T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

**Ahmet TAN**

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

TEMMUZ 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

# ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

Tez Yazarı
**Ahmet TAN**

Danışman
Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

TEMMUZ 2024
ELAZIĞ

**T.C.**
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Alternatif Çatıya Göre Manyetik Eğriler

Yazarı: Ahmet TAN

İlk Teslim Tarihi: 04.06.2024

Savunma Tarihi: 05.07.2024

# TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

*İmza*

Danışman: Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Prof. Dr. Vedat ASİL — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR — Onayladım
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Fakültesi

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ......./......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

*İmza*

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

# BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Alternatif Çatıya Göre Manyetik Eğriler” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

05.07.2024

**Ahmet TAN**

# ÖNSÖZ

Manyetik eğriler diferansiyel geometri ve fizik gibi bilimsel alanlarında geniş bir çalışma olanağı sunmaktadır. Özellikle farklı çatılara göre bu eğrileri oluşturup bunlarla ilgili karakterizasyonlar yapmak mümkündür. Bu çatılarda en bilineni Frenet çatısıdır. Bu çatının tek dezavantajı eğrinin üçüncü mertebeye kadar türevinin sürekli olmasıdır. Bundan dolayı yeni çatılara ihtiyaç duyulmuştur. Bunlardan biri Alternatif çatı olup eğriler üzerinde farklı karekterizasyonları elde edilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç.Dr. Mustafa YENEROĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

**Ahmet TAN**

ELAZIĞ, 2024

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET

Alternatif Çatıya Göre Manyetik Eğriler

**Ahmet TAN**

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2024, Sayfa: viii + 41

Öklid uzayında eğriler teorisinde farklı çatılara göre birçok çalışma yapılmıştır. Birçok bilim adamı bu teoride Frenet çatı, Bishop çatı, Adapted çatı, Ribbon çatı gibi çatıları çalışmıştır. Bu çatılar eğriler ile ilgili karakterizasyonlarda bize yardımcı olur.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında Alternatif çatıya göre manyetik eğriler incelenmiştir. Öncelikle N-manyetik, C-manyetik ve W-manyetik eğrileri verilmiştir. Sonra alternatif çatıya göre bu eğrilerin Fermi-Walker türevleri araştırılmıştır.

.

**Anahtar Kelimeler:** Frenet çatısı, Manyetik eğriler, Alternatif çatı, Öklid uzayı, ,Fermi Walker Türevi

# ABSTRACT

## Magnetic Curves Accordıng To The Alternative Frame

**Ahmet TAN**

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

July 2024, Pages: viii + 41

Many studies have been done according to different frames of the theory of curves in Euclidean Space. Many scientists have studied frames such as Frenet frame, Bishop frame, Adapted frame, Ribbon Frame in this theory. These frames help us in the characterization of curves.

In this study, magnetic curves according to Alternative frame in 3-dimensional Euclidean space are investigate firstley, N-magnetic, C-magnetic, W-magnetic, curves are givenThen the Fermi-Walker derivative of magnetic curves according to this frame are investigated.

**Keywords:** Frenet Frame, Magnetic curves, Alternative frame, Euclidean Space, Fermi-Walker Derivative.

# SİMGELER

| | |
|---|---|
| $\nabla$ | : Levi-Civita koneksiyonu |
| $\Phi(X)$ | : Lorentz kuvveti fonksiyonu |
| $\mathbb{E}$ | : Öklid uzayı |
| $(M, g)$ | : Riemann Manifoldu |
| $F$ | : Manyetik Alan |
| $\alpha$ | : $\mathbb{E}^n$ uzayında birim hızlı eğri |
| $T(s)$ | : Teğet vektör alanı |
| $N(s)$ | : Normal vektör alanı |
| $B(s)$ | : Binormal vektör alanı |
| $W(s)$ | : Birim Darboux vektör |
| $C(s)$ | : $W \times N$ –birim vektör |
| $\overline{D}$ | : Alternatif Darboux Vektörü |
| $\tau$ | : 3-boyutlu Öklid uzayında burulma noktası |
| $\kappa$ | : 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu |
| $\beta$ | : Alternatif çatısına göre birinci eğrilik |
| $\gamma$ | : Alternatif çatısına göre ikinci eğrilik |

# 1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı en iyi bilinen ortonormal çatıdır. Bir uzay eğrisinin şekli, eğrinin eğrilik ve burulması ile tamamen belirlenir. Dolayısıyla bir eğrinin tamamen incelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilmesi gerekir. Birçok araştırmacı eğrilerin özelliklerini karakterize etmek ve hesap yapmak için Frenet çatısını kullanır. Frenet çatısı sadece differansiyellenebilir eğriler için tanımlanabilir. Bunun için farklı alternatif çatılara ihtiyaç duyulmuştur.

Manyetik eğriler; disiplinler arası bilimde birçok uygulama alanına sahiptir ve bu bilimsel alanlarda çok büyük oranda önemli rol oynadığını söyleyebiliriz. Manyetik alanı, hareket halindeki elektrik yüküne etki eden Lorentz kuvveti ile tanımlayabiliriz. Yüklü olan bir parçacık V *manyetik* alanı içerisine girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenir ve bu etkiyle Lorentz kuvveti dediğimiz kuvvet açığa çıkar. Bu nedenle parçacık bu girmiş olduğu alanın içinde bir yörünge izlemeye başlar. Çizmiş olduğu yörünge manyetik eğriyi oluşturur. Başka bir deyişle manyetik eğriyi daha detaylı şöyle anlatabiliriz. Lorentz kuvveti, fizikte elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yükler üzerindeki manyetik ve elektrik kuvvetlerin bileşkesidir. **B** (manyetik alan), E (elektriksel alan), **v** (hız), **q** (yüklü parçacık) olsun ve Lorentz kuvvetine olan etkisini şöyle formülüze edebiliriz:

$$F = q\,(E + v \times B)$$

Görüldüğü üzere Lorentz kuvveti manyetik alanın vektörü ile parçacığın hız vektörünün çarpımı bize bu iki vektörün birbirine dik olduğunu gösteriyor. Bu iki vektör manyetik alana paralel bir şekilde hareket etmiş olsaydı manyetik kuvvet sıfır olur. İki vektörün birbirine dik olması Lorentz kuvvetinin en büyük değeri aldığını gösterir. Bu iki vektör yani manyetik kuvvet ile parçacığın hızının birbirine dik olması parçacığın büyüklüğünü değil sadece ve sadece yönünü değiştirir. Bundan dolayıdır ki parçacığın manyetik alan içerisinde dairesel hareketler yaptığını gösterir [1].

**v** (hız ) yüklü parçacığın, **B** ( manyetik alan ) girdiği zaman Serret -Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etki ile beraber Lorentz kuvveti dediğimiz kuvvet açığa çıkar. Kuvvetin açığa çıkmasıyla birlikte bir yörünge takip eder. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir [2,3].

**T** (teğet vektör alanı) dersek, manyetik alana paralelse Lorentz kuvveti sıfır olur ve paralel bir şekilde ilerler. Fakat **T** (teğet vektör alanı ) manyetik alana dik olması durumunda Lorentz kuvveti maksimum olur daire şeklinde yörünge izler. Eğer **T** (teğet vektör alanı), manyetik alana sabit sabit bir açı yapıyorsa da Lorentz kuvvetinin etkisi parçacığa helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler [4].

Manyetik alan günümüzde birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Mesela; pusulanın çalışmasında, jeneratörlerde, elektrikle çalışan motorlarda vs. kullanım alanı vardır. Bu alanda 3-boyutlu Rimann manifoldlarında Barros ve Romeo manyetik alanların yörüngelerini ele almıştır ve incelemiştir [4,5]. Daha sonraki yıllarda bazı bilim insanları da manyetik alanları incelemişlerdir, Ling Xu ve David Mould parçacık üzerinde var olan yükün zaman içerisinde sürekli değişkenlik göstermesi birden çok farklı eğrilere sahip çok karmaşık yörüngeler çizdiğini savundular ve yaptıkları araştırmaları buldukları yönteme manyetik eğrileri de katarak ağaç gövdesini, saç telini, yanan bir ateşin çizileceğini gösterdiler [6]. Körpınar ve Demirkol 3D Riemannian manifoldlarda manyetik eğrileri vermişlerdir [7]. Ayrıca Z.Özdemir, İ.Gök, Y.Yaylı and N.Ekmekci de yine manyetik eğrileri incelemiştir [8]. Fermi-Walker türevi ile ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır. Bunlar Fermi Walker ve Fermi-Walker paralelliğinin tanımlanması ile ilgili çalışmalar [9,10,11,12]. Ayrıca Fermi Walker türevinin fiziksel ve geometrik tanımlanması araştırılmıştır [13,14,15].

Alternatif çıtı üzerinde uzay eğrileri ile ilgili de birçok çalışma yapılmıştır [16,17,18].

Alternatif çatıya göre normal vektörü ile Frenet çatıya göre normal vektör eğri boyunca aynı iken teğet ve binormal vektörleri normal vektörü etrafında dödürülerek C ve W vektörleri elde edilmiştir. Yeni tanımlanan bu çatı eğrinin alternatif bir çatısıdır ve $\{N, C, W\}$ çatısı olarak adlandırılır. Burada eğrinin Darboux vektör alanı $W = \frac{\tau T}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$ ve C ise N ve W vektörlerine dik olup $C = W \times N$ vektörel çarpımıdır. Veya

$$C = \frac{N'}{\|N'\|} = -\frac{\kappa T}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \text{ dır.}$$

Bu tez çalışmasında ilk olarak diğer bölümlerde kullanılmak üzere tanım ve teoremler ve konu ile ilgili yapılan araştırmalar verilmiştir. Daha sonra Frenet çatısından farklı olarak $\{N, C, W\}$ Alternatif çatısı verilmiş bu alternatif çatı üzerinde Manyetik Eğrileri ve Manyetik Eğrilerde Fermi-Walker türevini tanımlanmış olup yeni karakterizasyonlar elde edildi.

