1.30 gereği bir maksimal idealdir.

4.2.2. Sonlu Üretilmiş Evrim Cebirleri

Lemma 4.2.15. (Casado, Barquero vd., 2024) *A keyfi boyutlu bir evrim \mathbb{K} -cebir, ancak bir cebir olarak sonlu üretilmiş olsun. O halde A ile ilişkili yönlü E grafinde E^0 , sonlu bir kümenin kalıtsal kapanışına eşit olur.*

İspat: A , keyfi boyutlu bir evrim \mathbb{K} -cebir (bu sonsuz boyutlu olduğu durumu da içerir) olsun. A nın bir \mathbb{K} -cebir olarak sonlu üretilmiş olduğunu varsayalım. O halde $\{g_1, \dots, g_q\}$, A nın bir sonlu üreteç kümesi olsun.

A nın bir doğal tabanını $B = \{e_i \mid i \in I\}$ olarak sabitleyelim. Aynı zamanda B kümesi, A ile ilişkili yönlü E grafin E^0 köşe kümesi olarak alınsın.

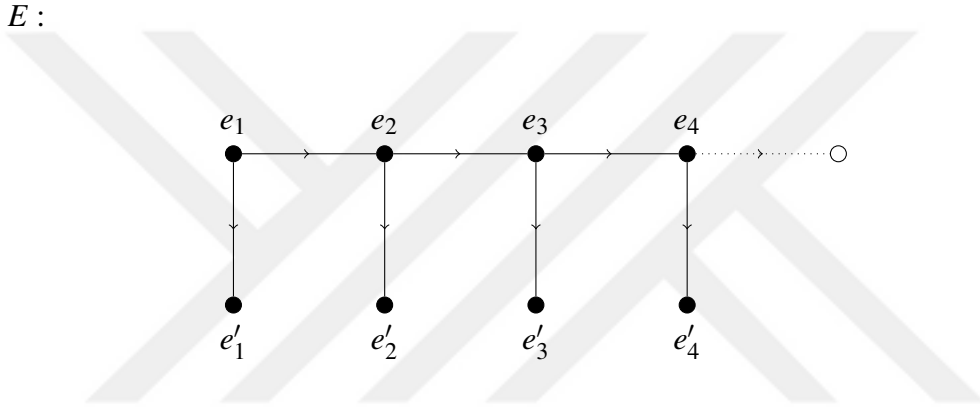
Her $j = 1, \dots, q$ için, genelliği bozmadan, her $\lambda_{jk} \in \mathbb{K}^\times$ ve uygun bir n için $g_j = \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} e_k$ olarak yazabiliriz. $\{e_1, \dots, e_n\} \subset B$ kümesinin kalıtsal kapanışını, yani bu kümeyi kapsayan en küçük kalıtsal alt kümeyi H ile gösterelim. Amacımız $H = B = E^0$ olduğunu göstermektir.

R , A nın bir ideali olmak üzere her $l \in \{1, \dots, n\}$ için $e_l \in H$ olduğundan $e_l \in R_H$ dir ve böylece her j için $g_j \in R_H$ olur. Buradan her $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, q\}$ için $(\dots (g_{j_1} g_{j_2}) \dots) g_{j_m}$ şeklindeki her sonlu çarpım, R_H in elemanı olur. Böylece $A = R_H$ dir. Bu durumda Önerme 4.2.3 (5) gereği $H = B = E^0$ olur. \square

Örnek 4.2.14 de, A \mathbb{K} -cebiri sonsuz boyutludur, ancak $\{e_1, e_2\}$ kümesi A nın bir üreteç sistemidir. Ayrıca Lemma 4.2.15 gereği, $\{e_1, e_2\}$ kümesinin kalıtsal kapanışı $\overline{\{e_1, e_2\}} = \{e_i \mid i \geq 1\}$ dir.

Lemma 4.2.15 da verilen koşulun yeterli olduğunu ancak bir sonraki örnekte gösterildiği gibi gerekli olmadığını belirtebiliriz.

Örnek 4.2.16. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve doğal tabanı $B = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{e'_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ olsun. A daki çarpma her $i \in \mathbb{N}^*$ için $e_i^2 = e_{i+1} + e'_i$ olarak tanımlansın. A ile ilişkili E yönlü grafında köşe kümesi $E^0 = \overline{\{e_1\}}$ dir.



şeklindedir. A sonlu üretilmiş değildir. Bunu göstermek için A nın sonlu üretilmiş bir \mathbb{K} -cebir olduğunu varsayalım. O halde $\exists n \in \mathbb{N}^*$ vardır öyle ki $B' = \{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_{n-1}\} \subset B$ alt kümesi, $S = \{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_{n+1} + e'_n, e_{n+2} + e'_{n+1}, \dots\}$ kümesinin elemanlarını üretir. Ancak e_{n+1} , S deki elemanların bir lineer bileşimi olarak ifade edilemez.

Burada bir maksimal ideal olarak, $R = \text{Span}(\{e'_i, e_{j+1} \mid i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}^*\})$ alınabilir. Bu durumda R ideali teklikle bellidir.

Önerme 4.2.17. A keyfi boyutlu bir evrim \mathbb{K} -cebir ve doğal tabanı B olsun. E , A ile ilişkili yönlü graf olsun. E nin sonlu sayıda çatallanma içerdiğini varsayalım. A nın bir \mathbb{K} -cebir olarak sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul sonlu bir $S \subset E^0$ alt kümesi için $E^0 = \overline{S}$ olmasıdır.

İspat: (\Rightarrow): A sonlu üretilmiş olsun. O halde Lemma 4.2.15 gereği $E^0 = \overline{S}$ olacak şekilde sonlu bir $S \subset E^0$ kümesi vardır.

(\Leftarrow): Diğer taraftan, E nin sadece sonlu sayıda çatallanma ve bağlantılı bileşen içerdiğini ve sonlu bir S kümesi için $E^0 = \bar{S}$ olduğunu varsayalım. $V \subset E^0$ tüm çatallanmaların kümesi olsun. Bu durumda $S' = S \cup V \cup r(s^{-1}(V))$ kümesini alalım. O halde $\bar{S}' = E^0$ dır ve S' sonlu bir kümedir. Eğer $u \notin S'$ ve $f \in E^1$ için $s(f) \in S'$ ve $r(f) = u$ ise, o zaman $s(f)$ bir çatallanma köşesi değildir. Böylece $k \in \mathbb{K}^\times$ olmak üzere $(s(f))^2 = ku \neq 0$ dır. Bu durumda u, S' kümesi tarafından üretilen alt cebirin elemanıdır.

