

T.C.

GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

ELZAKİ-ADOMİAN VE ELZAKİ HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE  
RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS

Hilal AYDEMİR

HAZİRAN-2024  
GÜMÜŞHANE



**T.C.**

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**ELZAKİ-ADOMİAN VE ELZAKİ HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE  
RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
ÇÖZÜMLERİ**

**SOLUTIONS OF RANDOM FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS  
USING ELZAKI-ADOMIAN AND ELZAKI HOMOTOPY ANALYSIS  
METHOD**

**YÜKSEK LİSANS**

**Hilal AYDEMİR**

**HAZİRAN-2024**  
**GÜMÜŞHANE**



T.C.

GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

ELZAKİ-ADOMIAN VE ELZAKİ HOMOTOPI ANALİZ YÖNTEMİ İLE  
RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
ÇÖZÜMLERİ

SOLUTIONS OF RANDOM FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS  
USING ELZAKI-ADOMIAN AND ELZAKI HOMOTOPY ANALYSIS  
METHOD

YÜKSEK LİSANS

Hilal AYDEMİR

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

HAZİRAN-2024  
GÜMÜŞHANE



## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

**Yüksek Lisans Tezi** olarak hazırlamış olduğum “**Elzaki-Adomian ve Elzaki Homotopi Analiz Yöntemi ile Rastgele Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim.m Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

**10/06/2024**

**Hilal AYDEMİR**

## TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamda bana yol gösteren, desteğini ve yardımlarını esirgemeyen, bilgisinden, tecrübelerinden, araőtırmalarından ve çalıőmalarından çok Őey öğrendiğim sayın Prof. Dr. Mehmet MERDAN hocama, hayatım boyunca yanımda olan, aldığım her kararda beni destekleyen anne, babama ve kardeŐlerime sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

**Hilal AYDEMİR**  
**GÜMÜŞHANE-2024**

## ÖZET

Bu tez çalışmasında, başlangıç koşulları ya da katsayılar sürekli olasılık dağılımlarından seçilerek rastgele hale dönüştürülen kesirli adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümünü elde edebilmek için, literatürde oldukça çok sık kullanılan yöntemler; Adomian Ayırışım Yöntemi ve Homotopy Analiz Metodu'nun Elzaki Dönüşüm yöntemi ile birlikte kullanıldığı hibrit metotlar ED-AAM ve ED-HAM'dir. Burada kullanılan kesirli türevler local ve Caputo türevleridir. Sürekli olasılık dağılımlarından, düzgün, normal, gamma ve beta dağılımları kullanılarak denklemler rastgele hale dönüştürülmüştür.

Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güvenlik aralıkları hesaplanmıştır ve bulunan çözümlerin grafikleri MATLAB veya MAPLE paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Elzaki homotopi analiz yöntemi, Elzaki-adomian ayrıştırma yöntemi, Elzaki dönüşüm yöntemi, Beklenen değer, Varyans, Güven aralıkları, Lokal kesirli türev

## SUMMARY

In this thesis study, in order to obtain the approximate analytical solution of fractional ordinary and partial differential equations and differential equation systems, the initial conditions or coefficients of which are selected from continuous probability distributions and transformed into randomness, the methods that are frequently used in the literature are; Hybrid methods in which the Adomian Decomposition Method and Homotopy Analysis Method are used together with the Elzaki Transformation method are ED-AAM and ED-HAM. The fractional derivatives used here are local and Caputo derivatives. The equations were transformed into random by using smooth, normal, gamma and beta distributions from continuous probability distributions.

Expected values, variances and security intervals were calculated from the probability characteristics of the obtained solutions, and the graphs of the found solutions were drawn with the help of MATLAB or MAPLE package programs.

