

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

**p-LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER KESİRLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN
VARLIĞI ÜZERİNE**

Furkan ERKAN

Tez Danışman: Doç. Dr. Nüket AYKUT HAMAL

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı

İzmir - Bornova

2024

FURKAN ERKAN tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “p-LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI ÜZERİNE” başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 08.08.2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Doç. Dr. Nüket AYKUT HAMAL

Raportör Üye : Prof. Dr. İlkay KARACA

Üye : Doç. Dr. Şerife FAYDAOĞLU

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “p-LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI ÜZERİNE” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

08/08/2024

İmzası

Furkan Erkan

ÖZET

**p -LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER KESİRLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN
VARLIĞI ÜZERİNE**

ERKAN, Furkan

YÜKSEK LİSANS TEZİ, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nüket AYKUT HAMAL

08/08/2024, 68 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu hakkında kapsamlı bilgiler sunulmuş ve bu alanda yapılmış çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanacağımız tanımlar, önermeler, yardımcı özellikler ve teoremler ele alınmaktadır.

Üçüncü bölümde, p -Laplacian operatörlü singüler kesirli sınır değer probleminin pozitif çözümleri, Avery-Peterson sabit nokta teoremi ile elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini göstermek amacıyla bir örnek sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, daha genel bir denklem tipine sahip olan p -Laplacian operatörlü singüler ψ -Hilfer kesirli sınır değer probleminin çözümleri incelenmiştir. İlk olarak, bu problemin tek bir çözüme sahip olduğu Banach Daraltan Dönüşüm Prensibi kullanılarak gösterilmiştir. Ardından, elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için iki örnek sunulmuştur. Daha sonra, ele alınan bu problemin en az bir çözüme sahip olduğu Krasnoselskii sabit nokta teoremi kullanılarak gösterilmiştir.

Son bölümde, elde edilen bulguların bir sonucu olarak çalışmanın tüm sonuçları kapsamlı bir şekilde özetlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Riemann-Liouville kesirli türev, ψ -Hilfer kesirli türev, singüler, p -Laplacian, Avery- Peterson sabit nokta teoremi, Krasnoselskii sabit nokta teoremi, Banach daraltan dönüşüm prensibi

ABSTRACT

ON THE EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR
SINGULAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH P -LAPLACIAN OPERATOR

ERKAN, Furkan

MSc Thesis in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nuket AYKUT HAMAL

08/08/2024, 68 pages

This thesis consists of five main chapters.

In the first chapter, comprehensive information about the thesis topic is presented, along with a review of the existing literature in this field.

The second chapter deals with the definitions, propositions, auxiliary properties, and theorems that will be used throughout the thesis.

The third chapter focuses on the positive solutions of the singular fractional boundary value problem with p -Laplacian operator, obtained using the Avery-Peterson fixed point theorem. Additionally, an example is provided to demonstrate the applicability of the obtained results.

In the fourth chapter, the solutions of the singular ψ -Hilfer fractional boundary value problem, which has a more general equation type, are investigated. Firstly, it is shown that this problem has a unique solution using the Banach contraction mapping principle. Then, two examples are presented to illustrate the practical applicability of the obtained results. Subsequently, the existence of at least one solution to this problem is demonstrated using the Krasnoselskii fixed point theorem. The final chapter provides a comprehensive summary of all the results obtained in this study.

Keywords: Riemann-Liouville fractional derivative, ψ -Hilfer fractional derivative, singular, p -Laplacian, Avery-Peterson fixed point theorem, Krasnoselskii fixed point theorem, Banach contraction mapping principle.

ÖNSÖZ

Kesirli sınır değer problemleri üzerine çalışmalara, danışmanım Sayın Doç. Dr. Nüket Aykut Hamal'ın yönlendirmesiyle başladım. Bu alanda yaptığım araştırmalar, kesirli sınır değer problemlerinin mühendislikte yapısal analiz, ısı transferi, akışkanlar mekaniği, fizikte dalga yayılımı, ısı iletkenliği ve epidemiyolojide hastalık yayılması gibi olayların modellenmesinde çeşitli uygulama potansiyelleri olduğunu gösterdi. Bu çeşitlilik ve uygulama alanları, bu alana olan ilgimi artırdı ve beni daha fazla çalışmaya teşvik etti.

Literatürde önemli bir yere sahip olan kesirli sınır değer problemleri hakkında incelediğim makaleler ve okuduğum kitaplar, tez konumun şekillenmesinde bana büyük ölçüde rehberlik etti.

Yüksek lisans çalışmam boyunca, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve engin bilgi ve deneyimlerini büyük bir özveriyle paylaşan danışmanım Sayın Doç. Dr. Nüket Aykut Hamal ve Sayın Öğr. Gör. Dr. Ahmet Hamal'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Değerli rehberlikleri ve yardımları sayesinde tez yazma sürecinde en büyük desteği onlardan aldım.

Bu tez, 123F242 proje numarası ile 1002-B Hızlı Destek Modülü kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir. Bu tezin gerçekleşmesini sağlayan TÜBİTAK'a desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İZMİR

08/08/2024

Furkan Erkan

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TEOREMLER VE TANIMLAR	8
3 p -LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI	14
3.1 Sınır Değer Probleminin Çözümü	14
3.2 Avery-Peterson Sabit Nokta Teoremi ve Uygulaması	21
4 p -LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER ψ -HİLFER KE- SİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN VARLIK VE TEKLİK SONUÇLARI	28
4.1 Sınır Değer Probleminin Çözümü ve Green Fonksiyonu	28
4.2 Banach Daraltan Dönüşüm Prensibi ve Uygulaması	38
4.3 Krasnoselskii sabit nokta teoremi	46
5 SONUÇ	60
KAYNAKLAR DİZİNİ	65
TEŞEKKÜR	66
ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^n([a, b], \mathbb{R})$	$[a, b]$ aralığındaki, n . mertebeden reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
ϕ_p	p -Laplacian operatörü
$G(t, s)$	Green fonksiyonu
$\ \varkappa\ $	$\varkappa$ fonksiyonun normu
D_{0+}^{α}	α mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
I_{a+}^{α}	α mertebeden ψ -Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}^CD_{a+}^{\alpha, \psi}$	α mertebeden sol-yanlı ψ -Caputo kesirli türev operatörü
${}^HD_{a+}^{\alpha, \beta; \psi}$	α mertebeden ve β parametrelili sol-yanlı ψ -Hilfer türev operatörü
$I_{a+}^{\alpha, \psi}$	α mertebeden sol-yanlı ψ -Riemann-Liouville kesirli türev operatörü

1 GİRİŞ

Kesirli analiz, Leibniz'in 1695 yılında L'Hospital'e yazdığı bir mektupta "Fonksiyonun n . türevi için $n = 1/2$ olsaydı sonuç ne olurdu?" sorusuyla ortaya çıkmıştır. Leibniz ise "Bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı bariz bir paradoks" şeklinde cevap vermiştir. Leibniz'in yanıtı, aradan geçen 300 yıl boyunca yapılan çalışmalara bakıldığında doğru çıkmıştır. Fourier, Euler, Laplace, Liouville ve Riemann gibi birçok bilim insanı kesirli analiz ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Bununla birlikte, uygulamalı bilim alanlarında karşılaşılan bazı problemler için kesirli türev tanımları yeterli değildir ve bu da yeni kesirli türev tanımlarının ortaya çıkmasına neden olmuştur. Kesirli türev tanımlarından en sık karşılaşılanlara örnek olarak; Riemann-Liouville kesirli türev, Caputo kesirli türev, Grünwald-Letnikov kesirli türev, uyumlu (conformable) kesirli türev, Beta türev ve Lokal M-türev verilebilir.

Bir modele kesirli mertebeden bir türevin dâhil edilmesi, önemli gerçek parametrelerin göz ardı edilmesinden kaynaklanan yanlışlığı azaltmaktadır. Kesirli türev operatörleri, klasik sistemlere kıyasla gerçek dünya problemlerinin modellerinde daha büyük serbestlik derecesine olanak sağlamakta ve bu tür problemler gerçek dünyadaki sistemlerin davranışlarını uygun şekilde ifade etmektedir. Kesirli mertebeden türeve sahip denklemler tam sayılı mertebeden denklemlere göre gerçeğe daha yakın sonuçlar verdiği için bilim ve teknolojinin her alanında önemli bir yere sahiptir. Bu türevler, sadece teorik ve uygulamalı matematik alanında değil, aynı zamanda fizik, kimya, mühendislik alanları başta olmak üzere genetik, tıp, biyoloji, ekonomi ve istatistik gibi çeşitli araştırma alanlarında da önemli bir rol oynamaktadır.

Gözenekli bir ortamdaki türbülanslı akış temel bir mekanik problemidir. Bu tür problemleri incelemek için ilk defa Leibenson (1945), p -Laplacian operatörlü diferansiyel denklemini tanıtmıştır. p -Laplacian operatörlü sınır değer problemleri buzul bilimi (glaciology), doğrusal olmayan esneklik, popülasyon biyolojisi, zemin mekaniği ve Newtonsal olmayan mekanik gibi farklı disiplinlerde uygulamalara sahiptir. Bu uygulamalarından dolayı, p -Laplacian

operatörlü kesirli sınır değer problemleri çok ilgi görmektedir.

Doğa bilimleri ve mühendislikte karşılaşılan birçok fiziksel olay genellikle tekil (singüler) davranışlar sergilemektedir. Örneğin, akışkanlar mekaniğinde bir sıvı, kırılma oluşturmak için şiddetli bir darbeye maruz kaldığında tekil (singüler) noktalar bu kırılmayı takip etmektedir. Tekil (singüler) noktaya sahip sınır değer problemleri gaz dinamikleri, kimyasal reaksiyonlar, nükleer fizik, atomik hesaplamalar ve atomik yapıların çalışmaları gibi matematik ve fizikte birçok problemin modellemesinde değerli bir araçtır.

p -Laplacian operatörünün ve tekilliğin (singülerliğin) önemlerinden dolayı, p -Laplacian operatörlü ve singüler noktaya sahip sınır değer problemleri sadece matematik alanında değil diğer bilim alanlarında da oldukça ilgi görmektedir.

Son zamanlarda, p -Laplacian operatörünün ve tekilliğin (singülerliğin) önemlerinden dolayı p -Laplacian operatörlü ve singüler sınır değer problemleri ile ilgili bir çok önemli sonuç ortaya çıkmıştır. Bunlara örnek olarak Cabada and Staněk (2012), Alsaedi et al. (2020), Liu et al. (2020), Jong et al. (2020), Tudorache and Luca (2021a), Tudorache and Luca (2021b), Ahmad et al. (2023), Zhao and Mao (2021), Caballero et al. (2023) ve Gu et al. (2023) makaleleri verilebilir.

Ji (2018) de,

$$\begin{cases} [\phi_p(D_{0+}^\alpha \kappa(t))] + f(t, \kappa(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ \kappa'(0) = 0, \quad \kappa(1) - \gamma \kappa(\eta) = 0, \end{cases}$$

p -Laplacian operatörlü singüler kesirli sınır değer problemi için pozitif çözümlerin varlığını araştırmıştır. Burada, $1 < \alpha \leq 2$, D_{0+}^α Caputo kesirli türevi ve $f(t, \kappa)$, $\kappa = 0$ da singülerdir.

Guo et al. (2016) da,

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^\alpha \kappa(t) + f(t, \kappa(t), \kappa'(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ \kappa(0) = \kappa''(0) = 0, \quad \kappa'(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \kappa(\zeta_i), \end{cases}$$

Avery-Peterson sabit nokta teoremini kullanarak, singüler kesirli sınır değer problemini için pozitif çözümlerin varlığını araştırmıştır. Burada, $2 < \alpha \leq 3$,

$\mu_i \geq 0$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_{i-1} < \zeta_i < \dots < 1$ ($i = 1, 2, \dots$), D_{0+}^α Caputo kesirli türevi ve $f(t, \varkappa, y)$, $t = 0$ noktasında singülerdir.

Henderson and Luca (2017) de,

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha \varkappa(t) + \lambda f(t, \varkappa(t)) = 0, & t \in (0, 1), \\ \varkappa(0) = \varkappa'(0) = \dots = \varkappa^{(n-2)}(0) = 0, & D_{0+}^p \varkappa(t)|_{t=1} = \sum_{i=1}^k \mu_i D_{0+}^q \varkappa(t)|_{t=\zeta_i}, \end{cases}$$

singüler kesirli sınır değer probelemi için pozitif çözümlerin varlığını araştırmıştır. Burada $\alpha \in (n-1, n]$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$ ($k \in \mathbb{N}$) için $\zeta_i \in \mathbb{R}$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_k < 1$ ve f , $t = 0$ veya $t = 1$ noktasında singülerdir.

Tudorache and Luca (2021a) de,

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha \varkappa(t) + \lambda h(t) f(t, \varkappa(t)) = 0, & t \in (0, 1), \\ \varkappa(0) = \varkappa'(0) = \dots = \varkappa^{(n-2)}(0) = 0, & D_{0+}^{\beta_0} \varkappa(1) = \sum_{i=1}^k \int_0^1 D_{0+}^{\beta_i} \varkappa(t) dH_i(t), \end{cases}$$

singüler kesirli sınır değer probelemi için pozitif çözümlerin varlığını araştırmıştır. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (n-1, n]$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $f(t, \varkappa)$, $\varkappa = 0$ ve $h(t)$, $t = 0$ noktasında singülerdir.

Üçüncü bölümde, yukarıdaki problemlerden motive olarak, p -Laplacian operatörlü singüler kesirli sınır değer problemini ele alacağız:

$$\begin{cases} [\phi_p(D_{0+}^\alpha \varkappa(t))] + f(t, \varkappa(t), \varkappa'(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ \varkappa(0) = \varkappa'(0) = 0, & D_{0+}^{\alpha-1} \varkappa(1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i D_{0+}^{\alpha-1} \varkappa(\zeta_i). \end{cases} \quad (1.1)$$

Burada, D_{0+}^α , α mertebeden standart Riemann-Liouville kesirli türevidir. $\alpha \in \mathbb{R}$, $2 < \alpha \leq 3$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, k-2$ için $\zeta_i \in \mathbb{R}$ ve $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_{k-2} < 1$, $\phi_p(\varsigma) = \varsigma \cdot |\varsigma|^{p-2}$ ($\varsigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $\phi_p(0) = 0$, $p > 1$, $\phi_p^{-1}(\varsigma) = \phi_q(\varsigma)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(t, \varkappa, y) : (0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $t = 0$ noktasında singülerdir.

Diğer taraftan, literatürde Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinden daha genel kesirli türevler de mevcuttur. R. Hilfer, Hilfer (2000) makalesinde, bu bilinen tanımlardan daha genel bir kesirli türev tanımı

yapmıştır. $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ve β parametrelili sol-yanlı Hilfer kesirli türevi şu şekilde ifade edilir:

$${}^H D_{a+}^{\alpha,\beta} = I_{a+}^{\beta(n-\alpha),\psi} D^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $0 \leq \beta \leq 1$, $n-1 < \alpha < n$, $D = \frac{d}{dt}$ ve I_{a+}^γ , γ mertebeden sol-yanlı Riemann-Liouville kesirli integralidir.

- $\beta = 0$ ise ${}^H D_{a+}^{\alpha,0} = {}^{RL} D_{a+}^\alpha f(t)$, $t \in [a, b]$, $f(t)$ fonksiyonunun sol-yanlı Riemann-Liouville kesirli türevi elde edilir.
- $\beta = 1$ ise ${}^H D_{a+}^{\alpha,1} = {}^C D_{a+}^\alpha f(t)$, $t \in [a, b]$, $f(t)$ fonksiyonunun sol-yanlı Caputo kesirli türevi elde edilir.

