

Simplisel Kategoriler

Tuğba Tuna

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2024



Simplicial Categories

Tuğba Tuna

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

January 2024

Simplisel Kategoriler

Tuğba Tuna

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASI
İkinci Danışman: Doç. Dr. Elif ILGAZ ÇAĞLAYAN

Ocak 2024

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi **Tuğba Tuna**'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Simplisel Kategoriler**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Zekeriya ARVASI

İkinci Danışman : Doç. Dr Elif ILGAZ ÇAĞLAYAN

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye:

Üye:

Üye:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Fatma TÜMSEK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Zekeriya ARVASI ve Doç. Dr. Elif ILGAZ ÇAĞLAYAN danışmanlığında hazırlamış olduğum “**Simplisel Kategoriler**” başlıklı Yüksek Lisans tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

16/01/2024

Tuğba Tuna

ÖZET

"Simplisel Kategoriler" üzerine hazırlanmış bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

1. bölümde "kategori" teriminin anlamı, kategori teoriye ihtiyaç duyulma sebebi ve bu alanda yapılan çalışmalardan bahsedilecektir.

2. bölümde kategorilerin temel kavramları üzerinde durulacak, bazı özel kategori çeşitlerinden bahsedilecek ve kategoriler arasında bağlantı kurmamıza yardımcı olacak fonktörler ve doğal transformasyonlar tanımlanacaktır.

3. bölümde; simplisel kategorinin tanımı verilecek, küçük kategorilerin kategorisi olan $\Delta[n]$ kategorisi oluşturulacak, simplisel grup ve simplisel cebir kategorileri tanımlanacaktır.

4. bölümde; çaprazlanmış modül kavramından söz edilip, gruplar ve cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturulacaktır.

5. bölümde ise simplisel kategorilere denk olan kategoriler incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Kategori, Çaprazlanmış modül, Simplisel grup, Simplisel cebir

SUMMARY

This thesis, focusing on “Simplicial Categories,” have five chapters. Firstly we discuss the meaning of the term “category,” the need for category theory, and highlight relevant works in this area.

In the second chapter, emphasis is on the fundamental concepts of categories, discussing specific types of categories. Functors and natural transformations are defined to establish connections between categories.

The third chapter will provide the notion of a simplicial category, create the category $\Delta[n]$ which is the category of small categories, and introduce simplicial group and simplicial algebra categories.

In the fourth chapter, the concept of crossed modules are addressed, leading to the creation of the category of crossed modules on groups and algebras.

The fifth chapter will explore categories equivalent to simplicial categories.

Key Words: Category, Crossed module, Simplicial group, Simplicial algebra

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli bilgilerini benimle paylaşarak desteklerini ve kıymetli vakitlerini esirgemeyen, Hocalarım, sayın **Prof. Dr. Zekeriya Arvasi ve Doç. Dr. Elif Ilgaz Çağlayan'** a, bu yola çıkmam ve devam etmem konusunda her türlü desteğiyle motivasyonumu yükselten babam **Turgay Küpşen'** e, süreç boyunca her anlamda yanımda olan kıymetli eşim **Murat Tuna'** ya ve daima yanımda olup bugünlere gelmemi sağlayan fedakâr aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
3. KATEGORİLERİN TEMEL KAVRAMLARI	4
3.1. Kategori Nedir?	4
3.1.1. Küçük Kategoriler	7
3.1.2. Verilen Kategorilerden Yeni Kategoriler Elde Etmek	10
3.1.2.1. <u>Alt Kategoriler</u>	10
3.1.2.2. <u>Çarpım Kategorisi</u>	11
3.1.2.3. <u>Dual (Opposite) Kategoriler</u>	12
3.1.2.4. <u>Bölüm Kategorisi</u>	13
3.1.3. İzomorfizmler	13
3.2. Funktorlar	14
3.2.1. Funktor Örnekleri	14
3.3. Doğal Transformasyonlar	16
3.4. Kategoriler Arasındaki İlişkiler	18
3.4.1. Kategorilerin İzomorfluğu	18
3.4.2. Funktorların İzomorfluğu	18
3.4.3. Kategorilerin Doğal Denkliği	18
4. SİMLİSEL KATEGORİLER	20
4.1. $\Delta[n]$ Kategorisi	21
4.2. Simplisel Gruplar Kategorisi	26
4.2.1. Bir Simplisel Grubun Moore Kompleksi ve Homotopi Modülü	27
4.2.2. Kısıtlanmış Simplisel Gruplar	28
4.3. Simplisel Cebirler Kategorisi	29

İÇİNDEKİLER

x

4.3.1. Bir Simplisel Cebirin Moore Kompleksi ve Homotopi Modülü	31
4.3.2. Kısıtlanmış Simplisel Cebirler	31
5. 2-BOYUTLU GRUP: ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL	33
5.1. Çaprazlanmış Modüller Kategorisi	34
5.1.1. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller Kategorisi	34
5.1.2. Grubun Grup Üzerine Etkisi	34
5.1.3. Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller Kategorisi	40
5.1.4. Cebirin Cebir Üzerine Etkisi	41
6. SİMLİSEL KATEGORİLERE DENK KATEGORİLER	46
6.1. Cat^1 -Grup ve Cat^1 -Cbr Kategorileri	47
7. YÖNTEM	53
8. BULGULAR VE TARTIŞMA	54
9. SONUÇ VE ÖNERİLER	57
KAYNAKLAR DİZİNİ	58

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\mathcal{C}	Kategori
$\text{Ob}(\mathcal{C})$	Objeler sınıfı
$\text{Mor}(\mathcal{C})$	Morfizm kümesi
$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$	Çarpım kategorisi
\mathcal{C}^{op}	\mathcal{C} nin dual kategorisi
$\mathcal{C} _{\sim}$	\mathcal{C} nin bölüm kategorisi
0	Başlangıç objesi
1	Variş objesi
$\text{tr}_k G$	k-kısıtlanmış simplisel grup
Ceb	k-cebir
\mathcal{X}	Çaprazlanmış Modül

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Sezgilere dayanan bir soyut düşünce biçimi ve evrensel bir dil olarak kullanılan matematik, gelişen dünyamızda önemli yer tutar. Hayatımızın her alanında gerekli olan çözümleyebilme, ilişkilendirme, akıl ve mantık yürütme, problem çözme gibi davranışları geliştiren bir alan olduğu için matematiği öğrenmek hayatımızı kolaylaştırır. Ayrıca matematik, farklı konuların birbirleriyle bağlantısı üzerine çalışarak problemlere farklı bakış açıları ve farklı çözümler getirir. (<https://www.matematikselsel.org> n.d.)

Kategori teorisi, nesnelere çok, nesnelere arasında ilişki kuran bir matematiksel modeldir ve bu teori, matematiğin bir çok alanında uygulanmaktadır.

Kategori teorisi, matematiksel yapılar ve bu yapılar arasındaki bağlantılarla ilgilenen ve böylece yeni bir bakış açısı ortaya koyan bir kuramdır. (<https://tr.wikipedia.org> n.d.) Bu kuram sayesinde farklı alanlardaki teoremler ve yapılar birbirleriyle ilişkilendirilebilir ve elde edilen sonuçlar farklı alanlara da uygulanarak ortak bir matematiksel dil oluşturmamıza olanak sağlar. Tüm bu özellikleri sağlayan kategori teorisi, matematiksel yapıların bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Kategori teorisi 1940 yıllarında Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından oluşturulmuş ve pek çok bilim insanının çalışma alanı olmuştur. (Mac Lane, 1998)

Kategori teorisi sayesinde bazı alanlardaki zor problemler, farklı alanlarda daha basite indirgenerek çözülebilir. En çok bilinen örneklerden biri olarak topolojik uzaylar kategorisi ile gruplar kategorisi arasında geçiş yapan homotopi fonktörü verilebilir. Homotopi fonktörü ile 1 boyutlu topolojik uzaylara cebirsel model olarak temel gruplar karşılık getirilir. Böylece topolojik bir probleme cebirsel olarak çözüm bulma şansı elde edilir. Bu amaçla kategoriksel denklemleri elde etmek oldukça önemlidir. Kategoriksel denklemleri anlamak için doğal transformasyon, fonktor ve dolayısıyla kategori kavramının anlaşılması gerekmektedir. Bu nedenle öncelikle bu kavramlar üzerinde durulacaktır. Sonrasında ise bizim tezimizin temel konusu olan Simplistik kategoriler ve onlara

denk olan kategoriler tanıtılacaktır. Kaynak olarak öncelikle Mac Lane'nin kitaplarından ve Z.Arvasi Ders Notlarından yararlanılmıştır. (Arvasi, 2013; Mac Lane, 1998)



2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Kategori teorisi 1940 yıllarında Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından oluşturulmuş ve pek çok bilim insanının çalışma alanı olmuştur. (Mac Lane, 1998) Biz de ilk bölümde Mac Lane'nin kitaplarından ve Z.Arvasi Ders Notlarından yararlanacağız. (Arvasi, 2013)

Simplisel kategori ya da simpleks kategori olarak adlandırılan kategori; boştan farklı, sonlu, sıralı kümeler ve sıra koruyan dönüşümlerden oluşan bir kategoridir. Bu kategori, simplisel ve kosimplisel objeleri tanımlamak için kullanılır. (<https://tr.wikipedia.org> n.d.) Bu kategori ile tanımlı simplisel objeler, cebirsel topolojide bir çok problemin çözümüne yardımcı olur. Örnek olarak homoloji ve kohomoloji işlemleri, C-W kompleksler ve Eilenberg-Mac Lane uzayları verilebilir. Detaylı bilgi için (Gabriel ve Zisman, 1967; Lamotke, 1968; May, 1967) kaynaklarına bakılabilir.

Whitehead, Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramını ilk kez 1949 yılında cebirsel bir model olarak tanımlamış ve relatif homotopi grupları üzerine yaptığı çalışmasında kullanmıştır. (Whitehead, 1949) Bu sayede Çaprazlanmış modüllerin homotopisi, matematik ve geometrinin bir çok alanında kullanılmıştır. Sonrasında bu kavram cebir yapısı için de tanımlanmıştır. Porter (1985) değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı üzerine çalışmıştır. Lichtenbaum, Gerstanhaber (1966) ve Schlessinger (1967) cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısına farklı bir şekilde yer vermiştir. Bunun yanı sıra T.Porter ve Z.Arvasi ve çalışmalarında değişmeli cebirler üzerine çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. (Arvasi ve Porter, 1996; Arvasi ve Porter, 1997; T.Porter, 1986)

Cat1-grup yapısı ilk kez Loday tarafından incelenmiştir. Ayrıca Loday, Cat^2 ve Cat^n -gruplarını tanımlamış ve Cat^2 -gruplar kategorisi ile çaprazlanmış kare arasındaki bağıntıları ispatlamıştır. (Loday, 1982) Sonrasında Ellis (1988) cebirler üzerinde çalışarak k-cebir kategorisinde cat-1 cebir tanımını elde etmiştir. Cat1-Cebir ve XMod kategorilerinin denkleğinin ispatı Porter ve Shammu(1992) tarafından intern kategoriler için verilmiştir. Çaprazlanmış modüller kategorisinin Moore kompleksi 1 olan simplisel cebirler kategorisine doğal denkleği 1997' de (Arvasi ve Porter, 1997) ile ve 2-boyutlu Moore komplekslerin simplisel cebir kategorisine denkleği de 1997 yılında (Arvasi, 1997) ile gösterilmiştir.

3. KATEGORİLERİN TEMEL KAVRAMLARI

Bu bölümde, diğer bölümlerde de kullanacağımız kategori teriminin tanımı, kategoriksel yapıları oluşturan elemanların tanım ve özellikleri, kategori çeşitleri ve özellikleri, kategoriler arasındaki fonktörler ve doğal transformasyonlar hakkında genel bilgi verilecektir. Referans olarak Mac Lane verilebilir.