**Keywords:** Elzaki homotopy analysis method, Elzaki-adomian decomposition method, Elzaki transformation method, Expected value, Variance, Security intervals, Local fractional derivative

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY .....	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI .....	IV
TEŞEKKÜR .....	V
ÖZET .....	VI
SUMMARY .....	VII
İÇİNDEKİLER .....	VIII
TABLOLAR DİZİNİ .....	X
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	XIII
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı .....	1
1.2. Literatür .....	2
1.3. Temel Kavramlar ve Tanımlar .....	4
1.4. Bazı Olasılık Dağılımları .....	5
1.4.1. Düzgün Dağılım .....	6
1.4.2. Normal Dağılım .....	6
1.4.3. Beta Dağılımı .....	7
1.4.4. Standart Laplace Dağılımı .....	8
1.4.5. Gamma Dağılımı .....	8
1.4.6. Üstel Dağılım .....	9
1.4.7. Üçgensel Dağılım .....	10
1.4.8. Weibull Dağılımı .....	11
1.5. Rastgele Diferansiyel Denklemler .....	11
1.6. Çözüm Yöntemleri .....	12
1.6.1. Homotopi Analiz Metodu .....	12
1.6.2. Elzaki Dönüşüm Yöntemi .....	14
1.6.3. Local Kesirli Elzaki Dönüşüm Metodu (LKED) .....	19
1.6.4. Analiz ve Fonsiyonel Analizle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar .....	22
2. UYGULAMALAR .....	24
2.1. Rastgele Bagley-Torvik Tipi Denklemler .....	44
2.2. Elzaki Adomian Ayrıştırma Yöntemi .....	69
2.3. Kesirli Elzaki Homotopy Analiz Yöntemi (KEHAY) .....	77

3. İRDELEME .....	105
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME .....	106
5. ÖNERİLER .....	107
KAYNAKÇA .....	108
ÖZGEÇMİŞ .....	1155



## TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Bazı fonksiyonların Elzaki dönüşümleri.....	15
--	----



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7$ için $U(x)$ 'in çözüm davranışları.....	26
Şekil 2. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7$ için $U(x)$ 'in çözüm davranışları.....	27
Şekil 3. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7$ için $U(x)$ 'in çözüm davranışları.....	29
Şekil 4. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $1, \alpha = 3, \beta = 2, a = 2, b = 4$ özel değerleri için beklenen değer.....	32
Şekil 5. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $1, \alpha = 3, \beta = 2, a = 2, b = 4$ özel değerleri için varyans...32	
Şekil 6. $\sigma = 0.9$ ve $\alpha = 3, \beta = 2, a = 2, b = 4$ özel değerleri için güven aralıkları...33	
Şekil 7. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7, \alpha = 1, \beta = 2, a = 2, b = 3$ özel değerleri için beklenen değer.....	36
Şekil 8. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7, \alpha = 1, \beta = 2, a = 2, b = 3$ özel değerleri için varyans.....	36
Şekil 9. $\sigma = 0.9$ ve $\alpha = 1, \beta = 2, a = 2, b = 3$ özel değerleri için güven aralıkları.....	37
Şekil 10. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7, \lambda = 2, a = 1, b = 4, c = 2$ özel değerleri için beklenen değer.....	42
Şekil 11. $\sigma = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7, \lambda = 2, a = 1, b = 4, c = 2$ özel değerleri için varyans.....	43
Şekil 12. $\sigma = 0.9$ ve $\lambda = 2, a = 1, b = 4, c = 2$ özel değerleri için güven aralıkları.....	43
Şekil 13. $\lambda = 1, k = 4$ özel değerleri için beklenen değer.....	47
Şekil 14. $\lambda = 1, k = 4$ özel değerleri için beklenen değer.....	48
Şekil 15. $\lambda = 1, k = 4$ özel değerleri için güven aralıkları.....	49
Şekil 16. $\mu = 1, b = 3$ özel değerleri için beklenen değer.....	52
Şekil 17. $\mu = 1, b = 3$ özel değerleri için varyans.....	52
Şekil 18. $\mu = 1, b = 3$ özel değerleri için güven aralıkları.....	53
Şekil 19. $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için beklenen değer.....	60
Şekil 20. $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için varyans.....	60
Şekil 21. $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için güven aralıkları.....	61