Şimdi de $s(\lambda) \in S'$ ve $r(\lambda) = u$ olacak şekilde $n \geq 1$ uzunluğunda keyfi bir λ yolu (çatallanmalar olmadan) olan herhangi bir $u \notin S'$ için, u nun S' tarafından üretilen alt cebirde olduğunu varsayalım. Daha sonra bir $u \notin S'$ elemanını ve kaynağı S' içinde ve $r(\mu) = u$ olan $n + 1$ uzunluğunda bir μ yolunu (çatallanmalar olmadan) ele alalım. O halde n uzunluğundaki λ yolunu ekleyerek $\mu = \lambda f$ yolunu elde ederiz:

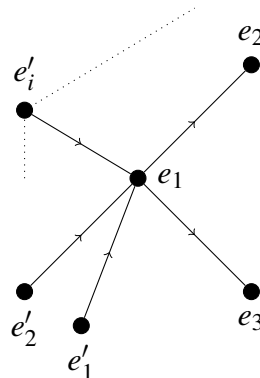
- (i) Eğer $s(f) \in S'$ ise, (ilk tümevarım adımından dolayı) u', S' tarafından üretilen alt cebirdedir.
- (ii) Eğer $s(f) \notin S'$ ise, o zaman $s(f)$ tümevarım hipotezi gereği S' tarafından üretilen alt cebirdedir. Ayrıca $s(f)$ bir çatallanma değildir, dolayısıyla $h \in \mathbb{K}^\times$ için $(s(f))^2 = hu \neq 0$ dır. Bu da u nun S' tarafından üretilen alt cebirde olduğunu gösterir.

□

Aşağıdaki örnekler, Önerme 4.2.17 ile ilgilidir.

Örnek 4.2.18. A bir evrim \mathbb{K} -cebir ve doğal tabanı $B = \{e_1, e_2, e_3\} \cup \{e'_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ olsun. A daki çarpma $e_1^2 = e_2 + e_3$, $e_2^2 = 0$, $e_3^2 = 0$ ve her $i \in \mathbb{N}^*$ için $e_i'^2 = e_1$ olarak tanımlansın. A ile ilişkili yönlü graf E olsun. Bu durumda

E :

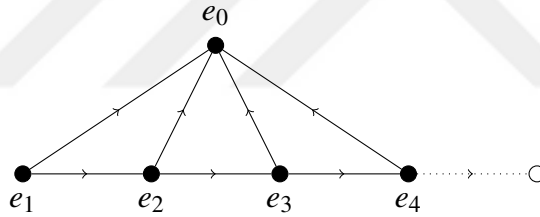


şeklindedir. Burada sadece bir çatallanma (e_1 de) vardır. $E^0 = \bar{S}$ olacak şekilde sonlu bir $S \subset E^0$ alt kümesi mevcut değildir. Çünkü uygun bir $n \in \mathbb{N}^*$ için $S = \{e_1, e_2, e_3, e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ alınrsa $\bar{S} = S \neq E^0$ dir. Önerme 4.2.17 gereği A sonlu üretilmemiştir. Bu örnekte tüm maksimal ideallerin ailesi, her $k \in \mathbb{N}^*$ için $I_k = \text{Span}(\{e_1, e_2, e_3, e'_i \mid i \in \mathbb{N}^* \} \setminus \{e'_k\})$ ile verilebilir.

Önerme 4.2.17, bir A evrim cebiri ile ilişkili grafta sonsuz sayıda çatallanma olduğu durumlarda da gerçekleşebilir:

Örnek 4.2.19. A bir evrim \mathbb{K} -cebir ve doğal tabanı $B = \{e_0\} \cup \{e_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ olsun. A daki çarpma $e_0^2 = 0$, her $i \in \mathbb{N}^*$ için $e_i^2 = e_0 + e_{i+1}$ olarak tanımlansın. A ile ilişkili yönlü graf E olsun. Bu durumda

E :



şeklindedir. Burada sonsuz sayıda çatallanma vardır. A , cebir olarak $\{e_0, e_1\}$ kümesi tarafından sonlu üretilmiştir:

Her $x \in A$ için $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i e_i$ olacak şekilde $c_i \in \mathbb{K}$, $i \in \mathbb{N}$ vardır. Yani

$$\begin{aligned} x &= c_0 e_0 + c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \dots \\ &= c_0 e_0 + c_1 e_1 + c_2 (e_1^2 - e_0) + c_3 (e_2^2 - e_0) + \dots \\ &= c_0 e_0 + c_1 e_1 + c_2 e_1^2 - c_2 e_0 + c_3 ((e_1^2 - e_0)^2 - e_0) + \dots \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Üstelik, E nin köşe kümesi $E^0 = \overline{\{e_1\}}$ dir. Bu örnekte, $I = \text{Span}(\{e_0, e_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}^*\})$ kümesi, A nın tek maksimal idealidir.

4.2.3. Absorbsiyon Özelliğini Sağlayan İdealler ve Galois Bağlantısı

Bu bölümde, ilk olarak bir cebirin ne zaman absorpsiyon özelliğine sahip idealleri olduğu incelenecektir. Buna ek olarak, absorpsiyon özelliği graf açısından karakterize edilecektir. Daha sonra tüm kalıtsal ve saturated alt kümelerin kümesi ile absorpsiyon özelliğine sahip tüm ideallerin kümesinin belirli dönüşümlerle bir Galois bağlantısı oluşturduğu kanıtlanacaktır. Mükemmel evrim cebirleri için bu bağlantının monoton olduğu elde edilecektir (Casado, Barquero vd., 2024).

Absorpsiyon Özelliğini Sağlayan İdealler

Bu kısımda, absorpsiyon özelliğine sahip ideallerle ilgili bazı önermeler verilecektir.

Önerme 4.2.20. *A bir değişmeli \mathbb{K} -cebir olsun. Eğer R , $\dim_{\mathbb{K}}(A/R) \neq 1$ veya A^2 , R nin bir alt kümesi olmayacak şekilde A nın bir maksimal ideali ise, o zaman R absorpsiyon özelliğini sağlar. Sonuç olarak, A bir değişmeli mükemmel evrim \mathbb{K} -ceberi ve R bir maksimal ideal ise, o zaman R absorpsiyon özelliğine sahiptir.*

İspat: $xA \subset R$ olsun. $R \subset R + \mathbb{K}x$ olup $R + \mathbb{K}x$, A nın bir ideali ve R bir maksimal ideal olduğundan iki ihtimal söz konusudur: ya $R + \mathbb{K}x = A$ dır ya da $R + \mathbb{K}x = R$ dir.

İlk olarak, $\dim_{\mathbb{K}}(A/R) \neq 1$ olduğunu kabul edelim. O halde $R + \mathbb{K}x \neq A$ dır. Bu durumda $R + \mathbb{K}x = R$ olmak zorundadır. Buradan $x \in R$ elde edilir.