# 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlerden söz edilecektir.

**Tanım 2.1.** A boş olmayan bir cümle ve K cisimi üzerinde bir vektör uzayı **V** olsun.

$$f: A \times A \to \mathbf{V}$$

$$(P,Q) \to f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A ya **V** ile birleşmiş afin uzayı denir [19].

**i)** $\forall\, P, Q, R \in$ A için $f\,(P, Q) + f\,(Q, R) = f\,(P, R)$

**ii)** $\forall\, P \in$ A ve $\forall\alpha \in$V olmak üzere $\alpha=\overrightarrow{PQ}$ olup, $Q\in$A noktası vardır.

**Tanım 2.2.** A reel bir afin uzay ve bu afin uzayla birleşen bir vektör uzayı da **V** olsun. **V** vektör uzayında $X$ ve $Y$ vektörlerini göz önüne alalım.

$$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \text{ ve } Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \in \mathbf{V} \text{ olmak üzere}$$

$$\langle , \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to R$$

$$(X, Y) \to \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

dönüşümüne Öklid anlamında iç çarpım denir [19].

**Tanım 2.3.** I, $R$ de açık bir alt küme ve $\mathbb{E}^n$ de n- boyutlu Öklid uzayı olsun.

$$\alpha: I \subset R \to E^n$$

dönüşümü differansiyellenebilir ise $\alpha$ ya $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve $t \in$ I da $\alpha$ eğrisinin parametresi denir [19].

**Tanım 2.4.** $\boldsymbol{\alpha}$: I$\longrightarrow\mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall t\in$ I için $\alpha'(t)\neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir [20].

**Tanım 2.5.** $\alpha$: I$\longrightarrow\mathbb{R}^n$ , $\alpha=\alpha(t)$ olmak üzere $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir [20]

**Tanım 2.6.** $\alpha$ her mertebeden diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Bu durumda $\Psi=\{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\, \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in$ Sp{Ψ} olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Frenet r – ayaklısı alanı denir [19].

**Tanım 2.7.** $\alpha: I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, $t \in I$ *için*

Teğet vektörün alanı:

$$\mathbf{T}\,(\mathrm{t}) = \frac{1}{\|a'(t)\|}\ a'(t)$$

Normal vektör alanı:

$$\mathbf{N}\,(\mathrm{t}) = \frac{a''(t)}{\|a''(t)\|}$$

Binormal vektör alanı:

$$\mathbf{B}\,(\mathrm{t}) = \frac{a'(t) \wedge a''(t)}{\|a'(t) \wedge a''(t)\|}$$

verilen bu vektörlerin oluşturduğu $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ vektör alanlarına Frenet 3 – ayaklısı denir [19].

**Tanım 2.8.** α: I⟶$\mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun

$$\tau: I \longrightarrow \mathbb{E}^3,\ \tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [20].

**Tanım 2.9.** $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı α: I ⟶ $\mathbb{R}^3$ eğrisi için, κ: I ⟶ $R$, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [20].

**Tanım 2.10.** s, yay parametresi olmak üzere, α: I ⊂ $R$ ⟶$\mathbb{E}^3$ , $\alpha(s) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$\mathbf{T}'(\mathrm{s}) = k_1(s)\mathbf{N}(\mathrm{s})$

$\mathbf{N}'(\mathrm{s}) = -k_1(s)\mathbf{T}(\mathrm{s}) + k_2(s)\mathbf{B}(\mathrm{s})$

$\mathbf{B}'(\mathrm{s}) = -\,k_2(\mathrm{s})\mathbf{N}(\mathrm{s})$

ve

$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle = \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}\rangle = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\rangle = 1$

$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}\rangle = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{B}\rangle = \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\rangle = 0$

$\boldsymbol{\kappa} = \kappa\,(\mathrm{s}) = \|\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{s})\|$

$\tau = \tau(\mathrm{s}) = -\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}'\rangle$

$k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ bundan sonra yerlerine bu simgeleri kullanabiliriz [19].

**Tanım 2.11.** $\gamma$: I⟶$\mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $\overline{w}$=τ**T**+ κ**B** vektör alanına γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir.

$$\boldsymbol{w(s)} = \frac{\overline{\boldsymbol{w}}}{\|\overline{w}(s)\|} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}}\left(\tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s)\right)$$

vektörüne γ eğrisinin Darboux göstergesi denir [19].

**Tanım 2.12.** $\mathbb{E}^{n+1}$ de M hiperyüzeyi üzerindeki bir eğri α: I⊂ $R$ ⟶M olsun. α: I⊂ $R$ ⟶M eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü M hiperyüzeyine ortogonal ise α eğrisine M yüzeyinde geodezik eğri denir [19].

**Tanım 2.13.** n boyutlu bir reel uzayda ($\mathbb{R}^n$) u vektörü ele alalım. Bu u vektörünün boyuna vektörün normu denir. $\|u\|$ ile gösterilir [21].

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2}$$

**Tanım 2.14.** Differansiyellenebilir bir manifold M olsun. O zaman aşağıdaki dönüşümü verilsin.

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, R)$$

Bu dönüşümle birlikte aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa M üzerinde Riemann metriği veya diğer bir deyişle Riemann manifoldu denir [21].

i. $g$ simetrik yani ∀ X ,Y $\epsilon$ $\chi$(M) için $g(X, Y) = g(Y, X)$
ii. $g$ bilineer yani ∀ X, Y, Z ∈ $\chi(M)$ ve ∀ f, h ∈ $C^{\infty}$ (M, R ) için $$g(fX + hY, Z) = fg(X, Z) + hg(Y, Z)$$
iii. $g$ pozitif tanımlı yani ∀ X ∈ $\chi(M)$ için $g(X, X) \geq 0$

**Tanım 2.15. M** bir $C^{\infty}$ - manifold olsun. M üstünde vektör alanların uzayı $\chi(M)$ ve $C^{\infty}$ fonksiyonların cebiri $C^{\infty}$( M,R) olmak üzere

$<,>: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, R)$

Operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye bir **yarı-Riemann manifoldu** denir [22].

i. $<,>$ dönüşümü simetriktir.
ii. $<,>$ dönüşümü 2-lineerdir.
iii. ∀ Y ∈ $\chi(M)$ için $< X, Y >= 0 \Rightarrow X = 0$

**Tanım 2.16.** M Riemann manifoldu ve ∇**,** M üzerinde Riemann koneksiyonu olsun.

∀ X, Y, Z ∈ $\chi(M)$ ve ∀ $f$, h ∈ $C^{\infty}$ ( M, R) için

∇ : $\chi$(M)× $\chi(M)$

$(X, Y) \to \nabla (X, Y) = \nabla_X Y$

ile tanımlı dönüşümü

i. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii. $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

iii. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

iv. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

yukarıda belirttiğimiz dört maddedeki özellikleri sağlıyorsa $\nabla$ ya $M$ üzerinde tanımlı afin koneksiyonu veya kovaryant türev denir [19].

**Tanım 2.17.** $(M, g)$ bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir afin koneksiyonu $\nabla$ olsun. Aşağıda verilen koşulları sağlaması durumunda $\nabla$ ya M nin Levi Civita Koneksiyonu denir [21]. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$olmak üzere;

i. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii. $Zg(X, Y) = + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$

**Tanım 2.18.** $(M, g)$ Riemann manifoldu ve $\nabla$ da M üzerinde Levi Civita Koneksiyonu olsun.

$$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$$

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

dönüşümüne Riemann eğrilik tensörü denir [23].

**Tanım 2.19.** $(M, g)$ n-boyutlu semi- Riemann manifoldu olsun. M üzerinde **F** kapalı 2-formu manyetik alandır ve $(M, g)$ manifoldu üzerindeki **F** manyetik alanın Lorentz kuvveti **Φ,** herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$g(\phi(X), Y) = F(X, Y) \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir [24].

**Tanım 2.20.** Bir $(M, g)$ Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, **F** manyetik alanın etkisi altında $M$ üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani **F** nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemindeki $M$ nin eğrileridir. Buradan,

$$\nabla_{\beta'} \beta' = \phi(\beta') \tag{2.2}$$

olur. $M$ nin jeodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de,

$$\nabla_{\beta'} \beta' = 0 \text{ dır.} \tag{2.3}$$

[22].

**Tanım 2.21.** 3-boyutlu semi-Riemann manifoldunda sapma içermeyen bir vektör alanı, manyetik alanı tanımlar. $V \in \chi(M^n)$ nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

$$L_V g = 0 \tag{2.4}$$

olmasıdır ya da eşdeğer olarak, tüm $p \in M^n$ noktalarında $\nabla V(p)$, $T_P(M^n)$ de ters simetrik bir operatördür.

Yani üç boyutta manyetik alanlar sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir [25].

$F_V$ nin Lorentz Kuvveti

$$\phi(X) = V \times X \tag{2.5}$$

dir. (2.2) ve (2.5) eşitliklerinden

$$\nabla_{\beta'}\beta' = V \times \beta' \tag{2.6}$$

yazılır [26,27].

**Tanım 2.22.** $X$, s yay parametreli $\beta\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X} - \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}\rangle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T} + \langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}\rangle \mathbf{T} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının Fermi-Walker Türevi denir. Burada $\boldsymbol{T} = \frac{d\beta}{ds}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{ds}}$ [28].

**Tanım 2.23.** $X$, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere; eğri boyunca vektör alanının FermiWalker Türevi;

$$\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X} = 0 \tag{2.8}$$

ise $X$ vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir denir [28].