Burada ${}^{RL} D_{a+}^\alpha$, α mertebeden sol-yanlı Riemann-Liouville kesirli diferansiyel operatörü, ${}^C D_{a+}^\alpha$, α mertebeden sol-yanlı Caputo kesirli diferansiyel operatörüdür. Hilfer kesirli türevin bazı özellikleri ve uygulamaları için Hilfer (2000), Asawasamrit et al. (2018), Malahi et al. (2019), Wongcharoen et al. (2020), Nuchpong et al. (2021), Cheng and Xu (2022) ve Meng et al. (2022) makalelerine bakılabilir.

Kilbas et al. (1999) da, bir $f(t)$ fonksiyonun α mertebeden sol-yanlı ψ -Riemann-Liouville kesirli türevi: $I_{a+}^{\alpha,\psi}$, α mertebeden sol-yanlı ψ -Riemann-Liouville kesirli integrali olmak üzere

$$D_{a+}^{\alpha,\psi} f(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha,\psi} f(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, $n \in \mathbb{N}$, $n-1 < \alpha < n$, $0 \leq \beta \leq 1$, $f, \psi \in C^n([a, b])$ ve ψ her $t \in [a, b]$ için $\psi'(t) \neq 0$ olacak şekilde artan bir fonksiyondur.

Almeida (2017) de, bir $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden sol-yanlı ψ -Caputo kesirli türevi:

$${}^C D_{a+}^{\alpha,\psi} f(t) = I_{a+}^{n-\alpha,\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n f(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, $n \in \mathbb{N}$, $n-1 < \alpha < n$, $0 \leq \beta \leq 1$, $f, \psi \in C^n([a, b])$ ve ψ her $t \in [a, b]$ için $\psi'(t) \neq 0$ olacak şekilde artan bir fonksiyondur.

Bu yeni kesirli türevlerle ilgili çalışmalar için Jiang and Bai (2022) ve Boulares et al. (2023) makalelerine bakılabilir.

Sousa and De Oliveira (2018) de, bir $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ve β parametrelili sol-yanlı ψ -Hilfer türevi

$${}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = I_{a^+}^{\beta(n-\alpha),\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha),\psi} f(t) = I_{a^+}^{(\gamma-\alpha),\psi} D_{a^+}^{\gamma,\psi} f(t) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \alpha < n$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$, $f, \psi \in C^n([a, b])$ ve ψ her $t \in [a, b]$ için $\psi'(t) \neq 0$ olacak şekilde artan bir fonksiyondur.

Bu türev yukarıda tanımlanan kesirli mertebeden türevlerin en genelidir. Sol-yanlı ψ -Hilfer kesirli türev operatörü kullanılarak, α ve β parametrelerinin limitleri alınarak ve uygun ψ fonksiyonu seçilerek kesirli türevlerin geniş bir sınıfı elde edilebilir.

- (1.2) denkleminin her iki tarafının $\beta \rightarrow 1$ için limiti alındığında

$${}^H D_{a^+}^{\alpha,1;\psi} f(t) = {}^C D_{a^+}^{\alpha,\psi} f(t)$$

α mertebeden sol-yanlı ψ -Caputo kesirli türevi elde edilir.

- (1.2) denkleminin her iki tarafının $\beta \rightarrow 0$ için limiti alındığında

$${}^H D_{a^+}^{\alpha,0;\psi} f(t) = D_{a^+}^{\alpha,\psi} f(t)$$

α mertebeden sol-yanlı ψ -Riemann-Liouville kesirli türevi elde edilir.

- $\psi(t) = t$ olsun. Bu durumda, (1.2) denkleminin her iki tarafının $\beta \rightarrow 1$ için limiti alındığında

$${}^H D_{a^+}^{\alpha,1;t} f(t) = {}^C D_{a^+}^{\alpha} f(t)$$

α mertebeden sol-yanlı Caputo kesirli türevi elde edilir.

- $\psi(t) = t$ olsun. Bu durumda, (1.2) denkleminin her iki tarafının $\beta \rightarrow 0$ için limiti alındığında

$${}^H D_{a+}^{\alpha,0;t} f(t) = D_{a+}^{\alpha} f(t)$$

α mertebeden sol-yanlı Riemann-Liouville kesirli türevi elde edilir.

Mevcut araştırmalarda, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinden daha genel olan, aşağıdaki gibi ψ -Caputo ve ψ -Hilfer kesirli türevlerini içeren sınır değer problemleri yer almaktadır.

Wahash et al. (2020) de,

$$\begin{cases} {}^c D_{a+}^{\alpha;\psi} = f(t, \varkappa(t)), & t \in (0, b], \quad b > 0, \\ \varkappa(0) = \varkappa_0, \end{cases}$$

bir diğer ψ fonksiyonuna göre sol genelleştirilmiş Caputo kesirli türevini içeren singüler kesirli diferansiyel sınır değer problemini çalışmışlardır. Burada, $0 < \alpha \leq 1$, ${}^c D_{a+}^{\alpha;\psi}$ ψ -Caputo kesirli türevi ve $f : (0, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t, \cdot) = \infty$ dur.

Sousa and De Oliveira (2018) de tanımlanan ve geniş bir kesirli türev sınıfını kapsayan ψ -Hilfer kesirli türevi ile ilgili çalışmalar, son zamanlarda literatürde yerlerini almaya başlamıştır. Bunlara örnek olarak, Abdelhedi (2021), Norouzi and N'Guérékata (2021), Jajarmi et al. (2022) ve Sudsutad et al. (2023) makaleleri verilebilir.

Ntouyas and Vivek (2021) de,

$$\begin{cases} ({}^H D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} + k {}^H D_{a+}^{\alpha-1,\beta;\psi}) \varkappa(t) = f(t, \varkappa(t)), & t \in [a, b], \\ \varkappa(a) = 0, \quad \varkappa(b) = \sum_{j=1}^l \eta_j \varkappa(\xi_j) \end{cases}$$

ψ -Hilfer kesirli sınır değer probleminin varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Burada, $\alpha \in (1, 2)$, $\beta \in [0, 1]$, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $j = 1, 2, \dots, l$ için $\eta_j, k \in \mathbb{R}$ ve $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_l < b$ dir.

Alsaedi et al. (2023) de,

$$\begin{cases} \left(\phi_p \left({}^H D_{0+}^{\alpha, \beta; \psi} \mathfrak{x}(t) \right) \right)' + f(t, \mathfrak{x}(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ \mathfrak{x}(0) = 0, \quad {}^H D_{0+}^{\alpha, \beta; \psi} \mathfrak{x}(0) = 0, \quad \mathfrak{x}(1) = \sum_{j=1}^l \eta_j I_{0+}^{\varphi_j; \psi} \mathfrak{x}(\zeta_j), & 0 < \zeta_i < 1, \quad \eta_i \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

p -Laplacian operatörlü ve ψ -Hilfer kesirli türev içeren lineer olmayan sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini incelemişlerdir. Burada, $\alpha \in (1, 2]$, $\beta \in [0, 1]$ ve $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur.

Dördüncü bölümde, yukarıdaki problemlerden motive olarak, lineer olmayan p -Laplacian operatörlü ve ψ -Hilfer kesirli türevini içeren singüler sınır değer problemini ele alacağız:

$$\begin{cases} {}^H D_{a+}^{\alpha_1, \beta_1; \psi} \left(\phi_p \left({}^H D_{a+}^{\alpha_2, \beta_2; \psi} \mathfrak{x}(t) \right) \right) + f(t, \mathfrak{x}(t)) = 0, & a < t < b, \\ {}^H D_{a+}^{\alpha_2, \beta_2; \psi} \mathfrak{x}(a) = 0, \quad \mathfrak{x}(a) = 0, \quad I_{a+}^{2-\gamma_2, \psi} \mathfrak{x}(b) = \sum_{j=1}^l \eta_j I_{a+}^{\varphi_j, \psi} \mathfrak{x}(\xi_j) \end{cases} \quad (1.3)$$

Burada, ${}^H D_{a+}^{\alpha, \beta; \psi}$, α mertebeden ve β parametrelili sol-yanlı ψ -Hilfer türevi ve $I_{a+}^{\alpha, \psi}$, α mertebeden sol-yanlı ψ -Riemann-Liouville kesirli integralini göstermektedir. $n = 1, 2$ için $n - 1 < \alpha_n \leq n$, $0 \leq \beta_n \leq 1$, $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n(n - \alpha_n)$. $j = 1, 2, \dots, l$ ($l \in \mathbb{N}$) için $\eta_j \in \mathbb{R}$, $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_l < b$, $\varphi_j > 0$, $\phi_p(\varsigma) = \varsigma \cdot |\varsigma|^{p-2}$ ($\varsigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $\phi_p(0) = 0$, $p > 1$, $\phi_p^{-1}(\varsigma) = \phi_q(\varsigma)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f : (a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow a+} f(t, \cdot) = +\infty$ dur.

2 TEMEL TEOREMLER VE TANIMLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı tanımlar, önermeler, yardımcı özellikler ve teoremlerin ifadelerine yer verilecektir.

Tanım 2.0.1. *X ve Y herhangi iki lineer uzay olmak üzere belirli bir T ile X in bir alt kümesi A nın her x elemanına Y de tek bir y elemanı karşılık geliyorsa T ye X den Y kümesine bir operatör denir. A kümesine de T nin tanım bölgesi denir. $T : A \subset X \rightarrow Y$ ve $T : x \rightarrow y$ veya $y = Tx$ ile ifade edilir. Özel olarak $X = Y$ ise T ye X içinde bir operatör denir.*

Tanım 2.0.2. *(Deimling, 1985). (X, d_X) metrik uzay olsun. Eğer $S \subset X$ kümesinin her dizisinden yakınsak bir alt dizi (bu dizinin limiti S kümesine ait olmayabilir) seçilebiliyorsa S kümesine X içinde prekompakt küme denir. Eğer bu dizinin yakınsadığı değer, S kümesinin içinde ise S kümesine kompakt küme denir.*

Tanım 2.0.3. *(Deimling, 1985). (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve $T : D \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü D içindeki her sınırlı kümeyi Y içindeki prekompakt kümeye dönüştürüyorsa T operatörüne D üzerinde kompakt operatör denir.*

Tanım 2.0.4. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay olarak verilsin ve $T : D \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer $\epsilon > 0$ verildiğinde, her $u_0 \in D$ için $d_X(u, u_0) < \delta \Rightarrow d_Y(Tu, Tu_0) < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, T operatörü, u_0 noktasında sürekli bir operatördür veya sadece sürekli bir operatör olarak adlandırılır. T operatörü D nin her noktasında sürekli ise T operatörüne D üzerinde sürekli bir operatör denir.*

Teorem 2.0.5. *(Deimling, 1985). (X, d_X) , (Y, d_Y) metrik uzaylar, $T : D \subset X \rightarrow Y$ operatör ve $x_0 \in D$ olsun. x_0 noktasına yakınsayan D içindeki herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisi Tx_0 noktasına yakınsıyor ise T operatörüne x_0 noktasında dizisel sürekli operatör olarak adlandırılır. T operatörü, D üzerindeki her noktada dizisel olarak sürekli olduğunda, T operatörüne bir "dizisel sürekli operatör" denir.*

Teorem 2.0.6. (Deimling, 1985). (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar olsun ve $T : D \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. T operatörünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, dizisel sürekli olmasıdır.

Teorem 2.0.7. (Deimling, 1985) (**Tamamen Sürekli Operatör**). (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve $T : D \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü D üzerinde hem sürekli hem de kompakt operatör ise T operatörüne tamamen sürekli operatör denir.

Tanım 2.0.8. (Deimling, 1985). $S, C[a, b]$ içinde bir küme olsun.

- i) S kümesine ait fonksiyonlar, her $\varkappa \in S$ için $\|\varkappa(t)\| \leq c$ olacak şekilde bir c sayısı var ise "aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar" olarak adlandırılır.
- ii) $\epsilon > 0$ verilsin. $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $\forall \varkappa \in S$ için $\|t_1 - t_2\| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $\|\varkappa(t_1) - \varkappa(t_2)\| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabiliyor ise S kümesine ait fonksiyonlara "aynı dereceden sürekli fonksiyonlar" denir.

Teorem 2.0.9. (Deimling, 1985) (**Arzela-Ascoli Teoremi**). Bir $S \subset C[a, b]$ kümesinin sürekli fonksiyonlar ailesinin prekompakt olması için gerekli ve yeterli koşul S kümesine ait fonksiyonların hem aynı dereceden sınırlı hem de aynı dereceden sürekli olmasıdır.

Tanım 2.0.10. (Guo and Lakshmikantham, 1989). $(X, \|\cdot\|)$, Reel Banach uzayı olsun. X nin aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı, kapalı, konveks bir P alt kümesi koni olarak adlandırılır:

- i) $\varkappa \in P$ ve $\lambda \leq 0$ iken, $\lambda \varkappa \in P$;
- ii) $\varkappa \in P$ ve $-\varkappa \in P$ iken $\varkappa = 0$.

Tanım 2.0.11. (Rudin et al., 1964). Eğer $\beta : P \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli bir dönüşüm olup her $\varkappa, y \in P$ ve $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa

$$\beta(t\varkappa + (1-t)y) \geq t\beta(\varkappa) + (1-t)\beta(y)$$

o zaman β , X Reel Banach uzayının P konisi üzerinde sürekli ve negatif olmayan konkav bir fonksiyoneldir.

Tanım 2.0.12. (Rudin et al., 1964). Eğer $\gamma : P \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli bir dönüşüm olup her $\varkappa, y \in P$ ve $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa

$$\gamma(t\varkappa + (1-t)y) \geq t\gamma(\varkappa) + (1-t)\gamma(y)$$

o zaman γ , X Reel Banach uzayının P konisi üzerinde sürekli ve negatif olmayan konveks bir fonksiyoneldir.

Tanım 2.0.13. (Kilbas et al., 1999). $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < +\infty)$, Reel sayı ekseninde sonlu bir aralık, $\alpha > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $[a, b]$ üzerinde, $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ fonksiyonunun α mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$(D_{a+}^{\alpha} \varkappa)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\varsigma)^{n-\alpha-1} \varkappa(\varsigma) d\varsigma \quad (t > a)$$

burada $n = [\alpha] + 1$ ve $[\alpha]$, α reel sayısının tam kısmıdır.

Tanım 2.0.14. ((Kilbas et al., 1999)). $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < +\infty)$, Reel sayı ekseninde sonlu bir aralık ve $\alpha > 0$ olsun. $[a, b]$ üzerinde, $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ fonksiyonunun α mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$(I_{a+}^{\alpha} \varkappa)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \varkappa(\varsigma) d\varsigma \quad (t > a)$$

ile tanımlanır. Burada $\Gamma(\cdot)$, (Euler) Gamma fonksiyonudur.

Önerme 2.0.15. (*Kilbas et al., 1999*). $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$D_{0+}^{\alpha} \varkappa(t) = 0$$

kesirli diferansiyel denklemi, $c_i \in \mathbb{R}$, $(i = 0, 1, \dots, n)$, için

$$\varkappa(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_n t^{\alpha-n}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada $n = [\alpha] + 1$ ve $[\alpha]$, α reel sayısının tam kısmıdır.

Önerme 2.0.16. (*Kilbas et al., 1999*). $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda bazı $c_i \in \mathbb{R}$, $(i = 0, 1, \dots, n)$, için

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} \varkappa(t) = \varkappa(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_n t^{\alpha-n}$$

dir. Burada $n = [\alpha] + 1$ ve $[\alpha]$, α reel sayısının tam kısmıdır.

$\psi \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ ve ψ , her $t \in [a, b]$ için $\psi'(t) \neq 0$ koşulunu sağlayan artan bir fonksiyondur. Bu tez kapsamında, kolaylık sağlamak amacıyla her $x, y \in [a, b]$ için $\psi_y(x) = \psi(x) - \psi(y)$ olarak ifade edilecektir.