3.1 Kategori Nedir?

Herhangi bir \mathcal{C} kategorisi ;

- $Ob(\mathcal{C})$; elemanlarına *obje* denilen bir sınıf,
- $Mor(\mathcal{C})$; elemanlarına *morfizm* yada *ok* denilen bir kümedir. Yani Z ve T herhangi iki obje olmak üzere, Z den T ye giden

$$Mor_{\mathcal{C}}(Z, T) = \{f \mid f : Z \longrightarrow T\}$$

tüm okların kümesi,

- $f : Z \longrightarrow T$ ve $g : T \longrightarrow X$ morfizmleri için

$$\begin{aligned} \circ : Mor_{\mathcal{C}}(Z, T) \times Mor_{\mathcal{C}}(T, X) &\longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(Z, X) \\ (f, g) &\longrightarrow \circ(f, g) = g \circ f \end{aligned}$$

şeklinde bir kompozisyon

- Her X objesi için $1_X : X \longrightarrow X$ birim morfizmi;

verileri ;

K1) $f : Z \longrightarrow T, g : T \longrightarrow X$ ve $h : X \longrightarrow M$ morfizmleri için

$$h(gf) = (hg)f \ ;$$

Yani

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{h(gf)=(hg)f} & M \\
 \downarrow f & \begin{array}{c} \dashrightarrow hg \\ \dashrightarrow gf \end{array} & \uparrow h \\
 T & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

şeklindeki diyagram değişmelidir.

K2) $f : Z \rightarrow T$ morfizmi için

$$f 1_Z = 1_T f = f \text{ dir.}$$

şartlarını sağlıyorsa $(Ob(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{C}); 2$ Aksiyom) sistemine bir *kategori* denir.

Not:

1. Birim morfizm tektir.

2. Herhangi bir \mathcal{C} kategorisi, $Mor(\mathcal{C})$ kümesi üzerinde morfizmler veya oklar cebiri oluşturur. Yani

$$\mathcal{C} \sim (Mor\mathcal{C}, Mor\mathcal{C} \times Mor\mathcal{C} \rightarrow Mor\mathcal{C} ; 2 \text{ Aksiyom})$$

biçiminde cebirsel formatta ifade edilir.

3. hf ve gf tanımlıdır $\iff hfg$ tanımlıdır.

Örnekler

1) $\mathcal{C} = \text{Grup}(\text{Gruplar kategorisi})$

- $Ob(\mathcal{C})$, grupların sınıfıdır.

- $Mor(\mathcal{C})$, gruplar arasında tanımlı homomorfizmlerdir.
- Birim morfizm, birim fonksiyon homomorfizmidir.
- Kompozisyon, homomorfizmlerin bileşkesidir.

2) \mathcal{C} =Küme (Kümeler kategorisi)

- $Ob(\mathcal{C})$, tüm kümelerdir.
- $Mor(\mathcal{C})$, kümelerde tanımlı fonksiyonlardır.
- Birim morfizm, birim fonksiyondur.
- Kompozisyon, fonksiyonlarda tanımlı bileşke işlemidir.

Sonlu kümeler obje olarak alınırsa, sonlu kümeler kategorisi elde edilir.

3) \mathcal{C} =Halka(Halkalar Kategorisi)

- $Ob(\mathcal{C})$, tüm halkaların sınıfıdır.
- $Mor(\mathcal{C})$, halka homomorfizmlerinin kümesidir.
- Kompozisyon, her halka homomorfizmi bir fonksiyon olduğundan bileşke işlemidir.

Eğer objeler tamlık bölgesi olarak alınırsa tamlık bölgesi kategorisi ve cisimler olarak alınırsa cisimler kategorisi oluşur.

4) Morfizmleri sadece birim morfizmler olan kategori, *ayrık (discrete) kategori* olarak adlandırılır.

3.1.1 Küçük Kategoriler

Tanım 1 *Objeler sınıfı küme olan kategoriye küçük (small) kategori denir.*

Objeler kümesi O , morfizmler kümesi F ile gösterilirse

$$F \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ \xrightarrow{m} \end{array} O$$

fonksiyonları tanımlayalım. $g \in F$ morfizmi

$a = n(g) \in O$ ve $b = m(g) \in O$ olmak üzere

$$a = n(g) \xrightarrow{g} m(g) = b$$

şeklinde gösterilir. Tanımlanan n fonksiyonuna *kaynak (source)* ve m fonksiyonuna *hedef (target)* fonksiyonu denir. Ayrıca

$$O \xrightarrow{e} F$$

fonksiyonu, y bir obje olmak üzere

$$e(y) = 1_y : y \longrightarrow y$$

biçiminde birim morfizm olarak tanımlanır.

Kompozisyon işlemi ise

$$\begin{aligned} \circ : F \times F &\longrightarrow F \\ (g, h) &\longrightarrow \circ(g, h) = g \circ h = gh \end{aligned}$$

biçiminde olup bu kompozisyonun tanımlanabilmesi için

$$m(g) = n(h)$$

olmalıdır. Yani;

$$F \times_{\circ} F = \{(g, h) \mid m(g) = n(h)\} \subseteq F \times F$$

şeklinde tanımlanmalıdır. Bu çarpıma *fiber çarpım* denir.

Örnekler

1.) Grup , tek objeli bir küçük kategoridir. H bir grup ve

$$O = \{*\}, F = H$$

olarak alınırsa

$$\begin{array}{ccc} H & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \\ \xrightarrow{e} \end{array} & (*) \end{array}$$

diyagramı kullanılarak her $h \in H$ için

$$* = s(h) \xrightarrow{g} t(h) = *$$

olup; küçük kategorinin morfizmleri, grubun elemanları olur. Diğer taraftan grubun birimi,

$$\mathcal{C}_x = e(*) : * \longrightarrow *$$

biçiminde birim morfizmdir. Son olarak

$$\begin{array}{ccc} \cdot & : & H \times H \longrightarrow H \\ (h_1, h_2) & \longrightarrow & \cdot(h_1, h_2) = h_1 \cdot h_2 \end{array}$$

olarak tanımlanan işlem, kompozisyon olur. Yani bu fonksiyonlar kullanılarak

$$* = s(h_1) \xrightarrow{h_1} t(h_1) = * = s(h_2) \xrightarrow{h_2} t(h_2) = *$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca grubun asosyatiflik ve birimlilik şartları , kategorinin K1 ve K2 aksiyomlarına karşılık gelmektedir. Böylece G grubu, tek objeli bir küçük kategoridir.

Uyarı: Yukarıdaki örnekte obje kümesi tek elemanlı olmak zorundadır. Aksi takdirde kompozisyon oluşmaz. Ayrıca kategorinin morfizmleri G nin elemanlarıdır. Yani kategoride morfizmler fonksiyon olmak zorunda değildir.

2.) Benzer şekilde herhangi bir monoid de bir küçük kategori belirtir.

3.) Hem objeler hem de morfizmler boş küme olarak alınırsa *boş kategori* elde edilir. Benzer şekilde

- $A = \{1_0\}$ ve $O = \{0, 1\}$ alınırsa;

$$1 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ I_0 \end{array}$$

şeklinde gösterilen yapı, bir objesi ve bir morfizmi olan bir küçük kategori oluşturur.

- $A = \{f, 1_0, 1_1\}$ ve $O = \{0, 1\}$ alınırsa;

$$2 = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ I_0 \end{array} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ I_1 \end{array} \\ & 0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

küçük kategorisi elde edilir.

- Benzer şekilde

$$3 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \nearrow & \searrow \\ 0 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

$$4 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \nearrow & \searrow \\ 0 & \longrightarrow & 2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \end{array}$$

iv) $g, f \in \text{Mor}(\mathcal{D})$ olmak üzere

$$g \circ_{\mathcal{D}} f = g \circ_{\mathcal{C}} f \text{ dir.}$$

şartları sağlanıyorsa \mathcal{D} kategorisi \mathcal{C} kategorisinin alt kategorisi olur.

\mathcal{D} kategorisindeki her A, C obje çifti için ayrıca

$$\text{Mor}_{\mathcal{D}}(A, C) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

eşitliği sağlanıyorsa, \mathcal{D} kategorisi \mathcal{C} kategorisinin tam (dolu) alt kategorisi olur.

Örnekler

1.) Boş kategori, her kategorinin alt kategorisidir. Her kategori, kendisinin bir dolu alt kategorisidir.

2.) $\mathcal{D} = \text{Hlk}_1$ birimli halkalar kategorisi, $\mathcal{C} = \text{Hlk}$ halkalar kategorisinin alt kategorisidir. Ancak dolu alt kategorisi değildir. Çünkü her halka homomorfizmi birimi korumaz.

3.) $\mathcal{D} = \text{Abelyan Grup Kategorisi}$, $\mathcal{C} = \text{Grup kategorisinin dolu alt kategorisidir}$.

3.1.2.2 Çarpım Kategorisi

\mathcal{C} ile \mathcal{D} iki kategori olmak üzere;

- Objeleri; $D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $C \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ olmak üzere (D, C) ikilileri
- Morfizmleri; $f \in \text{Mor}(D, D')$, $g \in \text{Mor}(C, C')$ olmak üzere

$$(h, g) : (D, C) \longrightarrow (D', C') \text{ ikilileri,}$$

- Birim morfizmi; $(1_{\mathcal{D}}, 1_{\mathcal{C}})$ ikilisi
- Kompozisyonu; $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$

biçiminde bir kategori elde edilir. Elde edilen kategoriye \mathcal{C} ve \mathcal{D} kategorilerinin *çarpım kategorisi* denir ve $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ şeklinde gösterilir.

3.1.2.3 Dual (Opposite) Kategoriler

\mathcal{C} bir kategori olsun. \mathcal{C} nin objeleri aynen alınmak suretiyle morfizmlerin yönü değiştirilerek elde edilen kategoriye \mathcal{C} nin dual kategorisi denir ve \mathcal{C}^{op} şeklinde gösterilir. Yani;

- $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$
- $Mor(\mathcal{C}^{op}) = \{ f : C \rightarrow B \mid f \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \}$
- $B \in Ob(\mathcal{C}^{op})$ için $1_{(\mathcal{C}^{op})}(B) = 1_{\mathcal{C}}(B)$
- $(f \circ g)^{op} = g^{op} \circ f^{op}$

olacak şekilde bir \mathcal{C}^{op} kategorisi elde edilir. Bu kategoriye \mathcal{C} nin *dual kategorisi* denir.

Örnekler

1) Her kategorinin duali de bir kategoridir.

2) \mathcal{C} bir kategori olmak üzere $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$ dir.

3) G grubu küçük kategori olarak göz önüne alınırsa G Abelyan ise $G = G^{op}$ tur. Çünkü

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longrightarrow xy \text{ olmak üzere} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{Op} \times G^{Op} &\longrightarrow G^{Op} \\ (x, y) &\longrightarrow xy = yx \text{ şeklinde tanımlıdır.} \end{aligned}$$

3.1.2.4 Bölüm Kategorisi

\mathcal{C} herhangi bir kategori ve \sim bağıntısı, $Mor(\mathcal{C})$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda bölüm kategori ;

- $Ob(\mathcal{C} / \sim) = Ob(\mathcal{C})$
- $Mor_{\mathcal{C} / \sim}(A, B) = \{ [f] \sim \mid f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \}$
- $[f] \circ_{\mathcal{C} / \sim} g = [g \circ_{\mathcal{C}} f]$

biçiminde tanımlanır.

Örnek: $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$ kategorisini ele alalım. \simeq homotopi bağıntısına göre $\mathcal{T}op / \simeq$ bir bölüm kategorisidir. Bu kategoriye *homotopi kategorisi* denir.

3.1.3 İzomorfizmler

\mathcal{C} herhangi bir kategori ve $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$ olsun.

$f \circ g = 1_B$ ve $g \circ f = 1_A$ ise g ye f nin *ters morfizmi* ve f ye de g nin *ters morfizmi* denir ve $g = f^{-1}$ ile gösterilir.

Yani,

$$1_A \circlearrowleft A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} B \circlearrowright 1_B$$

ve $fg = 1_B$ ve $gf = 1_A$ olacak şekilde g vardır."

Tanım 3 \mathcal{C} bir kategori ve C ve A da birer obje olmak üzere $f : A \rightarrow C$ morfizminin tersi varsa, f ye *izomorfizm* denir. Bu durumda A ve C *izomorf objeler* olarak adlandırılır ve $A \cong C$ ile gösterilir.

3.2 Funktorlar

"Funktor" kelimesi, filozof Carnap'tan gelmektedir.(Mac Lane, 1998) Funktorlar, iki kategori arasında nesnelere ve morfizmleri ilişkilendirir. Bu anlamda fonksiyonların genelleştirilmesi olarak düşünülebilirler. Örneğin topolojik uzayın temel grubu bir funktor olarak alınabilir. Ayrıca bu tip yapılar "doğal bir bağıntıya" sahip olduğundan bir funktoru diğeri ile ilişkilendiren, doğal dönüşüm kavramının tanımlanmasını sağlar. Homomorfizmlerin cebirsel özellikleri koruduğu gibi funktorlar da kategoriksel özellikleri korurlar.