**Tanım 2.24.** $\alpha$ eğrisinin Frenet vektörleri parametreye bağlı olarak bir eksen etrafında dönme hareketi yapar. Bu eksene üzerindeki vektör $\overline{W}$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} T' &= \overline{W} \times T, \\ N' &= \overline{W} \times N \\ B' &= \overline{W} \times B \end{aligned} \tag{2.9}$$

bağıntısını sağlar. Buradan gerekli işlemler yapıldığında $\overline{W}$

$$\overline{W} = \tau T + \kappa B \tag{2.10}$$

şeklinde bulunur. Bu vektöre darboux vektörü denir.Darboux ekseni üzerindeki birim vektöre ise birim Darboux vektörü denir ve

$$W = \frac{\tau T}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \tag{2.11}$$

şeklinde yazılır [17,18].

**İspat:** Şimdi darboux vektörünün

$$\overline{W} = \tau T + \kappa B$$

olduğunu gösterelim.

$\overline{W} \in sp\{T, N, B\}$ olduğundan

$$\overline{W} = aT + bN + cB$$

olarak yazabiliriz. (2.9) denkleminden

$$T' = \overline{W} \times T$$

eşitliği yazılır ve

$$T' = \kappa N$$

dir.

$$T' = \overline{W} \times T$$

eşitliğine değerleri yazılıp vektörel çarpımı alınırsa

$$\kappa N = (aT + bN + cB) \times T$$

$$\kappa N = -bB + cN$$

denklemlerin eşitliğinden b=0, c=$\kappa$ bulunur.

Benzer olarak (2.9) denkleminden

$$B' = \overline{W} \times B$$

eşitliği yazılır.

$$B' = -\tau N$$

ifadesine eşittir. Şimdi ifadeleri denklemde yerine yazalım.

$$-\tau N = (aT + bN + cB) \times B$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$-\tau N = -aN$$

denklemin eşitliğinden $a = \tau$ ifadesi elde edilir. Bulduğumuz değerleri $\overline{W}$ denkleminde yazılırsa

$$\overline{W} = \tau T + \kappa B$$

darboux vektörü bulunur.

**Tanım 2.25.** $\alpha$ eğrisinin N normal vektörü ile W birim darboux vektörü vektörel çarpılırsa

$$C = W \times N = -\frac{\boldsymbol{\kappa T}}{\sqrt{\boldsymbol{\kappa^2+\tau^2}}} + \frac{\boldsymbol{\tau B}}{\sqrt{\boldsymbol{\kappa^2+\tau^2}}} \tag{2.12}$$

birim vektörü elde edilir. Bu şekilde elde edilen $\{N, C, W\}$ sistemine alternatif çatı denir [18].

(2.11) ve (2.12) eşitliklerinde taraf tarafa toplama ve çıkarma işlemleri yapıldığında alternatif çatı ile Frenet çatı arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

N=N

C$= -\frac{\kappa T}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$

$$W = \frac{\tau T}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{\kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

veya

$$\mathrm{T} = -\frac{\kappa C}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \frac{\tau W}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \tag{2.13}$$

N=N

$$B = \frac{\tau C}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{\kappa W}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

gibi bir ilişki söz konusudur. Bu denklemlerdeki $\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta}$ ve $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\beta}$ şeklinde alınıp yukarıdaki denklemler yeniden düzenlenirse çatılar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olur.

N=N

C$= -\bar{\kappa}T + \bar{\tau}B$

$$W = \bar{\tau}T + \bar{\kappa}B \tag{2.14}$$

Veya

T$= -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W$

N=N

$B = \bar{\tau}C + \bar{\kappa}W$

şeklinde yazılır

**Teorem 2.26.** Alternatif çatı vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix}$$

$$N' = \beta C, \qquad C' = -\beta N + \gamma W, \qquad W' = -\gamma C \tag{2.15}$$

bağıntısı vardır. Burada $\gamma = \frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ şeklinde bir katsayıdır.

**Teorem 2.27.** $\alpha$ eğrisinin alternatif çatı vektörleri $N, C, W$ olsun. Bu çatıya göre Darboux vektörü

$$\bar{D} = \gamma N + \beta W \tag{2.16}$$

şeklinde verilir [18].

# 3. ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

## 3.1. $N$- Manyetik Eğriler

**Tanım 3.1.** Lorentz eşitliğini sağlayan $\alpha$ eğrisine $M$ üzerinde N-manyetik eğri denir.

$$\nabla_{\alpha'} N = \Phi(N) = V \times N \tag{3.1}$$

Bu tanımdan yola çıkarak alternatif çatıya göre N-manyetik eğrilerini gösterelim.

**Önerme 3.2.** $\alpha$ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu $(M, g)$ üzerinde birim hızlı bir N-manyetik eğri ve bu eğrinin Serret−Frenet elemanları $\{N, C, W, \beta, \gamma\}$ olsun o halde alternatif çatıya göre matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix}$$

$$N' = \beta C$$

$$C' = -\beta N + \gamma W \tag{3.2}$$

$$W' = -\gamma W$$

**Teorem 3.3.** $\alpha$ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu $(M, g)$ üzerinde birim hızlı bir N-manyetik eğri ve bu eğrinin Serret-Frenet elemanlarının Lorentz kuvveti ile alternatif çatı arasında aşağıdaki gibi ilişki olup matrisi ise şöyle gösteririz:

$$\begin{bmatrix} \Phi(N) \\ \Phi(C) \\ \Phi(W) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \Omega \\ 0 & -\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix}$$

Burada $\Omega$ belirli katsayılı bir fonksiyondur.

$$\Phi(N) = \beta C$$

$$\Phi(C) = -\beta N + \Omega W \tag{3.3}$$

$$\Phi(W) = -\Omega C$$

**İspat:** $\alpha$ eğrisi $(M, g\,)$ 3-boyutlu riemann manifoldu üzerinde bir $N-$manyetik eğri ve bu eğrinin alternatif çatı elemanları $\{N, C, W, \beta, \gamma\}$ olsun.

$\Phi(N) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{N}) = aN + bC + cW \tag{3.4}$$

yazılabilir. Buradan $\Phi(N)$'nın bulunduğu (3.4) eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpıma tabi tutacak olursak

$$\langle \Phi(N), N\rangle = a\langle N, N\rangle + b\langle C, N\rangle + c\langle W, N\rangle$$

$$\Phi(N) = \beta C$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle \beta C , N\rangle = a\langle N, N\rangle + b\langle C, N\rangle + c\langle W, N\rangle$$

olup a=0 bulunur. Bulduğumuz değer denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\Phi(\mathrm{N}) = bC + cW \tag{3.5}$$

tipinde bir denklem olur.

Benzer şekilde (3.5) denkleminin her iki tarafını C ile iç çarpıma tabi tutulacak olursak

$$\langle \Phi(N), C\rangle = b\langle C, C\rangle + c\langle W, C\rangle,$$

$$\Phi(N) = \beta C$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle \beta C , C\rangle = b\langle C, C\rangle + c\langle W, C\rangle$$

yazılır.

Buradan b=$\beta$ olur.

Daha sonra (3.5) denkleminin her iki tarafını W ile iç çarpıma tabi tutulacak olursa

$$\langle \Phi(N), W\rangle = b\langle C, W\rangle + c\langle W, W\rangle$$

$$\Phi(N) = \beta C$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle \beta C, W\rangle = c\langle W, W\rangle$$

denkleminden c=0 olur. Böylelikle

$$\Phi(N) = \beta C. \tag{3.6}$$

elde edilir.

Şimdi de benzer işlemleri $\Phi(C)$ için yapalım. $\Phi(C) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{C}) = eN + fC + gW \tag{3.7}$$

yazılır. (3.7) eşitliğinin her iki tarafının N ile iç çarpımını alalım.

$$\langle \Phi(C), N \rangle = e\langle N, N \rangle + f\langle C, N \rangle + g\langle W, N \rangle$$

olur.

$$\langle \Phi(C), N \rangle = \mathrm{e}$$

bulunur. $\Phi(C)$ (3.3) eşitliğinden

$$\Phi(C) = -\beta N + \Omega W$$

olup iç çarpımda $\Phi(C)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\langle -\beta C + \Omega W, N \rangle = \mathrm{e}$$

$$\mathrm{e} = -\beta$$

olarak bulunur.

Benzer olarak (3.7) denkleminin her iki tarafının C ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(C), C \rangle = e\langle N, C \rangle + f\langle C, C \rangle + g\langle W, C \rangle$$

$$\langle \Phi(C), C \rangle = \mathrm{f}$$

olur. $\Phi(C)$ (3.3) eşitliğinden

$$\Phi(C) = -\beta N + \Omega W$$

olup iç çarpımda $\Phi(C)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\langle -\beta C + \Omega W, C \rangle = \mathrm{f}$$

$$\mathrm{f} = 0$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde (3.7) denkleminin her iki tarafının W ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(C), W \rangle = e\langle N, W \rangle + f\langle C, W \rangle + g\langle W, W \rangle$$

olur.

$\langle \Phi(C), W \rangle$ =g

dır. $\Phi(C)$ (3.3) eşitliğinden

$\Phi(C) = -\beta N + \Omega W$

olup iç çarpımda $\Phi(C)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$\langle -\beta C + \Omega W, W \rangle$ =g

f =Ω olarak bulunur. Bulduğumuz ifadeleri (3.7) denkleminde yazılacak olursa

$\Phi(C) = -\beta N + \Omega W$

bulunur ispat tamamlamış olur.

Şimdi de benzer işlemleri $\Phi(W)$ için yapalım. $\Phi(W) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{W}) = kN + lC + mW \tag{3.8}$$

yazabiliriz. (3.8) eşitliğinin her iki tarafının N ile iç çarpımını alalım.

