T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ VE UYGULAMALARI

Seda KOL

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

AĞUSTOS 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ VE UYGULAMALARI

Tez Yazarı
Seda KOL

Danışman
Doç. Dr. Münevver TUZ

TEMMUZ 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Volterra İntegral Denklemleri için Bazı Analitik Çözüm Yöntemleri ve Uygulamaları

Yazarı: Seda KOL

İlk Teslim Tarihi: 12.06.2024

Savunma Tarihi: 18.07.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Doç. Dr. Münevver TUZ — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Doç.Dr. Zeliha KÖRPINAR — Onayladım
Muş Alparslan Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi

Üye: Doç. Dr. Ahu ERCAN — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım " Volterra İntegral Denklemleri için Bazı Analitik Çözüm Yöntemleri ve Uygulamaları " başlıklı Yüksek Lisans Tezi içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum verileri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

18.07.2024

Seda KOL

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım danışman hocam Doç. Dr. Münevver TUZ' a sonsuz teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca her zaman yanımda olan anneme ve babama ve arkadaşım Derya DEMİR DAVRAN' a teşekkür ederim.

Seda KOL

ELAZIĞ, 2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Volterra İntegral Denklemleri için Bazı Analitik Çözüm Yöntemleri ve Uygulamaları

Seda KOL

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2024, Sayfa: ix + 26

Bu tez, integral denklemlerin tanımını, çeşitlerini ve sınıflandırılmalarını inceleyerek, sabit ve değişken katsayı farklı denklemlerin integral denkleme dönüştürülmesi ve bunların da bazı yöntemlerle çözülüp sonuçların değerlendirilmesini amaçlamaktadır. İntegral denklemler, matematiksel modellemelerde ve fiziksel sistemlerin analizinde önemli bir role sahiptir. Bu nedenle teknolojide ve özellikle de birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar fen ve mühendisliğe önemli katkılar sağlamaktadır. Bu çalışmada, integral denklemlerinin genel yapısı, çeşitli çözüm yöntemleri ve uygulamaları ele alınmıştır. Çalışmanın ilk bölümünde integral denklemlerin tarihçesi ve günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde integral denklemlerinin temel kavramlarına genel bir bakış sunulmaktadır. Üçüncü bölümde bu denklemlerin farklı özelliklere göre sınıflandırılması yapılmış ve açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, diferansiyel denklemlerle integral denklemler arasındaki ilişki açıklanarak birbirlerine dönüştürülmesi ile ilgili yöntemler verilmiştir. Beşinci bölümde, Volterra integral denklemlerinin çözüm yöntemlerinden bahsedilmiş ve bu yöntemlere ait uygulamalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegral denklemler, çekirdek fonksiyon, Volterra integral denklemleri, Fredholm integral denklemleri, resolvent, Lipschitz koşulu

ABSTRACT

Some Analytical Solution Methods and Applications for Volterra Integral Equations

Seda KOL

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
July 2024, Pages: ix + 26

This thesis aims to examine the definition, types, and classification of integral equations, converting different equations with constant and variable coefficients into integral equations, and solving them using various methods to evaluate the results. Integral equations have an important role in mathematical modeling and analysis of physical systems. For this reason, the results obtained from its widespread use in technology and especially in many engineering fields make significant contributions to science and engineering. This study addresses the general structure of integral equations, various solution methods, and their applications. The first part of the study provides information about the history of integral equations and the work done up to the present day. The second part presents an overview of the basic concepts of integral equations. The third part classifies and explains these equations according to their different characteristics. In the fourth part, the relationship between differential equations and integral equations is explained, along with the methods of converting them into each other. The fifth part discusses the solution methods of Volterra integral equations and provides applications of these methods.

Keywords: İntegral equations, kernel function, Volterra integral equations, Fredholm integral equations, resolvent, Lipschitz condition

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER

$\sum$	:Toplam sembolü
$\frac{dy}{dx}$	:y 'nin x 'e göre 1. mertebeden türevi
$\frac{d^n(y)}{dx^n}$	:y 'nin x 'e göre n. mertebeden türevi
$\frac{\partial^n K(x,t)}{\partial x^n}$	:$K(x,t)$ fonksiyonunun x 'e göre n.mertebeden kısmi türevi
$\int$	:İntegral
$\int \dots (n) \dots \int$	:Katlı integralde, (n) katlılık mertebesi
$K(x,t)$	:İntegral denklemin çekirdeği
$R\ (x,t;\ \lambda)$	:$K(x,t)$ çekirdeğinin çözücü çekirdeği (resolvant)

1. GİRİŞ

Matematiksel modellemenin ve fiziksel sistemlerin analizinin temel araçlarından biri olan integral denklemleri, geniş bir uygulama alanına sahip olup, bilim dünyasında önemli bir rol oynamaktadır. Bilimsel araştırmada, matematiksel modellemenin gücü, karmaşık gerçek dünya problemlerini anlamamıza, analiz etmemize ve çözmemize olanak tanır. Bu noktada, integral denklemleri, bilimsel alanlarda karşımıza çıkan pek çok modeli matematiksel bir çerçevede açıklamak için kullanılır. Biyolojik popülasyonların büyüme modelleri, ilaçların vücutta yayılma modelleri gibi birçok biyolojik ve tıbbi problem, integral denklemleri kullanılarak açıklanabilir. Bu, tedavi stratejileri oluşturmak veya hastalık yayılımını anlamak için önemlidir. Yapısal analizlerden ısı transferine, elektrik devrelerinden sinyal işleme uygulamalarına kadar birçok mühendislik alanında integral denklemleri kullanılır. Bu, malzeme dayanıklılığından enerji iletimine kadar geniş bir yelpazede uygulama alanı bulmaktadır. Integral denklemleri, finansal piyasalardaki fiyat dalgalanmalarını, ekonomik büyümeyi veya hisse senetlerinin değerini modellemede kullanılır. Bu, ekonomik kararlar almak ve finansal riskleri anlamak için önemlidir. Hava ve su kirliliği modelleri, ekosistem dinamikleri gibi çevresel konularda integral denklemleri kullanılarak karmaşık etkileşimlerin analizi yapılır. Dolayısıyla bu denklemler, gerçek dünyadaki dinamik sistemlerin matematiksel olarak modellenmesinde ve bu modellerin analizinde güçlü bir araçtır. Bu nedenle, birçok bilim dalında integral denklemlerine dayalı modelleme ve çözümleme yöntemleri gereklidir. İntegral denklemlerinin çeşitli çözüm yöntemleri üzerine yapılan çalışmalar, bu denklemleri etkili bir şekilde çözebilmek için geliştirilen analitik ve sayısal teknikleri içerir. Bu yöntemler, denklemlerin çeşidine ve koşullarına bağlı olarak değişiklik gösterir. Bu denklemlerin türleri arasındaki farklılıklar ve bu tür denklemlerin özellikleri, matematikçilerin ilgisini çeken önemli bir araştırma konusudur. Özellikle, Abel, Fredholm ve Volterra türü integral denklemleri üzerine yapılan çalışmalar, bu denklemlerin özgün özelliklerini açıklamak için odaklanır [1-8]. İntegral denklemler literatürde ilk olarak Abel'in mekanik problemleri incelediği sırada karşısına çıkmıştır, bir parçacığın bir eğri boyunca düşey hareketini gözlemlerken bunu integralle bağdaştırmıştır [9]. Reymond'un 1888'de yayınladığı makalesinde bu denklemler önemli bir ilgi uyandırmıştır [10]. Fourier, ısı problemlerini çözmek için kullandığı trigonometrik serilerden elde ettiği,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xy)\,\varphi(y)dy, f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xy)\,\varphi(y)dy,$$

formüllerine ait

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xy)\,f(x)dx \text{ ve} f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xy)\,f(x)dx,$$

denklemlerini vermiştir [11,12]. Abel mekanik problemlerde kullandığı integral denklemi

$$\int_0^a \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2} dy\,, \quad f(y) = 0\,, \quad 0 < a < 1,$$

