

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

HEMEN HEMEN KOMPLEKS METALİK MANİFOLDLARIN
BİR ÇALIŞMASI

Ayşe Seray HASHAN

Danışman: Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı

İzmir

2024

Ayşe Seray Hashan tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldların Bir Çalışması” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 12.09.2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN

Raportör Üye : Doç. Dr. Fulya ŞAHİN

Üye : Doç. Dr. Burak ŞAHİN

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldların Bir Çalışması” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

12/09/2024

İmzası

Ayşe Seray HASHAN

ÖZET

Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldların Bir Çalışması

HASHAN, Ayşe Seray

Yüksek Lisans Tezi, Geometri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN

Eylül 2024, 38 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihi anlatısı ve çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde tez boyunca kullanılan temel tanım ve teoremler ifade edildi. Üçüncü bölümde, altın oran tanımlanıp, Riemann manifoldu üzerindeki altın yapı ve özellikleri ile birlikte örnekler verildi. Dördüncü bölümde metalik yapı ve metalik manifoldlar tanıtıldı. Beşinci bölüm tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde hemen hemen kompleks metalik semi-Riemann manifoldların invaryant, semi-invaryant hiperyüzeyleri tanımlanıp, distribüsyonların integrallenebilirlik şartları, total umbilik semi-invaryant altmanifoldları ve bu tipteki altmanifoldların distribüsyonlarının total geodezik foliasyon tanımlama şartları incelendi.

Anahtar sözcükler: Altın oran, metalik manifoldlar, Riemann manifoldlarda altın yapı, semi-Riemann manifoldlarda hemen hemen kompleks metalik yapı, total umbilik semi-invaryant altmanifold, total geodezik foliasyon

ABSTRACT**A Study Of Almost Complex Metallic Manifolds**

HASHAN, Ayşe Seray

MSc. in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN

September 2024, 38 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the historical narrative of the subject and discussions on previous studies are provided. The second chapter presents the fundamental definitions and theorems used throughout the thesis. The third chapter defines the golden ratio and provides examples along with its properties on Riemann manifolds. In the fourth chapter, metallic structures and metallic manifolds are introduced. Chapter five constitutes the original part of the thesis. In this chapter, the invariant and semi-invariant hypersurfaces of complex metallic semi-Riemann manifolds are defined, and the conditions for the integrability of distributions, the totally umbilical semi-invariant submanifolds, and the conditions for defining totally geodesic foliations of such submanifolds are examined.

Keywords: Golden ratio, metallic manifolds, golden structure in Riemann manifolds, complex metallic structure, almost complex metallic structure in semi-Riemann manifolds, almost complex metallic structure, total umbilical semi-invariant submanifold, total geodesic foliation

ÖNSÖZ

Saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Şerife Nur BOZDAĞ ile birlikte yürüttüğümüz bu çalışma, "Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldların Bir Çalışması" başlığını taşımaktadır. Bu çalışmada, hemen hemen kompleks metalik yapıların semi-Riemann manifoldlarını derinlemesine inceledik. Tez konumuzu belirlerken hedefimiz, bu alandaki mevcut çalışmalara katkı sağlamak ve elde ettiğimiz sonuçları literatüre kazandırmaktır.

Çalışmamızda özellikle, hemen hemen kompleks metalik semi-Riemann manifoldların semi-invariant altmanifoldlarını, total umbilik olma şartlarını, integrallenebilirlik durumlarını ve total geodezik olup olmama koşullarını detaylı bir şekilde ele aldık. Bu analizler, bu yapıların matematiksel özelliklerini derinlemesine anlamamıza ve gelecekteki araştırmalara ışık tutacak bilgiler sunmamıza yardımcı oldu.

Bu çalışma, metalik yapılar üzerine yapılan araştırmalarda yeni ufuklar açmayı ve alanın gelişimine katkıda bulunmayı amaçlamaktadır. İncelemelerimizin, matematik alanında güçlendirecek değerli bilgiler sunacağına inanıyoruz.

İZMİR

12/09/2024

Ayşe Seray HASHAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR	4
2.1 Temel Kavramlar	4
3 ALTIN MANİFOLDLAR	12
3.1 Manifoldlar Üzerindeki Altın Yapılar	12
3.2 Altın Yapılar İle Üretilen Yeni Yapılar	18
3.3 Altın Yapıların İntegrallenebilirliği ve Paralellliği	19
3.4 Altın Riemann Metrikleri	21
4 METALİK MANİFOLDLAR	24
5 HEMEN HEMEN KOMPLEKS METALİK SEMİ-RIEMANN MANİFOLDLAR	26
KAYNAKLAR DİZİNİ	36
TEŞEKKÜR	37
ÖZGEÇMİŞ	38

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
M	Manifold
$\hat{M}$	Altmanifold
h	M manifoldunun ikinci temel formu
$\Gamma(TM)$	Vektör alanlarının kümesi
∇	Lineer konneksiyon
$T_p M$	p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(M)$	Vektör alanı kümesi
Φ	Altın yapı
κ	Ortalama eğrilik vektör alanı

1 GİRİŞ

Türev ve integral hesabının eğrilerin geometrisine uygulanması ile birlikte, yüzeylerin diferansiyel geometrisi de aynı yaklaşımla çalışılmıştır. 1697 ve 1698 yıllarında Bernoulli kardeşler yüzey üzerindeki jeodezikleri çalıştılar. Clairaut 1731 yılında basılan kitabında yüzey üzerindeki eğrileri çalışmıştır. 1733 yılında bu gün Clairaut teoremi olarak bilinen sonucunu ispatladı. 1728 ile 1732 tarihleri arasında basılan makale serisinde Euler, yüzey üzerindeki jeodezikleri ve Monge regle yüzeyleri bu dönemde inceledi. Monge'nin öğrencileri de yüzeylerin diferansiyel geometrisine önemli katkılarda bulundular. Örneğin Dupin, Monge'nin öğrencilerinden biridir. Meusnier ve Lagrange da yüzeyler üzerine önemli çalışmalar yayınladılar. Ayrıca minimal yüzeyler üzerine ilk çalışmalar Euler ve Meusnier tarafından gerçekleştirildi. Ancak yüzeyler üzerine kapsamlı ve sistematik çalışmalar Gauss'a aittir. Gauss yüzeylerin genel teorisi üzerine olan çalışmalarını ilk olarak 1825 yılında sonrasında ise bu çalışmanın düzeltilmiş versiyonunu 1827 yılında yayınladı. Gauss öncesi yüzey çalışmalarında yüzeyin daima Öklidyen 3-uzayda gömülü halinde ve buna bağlı olarak belirlenen kavramlarla incelenmiştir. Gauss ise yüzeyin incelenmesi için içsel bir kavram olan birinci temel formun yeterli olduğunu göstermiştir. Böylece yüzeyin içsel geometrisinin keşfi Gauss'a aittir. Gauss'un çalışmaları birinci temel form, geodezik ve Gauss eğriliği gibi diferansiyel geometrinin önemli kavramlarının ilk tanımladığı kaynaklardır. Örneğin eğriliğin invariant olduğu 1822 yılına ait bir makalede ispatlanır. Yüzeyler üzerine yapılan çalışmaların günümüzde dahi Gauss'un çalışmaları üzerine devam ettiğini söyleyebiliriz. Georg Friedrich Bernhard Riemann 10 Haziran 1854 de Göttingen Üniversitesinde akademik bir pozisyon alabilmek için bir sunum yaptı. Bu sunumda aday seçtiği üç konuyu bir jüri karşısında savunuyordu. Riemann'ın sunacağı ilk konu kompleks fonksiyonlar ve trigonometrik seriler üzerine araştırmalardı. Üçüncü konunun başlığı "Geometrinin temelleri üzerine hipotezler" olarak belirlenmişti. Geleneksel olarak jüri adaydan ilk konuyu anlatmasını isterdi. Ama bu jüride üniversitenin en seçkin üyesi olan Carl

Friedrich Gauss ilk iki konuyu atlayarak adayın üçüncü konuyu anlatmasını istedi. Gauss'un bunu yapmasının nedeni, üçüncü konunun kendisinin de ilgilendiği ve yayınlamadığı Öklidyen dışı geometriler (paralellik aksiyomunu sağlamayan yeni geometriler) konusu ile ilgili olmasından kaynaklanıyordu. Fakat Riemann'ın üçüncü konusunda sunduğu araştırma özel geometrilerle (Öklid, hiperbolik veya diğerleri) sınırlı kalmamakta, tanımladığı manifold kavramı ile geometri için yeni bir bakış açısı sunmaktaydı. Riemann'ın bu çığır açıcı yeni kavramı bugün de uzayı tanımlarken kullanılan standart kavramdır ve bu kavram görelilik teorisi ve uzay-zamanın yapısının anlaşılmasına temel oluşturmaktadır. Riemann'ın geometriye getirdiği bu yeni kavram, noktaların veya uzayların bir koleksiyonu şeklinde düşünülebilir. Bu kavrama bugün Riemann manifold kavramı karşılık gelmektedir. Riemann'ın geliştirdiği bu yeni bakış açısı, Einstein'ın geliştirdiği görelilik teorisinin uzay-zaman kavramına temel oluşturdu. Gerçekten Einstein kütleçekimi tanımlamak için tensörel bir ifade aradığında, sonunda Riemann'ın tanımladığı metrik bağıntı veya bugün Riemann metriği adı verilen kavrama ulaştı, (Şahin, 2021).