Şimdi de A^2 nin R nin bir alt kümesi olmadığını kabul edelim. O halde $R + \mathbb{K}x \neq A$ dır. Aksi halde $R + \mathbb{K}x = A$ olsaydı o zaman, her $k, k' \in \mathbb{K}$ ve her $y + kx, y' + k'x \in A$ için

$$(y + kx)(y' + k'x) = yy' + k'yx + kxy' + kk'x^2 \in R + \mathbb{K}x^2$$

olup $xA \subset R$ hipotezi gereği $A^2 \subset R + \mathbb{K}x^2 \subset R$ olurdu. Bu ise A^2 nin R nin bir alt kümesi olmayışı ile çelişir. Öyleyse $R + \mathbb{K}x = R$ olmak zorundadır. O halde $x \in R$ dir. \square

Önerme 4.2.21. *A dejenere olmayan bir evrim \mathbb{K} -ceberi, H bir kalıtsal ve saturated küme olsun. O halde R , A nın bir ideali olmak üzere R_H absorpsiyon özelliğini sağlar.*

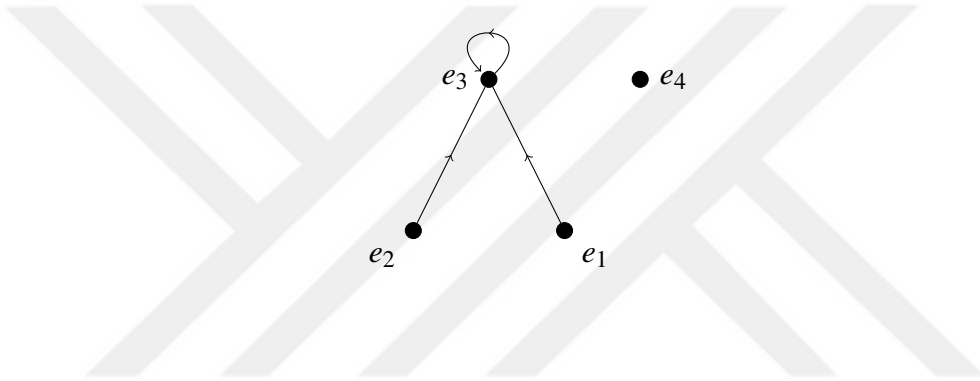
İspat: $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı olsun. R_H in, A nın bir ideali olduğu Lemma 4.2.2 den bilinmektedir. $0 \neq x = \sum_{i \in \text{supp}(x)} \lambda_i e_i$ olacak şekilde $xA \subset R_H$ olduğunu kabul

edelim. Her $i \in \text{supp}(x)$ için $0 \neq xe_i = \lambda_i e_i^2 \in R_H = \bigoplus_{e \in H} \mathbb{K}e$ olduğundan $e_i^2 \neq 0$ için $e_i^2 \in R_H$ olup $r(s^{-1}(e_i)) \subset H$ olur. H bir saturated küme olduğundan her $i \in \text{supp}(x)$ için $e_i \in H$ dır. O halde $x \in R_H$ dır. \square

Bir sonraki örnekte görüleceği gibi dejener olmama koşulu kaldırılamaz bir koşuldur.

Örnek 4.2.22. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve doğal tabanı $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. A daki çarpma $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_3$ ve $e_4^2 = 0$ olarak tanımlansın. Bu durumda A dejeneredir. A ile ilişkili graf aşağıdaki gibidir:

E :



B kümesinin bir $H = \{e_1, e_2, e_3\}$ alt kümesini alalım.

$$e_1 \in H \quad \text{için} \quad r(s^{-1}(e_1)) = \{e_3\} \subset H$$

$$e_2 \in H \quad \text{için} \quad r(s^{-1}(e_2)) = \{e_3\} \subset H$$

$$e_3 \in H \quad \text{için} \quad r(s^{-1}(e_3)) = \{e_3\} \subset H$$

olduğundan H bir kalıtsal alt kümedir. Üstelik H bir saturated alt kümedir. Eğer $x = e_1 + e_4$ olarak alırsak, o zaman $\mathbb{K}e_3 = xA \subset R_H$ dır, ancak $x \notin R_H$ dır. Yani R_H , absorpsiyon özelliğini sağlamaz.

Önerme 4.2.23. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $H \in \mathcal{H}$ olsun. R , A nın bir ideali olmak üzere R_H absorpsiyon özelliğini sağlarsa o zaman H bir saturated kümedir.

İspat: $B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir doğal tabanı olsun. $e^2 \neq 0$ olacak şekilde bir $e \in B$ alalım ve $r(s^{-1}(e)) \subset H$ olsun. O halde $e^2 = \sum_{e_j \in H} \lambda_j e_j \in R_H$ dır. Böylece $eA \subset R_H$ olup R_H absorpsiyon özelliğini sağladığından $e \in R_H$ dır. Yani $e \in R_H \cap B$ dir. Önerme 4.2.3 (9) gereği $e \in H$ olur. \square

A dejenere olmayan bir evrim \mathbb{K} -cebiri ise, H nin ancak ve ancak R_H absorbsiyon özelliğine sahip ise kalıtsal ve saturated bir alt küme olduğu gözlemlenebilir.

Aşağıdaki teorem, absorbsiyon özelliğine sahip idealleri karakterize eder.

Teorem 4.2.24. *A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve doğal tabanı $B = \{e_i \mid i \in I\}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(1) R ideali, absorbsiyon özelliğini sağlar.

(2) $H_R = R \cap B$ dir.

(3) $R = R_{H_R}$ dir.

İspat: (1) \Rightarrow (2): R ideali, absorbsiyon özelliğini sağlasın ve $e \in H_R$ alalım. O halde $e^2 \in R$ dir ve $eA \subset R$ olur. R , absorbsiyon özelliğini sağladığından $e \in R$ dir. Böylece $e \in R \cap B$ olup $H_R \subset R \cap B$ elde edilir. Diğer taraftan, eğer $e \in R \cap B$ ise, R bir ideal olduğundan $e^2 \in R$ dir. Böylece $e \in H_R$ olup $R \cap B \subset H_R$ bulunur. Bu durumda $H_R = R \cap B$ dir.

(2) \Rightarrow (3): $H_R = R \cap B$ olduğunu kabul edelim. Önerme 4.2.3 (4) gereği $R \subset R_{H_R}$ olduğu bilinmektedir. Şimdi de $x = \sum_{e_i \in H_R} \lambda_i e_i \in R_{H_R}$ elemanını alalım. $H_R = R \cap B$ ve R bir ideal olduğundan $x \in R$ dir. O halde $R_{H_R} \subset R$ olur. Buradan $R_{H_R} = R$ elde edilir.