şeklinde formüle edip çözümünü yapmıştır. Burada $a = 0$ ve $a = \frac{1}{2}$ olması durumu Abel' in ele aldığı orijinal denklem olup bununla bağlantılı olarak ortaya çıkan tautochrone (eşit zamanlı) problemi ilk çözen Huygens olmuştur [13]. Poisson ise integral sınırlarından birini x e bağlı bir değişken alarak denklemi ilk çalışan kişidir [14]. Burada φ, λ 'nın kuvvetleri olarak elde edilir. Poisson bu serinin yakınsaklığı ile ilgilenmemiş, bunu 1830 yılında Liouville ele alarak ispatlamıştır. Yine Liouville, Dirichlet probleminin bir integral denklem problemine eşdeğer olduğunu kanıtlayarak λ parametresinin bir açılımı şeklinde yazmıştır [15]. Bu çözüm bir başka şekliyle Poisson ve Liouville' in önceden kullandığı ardışık yaklaştırma metoduna özdeştir. Lineer integral denkleminde sınırlardan birinin $x$değişkenine bağlı olması durumunu ele alarak çalışmalar yapan bir başka matematikçi Vita Volterra dır. Volterra, integral denklemler teorisinin başlıca araştırmacılarındandır ve teorinin önemini anlayarak sistematik çalışan ilk kişidir [16-18]. Eric İvan Fredholm, Volterra' nın 1884' te ortaya koyduğu probleme benzer bir yaklaşımla denkleme ait çalışmalar yapmıştır [19,20]. Fredholm'un incelediği titreşen yüzeylerde meydana gelen süreçlerlerde ele aldığı integral denkleminin çözümünü J. Neumann da inceleyerek bazı eklemelerle literatüre kazandırmıştır [21]. Yakın zamana kadar ki çalışmalarda Volterra-Fredholm integral denklemleri esas alınarak yeni çözüm teknikleri oluşturulmuştur [22-26]. Bu denklemlerde her ne kadar lineerlik olsa da bunların analitik çözümlerinin bulunması zordur. O yüzden nümerik çalışmalar daha yoğunluk kazanmıştır ve literatürde daha fazla mevcuttur. [27-33]. Son zamanlarda daha farklı yaklaşımlar kullanılmaya yönelinmiş, Richardson Ekstrapolasyonu, Gauss Kareleme yöntemi, Belirsiz Katsayılar Yöntemi, kombinasyon ve mekanik quadrature yöntemi ve homotopi pertürbasyon yöntemi gibi yeni yöntemler tercih edilmiştir [34-47]. Ayrıca adi ardışık yakınsama yöntemi uygulanarak değişken katsayılı homojen kirişin esneklik probleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Geciken argümentli bir diferansiyel denklemin sınır değer probleminin çözümünde yeni ve etkili bir yöntem kullanılmıştır [48]. Bu tez, integral denklemleri ve çeşitlerini anlamak, çözümlemek ve uygulamak amacıyla yapılmış kapsamlı bir araştırmayı içermektedir. Bu çalışma, integral denklemleri konusundaki temel kavramları irdeleyerek, farklı türlerini sınıflandırmayı ve çeşitli çözüm yöntemlerini incelemeyi amaçlamaktadır. İlk bölümde, integral denklemlerinin tanımı, tarihçesi ve temel özellikleri üzerine bir bakış sunulmaktadır. Daha sonra, literatürde sıkça karşılaşılan integral denklemleri türleri ele alınarak, her birinin özellikleri vurgulanmaktadır. Diferansiyel denklemlerele integral denklemler arasındaki ilişkiler ve birbirine dönüştürülmesi açıklanarak Volterra integral denklemlerinin çeşitli çözüm yöntemleri verilmektedir. Ayrıca bu çözümlerin varlığı ve tekliği de açıklanmaktadır. Bu tezin amacı, okuyuculara integral denklemleri alanında sağlam bir temel kazandırmak, farklı türlerini anlamalarına yardımcı olmak ve çeşitli uygulama alanlarında bu denklemleri etkili bir şekilde çözebilmelerini sağlamaktır. Bu bağlamda, tezin devamında detaylı bir şekilde ele alınacak konuların, matematik ve mühendislik alanlarında çalışan araştırmacılar, öğrenciler ve ilgili endüstri profesyonelleri için değerli olacağına inanılmaktadır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Volterra integral denklemleri, geçmişteki değerlerin gelecekteki durumları belirlemede rol oynadığı problemlerin modellemesinde önemli bir araçtır. Bu denklemler, adını İtalyan matematikçi Vito Volterra'dan almakta olup, zamanla değişen sistemlerin dinamiklerini incelemek için kullanılır. Aşağıda Volterra integral denklemlerinin temel tanımı ve bu denklemlerle ilgili bazı önemli teoremler sunulmuştur. Bu tanım ve teoremler, Volterra integral denklemlerinin anlaşılması ve çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi açısından temel oluşturur. Tezin bu bölümünde, söz konusu tanımlar ve teoremler ele alınacak ve örneklerle açıklanacaktır. Bu bilgiler, Volterra integral denklemlerinin teorik temellerini anlamak ve bu denklemleri uygulamalı problemlerde kullanmak için gerekli alt yapıyı sağlayacaktır.

Tanım 2.1. $u(s)$, $X(s,t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere, integralin alt ve üst sınırlarından biri değişken ise bu denklemlere Volterra integral denklemleri denir ve

$$u(s) = \lambda \int_a^s X(s,t)u(t)\,dt, \qquad (2.1)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. Eğer Denklem 2.1'de alt ve üst sınır sabit ise bu denklemlere de Fredholm integral denklemleri denir.

$$u(s) = \lambda \int_a^b X(s,t)u(t)\,dt, \qquad (2.2)$$

$$u(s) = p(s) + \lambda \int_a^b X(s,t)u(t)\,dt, \qquad (2.3)$$

Fredholm integral denklemleridir.

2.1. Teorem (Alternatif Fredholm Teoremi)

(2.2) homojen Fredholm integral denkleminde $u(s) = 0$ bir çözümdür. Bu çözüme aşikâr çözüm denir. (2.3) şeklindeki homojen olmayan Fredholm integral denkleminin ise çözümü daima tektir [3].

2.2. Teorem (Çözümün Tekliği)

(2.3) Fredholm denklemini ele alalım. Burada $X(s,t)$ çekirdeği verilen bölgede sürekli ve $p(s)$reel değerli ve sürekli fonksiyon olmak üzere ve

$$|\mu|M(b-a)<1, \qquad (2.4)$$

eşitsizliği verildiğinde Denklem 2.3'ün çözümünün tek olması için,

$$|f(s,t)| \leq M \in R, \qquad (2.5)$$

olmalıdır. Aksi takdirde (2.4) eşitsizliği sağlanmazsa bir Fredholm integral denklemi için sonsuz çözüm mevcut olabilir [4].

2.3. Tanım (Laplace Dönüşümü)

$f(t)$ ile verilen zaman tanım kümesinde tanımlı bir fonksiyonu, frekans tanım kümesinde tanımlı başka bir fonksiyona dönüştüren $F(s)$ dönüşümüne Laplace dönüşümü denir ve

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad t \geq 0 \tag{2.6}$$

şeklinde ifade edilir [7].