Altın oran, $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ifadesiyle tanımlanan irrasyonel bir sayıdır. Bu oran, antik çağlardan günümüze kadar matematikçiler, fizikçiler, filozoflar, sanatçılar ve müzisyenlerin ilgisini çekmiştir. Yunanca'da 'kesmek' anlamına gelen bir kelimenin ilk harfi olan ϕ ile sembolize edilir ve yaklaşık değeri 1,61803... olarak bilinir. Bu oran, altın ortalama, altın bölüm, altın kesit, ilahi (kutsal) oran, Fibonacci sayısı ve Phidias ortalaması gibi farklı isimlerle de anılır. Özelliklerini inceleyen matematikçi Phidias'ın adının ilk harfi olan ϕ ile de temsil edilse de, genellikle π sembolü kullanılır. Ancak tezde ϕ kullanılmıştır. Altın oran hakkında bilinen ilk eser, Luca Pacioli (1445-1519) tarafından yazılan "İlahi Oran" adlı kitaptır. Bu eser, 1509 yılında Leonardo da Vinci tarafından resimlendirilmiştir, (Dunlop, 2011). Türk mimarisi ve sanatında da altın oran örneklerine rastlanır. Mimar Sinan'ın pek çok eserinde, özellikle Süleymaniye ve Selimiye Camileri'nin minarelerinde, altın oran kullanılmaktadır, (Salan, 2010). Daha sonra, Crasmareanu ve Hretcanu (2008), diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde, yapı polinomu $Q(x) = x^2 - x - 1$ olan ve altın yapı olarak

adlandırılan yeni bir polinom yapı tanımlayarak altın manifoldlar teorisinin temelini atmışlardır. Altın yapının daha genel bir formu, C.E. Hretcanu ve M. Crasmareanu'nun 2013 yılında yayınladıkları "Riemann Manifoldlarda Metalik Yapılar" adlı çalışma ile ortaya konmuştur.

Bu tezde, ikinci bölümde Riemann manifoldlarını tanımlamak için gereken temel bilgiler sunulmuştur. Riemann manifoldlarının genel özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Riemann manifoldları üzerindeki altın yapıların genel özellikleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde metalik yapılar ve metalik manifoldlar tanıtılmıştır. Beşinci bölüm tezin orjinal kısmı olarak, semi-Riemann manifoldları ve altmanifoldlar üzerindeki hemen hemen kompleks metalik yapıların özellikleri ve koşulları incelenerek ispatlanmıştır.

”Bu tezde kısalığın hatırı için hemen hemen kompleks metalik semi-Riemann yerine HHKMSR kullanılacaktır.”

2 TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Bu bölümde, tezin anlaşılabilirliğini arttırmak için gereken temel kavramlar ile bazı tanım ve teoremler sunulmuştur.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1. (*Şahin, 2021*): X bir küme ve τ , X kümesinin altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X, τ) ikilisine bir topoloji adı verilir.

1. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$
2. τ ailesinin keyfi sayıda birleşimi τ kümesine aittir; $A_i \in \tau$ ise $\cup_i A_i \in \tau$.
3. τ ailesinin sonlu sayıda kesişimi τ kümesine aittir; A_i , $i \in J$, J sonlu indis kümesi için, $A_i \in \tau$ ise $\cap_i A_i \in \tau$.

X kümesinin her bir elemanına topolojik uzayın bir noktası ve X kümesinin τ ailesine ait olan altkümelerine topolojik uzayın açıkları adı verilir. $x \in X$ noktasını içeren bir U açık altkümesinin her N üst kümesine x noktasının komşuluğu denir.

Örnek 2.1. (*Şahin, 2021*): X bir küme olsun. Bu durumda $\tau = (X, \emptyset)$ kümesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye aşık ar topoloji denir. Bu topolojide X uzayının açıkları sadece X ve $\emptyset$ dir.

Örnek 2.2. (*Şahin, 2021*): X bir küme olsun. Bu durumda X kümesinin kuvvet kümesi olan $\rho(X)$, X üzerinde bir topolojidir. X kümesinin her bir altkümesi bu topoloji için bir açıktır.

Tanım 2.2. (*Şahin, 2021*): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $B \subseteq \tau$ olmak üzere, (X, τ) topolojik uzayın her bir elemanı B altkümesinin elemanlarının birleşimi ise B kümesine topolojik uzayın bazı adı verilir.

Örnek 2.3. (*Şahin, 2021*): $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere (a, b) açık aralıkların kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki topolojinin bazıdır.

Tanım 2.3. (*Şahin, 2021*): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer bu topolojik uzay sayılabilir baza sahip ise (X, τ) topolojik uzayına ikinci sayılabilir denir.

Örnek 2.4. (*Şahin, 2021*): Kanonik topoloji ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayı ikinci sayılabilir denir.

Tanım 2.4. (*Şahin, 2021*): X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

1. $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$,
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metriktir denir.

X bir küme ve d de bu küme üzerinde bir metrik ise d metriği bu küme üzerinde bir tek topoloji üretir. Böylece bir metrik uzay üzerinde topoloji tanımlamak her zaman mümkündür.

Örnek 2.5. (*Şahin, 2021*): Son örnekte verilen kümede $x, y \in \mathbb{R}^m$ için

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Kolayca görüleceği üzere d , $\mathbb{R}^m$ üzerinde bir metrik tanımlar. Böylece $\mathbb{R}^m$ bir metrik uzaydır. Bu metrik uzay

$$B_{x,r} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid d(x, y) < r\}$$

açık yuvarı ile üretilen topolojiye sahiptir.

Şimdi manifold tanımında geçen Hausdorff uzay kavramını hatırlatalım.

Tanım 2.5. (Lee, 2000): X bir topolojik uzay olmak üzere, X uzayının her farklı x, y elemanları için bu noktaların ayrık birer komşuluğu varsa, topolojik uzaya Hausdorff uzay denir.

Örnek 2.6. (Şahin, 2021): Her metrik uzay Hausdorff uzaydır. Yani $(\mathbb{R}^m, d)$ Hausdorff uzaya örnek olarak metrik uzaylar verilebilir.

Tanım 2.6. (Şahin, 2021): (X, τ) ve (X', τ') iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon olsun. Eğer X' her açık kümenin ters görüntüsü X bir açık küme ise f fonksiyonuna süreklidir denir.

Bu tanıma denk olan aşağıdaki tanım da verilebilir.

Tanım 2.7. (Şahin, 2021): (X, τ) ve (X', τ') iki topolojik uzay $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0) \in X'$ noktasının her N' komşuluğu için $f(N) \subset N'$ olacak şekilde $x_0 \in X$ noktasının bir N komşuluğu mevcut ise f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer $f : X \rightarrow X'$ her $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyonuna süreklidir denir.

Tanım 2.8. (Lee, 2000): $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizma denir. Bu durumda X topolojik uzayı X' uzayına homeomorfiktir denir.

Tanım 2.9. (Şahin, 2021): M ikinci sayılabilir Hausdorff bir uzay olsun. Eğer her $p \in M$ için; $\mathbb{R}^m$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U , yani p noktasını içeren bir $U \subset M$ açık kümesi, $W \subset \mathbb{R}^m$ açık kümesi ve $\varphi(U) : U \rightarrow W$ homeomorfizması (birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli) varsa M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda $\text{boy}(\mathbb{R}^m) = m$ olduğundan manifoldun boyutu m olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanımda verilen homemorfizma $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ise (U, φ) ikilisine bir harita denir. I bir indis kümesi olmak üzere $(U_i, \varphi_i), i \in I$ topluluğuna manifoldun atlası denir. M manifoldunun bütün noktalarının en az bir haritada yer alması için bu açık kümelerin arakesitinin boştan farklı

olması gerekir. φ bir homomorfizma olduğundan $p \in U$ noktasının koordinatları $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ noktasının koordinatları olarak tanımlanabilir. Böylece φ homeomorfizması M manifoldunun bir p noktasına $(x_1(p), \dots, x_m(p))$ m -lisini karşılık getirir. $x_1(p), \dots, x_m(p)$ sayılarına p noktasının komşuluğunda m -tane bağımsız koordinatla verilen bir küme olarak da düşünülebilir.

Tanım 2.10. (*Şahin, 2021*): M , m -boyutlu manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $A = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \phi), \dots\}$ kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa A koleksiyonuna M üzerinde r . mertebeden diferansiyellenebilir yapı (veya atlas) adı verilir.

1. $\{U, V, W, \dots\}$ açık kümelerinin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.
2. A daki herhangi iki harita r . mertebeden uyumludur.
3. A maksimaldir, yani eğer bir $(\hat{\varphi}, \hat{U})$ haritası A daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $(\hat{\varphi}, \hat{U}) \in A$ dır.