(3) \Rightarrow (1): $R_{H_R} = R$ olduğunu kabul edelim. $xA \subset R$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in A$ alalım. $x = \sum_{i \in \text{supp}(x)} \lambda_i e_i$ yazabiliriz. Böylece her $i \in \text{supp}(x)$ için $x e_i = \lambda_i e_i^2 \in R$ olur. Buradan her $i \in \text{supp}(x)$ için $e_i \in H_R \subset R_{H_R} = R$ olup $x \in R$ elde edilir. Yani R ideali, absorbsiyon özelliğini sağlar. \square

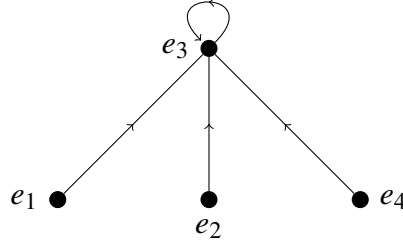
Önerme 4.2.21 ve Teorem 4.2.24, dejenere olmayan evrim cebirleri için, sadece ilişkili grafin kalıtsal ve saturated kümelerine bakarak absorbsiyon özelliğine sahip idealleri bulmanın bir yöntemini vermektedirler.

Sonuç 4.2.25. *A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve doğal tabanı B olsun. Eğer R , A nın $A^2 \not\subset R$ şartını sağlayan bir maksimal ideali ise, o zaman R absorbsiyon özelliğini sağlar ve $H_R = R \cap B$ bir saturated kümedir.*

$A^2 \subset R$ iken Sonuç 4.2.25 un sağlanmadığı sıradaki örnekte görülmektedir.

Örnek 4.2.26. *A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ doğal tabanı olsun. A daki çarpma $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_3$ olarak tanımlansın. A ile ilişkili graf şekilindeki gibidir:*

E :



$R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3$ idealini alalım. $A^2 \subset R$ dir ve $\dim_{\mathbb{K}}(A/R) = \dim_{\mathbb{K}}(A) - \dim_{\mathbb{K}}(R) = 4 - 3 = 1$ olur. O halde R, A nın bir maksimal idealidir.

$x = e_4$ alalım. O halde $\mathbb{K}e_3 = xA \subset R$ dir, ancak $x \notin R$ dir. Böylece R nin absorpsiyon özelliğini sağlamadığı görülür. Üstelik, $H = \{e_1, e_2, e_3\}$ kalıtsal alt kümesi için $H_R = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = B$ dir ve H_R bir saturated kümedir ancak $H_R = B \neq R \cap B = \{e_1, e_2, e_3\}$ dir.

Teorem 4.2.27. *A sonlu boyutlu bir mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri ve R, A nın bir ideali olsun. O halde $R = R_{H_R}$ dir ve R absorpsiyon özelliğini sağlar.*

İspat: İlk olarak, $\dim_{\mathbb{K}}(R) = |H_R|$ olduğunu gösterelim. Bunun için, $B = \{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ kümesi, A nın bir doğal tabanı olsun. $H_R = \{e_i \in B \mid e_i^2 \in R\}$ dır. $\{v_j \mid j = 1, \dots, s\}$ kümesi, R nin bir tabanı olsun. $N := |H_R|$ olsun. O halde $H_R = \{e_i \mid i = 1, \dots, N\}$ olur. $\{e_i^2 \mid i = 1, \dots, N\} \subset R$ lineer bağımsız bir küme olduğundan $N \leq \dim_{\mathbb{K}}(R) = s$ dir.

Diyelim ki $N < s$ olsun. Bu durumda öyle bir $l \in \{1, \dots, s\}$ vardır ki $v_l = \sum_{k=1}^N \mu_{kl}e_k + \sum_{k=N+1}^n \mu_{kl}e_k \in R$ dir. Burada uygun $j \in \{N+1, \dots, n\}$ için $\mu_{jl} \neq 0$ dır, aksi halde $\mu_{jl} = 0$ olsa, $\{v_j \mid j = 1, \dots, s\}$ lineer bağımsız kümesindeki elemanlar, $\{e_k \mid k = 1, \dots, N\}$ lineer bağımsız alt kümesindeki elemanların bir lineer bileşimi olarak yazılabilir, ancak bu mümkün değildir. O halde $\mu_{jl} \neq 0$ dır. Ancak $v_l e_j = \mu_{jl} e_j^2 \in R$ olur, yani $e_j^2 \in R$ dir. O halde $e_j \in H_R$ olur, ancak bu $e_j \notin H_R$ oluşu ile çelişir. Buna göre $N < s$ olamaz. O halde $N = s$ dir. Yani $\dim_{\mathbb{K}}(R) = |H_R|$ dir. Önerme 4.2.3 (4) gereği $R \subset R_{H_R}$ olduğundan $R = R_{H_R}$ olduğu görülür. Aynı zamanda Teorem 4.2.24 gereği R ideali, absorpsiyon özelliğini sağlar. \square

Sonlu boyutlu herhangi bir mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri için tüm sıfırdan farklı idealleri absorpsiyon özelliğini sağlar. Bunun yanında, $R = R_{H_R}$ durumunu da sağlarlar.

Teorem 4.2.27 in bir sonucu olarak, sonlu boyutlu mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri için idealleri ile ilgili farklı bir yaklaşımla [Boudi vd. 2022, Önerme 4.2] yi yeniden elde edeceğiz.

Sonuç 4.2.28. *A sonlu boyutlu bir mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri olsun. A'nın sıfırdan farklı her R ideali bir temel idealdir.*

İspat: $B = \{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$, A'nın bir doğal tabanı olsun. Teorem 4.2.27 gereği, $R = R_{H_R}$ dir ve $H_R \subset B$ dir. Böylece Lemma 4.2.2 (2) gereği H_R bir kalıtsal alt kümedir. O halde Lemma 4.2.2 (1) den $R_{H_R} = R$, A'nın bir temel idealidir. \square

Galois Bağlantısı

Tanım 4.2.29. (A, \leq) ve (B, \leq) iki kısmi sıralı küme, $F : A \rightarrow B$ ve $G : B \rightarrow A$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $a \in A$ ve her $b \in B$ için

$$F(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq G(b)$$

şartı sağlanıyorsa (F, G) çifti, kısmi sıralı A ve B kümeleri arasında bir *Galois bağlantısı* olarak adlandırılır. Bu durumda F ye Galois bağlantısının *sol eşleniği*; G ye *sağ eşleniği* denir. Eğer bu fonksiyonlar monoton ise *monoton bir Galois bağlantısı vardır* denir.