$\langle \Phi(W), N \rangle = k\langle N, N \rangle + l\langle C, N \rangle + m\langle W, N \rangle$

olur.

$\langle \Phi(W), N \rangle = \mathrm{k}$

bulunur. $\Phi(W)$ (3.3) eşitliğinden

$\Phi(W) = -\Omega C$

olup iç çarpımda $\Phi(W)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$\langle -\gamma C, N \rangle$ =k

buradan k =0 olarak bulunur.

Benzer olarak (3.8) denkleminin her iki tarafının C ile iç çarpımı alınırsa

$\langle \Phi(W), C \rangle = k\langle N, C \rangle + l\langle C, C \rangle + m\langle W, C \rangle$

olur.

$\langle \Phi(W), C \rangle = l$

olur. $\Phi(C)$ (3.3) eşitliğinden

$$\Phi(W) = -\Omega C$$

olup iç çarpımda $\Phi(W)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\langle -\Omega C\, , C \rangle = l$$

buradan $l$ =$-\Omega$
olarak bulunur.

Son olarak (3.8) denkleminin her iki tarafının W ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(W), W \rangle = k\langle N, W \rangle + l\langle C, W \rangle + m\langle W, W \rangle$$

olur.

$$\langle \Phi(W), W \rangle = m$$

olur. $\Phi(W)$ (3.3) eşitliğinden

$$\Phi(W) = -\Omega C$$

olup iç çarpımda $\Phi(W)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\langle -\Omega C\, , W \rangle = m$$

$m$ =0 olarak bulunur. Bulduğumuz ifadeleri (3.8) denkleminde yazılacak olursa

$$\Phi(W) = -\Omega C$$

bulunur.

Böylece Lorent kuvveti ile alternatif çatı arasındaki ilişki gösterilmiş olup ispat N-manyetik eğri için tamamlanmış oldu.

**Teorem 3.4.** Birim hızlı $\alpha$ manyetik eğrisi $V$ manyetik alanın yörüngesi olması için $V$ manyetik alanın $\alpha$ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilmesidir.

$$V = \Omega N + \beta W \tag{3.9}$$

**İspat:** $\alpha$ eğrisi $V$ manyetik alanın yörüngesi o zaman Alternatif çatıya göre $V$

V $\in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$V = a_1 N + a_2 C + a_3 W$$

yazılabilir. Diğer tarftan

$$\Phi(N) = V \times N \tag{3.10}$$

(3.3) denkleminden

$$\Phi(N) = \beta C$$

değerine eşittir. Şimdi bu değerleri (3.10) denkleminde yerine yazıp gerekli işlemleri yapalım.

$$\beta C = V \times N = (a_1 N + a_2 C + a_3 W) \times N$$

yazılır. Vektörel çarpımın özellikleri kullanarak işlemi yapalım.

$$\beta C = (-a_2 W + a_3 C)$$

bulunur. Denklemin eşitliğinden

$a_2 = 0,\ a_3 = \beta$ bulunur.

Benzer olarak

$$\Phi(W) = V \times W \tag{3.11}$$

(3.3) denkleminden

$$\Phi(W) = -\Omega C$$

değerine eşittir. Şimdi bu değerleri (3.11) denkleminde yerine yazıp gerekli işlemleri yapalım.

$$-\Omega C = V \times W = (a_1 N + a_2 C + a_3 W) \times W$$

yazılır. vektörel çarpımın özellikleri kullanarak işlem yapılırsa

$$-\Omega C = (-a_1 C - a_2 N)$$

bulunur. Denklemin eşitliğinden

$a_1 = \gamma,\ a_2 = 0$ bulunur.

Bulduğumuz değerleri

$$V = a_1 N + a_2 C + a_3 W$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$V = \Omega N + \beta W$$

olup ispat tamamlanmış olur.

## 3.2. $C$- Manyetik Eğriler

**Tanım 3.5.** Lorentz eşitliğini sağlayan $\alpha$ eğrisine $M$ üzerinde C-manyetik eğri denir.

$$\nabla_{\alpha'} C = \Phi(C) = V \times C$$

Bu tanımdan yola çıkarak alternatif çatıya göre C-manyetik eğrilerini gösterelim.

**Önerme 3.6.** $\alpha$ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu $(M, g)$ üzerinde birim hızlı bir C-manyetik eğri ve bu eğrinin Serret−Frenet elemanları $\{N, C, W, \beta, \gamma\}$ olsun o halde alternatif çatıya göre matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$N' = \beta C$$

$$C' = -\beta N + \gamma W$$

$$W' = -\gamma W$$

**Teorem 3.7.** $\alpha$ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu $(M, g)$ üzerinde birim hızlı bir C - manyetik eğri ve bu eğrinin Serret-Frenet elemanlarının Lorentz kuvveti ile alernatif çatıya arasında aşağıdaki gibi ilişki olup matrisi ise şöyle gösteririz:

$$\begin{bmatrix} \Phi(N) \\ \Phi(C) \\ \Phi(W) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \lambda \\ -\beta & 0 & \gamma \\ -\lambda & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Burada $\lambda$ belirli katsayılı bir fonksiyondur.

$$\Phi(N) = \beta C + \lambda W$$

$$\Phi(C) = -\beta N + \gamma W \tag{3.14}$$

$$\Phi(W) = -\lambda N - \gamma C$$

**İspat:** $\alpha$ eğrisi $(M, g\,)$ 3-boyutlu riemann manifoldu üzerinde bir $C$−manyetik eğri ve bu eğrinin alternatif çatı elemanları $\{N, C, W, \beta, \lambda, \gamma\}$ olsun.

$\Phi(N) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{N}) = b_1 N + b_2 C + b_3 W \tag{3.15}$$

yazılabilir. Buradan $\Phi(N)$'nin denkleminin her iki yanını N ile iç çarpıma tabi tutacak olursak

$$\langle \Phi(N), N\rangle = b_1\langle N,N\rangle + b_2\langle C,N\rangle + b_3\langle W,N\rangle$$

olur. $\Phi(C)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(N) = \beta C + \lambda W$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle \beta C + \lambda W \ \ , N\rangle = b_1\langle N,N\rangle + b_2\langle C,N\rangle + b_3\langle W,N\rangle$$

olup buradan $b_1 = 0$ bulunur.

Benzer şekilde (3.15) denkleminin her iki tarafını C ile iç çarpıma tabi tutulacak olursak

$$\langle \Phi(N), C\rangle = b_1\langle N,C\rangle + b_2\langle C,C\rangle + b_3\langle W,C\rangle$$

(3.14) eşitliğinde

$$\Phi(N) = \beta C + \lambda W$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle \beta C + \lambda W \ , C\rangle = b_1\langle N,C\rangle + b_2\langle C,C\rangle + b_3\langle W,C\rangle$$

yazılır. $b_2 = \beta$ olur.

Son olarak (3.15) denkleminin her iki tarafını W ile iç çarpıma tabi tutulacak olursa

$$\langle \Phi(N), W\rangle = b_1\langle N,W\rangle + b_2\langle C,W\rangle + b_3\langle W,W\rangle$$

olur. $\Phi(N)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(N) = \beta C + \lambda W$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle \beta C + \lambda W, \ W\rangle = \ b_3\langle W,W\rangle$$

denkleminden $b_3 = \lambda$ olur. Böylelikle bulduğumuz değerleri (3.15) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\Phi(N) = \beta C + \lambda W$$

eşitliği elde edildiği görülür.

Şimdi de benzer işlemleri $\Phi(C)$ için yapalım. $\Phi(C) \in sp\{N,C,W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{C}) = c_1 N \ + c_2 C \ + c_3 W \tag{3.16}$$

yazabiliriz. (3.16) eşitliğinin her iki tarafının N ile iç çarpımını alalım.

$$\langle \Phi(C), N\rangle = c_1\langle N, N\rangle + c_2\langle C, N\rangle + c_3\langle W, N\rangle$$

olur. $\Phi(C)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(C) = -\beta N + \gamma W$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle -\beta N + \gamma W, N\rangle = c_1$$

$c_1 = -\beta$ olarak bulunur.

Benzer olarak (3.16) denkleminin her iki tarafının C ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(C), C\rangle = c_1\langle N, C\rangle + c_2\langle C, C\rangle + c_3\langle W, C\rangle$$

olur. $\Phi(C)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(C) = -\beta N + \gamma W$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle -\beta N + \gamma W, C\rangle = c_2$$

buradan $c_2 = 0$ olarak bulunur.

Benzer şekilde (3.16) denkleminin her iki tarafının W ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(C), W\rangle = c_1\langle N, W\rangle + c_2\langle C, W\rangle + c_3\langle W, W\rangle$$

olur. Buradan $\Phi(C)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(C) = -\beta N + \gamma W$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle -\beta N + \gamma W, W\rangle = c_3$$

$c_3 = \gamma$ olarak bulunur.

Bulduğumuz ifadeleri (3.16) denkleminde yazılacak olursa
$\Phi(C) = -\beta N + \gamma W$ bulunur.

Şimdi de benzer işlemleri $\Phi(W)$ için yapalım. $\Phi(W) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{W}) = d_1 N + d_2 C + d_3 W \tag{3.17}$$

yazabiliriz. (3.17) eşitliğinin her iki tarafının N ile iç çarpımını alalım.

$$\langle \Phi(W), N\rangle = d_1\langle N, N\rangle + d_2\langle C, N\rangle + d_3\langle W, N\rangle$$

olur. $\Phi(W)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(W) = -\lambda N - \gamma C$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Phi(W), N\rangle = d_1$ bulunur.

$\langle -\lambda N - \gamma C \ , N\rangle = d_1,$

$d_1 = -\lambda$ olarak bulunur.