2.4. Tanım (Konvülasyon)

$f(t), g(t)$ orijinal fonksiyonlar ve $L\{f(t)\} = F(s),\ L\{g(t)\} = G(s)$ olmak üzere;

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(x)g(t-x)dx\,, \tag{2.7}$$

şeklinde verilen integrale $f(t), g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu denir ve $f(t) * g(t)$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.5. (Lipschitz Koşulu)

$\forall f, s, t \in Q(a,b) \times R$için $|f(s) - f(t)| \leq M|s-t|$olacak şekilde s ve t den bağımsız bir$M$ sayısı varsa $f(s)$ fonksiyonu $Q(a,b) \times R$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

3. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

İntegral denklemler, matematiksel yapıları ve çözüm yöntemleri açısından çeşitli sınıflara ayrılabilir. Bu tür denklemler, öncelikle, lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki gruba ayrılır. Lineer integral denklemler, çözüm fonksiyonu ve integral operatörünün lineer olduğu denklemlerdir. Lineer olmayan integral denklemler ise, bu ilişkiyi lineer olmayan bir biçimde tanımlar. Bu sınıflandırmalar, integral denklemlerinin çözüm yöntemlerini belirlemede ve farklı uygulamalara uygun çözümler geliştirmede temel teşkil eder. Bu başlık altında, integral denklemlerin bazı sınıflara ayrılması ile birlikte bu sınıfların karakteristik özellikleri incelenecektir.

3.1. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

$u(s)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$u(s) = p(s) + \lambda \int_a^b X(s,t)u(t)\,dt, \tag{3.1}$$

şeklinde verilen integral denklemde integral işaretinin altındaki bilinmeyen $u(s)$ fonksiyonunun derecesi “1” ise integral denkleme *lineer integral denklem* denir.

$$u(s) = p(s) + \int_a^b X(s,t)\,u^n(t)dt, \qquad n \neq 1 \tag{3.2}$$

şeklinde verilen integral denklemde integral işaretinin altındaki bilinmeyen $u(s)$ fonksiyonunun derecesi “1” den farklı ise integral denklemine *lineer olmayan integral denklem* denir [4].

3.2. Singüler (Tekil) ve Singüler Olmayan (Tekil Olmayan) İntegral Denklemler

(3.1) ile verilen integral denklemin çekirdek fonksiyonu olan $X(s,t)$fonksiyonu $a \leq s \leq b$ veya $a \leq t \leq b$ aralıklarının her ikisinde de sürekli ise bu integral denkleme *singüler olmayan (tekil olmayan) integral denklem* denir.

$X(s,t)$fonksiyonu $a \leq s \leq b$veya$a \leq t \leq b$aralıklarında sürekli değilse ise bu integral denkleme *singüler (tekil) integral denklem* adı verilir [4].

3.3. Yapılarına Göre İntegral Denklemler

İntegral denklemleri yapılarına göre üç sınıf altında inceleyebiliriz; $u(s)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(t)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve $X(s,t)$ çekirdek fonksiyon olmak üzere, (2.2) şeklindeki denklem *1.cins integral denklem* olarak adlandırılır [29]. Benzer şekilde, u(s) ve $p(s)$ bilinen fonksiyon olduğunda, (2.3) biçimindeki denklemleri de 1.cins integral denklem sınıfından kabul edebiliriz. Örneğin,

$$e^x = x - \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \mathrm{t}\, v(t)dt,$$

denklemi de 1.cins integral denklemi olarak verilebilir.

(2.2) ve (2.3) şeklinde verilen integral denklemlere *2.cins integral denklemler* denir. Örneğin,

$$v(x) = \int_0^x e^{x+t}\, v(t)dt,$$

denklemi 2.cins integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

$$u(s)p(s) = p(s) + \int_a^b X(s,t)\, u(t)dt, \tag{3.3}$$

biçimindeki denklemlere *3.cins integral denklemler denir* [29]. Bu tür denklemlere örnek olarak,

$$xv(x) = 2 - e^{-x} + \int_0^1 x^3\, t^3 v(t)dt\ , \tag{3.4}$$

verilebilir.

Eğer (3.3) denkleminde $\mathrm{u}(s) = 0$ alınırsa denklem 1. cins integral denkleme, $\mathrm{u}(s) = 1$ alınırsa denklem 2. cins integral denkleme dönüşür. Böylece 1. ve 2. türler, 3. integral denklemin bir özel durumudur.

3.4. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

(2.2) biçimindeki 2. cins integral denkleminde $u(s)$ fonksiyonu homojen olursa denklem *homojen integral denklem* olarak adlandırılır. (3.3) denkleminde olduğu gibi homojenliği bozan bir $p(s)$ fonksiyonunu içeren integral denkleme ise *homojen olmayan integral denklem* denir. (2.1) homojen denkleminin $u(s) = 0$ çözümüne *aşikar* veya *trival* çözüm denir [29].

4. İNTEGRAL DENKLEMLERİN DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE İLİŞKİSİ

İntegral denklemler ve diferansiyel denklemler arasındaki ilişki, bu iki tür denklemin nasıl birbirine dönüştürülebileceğini ve birbirlerini nasıl tamamladığını anlamak açısından kritiktir. Diferansiyel denklemler, bir fonksiyonun türevleri arasındaki ilişkiyi tanımlarken, integral denklemler bir fonksiyonun kendisi ile integrali arasındaki ilişkiyi ifade eder. Bu iki denklemin birbirine dönüştürülmesi, farklı çözüm yöntemlerinin uygulanabilmesi açısından önemli avantajlar sağlar, mühendislik, fizik ve biyoloji gibi çeşitli alanlarda pratik uygulamalar bulur. Örneğin, popülasyon dinamiklerinde, bir popülasyonun büyümesini modellemek için kullanılan diferansiyel denklemler, çevresel etkileri ve gecikmeleri hesaba katmak için integral denklemler şeklinde yeniden ifade edilebilir. Aynı şekilde, elektrik devrelerinde veya mekanik sistemlerdeki dinamikleri modellemek için de bu iki tür denklemin dönüşümü kullanılır.

4.1. Diferansiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

$$(d^n y)/(ds^n)+b_1(s)(d^{(n-1)}y)/(ds^{(n-1)})+b_2(s)(d^{(n-2)}y)/(ds^{(n-2)})+?+b_{(n-1)}(s)dy/ds+b_n(s)y=f(s) \quad (4.1)$$

lineer diferansiyel denklemi,

$$y_0=c_0, y'(0)=c_1, \dots, y^{n-1}(0)=c_{n-1}\ , \quad (4.2)$$

başlangıç koşullarıyla verilsin. Denklem 4.1’ de,

$$\frac{d^n y}{ds^n}=u(s) \quad (4.3)$$

olarak alınırsa bu ifadede türev,

$$\frac{d^n y}{ds^n}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^{n-1}y}{ds^{n-1}}\right)=u(s)\ ,$$

$$\int_0^s d\left(\frac{d^{n-1}y}{ds^{n-1}}\right)=\int_0^s u(t)dt\ ,$$

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}=\int_0^s u(t)dt+c_{n-1}\ ,$$

şeklinde, mertebesi bir mertebe düşürülmüş olarak bulunur. Böyle devam edilecek olursa,

$$\int_0^s d\left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\right) = \int_0^s [\int_0^s u(t)dt + c_{n-1}]dt \, ,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{ds^{n-2}} = \int_0^s \int_0^s u(t)dtdt + c_{n-1} \int_0^s dt + c_{n-2} \, ,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{ds^{n-2}} = \int_0^s \int_0^s u(t)dtdt + c_{n-1}s + c_{n-2} \, ,$$

$$\frac{dy}{ds} = \int_0^s \dots (n-1) \dots \int_0^s u(t)dt \dots dt + \frac{1}{(n-2)!} c_{n-1}s^{\mathrm{n}-2} + \frac{1}{(n-3)!} c_{n-2}s^{\mathrm{n}-3} + \dots + c_1 \, ,$$

$$y = \int_0^s \dots (n) \dots \int_0^s u(t)dt \dots dt + \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1}s^{\mathrm{n}-1} + \frac{1}{(n-2)!} c_{n-2}s^{\mathrm{n}-2} \dots + c_1 s + c_0 \, ,$$

olur. Yukarıda bulunan ifadeler Denklem 4.1' de yerine yazılırsa

$$u(s) + b_1(s) \int_0^s u(t)dt + c_{n-1}b_1(s) + b_2(s) \int_0^s \int_0^s u(t)dtdt + c_{n-1}sb_2(x) + c_{n-2}b_2(s) +$$

