GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

AĞLAR İÇİN MERKEZİLİK ÖLÇÜLERİ

Mohammed Mahmod Fatih ARABAJALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mohammed Mahmod Fatih ARABAJALI

30/05/2024

AĞLAR İÇİN MERKEZİLİK ÖLÇÜLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Mohammed Mahmod Fatih ARABAJALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2024

ÖZET

Ağ analizi, bir ağ şeklinde ifade edilebilen yapıları incelemek için son yıllarda oldukça önemli bir araç haline gelmiştir. Bir ağ, elemanlar ve bu elemanlar arasındaki ilişkilerden oluşmaktadır. Ağlar gerçek hayatta pek çok alanda (sosyoloji, psikoloji, fizik, kimya, biyoloji, internet, iletişim, vs.) karşımıza çıkmaktadır. Ağ analizi, bu ağlardaki elemanların ve ilişkilerin özelliklerini incelemek için kullanılır. Özel olarak, bir ağdaki elemanların önem derecesini ya da merkeziliğini belirlemek için merkezilik ölçüleri adı verilen ölçüler kullanılır. Pek çok merkezilik ölçüsü bulunmakla birlikte, en sık kullanılan merkezilik ölçüleri derece, yakınlık, uzaklık, arada olma, özvektör, Katz, PageRank vs. merkeziliği şeklindedir. Bu merkezilik ölçülerinden hangisinin kullanılacağı analiz edilecek ağın yapısına, ağdaki elemanların ve elemanlar arasındaki ilişkilerin özelliklerine bağlı olarak değişmektedir. Bu tez çalışmasında ağ analizi teorisinde kullanılan temel merkezilik ölçüleri tanıtılmıştır. Özel olarak derece, yakınlık, uzaklık, arada olma, özvektör, Katz, ve PageRank merkezilik ölçüleri ele alınmıştır. Ayrıca bu merkezilik ölçüleri yönsüz ağlar, yönlü ağlar ve ağırlıklı ağlar için ayrı ayrı ifade edilmiştir. Her bir merkezilik ölçüsünün tanımı, avantajları, dezavantajları ve kullanım alanları ifade edilmiştir. Alınan örnek ağlar için bu merkezilik ölçüleri Pajek programı yardımıyla hesaplanmıştır.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Graflar, ağlar, merkezilik ölçüleri, ağ analizi
Sayfa Adedi	:	45
Danışman	:	Doç. Dr. Gökhan MUTLU

CENTRALITY MEASURES FOR NETWORKS

(M. Sc. Thesis)

Mohammed Mahmod Fatih ARABAJALI

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2024

ABSTRACT

Network analysis has become a very important tool in recent years to examine structures that can be expressed as a network. A network consists of elements and relationships between these elements. Networks appear in many fields in real life (sociology, psychology, physics, chemistry, biology, internet, communication, etc.). Network analysis is used to examine the properties of elements and relationships in these networks. Specifically, so-called centrality measures are used to determine the importance or centrality of elements in a network. Although there are many centrality measures, the most commonly used centrality measures are degree, closeness, farness, betweenness, eigenvector, Katz, PageRank, etc. Which of these centrality measures will be used varies depending on the structure of the network to be analyzed, the characteristics of the elements in the network, and the relationships between the elements. In this thesis study, the basic centrality measures used in network analysis theory are introduced. In particular, degree, closeness, farness, betweenness, eigenvector, Katz, and PageRank centrality measures are discussed. Additionally, each centrality measure is expressed separately for networks, directed networks, and weighted networks. The definition, advantages, disadvantages and usage areas of each centrality measure are stated. These centrality measures are calculated for some sample networks with the help of the Pajek software.

Science Code	:	20404
Key Words	:	Graphs, networks, centrality measures, network analysis
Page Number	:	45
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Gökhan MUTLU

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin tamamlanması birçok insanın desteği ve katkılarıyla mümkün olmuştur. Bu vesileyle hepsine en içten teşekkürlerimi sunmak isterim.

Tez danışmanım Doç. Dr. Gökhan MUTLU’ya bana bu konuda rehberlik ettiği ve bu süreç boyunca gösterdiği sabır ve desteği için öncelikle minnettarım. Onun engin bilgisi ve deneyimi olmadan bu tezi tamamlayamazdım.

Ayrıca, bu süreç boyunca bana destek olan ve sabırla yanımda olan canım eşime, Maria DENIS, en içten teşekkürlerimi sunarım. Zor zamanlarda yanımda olduğun ve bana inandığın için sana ne kadar teşekkür etsem azdır.

Son olarak, Gazi Üniversitesindeki tüm öğretim üyelerine ve arkadaşlarıma teşekkür ederim. Sizlerin desteği ve ilhamı olmadan bu çalışma tamamlanamazdı.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

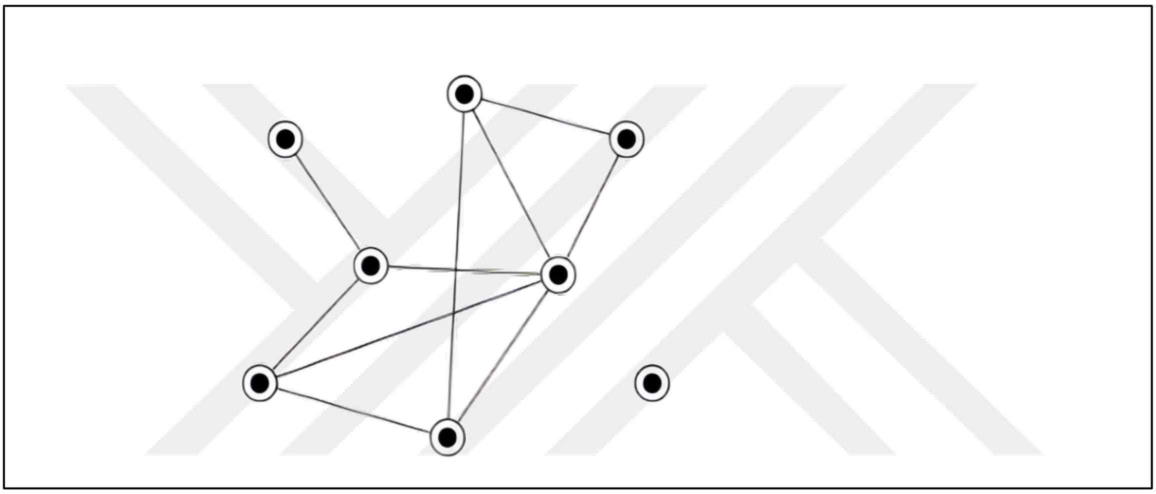
SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{v_i \sim v_j}$	v_i ile v_j köşeleri komşudur.
$\boldsymbol{d_v}$	v köşesinin derecesi
$\boldsymbol{d_v^{in}}$	v köşesinin geliş derecesi
$\boldsymbol{d_v^{out}}$	v köşesinin gidiş derecesi
$\boldsymbol{d(v_i, v_j)}$	v_i ile v_j köşeleri arasındaki jeodezik mesafe
$\boldsymbol{diam(G)}$	G grafının çapı
$\boldsymbol{A(G)}$	G grafının komşuluk matrisi
$\boldsymbol{I(G)}$	G grafının etki matrisi
$\boldsymbol{C_d}$	Derece merkeziliği
$\boldsymbol{C_c}$	Yakınlık merkeziliği
$\boldsymbol{C_B}$	Arada olma merkeziliği
$\boldsymbol{C_K}$	Katz merkeziliği
$\boldsymbol{C_P}$	PageRank merkeziliği

1. GİRİŞ

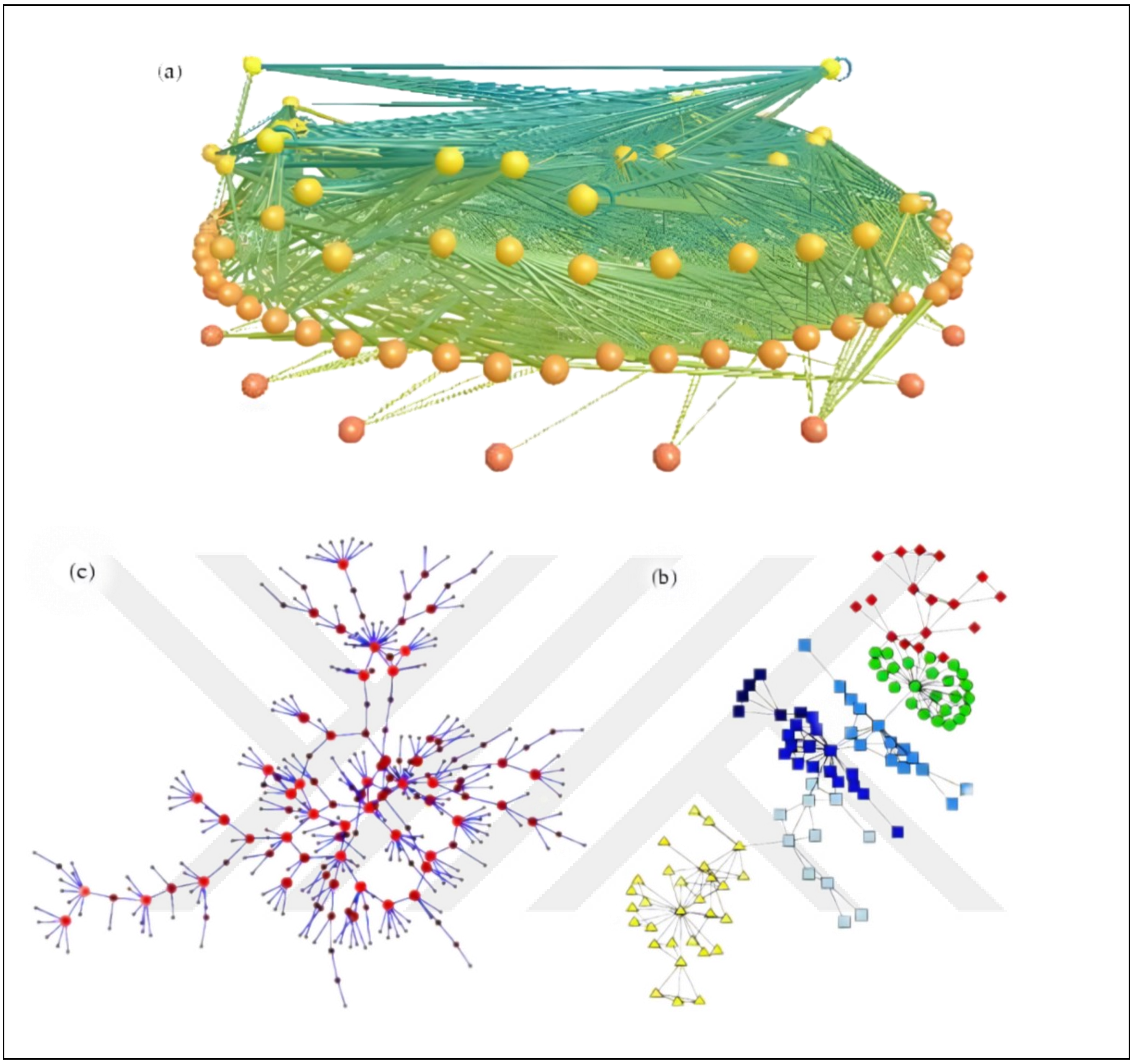
Ağ, köşe (düğüm) denilen elemanların bir kümesi ve bu köşeler arasındaki bağlantıların oluşturduğu yapıya verilen addır [1]. Bir ağın gösterimi (temsili) literatürde graf ya da çizge olarak adlandırılmaktadır (Şekil 1.1). Bir ağ, birbirine bağlı varlıkların en basit açıklamasıdır ve ağ temsili, belirli bir sistemin birçok detayını ortaya çıkarır. Bu nedenle, ağlar çok çeşitli sistemleri incelemek için kullanılır. Köşeler, her türlü elemanı temsil edebilir: insanlar, şehirler, bilgisayarlar, web siteleri, kavramlar, hücreler, genler, türler, vb.