Benzer olarak (3.17) denkleminin her iki tarafının C ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(W), C\rangle = d_1\langle N, C\rangle + d_2\langle C, C\rangle + d_3\langle W, C\rangle$$

olur. Buradan $\Phi(W)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(W) = -\lambda N - \gamma C$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Phi(W), C\rangle = d_2$ olur.

$\langle -\lambda N - \gamma C \ , C\rangle = d_2,$

$d_2 = -\gamma$ olarak bulunur.

Son olarak (3.17) denkleminin her iki tarafının W ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(W), W\rangle = d_1\langle N, W\rangle + d_2\langle C, W\rangle + d_3\langle W, W\rangle$$

olur. $\Phi(W)$ (3.14) denkleminden değeri

$$\Phi(W) = -\lambda N - \gamma C$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Phi(W), W\rangle = d_3$ olur.

$\langle -\lambda N - \gamma C \ , W\rangle = d_3,$

buradan $d_3 = 0$ olarak bulunur.

Bulduğumuz ifadeleri (3.17) denkleminde yazılacak olursa

$$\Phi(W) = -\lambda N - \gamma C$$

olur.

Böylece Lorent kuvveti ile alternatif çatı arasındaki ilişki gösterilmiş olup ispat C-manyetik eğri için ispat tamamlanmış oldu.

**Teorem 3.8.** Birim hızlı $\alpha$ manyetik eğrisi $V$ manyetik alanın yörüngesi olması için gerek ve yeter şart $V$ manyetik alanının $\alpha$ eğrisi aşağıdaki gibi yazılabilmelidir.

$$V = \gamma N - \lambda C + \beta W \tag{3.18}$$

**İspat:** $\alpha$ eğrisi $V$ manyetik alanın yörüngesi ise o zaman Alternatif çatıya göre $V \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$V = e_1 N + e_2 C + e_3 W \tag{3.19}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\Phi(N) = V \times N \tag{3.20}$$

yazılır.

(3.14) denkleminden

$$\Phi(N) = \beta C + \lambda W$$

değerine eşittir. Şimdi bu değerleri (3.20) denkleminde yerine yazıp

$$\beta C + \lambda W = V \times N = (e_1 N + e_2 C + e_3 W) \times N$$

yazılır. Buradan vektörel çarpımın özellikleri kullanarak işleme devam edelim.

$$\beta C + \lambda W = (-e_2 W + e_3 C)$$

yazılır. Denklemin eşitliğinden

$e_2 = -\lambda$ ve $e_3 = \beta$ bulunur.

Benzer olarak

$$\Phi(C) = V \times C \tag{3.21}$$

yazılır. (3.14) denkleminden

$$\Phi(C) = \Phi(C) = -\beta N + \gamma W$$

değerine eşittir. Şimdi bu değerleri (3.21) denkleminde yerine yazıp gerekli işlemleri yapalım.

$$-\beta N + \gamma W = V \times N = (e_1 N + e_2 C + e_3 W) \times C$$

yazılır. Buradan vektörel çarpımın özellikleri kullanarak işleme devam edilirse.

$$-\beta N + \gamma W = (e_1 W + e_3 N)$$

yazılır. Denklemin eşitliğinden $e_1 = \gamma$ ve $e_3 = \beta$ bulunur.

Bulduğumuz değerleri (3.19) denkleminde yerine yazılırsa $V$ manyetik alanın denklemi

$$V = \gamma N - \lambda C + \beta W$$

olarak yazılır.

## 3.3. $W$- Manyetik Eğriler

**Tanım 3.9.** Lorentz eşitliğini sağlayan $\alpha$ eğrisine M üzerinde W-manyetik eğri denir.

$$\nabla_{\alpha'} W = \Phi(W) = V \times W \tag{3.22}$$

Bu tanımdan yola çıkarak alternatif çatıya göre W-manyetik eğrilerini göstereceğiz.

**Önerme 3.10.** $\alpha$ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu $(M, g)$ üzerinde birim hızlı bir W-manyetik eğri ve bu eğrinin Serret−Frenet elemanları $\{N, C, W, \beta, \gamma\}$ olsun o halde alternatif çatıya göre matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

$$N' = \beta C$$

$$C' = -\beta N + \gamma W$$

$$W' = -\gamma C$$

**Teorem 3.11.** $\alpha$ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu $(M, g)$ üzerinde birim hızlı bir W - manyetik eğri ve bu eğrinin Serret-Frenet elemanlarının Lorentz kuvveti ile alternatif çatıya arasında aşağıdaki gibi ilişki olup matrisi ise şöyle gösteririz:

$$\begin{bmatrix} \Phi(N) \\ \Phi(C) \\ \Phi(W) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_2 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Burada $\Omega_2$ belirli katsayılı bir fonksiyondur.

$\Phi(N) = \Omega_2 C$

$\Phi(C) = -\Omega_2 N + \gamma W$ (3.24)

$\Phi(W) = -\gamma C$

**İspat:** $\alpha$ eğrisi $(M, g\ )$ 3-boyutlu riemann manifoldu üzerinde bir $W-$manyetik eğri ve bu eğrinin alternatif çatı elemanları $\{N, C, W, \Omega_2, \gamma\}$ olsun.

$\Phi(N) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$\Phi(\mathrm{N}) = f_1 N\ + f_2 C\ + f_3 W$ (3.25)

yazılabilir. Buradan $\Phi(N)$'nin denkleminin her iki yanını N ile iç çarpıma tabi tutacak olursak

$\langle \Phi(N), N \rangle = f_1 \langle N, N \rangle + f_2 \langle C, N \rangle + f_3 \langle W, N \rangle$

olur. $\Phi(N)$ (3.24) denkleminden değeri

$\Phi(N) = \Omega_2 C$ olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Omega_2 C\ , N \rangle = b_1 \langle N, N \rangle + b_2 \langle C, N \rangle + b_3 \langle W, N \rangle$ olup buradan

$b_1 = 0$ bulunur.

Benzer şekilde (3.25) denkleminin her iki tarafını C ile iç çarpıma tabi tutacak olursak

$\langle \Phi(N), C \rangle = f_1 \langle N, C \rangle + f_2 \langle C, C \rangle + f_3 \langle W, C \rangle$

(3.24) eşitliğinde

$\Phi(N) = \Omega_2 C$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Omega_2 C\ , C \rangle = f_1 \langle N, C \rangle + f_2 \langle C, C \rangle + f_3 \langle W, C \rangle$

yazılır. $f_2 = \beta$ olur.

Son olarak (3.25) denkleminin her iki tarafını W ile iç çarpıma tabi tutacak olursak

$\langle \Phi(N), W \rangle = f_1 \langle N, W \rangle + f_2 \langle C, W \rangle + f_3 \langle W, W \rangle$

olur. $\Phi(N)$ (3.24) denkleminden değeri

$\Phi(N) = \Omega_2 C$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Omega_2 C,\ W \rangle = \ f_3 \langle W, W \rangle$

denkleminden $f_3 = 0$ olur. Böylelikle bulduğumuz değerleri (3.25) denkleminde yerine yazacak olursak

$\Phi(N) = \Omega_2 C$

eşitliği elde edildiği görülür.

Şimdi de benzer işlemleri $\phi(\mathrm{C})$ için yapalım. $\Phi(C) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{C}) = g_1 N \ + g_2 C \ + g_3 W \tag{3.26}$$

yazabiliriz. (3.26) eşitliğinin her iki tarafının N ile iç çarpımını alalım.

$\langle \Phi(C), N \rangle = g_1 \langle N, N \rangle + g_2 \langle C, N \rangle + g_3 \langle W, N \rangle$

olur. Buradan $\Phi(C)$ (3.24) denkleminden değeri

$\Phi(C) = -\Omega_2 N + \gamma W$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle -\Omega_2 N + \gamma W, N \rangle = \ g_1$

buradan $g_1 = -\beta$ olarak bulunur.

Benzer olarak (3.26) denkleminin her iki tarafının C ile iç çarpımı alınırsa

$\langle \Phi(C), C \rangle = g_1 \langle N, C \rangle + g_2 \langle C, C \rangle + g_3 \langle W, C \rangle$

olur. Buradan $\Phi(C)$ (3.24) denkleminden değeri

$\Phi(C) = -\Omega_2 N + \gamma W$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle -\Omega_2 N + \gamma W, C \rangle = \ g_2$

buradan $g_2 = 0$ olarak bulunur.

Aynı şekilde (3.26) denkleminin her iki tarafını W ile iç çarpımı alınırsa

$\langle \Phi(C), W \rangle = g_1 \langle N, W \rangle + g_2 \langle C, W \rangle + g_3 \langle W, W \rangle$

olur. Buradan $\Phi(C)$ (3.24) denkleminden değeri

$$\Phi(C) = -\Omega_2 N + \gamma W$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\langle -\Omega_2 N + \gamma W, W \rangle = g_3$$

buradan $g_3 = \gamma$ olarak bulunur.

Bulduğumuz ifadeleri (3.26) denkleminde yazacak olursak

$$\phi(C) = -\Omega_2 N + \gamma W$$

bulunur..

Şimdi de benzer işlemleri $\Phi(W)$ için yapalım. $\Phi(W) \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathrm{W}) = h_1 N + h_2 C + h_3 W \tag{3.27}$$

yazabiliriz. (3.27) eşitliğinin her iki tarafının N ile iç çarpımını alalım.

$$\langle \Phi(W), N \rangle = h_1 \langle N, N \rangle + h_2 \langle C, N \rangle + h_3 \langle W, N \rangle$$

olur. Buradan $\Phi(W)$ (3.24) denkleminden değeri

$$\Phi(W) = -\gamma C$$

olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Phi(W), N \rangle = h_1$ bulunur.

$$\langle -\gamma C \ , N \rangle = h_1$$

buradan $h_1 = 0$ olarak bulunur.