$$+b_3(s) \int_0^s \int_0^s \int_0^s u(t)dtdtdt + \frac{1}{2!} c_{n-1} s^2 b_3(s) + c_{n-2}\, sb_3(s) + c_{n-3}\, b_3(s) + \dots +$$

$$b_{n-1}(s) \int_0^s \dots (n-1) \dots \int_0^s u(t)dt \dots dt + \frac{1}{(n-2)!} c_{n-1}\, s^{n-2} b_{n-1}(s) +$$

$$\frac{1}{(n-3)!} c_{n-2}\, s^{n-3} b_{n-1}(s) + \dots + c_1 b_{n-1}(s) + \dots + c_1 s b_n(s) + c_0 s b_n(s) = f(s) \, , \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) eşitliğini düzenlersek,

$$u(s) + b_1(s) \int_0^{\mathrm{s}} u(t)dt + \dots + b_{\mathrm{n}}(s) \int_0^s \dots (n) \dots \int_0^{\mathrm{s}} u(t)dt \dots dt$$

$$= f(s) - c_{n-1}b_1(s) - c_{n-1}sb_2(s) - \dots - \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1}\, s^{n-1} b_{\mathrm{n}}(s) - c_{n-2}b_2(s) -$$

$$c_{n-2}\, sb_3(s) -$$

$$\dots - \frac{1}{(n-2)!} c_{n-2}\, s^{n-2} b_{\mathrm{n}}(\mathrm{s}) - c_1 s b_{n-1}(s) - c_1 b_n(s) - c_0 b_n(s) \, ,$$

olarak yazılır. Bu ifadede eşitliğin sağ tarafı s'e bağlı bir fonksiyon olduğundan bu fonksiyonu $F(s)$ ile gösterirsek ve ayrıca,

$$b_1(s) + sb_2(s) + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} b_{\mathrm{n}}(s) = f_{\mathrm{n}-1}(s) \, ,$$

$$b_2(s) + sb_3(s) + \cdots + \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} b_{\mathrm{n}}(s) = f_{\mathrm{n}-2}(s)\,,$$

$$b_{n-1}(s) + b_{\mathrm{n}}(s) = f_1(s)\,,$$

$$b_{\mathrm{n}}(s) = f_0(s)\,,$$

olarak yeniden düzenlersek,

$$F(s) = f(s) - \{c_{n-1}\, f_{\mathrm{n}-1}(s) + \cdots + c_0\, f_0(s)\}\,,$$

elde edilir. Eşitliğin sol kısmı ise,

$$\int_0^s \ldots (n) \ldots \int_0^s u(t)dt \ldots d = \int_0^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt\,,$$

ifadesinden yararlanılarak tek katlı integral haline getirilebilir.

4.2. İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi

İntegral denklem ile diferansiyel denklem arasındaki bağlantıyı Leibnitz formülü ile sağlarız. Bu formül,

$$\frac{d}{ds}\int_{M(s)}^{N(s)} F(s,t)dt = \int_{M(s)}^{N(s)} \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} dt + F(s, N(s))\frac{dN(s)}{d(s)} - F(s, M(s))\frac{dM(s)}{d(s)}\,,$$

olup burada $M(s)$ ve $N(s)$ fonksiyonları sabit fonksiyonlar olarak alınırsa,

$$\frac{dM(s)}{d(s)} = 0,\ \frac{dN(s)}{d(s)} = 0,$$

olacağından Leibnitz formülü,

$$\frac{d}{ds}\int_{M(s)}^{N(s)} F(s,t)dt = \int_{M(s)}^{N(s)} \frac{\partial F(s,t)}{\partial s} dt\,,$$

olarak kullanılabilir.

Örnek 4.1. $u(s) - \int_0^s u(t)\, tan\, t\, dt = \sin s$

integral denkleminde başlangıç koşulu $s = 0$ için $u(s) = 0$ olduğu biliniyorsa, verilen integral deklemin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\mathrm{u}'(s) - \frac{d}{d(s)}\int_0^s u(t)\, tan\, t\, dt = \cos s\,,$$

elde edilir. Leibnitz Formülünden yararlanırsak,

$$\frac{d}{d(s)}\int_0^s u(t)\, tan\, t\, dt = \int_0^s 0 dt + u(s)\, tan\, s\,,$$

olacağından verilen integral denklem

$$\mathrm{u}'(s) - u(s) tans = \cos s$$

şeklinde lineer diferansiyel denkleme dönüşür.

5. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Volterra integral denklemleri, matematiksel analizde ve uygulamalı matematikte önemli bir rol oynayan, özellikle fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi çeşitli alanlarda karşılaşılan problemlerin modellemesinde sıkça kullanılan bir araçtır. Volterra integral denklemleri, geçmiş zamandaki durumların gelecekteki durumu belirlemede nasıl etkili olduğunu ifade eder ve bu özellikleri nedeniyle birçok dinamik sistemin incelenmesinde kullanılır. Bu kısımda Volterra integral denklemlerinin teorik temelleri, çözüm yöntemleri ve çeşitli uygulamaları ele alınacaktır. Amacımız, bu denklemlerin matematiksel yapısını derinlemesine anlamak ve gerçek dünya problemlerine uygulanabilirliğini göstermektir.

$u(s)$ bilinmeyen fonksiyon olsun. $K(s,t)$ çekirdek fonksiyon ve λ parametre olmak üzere

$$\lambda \int_a^s K(s,t)u(t)dt = u(s) \tag{5.1}$$

şeklinde verilen integral denkleme birinci cins Volterra integral denklemi denir.

$$u(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t)u(t)dt \tag{5.2}$$

şeklinde verilen integral denkleme ise ikinci cins lineer Volterra integral denklemi denir.

Eğer $f(s) = 0$ ise

$$u(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)u(t)dt \tag{5.3}$$

şeklindeki denkleme birinci cins lineer homojen Volterra İntegral Denklemi denir. Bu tür denklemler,

$$\int_s^b K(s,t)u(t)dt = -\int_b^s K(s,t)u(t)dt \tag{5.4}$$

yazılabileceğinden genel ifade değişmeyecektir.

Örnek 5.1. $2x^3 = \int_0^x \{1 - 5(x-s) + 2(x-s)^2\} u(s)\, ds$ integral denklemini çözelim.

Bu denklem, Denklem 5.3 yapısında olup, çözüm için önce eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$6x^2 = u(x) - 5\int_0^x u(s)ds + 4\int_0^x (x-s)\, u(s)ds,$$

$$12x = u'(x) - 5u(x) + 4\int_0^x (x-s)\, u(s)ds,$$

$$12 = u''(x) - 5u'(x) + 4u(x)$$

elde edilir. c_1, c_2 keyfi sabitler alınırsa,

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + 3 \tag{5.5}$$

yazılabilir. Başlangıç koşullarını Denklem 5.4' den elde etmeye çalışalım. x= 0 için $u(0) = 0$; $u^{'}(0) = 0$ olur. Bu şartlar kullanılırsa $c_1 = 1, c_2 = -4$ olur. Böylece denklemin çözümü;

$$u(x) = e^x - 4e^{4x} + 3$$

olarak bulunur.