Tanım 2.0.17. (*Kilbas et al., 1999*). (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$, $\mathbb{R}^+$ nin bir sonlu yada sonsuz açık aralığı ve $\alpha > 0$ olsun. $\psi(t)$, $(a, b]$ üzerinde artan ve pozitif monoton bir fonksiyon ve $\psi'(t)$, (a, b) üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ üzerinde, diğer fonksiyon ψ 'ye göre $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ fonksiyonunun α mertebeden ψ -Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$I_{a+}^{\alpha, \psi} \varkappa(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(\varsigma) \psi_{\varsigma}^{\alpha-1}(t) \varkappa(\varsigma) d\varsigma, \quad t > a > 0,$$

ile tanımlanır. Burada $\Gamma(\cdot)$, (Euler) Gamma fonksiyonudur.

Tanım 2.0.18. (*Kilbas et al., 1999*). $\psi \in C^n([a, b])$ olmak üzere $\psi'(t) \neq 0$, $\alpha > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Diğer fonksiyon ψ 'ye göre $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ fonksiyonunun α mertebeden ψ -Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha, \psi} \varkappa(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha, \psi} \varkappa(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \psi'(\varsigma) \psi_{\varsigma}^{n-\alpha-1}(t) \varkappa(\varsigma) d\varsigma, \end{aligned}$$

burada $n = [\alpha] + 1$ ve $[\alpha]$, α reel sayısının tam kısmıdır.

Tanım 2.0.19. (Sousa and De Oliveira, 2018). $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \alpha < n$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\varkappa, \psi \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ ve ψ , her $t \in [a, b]$ için $\psi'(t) \neq 0$ olacak şekilde artan bir fonksiyon olmak üzere $h(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ve β parametreli sol yanlı ψ -Hilfer türevi ;

$${}^H D_{a+}^{\alpha, \beta; \psi} \varkappa(t) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha), \psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha), \psi} \varkappa(t) = I_{a+}^{(\gamma-\alpha), \psi} D_{a+}^{\gamma, \psi} \varkappa(t)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$, α reel sayısının tam kısmıdır ve $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$.

Önerme 2.0.20. (Kilbas et al., 1999). $\alpha, \beta > 0$ ve $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ olmak üzere

$$I_{a+}^{\alpha, \psi} I_{a+}^{\beta, \psi} \varkappa(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta, \psi} \varkappa(t), \quad t > a.$$

dir.

Önerme 2.0.21. (Sousa and De Oliveira, 2018; Kilbas et al., 1999). $\alpha > 0$, $\nu > 0$ ve $t > a$ olmak üzere bir kuvvet fonksiyonunun, ψ kesirli integrali ve türevi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} (i) \quad & I_{a+}^{\alpha, \psi} \psi_a^{\nu-1}(t) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+\alpha)} \psi_a^{\nu+\alpha-1}(t) \\ (ii) \quad & D_{a+}^{\alpha, \beta; \psi} \psi_a^{\nu-1}(t) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-\alpha)} \psi_a^{\nu-\alpha-1}(t), \quad n-1 < \alpha < n, \quad \nu > n, \\ (iii) \quad & {}^H D_{a+}^{\alpha, \beta; \psi} \psi_a^{\nu-1}(t) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-\alpha)} \psi_a^{\nu-\alpha-1}(t), \quad n-1 < \alpha < n, \quad \nu > n. \end{aligned}$$

Önerme 2.0.22. (Sudsutad et al., 2021). $m-1 < \alpha < m$, $n-1 < \rho < n$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\alpha \geq \rho + \beta(n - \rho)$ ve $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ olmak üzere

$${}^H D_{a+}^{\rho, \beta; \psi} I_{a+}^{\alpha, \psi} \varkappa(t) = I_{a+}^{\alpha-\rho, \psi} \varkappa(t)$$

dir.

Tanım 2.0.23. (Sousa and De Oliveira, 2018). $n-1 < \alpha \leq n$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$ ve $\varkappa \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ olmak üzere her $t \in [a, b]$ için

$$I_{a+}^{\alpha, \psi} {}^H D_{a+}^{\alpha, \beta; \psi} \varkappa(t) = \varkappa(t) - \sum_{k=1}^n \frac{\psi_{a+}^{\gamma-k}(t)}{\Gamma(\gamma-k+1)} \varkappa_{\psi}^{[n-k]} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha), \psi} \varkappa(a),$$

dır. Burada $\varkappa_{\psi}^{[n]} h(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \varkappa(t)$ dir.

Önerme 2.0.24. (*Liu et al., 2012*). p -Laplacian operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $1 < p < 2$, $\varkappa y > 0$ ve $|\varkappa|, |y| \geq m \geq 0$ ise

$$|\varphi_p(\varkappa) - \varphi_p(y)| \leq (p-1)m^{p-2}|\varkappa - y|.$$

(ii) $p > 2$ ve $|\varkappa|, |y| \leq M$ ise, o zaman

$$|\varphi_p(\varkappa) - \varphi_p(y)| \leq (p-1)M^{p-2}|\varkappa - y|.$$



3 p-LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde, p -Laplacian operatörlü tekil (singüler) kesirli sınır değer problemi ele alınacak ve bu problem için en az üç pozitif çözümün varlığı elde edilecektir.

3.1 Sınır Değer Probleminin Çözümü

Aşağıda verilen p -Laplacian operatörlü singüler kesirli sınır değer problemi ele alınsın.

$$\begin{cases} [\phi_p(D_{0+}^\alpha \mathfrak{x}(t))] + f(t, \mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}'(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ \mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}'(0) = 0, & D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(\zeta_i). \end{cases} \quad (3.1)$$

Burada, D_{0+}^α , α mertebeden standart Riemann-Liouville kesirli türevidir. $\alpha \in \mathbb{R}$, $2 < \alpha \leq 3$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, k-2$ için $\zeta_i \in \mathbb{R}$ ve $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_{k-2} < 1$, $\phi_p(\varsigma) = \varsigma \cdot |\varsigma|^{p-2}$ ($\varsigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $\phi_p(0) = 0$, $p > 1$, $\phi_p^{-1}(\varsigma) = \phi_q(\varsigma)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(t, \mathfrak{x}, y) : (0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $t = 0$ noktasında singülerdir.

Aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilsin:

(H_1) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, k-2$ için $\mu_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{k-2} \mu_i < 1$,

(H_2) $f(t, \mathfrak{x}, y) : (0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli ve $t^{\sigma_1} f(t, \mathfrak{x}, y)$ fonksiyonu $[0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ aralığında sürekli olacak şekilde $0 < \sigma_1 < 1$ koşulunu sağlayan bir σ_1 sabiti vardır.

Önerme 3.1.1. $h \in C[0, 1]$ ise

$$\begin{cases} [\phi_p(D_{0+}^\alpha \mathfrak{x}(t))]' + h(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ \mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}'(0) = 0, & D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(\zeta_i). \end{cases} \quad (3.2)$$

p -Laplacian operatörlü kesirli sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \end{aligned} \quad (3.3)$$

ile ifade edilir. Burada $\Delta_1 = \Gamma(\alpha) \left(1 - \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \right)$ dir.

Kanıt. (3.2) de verilen sınır değer probleminin çözümü, Önerme 2.0.16 yardımı ile

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}(t) &= c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} - I_{0+}^\alpha \left(\phi_q \left(\int_0^t h(\varsigma) d\varsigma \right) \right) \\ &= c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \left(\phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) \right) d\varsigma \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada, c_1 , c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir. İlk olarak $\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}'(0) = 0$ koşulu kullanılarak, $c_2 = c_3 = 0$ olarak elde edilir. Buradan;

$$\mathfrak{x}(t) = c_1 t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \quad (3.4)$$

elde edilir. Şimdi, (3.4) de elde edilen $\mathfrak{x}(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(1) = c_1 \Gamma(\alpha) - \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma, \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^{k-2} \mu_i D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(\zeta_i) = c_1 \Gamma(\alpha) \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i - \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma. \quad (3.6)$$

Şimdi, (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden yararlanarak, (3.2)'de ele alınan sınır değer probleminin sınır koşulu $D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i D_{0+}^{\alpha-1} \mathfrak{x}(\zeta_i)$ kullanılarak;

$$c_1 = \frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma - \frac{1}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma$$

elde edilir. Böylece, (3.2) de verilen sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\varkappa(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\varsigma_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma\end{aligned}$$

□

Önerme 3.1.2. (H_1) ve (H_2) sağlansın. Bu durumda, $\varkappa(t)$ fonksiyonu, negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyondur.

Kanıt. İlk olarak $\varkappa(t)$ fonksiyonunun negatif olmayan bir fonksiyon olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}\varkappa(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\varsigma_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\geq \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &= 0\end{aligned}$$

Bu da $\varkappa(t)$ fonksiyonunun negatif olmadığını gösterir.

Şimdi, $\varkappa(t)$ fonksiyonunun azalmayan bir fonksiyon olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}\varkappa'(t) &= \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\varsigma_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) d\varsigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&= \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&\quad + \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&= 0
\end{aligned}$$

Bu da $\varkappa(t)$ fonksiyonunun azalmayan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Böylece, $\varkappa(t)$ fonksiyonu negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyondur. $\square$

$E_1 = C^1[0, 1]$ Banach uzayı üzerinde;

$$\|\varkappa\| = \max \left\{ \max_{t \in [0,1]} |\varkappa(t)|, \max_{t \in [0,1]} |\varkappa'(t)| \right\}$$

normunu ele alalım ve P konisi

$$P = \{\varkappa \in E_1 : \varkappa(t) \geq 0, \varkappa'(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}$$

olmak üzere $T_1 : P \rightarrow E_1$ operatörü

$$\begin{aligned}
T_1 \varkappa(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\varsigma_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma h(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) d\varsigma
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Önerme 3.1.3. (H_1) ve (H_2) koşullarını sağlansın. O halde $T_1 : P \rightarrow P$ tamamen sürekli bir operatördür.

Kanıt. Her $\varkappa \in P$ için Önerme 3.1.2 den $T_1 \varkappa(t)$ operatörünün negatif olmayan ve azalmayan olduğu açıktır. Bu da $T_1 : P \rightarrow P$ olduğunu gösterir. Ayrıca (H_2) koşulundan, $T_1 : P \rightarrow P$ operatörünün sürekli olduğu açıktır. Şimdi T_1 operatörünün kompakt bir operatör olduğunu gösterelim.

Ω , P konisinin sınırlı bir alt kümesi olsun. (H_2) koşulundan yararlanarak, $\varkappa \in \Omega$ ve $\tau \in [0, 1]$ için $\tau^{\sigma_1} f(t, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) \leq L$ olacak şekilde $L > 0$ reel sayısı vardır öyle ki

$$\begin{aligned}
(T_1 \varkappa)(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\leq \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\leq \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 L \tau^{-\sigma_1} d\tau \right) d\varsigma \\
&\leq \frac{(\alpha-1)L^{q-1}}{\Delta_1(1-\sigma_1)^{q-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
(T_1 \varkappa)'(t) &= \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\leq \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \tau^{-\sigma_1} \tau^{\sigma_1} f(\tau, \varkappa(\tau), \varkappa'(\tau)) d\tau \right) d\varsigma \\
&\leq \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 L \tau^{-\sigma_1} d\tau \right) d\varsigma \\
&\leq \frac{(\alpha-1)L^{q-1}}{\Delta_1(1-\sigma_1)^{q-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece;

$$\|T_1 \mathfrak{x}\| \leq \frac{(\alpha - 1)L^{q-1}}{\Delta_1(1 - \sigma_1)^{q-1}}$$

elde edilir. O halde $T_1(\Omega)$ düzgün sınırlıdır. Şimdi $T_1(\Omega)$ nın aynı dereceden sürekli olduğunu gösterilsin:

Her $\mathfrak{x} \in \Omega$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ve $t_1 < t_2$ için

$$\begin{aligned} & |T_1 \mathfrak{x}(t_2) - T_1 \mathfrak{x}(t_1)| \\ &= \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{t_1^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\varsigma_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - \varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right| \\ &\leq |t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}| \left(\frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\varsigma_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1 - \varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right| \\ &\leq (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \left(\frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad \times \left(\int_0^{t_1} ((t_2 - \varsigma)^{\alpha-1} - (t_1 - \varsigma)^{\alpha-1}) \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathfrak{x}(\mathsf{T}), \mathfrak{x}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \\ &\leq (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \left(\frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 L \mathsf{T}^{-\sigma_1} d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1} ((t_2 - \varsigma)^{\alpha-1} - (t_1 - \varsigma)^{\alpha-1}) \phi_q \left(\int_0^1 L \mathsf{T}^{-\sigma_1} d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^1 L \mathsf{T}^{-\sigma_1} d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{L^{q-1}}{\Delta_1(1-\sigma_1)^{q-1}} (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) + \frac{L^{q-1}}{\Gamma(\alpha+1)(1-\sigma_1)^{q-1}} (t_2^\alpha - t_1^\alpha) \\
&\leq \frac{L^{q-1}}{\Delta_1(1-\sigma_1)^{q-1}} 2(t_2 - t_1) + \frac{L^{q-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\sigma_1)^{q-1}} (t_2 - t_1) \rightarrow 0 \quad (t_2 \rightarrow t_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&|(T_1 \mathcal{K})'(t_2) - (T_1 \mathcal{K})'(t_1)| \\
&= \left| \frac{(\alpha-1)t_2^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)t_2^{\alpha-2}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
&\quad - \frac{(\alpha-1)t_1^{\alpha-2}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
&\quad + \frac{(\alpha-1)t_1^{\alpha-2}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^{t_1} (t_1 - \varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right| \\
&\leq |t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}| \\
&\quad \times \left(\frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \int_0^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1 - \varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right| \\
&\leq (t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}) \left(\frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\int_0^{t_1} ((t_2 - \varsigma)^{\alpha-2} - (t_1 - \varsigma)^{\alpha-2}) \right. \\
&\quad \left. \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \mathcal{K}(\mathsf{T}), \mathcal{K}'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \\
&\leq (t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}) \left(\frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 L \mathsf{T}^{-\sigma_1} d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\int_0^{t_1} ((t_2 - \varsigma)^{\alpha-2} - (t_1 - \varsigma)^{\alpha-2}) \phi_q \left(\int_0^1 L \Upsilon^{-\sigma_1} d\Upsilon \right) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^1 L \Upsilon^{-\sigma_1} d\Upsilon \right) d\varsigma \right) \\
& \leq \frac{L^{q-1}(\alpha-1)}{\Delta_1(1-\sigma_1)^{q-1}} (t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}) + \frac{L^{q-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\sigma_1)^{q-1}} (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \\
& \leq \frac{L^{q-1}}{\Delta_1(1-\sigma_1)^{q-1}} 2(t_2 - t_1) + \frac{L^{q-1}}{\Gamma(\alpha)(1-\sigma_1)^{q-1}} 2(t_2 - t_1) \rightarrow 0 \quad (t_2 \rightarrow t_1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$0 < a < 1$ olacak şekilde $[0, 1]$ üzerinde t^a fonksiyonun düzgün sürekliliğinden ve Arzelá–Ascoli teoreminden T_1 operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğu sonucunu elde ederiz. İspat tamamlanmıştır. $\square$

3.2 Avery-Peterson Sabit Nokta Teoremi ve Uygulaması

Bu alt bölümde, (3.1) de verilen sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığını göstermek için Avery-Peterson sabit nokta teoremi kullanılacaktır. Daha sonrasında sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için bir örnek verilecektir.