Benzer olarak (3.27) denkleminin her iki tarafının C ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(W), C \rangle = h_1 \langle N, C \rangle + h_2 \langle C, C \rangle + h_3 \langle W, C \rangle$$

olur. Buradan $\Phi(W)$ (3.24) denkleminden değeri

$\Phi(W) = -\gamma C$ olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Phi(W), C \rangle = h_2$ olur.

$\langle -\gamma C \ , C \rangle = h_2$,

buradan $h_2 = -\gamma$ olarak bulunur.

Son olarak (3.27) denkleminin her iki tarafının W ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \Phi(W), W\rangle = h_1\langle N, W\rangle + h_2\langle C, W\rangle + h_3\langle W, W\rangle$$

olur. $\Phi(W)$ (3.24) denkleminden değeri $\Phi(W) = -\gamma C$ olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$\langle \Phi(W), W\rangle = h_3$ olur.

$\langle -\gamma C \ , W\rangle = h_3$,

buradan $h_3$ =0 olarak bulunur.

Bulduğumuz ifadeleri (3.27) denkleminde yazacak olursak

$$\Phi(W) = -\gamma C$$

bulunur ispat tamamlamış olur

Böylece Lorent kuvveti ile alternatif çatı arasındaki ilişki gösterilmiş olup W-manyetik eğri için ispat tamamlanmış oldu.

**Teorem 3.12.** Birim hızlı $\alpha$ manyetik eğrisi $V$ manyetik alanın yörüngesi olması için gerek ve yeter şart $V$ manyetik alanının $\alpha$ eğrisi aşağıdaki gibi yazılabilmelidir.

$$V = \gamma N + \Omega_2 W \tag{3.28}$$

**İspat:** $\alpha$ eğrisi $V$ manyetik alanın yörüngesi ise o zaman Alternatif çatıya göre $V \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$V = k_1 N + k_2 C + k_3 W \tag{3.29}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\Phi(N) = V \times N \quad . \tag{3.30}$$

yazılır. (3.24) denkleminden $\Phi(N) = \Omega_2 C$ değerine eşitti. Şimdi bu değerleri (3.30) denkleminde yerine yazıp gerekli işlemleri yapalım.

$$\Omega_2 C = V \times N = (k_1 N + k_2 C + k_3 W) \times N$$

yazılır. Buradan vektörel çarpımın özellikleri kullanarak işleme devam edelim.

$$\Omega_2 C = (-k_2 W + k_3 C)$$

yazılır. Denklemin eşitliğinden

$k_2 = 0$ ve $k_3 = \Omega_2$ bulunur.

Benzer olarak

$$\Phi(C) = V \times C \tag{3.31}$$

yazılır. (3.24) denkleminden

$$\Phi(C) = \Phi(C) = -\Omega_2 N + \gamma W$$

değerine eşitti. Şimdi bu değerleri (3.31) denkleminde yerine yazıp gerekli işlemleri yapalım.

$$-\Omega_2 N + \gamma W \ \ = V \times N = (k_1 N + k_2 C + k_3 W) \times C$$

yazılır. Buradan vektörel çarpımın özellikleri kullanarak işleme devam edilirse.

$$-\Omega_2 N + \gamma W \ = (k_1 W - k_3 N)$$

yazılır. Denklemin eşitliğinden

$k_1 = \gamma$ ve $k_3 = -\Omega_2$

bulunur. Bulduğumuz değerleri (3.29) denkleminde yerine yazılırsa $V$ manyetik alanın denklemi

$$V = \gamma N + \Omega_2 W$$

olarak yazılır.

# 4. ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE MANYETİK EĞRİLERİN FERMİ - WALKER TÜREVİ

**Teorem 4.1.** Alternatif çatıya göre X'in Fermi-Walker türevi,

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{dX}{ds} - \beta(W \times X) \qquad \text{dır.} \tag{4.1}$$

**İspat:** Alternatif çatıya göre Fermi-Walker türevinin tanımını kullanırsak

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{dX}{ds} - \langle N, X\rangle \frac{dN}{ds} + \langle \frac{dN}{ds}, X\rangle N \tag{4.2}$$

Fermi- Walker'in türevinin tanımından yukarıdaki eşitliği yazarız. (3.2) deki eşitlikten

$$N' = \beta C$$

dır ve X $\in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$X = \mu_1 N + \mu_2 C + \mu_3 W$$

yazılır.

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{dX}{ds} - \langle N, X\rangle \beta C \ + \langle \beta C\ , X\rangle N$$

yukarıdaki ifadeler denklemde yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{dX}{ds} - \beta[\langle N, X\rangle C - \langle C\ , X\rangle N]$$

olur.

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{dX}{ds} - \beta[(N \times C) \times X] = \beta(W \times X)$$

eşitliği bulunur ispat tamamlanmış oldu.

**Teorem 4.2.** $\{N, C, W\}$ Alternatif çatısı ve $\mu_1, \mu_2$, $\mu_3$ sabitler olmak üzere $s$ yay parametreli bütün $\alpha(s)$ uzay eğrileri boyunca $X = \mu_1 N + \mu_2 C + \mu_3 W$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir ancak ve ancak

1.) $\mu_1 = c_0 \frac{\gamma}{\beta} e^{-\beta s} + c_0 \frac{\beta}{\gamma} e^{-\beta s}$

2.) $\mu_1 = c_1 \sin(\gamma s) - c_2 \cos(\gamma s) + c_0 \frac{\beta}{\gamma} e^{-\beta s}$

3.) $\mu_3 = c_2 \sin(\gamma s) - c_1 \cos(\gamma s) + c_0 e^{-\beta s}$ dır.

**İspat:** $X \in sp\{N, C, W\}$ olduğundan

$$X = \mu_1 N + \mu_2 C + \mu_3 W$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{dX}{ds} = 0$$

dır. Çünkü $X$ vektör alanı $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca paralel olduğundan,

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{d(\mu_1 N + \mu_2 C + \mu_3 W)}{ds} = \frac{d\mu_1}{ds} N + \mu_1 \frac{dN}{ds} + \frac{d\mu_2}{ds} C + \mu_2 \frac{dC}{ds} + \frac{d\mu_3}{ds} W + \mu_3 \frac{dW}{ds}$$

Denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \frac{d\mu_1}{ds} N + \mu_1 \beta C + \frac{d\mu_2}{ds} C + \mu_2(-\beta N + \gamma W) + \frac{d\mu_3}{ds} W + \mu_3(-\gamma C)$$

şeklinde olur. Denklemdeki $N, C, W$ ifadelerinin katsayılarını bir araya getirelim.

$$\frac{\tilde{\nabla} X}{\tilde{\nabla} s} = \left(\frac{d\mu_1}{ds} - \mu_2 \beta\right) N + \left(\frac{d\mu_2}{ds} + \beta \mu_1 - \mu_3 \gamma\right) C + \left(\frac{d\mu_3}{ds} + \gamma \mu_2\right) W = 0$$

yazılır. Buradan

$$\frac{d\mu_1}{ds} - \mu_2 \beta = 0, \quad \frac{d\mu_2}{ds} + \beta \mu_1 - \mu_3 \gamma = 0, \ \frac{d\mu_3}{ds} + \gamma \mu_2 = 0$$

yazılarak lineer diferansiyel denklem sistemleri elde edilir. Bu lineer diferansiyel denklemleri çözülürse

$$\mu_1 = c_0 \frac{\gamma}{\beta} e^{-\beta s} + c_0 \frac{\beta}{\gamma} e^{-\beta s}$$

$$\mu_1 = c_1 \sin(\gamma s) - c_2 \cos(\gamma s) + c_0 \frac{\beta}{\gamma} e^{-\beta s}$$

$$\mu_3 = c_2 \sin(\gamma s) - c_1 \cos(\gamma s) + c_0 e^{-\beta s}$$

genel çözümü bulunur. Denklemlerdeki $c_0, c_1, c_2$ ifadeleri sabit sayılardır.

## 4.1. N-Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi

$\alpha$, N-manyetik bir eğri olsun.

Teorem 4.1'de Alternatif çatıya göre bir X vektör alanını Fermi-Walker türevi,

$$\tilde{\nabla}_N X = \nabla_N X - \beta(W \times X)$$

dır. Bu Fermi-Walker türevinin tanımını kullanarak N-manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevini göstereceğiz. Fermi-Walker türevi ile Lorent kuvvetini ilişkilendirirsek

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(N) = \nabla_N \Phi(N) - \beta\big(W \times \Phi(N)\big) \tag{4.3}$$

yazılır.

**Teorem 4.3.** $\alpha$, Alternatif çatısında N-manyetik eğri olsun. Alternatif çatıya göre $\Phi(N), \Phi(C), \Phi(W)$, Lorent kuvvetleri ve $V$ manyetik alanının Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

i. $\tilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C + \beta\gamma W$

ii. $\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' N - \Omega\gamma C + \Omega' W$

iii. $\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\Omega' C - \Omega\gamma W$

iv. $\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \Omega' N - \beta\gamma C + \beta' W$ dır.

**İspat: i.)** $\alpha$, N-manyetik bir eğri olsun. Fermi-Walker türevi formülü yardımıyla ispatı yapalım.

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(N) = \nabla_N \Phi(N) - \beta\big(W \times \Phi(N)\big)$$

$$\Phi(N) = \beta C$$

olup eşitliği denklemde yazalım

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(N) = \nabla_N \beta\mathrm{C} - \beta(W \times \beta\mathrm{C})$$

olur.