A bir evrim \mathbb{K} -cebiri olsun.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{R} & \text{ve} & & h : \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{H} \\ H &\mapsto R_H & & & R &\mapsto H_R \end{aligned}$$

fonksiyonları tanımlansın. f ve h sıra koruyan fonksiyonlardır. Gerçekten (\mathcal{H}, \subset) ve (\mathcal{R}, \subset) kısmi sıralı yapıları için her $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ için $H_1 \subset H_2$ iken $R_{H_1} = \text{Span}(H_1) \subset \text{Span}(H_2) = R_{H_2}$ olduğundan f bir sıra koruyan fonksiyondur. Ayrıca her $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ için $R_1 \subset R_2$ iken $e \in H_{R_1}$ olsun. $e^2 \in R_1 \subset R_2$ olduğundan $e^2 \in R_2$ dir, yani $e \in H_{R_2}$ dir. Dolayısıyla $H_{R_1} \subset H_{R_2}$ olup h bir sıra koruyan fonksiyondur.

Bu uygulamalarla ilgili bazı sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Önerme 4.2.30. f fonksiyonu birebirdir ve $H \subsetneq H'$ ifadesinin $R_H \subsetneq R_{H'}$ ifadesini gerektirmesi anlamında kesin monotondur.

İspat: Her $H, H' \in \mathcal{H}$ için $R_H = R_{H'}$ olsun. Her $e \in H$ için $e \in R_H$ dir ve dolayısıyla $e \in R_{H'}$ olur. Buradan $e \in H'$ bulunur. O halde $H \subset H'$ dür. Benzer şekilde $H' \subset H$ olduğu görülür. Yani $H = H'$ olup, f birebirdir. Ayrıca yukarıda ifade edildiği gibi $H \mapsto R_H$ dönüşümü kesin monotondur. \square

Sonuç 4.2.31. A sonlu boyutlu bir mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri ve R ile J , A nın idealleri olsun. Eğer $H_R = H_J$ ise $R = J$ dir. Diğer bir deyişle, h birebirdir.

İspat: Teorem 4.2.27 den, $R = R_{H_R}$ ve $J = J_{H_J}$ olduğunu biliyoruz. Her H_R, H_J için $H_R = H_J$ olsun. Bu durumda $R_{H_R} = J_{H_J}$ dir. Bu da $R = J$ demektir. Yani h birebirdir. \square

Eğer A evrim \mathbb{K} -cebiri mükemmel değil ise h fonksiyonunun mutlaka birebir olması gerekmez.

Örnek 4.2.32. A sonlu boyutlu bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ doğal tabanı olsun. A daki çarpma $e_1^2 = e_1 + e_2$, $e_2^2 = e_1 + e_2$, $e_3^2 = e_1 + e_2 + e_3$ olarak tanımlansın. $R = \text{Span}(\{e_1 + e_2\})$ ve $J = \text{Span}(\{e_1, e_2\})$ olsun. R ve J , A nın idealleridir. $H_R = \{e_1, e_2\} = H_J$ dir. Ancak $R \neq J$ dir. O halde h birebir değildir.

Önerme 4.2.33. A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $B = \{e_i \mid i \in I\}$ doğal tabanı olsun. Eğer \mathcal{R} deki tüm elemanlar absorpsiyon özelliğini sağlıyor ise, o zaman f, h fonksiyonları (\mathcal{H}, \subset) ve (\mathcal{R}, \subset) posetleri arasında bir monoton Galois bağlantısı oluşturur.

İspat: Her $H \in \mathcal{H}$ kalıtsal alt kümesi ve her $R \in \mathcal{R}$ ideali için $R_H \subset R \Leftrightarrow H \subset H_R$ olduğunu göstereceğiz. Diyelim ki $R_H \subset R$ ve $e \in H$ olsun. O halde $e \in R_H \subset R$ dir ve $e^2 \in R$ olur. Buradan $e \in H_R$ olup $H \subset H_R$ elde edilir. Diğer taraftan, $H \subset H_R$ olsun ve $x = \sum_{e_i \in H} \lambda_i e_i \in R_H$ alalım. $H \subset H_R$ olduğundan $x \in R_{H_R}$ olur. Fakat R ideali absorpsiyon özelliğini sağladığından Teorem 4.2.24 gereği $R_{H_R} = R$ dir. O zaman $x \in R$ dir. \square

$\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}$ ile tüm kalıtsal ve saturated kümelerin kümesini ve $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ ile de absorpsiyon özelliğine sahip tüm ideallerin kümesini gösterelim.

Teorem 4.2.34. A dejenere olmayan bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve B bir doğal tabanı olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $f : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{R}^*$ ve $h : \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{H}^*$ kısıtlanmış fonksiyonları bir monoton Galois bağlantısı oluşturur.

(2) Eğer her $i \in \Gamma$ için $H_i \in \mathcal{H}^*$ ve $\bigcup_{i \in \Gamma} H_i \in \mathcal{H}^*$ ise, o zaman $R_{\bigcup_{i \in \Gamma} H_i} = \sum_{i \in \Gamma} R_{H_i}$ dir.

(3) Eğer $\{R_i\}_{i \in \Omega}$ absorpsiyon özelliğine sahip ideallerin bir ailesi ise o zaman $H_{\bigcap_{i \in \Omega} R_i} =$

$\bigcap_{i \in \Omega} H_{R_i}$ dir.

(4) Eğer A sonlu boyutlu ve $A = A^2$ ise o zaman f, h fonksiyonları (\mathcal{H}, \subset) ve (\mathcal{R}, \subset) posetleri arasında bir monoton Galois bağlantısı oluşturur.

İspat: (1) Önerme 4.2.21 den f kapalıdır. Üstelik Teorem 4.2.24 den $R \in \mathcal{R}^*$ için $H_R = R \cap B$ dir ve Önerme 4.2.3 (8) den H_R bir saturated alt kümedir. Dolayısıyla h kapalıdır. Önerme 4.2.33 gereği \mathcal{R}^* in tüm elemanları absorpsiyon özelliğini sağladığından f, h fonksiyonları (\mathcal{H}^*, \subset) ve (\mathcal{R}^*, \subset) posetleri arasında bir monoton Galois bağlantısı oluşturur.

(2) $x \in R_{\bigcup_{i \in \Gamma} H_i}$ olsun. O halde her $i \in \Gamma$ olmak üzere $H_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ij}, \dots\}$ için

$$x = \sum_{i \in \Gamma, j \in J} \lambda_{ij} e_{ij} = \sum_{i \in \Gamma} (\lambda_{i1} e_{i1} + \lambda_{i2} e_{i2} + \dots + \lambda_{ij} e_{ij} + \dots) \in \sum_{i \in \Gamma} R_{H_i}$$

dir. Diğer taraftan, $x \in \sum_{i \in \Gamma} R_{H_i}$ alalım. O halde her $i \in \Gamma$ için $x_i \in R_{H_i}$ olmak üzere $x = \sum_{i \in \Gamma} x_i$ dir. Yani her $j \in \Omega$ için $e_{ij} \in H_i$ olmak üzere $x_i = \sum_{j \in \Omega} \lambda_{ij} e_{ij}$ dir. O halde

$$x = \sum_{i \in \Gamma, j \in \Omega} \lambda_{ij} e_{ij} \text{ öyle ki } e_{ij} \in \bigcup_{i \in \Gamma} H_i$$

olur. Bu durumda $x \in R_{\bigcup_{i \in \Gamma} H_i}$ bulunur.