P, X Banach uzayında bir koni olsun. γ ve θ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller, ϕ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav bir fonksiyonel ve ψ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli bir fonksiyonel olmak üzere $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ ve ϱ_4 pozitif sayıları için aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$P(\gamma, \varrho_4) = \{\varkappa \in P : \gamma(\varkappa) < \varrho_4\},$$

$$P(\gamma, \Phi, \varrho_2, \varrho_4) = \{\varkappa \in P : \varrho_2 \leq \Phi(\varkappa), \gamma(\varkappa) \leq \varrho_4\},$$

$$P(\gamma, \theta, \Phi, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = \{\varkappa \in P : \varrho_2 \leq \Phi(\varkappa), \theta(\varkappa) \leq \varrho_3, \gamma(\varkappa) \leq \varrho_4\},$$

$$R(\gamma, \psi, \varrho_1, \varrho_4) = \{\varkappa \in P : \varrho_1 \leq \psi(\varkappa), \gamma(\varkappa) < \varrho_4\}.$$

(3.1) de verilen problemini incelemek için Avery ve Peterson'un aşağıdaki sabit nokta teoremi kullanılacaktır.

Teorem 3.2.1. (Avery and Peterson (2001)) P , X Banach uzayında bir koni olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\psi(\lambda x) \leq \lambda\psi(x)$ olacak şekilde γ ve θ , P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller, ϕ , P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav bir fonksiyonel ve ψ , P üzerinde negatif olmayan, sürekli bir fonksiyonel olsun öyle ki bazı ϱ_4 ve ω pozitif sayıları için her $x \in \overline{P(\gamma, \varrho_4)}$ olacak şekilde

$$\Phi(x) \leq \psi(x) \quad \text{ve} \quad \|x\| \leq \omega\gamma(x)$$

dir. Varsayalım ki

$$T_1 : \overline{P(\gamma, \varrho_4)} \rightarrow \overline{P(\gamma, \varrho_4)}$$

tamamen sürekli bir operatör ve $\varrho_1 < \varrho_2$ olacak şekilde $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ ve ϱ_4 pozitif sayıları var olsun öyle ki

(S1) $x \in P(\gamma, \theta, \Phi, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4)$ için $\{x \in P(\gamma, \theta, \Phi, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) : \Phi(x) > r\} \neq \emptyset$
ve $\Phi(T_1 x) \geq \varrho_2$;

(S2) $x \in P(\gamma, \Phi, \varrho_2, \varrho_4)$ ve $\theta(T_1 x) > \varrho_3$ için $\Phi(T_1 x) > \varrho_4$;

(S3) $x \in R(\gamma, \psi, \varrho_1, \varrho_4)$ with $\psi(x) = \varrho_1$ için $0 \notin R(\gamma, \psi, \varrho_1, \varrho_4)$
ve $\psi(T_1 x) < \varrho_1$.

koşulları sağlandığı takdirde T_1 operatörünün, $x_1, x_2, x_3 \in \overline{P(\gamma, \varrho_4)}$ olacak şekilde en az üç sabit noktası vardır öyle ki

$$i = 1, 2, 3 \quad \text{için} \quad \gamma(x_i) \leq \varrho_4$$

ve

$$\varrho_2 < \Phi(x_1), \quad \varrho_1 < \psi(x_2), \quad \gamma(x_2) < \varrho_2, \quad \psi(x_3) < \varrho_1$$

dir.

(3.1) de verilen sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığını ispat etmek için P üzerinde $\Phi(x) = \min_{t \in [\zeta_{k-2}, 1]} |x(t)|$ konkav bir fonksiyoneli, $\gamma(x) = \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)|$ ve $\psi(x) = \theta(x) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ konveks fonksiyonellerini tanımlayalım.

Teorem 3.2.2. Varsayalım ki $\varrho_1 < \varrho_2$, $\varrho_3 > \max \left\{ \frac{1}{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}, e^{1-\frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{2}} \right\} \varrho_2$ ve $\varrho_4 \geq \varrho_3$ olacak şekilde $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ pozitif sabitleri var olsun.

$$(H_3) \quad t^{\sigma_1} f(t, \varkappa, \varkappa') \leq (\varrho_4 \omega_1)^{p-1}, \quad (t, \varkappa, \varkappa') \in [0, 1] \times [0, \varrho_4] \times [0, \varrho_4];$$

$$(H_4) \quad f(t, \varkappa, \varkappa') > (\varrho_2 \omega_2)^{p-1}, \quad (t, \varkappa, \varkappa') \in [0, 1] \times [\varrho_2, \varrho_3] \times [\varrho_2, \varrho_3];$$

$$(H_5) \quad t^{\sigma_1} f(t, \varkappa, \varkappa') < (\varrho_1 \omega_1)^{p-1}, \quad (t, \varkappa, \varkappa') \in [0, 1] \times [0, \varrho_1] \times [0, \varrho_1].$$

Burada $\omega_1 = \frac{\Delta_1(1-\sigma_1)^{q-1}}{(\alpha-1)}$ ve $\omega_2 = \frac{\Delta_1 q}{\zeta_{k-2}^{\alpha-1} - \zeta_{k-2}^{\alpha+q-1}}$ olmak üzere f fonksiyonu yukarıdaki koşulları sağladığı takdirde (3.1) de verilen sınır değer probleminin en az üç pozitif $\varkappa_1, \varkappa_2$ ve $\varkappa_3$ çözümü vardır öyle ki;

$$i = 1, 2, 3, \quad \text{için} \quad \gamma(\varkappa_i) \leq \varrho_4,$$

ve

$$\varrho_2 < \Phi(\varkappa_1), \quad \varrho_1 < \psi(\varkappa_2), \quad \gamma(\varkappa_2) < \varrho_2, \quad \psi(\varkappa_3) < \varrho_1$$

dir

Kanıt. İlk olarak $T_1 : \overline{P(\gamma, \varrho_4)} \rightarrow \overline{P(\gamma, \varrho_4)}$ olduğunu gösterelim:

(H_3) koşulundan, $\varkappa \in \overline{P(\gamma, \varrho_4)}$ için,

$$\begin{aligned} \gamma(T_1 \varkappa(t)) &= \max_{t \in [0,1]} |(T_1 \varkappa)'(t)| \\ &= \frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\varsigma)^{\alpha-2} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\leq \frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\leq \frac{(\alpha-1)}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^1 (\varrho_4 \omega_1)^{p-1} \mathsf{T}^{-\sigma_1} d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &= \frac{(\alpha-1) \varrho_4 \omega_1}{\Delta_1 (1-\sigma_1)^{q-1}} \\ &= \varrho_4 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $T_1 : \overline{P(\gamma, \varrho_4)} \rightarrow \overline{P(\gamma, \varrho_4)}$ olduğu görülür.

Şimdi (S_1) , (S_2) ve (S_3) koşullarının sağlandığını gösterelim. Herhangi bir $\varkappa \in P$ ve $t \in [0, 1]$ için $\varkappa(t) = \varrho_4 e^{t-0,5\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}$ ele alınsın. Basit hesaplamalar ile $\gamma(\varkappa) < \varrho_3$, $\psi(\varkappa) = \theta(\varkappa) < \varrho_3$ and $\Phi(\varkappa) > \varrho_4$ olduğu açıktır. Buradan

$$\{\varkappa \in P(\gamma, \theta, \Phi, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) : \Phi(\varkappa) > \varrho_2\} \neq \emptyset$$

olduğu elde edilir. (H_4) koşulunu kullanarak,

$$\begin{aligned} \Phi(T_1 \varkappa(t)) &= \min_{t \in [\zeta_{k-2}, 1]} |T_1 \varkappa(t)| = |T_1 \varkappa(\zeta_{k-2})| \\ &= \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\zeta_{k-2}} (\zeta_{k-2} - s)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\geq \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_{k-2}} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\zeta_{k-2}} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &= \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_{\zeta_{k-2}}^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\geq \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_{\zeta_{k-2}}^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma (\omega_2 \varrho_2)^{p-1} d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\geq \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_{\zeta_{k-2}}^1 \phi_q \left((\omega_2 \varrho_2)^{p-1} \varsigma \right) d\varsigma \\ &= \frac{\omega_2 \varrho_2 (\zeta_{k-2}^{\alpha-1} - \zeta_{k-2}^{\alpha+q-1})}{\Delta_1 q} \\ &= \varrho_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle (S_1) koşulunun sağlandığı gösterilmiştir.

Şimdi $\varkappa \in P(\gamma, \Phi, \varrho_2, \varrho_4)$ ve $\theta(T_1 \varkappa(t)) > \varrho_3$ olsun. $T_1 \varkappa \in P$ olduğunu düşünelim,

$$\begin{aligned} \theta(T_1 \varkappa(t)) &= \max_{t \in [0,1]} |T_1 \varkappa(t)| = |T_1 \varkappa(1)| \\ &= \frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Phi(T_1 \varkappa(t)) &= \min_{t \in [\zeta_{k-2}, 1]} |T_1 \varkappa(t)| = |T_1 \varkappa(\zeta_{k-2})| \\ &= \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\quad - \frac{\zeta_{k-2}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\zeta_{k-2}} \left(1 - \frac{s}{\zeta_{k-2}}\right)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\ &\geq \zeta_{k-2}^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\varsigma)^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_0^\varsigma f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \right) \\ &= \zeta_{k-2}^{\alpha-1} (\theta(T_1 \varkappa(t))) \\ &\geq \zeta_{k-2}^{\alpha-1} \varrho_3 \\ &= \varrho_2 \end{aligned}$$

Böylelikle (S_2) koşulunun sağlandığı gösterilmiştir.

Şimdi (S_3) koşulunun sağlandığını gösterelim. Varsayalım ki $\varkappa \in R(\gamma, \psi, \varrho_1, \varrho_4)$ ve $\psi(\varkappa) = \varrho_1$ olsun. (H_5) koşulunu kullanarak

$$\begin{aligned} \psi(T_1 \varkappa(t)) &= \max_{t \in [0,1]} |T_1 \varkappa(t)| = |T_1 \varkappa(1)| \\ &= \frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i \int_0^{\zeta_i} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\varsigma)^{(\alpha-1)} \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
& \leq \frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma \mathsf{T}^{-\sigma_1} \mathsf{T}^{\sigma_1} f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}), \varkappa'(\mathsf{T})) d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
& \leq \frac{1}{\Delta_1} \int_0^1 \phi_q \left(\int_0^\varsigma (\varrho_1 \omega_1)^{p-1} \mathsf{T}^{-\sigma_1} d\mathsf{T} \right) d\varsigma \\
& = \frac{(\alpha-1) \varrho_1 \omega_1}{\Delta_1 (1-\sigma_1)^{q-1}} \\
& = \varrho_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle (S_3) koşulunun sağlandığı gösterilmiştir. Teorem 3.2.2 den, (3.1) de verilen sınır değer probleminin en az üç pozitif $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ve $\varkappa_3$ çözümüne sahip olduğunu elde ederiz öyle ki

$$i = 1, 2, 3, \quad \text{için} \quad \gamma(\varkappa_i) \leq \varrho_4,$$

ve

$$\varrho_2 < \Phi(\varkappa_1), \quad \varrho_1 < \psi(\varkappa_2), \quad \gamma(\varkappa_2) < \varrho_2, \quad \psi(\varkappa_3) < \varrho_1$$

dir. □

Örnek 3.2.1. Aşağıdaki sınır değeri problemini ele alalım

$$\begin{cases} [\phi_p(D_{0+}^\alpha \varkappa(t))] + f(t, \varkappa(t), \varkappa'(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ \varkappa(0) = \varkappa'(0) = 0, & D_{0+}^{\alpha-1} \varkappa(1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mu_i D_{0+}^{\alpha-1} \varkappa(\zeta_i). \end{cases} \quad (3.7)$$

Burada $\sqrt{t}f(t, \varkappa, y)$, $[0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur ve $(t, \varkappa, y) \in (0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ için $\sqrt{t}f(t, \varkappa, y) \leq 1500$ olsun öyle ki

$$f(t, \varkappa, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}(e^\varkappa + e^y), & (t, \varkappa, y) \in (0, 1] \times [0, 3] \times [0, 3], \\ \frac{50}{\sqrt{t}}(e^{\sqrt{\varkappa}} + e^{\sqrt{y}}), & (t, \varkappa, y) \in (0, 1] \times [5, 17] \times [5, 17], \\ \frac{1499}{\sqrt{t}}, & (t, \varkappa, y) \in (0, 1] \times [100, \infty) \times [100, \infty) \end{cases}$$

dir. Burada $\alpha = \frac{7}{3}$, $p = 3$, $\sigma_1 = \frac{1}{2}$, $k = 4$, $\zeta_1 = \frac{1}{3}$, $\zeta_2 = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $a_2 = \frac{1}{4}$ olsun. Ayrıca $\varrho_1 = 3$, $\varrho_2 = 5$, $\varrho_3 = 17$, $\varrho_4 = 150$ olsun. Basit hesaplamalar

ile Teorem 3.2.2 de ki koşulların sağlandığı elde edilebilir. Böylelikle (3.7) de verilen sınır değer probleminin en az üç pozitif $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ve $\varkappa_3$ çözümüne sahip olduğunu elde ederiz öyle ki

$$i = 1, 2, 3 \quad \text{için} \quad \gamma(x_i) \leq 150$$

ve

$$5 < \Phi(\varkappa_1), \quad 3 < \psi(\varkappa_2), \quad \gamma(\varkappa_2) < 5, \quad \psi \varkappa_3 < 3$$

dir.



4 p-LAPLACIAN OPERATÖRLÜ SİNGÜLER ψ -HILFER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENK- LEMİN VARLIK VE TEKLİK SONUÇLARI

Bu bölümde, p -Laplacian operatörlü singüler ψ -Hilfer kesirli diferansiyel denklemin çözümü elde edilmiştir ve daha sonra elde edilen bu çözüm için uygun bir Green fonksiyonu elde edilmiştir.

4.1 Sınır Değer Probleminin Çözümü ve Green Fonksiyonu

Aşağıda verilen singüler ψ -Hilfer kesirli sınır değer problemi ele alınsın.

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha_1, \beta_1; \psi} \left(\phi_p \left({}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2; \psi} \mathfrak{z}(t) \right) \right) + f(t, \mathfrak{z}(t)) = 0, & a < t < b, \\ {}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2; \psi} \mathfrak{z}(a) = 0, \quad \mathfrak{z}(a) = 0, \quad I_{a^+}^{2-\gamma_2, \psi} \mathfrak{z}(b) = \sum_{j=1}^l \eta_j I_{a^+}^{\varphi_j, \psi} \mathfrak{z}(\xi_j). \end{cases} \quad (4.1)$$

Burada, ${}^H D_{a^+}^{\alpha, \beta; \psi}$, α mertebeden ve β parametrelili sol-yanlı ψ -Hilfer türevi ve $I_{a^+}^{\alpha, \psi}$, α mertebeden sol-yanlı ψ -Riemann-Liouville kesirli integralini göstermektedir. $n = 1, 2$ için $n-1 < \alpha_n \leq n$, $0 \leq \beta_n \leq 1$, $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n(n - \alpha_n)$. $j = 1, 2, \dots, l$ ($l \in \mathbb{N}$) için $\eta_j \in \mathbb{R}$, $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_l < b$, $\varphi_j > 0$, $\phi_p(\varsigma) = \varsigma |\varsigma|^{p-2}$ ($\varsigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $\phi_p(0) = 0$, $p > 1$, $\phi_p^{-1}(\varsigma) = \phi_q(\varsigma)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f : (a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t, \cdot) = +\infty$ dur.

İlk olarak, (4.1) lineer olmayan sınır değer probleminden hareketle elde edilen lineer sınır değer probleminin çözümü elde edilecektir.