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C + \beta\nabla_N \mathrm{C} + \beta^2 N$$

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C + \beta(-\beta N + \gamma W) + \beta^2 N$$

buradan

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C + \beta\gamma W \tag{4.4}$$

**ii.)** Benzer olarak $\Phi(C)$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü (4.3) eşitliğinden

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = \nabla_N \Phi(C) - \beta\big(W \times \Phi(C)\big)$$

$\Phi(C)$ (3.3) eşitliğinden

$$\Phi(C) = -\beta N + \Omega W$$

olup denklemde $\Phi(C)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = \nabla_N(-\beta N + \Omega W) - \beta\big(W \times (-\beta N + \Omega W)\big)$$

olur. Buradan

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\nabla_N \beta \mathrm{N} + \nabla_N \Omega \mathrm{W} - \beta[W \times (-\beta N + \Omega W)]$$

yazılır.

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' \mathrm{N} + \beta \nabla_N \mathrm{N} + \Omega' W + \Omega \nabla_N \mathrm{W} - \beta[W \times (-\beta N + \Omega W)]$$

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' \mathrm{N} + \beta(-\beta C) + \Omega' W + \Omega(-\gamma C) - \beta(-\beta C)$$

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' \mathrm{N} - \gamma \Omega \mathrm{C} + \Omega' W \tag{4.5}$$

olup ii. eşitliğinin ispatı tamamlanmış oldu.

**iii.)** Benzer olarak $\Phi(W)$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü (4.3) eşitliğinden

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = \nabla_N \Phi(W) - \beta\big(W \times \Phi(W)\big).$$

$\Phi(W)$ (3.3) eşitliğinden

$$\Phi(W) = -\Omega C$$

olup denklemde $\Phi(W)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = \nabla_N(-\Omega C\ ) - \beta[W \times (-\Omega C\ )]$$

olur. Buradan

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\nabla_N(\Omega \mathrm{C}) - \beta(\Omega N)$$

yazılır.

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\Omega' \mathrm{C} + \Omega \nabla_N \mathrm{C} - \Omega \beta \mathrm{N}$$

olur.

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\Omega' \mathrm{C} + \Omega \beta \mathrm{N} - \Omega \gamma \mathrm{W} + -\Omega \beta \mathrm{N}$$

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\Omega' \mathrm{C} - \Omega\gamma \mathrm{W} \tag{4.6}$$

bulunur. iii.) eşitliğinin ispatı tamamlanmış oldu.

Şimdi benzer işlemleri iv denkleminde $V$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü (4.3) eşitliğine yazılarak

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N \mathrm{V} - \beta(W \times V)$$

yazılır. $V$ (3.9) eşitliğinden

$$V = \Omega N + \beta W$$

olup denklemde V ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N(\Omega N + \beta W\ ) - \beta[W \times (\Omega N + \beta W)]$$

olur. Buradan

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N(\Omega \mathrm{N}) + \nabla_N(\beta \mathrm{W}) - \beta[W \times (\Omega N + \beta W)]$$

yazılır.

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \Omega' \mathrm{N} + \Omega \nabla_N \mathrm{N} + \beta' \mathrm{W} + \beta \nabla_N \mathrm{W} - \beta[\Omega(W \times \mathrm{N}) + \beta(W \times W)]$$

olur.

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \Omega' \mathrm{N} + \Omega\beta C + \beta' \mathrm{W} - \beta\gamma \mathrm{C} - \beta\Omega C$$

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \Omega' - \beta\gamma \mathrm{C} + \beta' \mathrm{W} \tag{4.7}$$

bulunur. iv.) eşitliğindeki $V$ manyetik alan vektörünün Fermi-Walker türev ispatı tamamlanmış oldu.

## 4.2. C-Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi

$\alpha$, C-manyetik bir eğri olsun.

Teorem 4.1'de Alternatif çatıya göre bir X vektör alanının Fermi-Walker türevi,

$$\tilde{\nabla}_N X = \nabla_N X - \beta(W \times X)$$

dır. Bu Fermi-Walker türevinin tanımını kullanarak C-manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevini göstereceğiz. Buradan Fermi-Walker türevi ile Lorent kuvvetini ilişkilendirirsek

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(C) = \nabla_N \Phi(C) - \beta\big(W \times \Phi(C)\big) \tag{4.8}$$

yazılır.

**Teorem 4.4.** $\alpha$, Alternatif çatısında C-manyetik eğri olsun. Alternatif çatıya göre $\Phi(N), \Phi(C), \Phi(W)$, Lorent kuvvetleri ve $V$ manyetik alanının Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

**i.** $\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = (\beta' - \lambda\gamma)C + (\beta\gamma + \lambda')W$

**ii.** $\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' N - \lambda^2 C + \lambda' W$

**iii.** $\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\lambda' N - \gamma' \mathrm{C} - \gamma^2 W$

**iv.** $\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' N + (-\lambda' - \beta\gamma)C + (\beta' - \lambda\gamma)W$

dır.

**İspat:** **i.)** $\alpha$, C-manyetik bir eğri olsun. Fermi-Walker türevi formülü yardımıyla ispatı yapalım.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \widetilde{\nabla}_N \Phi(N) - \beta\big(W \times \Phi(N)\big)$$

yazılır.

$$\Phi(N) = \beta C + \lambda W$$

olup eşitliği denklemde yazalım.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \nabla_N(\beta C + \lambda W) - \beta[W \times (\beta C + \lambda W)]$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \nabla_N(\beta C) + \nabla_N(\lambda W) - \beta[\beta(W \times C) + \lambda(W \times W)]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C + \beta(\nabla_N \mathrm{C}) + \lambda' W + \lambda(\nabla_N W) + \beta^2 N$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C + \beta(-\beta N + \gamma W) + \lambda' W + \lambda(-\gamma C) + \beta^2 N$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C + \beta(-\beta N + \gamma W) + \lambda' W + \lambda(-\lambda N - \gamma C) + \beta^2 N$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \beta' C - \beta^2 N + \beta\gamma W + \lambda' W - \lambda^2 N - \lambda\gamma C + \beta^2 N$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = (\beta' - \lambda\gamma)C + (\beta\gamma + \lambda')W \tag{4.9}$$

denklemi elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

**ii.)** Benzer olarak $\Phi(C)$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü kullanarak

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = \nabla_N \Phi(C) - \beta\big(W \times \Phi(C)\big)$$

yazılır.

$$\Phi(C) = -\beta N + \lambda W$$

olup eşitliği denklemde yazalım.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = \nabla_N(-\beta N + \gamma W) - \beta[W \times (-\beta N + \gamma W)]$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\nabla_N(\beta N) + \nabla_N(\gamma W) - \beta[-\beta(W \times N) + \lambda(W \times W)]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' N - \beta(\nabla_N \mathrm{N}) + \gamma' W + \lambda(\nabla_N W) + \beta^2 C$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' N - \beta(\beta C) + \lambda' W + \gamma(-\gamma C) + \beta^2 C$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\beta' N - \lambda^2 C + \lambda' W \tag{4.10}$$

denklemi elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

**iii.)** Benzer olarak $\Phi(W)$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü kullanılarak

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = \nabla_N \Phi(W) - \beta\big(W \times \Phi(W)\big)$$

yazılır. $\Phi(W)$ (3.14) eşitliğinden

$$\Phi(W) = -\lambda N - \gamma C$$

olup denklemde $\Phi(W)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = \nabla_N(-\lambda N - \gamma C\ ) - \beta[W \times (-\lambda N - \gamma C)]$$

olur. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\nabla_N(\lambda N) - \nabla_N(\gamma C) - \beta[W \times (-\lambda N - \gamma C\ )]$$

yazılır.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\lambda' N - \lambda(\nabla_N \mathrm{N}) - \gamma' C - \gamma(\nabla_N C) - \beta[-\lambda(W \times N) - \gamma(W \times C)]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\lambda' N - \lambda(\beta C) - \gamma' C - \gamma(-\beta N + \gamma W) - \beta[-\lambda C + \gamma N]$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\lambda' N - \lambda(\beta C) - \gamma' C + \beta\gamma N - \gamma\gamma W + \beta\lambda C - \beta\gamma N$$

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\lambda' N - \gamma' \mathrm{C} - \gamma^2 W \tag{4.11}$$

bulunur. iii.) eşitliğinin ispatı tamamlanmış oldu.

Şimdi benzer işlemleri iv denkleminde $V$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü (4.3) eşitliğine yazılarak

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N \mathrm{V} - \beta(W \times V)$$

yazılır.

$$V = \gamma N - \lambda C + \beta W$$

olup denklemde V ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N (\gamma N - \lambda C + \beta W\,) - \beta[W \times (\gamma N - \lambda C + \beta W)]$$

olur. Buradan

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N (\gamma N) - \nabla_N (\lambda C) + \nabla_N (\beta W) - \beta[W \times (\gamma N - \lambda C + \beta W)]$$

yazılır.

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' \mathrm{N} + \gamma \nabla_N \mathrm{N} - \lambda' \mathrm{C} + \lambda \nabla_N \mathrm{C} + \beta' W + \beta \nabla_N \mathrm{W} - \beta[\gamma(W \times \mathrm{N}) - \lambda(W \times C) + \beta(W \times W)]$$

olur.

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' \mathrm{N} + \gamma(\beta C) - \lambda' \mathrm{C} - \lambda(-\beta N + \gamma W) + \beta' W + \beta(-\gamma C) - \beta\gamma C - \beta\lambda N$$

$$\tilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' N + (-\lambda' - \beta\gamma) C + (\beta' - \lambda\gamma) W \tag{4.12}$$

bulunur. iv.) eşitliğinin ispatı tamamlanmış oldu.

## 4.3. W-Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi

$\alpha$, W-manyetik bir eğri olsun.