Eğer bir M manifoldu üzerinde r . mertebeden diferansiyellenebilir bir atlas varsa M manifolduna r . mertebeden diferansiyellenebilir manifold denir. Diferansiyellenebilir yapının her bir haritasına M manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferansiyellenbiliyorsa M manifolduna C^∞ manifold (veya kısaca diferansiyellenebilir manifold) adı verilir. Burada belirtelim ki keyfi iki küme arasında diferansiyellenebilme kavramı tanımlı değilken, manifold yapısı $\mathbb{R}^m$ uzayındaki diferansiyellenebilme kavramı yardımı ile diferansiyellenebilmeye imkan vermektedir.

Tanım 2.11. (*Şahin, 2021*): M bir diferansiyellenebilir manifold ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $p \in M$ için $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir olacak şekilde bir (U, φ) haritası varsa f fonksiyonuna M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilirdir denir.

Yukarıdaki tanım, aşağıdaki tanım ele alınarak verilmiştir. Diferansiyellenebilir M manifoldu üzerinde bir (U, φ) haritası üzerinde $f \circ \varphi^{-1}$

diferansiyellenebiliyorsa, bu durumda f , $U \cap V \neq \emptyset$ şartını sağlayan tüm (V, ψ) haritaları üzerinde de diferansiyellenebilirdir.

Tanım 2.12. (Şahin, 2021): M bir diferansiyellenebilir manifold ve $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ diferansiyellenebilir eğri olsun. Kabul edelim ki $\alpha(0) = p$ ve D de p noktasında diferansiyellenebilen fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda D üzerinde

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0}, f \in D$$

ile tanımlı $\alpha'(0)$ fonksiyonuna $t = 0$ da α eğrisine teğet vektör adı verilir. Manifoldun bir p noktasındaki tanjant vektör, $\alpha(0) = p$ olmak üzere $t = 0$ da α eğrisine teğet olan vektördür. Şimdi M manifoldu üzerinde bir (ϕ, U) koordinat sistemi seçelim. Bu durumda f fonksiyonu ve α eğrisi bu koordinat sisteminde

$$(\phi \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

ve

$$(f \circ \phi^{-1})(q) = f(x_1, \dots, x_n), q \in V = \phi(U)$$

olarak ifade edilebilir. f fonksiyonunun α eğrisine kısıtlanması ile

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

olur. Böylece

$$\alpha'(0)f = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_0 \right) f$$

elde edilir. Bu ifade her f için doğru olduğundan, $\alpha'(0)$ ifadesi (ϕ, U) koordinat sisteminde

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_0$$

olur. Bu ifade öncelikle gösterir ki α eğrisinin p noktasındaki tanjant vektörü yalnızca eğrinin bu koordinat sistemindeki t türevine bağlıdır. M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_p M$ ile gösterilir. Fonksiyonlardaki toplama ve skalerle çarpma işlemi ile birlikte bu küme bir vektör uzayı yapısına sahip olur. Bu uzaya manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı denir. Ayrıca bu

ifade gösterir ki eğer bir koordinat sistemi seçilirse bu koordinat sistemi $T_p M$ de

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) 0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) 0 \right)$$

bazını belirler.

Tanım 2.13. (Şahin, 2021): M bir manifold ve manifold üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, R)$ olsun. Bu durumda her $f, g \in C^\infty(M, R)$ ve $\alpha, \beta \in R$ için,

$$1. V_p(\alpha f + \beta g) = \alpha V_p f + \beta V_p g$$

$$2. V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p(g)$$

şartlarını sağlayan $V_p : C^\infty(M, R) \rightarrow R$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir.

Yukarıda tanımı verilen tanjant vektörlerin uzayı bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Tanjant uzayın boyutu manifoldun boyutuna eşittir. Bunun nedeni esas olarak manifoldun bir p noktasındaki tanjant uzayı ile Öklidyen uzayın izomorfik olmasıdır.

Tanım 2.14. (Lee, 2003): M bir manifold ve $T_p M$, manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasına $T_p M$ uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren X diferansiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı

$$X : M \rightarrow U_{p \in M} T_p M$$

diferansiyellenebilir dönüşümdür. Burada vektör alanının diferansiyellenebilir olması, her $f \in C^\infty(M, R)$ için

$$Xf : M \rightarrow R,$$

$$Xf(p) = X_p(f)$$

ile tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferansiyellenebilir olmasıdır. Bir vektör alanı tanjant vektörlerin topluluğudur. Başka bir ifade ile bir vektör

alanı manifoldun bir p noktasında bir tanjant vektör verir. Vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Bir yerel koordinat sisteminde bir X vektör alanı

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer $g, h \in C^\infty(M, R)$ ve X, Y , M üzerindeki vektör alanları ise keyfi $p \in M$ ve $f \in C^\infty(M, R)$ için

$$(gX + hY)_p f = g(p)X_p f + h(p)Y_p f$$

tanımlanırsa $X+Y$, M üzerinde yeni bir vektör alanıdır. Bu şekilde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $\chi(M)$, $C^\infty(M, R)$ halkası üzerinde bir modüldür.

Vektör alanlarına benzer olarak dual vektör alanları da tanımlanabilir. M bir diferansiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. $T_p M$ vektör uzayına dual olan uzayı $T_p^*(M)$ ile gösterelim. Böylece $\omega_p \in T_p^*(M)$ elemanı $\omega_p : T_p M \rightarrow R$ lineer dönüşümdür. $T_p M$ vektör uzayının bir $E_{1p}, \dots, E_{np}$ bazı verilmişse, bu durumda $T_p^*(M)$ uzayının $\omega_{ip}(E_{jp}) = \delta_i^j$ şartını sağlayan bir tek $\omega_{1p}, \dots, \omega_{np}$ bazı vardır. Böylece

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_p(E_{ip} \omega_{pi})$$

dir. $T_p^*(M)$ uzayının elemanlarına dual vektör denir. Dual vektörlerin uzayı olan $T_p^*(M)$, fonksiyonlardaki toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayı yapısına sahip olur. Bu uzaya kotanjant uzay veya dual uzay adı verilir.

Manifold üzerinde vektör uzayı tanımladıktan sonraki adım iç çarpım uzayını inşa etmektir. Bu durum uzunluk, açı ve benzeri kavramları tanımlamaya olanak sağlar.

Tanım 2.15. (Yano & Kon, 1984): M bir diferansiyellenebilir manifold ve keyfi p noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olsun. Eğer M manifoldunun her tanjant uzayında bir iç çarpım var ve diferansiyellenebiliyorsa o zaman iç çarpım fonksiyonuna Riemann metrik ve üzerinde Riemann metrik bulunan manifolda da Riemann manifoldu adı verilir. Böylece Riemann metrik g ,

$$g|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow R$$

ile verilen bir bilineer fonksiyondur.

Örnek 2.7. (Şahin, 2021): E^3 manifoldu üzerindeki iç çarpım ile birlikte bir Riemann manifoldudur.

Örnek 2.8. (Şahin, 2021): M bir regüler yüzey olsun. Bu durumda E^3 uzayındaki iç çarpımdan indirgenen yüzeyin birinci temel formu bir Riemann metriğidir. Dolayısıyla her regüler yüzey ve onun birinci temel formunun oluşturduğu ikili bir Riemann manifoldudur.



3 ALTIN MANİFOLDLAR

Bu bölümde altın manifoldlar tanıtılıp temel özellikleri verilecektir.

3.1 Manifoldlar Üzerindeki Altın Yapılar

Tanım 3.1. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): M bir manifold ve Φ , M manifoldunun p noktasında $T_p M$ tanjant uzayı üzerinde lineer endomorfizma olsun. Eğer

$$\Phi^2 = \Phi + I \quad (3.1)$$

ise Φ ye altın yapı ve (M, Φ) ikilisine altın manifold denir.

Önerme 3.1. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): M manifoldu üzerindeki altın yapı, $(F_n)_n$ nin Fibonacci dizisi olduğu herhangi bir n tamsayısı için

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1} I \quad (3.2)$$

ile ifade edilir. Bu durumda, $(\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$ için

$$F_n = \frac{\phi - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} \quad (3.3)$$

ve Binet formülü Fibonacci dizisinin açık ifadesini kullanarak (3.2) eşitliği

$$\Phi^n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} \Phi + \frac{\phi^{n-1} - (1 - \phi)^{n-1}}{\sqrt{5}} I \quad (3.4)$$

olarak yazılır.

İspat. (3.2) ve (3.3) kullanılarak,

$$\Phi^n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}} \Phi + \frac{\phi^{n-1} - (1 - \phi)^{n-1}}{\sqrt{5}} I$$

elde edilir. □

Önerme 3.2. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): M bir manifold ve Φ , M üzerinde altın yapı olsun.

1. Φ altın yapısının öz değerleri ϕ ve $1 - \phi$ altın oranıdır.

2. Φ altın yapısı, $\forall x \in M$ için $T_x M$ manifoldun tanjant uzayında bir izomorfizmadır.