Şekil 1.1. Sekiz düğüm ve on kenarlı küçük bir ağ [1]

Ağlar, karmaşık sistemleri anlamanın güçlü bir aracıdır. Örneğin; sosyal ağlar insan davranışını ve iletişimini, fiziksel ağlar ulaşım, elektrik şebekeleri ve iletişim ağlarını, biyolojik ağlar ise biyolojik sistemleri anlamak için kullanılabilir. Ağların incelenmesi, hızla büyüyen bir araştırma alanıdır. Bu alandaki araştırmalar, ağların nasıl çalıştığını ve nasıl kullanılabileceğini daha iyi anlamamıza yardımcı olur.

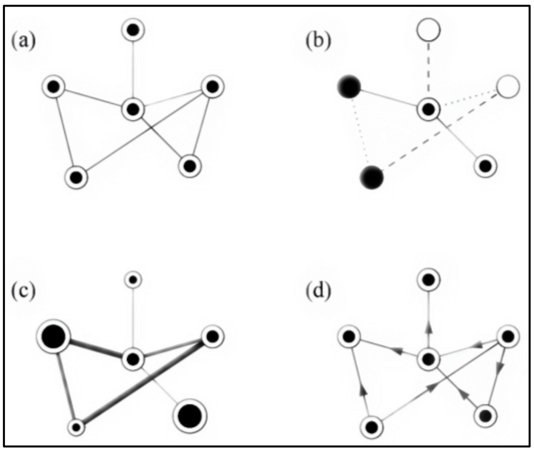
Ağ şeklinde ifade edilen sistemler günlük hayatta çok sayıda bulunmaktadır. Örnekler arasında internet, sosyal ağlar veya bireyler arasındaki diğer bağlantılar, organizasyonel ağlar ve şirketler arasındaki iş ilişkileri ağları, sinir ağları, metabolik ağlar, gıda ağları, kan damarları gibi dağıtım ağları, posta dağıtım yolları, makaleler arasındaki alıntı ağları (Şekil 1.2) yer alır.



Şekil 1.2. Ağ türlerine üç örnek [1]. (a) Tatlı su gölündeki türler arasındaki av-avcı etkileşimlerini gösteren bir besin zinciri. (b) Özel bir araştırma kurumundaki bilim insanları arasındaki iş birliği ağı. (c) Potterat ve arkadaşlarının çalışmasında bireyler arasındaki cinsel temasların bir ağı

Ağlar, köşe ve kenar sayısı, köşe ve kenar türleri, kenarların yönleri, kenarların ağırlıkları ve ağların zaman içindeki gelişimi gibi birçok farklı özellik bakımından farklılık gösterebilir (Şekil 1.3).

Basit bir örnek olarak, bir sosyal ağı düşünelim. Bu ağda, köşeler insanları temsil eder ve kenarlar arkadaşlık, düşmanlık, mesleki tanıdıklık veya coğrafi yakınlık gibi ilişkileri temsil eder. Kenarlar yönlendirilmiş olabilir, yani tek yönlü ya da iki yönlü olabilir. Örneğin, telefon görüşmelerini temsil eden bir ağda, her görüşmenin bir başlangıç ve bir bitiş noktası vardır ve bu nedenle yönlendirilmiş bir ağdır.



Şekil 1.3. Ağ türlerine örnekler [1]. (a) yalnızca tek bir tür düğüm ve tek bir tür kenar içeren yönsüz bir ağ. (b) Birkaç farklı düğüm ve kenar türü içeren bir ağ. (c) Değişen düğüm ve kenar ağırlıklarına sahip bir ağ. (d) Her bir kenarın bir yöne sahip olduğu yönlendirilmiş bir ağ

Ağların yapısı, son yıllarda yapılan araştırmalarla giderek daha iyi anlaşılmaktadır. Bu araştırmalar, gerçek ağların özelliklerini gözlemlemeye ve bu ağları modellemeye dayanır. Ağların yapısı, farklı türlerdeki ağlar arasında bile benzerlikler gösterebilir. Bu benzerliklere dayanarak, ağları dört genel kategoriye ayırabiliriz:

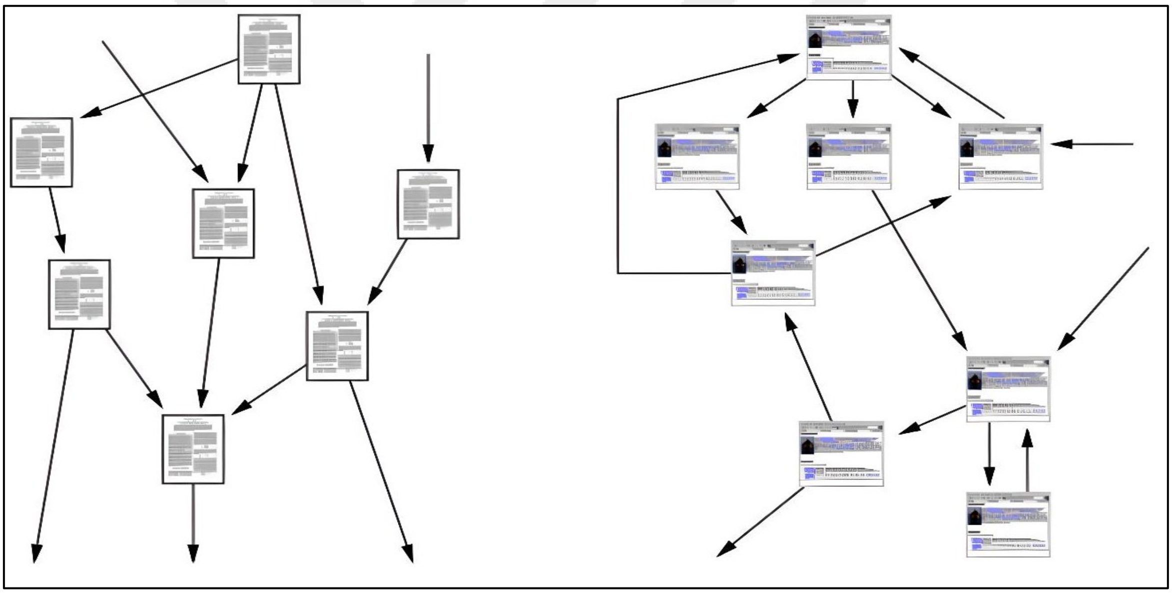
- Sosyal ağlar: İnsanlar arasındaki ilişkileri temsil eden ağlardır.
- Bilgi ağları: Bilginin akışını temsil eden ağlardır.
- Teknolojik ağlar: Cihazların veya sistemlerin bağlantılarını temsil eden ağlardır.
- Biyolojik ağlar: Biyolojik sistemlerdeki ilişkileri temsil eden ağlardır.

Sosyal ağlar, birbiriyle ilişkili insanların oluşturduğu gruplardır. Bu ilişkiler arkadaşlık, işbirliği, romantizm veya sıradan tanışıklık gibi farklı şekillerde olabilir. Sosyal ağlar; sağlık, ekonomi, bilim gibi farklı alanlarda incelenen önemli bir konudur. Çevrimiçi sosyal ağlar, sosyal ağları incelemek için yeni fırsatlar sunmaktadır. Bu ağlar, insanların kimlerle bağlantılı olduğunu, nelerle ilgilendiğini ve bilginin nasıl yayıldığını anlamamızı sağlar.

Bilgi ağları, bilginin depolandığı ve paylaşıldığı ağlardır. En yaygın bilgi ağları, akademik makaleler arasındaki alıntı ağı ve internettir (Şekil 1.4). Alıntı ağları, bir makalenin başka bir makaleye yaptığı atıflarla oluşturulur. Bu atıflar, makaleler arasındaki bağlantıları oluşturur ve bu bağlantıların analizi, makalelerin önemini ve ilişkisini anlamamıza yardımcı olur. İnternet (World Wide Web), hiperlinklerle birbirine bağlanan web sayfalarından oluşan bir ağdır. Bu hiperlinkler, web sayfaları arasındaki bağlantıları oluşturur ve bu bağlantıların analizi, internetin yapısını ve nasıl kullanıldığını anlamamıza yardımcı olur. Bilgi ağları, çeşitli şekillerde kullanılabilir. Örneğin, alıntı ağları, yeni araştırma alanları ve potansiyel işbirliği fırsatları belirlemek için kullanılabilir. World Wide Web ise, bilgi aramak, insanlarla bağlantı kurmak ve çeşitli çevrimiçi hizmetleri kullanmak için kullanılabilir [1].

Bilgi ağlarının yaygın kullanımlarından bazıları:

- Araştırma: Bilgi ağları, araştırmacıların yeni araştırma alanları ve potansiyel işbirliği fırsatları belirlemesine yardımcı olabilir.
- Öğrenme: Bilgi ağları, öğrencilerin öğrenme sürecini desteklemek için kullanılabilir.
- İş dünyası: Bilgi ağları, işletmelerin müşterilere daha iyi hizmet vermesine ve yeni iş fırsatları keşfetmesine yardımcı olabilir.
- Eğlence: Bilgi ağları, insanların yeni eğlence kaynakları keşfetmesine yardımcı olabilir.



Şekil 1.4. En iyi çalışılan iki bilgi ağı [1].

Sol akademik makalelerin atıf ağı. Düğümler makaleleri ve yönlendirilmiş kenarlar bir makalenin başka bir makale tarafından atıf almasını göstermektedir. Makaleler sadece kendilerinden önce gelenleri alıntılayabilir bu yüzden bu ağ döngü içermez. Sağ: İnternet üzerinden erişilebilen metin sayfalarının bir ağı olan World Wide Web. Düğümler web sayfalarını ve yönlendirilmiş kenarlar hiperlinkleri temsil etmektedir. Web üzerinde döngüleri yasaklayan herhangi bir kısıtlama olmadığından genel olarak döngüler olabilir

Teknolojik ağlar, insan toplumu için çok önemlidir. Bu ağlar, malların ve hizmetlerin dağıtımını, iletişimi ve bilginin yayılmasını sağlar. Başka bir ifadeyle, teknolojik ağlar, mal ve kaynakların dağıtımını sağlayan, insan yapımı ağlardır. Bu ağlar; elektrik, ulaşım ve bilgi gibi çeşitli alanlarda kullanılır. İnternet, en yaygın teknolojik ağlardan biridir. İnternet, bilgisayarlar arasındaki fiziksel bağlantılardan oluşan bir teknolojik ağdır. Araştırmacılar, yönlendiriciler veya özerk sistemler gibi ağdaki belirli düğümler arasındaki bağlantılara odaklanır. İnternet yapısının yeniden inşa edilmesi zordur, çünkü altyapı birçok ayrı kuruluş tarafından yönetilir. Araştırmacılar, noktadan noktaya veri rotalarını izleyerek ağın bir resmini oluştururlar. Ancak, bu yöntem her zaman eksiksiz bir resim sağlamaz [2].