Teorem 4.1'de Alternatif çatıya göre bir X vektör alanının Fermi-Walker türevi,

$$\tilde{\nabla}_N X = \nabla_N X - \beta(W \times X)$$

dır. Bu Fermi-Walker türevinin tanımını kullanarak W-manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevini göstereceğiz. Buradan Fermi-Walker türevi ile Lorent kuvvetini ilişkilendirirsek

$$\tilde{\nabla}_N \Phi(W) = \nabla_N \Phi(W) - \beta\big(W \times \Phi(W)\big) \tag{4.13}$$

yazılır.

**Teorem 4.5.** $\alpha$, Alternatif çatısında W-manyetik eğri olsun. Alternatif çatıya göre $\Phi(N), \Phi(C), \Phi(W)$, Lorent kuvvetleri ve $V$ manyetik alanının Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

i. $\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \Omega_2' C + \Omega_2 \gamma W$

ii. $\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\Omega_2' N - \gamma^2 C + \gamma' W$

iii. $\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\gamma' C - \gamma^2 W$

iv. $\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' N - \Omega_2 \gamma C + \Omega_2' W$ dır.

**İspat: i.)** $\alpha$, W-manyetik bir eğri olsun. Fermi-Walker türevi formülü yardımıyla ispatı yapalım

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \widetilde{\nabla}_N \Phi(N) - \beta\big(W \times \Phi(N)\big)$$

yazılır.

$$\Phi(N) = \Omega_2 C$$

olup eşitliği denklemde yazalım

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \nabla_N (\Omega_2 C) - \beta[W \times (\Omega_2 C)]$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \Omega_2' C + \Omega_2 (\nabla_N \mathrm{C}) - \beta[\Omega_2 (W \times \mathrm{C})]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \Omega_2' C + \Omega_2 (-\beta N + \gamma W) + \beta[\Omega_2 N]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \Omega_2' C + \Omega_2 (-\beta N + \gamma W) + \beta[\Omega_2 N]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(N) = \Omega_2' C + \Omega_2 \gamma W \tag{4.14}$$

denklemi elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

**ii.)** Benzer olarak $\Phi(C)$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü kullanarak

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = \nabla_N \Phi(C) - \beta\big(W \times \Phi(C)\big)$$

yazılır.

$$\Phi(C) = -\Omega_2 N + \gamma W$$

olup eşitliği denklemde yazalım.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = \nabla_N(-\Omega_2 N + \gamma W\ ) - \beta[W \times (-\Omega_2 N + \gamma W\ )]$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\nabla_N(\Omega_2 N) + \nabla_N(\gamma W) - \beta[-\Omega_2(W \times N) + \lambda(W \times W)]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\Omega_2' N - \Omega_2(\nabla_N \mathrm{N}) + \gamma' W + \gamma(\nabla_N W) + \beta\Omega_2 C$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\Omega_2' N - \Omega_2(\beta C) + \gamma' W + \gamma(-\gamma C) + \beta\Omega_2 C$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(C) = -\Omega_2' N - \gamma^2 C + \gamma' W \tag{4.15}$$

denklemi elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

**iii.)** Benzer olarak $\Phi(W)$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü kullanılarak

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = \nabla_N \Phi(W) - \beta\big(W \times \Phi(W)\big)$$

yazılır.

$$\Phi(W) = -\gamma C$$

olup denklemde $\Phi(W)$ ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = \nabla_N(-\gamma C\ ) - \beta[W \times (-\gamma C)]$$

olur. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\nabla_N(\gamma C) - \beta[W \times (-\gamma C\ )]$$

yazılır.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\gamma' C - \gamma(\nabla_N C) - \beta[-\gamma(W \times C)]$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\gamma' C - \gamma(-\beta N + \gamma W) - \beta\gamma N$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\gamma' C + \beta\gamma N - \gamma\gamma W - \beta\gamma N$$

$$\widetilde{\nabla}_N \Phi(W) = -\gamma' \mathrm{C} - \gamma^2 W \tag{4.16}$$

bulunur. iii.) eşitliğinin ispatı tamamlanmış oldu.

Şimdi benzer işlemleri iv denkleminde $V$ Lorent kuvvetinin Fermi-Walker türevinin formülü

$$\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N \mathrm{V} - \beta(W \times V)$$

yazılır

$$V = \gamma N + \Omega_2 W$$

olup denklemde yerine yazılacak olursa

$$\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N(\gamma N + \Omega_2 W\ ) - \beta[W \times (\gamma N + \Omega_2 W\ )]$$

olur. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \nabla_N(\gamma N) + \nabla_N(\Omega_2 W\ ) - \beta[\gamma(W \times N) + \Omega_2(W \times W)]$$

yazılır.

$$\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' \mathrm{N} + \gamma \nabla_N \mathrm{N} + \Omega_2' \mathrm{W} + \Omega_2 \nabla_N \mathrm{W} - \beta[\gamma C]$$

olur.

$$\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' \mathrm{N} + \gamma(\beta C) + \Omega_2' \mathrm{W} + \Omega_2(-\gamma C) - \beta\gamma C$$

$$\widetilde{\nabla}_N \mathrm{V} = \gamma' N - \Omega_2 \gamma C + \Omega_2' W \tag{4.17}$$

bulunur. iv.) eşitliğinin ispatı tamamlanmış oldu.

# 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada manyetik eğriler Alternatif çatıya göre tanımlanmıştır. Frenet çatısı ve alternatif çatıya göre manyetik eğrilerin tanımlandığı ve $\alpha$ eğrisinin normal ve Binormal vektörlerinin Lorentz kuvvetinden etkilenmesiyle elde edilen yörüngeler incelenmiş ve bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Son olarak benzer düşünceyle 3 boyutlu Öklid uzayının Dual uzayında Alternatif çatıya göre manyetik eğriler araştırılabilir.

# KAYNAKLAR


[1] J.Synge (1960) Relativity: The General Theory. North Holland, Amsterdam.

[2] Bozkurt, Z, Gök, İ. Yaylı, Y, Ekmekci, F.N,(2014). A new Approach for Magnetic Curves in Riemannian 3D-Manifolds. J. Math. Phys. 55,1-12.

[3] Özdemir, Z., Gök, I., Yaylı, Y., Ekmekci, F.N.,(2015).Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds, Turkish Journal of Mathematics.412-426

[4] Barros, M., Romero, A., (2007).Magnetic vortices. EPL.77,1-5.

[5] Barros, M.,(1997).General helices and a theorem of lancret, Proceeding of the American Mathematical Society. 125(5),1503-1509.

[6] Xu, L., Mould, D.,(2009).Magnetic Curves: Curvature-controlled aesthetic Curves using Magnetic fields. Comput.Aesth. Eurograph. Assoc.1-8.

[7] T.Körpınar and R.Demirkol, (2018). Gravitational magnetic curves on 3D Riemannian manifolds. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 15(11).

[8] Z.Özdemir, İ.Gök, Y.Yaylı and N.Ekmekci (2015). Notes on magnetic curves in 3D semi-Riemannian manifolds. Tukish J. Mathematic, 39, 412-426.

[9] Dandolof R., Berry's phase and Fermi-Walker parallel transport. Phys. Lett. A. 139 (1989), no. (1,2), 19-20.

[10] Fermi E. Atti Accad. Naz., Lincei Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat. 31 (1922), 184-306.

[11] Hawking S.W. and Ellis G.F.R., The Large Scale Structure of Spacetime. Cambridge University Press., 1973.

[12] Scofield P.D., Curves of Constant Precession. The American Mathematical Monthly 102 (1995), no. 6, 531-537

[13] Karakus F. and Yayli Y., On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2012, no. (9,8), 1250066.

[14] Karakus F. and Yayli Y., The Fermi- Walker derivative in Lie groups. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 10 (2013), no. 7, Article ID 1320011:10p.

[15] Karakus F. and Yayli Y., The Fermi derivative in the hypersurfaces. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 12 (2015), no. 1, Article ID 1550002:12p.

[16] Uzunoglu B., Gök I. and Yaylı Y., (2016). A New Approach on Curves of Constant Precession, Applied Mathematics and Computation., 275, 317-323

[17] Kaya, O. and Onder, M. (2017). New Partner Curves in the Euclidean 3-Space $E^3$ , International Journal of Geometry, 6(2), 41-50.

[18] Şenyurt, S. (2018). D-Smarandache Curves According to the Sabban Frame of the Spherical Indicatrix Curve, Turk. J. Math. Comput. Sci, 9(39-49).

[19] Hacısalihoğlu, H.H.,(2000).Differansiyel Geometri.Erten Matbaası, Ankara.

[20] Sabucuoğlu, A.,(2006). Diferansiyel Geometri. Nobel yayınları. Ankara. 264-277.

[21] Hacısalihoğlu, H.H.,(1980).Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. Elazığ.

[22] Hacısalihoğlu, H. H., (2002). Diferensiyel Geometri, Fen Fakültesi yayınları, Cilt 1. 269, Ankara.

[23] O'Neill, B.(1996).Elementary Differential Geometry. New York, London, Usa: Academic Press.

[24] Kazan, A., Karadağ, H.B., (2017). Magnetic Curves According to Bishop Frame and Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-Space. British J. Math., 22(4), 1-18.

[25] Barros, M., Cabrerizo, L., Fernandez, M., Romeo, A., (2007). Magnetic Vortex Filament Flows. J Math Phys, 48, 1-27

[26] Munteanu, M.I., (2013). Magnetic Curves in a Euclidean Space: One example, Several Applications. Publications de L'Institut Mathematique, 94(108), 141-150.

[27] Benn, I. M. and Tucker, R. W., 1989. Wave mechanics and inertial guidance, The American Physical Society, 39 (6), 1594-1601.

[28] Fenchel, W. (1951). On The Differential Geometry of Closed Space Curves, Bulletin of American Mathematical Society, 57(44-54).

# ÖZGEÇMİŞ

**Ahmet TAN**

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]