3. Φ tersinirdir ve tersi $\Phi' = \Phi^{-1}$,

$$\Phi'^2 = -\Phi' + I \quad (3.5)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (i) $\tilde{\lambda}$, X öz vektörüne uygun Φ altın yapısının özdeğeri olsun.

$$\phi X = \tilde{\lambda} X \implies \phi^2 X = \tilde{\lambda} \phi X$$

olur.

$$\phi^2 = \phi + I$$

olduğundan

$$\phi X + X = \tilde{\lambda} \phi X \implies X = \tilde{\lambda} \phi X - \phi X,$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafına $\tilde{\lambda}$ uygularsak,

$$\tilde{\lambda}^2 \phi X - \tilde{\lambda} \phi X - \phi X = 0,$$

$$(\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda} - 1) \phi X = 0$$

bulunur. X öz vektör olduğundan $X \neq 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda} - 1 = 0$$

olur. Buradaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri bulunduğunda

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \phi, 1 - \phi$$

elde edilir.

(ii) Φ altın yapı, $\forall x \in M$ olmak üzere,

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) \implies x_1 = x_2$$

olduğunu gösterdiğimizde Φ altın yapısı, $\forall x \in M$ için $T_x M$ manifoldun tanjant uzayında bir izomorfizma olduğu görülür. Gerçekten de

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2),$$

$$(\Phi(x_1))^2 = (\Phi(x_2))^2,$$

$$\Phi(x_1) + x_1 = \Phi(x_2) + x_2,$$

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2),$$

$$x_1 = x_2$$

elde edilir.

(iii) Φ altın yapısı için $\Phi'^2\Phi^2 = (-\Phi' + I)(\Phi + I)$ ve Φ altın yapı olma şartı göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}\Phi'^2\Phi^2 &= -\Phi'\Phi + (-\Phi'I) + I\Phi + I^2, \\ &= -\Phi^{-1}\Phi + (-\Phi^{-1}I) + I\Phi + I, \\ &= -\frac{\Phi}{\Phi} - \frac{I}{\Phi} + \Phi + I, \\ &= \frac{-\Phi - I + \Phi^2 + \Phi}{\Phi}, \\ &= \frac{-\Phi - I + \Phi + I + \Phi}{\Phi}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\Phi'^2\Phi^2 = \frac{\Phi}{\Phi} = I \text{ bulunarak } \Phi \text{ nin tersinin } \Phi' \text{ olduğu görülür.}$$

Uyarı 3.1. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): Altın yapıların çift olarak belirlenmesi önemli bir uyarıdır, yani Φ altın yapıysa $\tilde{\Phi} = I - \Phi$ de altın yapıdır. Hemen hemen tanjant yapılar (T ve $-T$), hemen hemen kompleks yapılar (F ve $-F$), hemen hemen çarpım yapıları (P ve $-P$) için bu durum geçerlidir.

Aşağıdaki teorem altın yapı ile çarpım yapı arasındaki ilişkiyi verir:

Teorem 3.1. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): P hemen hemen çarpım yapısı olmak üzere,

$$\Phi = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P) \quad (3.6)$$

bir altın yapıdır. Tersine, herhangi bir Φ altın yapı olmak üzere,

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I) \quad (3.7)$$

bir çarpım yapısı tanımlar.

□

İspat. P hemen hemen çarpım yapısı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 \Phi^2 &= \left(\frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P)\right)^2, \\
 &= \frac{1}{4}(I^2 + 2\sqrt{5}IP + 5P^2), \\
 &= \frac{1}{4}(I + 2\sqrt{5}P + 5I), \\
 &= \frac{1}{4}(6I + 2\sqrt{5}P)
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
 \Phi^2 &= \frac{3}{2}I + \frac{\sqrt{5}}{2}P, \\
 &= \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P) + I \\
 &= \Phi + I
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Φ altın yapı olur. Tersine,

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I)$$

olsun. Bu ifadeye P uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
 (P)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I)\right)^2, \\
 &= \frac{1}{5}(4\Phi^2 - 4\Phi + I^2)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Φ altın yapı olduğundan,

$$\begin{aligned}
 (P)^2 &= \frac{1}{5}(4(\Phi + I) - 4\Phi + I), \\
 &= \frac{1}{5}(4\Phi + 4I - 4\Phi + I), \\
 &= \frac{1}{5}(5I), \\
 &= I
 \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse, P hemen hemen çarpım yapısını sağlar.

□

Uyarı 3.2. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): Yukarıdaki $\Phi \longleftrightarrow P$ yazışmasında

$$\tilde{\Phi} = I - \Phi \longleftrightarrow \tilde{P} = -P$$

olur. Önceki yapı (3.6) dekine benzer olarak,

(I) M, T hemen hemen tanjant yapı ile verilsin.

$$\Phi_t = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}T)$$

ifadesine (M, T) üzerinde tanjant altın yapı adı verilir.

$$\Phi_t^2 - \Phi_t + \frac{1}{4}I = 0$$

eşitliği tanjant altın yapısıyla sağlanan denklemi vermektedir.

(II) (M, F) hemen hemen kompleks bir manifold olsun.

$$\Phi_c = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F)$$

şeklinde tanımlanan Φ_c tensör alanı (M, F) üzerinde kompleks altın yapı olarak adlandırılır. Φ_c ile sağlanan polinom denklem

$$\Phi_c^2 - \Phi_c + \frac{3}{2}I = 0.$$

$M = \mathbb{R}^2$ alınırsa $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{5}$, $x_2 = \bar{x}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{5}$ çözümleriyle

$$x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$$

denklemi elde edilir.

Tanım 3.2. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): M bir manifold olsun.

$$\phi_c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$$

kompleks sayısına kompleks altın oran adı verilir.

Tanım 3.3. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): M bir manifold olmak üzere,

$$\phi_c^u = \frac{1}{\sqrt{6}} + i\sqrt{\frac{5}{6}}$$

kompleks sayısına birim kompleks altın oran adı verilir.

$$y^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}y + 1 = 0$$

ise ϕ_c^u ile sağlanan denklemdir.

Tanım 3.4. (Çetinkaya, 2010): (M, F, g) bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. M üzerinde $\Phi_c^2 = \Phi_c - \frac{3}{2}I$ şartını sağlayan $(1,1)$ tipli Φ_c tensör alanına M hemen hemen Hermityen manifoldu üzerinde bir altın yapı denir. Burada $\chi(M)$, M üzerinde vektör alanlarının Lie cebiri olmak üzere $I : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ özdeşlik dönüşümüdür.

Tanım 3.5. (Çetinkaya, 2010): (M, F, g) bir hemen hemen Hermityen manifold ve Φ_c de M üzerinde bir kompleks altın yapı olsun. (g, Φ_c) ikilisine M üzerinde bir altın Hermityen yapı denir. Üzerinde bir altın Hermityen yapı bulunduran (M, F, g) hemen hemen Hermityen manifolduna bir hemen hemen altın Hermityen manifold denir ve (M, F, g, Φ_c) ile gösterilir.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g(\Phi_c X, \Phi_c Y) &= g\left(\frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F)X, \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F)Y\right), \\ &= \frac{1}{4}g(X + \sqrt{5}FX, Y + \sqrt{5}FY), \\ &= \frac{1}{4}(g(X, Y) + g(X, \sqrt{5}FY) + g(\sqrt{5}FX, Y) + g(\sqrt{5}FX, \sqrt{5}FY)), \\ &= \frac{1}{4}(g(X, Y) + \sqrt{5}(g(X, FY) + g(FX, Y)) + 5g(FX, FY)) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$g(X, FY) = g(FX, F^2Y) = -g(FX, Y) \text{ olduğu göz önüne alınırsa,}$$

$$g(\Phi_c X, \Phi_c Y) = \frac{3}{2}g(X, Y) \text{ bulunur. Ayrıca,}$$

$$g(\Phi_c X, \Phi_c Y) = \frac{3}{2}g(X, Y) = \frac{3}{2}g(FX, FY)$$

elde edilir.

3.2 Altın Yapılar İle Üretilen Yeni Yapılar

Bu altbölümde altın yapı ile üretilen yeni yapılar tanımlanacaktır.

Tanım 3.6. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): F ve P , M manifoldunda iki $(1,1)$ tensör alanları olsun. $(F, P, P \circ F)$ üçlüsü sıradaki dört yapıyı oluşturur:

1. $F^2 = P^2 = I$ ve $P \circ F - F \circ P = 0$; bu durumda $J^2 = I$,
2. $F^2 = P^2 = I$ ve $P \circ F + F \circ P = 0$; bu durumda $J^2 = -I$,
3. $F^2 = P^2 = -I$ ve $P \circ F - F \circ P = 0$; bu durumda $J^2 = I$,
4. $F^2 = P^2 = -I$ ve $P \circ F + F \circ P = 0$; bu durumda $J^2 = -I$

sırasıyla, hemen hemen hiperçarpım ($hhh\zeta$), hemen hemen kompleks biçarpım ($hhkb\zeta$), hemen hemen bikompleks çarpım ($hhbk\zeta$) ve hemen hemen hiperkompleks ($hhhk$) olarak adlandırılır. (3.6) denkleminde sonra Φ_F, Φ_P, Φ_J yi ilişkilendirebiliriz ve dolayısıyla,

$$\sqrt{5}\Phi_J = 2\Phi_P\Phi_F - \Phi_P - \Phi_F - \phi I$$

ve (Φ_F, Φ_P, Φ_J) üçlününün,

1') ($hhh\zeta$) yapısı olması için gerek ve yeter şart Φ_F, Φ_P altın yapı ve $\Phi_P\Phi_F = \Phi_F\Phi_P$ olmasıdır; bu durumda Φ_J altın yapıdır.