Tanım 4 \mathcal{C} ve \mathcal{D} herhangi iki kategori olsun. $G : Mor_{\mathcal{C}} \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}$ fonksiyonu;

(F1) $G(id_A) = id_{G(A)}$ dir.

(F2) $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ olmak üzere

$$G(g \circ f) = G(g) \circ G(f) \text{ dir.}$$

eşitliği sağlanıyorsa G ye bir funktor denir ve $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ya da $(\mathcal{C}, G, \mathcal{D})$ ile gösterilir.

3.2.1 Funktor Örnekleri

1.) **Birim Funktor:** Her \mathcal{C} kategorisi için ,

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ A &\longmapsto A \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı funktor *birim* funktordur.

2.) **Sabit Funktor:** \mathcal{C} ile \mathcal{D} birer kategori ve $D \in Ob(\mathcal{D})$ sabit obje olsun.

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ A &\longmapsto D \\ f &\longmapsto 1_D \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı funktor *sabit* funktordur.

3.) İçine (Inclusion) Funktor: \mathcal{C}' , \mathcal{C} nin bir alt kategorisi olmak üzere

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{C}} &: \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} \\ A &\longmapsto A \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı funktor *içine (inclusion) funktordur.*

4.) Projeksiyon Funktoru: \mathcal{C} ve \mathcal{D} herhangi iki kategori olmak üzere $D \in Ob(\mathcal{C})$, $C \in Ob(\mathcal{D})$ olsun.

$$\begin{aligned} F_0 &: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} & F_1 &: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \\ (D, C) &\longmapsto D & (D, C) &\longmapsto C \\ (h, g) &\longmapsto h \quad \text{ve} & (h, g) &\longmapsto g \quad \text{funktorları} \end{aligned}$$

vardır.

5.) Bölüm Funktoru: \mathcal{C} herhangi bir kategori, \mathcal{C} / \sim kategorisi de \mathcal{C} nin bölüm kategorisi olsun.

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} / \sim \\ A &\rightsquigarrow F(A) \\ f &\rightsquigarrow [f]_{\sim} \end{aligned} \quad \text{biçiminde tanımlanan } F \text{ funktoruna}$$

bölüm funktoru denir.

6.) Forgetfull (İhmal) Funktor:

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru, \mathcal{C} kategorisindeki bazı özellikler göz ardı edilerek \mathcal{D} kategorisine tanımlanıyorsa, bu dönüşüm *forgetfull (ihmal) funktor* olarak adlandırılır.

Örneğin, \mathcal{C} somut kategori ise

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Küme} \quad \text{şeklindeki funktor, forgetfull (ihmal) funktordur.}$$

Çünkü,

$$F : \text{Grp} \longrightarrow \text{Küme} \implies \text{Grup yapısı unutuluyor.}$$

$F : Mod_R \longrightarrow AbGrp \implies$ Modül çarpım yapısı unutuluyor.

$F : Hlk_1 \longrightarrow AbGrp \implies$ Çarpım yapısı unutuluyor.

7.) Kontravaryant Funktor

$H : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ (veya $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$) şeklindeki funktora \mathcal{C} den \mathcal{D} ye bir *kontravaryant fonktor* denir. Yani

$$H(g \circ f) = H(f) \circ H(g) \text{ dir.}$$

3.3 Doğal Transformasyonlar

Önceki bölümlerde bir objeyi başka bir obje ile ilişkilendiren yapı *morfizm* , bir kategoriye başka bir kategori ile ilişkilendiren yapı *funktor* olarak tanımlandı. Şimdi ise bir funktoru başka bir fonktor ile ilişkilendiren yapı olan doğal transformasyonları tanımlayacağız.

Tanım 5 G ve H , \mathcal{C} kategorisinden \mathcal{D} kategorisine fonktörler olsun.

DT1) \mathcal{C} kategorisinin bir objesi C olmak üzere, \mathcal{D} kategorisinin

$$\eta_A : G(C) \longrightarrow H(C)$$

olacak şekilde bir morfizm olmalıdır.

DT2) $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ için

$$\begin{array}{ccc} A & G(A) & \xrightarrow{\eta_A} & H(A) \\ f \downarrow & G(f) \downarrow & & \downarrow H(f) \\ B & G(B) & \xrightarrow{\eta_B} & H(B) \end{array}$$

diyagramı değişmeli olmalıdır.

şartlarını sağlayan $\eta : G \implies H$ oku, G den H ye bir doğal transformasyon olur.

Örnekler

1.) $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \text{Hlk}$ olmak üzere ; F birim fonktor ve G matris fonktoru olsun.

$\eta : 1_{\text{Hlk}} \longrightarrow \text{Mat}_{n \times n}(-)$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} \text{Hlk} & \xrightarrow{1_{\text{Hlk}}} & \text{Hlk} \\ & \xleftarrow{\text{Mat}_{n \times n}(-)} & \end{array}$$

diyagramı için

DT1) $H \sim$ halka ise

$$\begin{array}{ccc} \eta_H : H & \longrightarrow & \text{Mat}_{(n \times n)}(H) \\ & & \begin{array}{ccc} h & & o \\ & \searrow & \nearrow \\ & h & \\ & & \cdot \\ h & \longmapsto & \cdot \\ & & \begin{array}{ccc} o & & h \end{array} \end{array} \end{array}$$

bir halka homomorfizmidir.

DT2) $f : H \longrightarrow K$ halka homomorfizmi için

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\eta_H} & \text{Mat}_{n \times n}^{(H)} \\ f \downarrow & & \downarrow G(f) \\ K & \xrightarrow{\eta_K} & \text{Mat}_{n \times n}^{(K)} \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Çünkü;

$$\eta_K \circ f = G(f) \circ \eta_H \text{ dır.}$$

2.) F, G birim fonktörler ve $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ olsun.

$\eta : F \implies G$ alınırsa

$\eta : 1_{\mathcal{C}} \implies 1_{\mathcal{D}}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{D}$) birim doğal transformasyonu elde edilir.

3.4 Kategoriler Arasındaki İlişkiler

3.4.1 Kategorilerin İzomorfluğu

\mathcal{C} ve \mathcal{D} birer kategori olsun.

$$\mathcal{C} \cong \mathcal{D} \iff G \circ F = 1_{\mathcal{C}} \text{ ve } F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$$

şeklinde $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ fonktörleri tanımlanabiliyorsa, \mathcal{C} ve \mathcal{D} kategorilerine *izomorf kategoriler* denir ve $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ olarak gösterilir.

Örnek: $\mathcal{C} = \mathbb{Z}\text{-modül}$ kategorisi ile $\mathcal{D} = \text{Ab.Grp}$ kategorileri izomorfturlar.

3.4.2 Funktörlerin İzomorfluğu

\mathcal{C} ve \mathcal{D} herhangi iki kategori, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ birer fonktör olmak üzere, \mathcal{C} deki her bir A objesi için

$$\eta_A : F(A) \xrightarrow{\cong} G(A)$$

şeklinde tanımlanan morfizm bir izomorfizm olacak şekilde bir $\eta : F \implies G$ doğal transformasyonu varsa F ve G fonktörlerine *izomorftur* denir ve $F \cong G$ ile gösterilir.

Aralarında doğal transformasyon tanımlanabilen fonktörler *doğal denk fonktörler* olarak adlandırılır.

3.4.3 Kategorilerin Doğal Denkliği

\mathcal{C} ile \mathcal{D} iki kategori olmak üzere

$$1_{\mathcal{C}} \circlearrowleft \mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{F} \mathcal{D} \circlearrowright 1_{\mathcal{D}}$$

$$\mathcal{C} \approx \mathcal{D} \iff G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}} \text{ ve } F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$$

şeklinde $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörleri varsa, \mathcal{C} ve \mathcal{D} kategorilerine *denk kategoriler* denir ve $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$ şeklinde gösterilir.

Not: Kategorilerin denkliği sayesinde bazı alanlarda çözülemeyen problemler denk bir kategoride kolaylıkla çözülebilir.

Önerme: İki kategori izomorf \implies Doğal denktir.

Uyarı: Bu önermenin tersi doğru değildir. Yani doğal denk olan kategoriler izomorf olmak zorunda değildir.



4. SİMLİSEL KATEGORİLER

Giriş

Bir kategoride simplisel objeler oldukça önemlidir. Cebirsel topolojide simplisel objeler, bir uzayın singüler kompleksi olarak inşa edilmiştir. Şöyle ki;

X bir topolojik uzay olmak üzere

$$Sing(X)_n = (Top \Delta^n, X) \quad n \in \mathbb{N}$$

biçimindedir. Burada $Sing(X)$, kümeler ve dönüşümlerin bir koleksiyonunu ifade ederken Δ^n de topolojik n-simpleks olarak verilir. Bu durumda $\delta_i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$ ve $\sigma_i : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ dönüşümleri tarafından

$$d_i : Sing(X)_n \rightarrow Sing(X)_{n-1}$$

$$s_i : Sing(X)_n \rightarrow Sing(X)_{n+1}$$

yüzey ve dejenere dönüşümleri olarak adlandırılan dönüşümler elde edilir. Ayrıca bu dönüşümler

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \quad i < j \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & ; \quad i < j \\ d_i & ; \quad i = j \text{ veya } j + 1 \\ s_j d_{i-1} & ; \quad i > j + 1 \end{cases} \\ s_i s_j &= s_j s_{i-1} \quad i > j \end{aligned}$$

biçimindeki simplisel özdeşlikleri sağlar. Böylece genel olarak bir \mathcal{C} kategorisindeki simplisel obje, $Simp(\mathcal{C})$, $\{K_n : n \geq 0\}$ \mathcal{C} nin objelerinin bir ailesi olmak üzere

$d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$ ve $s_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$ biçiminde simplisel özdeşlikleri sağlayan dönüşümlerden oluşur.

Diğer taraftan, Δ ; objeleri $[n] = \{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$ ve morfizmleri $f : [n] \rightarrow [k]$ biçimindeki monoton fonksiyonlardan oluşan bir kategori olmak üzere \mathcal{C} kategorisindeki bir simplisel obje,

$Simp(\mathcal{C}), \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ biçiminde bir fonktor olarak da düşünülebilir.

Bu bölümde genel olarak $\mathcal{C} = Grp$ ve $\mathcal{C} = Ceb_R$ kategorilerinin simplisel objeleri olan simplisel gruplar ve simplisel cebirler üzerinde durulacaktır. Bu simplisel objelerle ilgili genel bilgiler için (Arvasi, 1994) , (Duskin, 1975) ve (Arvasi ve Porter, 1996) kaynaklarına bakılabilir.

Ayrıca $\mathcal{C} = AbGrp$ kategorisi için simplisel objeler yani simplisel Abelyan gruplar kategorisi, cebirsel topolojide oldukça önemli olan Dold-Kan teoreminden elde edilen zincir komplekslerin kategorisi ile denktir. (Quillen, 1967) Diğer taraftan $\mathcal{C} = Grp$ kategorisi için simplisel objeler yani simplisel gruplar kategorisi de tüm bağlantılı homotopi tipleri için bir model olarak düşünülebilir.(E.Curtis, 1971) Simplisel gruplarla ilgili birçok önemli sonuç Carrasco tarafından verilmiş ve Abelyan olmayan durumlar için Dold-Kan teoremi (P. Carrasco, 1991) çalışmasında genelleştirilmiştir.

4.1 $\Delta[n]$ Kategorisi

$n \geq -1, n \in \mathbb{Z}$ alınarak elde edilen $\{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$ kümesine bir *sıralı küme* denir. Bu kümeyi $[n]$ ile göstereceğiz. Burada $[-1]$ ile gösterilen eleman, *boş küme* olarak adlandırılır. Her sıralı küme aynı zamanda bir küçük kategori olarak düşünülebilir.

Şimdi sıralı kümeler arasında morfizmleri tanımlamalıyız:

$$[n] = \{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$$

olmak üzere herhangi iki sıralı küme arasındaki bir f dönüşümü, *sıra koruyan (monoton)* bir dönüşümdür. Yani;

$$f : [n] \rightarrow [k] \text{ monoton fonksiyonu } i \leq j \text{ iken } f(i) \leq f(j)$$

özelliğini sağlar. Bu dönüşümleri *operatör* olarak adlandıracağız.