Şekil 22. $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için beklenen değer.....	61
Şekil 23. $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için varyans.....	62
Şekil 24. $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için güven aralıkları.....	62
Şekil 25. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7$ , $a = 2, b = 4, u = 3, v = 1$ özel değerleri için beklenen değer.....	68
Şekil 26. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7$ , $a = 2, b = 4, u = 3, v = 1$ özel değerleri için varyans.....	68
Şekil 27. $\alpha = 0.9$ ve $a = 2, b = 4, u = 3, v = 1$ özel değerleri için güven aralığı.....	69
Şekil 28. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7$ için $y(t)$ 'nin çözüm davranışları.....	73
Şekil 29. (a) Elzaki-Adomian (b) tam çözümü c) Mutlak hata= $ y_{tam}-y_{EA} $ için $\alpha=1$ için .....	74
Şekil 30. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve $0.7$ için $y(t)$ 'nin çözüm davranışları.....	77
Şekil 31. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $\beta = 3$ , $a = 3$ , $b = 2$ özel değerleri için beklenen değer.....	86
Şekil 32. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $\beta = 3$ , $a = 3$ , $b = 2$ özel değerleri için varyans....	86
Şekil 33. $\alpha = 1$ , $\beta = 3$ , $a = 3$ , $b = 2$ özel değerleri için güven aralıkları.....	87
Şekil 34. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $\mu = 4$ özel değerleri için beklenen değer.....	95
Şekil 35. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $\sigma^2 = 3$ özel değerleri için varyans.....	95
Şekil 36. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $\mu = 4, \sigma^2 = 3$ özel değerleri için güven aralıkları....	96
Şekil 37. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $a = 1$ , $b = 3$ özel değerleri için beklenen değer...	103
Şekil 38. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $a = 1$ , $b = 3$ özel değerleri için varyans.....	104
Şekil 39. $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$ ve $1$ , $a = 1$ , $b = 3$ özel değerleri için güven aralıklar...	104

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

HAM	: Homotopi Analiz Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
LD-HPM	: Laplace Dönüşümü Homotopi Pertürbasyon Metodu
LKED	: Local Kesirli Elzaki Dönüşüm Metodu
$E[X]$	: X rastgele değişkenin beklenen değeri
$Var[X]$	: X rastgele değişkenin varyansı
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$\mathcal{L}$	: Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}$	: Ters Laplace dönüşümü
$Beta(u, v)$	: Beta dağılımı
$Gamma(\zeta, \theta)$	: Gamma dağılımı
$Üstel(\lambda)$	: Üstel dağılımı
$I_t^\alpha f(t)$	: Riemann Liouville kesirli integral mertebesi
$D_*^\alpha f(x)$	: Kesirli türev operatörü
${}^C D_t^\alpha f(t)$	: Caputo kesirli türev operatörü
${}^R D_t^\alpha f(t)$	: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü

# GİRİŞ

## 1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı

Homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol altına almamızı sağlayan Homotopi Analiz Metodu (HAM) 1992 de Shijun Liao tarafından ortaya konmuştur (Liao, 1992; Liao, 1995; Liao, 1997; Liao, 1999; Liao, 2002; Liao, 2003a; Liao, 2003b; Liao, 2004; Liao, 2005; Liao, 2009; Liao, 2012). Homotopi Analiz Metodu, Adomian Ayrışım Metodu, Lyapunov Yapay Parametre Metodu,  $\delta$ -Açılım Metodu gibi önceden verilen pertürbatif metotlarını birleştirerek genel bir çözüm yöntem sunar. Homotopi Analiz Metodu lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözüm serilerini elde etmek için kullanılan yarı analitik bir yaklaşımdır. Bu metotla cebirsel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler ve benzeri denklemlerin çözüm serilerine fiziksel parametrelerden bağımsız olarak ulaşılabilir ve yakınsaklık bölgesi ve hızı kontrol altına alınabilir.