2') ($hhkb\zeta$) yapısı olması için gerek ve yeter şart $\Phi_F\Phi_P$ altın yapı ve $4(\Phi_P\Phi_F + \Phi_F\Phi_P) = 2(\Phi_P + \Phi_F) - I$ olmasıdır; bu durumda Φ_J kompleks altın yapıdır.

3') ($hhbk\zeta$) yapısı olması için gerek ve yeter şart Φ_F, Φ_P kompleks altın yapı ve $\Phi_P\Phi_F = \Phi_F\Phi_P$ olmasıdır; bu durumda Φ_J altın yapıdır.

4') ($hhhk$) yapısı olması için gerek ve yeter şart Φ_F, Φ_P kompleks altın yapı ve $4(\Phi_P\Phi_F + \Phi_F\Phi_P) = 2(\Phi_P + \Phi_F) - I$ olmasıdır; bu durumda Φ_J kompleks altın yapıdır.

3.3 Altın Yapıların İntegrallenebilirliği ve Paralelliği

Bu alt bölümde hemen hemen kompleks manifoldların integrallenebilirliğine benzer olarak altın yapıların integrallenebilirliği incelenecektir.

Hatırlatma 3.1. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): Φ altın yapının Nijenhuis tensörü

$$N_{\Phi}(X, Y) = \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]$$

dir. ϕ ve $1-\phi$ ye karşılık gelen tümleyen distribüsyonlar sırası ile R ve S olsun.

Karşılık gelen projeksiyonları r, s ile gösterilir. Bu durumda

$$r^2 = r, s^2 = s,$$

$$rs = sr = 0,$$

$$r + s = I$$

dır.

(3.6) ile hemen hemen çarpım yapısı kullanılırsa,

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1-\phi}{\sqrt{5}}I,$$

$$s = -\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{\phi}{\sqrt{5}}I$$

olur.

(i) $N_{\Phi} = 0$ ise Φ integrallenebilirdir; Φ yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart ilişkili (3.6) hemen hemen çarpım yapısı integrallenebilir olmasıdır.

(ii) $\forall X, Y \in M$ için $s[rX, rY] = 0$ ise R distribüsyonu integrallenebilirdir ve $r[sX, sY] = 0$ ise S integrallenebilirdir.

$$\Phi r = r\Phi = \phi r = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{1}{\sqrt{5}}I,$$

$$\Phi s = s\Phi = (1-\phi)s = \frac{\phi-1}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1}{\sqrt{5}}I$$

buradan,

$$s[rX, rY] = \frac{1}{5}sN_{\Phi}(rX, rY),$$

$$r[sX, sY] = \frac{1}{5}rN_{\Phi}(sX, sY)$$

ifadesine ulaşılır.

Önerme 3.3. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): M bir manifold ve Φ , M üzerinde altın yapı olsun. R distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $sN_{\Phi}(rX, rY) = 0$ dır ve S distribüsyonu integrallenebilir ise $rN_{\Phi}(sX, sY) = 0$ dır. Φ integrallenebilir ise R ve S distribüsyonlarının her ikisi integrallenebilirdir.

Tanım 3.7. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): ∇ , M üzerinde sabit lineer bir konneksiyon olsun. (Φ, ∇) çifti için

(i) Schouten konneksiyonu,

$$\nabla_X^{Sc}Y = r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY).$$

(ii) Vranceanu konneksiyonu,

$$\nabla_X^VY = r(\nabla_{rX}rY) + s(\nabla_{sX}sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY]$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.4. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): M manifoldu üzerinde r, s projektörleri ile birlikte Φ Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paraleldir.

İspat. $\forall X, Y \in \chi(M)$,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{Sc}r)Y &= \nabla_X^{Sc}rY - r(\nabla_X^{Sc}Y) \\ &= r(\nabla_X rY) - r(\nabla_X rY) = 0, \\ (\nabla_X^Vr)Y &= \nabla_X^VrY - r(\nabla_X^VY) \\ &= r(\nabla_{rX}rY) + r[sX, rY] - r(\nabla_{rX}rY) - r[sX, rY] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Benzer bağıntılar s için de geçerlidir. Diğer iddia ise benzer şekilde ispatlanır. $\square$

$X \in \chi(M)$ ve $Y \in D$, $\nabla_X Y \in D$ ise M üzerindeki D distribüsyonu ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel olarak adlandırılır.

Önerme 3.5. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): M üzerinde R , S distribüsyonları her ∇ lineer konneksiyonu için Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paraleldir.

İspat. $X \in \chi(M)$ ve $Y \in R$ olsun.

$sY = 0$ ve $rY = Y$ olduğundan

$$\nabla_X^{Sc} Y = r(\nabla_X Y) \in R,$$

$$\nabla_X^V Y = r(\nabla_{rX} Y) + r[sX, Y] \in R$$

olur. Benzer bağıntılar s için de geçerlidir. $\square$

3.4 Altın Riemann Metrikleri

Tanım 3.8. (Yano & Kon, 1984): M bir Riemann manifoldu ve P çarpım yapısı olsun. Eğer,

$$g(PX, PY) = g(X, Y) \quad (3.8)$$

ise g ile P uyumludur denir ve denk olarak

$$g(PX, Y) = g(X, PY) \quad (3.9)$$

yazılır.

Tanım 3.9. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): M bir manifold ve Φ , M üzerinde altın yapısı olsun. Eğer,

$$g(\Phi X, Y) = g(X, \Phi Y) \quad (3.10)$$

ise (g, Φ) ye altın Riemann yapısı ve (M, g, Φ) üçlüsü altın Riemann manifoldu denir.

Sonuç 3.1. (Crasmareanu & Hretcanu, 2008): M bir altın Riemann manifold olsun. Bu durumda,

(i) r, s projektörleri g -simetriklerdir.

$$g(rX, Y) = g(X, rY), \quad (3.11)$$

$$g(sX, Y) = g(X, sY)$$

(ii) R, S distribüsyonları g -ortogonaldir.

$$g(rX, sY) = 0. \quad (3.12)$$

(iii) Altın yapısı N_Φ -simetriktir.

İspat. • (i)

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1-\phi}{\sqrt{5}},$$

$\Phi = \sqrt{5}r + (1-\phi)I$ ve $g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y))$ eşitliklerinden,

$$g((\sqrt{5}r + (1-\phi)I)(X), Y) = g(X(\sqrt{5}r + (1-\phi)I(Y)),$$

$$g(\sqrt{5}r(X), Y) + g((1-\phi)I(X), Y) = g(X, \sqrt{5}r(Y)) + g(X, (1-\phi)I(Y)),$$

$$\sqrt{5}g(r(X), Y) + (1-\phi)g(X, Y) = \sqrt{5}g(X, r(Y)) + (1-\phi)g(X, Y),$$

$$g(rX, Y) = g(X, rY),$$

olur. Ayrıca $s = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{\phi}{\sqrt{5}}I$ için $g(sX, Y) = g(X, sY)$ eşitliği benzer şekilde gösterilir.

• (ii) R ve S distribüsyonları tümleyen distribüsyon olduğundan,

$$T_x M = R_x \oplus S_x$$

dir. M manifoldu üzerinde g metriği için $(R_x)^\perp = S_x$ ve $(S_x)^\perp = R_x$ olur.

Dolayısıyla,

$$g(r(X), s(X)) = 0$$

elde edilir.

• (iii) Φ altın yapısının Nijenhuis tensörü,

$$N_\Phi(X, Y) = \Phi^2([X, Y]) + [\Phi(X), \Phi(Y)] - \Phi([\Phi(X), Y]) - \Phi([X, \Phi(Y)])$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned} N_\Phi(\Phi(X), Y) &= \Phi^2([\Phi(X), Y]) + [\Phi^2(X), \Phi(Y)] - \Phi([\Phi^2(X), Y]) - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)]), \\ &= \Phi([\Phi(X), Y]) + [\Phi(X), Y] + [\Phi(X), \Phi(Y)] + [X, \Phi(Y)] - \Phi([\Phi(X), Y]) \\ &\quad - \Phi([X, Y]) - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\Phi}(X, \Phi(Y)) &= \Phi^2([X, \Phi(Y)]) + [\Phi(X), \Phi^2(Y)] - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)]) \\
&\quad - \Phi([X, \Phi^2(Y)]), \\
&= \Phi([X, \Phi(Y)]) + [X, \Phi(Y)] + [\Phi(X), \Phi(Y)] + [\Phi(X), Y] \\
&\quad - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)]) - \Phi([X, \Phi(Y)]) - \Phi([X, Y])
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $N_{\Phi}(\Phi X, Y) = N_{\Phi}(X, \Phi Y)$ dir.

□

Önerme 3.6. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): *Yerel çarpım altın Riemann manifoldu üzerindeki Φ altın yapısı integrallenebilirdir.*



4 METALİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde metalik yapı ve metalik manifoldlar tanıtılacaktır.

Tanım 4.1. p ve q iki pozitif tamsayı olsun.

$$x^2 - px - q = 0$$

denkleminin pozitif çözümüne metalik oranlar ailesinin üyesi denilmektedir.