Vücudumuzdaki hücrelerin içinde, protein adı verilen özel moleküller çeşitli şekillerde etkileşir. Örneğin, bir protein katlandığında, yapısındaki değişim başka bir proteinin işlevini veya bir enzimin aktivitesini düzenleyebilir. Enzimler (kendileri de birer proteindir) biyokimyasal reaksiyonları katalize eder ve dokularımızı ve organlarımızı oluşturan ve destekleyen proteinler için enerji sağlayarak yaşamı sürdürür. Proteinler ayrıca hücre sinyalleşmesini ve bağışıklık yanıtlarını da düzenler. Tüm bu etkileşimler bir ağ şeklinde ifade edilebilir. Bu ağlara örnek olarak protein etkileşim ağları, metabolik ağlar ve gen düzenleyici ağlar. verilebilir. Bu biyolojik ağlar bir hücre içinde var olur [3]. Daha yüksek bir seviyede, bir vücut içinde, sinir hücreleri arasındaki bağlantılar (sinapslar) beynimizi oluşturan sinir ağlarına yol açar. Ve daha da yüksek bir seviyede, tüm türler bulundukları ekosistem içinde birbirleriyle etkileşirler. Bir tür, başka bir türü yiyecek olarak görebilir, bu ise türler arasında bir besin ağı ya da besin zinciri oluşturur. Bu ağı düşündüğümüzde, ekolojik denge birbirini destekleyen türlerin varlığına bağlıdır. Böyle bir besin ağında bir düğümü çıkardığımızda örneğin, bir türün yok olması durumunda ekosistem ağının diğer kısımlarının hayatta kalmasını etkiler.

Ağ analizinde, düğümlerin önemini ve birbirleriyle nasıl ilişkili olduklarını belirlemek önemlidir. Merkezilik ölçüleri, bir ağdaki köşelerin önemini ölçer. Bu ölçüler, bir düğümün ağdaki konumuna ve diğer düğümlerle olan bağlantılarına göre ne kadar önemli olduğunu gösterir [4]. Literatürde pek çok merkezilik ölçüsü vardır. Bunlara örnek olarak derece, arada olma, yakınlık, uzaklık, özvektör ve PageRank merkeziliği. verilebilir. Her biri, ağın bağlamına ve analiz edilen ilişki türüne bağlı olarak farklı analitik faydalar sağlar. Her birinin kendine özgü güçlü ve zayıf yönleri vardır. Önemli olan, her birinin analitik faydasının büyük ölçüde ağın bağlamına, analiz edilen ilişki türüne ve temel ağ morfolojisine bağlı olduğudur. Her birinin diğerinden daha iyi olduğu fikrini vermek doğru değildir, sadece birinin araştırma hedeflerine diğerinden daha iyi hizmet edebileceği söylenebilir.

Bu tez çalışmasında derece, arada olma, yakınlık, uzaklık, Katz, özvektör ve PageRank merkezilik ölçüleri ele alınacaktır. Her bir merkezilik ölçüsünün özellikleri detaylı olarak incelenecektir.

Derece merkeziliği, bir köşeye bağlı olan kenarların sayısını ölçer. Bir köşenin ne kadar bağlantılı olduğunu gösterir [5].

Arada olma merkeziliği, bir köşenin diğer köşeler arasındaki iletişimi ne kadar kontrol ettiğini gösterir. Bir köşenin diğer köşeler arasındaki en kısa yollarda ne kadar yer aldığını ölçer [5].

Yakınlık ve uzaklık merkezilikleri, bir köşenin diğer tüm köşelere ortalama uzaklığını ölçer. Yakınlık merkeziliği bir köşenin diğer köşelere ne kadar yakın, uzaklık merkeziliği ise bir köşenin diğer köşelere ne kadar uzak olduğunu gösterir [5].

Katz merkeziliği, bir köşenin ağdaki diğer köşelerle olan bağlantılarının toplamını ölçer [5].

Özvektör merkeziliği bir köşenin ağdaki diğer köşelerle olan bağlantılarının önemini dikkate alan bir merkezilik ölçüsüdür. Bir köşenin diğer önemli köşelerle olan bağlantılarının ne kadar güçlü olduğunu gösterir [5].

PageRank merkeziliği, literatürde Google algoritması olarak bilinir. Google'ın kurucuları Larry Page ve Sergei Brin tarafından icat edilen PageRank merkeziliği, özvektör merkeziliğinin bir varyasyonudur. Web içeriklerinin önemini web sayfaları arasındaki köprülerin sayısına bakarak sıralamak için tasarlanmıştır. Ancak, PageRank merkeziliği internete ek olarak her türlü ağ için kullanılabilir [6].

Bu tez 3 bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde ağlar, ağ türleri, ağların kullanım alanları ve uygulamaları ile ilgili bilgiler verilmiş ve merkezilik ölçülerinin önemi özetlenmiştir. İkinci bölümde graf teorisiyle ilgili gerekli tanımlar ve özellikler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde ise derece, arada olma, yakınlık, uzaklık, özvektör, PageRank ve Katz merkezilik ölçülerinin tanımları, özellikleri, avantajları, dezavantajları ve hangi ağlarda kullanıldığı verilmiştir. Ek olarak bahsi geçen her bir merkezilik ölçüsünün yönlü ve ağırlıklı ağlarda nasıl tanımlandığı da ayrı ayrı açıklanmıştır. Ele alınan merkezilik ölçüleri çeşitli örnek ağlar için hesaplanmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde graf teorisiyle ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1. (Graf) Elemanları köşe (düğüm) olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ köşeler kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu $\mathrm{E} = \{\{\mathrm{v_i}, \mathrm{v_j}\}: \mathrm{v_i}, \mathrm{v_j} \in \mathrm{V}\}$ kenarlar kümesinden oluşan (V, E) ikili yapısına bir graf denir ve $G = (V, E)$ ya da kısaca G ile gösterilir [7].

Tanım 2.2. (Komşuluk) $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, v_i ile v_j köşeleri arasında en az bir kenar bulunuyorsa, v_i ile v_j köşeleri komşudur denir ve $v_i \sim v_j$ ile gösterilir. Bir v köşesine komşu olan bütün köşelerin kümesine v'nin komşuluklar kümesi denir ve N_v ile gösterilir [7].

Tanım 2.3. (İlmek) Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenar, ilmek olarak adlandırılır [7].

Tanım 2.4. (Katlı Kenar) Grafın herhangi iki köşesi arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara katlı kenar, çoklu kenar veya paralel kenar denir [7].

Tanım 2.5. (Basit Graf) Herhangi iki köşesi arasında en fazla bir kenar bulunan ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir [7].

Tanım 2.6. (Çoklu Graf) Herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunan yani katlı kenar içeren grafa çoklu graf denir [7].

Tanım 2.7. (Yürüme) Bir grafın sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı köşelerinden ve kenarlarından oluşan bir diziye yürüme denir ve W ile gösterilir. Yani yürüme $W = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k e_k\, v_{k+1}$ şeklinde bir dizi olup bu dizideki kenar sayısı yürümenin uzunluğunu verir [7].

Tanım 2.8. (Yol) Her bir köşenin ve kenarın en fazla bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir ve P ile gösterilir [7, 8].

Tanım 2.9. (Devir) Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola devir denir ve n köşeli bir devir C_n ile gösterilir. Devirdeki her bir i köşesinin derecesi $d_i = 2$'dir. C_n deviri, n köşe ve n kenar içerir [7].

Tanım 2.10. (Yönlü Graf) Kenarları, köşelerin sıralı ikililerinden oluşan grafa yönlü graf denir. Bir başka ifadeyle her bir e kenarı $v_1, v_2 \in V$ olmak üzere $e = (v_1, v_2)$ biçimindedir. Burada v_1 köşesine e kenarının başlangıcı, v_2 köşesine ise e kenarının bitişi adı verilir [7].

Tanım 2.11. (Ağırlıklı Graf) Her bir kenarına $\psi: E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vasıtasıyla bir reel sayı atanarak oluşturulan grafa ağırlıklı graf denir. Burada ψ fonksiyonuna ise ağırlık fonksiyonu denir [7].

Tanım 2.12. (Bir Köşenin Derecesi) Yönsüz bir $G = (V, E)$ grafının herhangi bir v köşesine bağlı kenar sayısına v'nin derecesi denir ve $d_G(v)$ ya da kısaca d_v ile gösterilir [7].

Eğer G yönlü bir grafsa, v köşesini bitiş noktası olarak kabul eden kenarların sayısına v köşesinin geliş derecesi denir ve d_v^{in} ile gösterilir. Benzer şekilde v köşesini başlangıç noktası olarak kabul eden kenarların sayısına v köşesinin gidiş derecesi denir ve d_v^{out} ile gösterilir [7].

Eğer G ağırlıklı bir grafsa, v köşesine bağlı olan kenarların ağırlıklarının toplamına v köşesinin ağırlıklı derecesi ya da gücü denir [7].

Tanım 2.13. (Etki Matrisi) G, n köşeli ve m kenarlı yönsüz bir graf olsun. G'nin etki matrisi, $I(G) = (\, i_{ve} \,)_{nxm}$ ile gösterilir. Burada i_{ve} elemanı, v köşesi e kenarına ait ise 1, diğer durumlarda 0 şeklinde tanımlıdır [5].

Eğer G yönlü bir graf ise bu durumda i_{ve} elemanı, v köşesi e kenarının başlangıcı ise 1, bitişi ise -1 ve diğer durumlarda 0 şeklinde tanımlıdır [5].

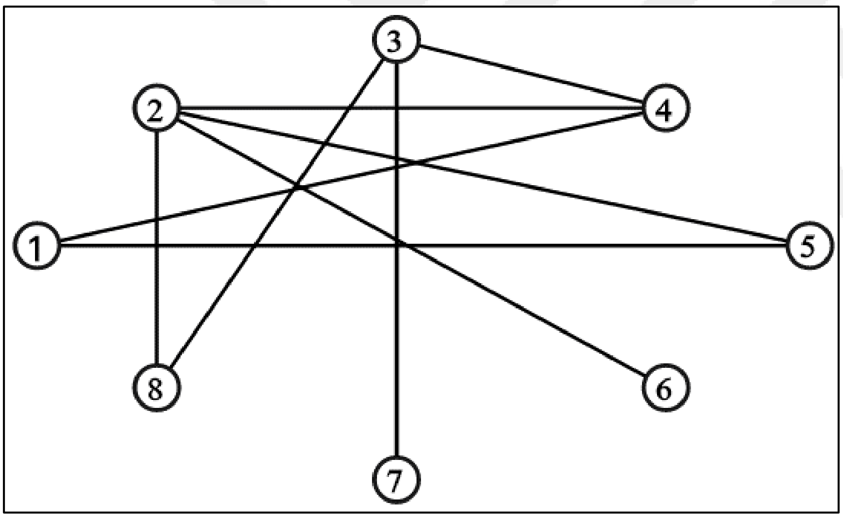
Eğer G ağırlıklı bir graf ise bu durumda i_{ve} elemanı, v köşesi e kenarına ait ise $\psi(e)$, diğer durumlarda 0 şeklinde tanımlıdır [5].