Bu operatörleri detaylı incelemeye geçmeden önce iki özel operatör tanımlayalım. Öncelikle;

$\delta_i^n : [n - 1] \longrightarrow [n]$ operatörünü $0 \leq i \leq n \neq 0$ olmak üzere

$$\delta_i^n(x) : \begin{cases} x, & x < i \\ x + 1, & x \geq i \end{cases} \text{ şekilde tanımlayalım.}$$

Bu durumda;

$$[0] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2} \end{array} [1] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2} \\ \xrightarrow{\delta_3} \end{array} [2] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_2} \\ \xrightarrow{\delta_3} \end{array} [3] \dots$$

olacağı açıktır. Bu operatör *yüzey (face) operatörü* olarak adlandırılır.

Diğer operatör ise ;

$\delta_j^n : [n + 1] \longrightarrow [n]$ operatörünü $0 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$\delta_j^n(x) : \begin{cases} x, & x \leq j \\ x - 1, & x > j \end{cases} \text{ şekilde tanımlarsak}$$

$$[0] \begin{array}{c} \xleftarrow{\delta_0} \\ \xleftarrow{\delta_1} \\ \xleftarrow{\delta_2} \end{array} [1] \begin{array}{c} \xleftarrow{\delta_0} \\ \xleftarrow{\delta_1} \\ \xleftarrow{\delta_2} \end{array} [2] \begin{array}{c} \xleftarrow{\delta_1} \\ \xleftarrow{\delta_2} \end{array} [3] \dots$$

olacağı görülür. Bu operatör *dejenere (degeneracy) operatörü* olarak adlandırılır.

Bu operatörlerin i ve j nin farklı değerlerine göre farklı davranışlarını inceleyecek olursak;

δ_i^n operatöründe i nin aldığı değerlerin görüntü kümesinde yer almadığı yani δ_i^n nin tanımına göre δ_i^n operatörünün birebir bir dönüşüm olduğu görülür.

Aynı inceleme δ_j^n operatörü için yapılacak olursa j hangi değeri alırsa o değere, tanım kümesinden iki farklı elemanın karşılık geldiği görülür. Yani δ_j^n operatörünün tanımına göre δ_j^n operatörünün örten bir dönüşüm olduğu görülür. Şimdi bu bilgiler yardımıyla $\Delta[n]$ kategorisi tanımlayabiliriz.

Objeler; $[n]$ küçük kategorileri

Morfizmler; $f : [n] \longrightarrow [m]$ operatörleri yani

$Mor([n], [m]) = \{f \mid f : [n] \longrightarrow [m] \text{ operatörleri} \}$ biçimindedir.

Kompozisyon; $[n], [m], [k]$ küçük kategoriler olmak üzere

$$\begin{aligned} Mor([n], [m]) \times Mor([m], [k]) &\longrightarrow Mor([n], [k]) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

olarak alınırsa;

(i) $([k], [l], [m], [n])$ küçük kategorileri için ;

$$\begin{array}{ccc} [k] & \xrightarrow{ho(gof)=(hog)of} & [n] \\ f \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \uparrow h \\ [l] & \xrightarrow{g} & [m] \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

(ii) $f : [k] \longrightarrow [m]$ morfizmi

$$\begin{array}{ccc} [k] & \xrightarrow{f} & [m] \\ f \downarrow & \swarrow id_{[m]} \text{ dotted} & \uparrow f \\ [m] & \xleftarrow{[f]} & [k] \end{array}$$

$id_{[m]} \circ f = f = f \circ id_{[m]}$ eşitliğini sağlar.

Böylece $\Delta[n]$ kategorisini elde ederiz. Şimdi ilk bölümde bahsettiğimiz *dual kategori* yardımıyla $\Delta[n]$ kategorisinin dual kategorisinden söz edebiliriz.

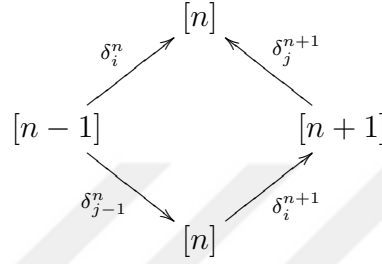
Objeleri sıralı kümeler, morfizmleri $\Delta[n]$ kategorisinin morfizmlerinin ters yönlü hali olan morfizmler, kompozisyonları da bu morfizmlerin birleşimi olan kategoriye $\Delta[n]$ kategorisinin "*dual kategorisi*" denir ve $\Delta^{op}[n]$ ile gösterilir.

Şimdi verdiğimiz özel operatörler yardımıyla tanımlanan ve *simplisel özdeşlikler* olarak adlandırılan bazı eşitlikleri elde edelim:

Yardımcı Teorem 1 δ_j^n ve σ_j^n morfizmleri aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir.

i) $0 \leq i < j < n + 1$ olmak üzere $\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n$ dir.

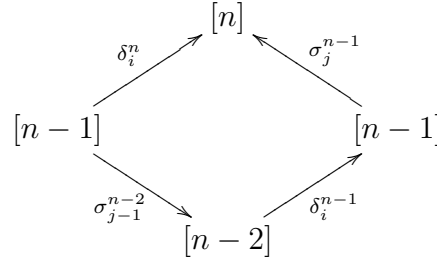
Yani;



diyagramı değişmelidir.

ii) $0 \leq i < j < n - 1$ olmak üzere $\sigma_j^{n-1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n-1} \circ \sigma_{j-1}^{n-2}$ dir.

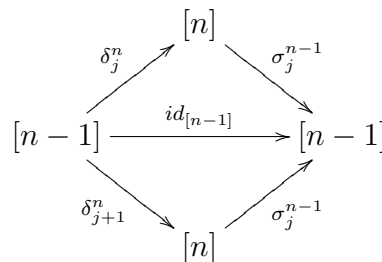
Yani;



diyagramı değişmelidir.

iii) $0 \leq j < n - 1$ olmak üzere $\sigma_j^{n-1} \circ \delta_j^n = id_{[n-1]}$ dir.

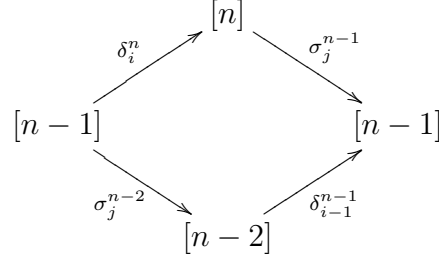
Yani;



diyagramı değişmelidir.

iv) $0 < j + 1 \leq n$ olmak üzere $\sigma_j^{n-1} \circ \delta_i^n \circ \sigma_j^{n-2}$ dir.

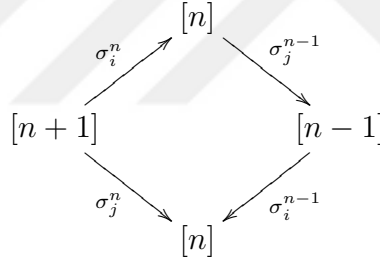
Yani;



diyagramı değişmelidir.

v) $0 \leq i \leq j \leq n - 1$ olmak üzere $\sigma_j^{n-1} \circ \sigma_i^{n-1} \circ \sigma_{j+1}^n$ dir.

Yani;



diyagramı değişmelidir.

Örnek: X topolojik uzay olmak üzere

$Sing(X)_n = (Top \Delta^n, X)$ $n \in \mathbb{N}$ olarak alınırsa

$d_i : Sing(X)_n \rightarrow Sing(X)_{n-1}$ $0 \leq i \leq n$

$s_i : Sing(X)_n \rightarrow Sing(X)_{n+1}$ $0 \leq i \leq n$

yüzey ve dejenere dönüşümleri simplisel özdeşlikleri sağlar. Dolayısıyla $K : \Delta^{op} \rightarrow K\text{üme}$ biçiminde bir simplisel küme elde edilir.

Örnek: X bir küme ve $K(x, 0)_n = x$, $d_i = s_i = 1_x$ olarak alınırsa $K(x, 0)$ ile gösterilen bir simplisel küme elde edilir.

4.2 Simplisel Gruplar Kategorisi

Önceki bölümden hatırlayacak olursak $\Delta^{op}[n]$ kategorisi

$$\Delta^{op}[n] : \cdots [2] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2} \\ \xleftarrow{\sigma_0} \\ \xleftarrow{\sigma_1} \end{array} [1] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xleftarrow{\sigma_0} \end{array} [0]$$

biçiminde gösterilen bir küçük kategoridir.

$\Delta^{op}[n]$ kategorisinden gruplar kategorisine tanımlanan fonktor, bir \mathbf{G} simplisel grubu belirtir. Bunu açık olarak yazarsak $\Delta^{op}[n] \xrightarrow{G} Grp$

$n \in \mathbb{N}$ için (G_n) grupların bir ailesi,

$$d_i^n : G_n \longrightarrow G_{n-1} \quad 0 \leq i \leq n \neq 0 \quad (d_i \sim \text{yüzey operatörü})$$

$$s_j^n : G_n \longrightarrow G_{n+1} \quad 0 \leq i \leq n \quad (s_j \sim \text{dejenere operatörü})$$

grup homomorfizmleri olmak üzere;

$$G(\delta_i) = d_i, G(\sigma_j) = s_j$$

şeklinde bir fonktor tanımlanır, bir simplisel \mathbf{G} grubu:

$$\mathbf{G} : \cdots G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{s_1} \end{array} G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{array} G_0$$

şeklinde gösterilir.

δ_i ve σ_j operatörleri ve bu operatörlerin görüntüleri olan d_i ve s_j homomorfizmleri simplisel özdeşlikleri sağlar. Uygulama kolaylığı açısından bu özdeşliklerin düzenlenmesi ile oluşan aşağıdaki özdeşlikler daha çok kullanılır.

$$d_i d_j = d_j d_{i+1}, \quad 0 \leq j \leq i \leq n$$

$$s_i s_j = s_j s_{i-1}, \quad 0 \leq j \leq i \leq n$$

$$s_i d_j = d_j s_{i+1}, \quad j \leq i$$

$$s_i d_j = d_{j+1} s_i, \quad i > j$$

Tanım 6 Bir G simplisel grubu için $y \in G_n$ elemanları, n -boyutlu simpleks belirtir. Aynı zamanda bazı z elemanları için $y = s_i(z)$ eşitliği sağlanıyorsa y simpleksi de dejenere bir simplekstir.

Tanım 7 $f_n : G_n \longrightarrow F_n$ grup homomorfizmlerinin bir ailesi, her d_i^n yüzey operatörü ve her s_i^n dejenere operatörü ile birleşmeli oluyorsa, yani;

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \quad f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

eşitliklerini sağlıyorsa, G ve F simplisel grupları arasında bir homomorfizm olarak adlandırılır.

Böylece $SimpGrp$ ile göstereceğimiz simplisel grup kategorisi tanımlanmış olur.

4.2.1 Bir Simplisel Grubun Moore Kompleksi ve Homotopi Modülü

G simplisel bir grup olmak üzere, G nin Moore kompleksi

$$(NG)_n = \bigcap_{i=0}^n \text{çek } d_i^m$$

şeklinde tanımlı bir zincir kompleksidir. Burada her $n \geq 0$ için,

$\partial_n : NG_n \longrightarrow NG_{n-1}$ dönüşümü, $d_n^n : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ dönüşümünün NG_n kümesine kısıtlanmasıdır.

Yani

$$(NG, \partial) : \cdots NG_2 \xrightarrow{d_2^2} NG_1 \xrightarrow{d_1^1} NG_0 = G_0 \text{ dır.}$$

G simplisel grubunun Moore kompleksinin n .homolojisine G nin n .homotopi modülü denir ve $\Pi_n(G)$ ile gösterilir. Yani

$$\begin{aligned} \Pi_n(G) &\cong H_n(NG, \partial) \\ &\cong \bigcap_{i=0}^n \text{Çek } d_i^m / d_{n+1}^{m+1}(\text{Çek } d_i^{m+1}) \text{ dir.} \end{aligned}$$

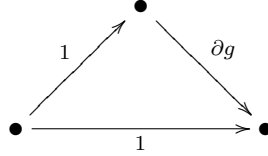
Bknz (J.P, 1967)

NG ve $\Pi_n(G)$ için şu şekilde bir yorum yapabiliriz :

$n = 1$ için, $g \in NG_1$ olmak üzere

$$\dot{1} \longrightarrow \dot{\partial}_g \text{ dir.}$$

$g \in NG_2$ olmak üzere



dir. Dolayısıyla

$g \in NG_2$, $Ker \partial$ da bir eleman olarak düşünülebilir. Böylece 3-simplekse karşılık $\Pi_2(G)$ nin aşikar elemanı elde edilir.