(3) Hipotez gereği, her $i \in \Omega$ için R_i , A nın bir ideali olup $xA \subseteq R_i$ iken $x \in R_i$ dir. $e_i \in H_{\bigcap_{i \in \Omega} R_i}$ alalım. O halde $e_i^2 \in \bigcap_{i \in \Omega} R_i$ dir. Yani her $i \in \Omega$ için $e_i^2 \in R_i$ dir. Bu durumda her $i \in \Omega$ için $e_i \in H_{R_i}$ olup $e_i \in \bigcap_{i \in \Omega} H_{R_i}$ dir. O halde $H_{\bigcap_{i \in \Omega} R_i} \subseteq \bigcap_{i \in \Omega} H_{R_i}$ bulunur.

Diğer taraftan, $e_i \in \bigcap_{i \in \Omega} H_{R_i}$ olsun. O halde her $i \in \Omega$ için $e_i \in H_{R_i}$ dir, yani $e_i^2 \in R_i$ dir. Böylece $e_i^2 \in \bigcap_{i \in \Omega} R_i$ olur. Buradan $e_i \in H_{\bigcap_{i \in \Omega} R_i}$ bulunur. Dolayısıyla $\bigcap_{i \in \Omega} H_{R_i} \subseteq H_{\bigcap_{i \in \Omega} R_i}$ olup istenilen eşitlik elde edilir.

(4) A sonlu boyutlu bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve $A = A^2$ olduğundan Teorem 4.2.27 gereği A daki her bir ideal absorpsiyon özelliğini sağlar. Böylece Önerme 4.2.33 den, f ve h fonksiyonları (\mathcal{H}, \subset) ve (\mathcal{R}, \subset) posetleri arasında bir monoton Galois bağlantısı oluşturur. \square

4.2.4. İlişkili Grafi Basit Olan Evrim Cebirleri

Bu bölümde, sadece tek bir maksimal ideale sahip evrim \mathbb{K} -cebiriyle ilişkili grafları inceleyeceğiz. İlk olarak, mükemmel evrim cebirleri ele alınacaktır. Sonuç 4.2.10 ile tüm maksimal ideallerin maksimal kalıtsal alt kümelerden geldiği bilinmektedir. Önerme 4.2.30, bir maksimal idealin tek bir maksimal kalıtsal alt kümeden geldiğini gösterir. Bu nedenle, sadece bir maksimal kalıtsal alt kümeyle sahip mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiriyle ilişkili graflar araştırılacaktır (Casado, Barquero vd., 2024).

E yönlü grafi ve $H \in \mathcal{H}$ verilsin.

$$F^0 := E^0 \setminus H, \quad F^1 := \{f \in E^1 \mid s(f), r(f) \notin H\}$$

ve

$$s_F = s_{E|_{F^1}}, \quad r_F = r_{E|_{F^1}}$$

olmak üzere

$$E/H = (F^0, F^1, r_F, s_F)$$

bölüm grafi tanımlansın.

Lemma 4.2.35. E bir yönlü graf ve $H \in \mathcal{H}_E$ olsun. O halde $\{H' \setminus H \mid H \subset H', H' \in \mathcal{H}_E\} \subset \mathcal{H}_{E/H}$ dir.

İspat: $H' \in \mathcal{H}_E$, $H \subset H'$ alalım. $u \in H' \setminus H$ olsun ve $s(\lambda) = u$ ve $r(\lambda) = w \in F^0$ olacak şekilde $\lambda \in \text{Path}(E/H)$ alalım. $u \in H'$ ve $\lambda \in \text{Path}(E)$ iken $H' \in \mathcal{H}_E$ olduğundan $w \in H'$ olur. $w \in F^0$ olduğundan $w \notin H$ dir. O halde $w \in H' \setminus H$ dir. $s(\lambda) = u \in H' \setminus H$ ve $\lambda \in \text{Path}(E/H)$ iken $r(\lambda) = w \in H' \setminus H$ olur. Dolayısıyla $H' \setminus H \in \mathcal{H}_{E/H}$ bulunur. \square

Tanım 4.2.36. E^0 ve \emptyset dışında hiçbir kalıtsal alt kümesi olmayan bir E yönlü grafına *basit graf* adı verilir.

Önerme 4.2.37. *A bir sonlu üretilmiş (cebiri olarak) mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri olsun. O halde A cebirinin basit olması için gerek ve yeter koşul A ile ilişkili E yönlü grafinin basit olmasıdır.*

İspat: (\Rightarrow) : A bir basit cebiri olsun. O halde $\{0_A\}$, A'nın tek maksimal idealidir. Sonuç 4.2.10 ve $R_\emptyset = \{0_A\}$ olduğundan $H = \emptyset$ bir maksimal kalıtsal alt kümedir. Bu durumda $\mathcal{H} = \{\emptyset, E^0\}$ olup E bir basit graftır.

(\Leftarrow) : R, A'nın kendisinden farklı bir ideali olsun. A sonlu üretilmiş olduğundan $R \subset J$ olacak şekilde bir J maksimal ideali vardır. Sonuç 4.2.10 gereği H bir maksimal kalıtsal küme olmak üzere $J = J_H$ şeklinde yazabiliriz. E yönlü grafi basit olduğundan $\mathcal{H} = \{\emptyset, E^0\}$ dır. Bu yüzden $H = \emptyset$ dir. Böylece $J = \{0_A\}$ dır. Dolayısıyla A bir basit cebirdir. \square

Lemma 4.2.38. *A bir evrim \mathbb{K} -cebiri ve B doğal tabanı olsun. H bir maksimal kalıtsal alt küme olsun. O halde E/H bölüm grafi ya tek bir köşe noktasına sahiptir ya da güçlü bağlantılıdır.*

İspat: Diyelim ki E/H bölüm grafi birden fazla köşe noktasına sahip olsun. $e_i, e_j \in F^0$ olsun. O halde H'nin maksimalliğinden, E/H sadece bir bağlantılı bileşene sahiptir. Bu durumda, öyle bir μ yolu vardır ki ya $s(\mu) = e_i$ ve $r(\mu) = e_j$ olur ya da $s(\mu) = e_j$ ve $r(\mu) = e_i$ olur. Genelliği bozmadan, diyelim ki $s(\mu) = e_i$ ve $r(\mu) = e_j$ olsun. $H \cup \{T(e_j)\}$ bir kalıtsal küme ve $H \subset H \cup \{T(e_j)\}$ olduğundan ve H'nin maksimalliği gereği $H \cup \{T(e_j)\} = E^0$ dır. Bu da $e_i \in T(e_j)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla E/H bölüm grafi kuvvetli bağlantılıdır. \square