5.1. Volterra İntegral Denklemlerinde Resolvant (Çözücü Çekirdek)

İkinci cins Volterra integral denklemi aşağıdaki şekilde alınsın,

$$u(s) = f(s) + \lambda \int_0^s K(s,t)u(t)dt = 0.$$

Buradaki $K(s,t)$ $0 \leq s \leq \alpha;\ 0 \leq t \leq s$ aralıklarında, $f(s)$ise $0 \leq s \leq \alpha$ aralığında süreklidir. Bu denklemin (5.6) ile verilen aşağıdaki seri çözümünü araştıralım;

$$u(s) = u_0(s) + \lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s) + \cdots + \lambda^n u_n(s) + \cdots \tag{5.6}$$

Bu seri, λ parametresine göre bir kuvvet serisidir. Bu seriyi Volterra denkleminde kullanırsak,

$$u_0(s) + \lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s) + \cdots + \lambda^n u_n(s) + \cdots$$

$$= f(s) + \lambda \int_0^s K(s,t)\{u_0(s) + \lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s) + \cdots + \lambda^n u_n(s) + \cdots\}dt,$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki yanını λ' nın kuvvetlerine göre düzenleyip birbirine eşitlersek,

$$u_0(s) = f(s)$$

$$u_1(s) = \int_0^s K(s,t)u_0(t)dt$$

$$u_2(s) = \int_0^s K(s,t)u_1(t)dt$$

....

$$u_n(s) = \int_0^s K(s,t)u_{n-1}(t)dt,$$

buluruz. $u_0(s) = f(s)$ olduğundan;

$$u_1(s) = \int_0^s K(s,t)u_0(t)dt = \int_0^s K(s,t)f(t)dt$$

$$u_2(s) = \int_0^s K(s,t)u_1(t)dt = \int_0^s K(s,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)\right]dt$$

$$= \int_0^s f(t_1)dt_1 \int_{t_1}^s K(s,t)K(t,t_1)dt$$

$$= \int_0^s K_2(s,t_1)f(t_1)dt_1$$

yazabiliriz.

$$K_2(s,t_1) = \int_{t_1}^s K(s,t)K(t,t_1)dt \tag{5.7}$$

olduğundan işlemleri aynı şekilde devam ettirirsek,

$$u_n(s) = \int_0^s K_{(n)}(s,t)f(t)dt, \quad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{5.8}$$

olur. $K_n(s,t_1)$ fonksiyonları itere çekirdekler olarak adlandırılmıştır. Bu fonksiyonlar;

$$K_1(s,t_1) = K(s,t)$$

....

$$K_{(n+1)}(s,t) = \int_t^s K(s,z)K_{(n)}(z,t)dz \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{5.9}$$

şeklindeki rekürans bağıntıları yardımıyla tanımlanmıştır. (5.6) ile verilen seriyi, Denklem 5.8 ve Denklem 5.9 ‘u kullanarak yeniden yazarsak,

$$u(s) = f(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_0^s K_{(i)}\,(s,t) f(t) dt$$

olur. $K(s,t)$ çekirdek fonksiyonunun sürekli olduğu varsayıldığından,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \, K_{(i+1)}(s,t)$$

serisi elde edilir. Bu seriye Rezolvent veya çözücü çekirdek denir. Mutlak ve düzgün yakınsak olan bu seriyi $\Gamma(s,t;\lambda)$ ile göstereceğiz. O halde,

$$\Gamma(s,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \, K_{(i+1)}(s,t) \tag{5.10}$$

elde edilir. Çözücü çekirdekde integralin alt sınır değerlerinden bağımsız olmasından dolayı

$$\Gamma(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \int_t^s K(s,y)\Gamma(y,t;\lambda) dy\,, \tag{5.11}$$

yazabiliriz. Böylece $\Gamma(s,t;\lambda)$ çözücü çekirdeğine bağlı olarak Volterra denkleminin çözümünü

$$u(s) = f(s) + \lambda \int_0^s \Gamma(s,t;\lambda) f(t) dt = 0 \tag{5.12}$$

olarak buluruz.

Örnek 5.2. $K(x,t) = x - t$ olan Volterra integral denklemine ait rezolventi hesaplayınız.

Çözüm. $K_{(1)}(x,t) = K(x,t) = x - t$ şeklindedir. Diğer itere çekirdekler de (5.9) ile verilen

$$K_{(n+1)}(x,t) = \int_t^x K(x,y) K_{(n)}\,(y,t) dy$$

rekürans bağıntıları yardımıyla hesaplanabilir.

$$K_{(2)}(x,t) = \int_t^x K(x,y)K_{(1)}\,(y,t)dy = \int_t^x (x-y)(y-t)dy = \int_t^x (-y^2 + xy + yt - xt)dy$$

$$= \frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$K_{(3)}(x,t) = \int_t^x K(x,y)K_{(2)}\,(y,t)dy = \int_t^x (x-y)\left(\frac{(y-t)^3}{3!}\right)dy = \frac{(x-t)^4}{4!}$$

ve böyle devam edilirse,

$$K_{(n)}(x,t) = \int_t^x K(x,y)K_{(n-1)}\,(y,t)dy = \int_t^x (x-y)\, n \frac{(y-t)^n}{n!} dy = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

bulunur ve rezolvent,

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \, K_{(n+1)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda}^{2n} \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\{\sqrt{\lambda}(x-t)\right)\}^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

olarak elde edilir. Bu seri

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

şeklindeki Maclaurin serisidir, yani

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sinh \sqrt{\lambda}\,(x-t)$$

demektir.

5.2. Volterra İntegral Denklemlerinin Laplace Dönüşümü Yardımıyla Çözümü

$$\int_0^s K_1\,(s,t)u(t)dt + \int_0^s K_2\,(s,t)u^{(n)}dt = f(s), \qquad K_2(s,t) \neq 0 \tag{5.13}$$

ile verilen ve Leibnitz koşulunu sağlayan birinci tip Volterra integral denklemi, Laplace Dönüşümü ile ikinci tip Volterra integral denklemine dönüştürülerek çözülebilir. Laplace dönüşümünü uygulayabilmek için integral denklemin çekirdek fonksiyonu konvolüsyon şeklinde olmalıdır. Denklem 5.12' de eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L\big(K_1(s-t) * u(s)\big) + L\left(K_2(s-t) * u^{(n)}(s)\right) = L\big(f(s)\big)$$

$$L\big(f(s)\big) = U(y)\frac{F(y)K_2(y)(y^nU(y) - y^{n-1}u(0) - y^{n-2})u^{'}(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0))}{K_1(y) + y^nK_2(y)},$$

bulunur. Eşitliğin ters Laplace dönüşümü alınırsa çözüme ulaşılır.

Örnek 5.3. $u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(t)dt$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Laplace dönüşümünü kullanarak $u(x)$ denklemini aşağıdaki formda yazalım,

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x 1.u(t)dt$$

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x-t)^0 u(t)dt$$

elde edilir. Denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L\{u(x)\} = L\{1\} + \lambda\, L\left\{\int_0^x 1.u(t)dt\right\}$$

olur. Laplace dönüşümünün kullanımıyla,

$$U(s) = \frac{1}{s} + \lambda\,\frac{U(s)}{s},$$

$$U(s)\left[1 - \frac{\lambda}{s}\right] = \frac{1}{s},$$

$$U(s)\left[\frac{s-\lambda}{s}\right] = \frac{1}{s},$$

$$U(s) = \frac{1}{s-\lambda},$$

elde edilir. Bu eşitlikte ters Laplace dönüşümü kullanılırsa,

$$L^{-1}\{U(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\lambda}\right\}$$
$$u(x) = e^{\lambda x}$$

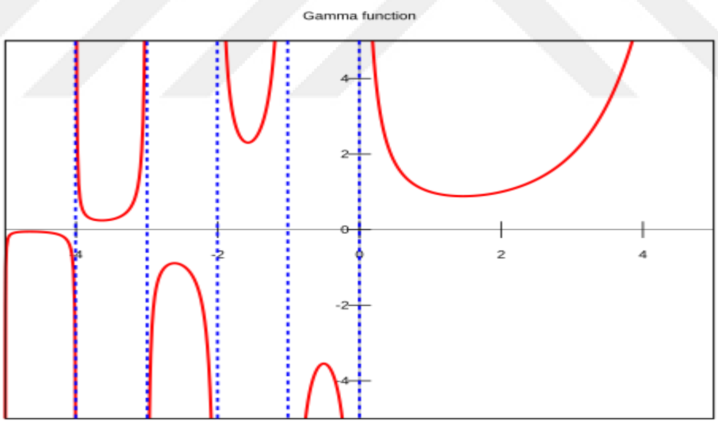
çözümü elde edilir.