Tanım 2.14. (Komşuluk Matrisi) G, n köşeli ve m kenarlı yönsüz bir graf olsun. G'nin komşuluk matrisi $A(G) = \{a_{ij}\}_{nxn}$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı, v_i ile v_j köşeleri komşu ise 1, diğer durumda 0 olarak tanımlanır [5, 8].

Eğer G yönlü bir graf ise bu durumda a_{ij} elemanı, v_i köşesinden v_j köşesine bir kenar varsa 1, v_j köşesinden v_i köşesine bir kenar varsa -1 ve diğer durumlarda 0 şeklinde tanımlıdır [5].

Eğer G ağırlıklı bir graf ise bu durumda a_{ij} elemanı, v_i ile v_j köşeleri komşu ise $\psi(e)$, diğer durumda 0 olarak tanımlanır [5]. Burada $e = \{v_i, v_j\}$ şeklindedir.

Örnek 2.1: Yönsüz bir ağ örneği olarak Şekil 2.1 deki ağı düşünelim.



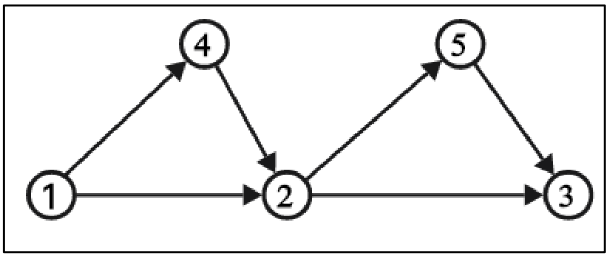
Şekil 2.1.Yönsüz bir ağ [9]

Bu ağın komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 2.2: Yönlü bir ağa örnek olarak Şekil 2.2 deki ağı ele alalım.

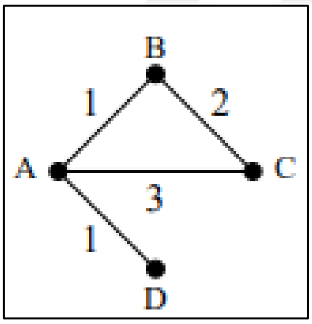


Şekil 2.2. Yönlü bir ağ [10]

Bu yönlü ağın komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Örnek 2.3: Ağırlıklı bir ağ örneği olarak Şekil 2.3 deki ağı düşünelim.



Şekil 2.3. Ağırlıklı bir ağ [11]

Bu ağırlıklı ağın komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Tanım 2.15. (Jeodezik Mesafe) $G = (V, E)$ grafının iki köşesi v_i ile v_j arasındaki jeodezik mesafe bu iki köşe arasındaki en kısa yolun uzunluğu olarak tanımlanır ve $d(v_i, v_j)$ ile gösterilir. G grafının çapı ise

$$diam(G) = \max_{v_i\, v_j \in V} d(v_i, v_j) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. (Perron-Frobenius Teoremi)

$A = a_{ij}$, nxn tipinde reel elemanlı pozitif bir matris yani her $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{ij} > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur [12, 13].

1. A matrisinin maksimum özdeğeri λ_1 vardır, bu özdeğere Perron-Frobenius özdeğeri denir. A matrisinin diğer özdeğerleri λ_i $(i = 2,3, \dots, n)$ için

$$\lambda_1 > \lambda_i \tag{2.2}$$

sağlanır

2. Perron-Frobenius özdeğerine karşılık gelen ve her bileşeni pozitif olan bir özvektör vardır. Yani $Au = \lambda_1 u$ ve her $i = 1,2, \dots, n$ için $u_i > 0$ olacak biçimde bir $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ sütun vektörü vardır.

3. MERKEZİLİK ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde, ağ analizinde sıklıkla kullanılan bazı merkezilik ölçüleri tanıtılacaktır.

3.1. Derece Merkeziliği

Derece merkeziliği, ağ analizinde en basit ve en yaygın kullanılan merkezilik ölçümüdür. Bir köşenin kaç kenara bağlı olduğunu gösterir. Basitçe ifade etmek gerekirse, bir köşenin derece değeri ne kadar yüksekse, o köşe ağda o kadar merkezi yani önemli bir konumdadır [14].

3.1.1. Derece merkeziliğinin tarihsel gelişimi

1920'li yıllarda Sosyolog Emory S. Bogardus [15], sosyal mesafeleri ölçmeyi amaçlayan "sosyal yakınlık" kavramını tanımladı. Çalışmaları, aktörler arasındaki gerçek veya varsayılan bağlantıların sayısı ve yakınlığına yoğunlaştı.

1940 ve 1950'li yıllarda Jakob Moreno'nun sosyometri çalışması [16], ağlar içindeki sosyal statü ve liderliğin anlaşılması için merkeziyet ölçüsünü geliştirdi. Moreno, "sosyometrik yıldızlar" gibi kavramların öncülüğünü yaptı. Bu kavramlar esasen yüksek dereceye sahip düğümleri veya aktörleri ifade eder.

1950'li yıllarda Alex Bavelas, bir ağdaki köşenin derece merkeziliğini, iletişim ağları bağlamında, o köşenin ağın kontrolünde sahip olduğu merkezi konum olarak açıkça tanımladı ve resmileştirdi.

1960 ve 1970'li yıllarda sosyal bilimler alanında ağ analizinin büyümesiyle birlikte, Linton Freeman [17], derece merkeziliğinin matematiksel olarak normalleştirilmiş bir versiyonunu geliştirdi. Böylelikle farklı boyutlardaki ağlar arasında karşılaştırmayı sağladı. Freeman'ın derece merkeziliği formülasyonu, günümüzde ağ analizinde en yaygın kullanılan biçimlerden biri olmaya devam ediyor.

3.1.2. Derece merkeziliğinin hesaplanması ve kullanılması

Yönsüz bir ağda v_i köşesinin derece merkeziliği $C_d(v_i)$ ile gösterilir ve v_i köşesine bağlı olan kenarların sayısı yani

$$C_d(v_i) = d_i \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. Komşuluk matrisi yardımıyla bu değer

$$C_d(v_i) = d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilebilir**.** Yönsüz bir ağda daha büyük dereceye sahip olan köşe daha merkezi ya da önemli olacaktır. Yönsüz bir ağda yüksek dereceye sahip köşelere hub noktası denir. Bazı durumlarda, örneğin bir salgının yayılımını temsil eden bir ağda yüksek derece yüksek risk anlamına da gelebilir.

Örnek 3.1: Örnek 2.1'deki yönsüz ağın komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup köşelerin derece merkezilikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.1. Şekil 2.1'deki yönsüz ağ için köşelerin derece merkezilikleri

Köşe	Derece Merkeziliği
1	2
2	4
3	3
4	3
5	2
6	1
7	1
8	2

Yönlü bir ağda ise bir v_i köşesinin derece merkeziliğini v_i köşesinin geliş derecesi d_i^{in}, gidiş derecesi d_i^{out} ya da bu iki değerin toplamı olarak tanımlamak mümkündür. Komşuluk matrisi yardımıyla geliş ve gidiş dereceleri şu şekilde tanımlanabilir. Geliş derecesi i-inci satırdaki -1 lerin sayısı, gidiş derecesi ise i-inci satırdaki 1 lerin sayısıdır.

Twitter(X) da daha çok takipçiye sahip bir ünlü daha büyük bir geliş derecesine sahip olacak ve dolayısıyla bu sosyal ağda daha popüler ya da önemli olacaktır. Bir şirketteki hiyerarşi ağını düşünelim. Bu yönlü ağda bir yöneticiye bağlı olan her bir çalışan için yöneticiden çalışana giden bir kenar düşünülebilir. Böylece bu ağda yani şirkette daha yüksek gidiş derecesine sahip olmak daha güçlü ya da önemli bir pozisyona sahip olmak anlamına gelir.

Örnek 3.2: Örnek 2.2'deki yönlü ağın komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olup, her bir köşenin geliş ve gidiş dereceleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.2. Şekil 2.2'deki yönlü ağ için köşelerin geliş ve gidiş dereceleri

Köşe	Geliş derecesi	Gidiş derecesi	Toplam derece
1	0	2	2
2	2	2	4
3	2	0	2
4	1	1	2
5	1	1	2

Ağırlıklı bir ağda ise v_i köşesinin derece merkeziliği, v_i köşesinin gücü olarak tanımlanır. Komşuluk matrisi yardımıyla bu değer

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilebilir**.** Ağırlıklı bir ağda daha çok bağlantıya olan bir köşe değil toplam olarak daha güçlü bağlantılara sahip bir köşe daha merkezi ya da önemli olacaktır. Burada bağlantıların gücü yani kenarların ağırlığı, bağlantıların sayısından daha önemlidir.

Örnek 3.3. Örnek 2.3'deki ağırlıklı ağın komşuluk matrisi

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

olup, köşelerin derece merkezilikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.3. Şekil 2.3'deki ağırlıklı ağ için köşelerin derece merkezilikleri

Köşe	Derece Merkeziliği
1	5
2	3
3	5
4	1

3.1.3. Derece merkeziliğinin uygulamaları

Derece merkeziliği, çeşitli alanlardaki ağları analiz etmek için kullanılır. Bazı kullanım alanları şunlardır:

- Sosyal Ağ Analizi:
  - Twitter'da en etkili kullanıcıları belirlemek,
  - Facebook'ta en aktif grupları bulmak.
- Ulaşım Ağları:
  - Bir havaalanı ağındaki en önemli havalimanlarını belirlemek,
  - Bir karayolu ağındaki en yoğun kavşakları bulmak.

- Biyolojik Ağlar:
  - Bir protein-protein etkileşimi ağındaki en önemli proteinleri belirlemek,
  - Bir gen düzenleme ağındaki en önemli genleri bulmak.

3.2. Yakınlık ve Uzaklık Merkezilikleri

Yakınlık ve uzaklık kavramları, insanlık tarihi kadar eskidir. Sosyal etkileşimler, coğrafi uzaklık, ticari bağlantılar ve bilgi paylaşımı gibi birçok alanda bu kavramlar temel rol oynamıştır. Ağ bilimi ve sosyal ağ analizi ortaya çıkmadan önce de bu kavramlar, aktörler arasındaki ilişkilerin ve etkileşimlerin yoğunluğunu anlamada kullanılmıştır.

3.2.1. Yakınlık ve uzaklık merkeziliğinin tarihsel gelişimi

1950'ler: Alex Bavelas, bir ağdaki düğümlerin iletişim ağları bağlamındaki merkezi konumunu analiz etmek için "merkezilik" kavramını ortaya koydu. Bavelas'ın çalışması, yakınlık merkeziliğinin temelini oluşturdu.

1960'lar: Freeman, yakınlık merkeziliğini [17], bir düğümün diğer tüm düğümlere olan ortalama uzaklığını hesaplayarak resmileştirdi. Freeman'ın formülü, en yaygın kullanılan yakınlık merkeziliği ölçümlerinden biri olmaya devam ediyor.

1970'ler-1980'ler: Sosyal ağ analizinin gelişmesiyle birlikte, yakınlık merkeziliği farklı alanlarda yaygın olarak kullanılmaya başladı. Özellikle, ulaşım ağları, bilgi ağları ve sosyal ağlarda önemli bir rol oynadı [11].