Teorem 4.2.39. *E bir yönlü graf ve $H \in \mathcal{H}_E$ olsun.*

- (1) *H'nin maksimal olması için gerek ve yeter koşul E/H bölüm grafinin basit olmasıdır.*
- (2) *Eğer E basit graf ise, o zaman ya izole bir köşe noktasına sahiptir ya da kaynak veya alıcı içermeyen bir graftır. Üstelik, E grafi kuvvetli bağlantılıdır. Eğer E^0 sonlu ise, o zaman E'nin basit olması için gerek ve yeter koşul grafin tüm köşelerini dolaşan kapalı bir yola sahip olmasıdır.*
- (3) *A bir evrim cebiri ve E, A ile ilişkili graf olsun. Eğer $H \in \mathcal{H}_E$ ise, o zaman A/R_H evrim cebiri belirli bir doğal tabana göre E/H grafi ile ilişkilidir.*

İspat: (1) (\Rightarrow) : H maksimal olsun. O halde Lemma 4.2.38 gereği E/H bölüm grafi ya tek bir köşe noktasına sahiptir ya da kuvvetli bağlantılıdır. Bu durumda E/H bölüm grafi basittir.

(\Leftarrow) : E/H bölüm grafi basit olsun. O halde $\mathcal{H}_{E/H} = \{\emptyset, E^0 \setminus H\}$ dır. Eğer $H \subsetneq H' \subset E^0$ olacak şekilde $H' \in \mathcal{H}_E$ varsa, o zaman Lemma 4.2.35 gereği $H' \setminus H \in \mathcal{H}_{E/H}$ olur. Bu durumda, $H' \setminus H = E^0 \setminus H$ olmalıdır. Böylece $H' = E^0$ olup H maksimaldir.

(2) E bir basit graf olsun. E nin bir izole köşesine sahip olmadığını kabul edelim. E yönlü grafının aynı anda hem kaynak hem de alıcı köşeler bulundurmadığı gösterilirse istenen elde edilmiş olur. O halde E yönlü grafi birden fazla köşeye sahip olsun ve $u \in E^0$ bir kaynak olsun. Bu durumda öyle bir $f \in s^{-1}(u)$ vardır ki $T(r(f)) \in \mathcal{H}_E$ ve $T(r(f)) \neq E^0$ dır. Bu ise E nin basit graf olması ile çelişir. O halde E yönlü grafi kaynak içermez. Şimdi de $u \in E^0$ bir alıcı olsun. Böylece $\{u\}$, E^0 dan farklı bir kalıtsal alt kümedir. Bu da E nin basit graf olmasıyla çelişir. O halde E bir basit graf ise ya bir izole köşe noktasına sahiptir ya da kaynak veya alıcı içermeyen bir graftır. Şimdi de $u, v \in E^0$ olsun. $u \in T(v) = E^0$ ve $v \in T(u) = E^0$ olduğundan hem u dan v ye hem de v den u ya bir yol vardır. Bu durumda E yönlü grafi kuvvetli bağlantılıdır. Eğer E^0 sonlu ise, o zaman açıktır ki E nin basit olması için gerek ve yeter koşul grafın tüm köşelerini dolaşan kapalı bir yola sahip olmasıdır.

(3) A/R_H evrim cebiri ile ilişkili grafın köşe kümesinin $(E/H)^0 = E^0 \setminus H$ olduğunu ve A/R_H ile ilişkili grafın yaylarının kümesinin $(E/H)^1 = \{f \in E^1 \mid s(f), r(f) \notin H\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$B = \{e_i \mid i \in I\}$, A nın bir tabanı ve $\Gamma = \{i \in I \mid e_i \notin H\}$ olmak üzere $B' = \{e_j + R_H \mid j \in \Gamma\}$ kümesi, A/R_H ın bir üreteç sistemi olsun. Amacımız, B' kümesinin A/R_H ın bir doğal tabanı olduğunu göstermektir. $k_i \in \mathbb{K}$ için

$$\sum_{i \in \Gamma} k_i(e_i + R_H) = 0 + R_H$$

alınırsa, o zaman

$$\sum_{i \in \Gamma} k_i e_i = \sum_{j \in I \setminus \Gamma} g_j e_j \in R_H$$

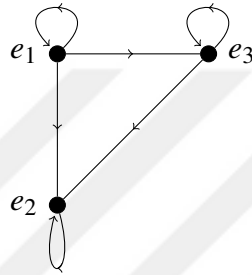
elde edilir. O halde B kümesinin lineer bağımsızlığından her $i \in \Gamma$ ve $j \in I \setminus \Gamma$ için $k_i = g_j = 0$ dır. Böylece B' kümesi lineer bağımsızdır. Bununla birlikte A/R_H ile ilişkili grafın köşe kümesi ve yaylarının kümesi, E/H bölüm grafının ki ile aynıdır. \square

Teorem 4.2.39 (2) deki ilk ifadenin karşıtı doğru değildir. Bunun için yalnızca iki döngülü bir graf düşünmek yeterli olacaktır.

Not. Önerme 4.2.37 ve Teorem 4.2.39 e göre, eğer A sonlu boyutlu bir mükemmel evrim \mathbb{K} -cebiri ise, o zaman A ancak ve ancak [Casado, Kanuni vd. 2019, Önerme 2.7] de olduğu gibi ilişkili grafın tüm köşelerini dolaşan kapalı bir yol varsa basittir.

Ayrıca, Teorem 4.2.39 (3) ün bir örneği olarak, doğal tabanı $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve çarpımı $e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2^2 = e_2$, $e_3^2 = e_2 + e_3$ olan 3-boyutlu A evrim cebirini ele alalım. O halde A evrim \mathbb{K} -cebiri mükemmeldir ve A ile ilişkili E grafi aşağıda verildiği gibidir.

E :



E/H :



$$A = \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{K}e_i, \quad H = \{e_2, e_3\}, \quad A/R_H \cong \mathbb{K}$$

Teklikle belli bir $H \neq E^0, \emptyset$ kalıtsal alt kümenin var olduğunu görmek kolaydır. Aslında bu alt küme $H = \{e_2, e_3\}$ dır. Bu ise, tek bir $R_H = \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3$ maksimal ideali üretir. A/R_H bölüm cebiri, \mathbb{K} ile izomorftur ve E/H grafi, bir boyutlu \mathbb{K} evrim cebiri ile ilişkilendirilen tek bir köşe ve tek bir döngüden oluşan graftır.