Bu basit yorum, NG ve $\Pi_n(G)$ arasında diğer elemanları için de yorum yapmamıza yardımcı olur. Böylece yukarıda ifade edilen homotopi grupları cebirsel olarak ilişkili kompleksin homolojisi olarak düşünülebilir.

4.2.2 Kısıtlanmış Simplisel Gruplar

Tanım 8 G bir simplisel grup olmak üzere, G de boyutu k dan büyük olan G_n elemanları yok sayılarak oluşturulan kompleks G simplisel grubunun bir k -kısıtlanmış simplisel grubu olur ve $tr_k G$ şeklinde gösterilir. Bu grupların oluşturduğu kategoriye de k -kısıtlanmış gruplar kategorisi denir ve $Tr_k \text{SimpGrup}$ ile gösterilir.

Burada,

$$tr_k : \longrightarrow Tr_k \text{SimpGrup}$$

şeklinde tanımlı bir kısıtlama fonktörü, bu fonktörün da;

$$\cos k_k : Tr_k \text{SimpGrup} \longrightarrow \text{SimpGrup}$$

şeklinde gösterilen ve *koskelet fonktor* olarak adlandırılan bir sağ ek fonktörü ve

$$Sk_k : Tr_k \text{SimpGrup} \longrightarrow \text{SimpGrup}$$

şeklinde gösterilen ve *skelet fonktor* olarak adlandırılan bir sol ek fonktörü vardır.

4.3 Simplisel Cebirler Kategorisi

$\Delta^{op}[n]$ kategorisinden değişmeli k -cebirlerin kategorisine tanımlanan fonktor, bir simplisel cebir yapısı oluşturur. $\Delta^{op}[n]$ kategorisinden söz etmiştik, şimdi *değişmeli cebirler kategorisini* tanımlayalım:

Tanım 9 R birimli-değişmeli halka ve (A, \oplus) bir Abelyan grup olsun. $k, l \in R$ ve $x, y \in A$ için;

1. $k(x \oplus y) = kx \oplus ky$
2. $(k + l)x = kx + lx$
3. $(k.l)x = k(lx)$
4. $1 \in R$ için $1.x$

özellikleri sağlanıyorsa A ya bir R -modül denir.

Eğer (A, \oplus, \odot) değişmeli halka olmak üzere

$$r(a \odot b) = ra \odot b = a \odot rb$$

şartını sağlıyorsa $A \sim R$ modülüne R -cebir denir ve Ceb ile gösterilir.

Bir E simplisel cebiri $\Delta^{op}[n]$ 'den Ceb kategorisine bir funktordur. Bunu açık yazarsak

$$E([n]) = E_n, E(\delta_i^n) = d_i^n, E(\sigma_j^n) = s_j^n$$

olmak üzere, bir E simplisel cebiri şematik olarak

$$\mathbf{E} : \cdots E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^2} \\ \xrightarrow{d_1^2} \\ \xrightarrow{d_2^2} \\ \xleftarrow{s_0^1} \\ \xleftarrow{s_1^1} \end{array} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^1} \\ \xrightarrow{d_1^1} \\ \xleftarrow{s_0^0} \end{array} E_0$$

biçimindedir.

δ_i ve σ_j operatörleri, simplisel özdeşlikleri sağlayan operatörlerdir. E yapı koruyan bir morfizm olduğu için d_i^n ve s_j^n operatörleri de simplisel özdeşlikleri sağlar.

Tanım 10 E ve F birer simplisel cebir ve $s : E \rightarrow F$ simplisel cebir morfizmi olsun.

$$E : \Delta^{op}[n] \rightarrow Ceb \text{ ve } F : \Delta^{op}[n] \rightarrow Ceb$$

funktorları arasındaki doğal transformasyondur.

Yani $[n], [m] \in \Delta^{op}[n]$ olmak üzere bir $f : [n] \rightarrow [m]$ operatörü için

$$\begin{array}{ccc} E([n]) & \xrightarrow{E(f)} & E([m]) \\ s[n] \downarrow & & \downarrow s[m] \\ F([n]) & \xrightarrow{F(f)} & F([m]) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapacak

$$s_{[n]} : E([n]) \rightarrow F([n]) \text{ ve } s_{[m]} : E([m]) \rightarrow F([m]) \text{ cebir morfizmleri vardır.}$$

Dolayısıyla E ve F simplisel cebirleri için, $f_n : E_n \rightarrow F_n$ k -cebir homomorfizmleri olmak üzere

$$d_i^n f_n = f_{n-1} d_i \text{ ve } f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

eşitliklerini sağlayan f_n homomorfizmlerinin bir ailesine, $f = (f_n)$, E den F ye bir cebir morfizmi denir.

Böylece $SimpCeb$ ile göstereceğimiz simplisel cebir kategorisini tanımlayabiliriz.

4.3.1 Bir Simplisel Cebirin Moore Kompleksi ve Homotopi Modülü

Tanım 11 E simplisel cebirinin Moore kompleksi (NE, ∂)

$$NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{çek } d_i^m$$

şeklinde bir zincir kompleksidir.

Burada,

$\partial_n : NE_n \longrightarrow NE_{n-1}$ diferansiyelleri, d_n^m kısıtlaması ile tanımlıdır. Şöyle ki;

$$(NE, \partial) : \cdots NE_2 \xrightarrow{d_2^1} NE_1 \xrightarrow{d_1^1} NE_0 = E_0$$

şeklinde dir.

Simplisel özdeşlikler kullanılarak

$$\partial_{n+1} \cdot \partial_n = 0 \text{ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir.}$$

Burada;

$$NE_0 = E_0$$

$$NE_1 = \text{Çek} d_0^1$$

$$NE_2 = \text{Çek} d_0^2 \cap \text{Çek} d_1^2$$

$$NE_3 = \text{Çek} d_0^3 \cap \text{Çek} d_1^3 \cap \text{Çek} d_2^3$$

şeklinde tanımlıdır.

4.3.2 Kısıtlanmış Simplisel Cebirler

Tanım 12 E bir simplisel cebir olmak üzere E de mertebesi k dan büyük olan E_n elemanları yok sayılarak bulunan kompleks E simplisel cebirinin bir k -kısıtlanmış simplisel cebiri olarak adlandırılır ve $Trk E$ şeklinde gösterilir. k -kısıtlanmış cebirlerin oluşturduğu kategoriye de k -kısıtlanmış cebirler kategorisi denir ve $Trk SimpCeb$ ile gösterilir.

Burada $tr_k : \text{SimpCeb} \rightarrow Tr_k \text{SimpCeb}$ şeklinde tanımlı bir kısıtlama fonktoru, bu fonkturun da,

$$\cos k_k : Tr_k \text{SimpCeb} \rightarrow \text{SimpCeb}$$

şeklinde gösterilen ve *k-koiskelet fonktor* olarak adlandırılan bir sağ ek fonktoru ve,

$$Sk_k : Tr_k \text{SimpCeb} \rightarrow \text{SimpCeb}$$

şeklinde gösterilen ve *k-iskelet fonktor* olarak adlandırılan bir sol ek fonktoru vardır.



5. 2-BOYUTLU GRUP: ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL

Giriş

Cebirsel topolojinin temel problemlerinden bir tanesi X ve Y uzayları arasındaki dönüşümlerin homotopi sınıflarının, $[X, Y]$, hesaplanması problemidir.

Bu problemi çözmek için

$$\pi : (\text{Topoloji Kategorisi}) \longrightarrow (\text{Cebir Kategorisi})$$

funktoru kullanılır. Böylece topolojik bir probleme cebirsel bir model belirlenmiş olur.

X ve Y nokta bağlantılı CW-uzayları (pointed-connected CW-spaces) ve X ; 1-boyutlu uzay ise

$$\pi([X, Y]) = (\pi_1(X), \pi_1(Y))$$

biçiminde olup burada $\pi_1(X), \pi_1(Y)$ temel grup olarak elde edilen cebirsel yapılardır. Dolayısıyla X den Y ye giden dönüşümlerin homotopi sınıflarının hesaplanması problemi, $\pi_1(X)$ ve $\pi_1(Y)$ grupları arasındaki homomorfizmlerin konjuge sınıflarının hesaplanması problemine dönüşür. Böylece grup cebirsel yapısı 1-boyutlu objelere karşılık gelen bir cebirsel modeldir.

Benzer şekilde X ve Y uzayları connected cw-spaces ve X ; 2-boyutlu bir uzay ise

$$\pi([X, Y]) = (\pi_2(X, A) \longrightarrow \pi_1(A))$$

elde edilir. Burada $\pi_2(X, A) \longrightarrow \pi_1(A)$ bazı özel şartları sağlayan bir grup homomorfizmidir. Bu elde edilen cebirsel model de *çaprazlanmış modül* olarak adlandırılır.

Böylece çaprazlanmış modüller 2-boyutlu objelere karşılık gelen bir cebirsel model olur. Whitehead, Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramını ilk kez 1949 yılında cebirsel bir model olarak tanımlamış ve relatif homotopi grupları üzerine yaptığı çalışmasında kullanmıştır. (Whitehead, 1949) Sonrasında bu kavram cebir yapısı için de tanımlanmıştır. Porter (1985) değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı üzerine çalışmıştır. Lichtenbaum, Gerstanhaber (1966) ve Schlessinger (1967) cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısına farklı bir şekilde yer vermiştir. Bunun yanı sıra T.Porter ve Z.Arvasi ve çalışmalarında değişmeli cebirler üzerine çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. (Arvasi ve Porter, 1996; Arvasi ve Porter, 1997; T.Porter, 1986) Bu bölümde biz de bu kaynakların yanısıra Doç.Dr.Ummuhan Ege'nin master ve doktora tezlerinden yararlanarak öncelikle gruplar üzerinde çaprazlanmış modül yapısını verip temel özellikleri üzerinde duracağız. (Ege, 1998; Ege, 2007) Daha sonra da benzer durumu cebir yapısı üzerinde inceleyeceğiz.

5.1 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

5.1.1 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Öncelikle bir grubun bir başka grup üzerine etkisini tanımlayalım.

5.1.2 Grubun Grup Üzerine Etkisi

G ile H birer grup olsun.

$$\begin{aligned} G \times H &\longrightarrow H \\ (g, h) &\longmapsto g_h \end{aligned}$$

fonksiyonu

1. $g_1, g_2 \in G$ ve $h \in H$ olmak üzere $(g_1 g_2)_h = g_1(g_2 h)$
2. $h_1, h_2 \in H$ ve $g \in G$ için $g_{h_1 h_2} = g_{h_1} g_{h_2}$
3. e_G, G nin birimi olmak üzere $(e_G)_h = h$
4. e_H, H nin birimi olmak üzere $g_{e_H} = e_H$

şartlarını sağlıyorsa G grubu H grubuna sağdan etki eder denir. Benzer şekilde sol etki de tanımlanabilir.

Şimdi gruplar üzerinde çaprazlanmış modül yapısını tanımlayalım.

Tanım 13 G ile H herhangi iki grup olmak üzere $\partial : H \rightarrow G$ bir grup homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} G \times H &\longrightarrow H \\ (g, h) &\longmapsto g_h \end{aligned}$$

biçimindeki G nin H üzerindeki etkisiyle birlikte $\forall g \in G$ ve $h, h' \in H$ için

CM1) $\partial(g_h) = g\partial(h)g^{-1}$ özelliğini sağlıyorsa (H, G, ∂) üçlüsüne ön-çaprazlanmış modül denir.

Ayrıca

CM2) $\partial(h)_{h'} = hh'h^{-1}$ olacak şekilde Peiffer özdeşliği sağlanıyorsa (H, G, ∂) üçlüsüne çaprazlanmış modül denir.

Örnekler

1. $N \trianglelefteq H$ olmak üzere $F : N \hookrightarrow H$ içine homomorfizmi, H nin N üzerine etkisi

$$\begin{aligned} H \times N &\longrightarrow N \\ (h, n) &\longmapsto h_n = hnh^{-1} \end{aligned}$$

olmak üzere, bu etki ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Şöyle ki ;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad i(h_n) &= h_n \\ &= hnh^{-1} \\ &= hi(n)h^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \quad i(n)_{n'} &= n_{n'} \\ &= nn'n^{-1} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece (N, H, i) bir çaprazlanmış modül belirtir.