Uzaklık merkeziliği, yakınlık merkeziliğinin tersidir. Bir düğümün diğer tüm düğümlere olan ortalama uzaklığını değil, bir düğümün diğer tüm düğümlerden olan ortalama uzaklığını hesaplar. Uzaklık merkeziliği, ağdaki en periferal (çevresel) düğümleri tanımlamak için kullanılır.

1970'ler: Sabidussi, uzaklık merkeziliğini "merkezileşmenin ters göstergesi" olarak tanımladı.

1990'lar: Wasserman ve Faust, uzaklık merkeziliğini sosyal ağ analizinde bir ölçüm olarak kullanmaya başladılar [18].

3.2.2. Yakınlık ve uzaklık merkeziliğinin hesaplanması ve kullanılması

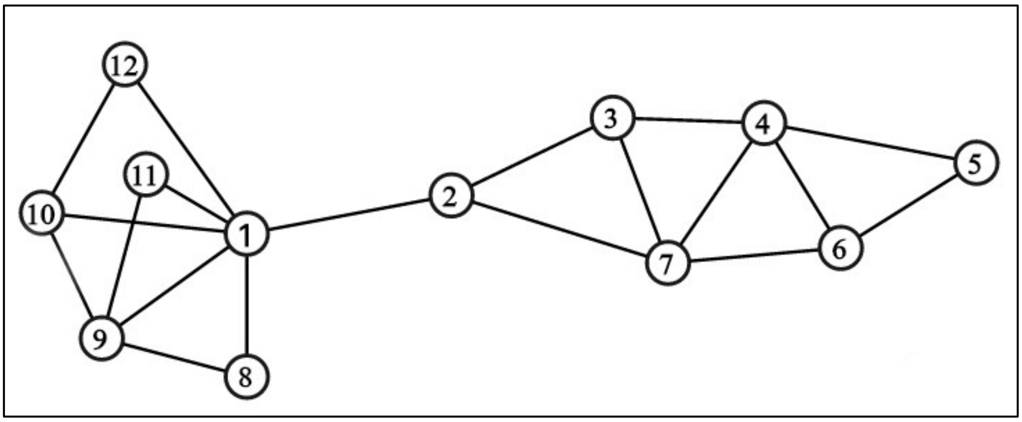
Yakınlık merkeziliği, bir düğümden diğer tüm düğümlere olan ortalama en kısa yol uzunluğunu ölçer [19]. Bir v_i düğümünün merkeziliğini belirlemek için komşularını ve komşularının komşularını kullanır. Böylece, doğrudan v_i düğümüne bağlı olmayan düğümler de derece merkeziliğinin aksine dikkate alınır. d_{ij} ile v_i düğümünden v_j düğümüne olan en kısa yolun uzunluğu belirtilirse, bir ağdaki v_i düğümünden diğer düğümlere olan ortalama mesafe şu şekilde verilir:

$$l_i = \frac{1}{N-1} \sum_{v_i \neq v_j \in V} d_{ij} = \frac{e_i{}^T De}{N-1}. \tag{3.4}$$

Burada N, toplam köşe sayısını, $D = (d_{ij})$ uzaklık matrisini, e bütün elemanları 1 olan sütun vektörünü ve e_i ise i-inci standart baz vektörünü göstermektedir. v_i köşesinin yakınlık merkeziliği

$C_c(v_i) = l_i^{-1} = \frac{N-1}{e_i{}^T De}$ olarak tanımlanır.

Örnek 3.4. Örneğin, Şekil 3.1'deki Ağ 1'i düşünelim.



Şekil 3.1. Ağ 1 [10].

Uzaklık matrisi $\mathrm{D} = (\mathrm{d_{ij}})$ aşağıdaki gibidir:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Her $\mathrm{v_i}$ köşesinin yakınlık merkeziliği aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.4. Şekil 3.1'deki Ağ 1 için yakınlık merkezilikleri

Köşe	Yakınlık Merkeziliği
1	0,55
2	0,55
3	0,458
4	0,379
5	0,289
6	0,367
7	0,478
8	0,379
9	0,407
10	0,393
11	0,379
12	0,379

Burada, 1 ve 2 numaralı köşeler ağdaki en önemli köşeler olarak görülmektedir.

3.2.3. Yakınlık ve uzaklık merkeziliğinin karşılaştırılması

<u>Yakınlık merkeziliği</u>

Tanımı: Yakınlık merkeziliği, bir düğümden diğer tüm düğümlere ortalama en kısa yol uzunluğunu ölçer [5].

Özellikleri:

- Bir düğümün diğer tüm düğümlere olan ortalama en kısa yol uzunluğunun tersidir.
- Yüksek yakınlık merkeziyeti, diğer düğümlere hızlı ve kolay erişim anlamına gelir.
- Merkezi bir konumda bulunan ve diğer düğümler üzerinde kontrol sahibi olan düğümleri belirlemek için kullanılır.

Hesaplanması: Bir düğümün yakınlık merkeziliği, o düğümün diğer düğümlere ortalama uzaklığını ifade eder.

Önemi: Yakınlık merkeziliği, bir düğümün diğer düğümlere ne kadar yakın olduğunu gösterir.

Sınırlamaları: Yakınlık merkeziliği, en kısa yolların toplamı yerine ortalama uzunluğunu temsil eder.

Uygulamaları: Bibliyometride, akademisyenlerin dergi seçimleri ve bibliyografyalarını incelemek için kullanılabilir.

<u>Avantajları</u>

- Ağdaki bilgi ve kaynakların yayılma hızını ve kolaylığını gösterir.
- Kritik düğümleri ve liderleri belirlemek için kullanılabilir.
- Hesaplaması nispeten basittir.

<u>Dezavantajları</u>

- Yalnızca düğümlerin bağlantılarına bakar. Düğümlerin sahip olduğu diğer özellikler dikkate alınmaz.
- Yönlendirilmiş ağlarda doğrudan kullanılamaz.
- Büyük ağlarda hesaplanması zor olabilir.

Uzaklık merkeziliği

Tanımı: Uzaklık merkeziliği, bir düğümün diğer düğümler arasındaki en kısa yolların sayısını ne kadar etkilediğini ölçer [5].

Özellikleri

- Bir düğümün diğer tüm düğümlere olan ortalama en uzun yol uzunluğudur.
- Düşük uzaklık merkeziyeti, diğer düğümlerden izole ve ulaşılması zor anlamına gelir.

Hesaplanması: Bir düğümün uzaklık merkeziliği, o düğümün diğer düğümler arasındaki en kısa yolların üzerinde kaç kez bulunduğunu ifade eder.

Önemi: Uzaklık merkeziliği, ağdaki bilgi akışını ve iletişimi gösterir.

Sınırlamaları: Uzaklık merkeziliği, tüm en kısa yolların sayısını hesaplar ve bu nedenle büyük ağlarda hesaplama maliyeti yüksektir.

Uygulamaları: İletişim ağları, ulaşım ağları, bilgi akışı analizi gibi alanlarda kullanılır.

Avantajları

- Bir düğümün ağdaki izolasyon seviyesini gösterir.
- Bir düğümün diğer düğümlerden ne kadar etkilendiğini veya etkilediğini belirler.
- Ağdaki kritik bağlantıları ve köprüleri belirlemek için kullanılabilir.

Dezavantajları

- Hesaplanması yakınlık merkeziliğinden daha zordur.
- Büyük ağlarda hesaplanması oldukça zor olabilir.
- Yalnızca düğümlerin bağlantılarına bakar. Düğümlerin sahip olduğu diğer özellikler dikkate alınmaz.

Çizelge 3.5. Yakınlık merkeziliği ve uzaklık merkeziliğinin karşılaştırılması

Özellik	Yakınlık Merkeziliği	Uzaklık Merkeziliği
Tanım	Ortalama en kısa yol uzunluğunun tersidir	Ortalama en uzun yol uzunluğudur.
Önemi	Merkezi konum ve kontrol	İzolasyon ve etki
Hesaplama	Nispeten basit	Zor
Yönlendirilmiş ağlar	Doğrudan kullanılamaz	Uyarlanabilir
Dezavantajlar	Yalnızca bağlantıları dikkate alır	Hesaplama zorluğu

3.3. Arada Olma Merkeziliği

Arada olma merkeziliği, bir ağdaki düğümlerin önemini değerlendirmek için kullanılan bir ölçüttür. Bu ölçüt, bir düğümün ağdaki diğer düğümler arasındaki en kısa yollarda ne sıklıkla yer aldığını hesaplar [20]. Bir düğüm ne kadar çok en kısa yolda yer alırsa, ağdaki mal ve bilgi akışı için o kadar önemlidir.

Arada olma kavramı, birden fazla aktör veya nesne arasında aracı rol oynamayı ifade eder. Bu kavram, sosyal bilimlerde ve ağ analizinde önemli bir yere sahiptir. Arada olma, bilgi akışı, kontrol ve koordinasyon gibi birçok alanda kritik rol oynar.

3.3.1. Arada olma merkeziliğinin tarihsel gelişimi

1950'ler: Freeman, bir ağdaki bir düğümün diğer tüm düğümlerin en kısa yollarında ne sıklıkla yer aldığını ölçen "aracılık" (betweenness) kavramını tanımladı.

1960'lar-1970'ler: Freeman'ın çalışması, arada olma merkeziliğinin temelini oluşturdu. Arada olma merkeziliği, farklı ağ türlerinde önemli bir ölçüm olarak kullanılmaya başladı [17].

1980'ler-1990'lar: Arada olma merkeziliğinin hesaplanması için farklı algoritmalar geliştirildi [17].

Arada olma merkeziliği, ilk olarak 1977 yılında Linton Freeman tarafından önerilmiştir. Freeman, bu ölçütü sosyal ağlarda en etkili kişileri belirlemek için kullanmıştır. O zamandan beri, arada olma merkeziliği birçok farklı alanda kullanılmıştır [17].

3.3.2. Arada olma merkeziliğinin hesaplanması ve kullanılması

Bir v köşesi için arada olma merkeziliği $C_B(v)$ şu şekilde tanımlanır:

$$C_B(v) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}, \tag{3.5}$$

burada σ_{st}, uç köşeleri s ve t olan en kısa yolların sayısıdır. $\sigma_{st}(v)$ ise, s den t ye giden ve v köşesini içeren en kısa yolların sayısıdır. Yüksek merkezilik puanları, bir köşenin, köşe çiftleri arasındaki en kısa yolların önemli bir kısmı üzerinde bulunduğunu gösterir [21].

Arada olma merkeziliği, Floyd-Warshall algoritması gibi en kısa yol algoritmalarını kullanarak hesaplanabilir. Bu algoritmalar, her iki düğüm arasındaki en kısa yolları ve bu yollarda yer alan düğümleri belirlemek için kullanılır. Arada olma merkeziliği, her düğüm için en kısa yollarda yer alma sayısının tüm düğümler için en kısa yollarda yer alma sayılarının toplamına oranlanmasıyla hesaplanır.