Bir grafın kalıtsal alt kümelerini hesaplamak için algoritmalar bilindiğinden (bkz. Bjerregaard vd. 2014), verilen sonlu boyutlu bir mükemmel evrim cebirinin maksimal ideallerini algoritmik olarak belirleme işlemi bu tür cebirlerin basit olmasının bir sonucu olarak kolaylıkla gerçekleştirilebilir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Y. Cabrera Casado, D. Martin Barquero, C. Martin Gonzalez ve A. Tocino'nun 2023 yılında yayınlamış oldukları “*Connecting ideals in evolution algebras with hereditary subsets of its associated graph*” adlı çalışmadaki sonuçlar detaylı olarak incelenmiş, köşeleri evrim cebirinin taban elemanları ile etiketlenen bir yönlü graf tanımlanarak evrim cebirlerine ait bazı cebirsel özellikler araştırılmıştır. Kaynaklarda belirtilen çalışmalar detaylı bir şekilde incelenmiş ve evrim cebirleri ile ilgili bilgi edinilmiş, elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak bu alanda çalışma yapılması durumunda konu ile ilgili temel bilgilerin bir araya getirilmesi hedeflenmiştir.

Evrin cebirler üzerine literatürde pek çok çalışma vardır ve bu teori geliştikçe evrim cebirlerin dinamik sistemler, türevler, nilpotentlik, normlu uzaylar gibi birçok farklı kavram ile bağlantısı ortaya çıkmıştır. Evrim cebirleri üzerine çalışmak, bu yapının bilinen diğer cebirsel yapılarla bağlantısının daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Bu düşünceyle, graf teorideki kavramlar kullanılarak evrim cebirlerine ait yeni cebirsel özellikler elde edilebilir. Ayrıca evrim cebirleriyle ilgili mevcut sonuçların ispatını basitleştirmek için yönlü graflar kullanılabilir.

Bu sebeple literatürde bu konu ile ilgili çalışmaları kavramak ve evrim cebirinin yapısal özelliklerini ilişkili grafa göre incelemek, ileri çalışmalara önemli katkılar sağlayacaktır.



KAYNAKLAR

- Abrams, G. ve Pino, G. A. (2005). The Leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, 293(2), 319–334.
- Bertrand, M. (1966). Algèbres non associatives et algèbres génétiques. *Mémorial des Sciences Mathématiques*, 162, 1–103.
- Bjerregaard, P. A., Pino, G. A., Barquero, D. M., González, C. M. ve Molina, M. S. (2014). Atlas of Leavitt path algebras of small graphs. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 66(2), 581–611.
- Boudi, N., Casado, Y. C. ve Molina, M. S. (2022). Natural families in evolution algebras. *Publicacions Matemàtiques*, 66(1), 159–181.
- Cabrera Casado, Y., Cadavid, P., Rodiño Montoya, M. L. ve Rodriguez, P. M. (2021). On the characterization of the space of derivations in evolution algebras. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 200(2), 737–755.
- Cadavid, P., Rodino Montoya, M. L. ve Rodriguez, P. M. (2020). Characterization theorems for the spaces of derivations of evolution algebras associated to graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 68(7), 1340–1354.
- Camacho, L., Gómez, J., Omirov, B. ve Turdibaev, R. (2013). The derivations of some evolution algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 61(3), 309–322.
- Casado, Y. C., Barquero, D. M., González, C. M. ve Tocino, A. (2024). Connecting ideals in evolution algebras with hereditary subsets of its associated graph. *Collectanea Mathematica*, 1–16.
- Casado, Y. C., Kanuni, M. ve Molina, M. S. (2019). Basic ideals in evolution algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 570, 148–180.
- Casado, Y. C., Molina, M. S. ve Velasco, M. V. (2016). Evolution algebras of arbitrary dimension and their decompositions. *Linear Algebra and its Applications*, 495, 122–162.
- Davey, B. A. ve Priestley, H. A. (2002). *Introduction to lattices and order*. Cambridge university press.

- Elduque, A. ve Labra, A. (2015). Evolution algebras and graphs. *Journal of Algebra and its Applications*, 14(07), 1550103.
- Elduque, A. ve Labra, A. (2021). Evolution algebras, automorphisms, and graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 69(2), 331–342.
- Etherington, I. M. H. (1941). II.-Non-Associative algebra and the symbolism of genetics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section B: Biological Sciences*, 61(1), 24–42.
- Heil, C. (2017). Functional Analysis Lecture Notes: Quotient Spaces. URL: https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4230/2017v/heil-quotientspaces.pdf.
- Hungerford, T. W. (2012). *Algebra*. Springer Science & Business Media.
- Jianjun-Paul, T. ve Piotr, V. (2006). Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics. *Quasigroups and Related systems*, 15(1), 111–122.
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons.
- Ladra, M. ve Rozikov, U. (2013). Evolution algebra of a bisexual population. *Journal of Algebra*, 378, 153–172.
- Pino, G. A., Pardo, E. ve Molina, M. S. (2006). Exchange Leavitt path algebras and stable rank. *Journal of Algebra*, 305(2), 912–936.
- Pino, G. A., Pardo, E. ve Molina, M. S. (2009). Prime spectrum and primitive Leavitt path algebras. *Indiana University mathematics journal*, 869–890.
- Qaralleh, I. ve Mukhamedov, F. (2021). Volterra evolution algebras and their graphs. *Linear and Multilinear algebra*, 69(12), 2228–2244.
- Reed, M. (1997). Algebraic structure of genetic inheritance. *Bulletin of the American mathematical society*, 34(2), 107–130.
- Tian, J. P. (2008). *Evolution algebras and their applications*. 1921. Springer Science & Business Media.
- Vidal, S. J., Cadavid, P. ve Rodriguez, P. M. (2022). On the Hilbert evolution algebras of a graph. *Siberian Mathematical Journal*, 63(5), 995–1011.

Wilson, R. J. (1979). *Introduction to graph theory*. Pearson Education India.





ÖZ GEÇMİŞ

Soyadı, Adı : AKÇA, Alpaslan

Yabancı Dil : İngilizce

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet tarihi(Yıl)
Y. Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı	2024
Lisans	Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü	2012

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer/Kurum	Ünvan
2012-2015	Mardin /Kızıltepe Furkan Doğan Anadolu İmam Hatip Lisesi	Öğretmen
2015-2016	İzmir/Hava Teknik Okullar Komutanlığı Astsubay MYO	Öğretmen Asteğmen
2016-2020	Afyon/Mustafa Hüsnü Gemici Anadolu Lisesi	Öğretmen
2020-...	Aydın/Mustafa Keziban Küçüköğlü MTAL	Öğretmen