Çözüm kümesi ise

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

ile gösterilir. Bu üyelere ayrıca (p, q) -metalik sayılar adı verilir.

Tanım 4.2. (Hretcanu & Crasmareanu, 2013): Bir M manifoldunda vektör alanlarının Lie cebiri $\chi(M)$ üzerinde lineer endomorfizması J , p, q pozitif tamsayılar ve I birim operatör olmak üzere

$$J^2 = pJ + qI$$

olsun. Bu durumda $(1, 1)$ mertebeli J tensör alanına metalik yapı adı verilir.

Eğer $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX, Y) = g(X, JY)$$

ise Riemann metrik g ile J -uyumludur denir. Kolayca görülebilir ki

$$g(JX, JY) = pg(X, JY) + qg(X, Y)$$

dir.

Tanım 4.3. (Hretcanu & Crasmareanu, 2013): J metalik yapısıyla verilen (M, g) Riemann manifoldu olsun. Eğer g ile J uyumlu ise (M, J, g) üçlüsüne metalik Riemann manifoldu ve J dönüşümüne de metalik Riemann yapı denir.

Önerme 4.1. (Hretcanu & Crasmareanu, 2013): M bir manifold ve P, M üzerinde hemen hemen çarpım yapı olsun. Bu durumda P, M üzerinde

$$J_1 = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P,$$

$$J_2 = \frac{p}{2}I - \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P$$

şeklinde verilen iki metalik yapı üretir. Tersine, M deki her metalik yapı J, M manifoldu üzerinde

$$P = \pm\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right)$$

şeklinde iki çarpım yapı üretir. Özellikle, P hemen hemen çarpım yapısı Riemann yapısıysa, bu durumda J_1 ve J_2 metalik Riemann yapılarıdır.

Tanım 4.4. (Hretcanu & Crasmareanu, 2013): J metalik yapısı tensör alanıyla verilen $\hat{M}$ manifoldundaki bir M altmanifoldunda, her $x \in M$ için $J(T_x M) \subset T_x M$ ise bu durumda J ye göre invaryanttır denir.

5 HEMEN HEMEN KOMPLEKS METALİK SEMİ-RIEMANN MANİFOLDLAR

Bu bölümde hemen hemen kompleks metalik semi-Riemann manifoldlar tanıtılacaktır.

Tanım 5.1. (*Etayo & Araceli & Santamaria, 2020*): $(\hat{M}, \hat{g})$ bir semi-Riemann manifold olsun. $\hat{M}$ üzerinde aşağıdaki koşulu sağlayan $(1,1)$ tipinde $\hat{J}$ tensör alanı varsa $\hat{M}$ ye hemen hemen kompleks metalik semi-Riemann manifold denir. Bu yapı denklemi

$$\hat{J}^2 = p\hat{J} - \frac{3}{2}qI \quad (5.1)$$

ile tanımlanır. Burada I , $\hat{M}$ üzerinde birim dönüşümdür.

Tanım 5.2. (*Crasmareanu & Hretcanu, 2008*): $\forall X, Y \in \Gamma(T\hat{M})$ için $(\hat{M}, \hat{g})$ semi-Riemann manifold ile verilen hemen hemen kompleks metalik yapı üzerinde, aşağıdaki eşitlik sağlanıyor ise $\hat{g}$ metriği $\hat{J}$ ile uyumludur denir.

$$\hat{g}(\hat{J}X, Y) = \hat{g}(X, \hat{J}Y). \quad (5.2)$$

Denklemden Y yerine $\hat{J}Y$ yazarsak

$$\begin{aligned} \hat{g}(\hat{J}X, \hat{J}Y) &= \hat{g}(X, \hat{J}^2Y), \\ &= \hat{g}\left(X, \left(p\hat{J} - \frac{3}{2}q\right)Y\right), \\ &= \hat{g}(X, p\hat{J}Y - \frac{3}{2}qY), \\ &= \hat{g}(X, p\hat{J}Y) - \hat{g}(X, \frac{3}{2}qY). \end{aligned}$$

Buradan da,

$$\hat{g}(\hat{J}X, \hat{J}Y) = p\hat{g}(X, \hat{J}Y) - \frac{3}{2}q\hat{g}(X, Y) \quad (5.3)$$

eşitliğini elde ederiz.

Önerme 5.1. $\hat{J}$, $\hat{M}$ üzerinde hemen hemen kompleks metalik yapı ise,

$$J = \mp \left(\frac{2}{2C_{a,b} - a} \hat{J} - \frac{2a}{2C_{a,b} - a} I \right)$$

ifadesi $\hat{M}$ üzerinde hemen hemen kompleks metalik yapıdır. Tersine $J, \hat{M}$ de hemen hemen kompleks yapı ise

$$\hat{J} = \frac{a}{2} \mp \left(\frac{2C_{a,b} - a}{2} J \right)$$

ifadesi $\hat{M}$ de hemen hemen kompleks metalik yapıdır, burada

$$C_{a,b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 6b}}{2} \text{ dir.}$$

Eğer aşağıda verilen N_j Nijenhuis tensörü sıfıra eşit ise hemen hemen kompleks metalik yapı $\hat{J}$ integrallenebilir.

$$N_{\hat{J}}(X, Y) = [\hat{J}X, \hat{J}Y] - \hat{J}[\hat{J}X, Y] - \hat{J}[X, \hat{J}Y] + \hat{J}^2[X, Y].$$

Tanım 5.3. $M, (n+s)$ boyutlu HHKMSR manifoldu $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin n -boyutlu altmanifoldu olsun. Herhangi $X \in \Gamma(T\hat{M})$ ve $N \in \Gamma(TM^\perp)$ için,

$$\hat{J}X = SX + LX \quad (5.4)$$

$$\hat{J}N = BN + CN \quad (5.5)$$

ile ifade edelim. Burada S, L, B ve C projeksiyonlardır.

∇ ve $\hat{\nabla}$, M ve $\hat{M}$ nin sırasıyla Levi-Civita konneksiyonları olsun. Herhangi $X, Y \in \Gamma(T\hat{N})$ için Gauss ve Weingarten formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (5.6)$$

$$\hat{\nabla}_X N_i = -A_{N_i} X + \nabla_X^\perp N_i. \quad (5.7)$$

Burada A_{N_i} , $\hat{g}(A_{N_i} X, Y) = h(X, Y)$ ile verilen N_i yönündeki şekil operatörü ve h ise ikinci temel formdur.

Lemma 5.1. $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ HHKMSR manifold olsun. Herhangi $X, Y, Z \in \Gamma(T\hat{M})$ için,

$$\hat{g}((\hat{\nabla}_X \hat{J})Y, Z) = \hat{g}(Y, (\hat{\nabla}_X \hat{J})Z) \quad (5.8)$$

dir.

Önerme 5.2. $M, (\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin $(n+s)$ boyutlu HHKMSR manifoldunun n -boyutlu altmanifoldu olsun. Herhangi $X, Y, Z \in \Gamma(T\hat{M})$ için,

$$\hat{g}((\nabla_X h)Y, Z) = \hat{g}(Y, (\nabla_X h)Z) \quad (5.9)$$

dir.

Tanım 5.4. $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ HHKMSR manifoldu ve $M, \hat{M}$ de reel altmanifold olsun. M , aşağıdaki koşulları sağlayan ortogonal distribüsyon $(D, D^\perp)$ içeriyorsa, $\hat{M}$ nin semi-invaryant altmanifoldu olarak adlandırılır.

$$(i) \quad TM = D \oplus D^\perp \quad (5.10)$$

$$(ii) \quad \hat{J}D_x = D_x \quad (5.11)$$

$\forall x \in M$ için D distribüsyonu invariant,

$$(iii) \quad \hat{J}D^\perp \subset T_x M^\perp \quad (5.12)$$

$\forall x \in M$ için $D^\perp$ distribüsyonu anti-invarianttır.

Altmanifoldun tanjant demetini, ana manifoldun tanjant demetine tamamlayan bir distribüsyon vardır. Bu distribüsyonu μ ile gösterelim.

Önerme 5.3. $M, (\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ HHKMSR manifoldunun semi-invaryant altmanifoldu olsun. μ distribüsyonu $\hat{J}$ ye göre invariant değildir.

İspat. $V \in \Gamma(M), W \in \Gamma(\hat{J}D^\perp)$ ve $X \in \Gamma(D)$ için,

$$\hat{g}(\hat{J}V, W) = \hat{g}(V, \hat{J}W) = 0,$$

$$\hat{g}(\hat{J}V, X) = \hat{g}(V, \hat{J}X) = 0$$

sonuçlarından,

$$\hat{J}(\mu) \cap \hat{J}D^\perp = 0$$

ve

$$\hat{J}(\mu) \cup D = 0$$

olursa ispat tamamlanır.