5.3. Volterra İntegral Denklemlerinin Gama ve Beta Fonksiyonları (Euler İntegralleri) Yardımıyla Çözülmesi

Gama Fonksiyonu : $s,\ Re\ s > 0$ olmak üzere herhangi bir karmaşık sayı olsun.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1} dt$$

şeklinde tanımlanan $\Gamma(s)$ denklemine gama fonksiyonu veya ikinci çeşit Euler integrali denir. Reel eksen boyunca bir gama fonksiyonunun grafiği Şekil (5.1)'de görüldüğü gibidir [49].



Şekil 5.1. Reel eksen boyunca gamma fonksiyonu

özel olarak $s = 1$ için,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$$

olur. $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1} dt$ fonksiyonuna bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$e^{-t} = u,\ \ t^{s-1}dt = dv$$
$$-e^{-t}dt = du\,, \frac{1}{s}\, t^s = v$$

olup gerekli işlemler yapılırsa,

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^s dt = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

bulunur. Buradan gama fonksiyonunun temel özelliklerinden biri olan

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

bağıntısı elde edilir. Buradan,

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3!$$

$$\dots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n\text{-}1) = (n-1)!$$

olur.

Beta Fonksiyonu : s, y ; $Re\, s > 0,\ Re\, y > 0$ olmak üzere herhangi iki karmaşık sayı olsun.

$$B(s,y) = \int_0^1 t^{s-1}(1-s)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan $B(s,y)$ fonksiyonuna beta fonksiyonu veya birinci çeşit Euler integrali denir.

Gama ve beta fonksiyonları arasındaki ilişkiyi,

$$B(s,y) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(y)}{\Gamma(s+y)}$$

eşitliği ile verebiriz.

$m \geq 0, n > -1, m, n$ reel sayılar ve $\boldsymbol{c}$ herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\int_0^s (s-t)^n u(t)\, dt = cs^m \tag{5.14}$$

şeklinde verilen birinci cins bir Volterra integral denklemini gama ve beta fonksiyonlarını kullanarak çözelim. Denklem 5.14'de $r > -1$ ve reel sayı olmak üzere eşitliğin her iki tarafını $(z-s)^r$ çarpıp, s' e göre integre edersek,

$$\int_0^z (z-s)^r \left[\int_0^s (s-t)^n u(t) dt\right] ds = \int_0^z (z-s)^r c x^m ds \tag{5.15}$$

$$= \int_0^z \left[\int_t^z (z-s)^r (s-t)^n ds\right] u(t) dt$$

$s = t + v(z-v), (ds = (z-t)\, dv)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_t^z (z-s)^r\, (s-t)^n ds = \int_0^1 (z-t-vz+vt)^r\, (vz-vt)^n (z-t) dv$$

$$= (z-t)^{n+r1} \beta(n+1, r+1) = \frac{\Gamma(n+1).\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}\, (z-\ \ t)^{n+r+1} \tag{5.16}$$

$s = vz, (ds = zdv)$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\int_0^x (z-x)^r\, c x^m dx = \int_0^z c(z-vz)^r\, (vz)^m z dv = c z^{m+r+1} \int_0^1 (1-v)^r\, (v)^m dv$$

$$= cz^{m+r+1}\beta(m+1, r+1)$$

$$= c.z^{m+r+1}\frac{\Gamma(m+1).\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)} \ ; \ (m+r+1 > m \geq 0) \qquad (5.17)$$

Denklem 5.15' de, Denklem 5.16 ve Denklem 5.17' yi kullanıp düzenlersek,

$$\int_0^z \frac{\Gamma(n+1).\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}.(z-t)^{n+r+1}u(t)dt = cz^{m+r+1}\frac{\Gamma(m+1).\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

elde ederiz. $\frac{\Gamma(n+1).\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}$ çarpanı sabit olacağından eşitliğin her iki tarafını $\Gamma(r+1)$ ile sadeleştirirsek,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+r+2)}\int_0^z (z-t)^{n+r+1}u(t)dt = cz^{m+r+1}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

buluruz. $n+r+1 = h(h>0)$ olmak üzere,

$$\Gamma(n+r+2) = \Gamma(h+1)$$

dir. $r = h-n-1 \Rightarrow m+r+2 = m+h-n+1$ yazılabileceğinden,

$$\Gamma(m+r+2) = \Gamma(m+h-n+1)$$

elde ederiz. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\int_0^z (z-t)^h u(t)dt = cz^{m+h-n}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(h+1)}{\Gamma(m+h-n+1)\Gamma(n+1)}$$

$$\int_0^z \frac{(z-t)^h}{\Gamma(h+1)}u(t)dt = cz^{m+h-n}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+h-n+1)\Gamma(n+1)}$$

buluruz. Gama fonksiyonunun özelliğinden $\Gamma(h+1) = h!$ olduğundan,

$$\int_0^z (z-t)^h u(t)dt = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+h-n+1)\Gamma(n+1)}\ cz^{m+h-n}$$

alırız. Eşitliğin her iki tarafının z ye göre $h+1$ defa türevini alırsak,

$$u(z) = \frac{\Gamma(m+1)(m+h-n)(m+h-n-1)\ldots(m-n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}\ cz^{m-n-1}$$

veya $m-n+k \neq 0\ (k = 0,1,2,\ldots n)$ için

$$u(z) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n)}\ cz^{m-n-1} \qquad (5.18)$$

olur ki bu (5.14) denkleminin çözümüdür.

Örnek 5.4. $\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt = x^3$ integral denklemini gama beta fonksiyonlarından faydalanarak çözelim.

Çözüm. $n = 2, m = 3, c = 1\ ve\ m-n+k \neq 0\ (k = 0,1,2,\ldots n)$ olduğundan,

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(1) = 0! = 1$$

ve $m-n-1 = 3-2-1 = 0$ olup,

$$u(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n)}\; c.x^{m-n-1} = \frac{6}{2.1}\;.1.x^0 = 3$$

olur. Dolayısıyla verilen Volterra integral denkleminin çözümü,

$$u(x) = 3$$

olarak bulunur.

5.4. Ardışık Yaklaşımlar Metodu

$[0, a]$ aralığında $f(s)'$ in ve $0 \leq s \leq a,\;\; 0 \leq t \leq s$ için $K(s,t)$ sürekli olmak üzere,

$$u(s) = f(s) + \lambda \int_0^s K(s,t)u(t)dt = 0$$

şeklinde verilen ikinci cins bir Volterra integral denklemini ele alalım. $[0, a]$ aralığında sürekli olan bir $u_0(s)$ fonksiyonu için (5.18) eşitliğinde $u(s)$ yerine $u_0(s)$ fonksiyonu koyalım ve elde ettiğimiz yeni fonksiyonu da $u_1(s)$ ile gösterelim.

$$u_1(s) = \; f(s) + \lambda \int_0^s K(s,t)\, u_0(t)dt$$

olur. $u_1(s)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığında süreklidir. Bu şekilde devam edersek $u_0(s), u_1(s), \ldots, u_n(s), \ldots$ fonksiyon dizisi elde ederiz. Burada

$$u_n(s) = \; f(s) + \lambda \int_0^s K(s,t)\, u_{n-1}(t)dt$$

dir. $n \to \infty\; için\;\; \{u_n(s)\}$ dizisi, Volterra integral denkleminin $u(s)$ çözümüne yakınsar.

Örnek 5.5. $u(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt = 0$ integral denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak ve $u_0(x) = 1$ seçerek çözelim.

Çözüm. $u_n(x) = \; f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\, u_{n-1}(t)dt$ formülünü kullanalım.