Önerme 4.1.1. $h \in C([a, b], \mathbb{R})$ ve $n = 1, 2$ için $n - 1 < \alpha_n \leq n$, $0 \leq \beta_n \leq 1$, $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n(n - \alpha_n)$ ise

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha_1, \beta_1, \psi} \left(\phi_p \left({}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2, \psi} \kappa(t) \right) \right) + h(t) = 0, & a < t < b, \\ {}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2, \psi} \kappa(a) = 0, \quad \kappa(a) = 0, \quad I_{a^+}^{2-\gamma_2, \psi} \kappa(b) = \sum_{j=1}^l \eta_j I_{a^+}^{\varphi_j, \psi} \kappa(\xi_j) \end{cases} \quad (4.2)$$

p -Laplacian operatörlü ψ -Hilfer kesirli sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} \kappa(t) = & \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \\ & \times \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2)} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_j)} \\ & \times \int_a^{\xi_j} \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \end{aligned} \quad (4.3)$$

ile ifade edilir. Burada

$$\Delta_2 = \psi_a(b) - \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2)} \psi_a^{\varphi_j + \gamma_2 - 1}(\xi_j) \neq 0$$

olduğu kabul edilmektedir.

Kanıt. $\left(\phi_p \left({}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2, \psi} \kappa(t) \right) \right) = \nu(t)$ olsun. Burada (4.2) de verilen sınır değer problemi, iki ayrı problem olarak ele alınabilir.

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha_1, \beta_1, \psi} \nu(t) + h(t) = 0, \\ \nu(a) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

ve

$$\begin{cases} \phi_p \left({}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2, \psi} \kappa(t) \right) = \nu(t), \\ \kappa(a) = 0, \quad I_{a^+}^{2-\gamma_2} \kappa(b) = \sum_{j=1}^l \eta_j I_{a^+}^{\varphi_j} \kappa(\xi_j). \end{cases} \quad (4.5)$$

(4.4) de verilen sınır değeri probleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\nu(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_1-1}(t) h(\varsigma) \psi'(\varsigma) d\varsigma$$

Şimdi, (4.5) de verilen sınır değeri probleminin çözümü, Önerme 2.0.19 yardımı ile

$$\varkappa(t) = d_1 \frac{\psi_a^{\gamma_2-2}(t)}{\Gamma(\gamma_2-1)} + d_2 \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \phi_q(\nu(\varsigma)) \psi'(\varsigma) d\varsigma \quad (4.6)$$

olarak elde edilir. Burada d_1 ve d_2 keyfi sabitlerdir. İlk olarak, $\varkappa(a) = 0$ koşulunu kullanarak $d_1 = 0$ olarak elde edilir. Buradan;

$$\varkappa(t) = d_2 \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \phi_q(\nu(\varsigma)) \psi'(\varsigma) d\varsigma \quad (4.7)$$

elde edilir. Şimdi, (4.7) de elde edilen $\varkappa(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$I_{a^+}^{2-\gamma_2} \varkappa(b) = \psi_a(b) d_2 + \frac{1}{\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q(\nu(\varsigma)) \psi'(\varsigma) d\varsigma \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \eta_j I_{a^+}^{\varphi_j} \varkappa(\xi_j) &= d_2 \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2)} \psi_a^{\varphi_j + \gamma_2 - 1}(\xi_j) \\ &+ \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_j)} \int_a^{\xi_j} \psi_\varsigma^{\alpha_2 + \varphi_j - 1}(\xi_j) \phi_q(\nu(\varsigma)) \psi'(\varsigma) d\varsigma \end{aligned} \quad (4.9)$$

Şimdi, (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden yararlanarak, (4.7) de ele alınan sınır değeri probleminin sınır koşulu $I^{2-\gamma_2} \varkappa(b) = \sum_{j=1}^l \eta_j I^{\varphi_j} \varkappa(\xi_j)$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{\Delta_2} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_j)} \int_a^{\xi_j} \psi_\varsigma^{\alpha_2 + \varphi_j - 1}(\xi_j) \phi_q(\nu(\varsigma)) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ &- \frac{1}{\Delta_2 \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \int_a^b \psi_\varsigma^{1 + \alpha_2 - \gamma_2}(b) \phi_q(\nu(\varsigma)) \psi'(\varsigma) d\varsigma \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece (4.2) de verilen sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\varkappa(t) = & \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \\ & \times \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma)h(\tau)\psi'(\tau)d\tau\right)\psi'(\varsigma)d\varsigma \\ & - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)}\sum_{j=1}^l\eta_j\frac{1}{\Gamma(\alpha_2+\varphi_j)} \\ & \times \int_a^{\xi_j} \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j)\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma)h(\tau)\psi'(\tau)d\tau\right)\psi'(\varsigma)d\varsigma \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t)\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma)h(\tau)\psi'(\tau)d\tau\right)\psi'(\varsigma)d\varsigma.\end{aligned}$$

□

Önerme 4.1.2. (4.3) de gösterilen, (4.2) de ki problemin çözümü olan $\varkappa(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varkappa(t) = \int_a^b G(t, \varsigma)\phi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma)h(\tau)\psi'(\tau)d\tau\right)\psi'(\varsigma)d\varsigma, \quad t \in [a, b], \quad (4.10)$$

burada

$$G_1(t, \varsigma) = \begin{cases} \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)\psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)}\sum_{j=1}^l\eta_j\frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j)}{\Gamma(\alpha_2+\varphi_j)} - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t)}{\Gamma(\alpha_2)}, \\ \quad a \leq \varsigma \leq t \leq b, \quad \varsigma \leq \xi_j, \\ \\ \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)\psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t)}{\Gamma(\alpha_2)}, \quad a \leq \xi_j \leq \varsigma \leq t \leq b, \\ \\ \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)\psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)}\sum_{j=1}^l\eta_j\frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j)}{\Gamma(\alpha_2+\varphi_j)}, \\ \quad a \leq t \leq \varsigma \leq \xi_j \leq b, \\ \\ \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)\psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)}, \quad a \leq t \leq \varsigma \leq b, \quad \xi_j \leq \varsigma, \end{cases} \quad (4.11)$$

dir.

Kanıt. $t \leq \xi_i$ için;

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t) &= \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \\
&\times \left[\int_a^t \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
&\quad + \int_t^{\xi_i} \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&\quad \left. + \int_{\xi_i}^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right] \\
&- \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)} \sum_{i=1}^j \eta_i \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_i)} \\
&\times \left[\int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_i-1}(\xi_i) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{\xi_i} \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_i-1}(\xi_i) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right] \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&= \int_a^t \left[\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)} \sum_{i=1}^j \eta_i \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_i-1}(\xi_i)}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_i)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t)}{\Gamma(\alpha_2)} \right] \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&+ \int_t^{\xi_i} \left[\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)} \sum_{i=1}^j \eta_i \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_i-1}(\xi_i)}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_i)} \right] \\
&\quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&+ \int_{\xi_i}^b \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \\
&\quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&= \int_a^b G(t, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \lambda(\tau, \mathcal{K}(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma
\end{aligned}$$

$\xi_i \leq t$ için;

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t) &= \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \\
&\times \left[\int_a^{\xi_i} \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \int_{\xi_i}^t \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_t^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \Big] \\
& - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)} \sum_{i=1}^j \eta_i \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_i)} \\
& \times \int_a^{\xi_i} \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_i-1}(\xi_i) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \left[\int_a^{\xi_i} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_{\xi_i}^t \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right] \\
& = \int_a^{\xi_i} \left[\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta\Gamma(\gamma_2)} \sum_{i=1}^j \eta_i \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_i-1}(\xi_i)}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_i)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t)}{\Gamma(\alpha_2)} \right] \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \int_{\xi_i}^t \left[\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t)}{\Gamma(\alpha_2)} \right] \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \int_t^b \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Delta\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& = \int_a^b G(t, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \lambda(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma
\end{aligned}$$

İspat tamamlanmıştır. □

Önerme 4.1.3. (4.11) de verilen, $G_1(t, \varsigma)$, Green fonksiyonu $[a, b] \times [a, b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur ve

$$G_1(t, \varsigma) \leq \frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)}$$

eşitsizliğini sağlar.

Önerme 4.1.4. $F : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\lim_{t \rightarrow a^+} F(t) = \infty$ olsun. $0 < \sigma_2 < \alpha_1$ olmak üzere $\psi_a^{\sigma_2}(t)F(t)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu varsayalım. O halde,

$$H(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^t \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t) F(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta,$$

fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde süreklidir.

Kanıt. İspat üç duruma ayrılmıştır:

Durum 1. $\psi_a^{\sigma_2}(t)F(t)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan $\forall t \in [a, b]$ için $\psi_a^{\sigma_2}(t)|F(t)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. $t_0 = a$ ve $\forall t \in (a, b]$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} & |H(t) - H(a)| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^t \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi_a^{\sigma_2}(\zeta) F(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^t \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi_a^{\sigma_2}(\zeta) |F(\zeta)| \psi'(\zeta) d\zeta \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^t \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{M}{\Gamma(\alpha_1)} \psi_a^{\alpha_1-\sigma_2}(t) B(\alpha_1, -\sigma_2 + 1) \\ &= M \psi_a^{\alpha_1-\sigma_2}(t) \frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow a) \end{aligned}$$

B beta fonksiyonu olmak üzere yukarıdaki eşitsizlik elde edilir.

Durum 2. $t_0 \in (a, b)$ ve $\forall t \in (a, b]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} & |H(t) - H(t_0)| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^t \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi_a^{\sigma_2}(\zeta) F(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^{t_0} \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t_0) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi_a^{\sigma_2}(\zeta) F(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^{t_0} \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi_a^{\sigma_2}(\zeta) F(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_0}^t \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi_a^{\sigma_2}(\zeta) F(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^{t_0} \psi_\zeta^{\alpha_1-1}(t_0) \psi_a^{-\sigma_2}(\zeta) \psi_a^{\sigma_2}(\zeta) F(\zeta) \psi'(\zeta) d\zeta \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^{t_0} (\psi_\varsigma^{\alpha_1-1}(t) - \psi_\varsigma^{\alpha_1-1}(t_0)) \psi_a^{-\sigma_2}(\varsigma) \psi_a^{\sigma_2}(\varsigma) F(\varsigma) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_0}^t \psi_\varsigma^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\varsigma) \psi_a^{\sigma_2}(\varsigma) F(\varsigma) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^{t_0} (\psi_\varsigma^{\alpha_1-1}(t) - \psi_\varsigma^{\alpha_1-1}(t_0)) \psi_a^{-\sigma_2}(\varsigma) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_0}^t \psi_\varsigma^{\alpha_1-1}(t) \psi_a^{-\sigma_2}(\varsigma) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha_1)} \psi_a^{\alpha_1-\sigma_2}(t) B(\alpha_1, -\sigma_2 + 1) - \frac{M}{\Gamma(\alpha_1)} \psi_a^{\alpha_1-\sigma_2}(t_0) B(\alpha_1, -\sigma_2 + 1) \\
&= M \psi_a^{\alpha_1-\sigma_2}(t) \frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} - M \psi_a^{\alpha_1-\sigma_2}(t_0) \frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow t_0)
\end{aligned}$$

Durum 3. $t_0 \in (a, b]$ ve $\forall t \in [a, t_0)$ olmak üzere ispat Durum 2 dekine benzerdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

□

$E_2 = C[a, b]$ Banach uzayı üzerinde

$$\|\mathfrak{z}\| = \max_{a \leq t \leq b} |\mathfrak{z}(t)|$$

normu ele alınsın ve T_2 operatörü,

$$(T_2 \mathfrak{z})(t) = \int_a^b G_1(t, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) f(\tau, \mathfrak{z}(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma$$

olarak tanımlansın.

Önerme 4.1.5. $0 < \sigma_2 < \alpha_1$, $f : (a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t, \cdot) = +\infty$ olsun. Eğer $\psi_a^{\sigma_2}(t)f(t, \varkappa(t))$ fonksiyonu $[a, b] \times \mathbb{R}$ üzerinde sürekli ise, o zaman $T_2 : E_2 \rightarrow E_2$ tamamen sürekli bir operatördür.

Kanıt. Önerme 4.1.3 ve Önerme 4.1.4 den T_2 operatörünün sürekli olduğu açıktır. Şimdi T_2 operatörünün kompakt bir operatör olduğunu gösterelim.

Ω , E_2 nin sınırlı bir alt kümesi olsun, Bu durumda, $\varkappa \in \Omega$ ve $\mathsf{T} \in [a, b]$ için $\psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) |f(t, \varkappa(\mathsf{T}))| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ reel sayısı vardır. Önerme 4.1.3 yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& |(T_2 \varkappa)(t)| \\
& \leq \int_a^b G_1(t, \varsigma) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) |f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T}))| \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \int_a^b \phi_q \left(\frac{M}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1+(\alpha_1-\sigma_2)(q-1)}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \left(\frac{M \Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $T(\Omega)$ düzgün sınırlıdır. Şimdi $T(\Omega)$ nın aynı dereceden sürekli olduğu gösterilsin.

Her $\varkappa \in \Omega$, $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $t_1 < t_2$ için

$$\begin{aligned}
& |(T_2 \varkappa)(t_2) - (T_2 \varkappa)(t_1)| \\
& \leq \left| \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1))}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \left(\int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \right. \right. \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-k}(\mathsf{T}) \psi_a^k(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \quad - \sum_{i=1}^l \eta_i \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_i)} \int_a^{\xi_i} \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_i-1}(\xi_i) \\
& \quad \left. \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-k}(\mathsf{T}) \psi_a^k(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right) \right| \\
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^{t_2} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t_2) \right. \\
& \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-k}(\mathsf{T}) \psi_a^k(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^{t_1} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t_1) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-k}(\tau) \psi_a^k(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \Big| \\
\leq & \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1))}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2)} \left(\int_a^b \frac{\psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right. \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-k}(\tau) \psi_a^k(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^{t_1} (\psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t_2) - \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t_1)) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-k}(\tau) \psi_a^k(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_1}^{t_2} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t_2) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-k}(\tau) \psi_a^k(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
\leq & \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1))}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2)} \left(\frac{M \psi_a^{\alpha_1-k}(b) \Gamma(-k+1)}{\Gamma(\alpha_1-k+1)} \right)^{q-1} \frac{\psi_a^{2+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Gamma(3+\alpha_2-\gamma_2)} \\
& + \frac{\psi_a^{\alpha_2}(t_2)}{\Gamma(\alpha_2+1)} \left(\frac{M \psi_a^{\alpha_1-k}(b) \Gamma(-k+1)}{\Gamma(\alpha_1-k+1)} \right)^{q-1} \\
& - \frac{\psi_a^{\alpha_2}(t_1)}{\Gamma(\alpha_2+1)} \left(\frac{M \psi_a^{\alpha_1-k}(b) \Gamma(-k+1)}{\Gamma(\alpha_1-k+1)} \right)^{q-1} \rightarrow 0, \quad (t_2 \rightarrow t_1)
\end{aligned}$$

Arzelà–Ascoli teoreminden $T_2 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörü tamamen sürekli bir operatördür. $\square$

4.2 Banach Daraltan Dönüşüm Prensibi ve Uygulaması

Bu alt bölümde (4.1) de verilen p -Laplacian operatörlü tekil (singüler) kesirli sınır değer probleminin, p nin durumlarına göre en az bir çözümünün varlığı ve tekliği için gerekli koşullar Banach daraltan dönüşüm prensibi ile elde edilecektir. Sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için örnekler verilecektir.

Önerme 4.2.1. (*Granas and Dugundji, 2003*). (**Banach Daraltan Dönüşüm Prensibi**) X , bir Banach uzayı B nin boştan farklı, kapalı bir alt kümesi olsun. O zaman herhangi bir $T : X \rightarrow X$ daraltan dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.2.2. $1 < p < 2$ olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

(H_6) Negatif olmayan bir $g \in L[a, b]$ fonksiyonu ve bir pozitif M sabiti vardır

öyleki: her $(t, \varkappa) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ için $\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa)| \leq g(t)$ ve

$$0 < \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_t^{\alpha_1-1}(b) \psi_a^{-\sigma_2}(t) g(t) \psi'(t) dt \leq M.$$

(H_7) Her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa) - f(t, y)| \leq z_1 |\varkappa - y|$$

ve

$$0 < z_1 < \frac{1}{2 \left((q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_1+\alpha_2-\sigma_2+1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right) \right)} \quad (4.12)$$

olacak şekilde bir z_1 sabiti vardır.