Tersine (N, H, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $\partial(N) \trianglelefteq H$ dir. Çünkü $\forall h \in H, \forall \partial(n) \in \partial(N)$ için

$$h\partial(n)h^{-1} = \partial(h_n) \in \partial(N) \text{ dir.}$$

Sonuç: Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller, normal alt grupların bir genellemesidir.

$\mathbb{Z}G$ -modül kavramının tanımını hatırlayalım.

Tanım 14 ($\mathbb{Z}G$ -modül)

$$G = (\{g_i \mid i \in I\}, \cdot)$$

herhangi bir grup ve \mathbb{Z} birimli değişmeli halka olmak üzere, $\mathbb{Z}G$ sonlu sayıda a_i hariç $a_i = 0, a_i \in \mathbb{Z}$ ve $g \in G$ için

$$\sum_{i \in I} a_i g_i$$

şeklinde bütün formal toplamların kümesidir.

$\mathbb{Z}G$ kümesi

$$\sum_{i \in I} a_i g_i + \sum_{i \in I} b_i g_i = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) g_i$$

şeklinde tanımlı toplama işlemi altında, $\sum_{i \in I} a_i g_i$ birimli bir abelyan grup yapısına sahiptir. Sonlu sayıda a_i, b_i sıfırdan farklı olduğundan, sonlu sayıda $(a_i + b_i)$ toplamı da sıfırdan farklıdır ve $\sum_{i \in I} a_i g_i \in \mathbb{Z}G$ dir. $\mathbb{Z}G$ üzerinde çarpma işlemi ise

$$\left(\sum_{i \in I} a_i g_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i g_i \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k \right) g_k$$

şeklinde tanımlıdır. $\sum_{i \in I} a_i g_i$ toplamını $\sum_{i \in I} b_i g_i$ toplamı üzerine dağıtarak, $g_j g_k = g_i \in G$ olmak üzere bir $a_j g_j b_k g_k$ terimini $a_j b_k g_k$ ile yeniden ifade edebiliriz. Sonlu sayıda a_i, b_i hariç $a_i \cdot b_i = 0$ olduğundan $\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k$ toplamı, sadece sonlu sayıda sıfırdan farklı $a_j b_k \in \mathbb{Z}$ toplamlarını içerir ve bu toplam \mathbb{Z} 'nin elemanıdır.

Ayrıca sonlu sayıda $\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k$ toplamları sıfırdan farklıdır. Böylece çarpım $\mathbb{Z}G$ üzerinde kapalıdır.

Böylece $\mathbb{Z}G$, G nin elemanları tarafından üretilen serbest \mathbb{Z} -modül olmak üzere, G üzerinde tanımlı çarpım

$$\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}G$$

\mathbb{Z} -bilineer çarpımına tek türlü genişler. Dolayısıyla $\mathbb{Z}G$ bir halka yapısı oluşturur. Bu halkaya, G nin *tamlık (integral) grup halkası* denir.

2. K bir grup ve

$$G = \{f_k : f_k : K \longrightarrow K ; f_k(k') = kk'k^{-1}\}$$

kümesi, fonksiyonlardaki bileşke işlemlerle bir grup olup

$$\begin{aligned} \partial : K &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto f_k \text{ homomorfizmi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \times K &\longrightarrow K \\ (f_k, k) &\longmapsto (f_k)_{k'} = kk'k^{-1} \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad \partial((f_k)_{k'}) &= \partial(kk'k^{-1}) \\ &= \partial(k)\partial(k')\partial(k^{-1}) \\ &= f_k\partial(k')f_k^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \quad \partial(k)_{k'} &= (f_k)_{k'} \\ &= kk'k^{-1} \text{ dır.} \end{aligned}$$

3. M , bir $\mathbb{Z}G$ -modül olmak üzere

$$\begin{aligned}\partial & : M \longrightarrow G \\ m & \longmapsto e_G\end{aligned}$$

aşık homomorfizmi

$$\begin{aligned}G \times M & \longrightarrow M \\ (g, m) & \longmapsto g_m = gm\end{aligned}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Şöyle ki;

$$\begin{aligned}\text{ÇM1) } \partial(g_m) & = \partial(gm) \\ & = e_G \\ & = ge_Gg^{-1} \\ & = g\partial(m)g^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ÇM2) } \partial m_{m'} & = e_{G_{m'}} \\ & = m' \\ & = m'mm^{-1} \\ & = mm'm^{-1} \text{ (} M \sim \text{Abelyan grup) dir.}\end{aligned}$$

Böylece (M, G, ∂) çaprazlanmış modülü oluşur.

Tersine (C, G, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $\text{Çek}\partial$ bir $G/\partial(C)$ modüldür. Burada

$$\begin{aligned}G/\partial(C) \times \text{Ker}\partial & \longrightarrow \text{Ker}\partial \\ (g\partial(c) \text{ , } a) & \longmapsto ga\end{aligned}$$

etkisiyle modül şartları sağlanır.

Sonuç: Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller, modüllerin bir genellemesidir.

Şimdi çaprazlanmış modül morfizmlerini tanımlayalım:

Tanım 15 (C, G, ∂) ve (C', G', ∂') birer çaprazlanmış modül olmak üzere

$\varphi : C \longrightarrow C'$, $\psi : G \longrightarrow G'$ grup homomorfizmleri

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & C' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ G & \xrightarrow{\psi} & G' \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani

$$\psi\partial = \partial'\varphi \quad \text{olacak şekilde ve}$$

$$\begin{array}{ccc} G \times C & \xrightarrow{(\psi, \varphi)} & G' \times C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\varphi} & C' \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani

$$\varphi(g_c) = \psi(g)_{\varphi(c)} \quad \text{olacak şekilde varsa}$$

$(\varphi, \psi) : (C, G, \partial)$ ve (C', G', ∂') morfizmleri birer çaprazlanmış modül morfizmi olur.

Sonuç: Bu bilgiler kullanılarak; objeleri çaprazlanmış modüller ve morfizmleri çaprazlanmış modül morfizmleri olacak şekilde yeni bir kategori elde edilir. Bu kategori $XMod_{Grp}$ şeklinde gösterilir.

5.1.3 Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

İlk olarak gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modül kavramı, daha sonra cebirsel yapılar için de tanımlanmıştır. Değişmeli cebirlerde çaprazlanmış modül yapısını T.Porter tanımlamıştır.(Arvasi ve Porter, 1996) Ayrıca literatürde Lichtenbaum-Schlessinger ve Gerstenhaber'in asosyatif ve değişmeli cebirler ile ilgili önemli çalışmaları mevcuttur.

Öncelikle R -modül kavramını hatırlayalım.

Tanım: R bir halka ve $(M, +)$ bir Abelyan grup olmak üzere

$$\begin{aligned} \bullet & ; R \times M \longrightarrow M \\ (r, m) & \longmapsto r \bullet m \end{aligned}$$

etki işlemiyle birlikte

$$1. r \bullet (m_1 + m_2) = r \bullet m_1 + r \bullet m_2$$

$$2. (r_1 + r_2) \bullet m = r_1 \bullet m + r_2 \bullet m$$

$$3. (r_1 \bullet r_2) \bullet m = r_1(r_2 \bullet m)$$

şartları sağlanıyorsa M ye bir sol R -modül denir.

Uyarı: R değişmeli halka ise M ye R -modül denir. R birimli halka ise $1_R \bullet m = m$ şartı eklenmelidir.

Tanım 16 H ve K birer halka olsun.

$$\begin{aligned} \bullet & ; H \times K \longrightarrow K \\ (h, k) & \longmapsto h \bullet k \end{aligned} \quad \text{etkisiyle birlikte}$$

$$1. h \bullet (k_1 + k_2) = k_1 \bullet h + k_2 \bullet h$$

$$2. (h_1 + h_2) \bullet k = h_1 \bullet k + h_2 \bullet k$$

$$3. (h_1 \bullet h_2) \bullet k = h_1(h_2 \bullet k)$$

$$4. h \bullet (k_1 k_2) = h \bullet k_1 + h \bullet k_2$$

şartları sağlanıyorsa K ya R -cebir denir. Kısaca (4) şartını sağlayan K ya R -modülüne bir R -cebir denir.

Şimdi iki cebirin birbiri üzerine etkisini tanımlayalım;

5.1.4 Cebirin Cebir Üzerine Etkisi

Tanım 17 H bir değişmeli halka, K ve R de değişmeli k -cebirler olsun.

$$\begin{aligned} g : K \times R &\longrightarrow K \\ (k, r) &\longmapsto g(k, r) = k.r \end{aligned}$$

fonksiyonu her $h \in H, k, k' \in K, r, r' \in R$ için,

1. $h(k.r) = (hk).r = r.(hk)$
2. $k.(r + r') = k.r + k.r'$
3. $(k + k').r = k.r + k.r'$
4. $k.(rr') = (k.r)r' = r(k.r')$
5. $(kk').r = k.(k'.r)$

eşitliklerini sağlıyorsa, g fonksiyonu K nın R üzerindeki *değişmeli cebir etkisi* olarak adlandırılır.

Tanım 18 k bir değişmeli halka, T bir k -cebir ve C bir R -cebir olsun.

$$\begin{aligned} T \times C &\longrightarrow C \\ (t, c) &\longmapsto t.c \end{aligned} \quad \text{etkisiyle birlikte} \quad \partial : C \longrightarrow T \quad \text{cebir homomorfizmi}$$

$$\text{ÇM1)} \partial(t.c) = t\partial(c)$$

$$\text{ÇM2)} \partial cc' = cc'$$

şartları sağlanıyorsa (C, T, ∂) yapısı bir çaprazlanmış modül belirtir.

Örnek: S bir k -cebiri ve $I \trianglelefteq S$ olsun.

$$\begin{aligned} i : I &\longrightarrow S \\ c &\longmapsto c \quad \text{homomorfizmi ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \times I &\longrightarrow I \\ (s, c) &\longmapsto s.c = sc \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı elde edilir. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad i(s.c) &= i(sc) \\ &= sc \\ &= si(c) \end{aligned}$$

$$\text{ÇM2)} \quad i(c)c' = c.c' = cc' \text{ dır.}$$

Dolayısıyla, (I, S, i) bir çaprazlanmış modül belirtir.

Tersine, (C, S, ∂) bir çaprazlanmış modül ise $\partial(C) \trianglelefteq S$ dır. Çünkü

$$\forall \partial(c) \in \partial(C), \forall s \in S \text{ için}$$

$$s \partial(c) = \partial(s.c) \in \partial(C) \text{ ve } \partial(c).s = \partial(c.s) \in \partial(C) \text{ dır.}$$

Sonuç: Cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller, ideallerin bir genellemesidir.

Örnek: S , bir R -modül olmak üzere

$$\begin{aligned} S \times S &\longrightarrow S \\ (s_1, s_2) &\longmapsto s_1 \cdot s_2 = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir çarpım fonksiyonu tanımlanırsa, S bir R -cebir yapısı oluşturur. Şöyle ki

$$\begin{aligned} \partial : S &\longrightarrow R \\ s &\longmapsto 0_R \end{aligned}$$

homomorfizmi,

$$\begin{aligned} R \times S &\longrightarrow S \\ (r, s) &\longmapsto r \cdot s \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Şöyle ki;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad i(r \cdot s) &= 0_R \\ &= r0_R \\ &= r\partial(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \quad \partial(s)s' &= 0_R \cdot s' \\ &= 0_R \\ &= ss' \text{ dır.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla (S, R, ∂) bir çaprazlanmış modül belirtir.

Tersine (C, S, ∂) bir çaprazlanmış modül olmak üzere, $\text{Çek}\partial$ bir $R/\partial(C)$ -modül yapısı oluşturur.

Sonuç: Çaprazlanmış modüller, modüllerin bir genellemesidir.

Örnek: S , bir k -cebir olmak üzere her $s, s' \in S$ için

$R = \{h_s : S \longrightarrow S, h_s(s') = ss'\}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \partial &: S \longrightarrow R \\ s &\longmapsto h_s \end{aligned}$$

cebir homomorfizmi,

$$\begin{aligned} R \times S &\longrightarrow M \\ (h_s, s') &\longmapsto (h_s) = ss' \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül oluşturur. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad \partial((h_s)s') &= \partial(ss') \\ &= \partial(s)\partial(s') \\ &= h_s \partial(s') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \quad \partial_s \cdot s' &= h_s \cdot (s') \\ &= ss' \text{ dir.} \end{aligned}$$

Tanım 19 (C, R, ∂) ve (C', R', ∂') birer çaprazlanmış modül olsun. Eğer $\alpha : C \longrightarrow C'$, $\beta : R \longrightarrow R'$ cebir homomorfizmleri

i)

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & C' \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow{\beta} & R' \end{array}$$

$$\beta\partial = \partial'\alpha \quad \text{ve}$$

ii)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times C & \xrightarrow{(\alpha, \beta)} & R' \times C' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{\alpha} & C'
 \end{array}$$

$$\alpha(r.c) = \beta(r). \alpha(c)$$

şartlarını sağlıyorsa $(\alpha, \beta) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$ morfizmine, *çaprazlanmış modül morfizmi* denir.