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = \; 2x + 2 - \int_0^x 1\;\, dt \;=\; x + 2,$$

$$u_2(x) = \; 2x + 2 - \int_0^x (t+2)\, dt = -\frac{x^2}{2} + 2,$$

$$u_3(x) = \; 2x + 2 - \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + 2\right) dt = -\frac{x^3}{3!} + 2,$$

ve böyle devam edilirse,

$$u_n(x) = \; (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + 2$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının $n \to \infty$ için limiti alınırsa verilen denklemin çözümü

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + 2\right\} = u(x)$$

$$u(x) = 2$$

şeklinde bulunur.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tezde ilk olarak integral denklemlerin çeşitli tiplerinin incelenmesi, bu denklemlerin diferansiyel denklemlerle nasıl ilişkili olduğunun ortaya konması ve bu ilişkilerin matematiksel açıdan değerlendirilmesi ele alınmıştır Bir diferansiyel denklemin belirli integral denklemler ile ifade edilebileceği gösterilmiştir. Örneğin, birinci dereceden lineer diferansiyel denklemler belirli sınır koşulları altında integral denklemlerle eşdeğer olabilir. Ayrıca integral denklemlerin uygun türev işlemleri kullanılarak diferansiyel denklemlere dönüştürülebileceği belirlenmiştir. İntegral denklemler için kullanılan Fredholm ve Volterra yöntemleri ile diferansiyel denklemler için kullanılan sınır değer ve başlangıç değer problemleri çözüm yöntemleri arasındaki farklar belirtilerek integral denklemlerin çözümünün, genellikle diferansiyel denklemlerin çözümüne göre daha karmaşık olduğu, ancak belirli durumlarda integral denklemlerin daha doğrudan ve pratik çözümler sunduğu görülmüştür. Volterra integral denklemleri, matematiksel modelleme ve uygulamalarda sıkça karşılaşılan denklemlerdir. Analitik çözüm yöntemlerini incelerken belirli tipteki Volterra integral denklemleri için mevcut olan açık formül çözümleri belirlenip örneklerle gösterilmiştir. Birinci ve ikinci tür Volterra integral denklemlerinin çözümleri üzerinde durulurken çözücü çekirdek, gama-beta fonksiyonları ve Laplace dönüşümlerinden faydalanılmıştır. Ayrıca ardışık yaklaşım metodu yardımıyla çözümün oluşturulması ve yakınsaklığı detaylandırılmıştır. Volterra integral denklemlerinin diferansiyel denklemlere dönüştürülerek çözülmesi incelenmiştir. Böylece mühendislik, fizik ve biyoloji gibi alanlardaki uygulamalarında kullanılan bu denklemler için belirli yöntemlerin uygulanmasının gerçek dünya problemlerinde ne kadar etkili olduğu görülmüştür.

7. SONUÇLAR

İntegral denklemler, sınırlarının sabit veya değişken olmasına göre Fredholm ve Volterra denklemleri olarak sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırma, denklemlerin çözüm yöntemlerini ve uygulama alanlarını belirlemede kritiktir. Bu tez, integral denklemlerin sınıflandırılması ve diferansiyel denklemlerle olan ilişkileri konusundaki bilgi birikimini genişletmiştir. Teorik analizler ve pratik uygulamalar, bu denklemlerin anlaşılmasını ve çözülmesini kolaylaştırmaktadır. Sınıflandırma ve dönüşüm yöntemlerinin geliştirilmesi, daha geniş bir problem yelpazesinin çözülebilmesine olanak tanımaktadır. Birinci tür ve ikinci tür integral denklemleri arasındaki temel farklar ve bu farkların çözüm yaklaşımlarını nasıl etkilediği ortaya konmuştur. Birinci tür denklemlerin çözümünde genellikle doğrudan yöntemler kullanılırken, ikinci tür denklemler için iteratif yöntemlerin daha uygun olduğu görülmüştür. Lineer ve lineer olmayan integral denklemler arasındaki farklar ve bu denklemler için geliştirilen çözüm teknikleri detaylandırılmıştır. Diferansiyel denklemlerin belirli sınır koşulları altında integral denklemlerle eşdeğer olabileceği gösterilmiştir. Bu dönüşüm, özellikle sınır değer problemlerinde önemli avantajlar sağlamaktadır. İntegral denklemlerin türev işlemleri kullanılarak diferansiyel denklemlere dönüştürülebileceği ve bu dönüşümün, çözümlerin daha anlaşılır ve yönetilebilir olmasını sağladığı belirlenmiştir. Ayrıca çalışmanın önemli bir kısmı Volterra integral denklemleri üzerine yapılan araştırmaların genel değerlendirmesini ve elde edilen önemli bulguları özetler. İntegral ve diferansiyel denklemlerin mühendislikteki uygulamaları önemli yere sahip olup çeşitli problemler üzerinde integral ve diferansiyel denklemlerin uygulanabilirliği ve bu denklemlerin birbirine dönüştürülmesi ile elde edilen çözümler değerlendirilmiştir. Lineer denklemler için geliştirilen yöntemlerin, lineer olmayan denklemlere nazaran daha basit ve hızlı çözümler sunduğu, ancak lineer olmayan denklemler için daha özel yöntemler geliştirilmesi gerektiği anlaşılmıştır. Analitik çözüm yöntemlerinin belirli tipteki Volterra integral denklemleri için etkin ve hızlı çözümler sunduğu gösterilmiştir. Özellikle, basit ve lineer denklemler için açık formül çözümleri etkilidir. Küçük parametrelerin varlığında ardışık yaklaşım yönteminin, çözümün hızlı bir şekilde yakınsamasını sağladığı gözlemlenmiştir. Ancak, bu yöntemlerin daha karmaşık ve lineer olmayan denklemlerde sınırlamaları bulunmaktadır. Çözücü çekirdeğin, özellikle nonlineer denklemler için uygun bir yaklaşım olduğu ve çeşitli örnek problemler üzerinde başarılı sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Klasik sayısal yöntemlerin, Volterra integral denklemlerinin çözümünde yüksek doğruluk sağladığı belirlenmiştir. Volterra integral denklemlerinin diferansiyel denklemlere dönüştürülmesiyle elde edilen çözümlerin yüksek doğruluk ve kararlılık sağladığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, Volterra integral denklemleri üzerine yapılan bu tez çalışması, analitik ve sayısal çözüm yöntemlerinin değerlendirilmesi açısından önemli bulgular sunmakta ve gelecekteki araştırmalar için değerli öneriler sağlamaktadır. Bu çalışma, Volterra integral denklemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerin geliştirilmesi ve bu denklemlerin geniş bir uygulama alanında daha etkin bir şekilde kullanılabilmesi için önemli bir katkı sağlamaktadır.

ÖNERİLER

Daha karmaşık ve lineer olmayan integral denklemler için yeni analitik ve sayısal yöntemlerin geliştirilmesi gerekmektedir. Bu yöntemler, daha karmaşık sistemlerin modellenmesinde önemli katkılar sağlayabilir. Analitik ve sayısal yöntemlerin birleştirildiği hibrid çözüm yöntemleri üzerinde çalışmalar yapılmalıdır. Bu tür yöntemler, her iki yaklaşımın avantajlarını bir araya getirerek daha etkili çözümler sunabilir. İntegral ve diferansiyel denklemlerin biyoloji, ekonomi, mühendislik gibi farklı alanlardaki uygulamaları üzerinde daha fazla çalışma yapılmalıdır. Bu alanlarda kullanılan modellerin iyileştirilmesi ve denklemlerin etkin bir şekilde uygulanabilmesi için disiplinlerarası işbirlikleri teşvik edilmelidir. Gerçek dünya problemleri üzerinde yapılan çalışmalar, teorik sonuçların pratikteki geçerliliğini ve uygulanabilirliğini göstermek açısından önemlidir. Daha karmaşık ve lineer olmayan Volterra integral denklemleri için yeni analitik yöntemlerin geliştirilmesi ve mevcut yöntemlerin iyileştirilmesi gerekmektedir. Daha hızlı ve verimli sayısal algoritmaların geliştirilmesi, özellikle büyük ölçekli problemlerde önemli bir gereksinim olarak ortaya çıkmıştır. Paralel hesaplama ve GPU tabanlı çözümler gibi ileri teknolojilerin kullanımıyla, sayısal çözümlerin hız ve doğruluğunun artırılması mümkündür. Volterra integral denklemlerinin biyoloji, ekonomi, mühendislik ve diğer disiplinlerdeki uygulamalarının daha derinlemesine incelenmesi gerekmektedir. Gerçek dünya problemleri üzerinde yapılan uygulamalar, yöntemlerin pratikteki etkinliğini değerlendirmek için önemlidir. Teorik sonuçların, geniş bir problem seti üzerinde deneysel olarak doğrulanması ve bu sonuçların pratik uygulamalara yansıtılması gerekmektedir. Bu öneriler, Volterra integral denklemleri üzerine yapılacak gelecekteki araştırmalar için yol gösterici olabilir ve bu alandaki çalışmaları daha ileriye taşıyabilir.