Örnek 3.5. Örnek 2.1'deki yönsüz ağ için köşelerin arada olma merkezilikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.6. Şekil 2.1'deki yönsüz ağ için köşelerin arada olma merkezilikleri

Düğüm	Arada olma merkeziliği
1	0,055556
2	0,476190
3	0,325397
4	0,333333
5	0,063492
6	0
7	0
8	0,126984

3.3.3. Arada olma merkeziliğinin uygulamaları

Arada olma merkeziliği, aşağıdakiler de dahil olmak üzere birçok farklı alanda kullanılmaktadır:

- Ağ Optimizasyonu: Arada olma merkeziliği, ağdaki kritik düğümleri belirlemek için kullanılabilir. Bu düğümler, ağdaki mal ve bilgi akışının büyük bir kısmını kontrol eder. Bu nedenle, bu düğümlerin kapasitesini artırmak veya arızalanmalarını önlemek ağın performansını önemli ölçüde iyileştirebilir.
- Ağ Güvenliği: Arada olma merkeziliği, ağdaki kritik düğümleri belirlemek için kullanılabilir. Bu düğümler, saldırganlar için cazip hedeflerdir. Bu nedenle, bu düğümleri saldırılara karşı korumak ağın güvenliğini önemli ölçüde artırabilir.
- Sosyal Ağ Analizi: Arada olma merkeziliği, sosyal ağlarda en etkili kişileri belirlemek için kullanılabilir. Bu kişiler, ağdaki diğer kişilerle en çok bağlantılı olan kişilerdir. Bu nedenle, bu kişilerin mesajları ve fikirleri ağdaki diğer kişiler üzerinde önemli bir etkiye sahip olabilir.
- Biyomühendislik: Arada olma merkeziliği, protein-protein etkileşim ağlarında önemli proteinleri belirlemek için kullanılabilir. Bu proteinler, hücresel süreçlerin düzenlenmesinde önemli rol oynar.
- Ulaşım: Arada olma merkeziliği, ulaşım ağlarında en önemli kavşakları belirlemek için kullanılabilir. Bu kavşaklar, trafiğin büyük bir kısmını kontrol eder. Bu nedenle, bu kavşakların kapasitesini artırmak veya tıkanıklığı önlemek ulaşım ağının performansını önemli ölçüde iyileştirebilir.
- İletişim: Arada olma merkeziliği, iletişim ağlarında en önemli aktörleri belirlemek için kullanılabilir. Bu aktörler, ağdaki diğer aktörlerle en çok bağlantılı olan aktörlerdir. Bu nedenle, bu aktörlerin mesajları ve fikirleri ağdaki diğer aktörler üzerinde önemli bir etkiye sahip olabilir.

Çizelge 3.7. Şekil 2.1'deki yönsüz ağ için derece, yakınlık ve arada olma merkeziliklerinin karşılaştırılması

Köşe	Derece Merkeziliği	Yakınlık Merkeziliği	Arada Olma Merkeziliği
1	2	0,466667	0,055556
2	4	0,636364	0,476190
3	3	0,538462	0,325397
4	3	0,636364	0,333333
5	2	0,466667	0,063492
6	1	0,411765	0
7	1	0,368421	0
8	2	0,538462	0,126984

3.4. Özvektör Merkeziliği

Özvektör merkeziliği, bir düğümün komşularının önemini dikkate alır. Derece merkeziliğinde, bir düğüme her bir komşusu için bir merkezilik puanı verilir. Özvektör merkeziliği ise her düğüme, komşularının puanlarının toplamıyla orantılı bir puan verir. Özvektör merkeziliğinde, bir düğüm, diğer önemli düğümlere bağlıysa kendisi de önemli kabul edilir. Bir düğüm üzerindeki değer ne kadar büyükse, düğümün o kadar önemli olduğu düşünülür.

3.4.1. Özvektör merkeziliğinin tarihsel gelişimi

1930'lar: Perron-Frobenius teoremi, bir matrisin en büyük özdeğerinin ve ona karşılık gelen özvektörünün varlığını ve tekilliğini gösterdi [22].

1950'ler: Katz, bir ağdaki bir düğümün merkeziyetini, komşularının merkeziyetlerinin toplamı olarak tanımladı. Katz merkeziliği, özvektör merkeziliği ile yakından ilişkilidir [23].

1970'ler: Bonacich, özvektör merkeziliğini, bir ağdaki bir düğümün önemini ölçmek için bir yöntem olarak önerdi. Bonacich'in yöntemi, ağı temsil eden matrisin özvektörlerini hesaplamaya dayanır [24].

3.4.2. Özvektör merkeziliğinin hesaplanması ve kullanılması

Özvektör merkeziliği hem yönsüz hem yönlü ağlar için hesaplanabilir. Özvektör merkeziliği bir köşenin komşularının (ya da yönlü bir ağda gelen bağlantıların) önemini dikkate alarak derece merkeziliğini genellemeyi amaçlar. Bir köşenin komşuları hakkında bilgi sahibi olmak için komşuluk matrisi A yı kullanabiliriz. v_i köşesinin özvektör merkeziliğini $C_e(v_i)$ ile gösterelim. $C_e(v_i)$ değerinin v_i köşesinin komşularının özvektör merkeziliklerinin bir fonksiyonu olmasını istiyoruz. Kabul edelim ki $C_e(v_i)$, v_i köşesinin komşularının özvektör merkeziliklerinin toplamıyla orantılı olsun. Bu durumda λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$C_e(v_i) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} C_e(v_j) \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bütün köşelerin özvektör merkeziliklerinin oluşturduğu sütun vektörünü

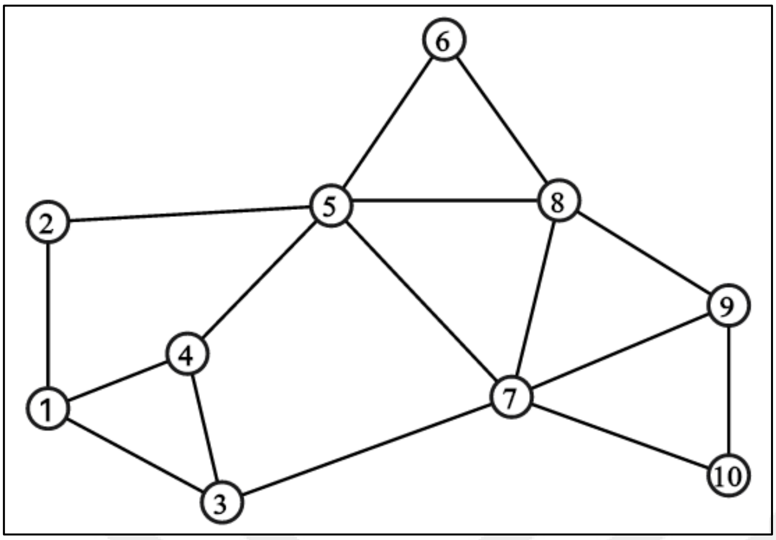
$$\boldsymbol{C_e} \coloneqq \left(C_e(v_1), C_e(v_2), \dots, C_e(v_n)\right)^T \tag{3.7}$$

ile gösterirsek son eşitliği matris formunda

$$\lambda \boldsymbol{C_e} = A^T \boldsymbol{C_e} \tag{3.8}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ise λ nın A^T matrisinin (ağ yönsüz ise A matrisinin) bir özdeğeri ve $\boldsymbol{C_e}$ vektörünün bu özdeğere karşılık gelen özvektör olduğunu gösterir. Bir matrisin birden fazla özdeğeri ve bunlara karşılık farklı özvektörleri olabilir. Burada hangi özdeğer-özvektör çiftini seçmemiz gerektiği sorusu ortaya çıkar. Merkezilik ölçülerinin pozitif olmasını istediğimiz için $\boldsymbol{C_e}$ vektörünün bütün bileşenleri pozitif olacak şekilde bir λ özdeğeri bulmalıyız. Ele aldığımız ağ bağlantılı ise komşuluk matrisi A pozitif bir matris olduğundan, Perron-Frobenius Teoremi'nden A nın bir maksimal (Perron-Frobenius) özdeğeri ve buna karşılık gelen bileşenleri pozitif bir özvektör vardır. Dolayısıyla, seçmemiz gereken özdeğer-özvektör çifti Perron-Frobenius özdeğeri ve buna karşılık gelen özvektördür. Sonuç olarak A matrisinin en büyük özdeğerini bulursak bu özdeğere karşılık gelen özvektör bize $\boldsymbol{C_e}$ yi verecektir[31,32].

Örnek 3.6. Örnek olarak Şekil 3.2'deki ağı düşünelim.



Şekil 3.2. Ağ 2 [10].

Bu ağın komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Komşuluk matrisinin özdeğerleri ise $-2{,}464$, $-1{,}931$, $-1{,}543$, $-0{,}666$, $-0{,}477$, $-0{,}332$, $0{,}370$, $1{,}398$, $2{,}116$, $3{,}531$ şeklindedir. Perron-Frobenius özdeğeri $\lambda_1 = 3.531$'e karşılık gelen özvektör ise

$$v = (0{,}198, 0{,}181, 0{,}261, 0{,}255, 0{,}443, 0{,}243, 0{,}468, 0{,}416, 0{,}313, 0{,}221)^T$$

şeklindedir. Dolayısıyla, Ağ 2 için özvektör merkezilikleri aşağıdaki tablodaki gibi olacaktır.

Çizelge 3.8. Ağ 2 için özdeğer merkezilikleri

Köşe	Özvektör Merkeziliği
1	0,198
2	0,181
3	0,261
4	0,255
5	0,443
6	0,243
7	0,468
8	0,416
9	0,313
10	0,221

Özvektör merkeziliğini kullanarak, **7** numaralı düğümün en önemli düğüm olduğu sonucuna ulaşılır.

3.4.3. Özvektör merkeziliğinin uygulamaları

Özvektör merkeziliği, çeşitli alanlarda farklı amaçlar için kullanılır. Birkaç uygulama alanı şunlardır:

- Sosyal ağlarda: En etkili kişileri belirlemek.
- Bilgi ağlarında: En önemli bilgi kaynaklarını belirlemek.
- Ekonomik ağlarda: En önemli firmaları belirlemek.
- Web arama motorlarında: Web sayfalarının sıralamasını belirlemek.
- Biyolojide: Protein-protein etkileşim ağlarında önemli proteinleri belirlemek.

3.5. Katz Merkeziliği

Katz merkeziliği, sosyal ağ analizinde kullanılan bir merkezilik ölçütüdür. Bu ölçüt, bir düğümün önemini belirlemek için kullanılır. Katz merkeziliği, bir düğümün doğrudan ve dolaylı bağlantılarını dikkate alır. Bu, bir düğümün hem yakın hem de uzak komşularıyla olan ilişkisini değerlendirir. Bu ölçüt, ağdaki düğümlerin birbirleriyle olan etkileşimlerini ve bağlantılarını analiz etmek için kullanılır.

3.5.1. Katz merkeziliğinin tarihsel gelişimi

1930'lar – 1940'lar: Jakob Moreno'nun sosyometri çalışmaları, bireyler arasındaki sosyal bağlantıların kalıplarını anlamaya yönelikti. Moreno [16], ağlar içindeki etkileşimlerin önemini ortaya koyan ve daha sonra Katz Merkeziliği için temel oluşturacak olan "sosyometrik yıldızlar" gibi kavramların öncülüğünü yaptı.

1950'ler: Alex Bavelas, bir düğümün iletişim ağı içerisindeki etkisini ölçen, derece merkeziliğini açıkça tanımladı. Bu öncü çalışma, ağı temsil eden bir matris üzerinde tanımlanan diğer merkeziyet ölçüleri için zemin hazırladı.

1953: Leo Katz, bir aktörün statüsünün sadece sahip olduğu doğrudan bağlantılara değil, aynı zamanda ağ genelindeki diğer aktörlere olan bağlantılarına da bağlı olduğu fikrine dayanan Katz Merkeziliğini önerdi. Formülasyonda, her bağlantıya bir ağırlık verilir ve bu ağırlık, kaynak düğümle olan mesafenin artmasıyla azalır [24].