Bu durumda, (4.1) de verilen kesirli mertebeden sınır değer problemi tek bir çözüme sahiptir.

Kanıt. İlk olarak (H_6) koşulundan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) |f(\tau, \varkappa(\tau))| \psi'(\tau) d\tau \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_\tau^{\alpha_1-1}(b) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\leq M$$

elde edilir. Daha sonra,

$$r_1 \geq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) M^{q-1}$$

olacak şekilde $B_{r_1} = \{\varkappa \in C([a, b], \mathbb{R}) : \|\varkappa\| \leq r_1\}$ yuvarı tanımlansın.

Şimdi Önerme 4.1.3 ve (H_6) koşulu yardımıyla $T_2 B_{r_1} \subset B_{r_1}$ olduğunu göstereyim;

$$\begin{aligned} & |(T_2 \varkappa)(t)| \\ & \leq \int_a^b G_1(t, \varsigma) \\ & \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) |f(\tau, \varkappa(\tau))| \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) M^{q-1} \\ & \leq r_1, \end{aligned}$$

dir. O halde $T_2 B_{r_1} \subset B_{r_1}$ dir.

Son olarak, T_2 operatörünün daraltan bir dönüşüm olduğunu gösterelim. Önerme 2.0.21, Önerme 2.0.24, Önerme 4.1.3 ve (H_7) koşulunu kullanarak, her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in (C[a, b], \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} & |(T_2 \varkappa)(t) - (T_2 y)(t)| \\ & \leq \int_a^b G_1(t, \varsigma) \\ & \quad \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \right. \\ & \quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, y(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\ & \quad \times \int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, y(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^\varsigma \psi_{\mathbf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathbf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathbf{T}) |f(\mathbf{T}, \varkappa(\mathbf{T})) - f(\mathbf{T}, y(\mathbf{T}))| \psi'(\mathbf{T}) d\mathbf{T} \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) z_1 \|\varkappa - y\| \\
& \quad \times \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathbf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathbf{T}) \psi'(\mathbf{T}) d\mathbf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_1+\alpha_2-\sigma_2+1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) z_1 \|\varkappa - y\| \\
& \leq \frac{\|\varkappa - y\|}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde T_2 operatörü daraltan bir dönüşümdür.

Böylelikle Banach daraltan dönüşüm prensibine göre, (4.1) de ele alınan kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır. $\square$

Teorem 4.2.3. $p > 2$ olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın :

(H₈) Her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(t, \varkappa) \geq m \psi_a^{\delta-\sigma_2}(t) \quad (4.13)$$

olacak şekilde $\delta < \min \left\{ (\alpha_1 + \sigma_2), \frac{(\alpha_1 - \sigma_2)(q-1)}{2-q} \right\}$ ve $m > 0$ sabitleri vardır.

(H₉) Her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa) - f(t, y)| \leq z_2 |\varkappa - y|$$

ve

$$0 < z_2 < \frac{\left(\frac{m \Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{2-q}}{2 \left((q-1) \left(\frac{\psi_a^{(\alpha_1 + \delta - \sigma_2)(q-2) + \alpha_1 + \alpha_2 - \sigma_2 + 1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) \right)} \quad (4.14)$$

olacak şekilde bir z_2 sabiti vardır.

Bu durumda, (4.1) de verilen kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Kanıt. İlk olarak (H_8) koşulundan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right| \\ & \geq \frac{m}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{\delta-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \\ & = \frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \psi_a^{\alpha_1+\delta-\sigma_2}(\varsigma) \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra,

$$r_2 \geq \max \left\{ \frac{1-f_0}{z_2}, \frac{f_0 \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1+(\alpha_1-\sigma_2)(q-1)}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right)^{q-1}}{1 - z_2 \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1+(\alpha_1-\sigma_2)(q-1)}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right)^{q-1}} \right\}$$

olacak şekilde $B_{r_2} = \{\varkappa \in C([a, b], \mathbb{R}) : \|\varkappa\| \leq r_2\}$ yuvarı tanımlansın. Burada

$f_0 = \max_{t \in [a, b]} \psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, 0)|$ dır. Şimdi Önerme 4.1.3 ve (H_8) koşulu yardımıyla

$T_2 B_{r_2} \subset B_{r_2}$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} & |(T_2 \varkappa)(t)| \\ & \leq \int_a^b G_1(t, \varsigma) \\ & \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) |f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) - f(\mathsf{T}, 0)| \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) |f(\mathsf{T}, 0)| \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1+(\alpha_1-\sigma_2)(q-1)}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right)^{q-1} (z_2 \|\varkappa\| + f_0)^{q-1} \\ & \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1+(\alpha_1-\sigma_2)(q-1)}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right)^{q-1} (z_2 r_2 + f_0)^{q-1} \\ & \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2+1+(\alpha_1-\sigma_2)(q-1)}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right)^{q-1} (z_2 r_2 + f_0) \\ & \leq r_2 \end{aligned}$$

dir. O halde $T_2 B_{r_2} \subset B_{r_2}$ dir.

Son olarak, T_2 operatörünün daraltan bir dönüşüm olduğunu gösterelim.

Önerme 2.0.21, Önerme 2.0.24, Önerme 4.1.3 ve (H_9) koşulu kullanılarak, her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in (C[a, b], \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
& |(T_2 \varkappa)(t) - (T_2 y)(t)| \\
& \leq \int_a^b G_1(t, \varsigma) \\
& \quad \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \right. \\
& \quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, y(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1 + \delta - \sigma_2)(q-2)}(\varsigma) \\
& \quad \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, y(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1 + \delta - \sigma_2)(q-2)}(\varsigma) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) |f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) - f(\mathsf{T}, y(\mathsf{T}))| \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) z_2 \|\varkappa - y\| \\
& \quad \times \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1 + \delta - \sigma_2)(q-2)}(\varsigma) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times z_2 \|\varkappa - y\| \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1 + \delta - \sigma_2)(q-2) + \alpha_1 - \sigma_2}(\varsigma) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{(\alpha_1 + \delta - \sigma_2)(q-2) + \alpha_1 + \alpha_2 - \sigma_2 + 1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) z_2 \|\varkappa - y\| \\
& \leq \frac{\|\varkappa - y\|}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde T_2 operatörü daraltan bir dönüşümdür.

Böylelikle Banach daraltan dönüşüm prensibine göre (4.1) de ele alınan kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır. $\square$

Teorem 4.2.4. $p > 2$ olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

(H_{10}) Her $(t, \kappa) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ için

$$f(t, \kappa) \leq -m\psi_a^{\delta-\sigma_2}(t) \quad (4.15)$$

olacak şekilde $\delta < \min \left\{ (\alpha_1 + \sigma_2), \frac{(\alpha_1 - \sigma_2)(q-1)}{2-q} \right\}$ ve $m > 0$ sabitleri vardır.

(H_{11}) Her $t \in [a, b]$ ve $\kappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \kappa) - f(t, y)| \leq z_3 |\kappa - y|$$

ve

$$0 < z_3 < \frac{\left(\frac{m\Gamma(\delta-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\delta-\sigma_2+1)} \right)^{2-q}}{2 \left((q-1) \left(\frac{\psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)+\alpha_1+\alpha_2-\sigma_2+1}(b)}{\Delta_2\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right) \right)} \quad (4.16)$$

olacak şekilde bir z_3 sabiti vardır.

Bu durumda, (4.1) de verilen kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Kanıt. Teorem 4.2.3 nin ispatına benzerdir. $\square$

Şimdi, elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için aşağıdaki örnekleri verelim.

Örnek 4.2.1. Aşağıdaki kesirli sınır değer problemi ele alınsın:

$$\begin{cases} {}^H D_{a+}^{\frac{4}{5}, \frac{1}{2}; \psi} \left(\phi_{\frac{3}{2}} \left({}^H D_{0+}^{\frac{7}{5}, \frac{1}{3}; \psi} \kappa(t) \right) \right) + \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{5}}}{20t} \left(\frac{|\kappa|}{|\kappa|+1} + \sin t \right) = 0, & t \in [0, 1] \\ {}^H D_{0+}^{\frac{7}{5}, \frac{1}{3}; \psi} \kappa(0) = 0, & \kappa(0) = 0, \\ I_{0+}^{\frac{4}{5}, \psi} \kappa(1) = \frac{1}{2} I_{0+}^{1, \psi} u\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{7}{10} I_{0+}^{2, \psi} u\left(\frac{3}{5}\right) \end{cases} \quad (4.17)$$

O halde, (4.17) da verilen kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Kanıt. (4.17) da ki sınır değer problemi, (4.1) de verilen sınır değer probleminin özel bir halidir. Burada $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_1 = \frac{4}{5}$, $\alpha_2 = \frac{7}{5}$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$, $p = \frac{3}{2}$, $l = 2$, $\eta_1 = \frac{1}{2}$, $\eta_2 = \frac{7}{10}$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 2$, $\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\xi_2 = \frac{3}{5}$, $\psi(t) = t^2 + 1$, $q = 3 > 2$ ve

$$f(t, \varkappa) = \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{5}}}{20t} \left(\frac{|\varkappa|}{|\varkappa|+1} + \sin t \right)$$

dir. Ayrıca $\psi_0^{\frac{1}{2}}(t)f(t, \varkappa)$, $[0, 1]$ üzerinde süreklidir. $g(t) = \frac{(1-t^2)^{1/5}}{10}$ olsun. O halde

$$0 < \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_t^{\alpha_1-1}(b) \psi_a^{-\sigma_2}(t) g(t) \psi'(t) dt = 0,17179 = M$$

elde edilir. $z_1 = \frac{1}{20}$ olmak üzere

$$0 < z_1 < \frac{1}{2 \left((q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_1+\alpha_2-\sigma_2+1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right) \right)} = 0.96828.$$

koşulu sağlanmış olur. Ayrıca $(t, \varkappa) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ için

$$\psi_a^{\sigma_2}(t) f(t, \varkappa) \leq g(t)$$

ve $t \in [0, 1]$, $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} & \psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa) - f(t, y)| \\ &= \left| \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{5}}}{20} \left(\frac{|\varkappa|}{|\varkappa|+1} + \sin t \right) - \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{5}}}{20} \left(\frac{|y|}{|y|+1} + \sin t \right) \right| \\ &\leq \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{5}}}{20} |\varkappa - y| \\ &\leq z_1 |\varkappa - y| \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. O halde Teorem 4.2.2 ye göre (4.17) da verilen kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır. $\square$

Örnek 4.2.2. Aşağıdaki kesirli sınır değer problemi ele alınsın:

$$\begin{cases} {}^H D_{a+}^{\frac{9}{10}, \frac{1}{4}; \psi} \left(\phi_{\frac{12}{5}} \left({}^H D_{0+}^{\frac{9}{5}, \frac{1}{2}; \psi} \varkappa(t) \right) \right) + \frac{(t^2+t+1)}{20\sqrt{t}} \left(\frac{|\varkappa(t)|}{|\varkappa(t)|+1} + 1 \right) = 0, & t \in [0, 1] \\ {}^H D_{0+}^{\frac{9}{5}, \frac{1}{2}; \psi} \varkappa(0) = 0, & \varkappa(0) = 0, \\ I_{0+}^{\frac{3}{10}, \psi} \varkappa(1) = \frac{1}{5} I_{0+}^{\frac{2}{5}, \psi} u\left(\frac{2}{9}\right) \end{cases} \quad (4.18)$$

O halde, (4.18) de verilen kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Kanıt. (4.18) de ki kesirli sınır değer problemi, (4.1) de verilen kesirli sınır değer probleminin özel bir halidir. Burada $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_1 = \frac{9}{10}$, $\alpha_2 = \frac{9}{5}$, $\beta_1 = \frac{1}{4}$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$, $p = \frac{12}{5}$, $l = 1$, $\eta_1 = \frac{1}{5}$, $\varphi_1 = \frac{2}{5}$, $\xi_1 = \frac{2}{9}$, $\psi(t) = t^2$ ve

$$f(t, \varkappa(t)) = \frac{(t^2 + t + 1)}{20\sqrt{t}} \left(\frac{|\varkappa(t)|}{|\varkappa(t)| + 1} + 1 \right),$$

dir. O zaman $q = \frac{12}{7} < 2$ dir. $\psi_0^{\frac{1}{4}}(t)f(t, \varkappa)$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde süreklidir. $m = \frac{1}{20}$, $\delta = \frac{11}{10}$ ve $z_2 = \frac{3}{20}$ alınırsa

$$\delta < \min \left\{ (\alpha_1 + \sigma_2), \frac{(\alpha_1 - \sigma_2)(q - 1)}{2 - q} \right\} = \frac{23}{20},$$

ve

$$0 < z_2 < \frac{\left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{2-q}}{2 \left((q - 1) \left(\frac{\psi_a^{(\alpha_1 + \delta - \sigma_2)(q-2) + \alpha_1 + \alpha_2 - \sigma_2 + 1}(b)}{\Delta_2 \Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) \right)} = 0,40723$$

elde edilir. $(t, \varkappa) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ için

$$f(t, \varkappa) \geq m\psi_a^{\delta - \sigma_2}(t) = \frac{1}{20}t^{17/20}$$

ve $t \in [0, 1]$, $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} & \psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa) - f(t, y)| \\ &= \left| \frac{(t^2 + t + 1)}{20} \left(\frac{|\varkappa|}{|\varkappa| + 1} + 1 \right) - \frac{(t^2 + t + 1)}{20} \left(\frac{|y|}{|y| + 1} + 1 \right) \right| \\ &\leq \frac{(t^2 + t + 1)}{20} |\varkappa - y| \\ &\leq z_2 |\varkappa - y| \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde Teorem 4.2.3 e göre (4.18) de verilen kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır. $\square$

4.3 Krasnoselskii sabit nokta teoremi

Bu alt bölümde (4.1) de verilen p -Laplacian operatörlü tekil (singüler) kesirli sınır değer probleminin, p nin durumlarına göre en az bir çözümünün varlığı için gerekli koşullar Krasnoselskii sabit nokta teoremi ile elde edilecektir. Bunun için ilk olarak, Önerme 4.1.1 de verilen $\varkappa(t)$ çözümü farklı bir şekilde ifade edilecektir.

Önerme 4.3.1. $h \in C([a, b], \mathbb{R})$ ve $n = 1, 2$ için $n - 1 < \alpha_n \leq n$, $0 \leq \beta_n \leq 1$,

$\gamma_n = \alpha_n + \beta_n(n - \alpha_n)$ ise

$$\begin{cases} {}^H D_{a^+}^{\alpha_1, \beta_1, \psi} \left(\phi_p \left({}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2, \psi} \varkappa(t) \right) \right) + h(t) = 0, & a < t < b, \\ {}^H D_{a^+}^{\alpha_2, \beta_2, \psi} \varkappa(a) = 0, & \varkappa(a) = 0, & I_{a^+}^{2-\gamma_2, \psi} \varkappa(b) = \sum_{j=1}^l \eta_j I_{a^+}^{\varphi_j, \psi} \varkappa(\xi_j) \end{cases} \quad (4.19)$$

p -Laplacian operatörlü ψ -Hilfer kesirli sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} \varkappa(t) = & \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3 \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \\ & \times \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_j)} \\ & \times \int_a^{\xi_j} \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \end{aligned} \quad (4.20)$$

ile ifade edilir. Burada

$$\Delta_3 = \Gamma(\gamma_2) \left(\psi_a(b) - \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2)} \psi_a^{\varphi_j + \gamma_2 - 1}(\xi_j) \right) \neq 0$$

olduğu kabul edilmektedir.