Sonuç: Bu bilgiler kullanılarak; objeleri çaprazlanmış modüller ve morfizmleri çaprazlanmış modül morfizmleri olacak şekilde yeni bir kategori elde edilir. Bu kategori $XMod_{Ceb}$ şeklinde gösterilir.

6. SİMLİSEL KATEGORİLERE DENK KATEGORİLER

Giriş

$C = (C, P, \partial)$ bir çaprazlanmış modülünün $K(C)$, simplisel grubunu elde edelim:

$$\begin{aligned}(KC)_0 &= P \\(KC)_1 &= C \rtimes P \quad d_0 = t, d_1 = s \\(KC)_2 &= C \rtimes (C \rtimes P),\end{aligned}$$

$d_0(c_2, c_1, p) = (c_2, \partial c_1, p)$, $d_1(c_2, c_1, p) = (c_2 \cdot c_1, p)$ ve $d_2(c_2, c_1, p) = (c_1, p)$ olmak üzere $K(C)_n = C \rtimes (\dots \rtimes (C \rtimes P) \rtimes \dots)$, $0 < i < n$ için d_i ler C deki çarpımlar, d_0 ; t den indirgenmiş dönüşüm ve d_n ler de projeksiyon olarak alınırsa $K(C)$ simplisel grubu elde edilir. Buradan $K(C)$ nin Moore Kompleksi,

$$NK(C)_i = 1 \quad i \geq 2; \quad NK(C)_1 \cong C; \quad NK(C)_0 \cong P \quad \text{biçiminde olup}$$

$\partial : NK(C)_1 \longrightarrow NK(C)_0 \cong P$ yani $\partial : C \longrightarrow P$ çaprazlanmış modül yapısı oluşur.

Tersine G bir simplisel grup iken G nin Moore Kompleksinin son iki terimini alırsak

$$\partial : NG_1 \longrightarrow NG_0 = G_0$$

olmak üzere G_0 in NG_1 üzerine $s_0(g) \times s_0(g)^{-1}$ biçimindeki konjuge etkisi tanımlı olup $\partial = d_0$ için çaprazlanmış modülün **ÇM1** şartı sağlanır. Fakat genel olarak **ÇM2** şartı sağlanmaz. Çünkü

$$\partial^{g_1} g_2 = s_0 d_0 g_1 \cdot g_2 \cdot s_0 d_0 g_1^{-1} \quad \text{dir.}$$

Eğer $NG_2 = 1$ ise **ÇM2** şartı da sağlanır. Dolayısıyla

$$\bar{\partial} : \frac{NG_1}{\partial NG_2} \longrightarrow NG_0 \text{ bir çaprazlanmış modül belirtir.}$$

Bu yüzden bu bölümde 1-uzunluklu Moore Komplekse sahip simplisel kategorilere denk olan kategorileri inceleyeceğiz. Burada temel olarak Loday (Loday, 1982) de kullanılan denklikler ve onların cebirsel karşılıkları verilecektir. Detaylı bilgi için (Arvasi, 1997; Arvasi ve Porter, 1998; Ellis, 1984) kaynaklarına bakılabilir.

6.1 Cat^1 -Grup ve Cat^1 -Cbr Kategorileri

Tanım 20 G herhangi bir grup ve $s, r : G \longrightarrow G$ grup homomorfizmleri olsun.

$$i) \quad rs = s \text{ ve } sr = r$$

$$ii) \quad [Kerr, Kers] = 1$$

şartlarını sağlıyorsa (G, r, s) üçlüsüne bir cat^1 -grup denir.

Şimdi de cat^1 -gruplar arasındaki morfizmleri tanımlayalım.

(G, m, n) ve (G', m', n') birer cat^1 -grup ve $\phi : G \longrightarrow G'$ grup homomorfizmi için

$$m' \phi = \phi m \text{ ve } n' \phi = \phi n$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $\phi : (G, m, n) \longrightarrow (G', m', n')$ morfizmine cat^1 -grup morfizmi denir.

Böylece objeleri cat^1 -gruplar, morfizmleri cat^1 -grup morfizimleri olan bir kategori yapısı oluşur ve Cat^1 -Grp şeklinde gösterilir.

Cat^1 -gruplar kavramının ilk olarak Loday tarafından tanımlandığından bahsetmiştik. Ayrıca k -cebir kategorisinde cat^1 -cebir kavramını da Ellis (1988) tanımlamıştır.

Tanım 21 A bir k -cebiri ve $n, t : A \rightarrow A$ cebir homomorfizmleri olmak üzere

$$i) \quad nt = t \text{ ve } ts = s$$

$$ii) \quad \text{KernKert} = \{0_A\}$$

şartlarını sağlıyorsa (A, n, t) üçlüsüne bir cat^1 -cebir denir.

Şimdi de cat^1 -cebirlere arasındaki morfizmleri tanımlayalım.

(A, n, t) ve (A', n', t') birer cat^1 -cebir olmak üzere

$\partial : A \rightarrow A'$ cebir homomorfizmi için

$$n' \phi = \phi n \text{ ve } t' \phi = \phi t$$

şartları sağlanıyorsa $\phi : (A, n, t) \rightarrow (A', n', t')$ morfizmine cat^1 -cebir morfizmi denir.

Böylece objeleri cat^1 -cebirlere, morfizmleri cat^1 -cebir morfizmleri olan yeni bir kategori elde edilir. Bu kategori Cat^1 -Cebir ile gösterilir.

Teorem 1 $Cat^1 - Grp$ ve $XMod(Grp)$ kategorileri denktirler. (Loday, 1982)

İspat 1 (G, s, t) bir cat^1 -grup olsun. $M = Kers$, $N = Ims$ ve $\partial : t \mid M$ olarak alınırsa N 'nin M üzerine konjuge etkisiyle $\partial : M \rightarrow N$ bir çaprazlanmış modül belirtir. Şöyle ki

$$\text{ÇM1)} \quad \partial(nm) \stackrel{?}{=} n\partial(m)n^{-1}$$

$$\partial(nm) = \partial(nmn^{-1})$$

$$= \partial(n)\partial(m)\partial(n^{-1})$$

$$= n\partial(m)n^{-1} \quad (\because \partial : t \mid M)$$

$$\text{ÇM2)} \quad \partial(m)_{m'} = \partial(m)m'\partial(m)^{-1}$$

$$= mm'm^{-1}$$

Tersine $\partial : M \longrightarrow N$ bir çaprazlanmış modül olsun.

$G = M \rtimes N$, $s(m, n) = (1, n)$ ve $t(m, n) = (1, \partial(m)n)$ alınırsa (G, s, t) bir cat^1 -gruptur. Şöyle ki

$$\begin{aligned} \text{i) } st(m, n) &= s(t(m, n)) \\ &= s(1, \partial(m)n) \\ &= (1, \partial(m)n) \\ &= t(m, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (ts)(m, n) &= t(s(m, n)) \\ &= t(1, n) \\ &= (1, \partial(1)n) = (1, n) = s(m, n) \end{aligned}$$

$$\text{iii) } [Kers, Kert] = 1$$

$$\begin{aligned} Kers &= \{(m, n) \mid s(m, n) = (1, 1)\} \\ &= \{(m, n) \mid s(1, n) = (1, 1)\} \\ &= \{(m, 1) \mid m \in M\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Kert &= \{(m, n) \mid t(m, n) = (1, 1)\} \\ &= \{(m, n) \mid (1, \partial(m)n) = (1, 1)\} \\ &= \{(m, n) \mid \partial(m)n = 1\} \\ &= \{(m, (\partial(m))^{-1}) \mid m \in M\} \\ &= (m, 1)(m, (\partial(m))^{-1})(m^{-1}, 1)(m^{-1}, \partial(m)) \\ &= (mmm^{-1}m, \alpha\partial(m)^{-1}\alpha\partial(m)) \\ &= (1, 1) \end{aligned}$$

$$\text{olup } [Kers, Kert] = 1 \text{ dir.}$$

Teorem 2 $X\text{Mod}(\text{Grp})$ ve $\text{Simp}_1(\text{Grp})$ kategorileri denktir.

İspat 2 G , 1 uzunluklu Moore komplekse sahip bir simplisel grup olsun.

$$M = NG_1, N = NG_0 \text{ ve } \partial_1 = d_1 \text{ olmak üzere}$$

NG_0 in NG_1 üzerine etkisi de konjuge etki olarak alınırsa $\partial_1 : M \longrightarrow N$ bir çaprazlanmış modül belirtir. Moore kompleks 1 uzunluğa sahip olduğundan $[Kerd_1, Kerd_0] = \partial_2 NG_2 = 1$ dir.

Diğer taraftan $x, y \in NG_1$ olmak üzere $[x^{-1}s_0d_1xy]$ biçimindeki elemanlar, bu normal alt grubu üretir. Dolayısıyla $m, m' \in M$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\partial_1(m)_{m'} &= s_0d_1(m)m's_0d_1m^{-1} \\ &= mm'(m)^{-1} \quad (\because \partial_2 NG_2 = 1) \text{ olur.}\end{aligned}$$

Böylece $\partial_1 : M \longrightarrow N$ bir çaprazlanmış modül belirtir.

Tersine $\partial_1 : M \longrightarrow N$ herhangi bir çaprazlanmış modül olsun. N 'nin M üzerine etkisi kullanılarak $M \rtimes N$ yarı-direkt çarpımı yazılabilir. Ayrıca

$$d_0(m, n) = n, \quad d_1(m, n) = \partial_1(m)n, \quad s_0(n) = (1, n) \text{ olmak üzere}$$

$H_0 = N$ ve $H_1 = M \rtimes N$ alınırsa $H = \{H_0, H_1\}$ 1-truncated simplisel grubu elde edilir. Dolayısıyla $XMod(Grp)$ ve $Simp_1(Grp)$ kategorileri doğal denktir.

Sonuç: Cat^1-Grp , $XMod(Grp)$ ve $Simp_1(Grp)$ kategorileri denktirler.

Şimdi de bu denkliklerin cebirsel versiyonlarını ifade edelim :

Teorem 3 $Cat^1-Cebir$ ve $XMod(Alg)$ kategorileri denktirler.

İspat 3 $\partial_1 : S \longrightarrow R$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere R 'nin S üzerindeki etkisiyle $R \rtimes S$ yarı-direkt çarpımı tanımlıdır. Bu yarı direkt çarpım

$$(r, s)(r', s') = (rr', r.s' + r', s + ss') \text{ biçimindedir.}$$

Diğer taraftan

$s(r, s) = (r, 0)$, $t(r, s) = (r + \partial(s), 0)$ alınırsa $(R \times S, s, t)$ bir cat^1 -cebiri belirtir. Şöyle ki;

i)

$$\begin{aligned}
 (st)(r, s) &= s(t(r, s)) \\
 &= s(r + \partial(s), 0) \\
 &= (r + \partial(s)) = t(r, s) \\
 (ts)(r, s) &= t(s(r, s)) \\
 &= t(r, 0) \\
 &= (r + \partial(0), 0) = (r, 0) \\
 &= s(r, s)
 \end{aligned}$$

ii) $KersKert = \{0\}$ olmalıdır.

$$Kers = \{(r, s) \mid s(r, s) = (0, 0)\}$$

$$= \{(r, s) \mid (r, 0) = (0, 0)\}$$

$$= \{(0, s) \mid s \in S\}$$

$$Kert = \{(r, s) \mid t(r + \partial(s), 0) = (0, 0)\}$$

$$= \{(r, s) \mid (r, 0) = (0, 0)\}$$

$$= \{(r, s) \mid r = -\partial(s)\}$$

$$= \{(-\partial(s), s) \mid s \in S\} \quad \text{olmak üzere}$$

$$(0, s)(-\partial(s), s) = (0, 0.s + -\partial(s), s + ss)$$

$$= (0, -ss + ss) = (0, 0) \text{ dir. Yani } KersKert = \{0\} \text{ olur.}$$

Tersine (A, S, t) bir cat^1 -cebiri olsun. Bu durumda

$S = Kers, R = Im(s)$ ve R 'nin S üzerine etkisi $r.s = rs$ olmak üzere $\partial = t|_{Kers}$ olarak alınrsa (S, R, ∂) bir çaprazlanmış modül belirtir.