(5.1), (5.4) ve (5.5) kullanılarak,

$$\hat{J}X = SX + LX,$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 X &= \hat{J}SX + \hat{J}LX, \\
(p\hat{J} - \frac{3}{2}qI)X &= \hat{J}SX + \hat{J}LX, \\
p\hat{J}X - \frac{3}{2}qIX &= S(SX + LX) + B(LX) + C(LX), \\
p(SX + LX) - \frac{3}{2}qX &= S^2X + SLX + B(LX) + C(LX), \\
pSX + pLX - \frac{3}{2}qX &= S^2X + SLX + B(LX) + C(LX).
\end{aligned}$$

Teğet ve normal bileşenler ayrıştırılırsa;

$$S^2X = pSX - \frac{3}{2}qX - B(LX)$$

ve

$$pLX = SLX + C(LX)$$

elde edilir. O halde S , D distribüsyonunda ve L de $D^\perp$ distribüsyonunda kompleks metalik yapı değildir. $\square$

Sonuç 5.1. M , $HHKMSR$ manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin semi-invaryant altmanifoldu olsun. O halde Tanım (5.3) de verilen S ve L projeksiyonları M üzerinde hemen hemen kompleks metalik yapı değildir.

Teorem 5.1. M , $HHKMSR$ manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin semi-invaryant altmanifoldu olsun. D distribüsyonu integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(D)$, $\forall Z \in \Gamma(D^\perp)$,

$$h(X, \hat{J}Y) = h(Y, \hat{J}X) \quad (5.13)$$

olmasıdır.

İspat. D distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $[X, Y] \in \Gamma(D)$ olmasıdır.

$X, Y \in \Gamma(D)$, $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için Gauss denkleminde Y yerine $\hat{J}Y$ alırsak,

$$\hat{\nabla}_X \hat{J}Y = \nabla_X \hat{J}Y + h(X, \hat{J}Y)$$

elde edilir. Distribüsyonun integrallenebilir olması için endomorfizmanın konneksiyon altında sifıra eşit olması gerekir. O halde

$$\hat{\nabla} \hat{J} = 0,$$

$$(\hat{\nabla}_X \hat{J})Y = 0,$$

$$\hat{\nabla}_X \hat{J}Y - \hat{J}\hat{\nabla}_X Y = 0,$$

$$\hat{\nabla}_X \hat{J}Y = \hat{J}\hat{\nabla}_X Y$$

(5.4), (5.5), (5.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_X \hat{J}Y + h(X, \hat{J}Y) &= \hat{J}\nabla_X Y + \hat{J}h(X, Y), \\ &= B\nabla_X Y + C\nabla_X Y + Sh(X, Y) + Lh(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Teğet ve normal bileşenleri eşitlersek;

$$h(X, \hat{J}Y) = C\nabla_X Y + Lh(X, Y),$$

$$C\nabla_X Y = h(X, \hat{J}Y) - Lh(X, Y)$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$C\nabla_Y X = h(Y, \hat{J}X) - Lh(Y, X)$$

olup eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$C\nabla_X Y - C\nabla_Y X = h(X, \hat{J}Y) - Lh(X, Y) - h(Y, \hat{J}X) + Lh(Y, X),$$

$$C[X, Y] = h(X, \hat{J}Y) - h(Y, \hat{J}X),$$

$$\hat{g}(C[X, Y], Z) = \hat{g}(h(X, \hat{J}Y) - h(Y, \hat{J}X), Z),$$

$$h(X, \hat{J}Y) - h(Y, \hat{J}X) = 0,$$

$$h(X, \hat{J}Y) = h(Y, \hat{J}X)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 5.2. *M, HHKMSR manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin semi-invaryant altmanifoldu olsun. O halde $\forall X, Y \in \Gamma(D^\perp)$, $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır*

$$A_{\hat{J}X}Y = -A_{\hat{J}Y}X. \quad (5.14)$$

İspat. (5.6) ve (5.7) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\hat{g}(A_{j_X}Y, Z) &= \hat{g}(\hat{J}X, h(Y, Z)), \\
&= \hat{g}(\hat{J}X, \hat{\nabla}_Z Y - \nabla_Z Y), \\
&= \hat{g}(\hat{J}X, \hat{\nabla}_Z Y), \\
&= \hat{g}(X, \hat{J}\hat{\nabla}_Z Y), \\
&= \hat{g}(X, \hat{\nabla}_Z \hat{J}Y), \\
&= \hat{g}(X, -A_{j_Y}Z + \nabla_Z^\perp \hat{J}Y), \\
&= \hat{g}(X, -A_{j_Y}Z), \\
&= \hat{g}(-A_{j_Y}X, Z)
\end{aligned}$$

olduğundan $-A_{j_Y}X = A_{j_X}Y$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.2. M , $HHKMSR$ manifoldu $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin semi-invariant altmanifoldu olsun. $D^\perp$ distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak $\forall X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\hat{J}A_{j_X}Y = pA_{j_X}Y \quad (5.15)$$

eşitliğinin sağlanması ya da

$$\hat{J}A_{j_X}Y - pA_{j_X}Y$$

ifadesinin D de bileşeni olmamasıdır.

İspat. $D^\perp$ distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak $\forall X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ için $[\hat{X}, Y] \in \Gamma(D^\perp)$ olmasıdır. $Z \in \Gamma(D)$ için (5.3), (5.7) ve Lemma (5.2) kullanılarak ve g , M üzerine $\hat{g}$ den indirgenen metrik olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{g}([X, Y], Z) &= 0 \iff \frac{2p}{3q}\hat{g}(\hat{J}[X, Y], Z) - \frac{2}{3q}\hat{g}(\hat{J}[X, Y], \hat{J}Z) = 0, \\
&= p\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X, \hat{J}Z) - \hat{g}(\hat{\nabla}_X \hat{J}Y - \hat{\nabla}_Y \hat{J}X, \hat{J}Z) = 0, \\
&= p\hat{g}(-A_{j_Y}X + A_{j_X}Y, Z) - \hat{g}(-A_{j_Y}X + A_{j_X}Y, \hat{J}Z) = 0, \\
&= pg(-A_{j_Y}X + A_{j_X}Y, Z) - g(-\hat{J}A_{j_Y}X + \hat{J}A_{j_X}Y, Z) = 0, \\
&= g(2pA_{j_X}Y, Z) - g(2\hat{J}A_{j_X}Y, Z) = 0, \\
&= g(2pA_{j_X}Y - 2\hat{J}A_{j_X}Y, Z) = 0,
\end{aligned}$$

olduğundan $pA_{j_X}Y = \hat{J}A_{j_X}Y$ elde edilir ya da $\hat{J}A_{j_X}Y - pA_{j_X}Y$ ifadesinin D de bileşeni yoktur. $\square$

Teorem 5.3. M , $HHKMSR$ manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin semi-invariant altmanifoldu olsun. O zaman M total geodeziktir ancak ve ancak $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ch(X, SY) - LA_{LY}X + C\nabla_X^\perp LY = ph(X, SY) + p\nabla_X^\perp LY - \frac{3}{2}qh(X, Y) \quad (5.16)$$

olmasıdır.

İspat. $Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 Y &= p\hat{J}Y - \frac{3q}{2}Y, \\ \hat{\nabla}_X \hat{J}^2 Y &= p\hat{\nabla}_X \hat{J}Y - \frac{3q}{2}\hat{\nabla}_X Y, \\ \hat{J}\hat{\nabla}_X \hat{J}Y &= p\hat{\nabla}_X(SY + LY) - \frac{3q}{2}(\nabla_X Y + h(X, Y)), \\ \hat{J}\hat{\nabla}_X(SY + LY) &= p\hat{\nabla}_X SY + p\hat{\nabla}_X LY - \frac{3q}{2}\nabla_X Y - \frac{3q}{2}h(X, Y), \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{J}\nabla_X SY + Bh(X, SY) + Ch(X, SY) \\ -SA_{LY}X - LA_{LY}X + B\nabla_X^\perp LY + C\nabla_X^\perp LY \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} p\nabla_X SY + ph(X, SY) - pA_{LY}X \\ +p\nabla_X^\perp LY - \frac{3q}{2}\nabla_X Y - \frac{3q}{2}h(X, Y). \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Teğet ve normal bileşenleri ayrıştırılırsa,

$$Ch(X, SY) - LA_{LY}X + C\nabla_X^\perp LY = ph(X, SY) + p\nabla_X^\perp LY - \frac{3}{2}qh(X, Y)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.4. M , $HHKMSR$ manifold $(\hat{M}, \hat{J})$ nin semi-invariant altmanifoldu olsun. O zaman D distribüsyonu total geodezik foliasyon tanımlar ancak ve ancak