Kanıt. İspat Önerme 4.1.1 ile benzerdir. □

Önerme 4.3.2. (4.20) de verilen, (4.19) de ki kesirli sınır değer probleminin çözümü olan $\varkappa(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varkappa(t) = \int_a^b G_2(t, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathbf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\mathbf{T}) \psi'(\mathbf{T}) d\mathbf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma, \quad t \in [a, b], \quad (4.21)$$

burada

$$G_2(t, \varsigma) = g_1(t, \varsigma) + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j g_2(\xi_j, \varsigma), \quad (4.22)$$

ve

$$g_1(t, \varsigma) = \begin{cases} \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2) \psi_a(b)}, & a \leq t \leq \varsigma \leq b, \\ \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2) \psi_a(b)} - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t)}{\Gamma(\alpha_2)}, & a \leq \varsigma \leq t \leq b, \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^l \eta_j g_2(\xi_j, \varsigma) \\ &= \sum_{j=1}^l \eta_j \begin{cases} \frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2-1}(\xi_j) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2) \psi_a(b)}, & a \leq \xi_j \leq \varsigma \leq b, \\ \frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2-1}(\xi_j) \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2) \psi_a(b)} - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j)}{\Gamma(\alpha_2+\varphi_j)}, & a \leq \varsigma \leq \xi_j \leq b \end{cases} \end{aligned} \quad (4.24)$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \varkappa(t) = & \left[\int_a^t \left(\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2) \psi_a(b)} \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \right) \right. \\ & \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathbf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\mathbf{T}) \psi'(\mathbf{T}) d\mathbf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\ & + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2) \psi_a(b)} \int_t^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \\ & \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathbf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\mathbf{T}) \psi'(\mathbf{T}) d\mathbf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right] \\ & - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2) \psi_a(b)} \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3 \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \\
& \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_j)} \\
& \times \int_a^{\xi_j} \psi_s^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
= & \left[\int_a^t \left(\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2) \psi_a(b)} \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \right) \right. \\
& \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2) \psi_a(b)} \\
& \times \int_t^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \Big] \\
& - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3 \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \\
& \times \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3 \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2) \psi_a(b)} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2)} \psi_a^{\varphi_j+\gamma_2-1}(\xi_j) \\
& \times \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3 \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \\
& \times \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{1}{\Gamma(\alpha_2 + \varphi_j)} \\
& \times \int_a^{\xi_j} \psi_s^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
= & \left[\int_a^t \left(\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2) \psi_a(b)} \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \right) \right. \\
& \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)\psi_a(b)} \\
& \quad \times \int_t^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \Big] \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \\
& \quad \times \left[\frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2-1}(\xi_j)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)\psi_a(b)} \right. \\
& \quad \times \int_a^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2+\varphi_j)} \int_a^{\xi_j} \psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j) \\
& \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right] \\
& = \left[\int_a^t \left(\frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)\psi_a(b)} \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \psi_\varsigma^{\alpha_2-1}(t) \right) \right. \\
& \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
& \quad + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)\psi_a(b)} \int_t^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \\
& \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right] \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \left[\int_a^{\xi_j} \left(\frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2-1}(\xi_j)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)\psi_a(b)} \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\psi_\varsigma^{\alpha_2+\varphi_j-1}(\xi_j)}{\Gamma(\alpha_2+\varphi_j)} \right) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
& \quad + \frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2-1}(\xi_j)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)\psi_a(b)} \int_{\xi_j}^b \psi_\varsigma^{1+\alpha_2-\gamma_2}(b) \\
& \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right] \\
& = \int_a^b g_1(t, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& = \int_a^b G_2(t, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) h(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma
\end{aligned}$$

□

Önerme 4.3.3. *Sırasıyla, (4.23) ve (4.24) de verilen g_1 ve g_2 fonksiyonları $[a, b] \times [a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır ve her $(t, \varsigma) \in [a, b] \times [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:*

$$g_1(t, \varsigma) \leq \frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)},$$

$$\sum_{j=1}^l \eta_j g_2(\xi_j, \varsigma) \leq \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j + \alpha_2 - 1}(b)}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2)\Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)}.$$

$E_2 = C[a, b]$ Banach uzayı üzerinde;

$$\|\varkappa\| = \max_{a \leq t \leq b} |\varkappa(t)|$$

normunu ele alalım . $T_3 : E_2 \rightarrow E_2$ ve $T_4 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(T_3 \varkappa)(t) = \int_a^b g_1(t, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma,$$

$$(T_4 \varkappa)(t) = \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \times \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma.$$

(4.1) kesirli sınır değer problemi bir çözüme sahiptir ancak ve ancak $T_3 + T_4$ bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.3.4. (Krasnoselskii's sabit nokta teoremi) (Smart, 1974). B_r , X Banach uzayının sınırlı, kapalı, konveks ve boştan farklı bir alt kümesi A ve B aşağıdaki koşulları sağlayan iki operatör olsun:

- (i) $x, y \in B_r$ iken $Ax + By \in B_r$;
- (ii) A kompakt ve sürekli;
- (iii) B daraltan bir dönüşümdür.

Bu durumda, $z = Az + Bz$ olacak şekilde $z \in B_r$ vardır.

Teorem 4.3.5. $1 < p < 2$ ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

(H₇) Negatif olmayan bir $g \in L[a, b]$ fonksiyonu ve bir M pozitif sabiti vardır
öyleki her $(t, \varkappa) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ için $\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa)| \leq g(t)$ ve

$$0 < \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_t^{\alpha_1-1}(b) \psi_a^{-\sigma_2}(t) g(t) \psi'(t) dt \leq M.$$

(H₈) Her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa) - f(t, y)| \leq z_1 |\varkappa - y|$$

ve

$$0 < z_1 < \frac{1}{2 \left((q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right) \right)} \quad (4.25)$$

olacak şekilde bir z_1 sabiti vardır.

Bu durumda, (4.1) de verilen kesirli mertebeden sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır.

Kanıt.

$$r_3 \geq M^{q-1} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} + \frac{1}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2+\alpha_2-2}(b)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right).$$

olacak şekilde seçilen bir r_3 için $B_{r_3} = \{\varkappa \in C([a, b], \mathbb{R}) : \|\varkappa\| \leq r_3\}$ olsun.

Önerme 4.1.4 ve (H₇) kullanılarak, her $\varkappa, y \in B_r$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & |(T_3 \varkappa)(t) + (T_4 y)(t)| \\ & \leq \left| \int_a^b g_1(t, \varsigma) \right. \\ & \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right| \\ & \quad + \left| \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \right. \\ & \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, y(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right| \\ & \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_a^b \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(b)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \\
& \times \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) M^{q-1} \\
& + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(b)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j + \alpha_2 - 1}(b)}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} M^{q-1} \\
& \leq r_3
\end{aligned}$$

Böylece $\|T_3\kappa + T_4y\| \leq r_3$ elde edilir. Bu ise $T_3\kappa + T_4y \in B_{r_3}$ olduğunu gösterir.

Şimdi, T_4 operatörünün tamamen sürekli olduğunu gösterelim. Önerme 2.0.24 ve Önerme 4.1.4 kullanılarak, $T_4 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörünün sürekli olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi T_4 operatörünün tanım kümesinin sınırlı alt kümelerinde kompakt olduğunu gösterelim.

$\Omega \subset E$ sınırlı olsun. Önerme 2.0.24 ve (H_7) kullanılarak, $\kappa \in \Omega$, $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& |(T_4\kappa)(t)| \\
& \leq \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^{\varsigma} \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) |f(\tau, \kappa(\tau))| \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(b)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \frac{M^{q-1}}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j + \gamma_2 + \alpha_2 - 2}(b)}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)}
\end{aligned}$$

Bu ise $T_4(\Omega)$ ün sınırlı olması demektir. Şimdi de, $T_4(\Omega)$ ün aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim.

Her $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$ ve $\varkappa \in \Omega$ için:

$$\begin{aligned}
& |(T_4 \varkappa)(t_2) - (T_4 \varkappa)(t_1)| \\
& \leq \left| \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \right. \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \quad \left. - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t_1)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \right. \\
& \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right| \\
& \leq \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1))}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) |f(\tau, \varkappa(\tau))| \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1))}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1)) M^{q-1}}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j + \gamma_2 + \alpha_2 - 2}(b)}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $t_2 \rightarrow t_1$ limit durumunda yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gittiğinden, Arzela-Ascoli teoreminden $T_4 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğu görülür.

Son olarak, T_1 in daraltan bir dönüşüm olduğunu gösterelim. İlk olarak, (H_7) koşulundan, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) |f(\tau, \varkappa(\tau))| \psi'(\tau) d\tau \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_\tau^{\alpha_1-1}(b) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \\
& \leq M
\end{aligned}$$

$t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in (C[a, b], \mathbb{R})$ için Önerme 2.0.21, Önerme 2.0.24, Önerme 4.3.3 ve (H_8) kullanılarak, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& |(T_3 \varkappa)(t) - (T_3 y)(t)| \\
& \leq \int_a^b g_1(t, \varsigma) \\
& \quad \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, y(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) f(\mathsf{T}, y(\mathsf{T})) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \right. \\
& \quad \left. \int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathsf{T}) |f(\mathsf{T}, \varkappa(\mathsf{T})) - f(\mathsf{T}, y(\mathsf{T}))| \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) z_1 \|\varkappa - y\| \\
& \quad \times \int_a^b \left(\int_a^\varsigma \psi_{\mathsf{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathsf{T}) \psi'(\mathsf{T}) d\mathsf{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) M^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) z_1 \|\varkappa - y\| \\
& \leq \frac{\|\varkappa - y\|}{2}.
\end{aligned}$$

Bu ise $T_3 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörünün daraltan bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Böylece, Krasnoselskii sabit nokta teoreminin koşulları sağlandığından, (4.1) kesirli sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır. $\square$

Teorem 4.3.6. $p > 2$ olsun, (H_7) ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

(H_9) Her $(t, \varkappa) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ için

$$f(t, \varkappa) \geq m\psi_a^{\delta-\sigma_2}(t) \quad (4.26)$$

olacak şekilde $\delta < \min \left\{ (\alpha_1 + \sigma_2), \frac{(\alpha_1 - \sigma_2)(q-1)}{2-q} \right\}$ ve $m > 0$ sabitleri vardır.

(H_{10}) Her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa) - f(t, y)| \leq z_2 |\varkappa - y|$$

ve

$$0 < z_2 < \frac{\left(\frac{m\Gamma(\delta-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\delta-\sigma_2+1)} \right)^{2-q}}{2 \left((q-1) \left(\frac{\psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)+\alpha_1+\alpha_2-\sigma_2}(b)}{\Delta_3\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right) \right)} \quad (4.27)$$

olacak şekilde bir z_2 sabiti vardır.

Bu durumda, (4.1) de verilen kesirli sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır.

Kanıt.

$$r_4 \geq M^{q-1} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} + \frac{1}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2+\alpha_2-2}(b)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right).$$

olacak şekilde $B_{r_4} = \{\varkappa \in C([a, b], \mathbb{R}) : \|\varkappa\| \leq r_4\}$ yuvarı tanımlansın.

Önerme 4.1.4 ve (H_7) kullanılarak, herhangi bir $\varkappa, y \in B_{r_4}$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & |(T_3 \varkappa)(t) + (T_4 y)(t)| \\ & \leq \left| \int_a^b g_1(t, \varsigma) \right. \\ & \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right| \\ & \quad + \left| \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \right. \\ & \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, y(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \\
&\quad \times \int_a^b \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&\quad + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(b)}{\Delta_3} \\
&\quad \times \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&\leq \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) M^{q-1} \\
&\quad + \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(b)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j+\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} M^{q-1} \\
&\leq r_4
\end{aligned}$$

Böylece $\|T_3\kappa + T_4y\| \leq r_4$ elde edilir. Bu ise $T_3\kappa + T_4y \in B_{r_4}$ olduğunu gösterir.

Şimdi, T_4 operatörünün tamamen sürekli olduğunu gösterelim. Önerme 2.0.24 ve Önerme 4.1.4 kullanılarak, $T_4 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörünün sürekli olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi T_4 operatörünün tanım kümesinin sınırlı alt kümelerinde kompakt olduğunu gösterelim.

$\Omega \subset E_2$ sınırlı olsun. Önerme 2.0.24 ve (H_7) kullanılarak, $\kappa \in \Omega$, $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&|(T_4\kappa)(t)| \\
&\leq \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \\
&\quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^{\varsigma} \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) |f(\tau, \kappa(\tau))| \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&\leq \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(b)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \\
&\quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^b \psi_{\tau}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
&\leq \frac{M^{q-1}}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j+\gamma_2+\alpha_2-2}(b)}{\Gamma(\varphi_j+\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)}
\end{aligned}$$

Bu ise $T_4(\Omega)$ in sınırlı olması demektir. Şimdi de, $T_4(\Omega)$ in aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim.

$t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$, ve $\varkappa \in \Omega$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& |(T_4 \varkappa)(t_2) - (T_4 \varkappa)(t_1)| \\
& \leq \left| \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \right. \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \quad \left. - \frac{\psi_a^{\gamma_2-1}(t_1)}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \right. \\
& \quad \left. \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right| \\
& \leq \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1))}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \\
& \quad \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) |f(\tau, \varkappa(\tau))| \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1))}{\Delta_3} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^l \eta_j \int_a^b g_2(\xi_j, \varsigma) \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) g(\tau) \psi'(\tau) d\tau \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq \frac{(\psi_a^{\gamma_2-1}(t_2) - \psi_a^{\gamma_2-1}(t_1)) M^{q-1}}{\Delta_3} \sum_{j=1}^l \eta_j \frac{\psi_a^{\varphi_j + \gamma_2 + \alpha_2 - 2}(b)}{\Gamma(\varphi_j + \gamma_2) \Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)}
\end{aligned}$$

$t_2 \rightarrow t_1$ limit durumunda yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gittiğinden, Arzela-Ascoli teoreminden $T_4 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğu görülür.

Son olarak, T_3 ün daraltan bir dönüşüm olduğunu gösterelim. İlk olarak, (H_9) ve Önerme 2.0.21 den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\tau) \psi_a^{\sigma_2}(\tau) f(\tau, \varkappa(\tau)) \psi'(\tau) d\tau \right| \\
& \geq \frac{m}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_\tau^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{\delta-\sigma_2}(\tau) \psi'(\tau) d\tau \\
& = \frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \psi_a^{\alpha_1 + \delta - \sigma_2}(\varsigma)
\end{aligned}$$

$t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in (C[a, b], \mathbb{R})$ için Önerme 2.0.21, Önerme 2.0.24, Önerme 4.3.3 ve (H_{10}) hipotezinden, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& |(T_3 \mathfrak{x})(t) - (T_3 y)(t)| \\
& \leq \int_a^b g_1(t, \varsigma) \\
& \quad \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathfrak{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathfrak{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathfrak{T}) f(\mathfrak{T}, \mathfrak{x}(\mathfrak{T})) \psi'(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathfrak{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathfrak{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathfrak{T}) f(\mathfrak{T}, y(\mathfrak{T})) \psi'(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)}(\varsigma) \\
& \quad \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathfrak{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathfrak{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathfrak{T}) f(\mathfrak{T}, \mathfrak{x}(\mathfrak{T})) \psi'(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathfrak{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathfrak{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathfrak{T}) f(\mathfrak{T}, y(\mathfrak{T})) \psi'(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right| \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)}(\varsigma) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathfrak{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathfrak{T}) \psi_a^{\sigma_2}(\mathfrak{T}) |f(\mathfrak{T}, \mathfrak{x}(\mathfrak{T})) - f(\mathfrak{T}, y(\mathfrak{T}))| \psi'(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) z_2 \|\mathfrak{x} - y\| \\
& \quad \times \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)}(\varsigma) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^\varsigma \psi_{\mathfrak{T}}^{\alpha_1-1}(\varsigma) \psi_a^{-\sigma_2}(\mathfrak{T}) \psi'(\mathfrak{T}) d\mathfrak{T} \right) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{\psi_a^{\alpha_2-1}(b)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) z_2 \|\mathfrak{x} - y\| \int_a^b \psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)+\alpha_1-\sigma_2}(\varsigma) \psi'(\varsigma) d\varsigma \\
& \leq (q-1) \left(\frac{m\Gamma(\delta - \sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \delta - \sigma_2 + 1)} \right)^{q-2} \left(\frac{\psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)+\alpha_1+\alpha_2-\sigma_2}(b)}{\Delta_3\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2 + \alpha_2 - \gamma_2)} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 - \sigma_2 + 1)} \right) z_2 \|\mathfrak{x} - y\| \\
& \leq \frac{\|\mathfrak{x} - y\|}{2}.
\end{aligned}$$

Bu ise $T_3 : E_2 \rightarrow E_2$ operatörünün daraltan bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Böylece, Krasnoselskii sabit nokta teoreminin koşulları sağlandığından, (4.1) kesirli sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır. $\square$

Teorem 4.3.7. $p > 2$ olsun, (H_7) ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

(H_{11}) Her $(t, \varkappa) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ için

$$f(t, \varkappa) \geq -m\psi_a^{\delta-\sigma_2}(t) \quad (4.28)$$

olacak şekilde $\delta < \min \left\{ (\alpha_1 + \sigma_2), \frac{(\alpha_1 - \sigma_2)(q-1)}{2-q} \right\}$ ve $m > 0$ sabitleri vardır.