KAYNAKLAR

[1] Green, C.D. (1969). *Integral equations methods*, Barnesand Noble, New York

[2] Hochstadt, H. (1973). *Integral equations*, Wiley, New York

[3] Cordunenau, C. (1991). Integral equations and applications, *Cambridge University Press*, 366p, Cambridge

[4] Ekici, M. (2010). *Lineer ve Singüler Olmayan İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma:* Fracture Mekanik Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara

[5] Vanani, S.K. and Soleymani Tau, F. (2013). approximate solution of weakly singular volterra ıntegral equations, *Math. Comput. Modell*, C.57, 494–502.

[6] Liao, S.J. (2009). Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, C.14, 983-997.

[7] Aksoy, Y. (1983). *İntegral Denklemler*, Yıldız Üniversitesi Yayınları, Cilt:1,Sayı:166.

[8] Porter, D. and Stirling, D.S.G. (1990). Integral equations, Cambridge University Press, 7-9.

[9] Abel, N. H. (1841). Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* (in French). Paris, 176–264.

[10] Bois-Reymond, D. (1888). Photograph of the Eye by Flash of Magnesium, *Nature*, 38(966), p.15.

[11] Fourier, J. (1827). Remarques générales sur l'application du principe de l'analyse algébrique aux équations transcendantes. Vol. 10. Paris, *Memoirs of the Royal Academy of Sciences of the Institut de France*, 119–146.

[12] Fourier, J. (1833). Mémoire d'analyse sur le mouvement de la chaleur dans les fluides, *Memoirs of the Royal Academy of Sciences of the Institut de France*, C. 12, 507–530.

[13] Huygens, C.(1888-1940). *Oeuvres Completes*, Societe Hollondaise des Science, Haga

[14] Poisson, S.D. (1823). "Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries" *J. Ecole R. Polytechn.* , C. 12, 404–509.

[15] Liouville, J. (1837). Sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en series, etc, Second M6moire, *Journal de Mathèmatiques*, C. 2, no. 1, 16-35.

[16] Volterra, V. (1930). *The Theory of Functionals and of Integral and Integro differential Equations*, Dover, New York

[17] Volterra, V. (1931). *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris

[18] V. Volterra and D'ancona, U. (1935). Les Associations Biologiques au point de vue Mathématique, *Actualites Scientifique et Industrielles*, no. 243, Hermann, Paris

[19] Fredholm, I. (1900). Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet, *Kong. Vetenskaps-Akademiens FBRH*, Stockholm (in French), 39–46. JFM 32.0435.02.

[20] Fredholm, E.I. (1903). Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math*. C.27, 365–390.

[21] Neumann, J. (1928). Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift* (in German), C. 27 (1), 669–752.

[22] Lovitt, W.V. (1950). *Linear integral equations,* Dover Publications Inc, New York

[23] Miller, R.K. (1970). Asymptotic stability properties of linear Volterra integro differential equations. No. NASA-CR-116797.

[24] Bayraktar, M. (2005). *Fonksiyonel Analiz,* Gazi Kitabevi, Ankara

[25] Karadeniz, A.A. (1983). *Yüksek Matematik, Cilt-3,* Çağlayan Kitabevi, Aralık, s. 427-428.

[26] Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. (2008). Handbook of integral equations, *2nd Edition, Chapman &Hall /CRC,* USA, 573, 579,637-638.

[27] Linz, P. (1987). Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations, *Society for Industrial and Applied Mathematics.*

[28] Delves, L.M. and Mohammed, J.L. (1992). Computational methods for integral equations, *Cambridge University press,* Cambridge, 115–119.

[29] Kanar, S. (2008). *İntegral Denklemleri Ve Çözüm Yöntemleri*. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa.

[30] Hackbusch, W. (1995). *Integral equations theory and numerical treatment*, Birkhauser, Basel

[31] Kythe, P.K and Puri, P. (2002). *Computational methods for linear ıntegral equations,* Springer, New York

[32] Darania, P. and Ebadian, A. (2007). A method for the numerical solution of the integro-differential equations, *Appl. Math. Comput*. 188(1), 657-668.

[33] Lakestani, M. and Saray, B.M. Dehghan, M. (2011). Numerical solution for the weakly singular fredholm integro-differential equations using legendre multi wavelets, *J. Comput. Appl. Math*. 235, 3291-3303.

[34] Wazwaz, A.M. (2011). Linear and nonlinear integral equations methods and applications, *Higher Education Press,* Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, London, New York, 34, 40-41, 49, 121-166, 342-458, 469-510.

[35] Jerri, A.A. (1985). Introduction to integral equations with applications, *Marcel Dekker,* Inc, New York, 15, 155, 188-200

[36] Porshokouhi, M.G. and Ghanbari, B. and Rahimi, B. (2011). Numerical Solution for Non- Linear Fredholm Integral Equationsby Newton–Kantorovich Method and Comparison with HPM and ADM, *International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology*, no.3, 44-49.

[37] Dimov, I., Zlatev, Z., Farago, I., Havasi, A. (2017). *Richardson Extrapolation*, *Practical Aspects and Applications*, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, ISBN 9783110533002.

[38] Shi, L. Iqbal, J. Riaz, F. Arif, M. (2023). Gauss Quadrature Method for System of Absolute Value Equations, *Mathematics*. C.11(9), 2069.

[39] Eslami, M. Mirzazadeh, M. (2014). Study of convergence of Homotopy perturbation method for two-dimensional linear Volterra integral equations of the first kind, *Int. J. Comput. Sci. Math*, C.5(1), 72-80.

[40] He, J.H. (2000). A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems. *Intl. J. Non-Linear Mech*, C.35(1), 37-43.

[41] Maleknejad, K., Najafi, E. (2001). Numerical solution of nonlinear volterra integral equations using the idea of quasilinearization, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, C.16, 93-100.

[42] Maleknejad, K., Shahrezaee, M. (2004). Using Runge–Kutta method for numerical solution of the system of Volterra integral equation. *Appl. Math. Comput*. C.149, 399-410.

[43] Maleknejad, K., Sohrabi, S., Rostami, Y. (2007). Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by using Chebyshev polynomials, *Appl. Math. Comput*. C.188, 123-128.

[44] Masouri, Z., Babolian, E., Hatamzadeh, Varmazyar, S. (2010). An expansion–iterative method for numerically solving Volterra integral equation of the first kind, *Comput. Math. Appl*. C.59, 1491-1499.

[45] Ngarasta, N., Rodoumta, K., Sosso, H. (2009). The decomposition method applied to systems of linear Volterra integral equations of the first kind, *Kybernetes.* C. 38(3/4), 606-614.

[46] Odibat, Z.M. (2008). Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels, *Math. Comput. Modelling*, C. 48, 1144-1149.

[47] Rabbani, M., Maleknejad, K., Aghazadeh, N. (2007). Numerical computational solution of the Volterra integral equations system of the second kind by using an expansion method, *Appl. Math. Comput*. C.187, 1143-1146.

[48] Fox, R.O. (2009). Higher-order quadrature-based moment methods for kinetic equations, *J. Comput. Phys*., C. 228, 7771-7791.

[49] https://tr.wikipedia.org/wiki/Gama fonksiyonu, Erişim: Ağustos 2016