3.5.2. Katz merkeziliğinin hesaplanması ve kullanılması

Katz merkeziliği, hem doğrudan komşuların sayısını hem de ağdaki bir düğümün diğer bağlantılarını dikkate alır. Yani bir düğüm, ağdaki diğer düğümlerle evrensel bağlantılara sahipse Katz merkeziliğinde önemlidir. Katz merkeziliği, bir i düğümünden ağdaki diğer düğümlere kadar keyfi uzunluktaki tüm yolları hesaba katar [25]. Katz merkeziliği

$$K = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k A^k\right)e = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha A)^k e, \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, e tüm bileşenleri 1 olan sütun vektörü, α zayıflatma (sönümleme) faktörü olarak adlandırılan bir sayı ve A komşuluk matrisidir. Son eşitliği açarsak

$$K = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha A)^k e = (1 + \alpha A + (\alpha A)^2 + \cdots)e \tag{3.10}$$

olur ve eğer bu toplam yakınsıyorsa, o zaman $K = (I_n - \alpha A)^{-1}e$ bulunur. Burada, I_n matrisi $n \times n$ tipindeki birim matristir. $(I_n - \alpha A)^{-1}$ nin yakınsamasını garanti etmek için

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{\lambda_1}\right) \tag{3.11}$$

seçmeliyiz. Burada, λ_1 sayısı A matrisinin temel özdeğeridir.

Örnek 3.7. Örneğin, Şekil 3.2'deki Ağ 2 için Katz Merkeziliğini hesaplayalım. Temel özdeğer $\lambda_1 = 3.531$ olduğundan, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3.531}\right)$ olur. Katz Merkeziliğini hesaplamak için $\alpha = 0.25$ değerini seçelim. Bu durumda, Katz Merkeziliği

$$\mathrm{K} = (I_{10} - 0.25\mathrm{A})^{-1}\mathrm{e} \tag{3.12}$$

eşitliğinden

$$\mathrm{K} = (5{,}826, 5{,}223, 7{,}086, 6{,}992, 11{,}065, 6{,}316, 11{,}526, 10{,}201, 7{,}895, 5{,}855)^{\mathrm{T}}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre, 7 numaralı düğüm en önemli düğümdür.

3.5.3. Katz merkeziliğinin uygulamaları

Katz Merkeziliği, çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Bunlara örnek olarak:

- Sosyal ağlar: Katz Merkeziliği, bir sosyal ağdaki en önemli kişileri belirlemek için kullanılabilir. Örneğin, bir sosyal ağdaki en etkili kişileri veya en popüler kişileri belirlemek için Katz Merkeziliği kullanılabilir.
- Web siteleri: Katz Merkeziliği, bir web sitesindeki en önemli sayfaları belirlemek için kullanılabilir. Örneğin, bir web sitesindeki en yetkili sayfaları veya en popüler sayfaları belirlemek için Katz Merkeziliği kullanılabilir.
- Biyolojik ağlar: Katz Merkeziliği, bir biyolojik ağdaki en önemli proteinleri belirlemek için kullanılabilir. Örneğin, bir biyolojik ağdaki en önemli genleri veya en önemli enzimleri belirlemek için Katz Merkeziliği kullanılabilir.

3.6. PageRank Merkeziliği

PageRank, Google'ın web sayfalarını arama motoru sonuçlarında sıralamak için kullandığı bir algoritmadır. Hem "web sayfası" teriminden hem de Google'ın kurucu ortağı Larry

Page'den adını alır. PageRank, bir web sayfasının önemini ölçmek için kullanılır. Bu, web sayfalarının birbirleriyle olan bağlantılarından oluşan özel bir puanlama sistemidir.

PageRank, bir web sayfasının önemini belirlemek için o sayfaya yönlendiren diğer sayfaların sayısını ve kalitesini hesaplar. Temel varsayım, daha önemli web sitelerinin diğer web sitelerinden daha fazla bağlantı alması gerektiğidir. PageRank, bir web sayfasının önemini belirlemek için bir dizi matematiksel algoritmayı kullanır. Bu algoritma, tüm dünya çapında web sayfalarını düğümler ve hiperlinkleri kenarlar olarak içeren bir web ağı oluşturur [6].

PageRank, tüm dünyadaki tüm web sayfalarının, içeriklerinden bağımsız olarak sadece webdeki grafik yapısındaki konumları baz alınarak oluşturulan bir değerdir. Arama sonuçlarında daha önemli ve daha merkezi web sayfalarına öncelik vermeyi amaçlar.

PageRank, bir web sayfasının önemini, o sayfaya bağlantı veren diğer sayfaların önemi ve bağlantıların sayısı ile ilişkilendirir. Bir sayfaya ne kadar çok ve önemli sayfalardan bağlantı gelirse, o sayfanın PageRank değeri o kadar yüksek olur.

PageRank, bir matris ve yinelemeli bir algoritma kullanarak hesaplanır. Matris, web sayfaları arasındaki bağlantıları temsil eder ve algoritma, her sayfanın PageRank değerini, diğer sayfaların değerlerine göre günceller.

PageRank, Google arama motorunun temelini oluşturur. Arama sonuçlarının sıralanmasında en önemli faktörlerden biridir ve kullanıcılara en alakalı ve yetkili web sayfalarını sunmayı sağlar.

PageRank, sadece web sayfalarının sıralanmasında değil, birçok farklı ağın analizinde de kullanılmaktadır. Sosyal ağlar, bilgi ağları ve biyolojik ağlar gibi alanlarda önemli bir araç haline gelmiştir.

3.6.1. PageRank nasıl çalışır?

PageRank, rastgele yürüyüşler (random walks) adı verilen bir matematiksel modelle çalışır. Bu modelde, bir web kullanıcısının rastgele bir sayfadan başlayıp, sayfalardaki bağlantıları takip ederek internette gezinmesi simüle edilir [26]. Her sayfada belirli bir süre kalındıktan sonra, rastgele bir bağlantıya tıklanarak bir sonraki sayfaya geçilir.

PageRank algoritmasında, rastgele yürüyüşler sırasında sıklıkla karşılaşılan sayfalar daha merkezi ve önemli olarak kabul edilir. Bu sayfalar, diğer sayfalar tarafından daha fazla bağlantı almış ve internet ağında daha önemli bir konuma sahip sayfalardır.

3.6.2. PageRank merkeziliğinin tarihsel gelişimi

PageRank'in hikayesi, 1970'lerde sosyometri adlı bir disiplinin gelişmesiyle başladı. Sosyometri, sosyal ağların yapısını ve işleyişini inceleyen bir bilim dalıdır. Bu alandaki çalışmalar, bir ağdaki düğümlerin (veya aktörlerin) merkeziyetini ve etkisini ölçmek için çeşitli yöntemler geliştirilmesine yol açtı. Bu yöntemler arasında sosyometrik yıldızlar gibi kavramlar da yer alıyordu.

1990'ların başında, Larry Page ve Sergey Brin, Stanford Üniversitesi'nde doktora öğrencisi olarak internetin karmaşık yapısını incelemeye başladılar. Bu çalışmalar sırasında, web sayfaları arasındaki bağlantılarin bir ağ oluşturduğunu ve bu ağdaki bazı sayfaların diğerlerinden daha önemli olduğunu fark ettiler. Bu önemli sayfaları belirlemek için, bir düğümün önemini, o düğüme bağlantı veren diğer düğümlerin önemine göre belirleyen bir algoritma geliştirmeye karar verdiler [27].

1996 yılında Page ve Brin, PageRank adını verdikleri bu algoritmayı geliştirdiklerini ve test ettiklerini anlatan bir makale yayınladılar. Makalede [28], PageRank'in web sayfalarının önemini belirlemede geleneksel yöntemlerden daha etkili olduğunu gösterdiler.

1998 yılında, Page ve Brin, PageRank algoritmasını kullanarak Google arama motorunu kurdular. Google, PageRank'in gücü sayesinde kısa sürede internetin en popüler arama motoru haline geldi.

2000'ler ve sonrasında PageRank, Google'ın başarısının temelini oluşturdu ve internetin gelişmesinde önemli bir rol oynadı [29]. Algoritma, web sayfaları dışında, sosyal ağlar, bilimsel makaleler, biyokimyasal ağlar gibi farklı alanlarda da kullanılmaya başlandı.

3.6.3. PageRank merkeziliğinin hesaplanması ve kullanılması

Özvektör ve Katz merkeziliklerinde bir köşenin merkeziliği çok büyük olursa bu köşeyle kaynak (başlangıç noktası) olarak komşu olan bütün köşeler bu yüksek merkezilikten faydalanır. Ancak bu gerçek hayat problemlerinde her zaman doğru değildir, yani çok önemli biri tarafından tanınan herkes çok önemli biri olmayabilir. Bu sorunu azaltmak için

bir köşeden geçirilen merkeziliğin değerini o düğümden giden bağlantıların sayısına (gidiş derecesine) bölebiliriz. Böylece, bağlı her komşu kaynak köşenin merkeziliğinin bir parçasını alır. Yani PageRank merkeziliğini

$$C_P(v_i) = \alpha \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \frac{C_P(v_j)}{d_j^{out}} + \beta \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada, α, β parametreler ve $d_j^{out} > 0$ dır. e tüm elemanları 1 olan bir sütun vektörü,

$$C_P = \left(C_P(v_1), C_P(v_2), \dots, C_P(v_n)\right)^T, \tag{3.14}$$

ve

$$D = diag(d_1^{out}, d_2^{out}, \dots, d_n^{out}) \tag{3.15}$$

dersek bu eşitliği matris formunda

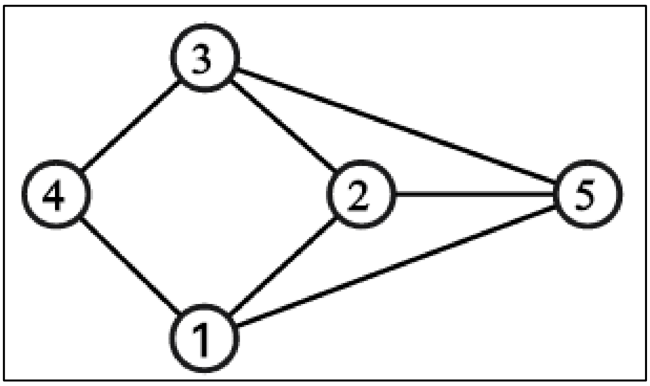
$$C_P = \alpha A^T D^{-1} C_P + \beta e \tag{3.16}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$C_P = \beta(I_n - \alpha A^T D^{-1})^{-1} e \tag{3.17}$$

elde edilir. Katz merkeziliğine benzer şekilde, $\alpha \in (0, {}^{1}/_{\lambda})$ seçilir. Burada, λ ise $A^T D^{-1}$ matrisinin maksimal özdeğerini ifade eder. Yönlendirilmemiş graflar için $A^T D^{-1}$ matrisinin en büyük özdeğeri $\lambda = 1$'dir; bu nedenle $\alpha < 1$ olmalıdır [30].

Örnek 3.7. Şekil 3.3 deki Ağ 3'ü düşünelim. Burada $\alpha = 0.95$ ve $\beta = 0.1$ olarak alalım.