(H_{12}) Her $t \in [a, b]$ ve $\varkappa, y \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_a^{\sigma_2}(t) |f(t, \varkappa) - f(t, y)| \leq z_3 |\varkappa - y|$$

ve

$$0 < z_3 < \frac{\left(\frac{m\Gamma(\delta-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\delta-\sigma_2+1)} \right)^{2-q}}{2 \left((q-1) \left(\frac{\psi_a^{(\alpha_1+\delta-\sigma_2)(q-2)+\alpha_1+\alpha_2-\sigma_2}(b)}{\Delta_3\Gamma(\gamma_2)\Gamma(2+\alpha_2-\gamma_2)} \right) \left(\frac{\Gamma(-\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha_1-\sigma_2+1)} \right) \right)} \quad (4.29)$$

olacak şekilde bir z_3 sabiti vardır.

Bu durumda, (4.1) de verilen kesirli sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır.

Kanıt. Teorem 4.3.6'nın ispatına benzerdir. $\square$

5 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, üçüncü bölümde p -Laplacian operatörlü singüler kesirli sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin varlığı Avery-Peterson sabit nokta teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini göstermek amacıyla bir örnek verilmiştir. Bu bölümde incelenen problem, SCI kapsamındaki Filomat dergisinde 2023 yılında yayımlanmıştır.

Sonrasında, dördüncü bölümde daha genel bir denklem tipine sahip olan, lineer olmayan p -Laplacian operatörlü ve ψ -Hilfer kesirli türevi içeren tekil (singüler) noktaya sahip sınır değer problemi ele alınmıştır. İlk olarak, bu kesirli sınır değer probleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini göstermek için Banach daraltma dönüşümü prensibi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçların geçerliliğini gösteren örnekler verilmiştir. İkinci olarak, kesirli sınır değer probleminin çözümlerinin varlığını göstermek için Krasnoselskii sabit nokta teoreminden yararlanılmıştır.

Ayrıca dördüncü bölümde ele alınan kesirli sınır değer probleminde yer alan ψ -Hilfer kesirli türevi, literatürde yer alan birçok kesirli türevin bir genellemesidir. 2018 yılında tanımlanan ψ -Hilfer kesirli türevi içeren sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığını ve tekliğini araştıran makaleler az sayıdadır. Aynı zamanda, bu tezde singüler kesirli sınır değer problemi çalışılmıştır. Bildiğimiz kadarıyla, literatürde p -Laplacian operatörlü ve singüler ψ -Hilfer kesirli sınır değer problemi ile ilgili çalışma bulunmamaktadır. Bu tezde ele aldığımız problem, p -Laplacian operatörlü ve singüler ψ -Hilfer kesirli sınır değer probleminin çözümlerinin varlığını inceleyen ilk çalışma olma özelliğini taşımaktadır. Bu çalışmanın elde ettiği sonuçlar, ileri araştırmalara ışık tutacak ve bu alandaki bilimsel ilerlemeye katkıda bulunacaktır.

Kaynaklar

- Abdelhedi, W.**, 2021, Fractional differential equations with a ψ -Hilfer fractional derivative, *Computational and Applied Mathematics*, 40(2), 53.
- Ahmad, B., Luca, R., and Alsaedi, A.**, 2023, On a system of coupled nonlocal singular fractional boundary value problems with δ -Laplacian operators, *J. Appl. Anal. Comput.*, 13, 57–80.
- Almeida, R.**, 2017, A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 44, 460–481.
- Alsaedi, A., Alghanmi, M., Ahmad, B., and Alharbi, B.**, 2023, Uniqueness of solutions for a ψ -Hilfer fractional integral boundary value problem with the p -Laplacian operator, *Demonstratio Mathematica*, 56(1), 20220195.
- Alsaedi, A., Luca, R., and Ahmad, B.**, 2020, Existence of positive solutions for a system of singular fractional boundary value problems with p -Laplacian operators, *Mathematics*, 8(11), 1890.
- Asawasamrit, S., Kijjathanakorn, A., Ntouyas, S.K., and Tariboon, J.**, 2018, Nonlocal boundary value problems for Hilfer fractional differential equations, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 55(6), 1639–1657.
- Avery, R. and Peterson, A.**, 2001, Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, 42(3-5), 313–322.
- Boulares, H., Moumen, A., Fernane, K., Alzabut, J., Saber, H., Alraqad, T., and Benaissa, M.**, 2023, On solutions of fractional integro differential systems involving Ψ -Caputo derivative and Ψ -Riemann-Liouville fractional integral, *Mathematics*, 11(6), 1465.
- Cabada, A. and Staněk, S.**, 2012, Functional fractional boundary value problems with singular ϕ -Laplacian, *Applied Mathematics and Computation*, 219(4), 1383–1390.

- Caballero, J., Harjani, J., and Sadarangani, K.**, 2023, Existence and uniqueness of positive solutions to a class of singular integral boundary value problems of fractional order, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20(2), 86.
- Cheng, T. and Xu, X.**, 2022, Existence results for multi-point boundary value problem to singular fractional differential equations with a positive parameter, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, pages 1–26.
- Deimling, K.**, 1985, *Nonlinear functional analysis*, Courier Corporation.
- Granas, A. and Dugundji, J.**, 2003, *Fixed point theory*, volume 14, Springer.
- Gu, L., Zhong, Q., Shao, Z., et al.**, 2023, On multiple positive solutions for singular fractional boundary value problems with Riemann-Stieltjes integrals, *Journal of Function Spaces*, 2023.
- Guo, D. and Lakshmikantham, V.**, 1989, *Nonlinear problems in abstract cones*, volume 5, Academic press.
- Guo, L., Liu, L., and Wu, Y.**, 2016, Existence of positive solutions for singular fractional differential equations with infinite-point boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 21(5), 635–650.
- Henderson, J. and Luca, R.**, 2017, Existence of positive solutions for a singular fractional boundary value problem, *Nonlinear Anal., Model. Control*, 22(1), 99–114.
- Hilfer, R.**, 2000, *Applications of fractional calculus in physics*, World scientific.
- Jajarmi, A., Baleanu, D., Sajjadi, S.S., and Nieto, J.J.**, 2022, Analysis and some applications of a regularized ψ -Hilfer fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 415, 114476.

- Ji, D.**, 2018, Positive solutions of singular fractional boundary value problem with p -Laplacian, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 41, 249–263.
- Jiang, D.** and **Bai, C.**, 2022, Existence results for coupled implicit ψ -Riemann-Liouville fractional differential equations with nonlocal conditions, *Axioms*, 11(3), 103.
- Jong, K.**, **Choi, H.**, **Jang, K.**, and **Pak, S.**, 2020, Existence and uniqueness results for a class of singular fractional boundary value problems with the p -Laplacian operator via the upper and lower solutions approach, *Journal of Function Spaces*, 2020, 1–15.
- Kilbas, A.A.**, **Srivastava, H.M.**, and **Trujillo, J.J.**, 1999, *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204, elsevier.
- Leibenson, L.**, 1945, Turbulent movement of gas in a porous medium, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Geograf. Geofiz.*, 9, 3–6.
- Liu, X.**, **Jia, M.**, and **Xiang, X.**, 2012, On the solvability of a fractional differential equation model involving the p -Laplacian operator, *Computers & Mathematics with Applications*, 64(10), 3267–3275.
- Liu, Z.**, **Ding, Y.**, **Liu, C.**, and **Zhao, C.**, 2020, Existence and uniqueness of solutions for singular fractional differential equation boundary value problem with p -Laplacian, *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1–12.
- Malahi, M.A.**, **Abdo, M.S.**, and **Panchal, S.K.**, 2019, Positive solution of Hilfer fractional differential equations with integral boundary conditions, *arXiv preprint arXiv:1910.07887*.
- Meng, F.**, **Jiang, W.**, **Liu, Y.**, and **Guo, C.**, 2022, The Existence of solutions of integral boundary value problem for Hilfer fractional differential equations with p -Laplacian at resonance, *Journal of Applied Analysis & Computation*, 12(6), 2268–2282.

- Norouzi, F.** and **N'Guérékata, G.M.**, 2021, A study of ψ -Hilfer fractional differential system with application in financial crisis, *Chaos, Solitons & Fractals: X*, 6, 100056.
- Ntouyas, S.K.** and **Vivek, D.**, 2021, Existence and uniqueness results for sequential ψ -Hilfer fractional differential equations with multi-point boundary conditions, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 90(2), 171–185.
- Nuchpong, C.**, **Ntouyas, S.K.**, **Samadi, A.**, and **Tariboon, J.**, 2021, Boundary value problems for Hilfer type sequential fractional differential equations and inclusions involving Riemann–Stieltjes integral multi-strip boundary conditions, *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 1–19.
- Rudin, W. et al.**, 1964, *Principles of mathematical analysis*, volume 3, McGraw-hill New York.
- Smart, D.**, 1974, Fixed point theory, Combridge Uni, Press, Combridge.
- Sousa, J.V.d.C.** and **De Oliveira, E.C.**, 2018, On the ψ -Hilfer fractional derivative, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 60, 72–91.
- Sudsutad, W.**, **Thaiprayoon, C.**, **Khaminsou, B.**, **Alzabut, J.**, and **Kongson, J.**, 2023, A Gronwall inequality and its applications to the Cauchy-type problem under ψ -Hilfer proportional fractional operators, *Journal of Inequalities and Applications*, 2023(1), 1–35.
- Sudsutad, W.**, **Thaiprayoon, C.**, and **Ntouyas, S.K.**, 2021, Existence and stability results for ψ -Hilfer fractional integro-differential equation with mixed nonlocal boundary conditions, *Aims Math*, 6(4), 4119–4141.
- Tudorache, A.** and **Luca, R.**, 2021a, On a singular Riemann–Liouville fractional boundary value problem with parameters, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 26(1), 151–168.

- Tudorache, A.** and **Luca, R.**, 2021b, Positive solutions of a singular fractional boundary value problem with r -Laplacian operators, *Fractal and Fractional*, 6(1), 18.
- Wahash, H.A.**, **Abdo, M.S.**, **Saeed, A.M.**, and **Panchal, S.K.**, 2020, Singular fractional differential equations with ψ -Caputo operator and modified Picard's iterative method, *Appl. Math. E-Notes*, 20, 215–229.
- Wongcharoen, A.**, **Ahmad, B.**, **Ntouyas, S.K.**, **Tariboon, J.**, et al., 2020, Three-point boundary value problems for the Langevin equation with the Hilfer fractional derivative, *Advances in Mathematical Physics*, 2020.
- Zhao, D.** and **Mao, J.**, 2021, Positive Solutions for a Class of Nonlinear Singular Fractional Differential Systems with Riemann–Stieltjes Coupled Integral Boundary Value Conditions, *Symmetry*, 13(1), 107.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez yazma sürecimin her anında bana hiçbir desteğini esirgemeyen, derin bilgisi ve engin deneyimiyle akademik gelişimime büyük katkı sağlayan, ilham verici rehberliği ve sabrıyla her zaman yanımda olan değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. NÜKET AYKUT HAMAL'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bana yön göstererek, daima yanımda olan, hiçbir desteğini esirgemeyen, derin bilgisi ve engin deneyimiyle akademik gelişimime katkıda bulunan Sayın Öğr. Gör. Dr. AHMET HAMAL'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her döneminde yanımda olan, eğitim hayatımda da maddi ve manevi desteklerini hiç esirgemeyen, her zaman güçlü bir destek olduğunu hissettiğim kıymetli aileme; Babam Sayın YILMAZ ERKAN, Annem Sayın AYNUR ERKAN, Dayım Sayın ARİF LAÇİN, Ablam Sayın ESRA ERKAN ve Abim Sayın SERHAT ÖMER ERKAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Onların varlığı, benim için en büyük hazine ve destek oldu. Teşekkür borcumu kelimelerle ifade etmek ne kadar güç olsa da, yüreğimin derinliklerinden gelen minnet duygularıyla onlara olan şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca, 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs programı kapsamında bana destek olan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a çok teşekkür ederim.

Bu tez, 123F242 proje numarası ile 1002-B Hızlı Destek Modülü kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir. Bu tezin gerçekleşmesini sağlayan TÜBİTAK'a desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

08/08/2024

İmzası

Furkan Erkan

ÖZGEÇMİŞ

Furkan Erkan, İlk, orta ve lise eğitimini İzmir’de tamamlamıştır. 2021 yılında Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü’nden birincilikle mezun olmuştur. Aynı yıl, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı’nda yüksek lisans programına başlamış olup eğitimine devam etmektedir.

SCI İndekslerine Giren Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Aykut Hamal, N and Erkan, F., 2023, Existence of positive solutions for singular fractional boundary value problems with p -Laplacian, Filomat, 37(20), 6867-6876.

Uluslararası Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Nuket Aykut Hamal, Furkan Erkan. The existence of solutions for the singular fractional boundary value problem with p -Laplacian. BICSS 11th International Conference on Applied Sciences, Skopje, Macedonia, April 4-7, 2024. (Online)
2. Nuket Aykut Hamal, Furkan Erkan. Existence and uniqueness results for singular fractional differential equations with p -Laplacian operator. The 8th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, Sanlıurfa, Türkiye, May 17-19, 2024. (Online)
3. Furkan Erkan, Nuket Aykut Hamal. On positive solutions of singular fractional boundary value problems involving the p -Laplacian operator. Ege 11th International Conference on Applied Sciences, Izmir, Türkiye, June 1-3, 2024. (Online)

Görev Aldığı Projeler

1. 123F242, p -Laplacian Operatörlü Ve Singüler ψ -Hilfer Kesirli Sınır Değer Probleminin Çözümlerinin Varlığı Ve Tekliği, 1002 - Hızlı Destek / Hızlı Destek - B, ARDEB, 15.10.2023 - 15.04.2024.

Burs ve Destekler

1. Etkinlik Destekleri ve Eğitim Bursları M¼d¼rl¼đ¼, 2210-A Genel Yurt İçi Y¼ksek Lisans Burs Programı, 01.03.2022 - 29.02.2024.
2. 123F242, p -Laplacian Operat¼rl¼ Ve Sing¼ler ψ -Hilfer Kesirli Sınır Değer Probleminin Ç¼z¼mlerinin Varlığı Ve Tekliği, MFAG - Matematik Fizik Araştırma Destek Grubu, 1002 - Hızlı Destek / Hızlı Destek - B, ARDEB, 24.10.2023 - .