$\forall X \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$\hat{J}A_{j_Z}X = pA_{j_Z}X \quad (5.17)$$

eşitliğinin sağlanması ya da

$$\hat{J}A_{j_Z}X - pA_{j_Z}X$$

ifadesinin D de bileşeni olmamasıdır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için D distribüsyonu total geodezik foliasyon tanımlar ancak ve ancak $\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, Z) = 0$ denklemi sağlanmalıdır. g, M üzerine $\hat{g}$ den indirgenen metrik olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, Z) &= 0 \iff \frac{2p}{3q} \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, Z) - \frac{2}{3q} \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, \hat{J} Z) = 0, \\
&= p \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, Z) - \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, \hat{J} Z) = 0, \\
&= -p \hat{g}(Y, \hat{\nabla}_X \hat{J} Z) + \hat{g}(\hat{J} Y, \hat{\nabla}_X \hat{J} Z) = 0, \\
&= -p \hat{g}(Y, \hat{\nabla}_X \hat{J} Z) + \hat{g}(Y, \hat{J} \hat{\nabla}_X \hat{J} Z) = 0, \\
&= -p g(Y, A_{jZ} X + \nabla_X^\perp \hat{J} Z) + g(Y, \hat{J} A_{jZ} X + \hat{J} \nabla_X^\perp \hat{J} Z) = 0, \\
&= g(Y, \hat{J} A_{jZ} X - p A_{jZ} X) = 0
\end{aligned}$$

ise ya $\hat{J} A_{jZ} X - p A_{jZ} X = 0$ dır ya da $\hat{J} A_{jZ} X - p A_{jZ} X$ ifadesinin D de bileşeni yoktur. $\square$

Teorem 5.5. M , $HHKMSR$ manifold $(\hat{M}, \hat{J})$ nin semi-invaryant altmanifoldu olsun. O zaman $D^\perp$ distribüsyonu total geodezik foliasyon tanımlar ancak ve ancak $\forall X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $Z \in \Gamma(D)$ için

$$-p A_{jY} X + \hat{J} A_{jY} X = 0 \quad (5.18)$$

eşitliği sağlanır ya da $-p A_{jY} X + \hat{J} A_{jY} X$ ifadesinin D de bileşeni olmamasıdır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $Z \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, Z) = 0 &\iff \frac{2p}{3q} \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, Z) - \frac{2}{3q} \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, \hat{J} Z) = 0, \\
p \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, Z) - \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X Y, \hat{J} Z) &= 0, \\
\hat{g}(p \hat{\nabla}_X \hat{J} Y, Z) - \hat{g}(\hat{J} \hat{\nabla}_X \hat{J} Y, Z) &= 0, \\
g(-p A_{jY} X + \nabla_X^\perp \hat{J} Y, Z) - g(-\hat{J} A_{jY} X + \nabla_X^\perp \hat{J} Y, Z) &= 0, \\
g(-p A_{jY} X + \hat{J} A_{jY} X, Z) &= 0
\end{aligned}$$

olup,

$-p A_{jY} X + \hat{J} A_{jY} X$ ifadesi ya sıfıra eşittir ya da D de bileşeni yoktur. $\square$

Tanım 5.5. M , kompleks metalik semi-Riemann manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin altmanifoldu olsun. M de $\kappa \in \Gamma(TM^\perp)$ olacak şekilde diferansiyellenebilir

vektör alanı var ise $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ manifoldundaki M ye total umbilik denir öyle ki $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$h(X, Y) = \kappa \hat{g}(X, Y). \quad (5.19)$$

Burada κ , ortalama eğrilik vektör alanıdır.

Teorem 5.6. M , HHKMSR manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin total umbilik semi-invariant altmanifoldu olsun. O zaman D distribüsyonu daima integrallenebilir.

İspat. M total umbilik semi-invariant altmanifoldu olsun.

$\forall X, Y \in \Gamma(D)$, $Z \in \Gamma(D^\perp)$ ve $\kappa \in \Gamma(T\hat{M}^\perp)$ için,

$$\begin{aligned} \hat{g}([X, Y], Z) &= \frac{2p}{3q} \hat{g}([X, Y], \hat{J}Z) - \frac{2}{3q} \hat{g}(\hat{J}[X, Y], \hat{J}Z), \\ 3q \hat{g}([X, Y], Z) &= 2p \hat{g}(\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X, \hat{J}Z) - 2 \hat{g}(\hat{\nabla}_X \hat{J}Y - \hat{\nabla}_Y \hat{J}X, \hat{J}Z), \\ &= 2g(p \nabla_X Y + ph(X, Y) - p \nabla_Y X - ph(Y, X) - \nabla_X \hat{J}Y \\ &\quad - h(X, \hat{J}Y) + \nabla_Y \hat{J}X + h(Y, \hat{J}X), \hat{J}Z), \\ &= 2g(p \nabla_X Y - p \nabla_Y X - \nabla_X \hat{J}Y + \nabla_Y \hat{J}X, \hat{J}Z), \\ &= 0. \end{aligned}$$

O halde D distribüsyonu integrallenebilir. $\square$

Lemma 5.3. M , HHKMSR manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin total umbilik semi-invariant altmanifoldu olsun. O halde,

$$\hat{g}(Y, Z) \hat{g}(\kappa, \hat{J}X) + \hat{g}(X, Z) \hat{g}(\kappa, \hat{J}Y) = 0 \quad (5.20)$$

dir.

İspat. $X, Y \in \Gamma(D)$, $Z \in \Gamma(D^\perp)$ ve $\kappa \in \Gamma(T\hat{M}^\perp)$ için,

$$\begin{aligned} \hat{g}(A_{\hat{J}X} Y, Z) &= -\hat{g}(A_{\hat{J}Y} X, Z), \\ \hat{g}(h(Y, Z), \hat{J}X) &= -\hat{g}(h(X, Z), \hat{J}Y), \\ \hat{g}(\kappa \hat{g}(Y, Z), \hat{J}X) &= -\hat{g}(\kappa \hat{g}(X, Z), \hat{J}Y), \\ \hat{g}(Y, Z) \hat{g}(\kappa, \hat{J}X) + \hat{g}(X, Z) \hat{g}(\kappa, \hat{J}Y) &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Teorem 5.7. M , $HHKMSR$ manifold $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ nin total umbilik semi-invariant altmanifoldu olsun. O zaman $D^\perp$ distribüsyonu daima integrallenebilir.

İspat. (5.19) ve (5.20) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 \hat{g}([X, Y], Z) &= \hat{g}(\hat{J}A_{j_X}Y + pA_{j_X}Y, Z), \\
 &= \hat{g}(A_{j_X}Y, \hat{J}Z) + p\hat{g}(A_{j_X}Y, Z), \\
 &= \hat{g}(h(Y, \hat{J}Z), \hat{J}X) + p\hat{g}(h(Y, Z), \hat{J}X), \\
 &= \hat{g}(\kappa\hat{g}(Y, \hat{J}Z), \hat{J}X) + p\hat{g}(\kappa\hat{g}(Y, Z), \hat{J}X), \\
 &= \hat{g}(Y, \hat{J}Z)\hat{g}(\kappa, \hat{J}X) + p\hat{g}(Y, Z)\hat{g}(\kappa, \hat{J}X), \\
 &= \hat{g}(\hat{J}Y, Z)\hat{g}(\kappa, \hat{J}X) + p\hat{g}(Y, Z)\hat{g}(\kappa, \hat{J}X), \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olup daima integrallenebilir.

□

Kaynaklar

- Blaga, A.M., Kumar, R., Rani, R.**, 2022, On the geometry of complex metallic Norden manifolds. structure, 12, 18.
- Crasmareanu, M. and Hretcanu, C.E.**, 2008, Golden differential geometry. Chaos, Solitons and Fractals, 38(5), 1229-1238.
- Çetinkaya, A.**, 2010, Manifoldlar Üzerinde Altın Yapılar, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, Türkiye.
- Dunlop, R.A.**, 2011, Altın Oran Ve Fibonacci Sayıları, Tübitak Popüler Bilim Kitapları.
- Etayo, F., Araceli, D.F., Santamaría, R.**, 2020, Classification of almost Norden golden manifolds. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 43, 3941–3961.
- Hretcanu, C.E. and Crasmareanu, M.C.**, 2013, Metallic Structures On Riemannian Manifolds, Revista De La Union Matematica Argentina, Vol: 54, No:2, 15-27p.
- Lee, J.M.**, 2003, Introduction to smooth manifolds. Springer.
- Lee, J.M.**, 2000, Introduction to topological manifolds. Springer.
- Salan, Y.Ö.**, Altın Oran, "https://users.metu.edu.tr/e154682/mimari.htm"
- Şahin, B.**, 2021, Diferansiyel Geometri. Palme Yayınevi. Ankara, Türkiye.
- Yano, K. and Kon, M.**, 1984, Structure On Manifolds, World Scientific.

TEŞEKKÜR

Bu tezi çalışırken bana destek olup; bilgisini, tecrübelerini paylaşan, her an yardımcı olan sevgili danışmanım Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN'a, tüm sorularımı cevaplayıp önerilerde bulunan Doç. Dr. Şerife Nur BOZDAĞ'a, Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında destek aldığım TÜBİTAK'a ve son olarak bu süreçte her zaman sabırla, ilgiyle, usanmadan yanımda olan eşim ve anneme sonsuz teşekkür ederim.

12/09/2024

İmzası

Ayşe Seray HASHAN

ÖZGEÇMİŞ

2015 yılında Fevzi Alaettinoğlu Anadolu Lisesi'nden mezun oldu ve 2015-2020 yılları arasında eğitim gördüğü Ege Üniversitesi Matematik Bölümü Teorik Ağırlıklı Matematik Opsiyonu'ndan mezun oldu. 2021-2024 yılları arasında Ege Üniversitesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'ndan yüksek lisansını tamamladı.