Dolayısıyla Cat^1 -Cebir ve $XMod(Alg)$ kategorileri birbirine denktirler.

Teorem 4 $XMod(Alg)$ ve $Simp_1(Alg)$ kategorileri denktirler.

İspat 4 E , 1 uzunluklu moore komplekse sahip bir simplisel cebir olsun.

$M = NE_1, N = NE_0$ ve $\partial_1 = d_1$ olmak üzere NE_0 'ın NE_1 'e çarpım etkisi alınrsa $\partial_1 : M \rightarrow N$ bir çaprazlanmış modül belirtir. Moore kompleks, 1 uzunluklu olduğundan

$\partial_2 = NE_2 = Kerd_0Kerd_1 = 0$ olup bu idealin üreteçleri $x(s_0d_1y - y)$; $x, y \in NE_1$ biçimindedir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \partial_1(x)x' &= d_1(x)x' \\ &= s_0d_1(x)x' \\ &= xx' \quad (\because \partial_2NE_2 = 0) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Diğer taraftan $\partial_1 : M \rightarrow N$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere N 'nin M üzerine etkisi kullanılarak $M \rtimes N$ yarı-direkt çarpımı tanımlı olup

$$d_0(m, n), d_1(m, n) = \partial_1(m) + n, s_0(n) = (0, n) \text{ alınrsa}$$

$E_0 = N$ ve $E_1 = M \rtimes N$ için $E = \{E_0, E_1\}$ 1 truncated simplisel cebiri elde edilir.

Dolayısıyla $XMod(Alg)$ ve $Simp_1(Alg)$ kategorileri denktirler.

Sonuç: Cat^1 -Cebir, $XMod(Alg)$ ve $Simp_1(Alg)$ kategorileri denktirler.

7. YÖNTEM

Bu tez yazılırken *Simplisel Kategori* kavramının tanımlanması ve incelenmesi amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle *Kategori* kavramının tanımı, özellikleri, çeşitleri incelenmiş ve konumuz ile ilgili olan fonktor, doğal transformasyon ve çaprazlanmış modül gibi alt başlıklara değinilmiştir.

Veri toplamak ve bağlantıları kurmak için nitel araştırma yapılmış ve tarama yöntemi ile bu alanda yazılmış olan makale, tez ve kitaplar incelenmiştir. Sonrasında bilgiler sentezlenip yorumlanmıştır. Bu sayede önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

8. BULGULAR VE TARTIŞMA

$n \geq -1, n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $\{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$ biçiminde gösterilen küme, *sıralı bir küme* olur. Burada her bir sıralı küme aynı zamanda bir küçük kategori olarak düşünülebilir.

$$[n] = \{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$$

olmak üzere herhangi iki sıralı küme arasındaki bir f dönüşümü, *sıra koruyan* (*monoton*) bir dönüşümdür. Yani;

$$f : [k] \longrightarrow [l] \text{ monoton fonksiyonu } i \leq j \text{ iken } f(i) \leq f(j)$$

özelliğini sağlar. Bu dönüşümleri *operatör* olarak adlandırılır. Böylece

Objeler; $[k]$ küçük kategorileri

Morfizmler; $f : [k] \longrightarrow [l]$ operatörleri yani

$Mor([k], [l]) = \{f \mid f : [k] \longrightarrow [l] \text{ operatörleri} \}$ biçimindedir.

Kompozisyon; $[k], [l], [m]$ küçük kategoriler olarak alınırsa

$$\begin{aligned} Mor([k], [l]) \times Mor([l], [m]) &\longrightarrow Mor([k], [m]) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

olmak üzere $\Delta[n]$ *kategorisi* elde edilir.

Dual kategori yardımıyla ;

Objeleri sıralı kümeler, morfizmleri $\Delta[n]$ kategorisinin morfizmlerinin ters yönlü hali olan morfizmler, kompozisyonları da bu morfizmlerin birleşiminden oluşan bir kategori oluşur. Oluşan bu yeni kategoriye $\Delta[n]$ kategorisinin "*dual kategorisi*" denir ve $\Delta^{op}[n]$ ile gösterilir. Buradan hareketle :

X topolojik uzay olmak üzere

$Sing(X)_n = (Top \Delta^n, X)$ $n \in \mathbb{N}$ olarak alınırsa $K : \Delta^{op} \longrightarrow Küme$ biçiminde bir simplisel küme elde edilir.

$\Delta^{op}[n]$ kategorisinden gruplar kategorisine tanımlanan fonktor, bir \mathbf{G} simplisel grubu oluşturur. Yani bunu açık olarak yazarsak $\Delta^{op}[n] \xrightarrow{G} Grp$

$n \in \mathbb{N}$ için (G_n) grupların bir ailesi olmak üzere,

$$d_i^n : G_n \longrightarrow G_{n-1} \quad 0 \leq i \leq n \neq 0 \quad (d_i \sim \text{yüzey operatörü})$$

$$s_j^n : G_n \longrightarrow G_{n+1} \quad 0 \leq i \leq n \quad (s_j \sim \text{dejenere operatörü})$$

şeklinde tanımlı grup homomorfizmleri ele alınır ve

$$G(\delta_i) = d_i, G(\sigma_j) = s_j$$

şeklinde bir fonktor tanımlırsa, bir simplisel \mathbf{G} grubu:

$$\mathbf{G} : \cdots G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{s_1} \end{array} G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{array} G_0$$

diyagramıyla temsil edilebilir. Burada δ_i ve σ_j , simplisel özdeşlikleri sağlar. Aynı zamanda d_i ve s_j homomorfizmleri bu dönüşümlerin görüntüleri olduğundan onlar da bu özdeşlikleri sağlar. Tüm yüzey operatörleri ve dejenere operatörleri ile birleşme özelliğini yani;

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

eşitliklerini sağlayan $f_n : G_n \longrightarrow F_n$ grup homomorfizmlerinin bir ailesi, \mathbf{G} ile \mathbf{F} simplisel grupları arasında bir homomorfizm olarak tanımlanır.

Böylece $SimpGrp$ ile göstereceğimiz simplisel grup kategorisi tanımlanmış olur.

Simplisel cebir yapısı ise $\Delta^{op}[n]$ kategorisinden değişmeli k -cebirlerin kategorisine tanımlanan bir fonktor ile oluşturulur. Bunu açık olarak yazarsak

$$E([n]) = E_n, E(\delta_i^n) = d_i^n, E(\sigma_j^n) = s_j^n$$

olmak üzere, bir \mathbf{E} simplisel cebiri şematik olarak

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{d_0^2} & & \\
 & & \xrightarrow{d_1^2} & & \xrightarrow{d_0^1} \\
 \mathbf{E} : \cdots & E_2 & \xrightarrow{d_2^2} & E_1 & \xrightarrow{d_1^1} & E_0 \\
 & & \xleftarrow{s_0^1} & & \xleftarrow{s_0^0} \\
 & & \xleftarrow{s_1^1} & &
 \end{array}$$

biçiminde temsil edilebilir.

\mathbf{E} ve \mathbf{F} birer simplisel cebir ise bir $f : E \rightarrow F$ simplisel cebir morfizmi:

$$E : \Delta^{op}[n] \rightarrow Ceb \text{ ve } F : \Delta^{op}[n] \rightarrow Ceb$$

funktorları arasında tanımlı bir doğal transformasyon olur.

Böylece simplisel cebir kategorisi oluşturulur.

Diğer yapılarda olduğu gibi kategori yapısında da denklikleri elde etmek, zor problemlerin basite indirgenerek çözülebilmesi için oldukça önemlidir. Bu sebeple son bölümde Simplisel kategorilere denk olan bazı kategoriler incelenmiştir.

Tezde verilen bilgiler sayesinde Simplisel kategori ve Simplisel kategorilere denk olan bazı kategorilerin özellikleri ve aralarındaki ilişkiler incelenebilecektir. Böylece cebirsel topolojide homoloji, kohomoloji, C-W kompleksler gibi farklı alanlarda problem çözmeye yarayan *simplisel* ve *kosimplisel objeler* tanımlanabilecektir.

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Küme yapısı ele alınırsa her küme için bir birim fonksiyonun ve kümeler arasında da fonksiyonların var olduğunu biliyoruz. Bu tez çalışmasında, matematiğin bir çok alanında önemli bir yeri olan *Kategori* kavramı temel alınmıştır. Kümeler yerine aynı tip nesnelere ve fonksiyonlar yerine morfizmler alınırsa oluşturulan yapının *kategori* olduğu gösterilmiştir. Ayrıca kümelerdeki fonksiyonlara benzer şekilde kategoriler arasında da *funktor* adı verilen dönüşümlerin mevcut olduğuna değinilmiş ve funktorların özellikleri ve türleri incelenmiştir.

Seçilen nesneye bağlı olarak farklı kategori türleri oluşturulabildiği incelenmiştir. Tezin ana konusu olan *Simplisel Kategorinin* ; nesnelere boştan farklı, sonlu, sıralı kümeler ve morfizmler sıra koruyan dönüşümler olarak seçilirse elde edildiği gösterilmiştir. Bu kategori, cebirsel topolojide homoloji, kohomoloji, C-W kompleksler gibi bir çok konuda problem çözmeye yarayan *simplisel* ve *kosimplisel objeleri* tanımlamamızı sağlar.

Kategori teori sayesinde bazı alanlardaki zor problemlerin basite indirgenerek çözülebildiği bilinmektedir. Bu anlamda kategoriksel denklikleri elde etmek oldukça önemli olduğundan tezimizin son bölümünde *Simplisel kategorilere* denk olan kategorilere yer verilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Arvasi, Z. (1994). *Applications in Commutative Algebra of the Moore Complex of a Simplicial Algebra* [Doctoral dissertation, University of Wales, Bangor].
- Arvasi, Z. (1997). Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras. *Theory and Applications of Categories*, 160–181.
- Arvasi, Z. (2013). *Category Theory Lecture Notes*.
- Arvasi, Z., & Porter, T. (1996). Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras. *Journal of Algebra*, 181, 426–448. <https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0128>
- Arvasi, Z., & Porter, T. (1997). Higher Dimensional Peiffer Elements in Commutative Simplicial Algebras, *Theory and Applications of Categories*. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212, 1–23. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2007.11.016>
- Arvasi, Z., & Porter, T. (1998). Freeness conditions for 2-crossed modules of commutative algebras. *Applied Categorical Structures*, 6(4), 455–471. <https://doi.org/10.1023/a:1008686023366>
- Duskin, J. (1975). *Simplicial Methods and the Interpretation of 'Triple' Cohomology* (Vols. 3).
- E.Curtis. (1971). Simplicial Homotopy Theory. *Advances in Math*, 24, 25, 138, 154, 167, 107–209. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0001-8708\(71\)90015-6](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0001-8708(71)90015-6)
- Ege, U. (1998). *Çaprazlanmış Modüller* [masterthesis]. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.
- Ege, U. (2007). *Çarpım Cebri ve Çaprazlanmış Modüller* [Doctoral dissertation, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi].

Ellis, G. (1984). *Crossed Modules and their Higher Dimensional Analogues* [Ph.D Thesis]. University of Wales, Bangor.

Gabriel, P., & Zisman, M. (1967). *Calculus of fractions and homotopy theory* (Springer, Ed.).

<https://tr.wikipedia.org>. (n.d.). <https://tr.wikipedia.org>

<https://www.matematiksel.org>. (n.d.). <https://www.matematiksel.org>

J.P, M. (1967). *Simplicial Objects in Algebraic Topology*.

Lamotke, K. (1968). *Semisimpliziale algebraische topologie*.

Loday, J. (1982). Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*. [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(82\)90014-7](https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90014-7)

Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working mathematician* (Vols. 5). Springer.

May, J. (1967). *Simplicial objects in algebraic topology*.

P. Carrasco, A. C. (1991). Group-theoretic algebraic models for homotopy types. *Journal of Pure and Applied Algebra*. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-4049\(91\)90133-M](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-4049(91)90133-M)

Quillen, D. (1967). *Homotopical Algebra, Lecture Notes In Mathematics*. Springer. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/Bfb0097438>

T.Porter. (1986). Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconcelos. *Journal of Algebra*, 458–465.

Whitehead, J. H. C. (1949). *Combinatorial homotopy II*.