Şekil 3.3. Ağ 3 [30].

Bu ağın komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup köşelerin PageRank merkezilikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.9. Şekil 3.4'deki ağ için köşelerin PageRank merkezilikleri

Köşe	PageRank Merkeziliği
1	2,14
2	2,13
3	2,14
4	1,45
5	2,13

3.6.4. PageRank merkeziliğinin uygulamaları

- Web arama motorları: PageRank; Google, Bing ve Yahoo gibi web arama motorları tarafından web sayfalarını sıralamak için kullanılan en önemli algoritmalardan biridir. Algoritma, kullanıcıların aradıkları bilgileri daha hızlı ve kolay bir şekilde bulmalarına yardımcı olur.
- Web sitesi optimizasyonu (SEO): SEO, web sitelerinin arama motorlarında daha üst sıralarda yer almasını sağlamaya yönelik bir dizi tekniktir. PageRank, SEO'da önemli bir rol oynar ve web sitesi sahiplerinin web sitelerinin arama motorlarında daha üst sıralarda yer almasını sağlamasına yardımcı olur.

- Sosyal medya: Sosyal medya platformları, PageRank algoritmasını içeriklerini sıralamak ve kullanıcıların en alakalı ve ilgi çekici içerikleri görmelerini sağlamak için kullanabilir.
- Reklamcılık: Reklamcılar, PageRank algoritmasını, ürünlerini ve hizmetlerini en alakalı hedef kitleye ulaştırmak için kullanabilir.
- Bilgi keşfi: PageRank, bilgilendirici ve alakalı içerikleri keşfetmek için kullanılabilir.Bu, araştırmacılar, öğrenciler ve diğer bilgi arayanlar için faydalı olabilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, ağ analizinde kullanılan merkezilik ölçülerinin detaylı bir incelemesini sunmaktadır. Bu ölçüler, bir ağın yapısını ve dinamiklerini anlamak için önemli araçlardır. Bu ölçüler arasında derece, arada olma, yakınlık, uzaklık, Katz, özvektör, ve PageRank merkezilik ölçüleri bulunmaktadır.

Bu merkezilik ölçülerinin her biri, ağ analizinde farklı yönleri vurgular ve ağın yapısını ve dinamiklerini anlamak için birlikte kullanılabilir. Bu ölçüler, ağın karmaşıklığını ve düğümlerin ağdaki rollerini anlamak için önemli araçlardır.

Ağ analizinde kullanılan merkezilik ölçüleri hakkındaki sonuçlar, genellikle önceki araştırmalarla tutarlıdır çünkü bu ölçümler matematiksel teorilere dayanır ve belirli bir ağın yapısını analiz etmek için kullanılır. Eğer sonuçlar önceki araştırmalarla tutarlı değilse, bu genellikle aşağıdaki nedenlerden dolayı olabilir:

- Veri Setinin Farklılıkları: Farklı veri setleri, farklı yapılar ve özellikler içerebilir. Bu nedenle, aynı merkezilik ölçümlerini kullanarak yapılan analizler, farklı sonuçlar üretebilir.
- Ölçüm Tekniklerinin Farklılıkları: Farklı araştırmacılar, merkezilik ölçümlerini hesaplarken farklı teknikler kullanabilirler. Bu da sonuçların farklılık göstermesine neden olabilir.
- Araştırma Tasarımındaki Farklılıklar: Araştırma soruları, hipotezler, değişkenler ve diğer araştırma tasarımı unsurları, araştırmalar arasında farklılık gösterebilir. Bu da sonuçların farklılık göstermesine neden olabilir.

Bu nedenle, herhangi bir tutarsızlık durumunda, bu faktörlerin her biri dikkatlice incelenmeli ve değerlendirilmelidir. Bu, sonuçların neden önceki araştırmalarla tutarlı olmadığını anlamamıza yardımcı olabilir.

Sonuçlar genellikle farklı açılardan ifade edilebilir. Örneğin, ağ analizinde kullanılan merkezilik ölçülerinin sonuçları, aşağıdaki açılardan ifade edilebilir:

- Teorik Açıdan: Merkezilik ölçülerinin matematiksel ve teorik temelleri üzerinde durulabilir. Örneğin, özvektör merkeziliği, bir düğümün ağdaki diğer düğümlerle olan bağlantılarının önemini dikkate alır ve bu, bir düğümün diğer önemli düğümlerle olan bağlantılarının ne kadar güçlü olduğunu gösterir.
- Uygulamalı Açıdan: Merkezilik ölçülerinin gerçek dünya ağlarına uygulanması ve bu uygulamaların sonuçları üzerinde durulabilir. Örneğin, Google'ın PageRank algoritması, web sayfalarının önemini sıralamak için özvektör merkeziliğinin bir varyasyonunu kullanır.
- Karşılaştırmalı Açıdan: Farklı merkezilik ölçülerinin sonuçları karşılaştırılabilir. Örneğin, derece merkeziliği ve Katz merkeziliği, bir düğümün ağdaki diğer düğümlerle olan bağlantılarını ölçer, ancak Katz merkeziliği, bağlantıların uzunluğunu da dikkate alır.
- Gelecek Araştırmalar Açısından: Merkezilik ölçülerinin sonuçları, gelecek araştırmalar için potansiyel yolları belirlemek için kullanılabilir. Örneğin, bir düğümün ağdaki diğer düğümler üzerindeki etkisini ölçmek için arada olma merkeziliği kullanılabilir.

Bu farklı açılar, sonuçların daha geniş bir bağlamda anlaşılmasına yardımcı olabilir ve araştırmacılara, ağ analizinde kullanılan merkezilik ölçümlerinin daha derin bir anlayışını sağlar. Bu, ağ analizinin daha geniş bir uygulama yelpazesine sahip olmasını sağlar.

KAYNAKLAR

1. Newman, M. E. J. (2003). The structure and function of complex networks. *Siam Review,* 45(2), 167-256.

2. Kurose, J. F., and Ross, K. W. (2017). *Computer networking: A top-down approach* (Seventh Edition). London: Pearson, 856.

3. Barabási, A. L., and Oltvai, Z. N. (2004). *Biological networks.* Cambridge: Cambridge University Press, 5 (2), 101-113.

4. İnternet: Wikipedia. (2024). *Centrality.* Web: https://en.wikipedia.org/wiki/Centrality. https://en.wikipedia.org/wiki/Centrality, Son Erişim Tarihi: 02.02.2024.

5. Newman, M. E. J. (2010). *Networks: An introduction. university of Michigan and Santa Fe Institute.* Oxford: Oxford University Press, 1042.

6. Chen, P., Xie, H., Maslov, S., Redner, S. (2007). Finding scientific gems with Google's PageRank algorithm. *Journal of Informetrics*, 1(1), 8-15.

7. Büyükköse, S. (2020). *Graf teori* (3.baskı). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 208.

8. Barabási, A.-L. (2016). *Network science*. Cambridge: Cambridge University Press, 453.

9. Tüzüntürk, S. (2022). *Ağ bilimi.* Bursa: Dora, 258.

10. Njotto, L. L. (2018). Centrality measures based on matrix functions. *Open Journal of Discrete Mathematics,* 8, 79-115.

11. Newman, M. E. J. (2004). Analysis of weighted networks. *Physical Review E,* 70(5), 056131.

12. İnternet: Higham, N. J. (2008). *Bibliography of functions of matrices: Theory and computation SIAM, 2008.* Web: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=c1c632c56ffe302601688f586c329828118d4e57, Son Erişim Tarihi: 12.05.2024.

13. İnternet: Perron–Frobenius Theorem. *In wikipedia.* Web: https://en.wikipedia.org/wiki/Perron%E2%80%93Frobenius_theorem. Son Erişim Tarihi: 07.03.2024.

14. İnternet: Hoffman, M. (2021). *Methods for network analysis* (2nd ed.). Web: https://bookdown.org/markhoff/social_network_analysis/, Son Erişim Tarihi: 23.11.2023.

15. Bogardus, E. S. (1933). A social distance scale. *Sociology & Social Research,* 17, 265–271.

16. Moreno, J. L. (1951). *Sociometry, experimental method and the science of society*. Hagerstown: Beacon House, Inc, 220.

17. Freeman, L. C. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry,* 40(1), 35–41.

18. Wasserman, S., and Faust, K. (1994). Social network analysis: Methods and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 825.

19. Zhang, J., and Luo, Y. (2017). *Degree centrality, betweenness centrality, and closeness centrality in social network.* School of Business, Macau University of Science and Technology, Macau, China, 300-303.

20. İnternet: Mrvar, A. *Centrality and Prestige Measures of centrality and prestige.* Web: http://mrvar.fdv.uni-lj.si/sola/info4/uvod/part4.pdf, Son Erişim Tarihi: 21.01.2024.

21. İnternet: Wolitzky, A. (2022). *Lecture 3: Eigenvector centrality measures, 6.207/14.15: Networks*. Web: https://ocw.mit.edu/courses/14-15-networks-spring-2022/mit14_15s22_lec3.pdf, Son Erişim Tarihi: 28.07.2022.

22. Ogiwara, T. (1995). Nonlinear Perron-Frobenius problem on an ordered Banach space. *Japan Journal of Mathematics*, 21(1), 103.

23. Katz, L. (1953). A new status index derived from sociometric analysis. *Psychometrika*, 18(1), 39–43.

24. Bonacich, P. (1987). Power and centrality: A family of measures. *American Journal of Sociology,* 92(5), 1170-1182.

25. İnternet: Katz Centrality (Centrality Measure). (2022, July 28). *In Geeks for Geeks.* Web: https://www.geeksforgeeks.org/katz-centrality-centrality-measure/, Son Erişim Tarihi: 28.07.2022.

26. İnternet: Zeo's Guest. (2021). *Page rank atif değerleri: Web'e düzen getirmek.* Web: https://zeo.org/tr/kaynaklar/blog/pagerank-atif-degerleri. Son Erişim Tarihi: 12.05.2024.

27. İnternet: Sergey Brin and Larry Page, Lemelson. (n.d.). *Lemelson-MIT Program.* Web: https://lemelson.mit.edu/resources/sergey-brin-and-larry-page. Son Erişim Tarihi: 09.03.2024.

28. İnternet: Page, L., Brin, S., Motwani, R., and Winograd, T. (1999). *The pagerank citation ranking: Bringing order to the web.* Web: https://homepages.dcc.ufmg.br/~nivio/cursos/ri17/transp/pagerank.pdf, Son Erişim Tarihi: 12.05.2024.

29. İnternet: Amine, A. (2020). *PageRank algorithm, fully explained.* Towards Data Science. Web: https://towardsdatascience.com/pagerank-algorithm-fully-explained-dc794184b4af, Son Erişim Tarihi: 01.04.2024.

30. Zafarani, R., Abbasi, M. A., and Liu, H. (2014). *Social media mining: An introduction.* Cambridge: Cambridge University Press, 382.

31. İnternet: NetworkX. (2024). Centrality—NetworkX3.3 documentation. https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/centrality.html. Son Erişim Tarihi: 06.04.2024.

32. İnternet: Wolitzky, A. (2022). *Lecture 3: Eigenvector centrality measures, 6.207/14.15: Networks*. Web: https://ocw.mit.edu/courses/14-15-networks-spring-2022/mit14_15s22_lec3.pdf, Son Erişim Tarihi: 28.07.2022.

Gazili olmak ayrıcalıktır