Homotopi Analiz Metodu, Homotopi Perturbasyon Metodunda olduğu gibi topolojinin temel kavramlarından homotopiyi kullanılarak ele alınan problemin başlangıç şartı veya sınır şartlarından tam çözüme götüren sürekli ve sıralı bir dönüşüm elde etmemizi sağlar. Bu tür bir sürekli dönüşümü, oluşturmak için yardımcı lineer operatör ile çözüm serisinin yakınsaklığını kontrol altına almak için yardımcı parametre kullanılır. Bu metot ilk yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde kolaylık sağlar. Homotopi Analiz Metodu yardımıyla zor bir lineer olmayan problem çok daha basit alt problemlere dönüştürülerek her bir alt problemin çözümüyle çözüm serisi oluşturulur.

Bilindiği üzere bu tarz yöntemler, 90'lı yıllarda ortaya çıkmış olup temelde seri çözümüne dayanmaktadırlar. Çözümlerin seri halinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı versiyonlarının elde edilebilmesi, bu yöntemlerin birçok alanda çalışan bilim insanları arasında popüler olmasını sağlamış ve çözümlerin farklı yorumlanmasına olanak sağlamıştır.

HAM lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerine de uygulanabilmekte ve oldukça başarılı sonuçlar elde edilmektedir. Bu tezde ele alınan bazı problemlerin literatürde analitik metotlarla çözümleri olmasına rağmen, bu çözümlerin analizinin yapılması mümkün değildir. Burada kullanılan

yaklaşımlar sonucunda literatürde mevcut ve yeni çözümlere ulaşılarak çeşitli analizler yapılmış ve çözümlerin yorumlanması sağlanmıştır.

Laplace dönüşüm yöntemi (Spiegel, 1965), Fourier dönüşüm yöntemi (Benzoni, 2011), Hankel dönüşüm yöntemi (Negero, 2016) ve Mellin dönüşüm yöntemi (Lomen, 1962) en iyi bilinen dönüşümler arasındadır. Son zamanlarda ortaya çıkan diğer dönüşümler arasında örneğin Sumudu dönüşüm yöntemi (Watugala, 1993), Doğal dönüşüm yöntemi (Khan ve Khan, 2008), Elzaki dönüşüm yöntemi (Elzaki, 2011; Kim, 2013; Devi, vd., 2017; Kalavathi vd., 2021), Aboodh dönüşüm yöntemi (Aboodh, 2013), ZZ dönüşümü yöntemi (Zafar, 2016), Shehu dönüştürme yöntemi (Maitama ve Zhao, 2019) vd. yer alır.

Tarık M. Elzaki ve co. 2011 yılında, Elzaki dönüşümünün matematiksel basitliğine ve temel özelliklerine dayanan klasik Fourier integralinden (Elzaki ve Ezaki, 2011a) Elzaki dönüşümü yöntemini geliştirdi. Birçok bilim insanı, yüksek mertebeden diferansiyel denklemleri (Elzaki ve Ezaki, 2011c), değişken katsayılı ve katsayısız adi diferansiyel denklemleri (Elzaki ve Ezaki, 2011b; Mahgob, 2012; Mahgob ve Elzaki, 2015a; Mahgob ve Elzaki, 2015b), tamsayı diferansiyel denklemleri (Bhadane vd., 2013) ve zaman alanı kısmi diferansiyel denklemleri (Elzaki ve Hilal, 2012; Elzaki ve Ezaki, 2011d; Ziane ve Cherif, 2015) çözmek için bu dönüşümü kullanmıştır.

## 1.2. Literatür

Son yıllarda kesir mertebeden türevli denklemler üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bunun sebebi; kesir mertebeden türevin tam sayılı mertebeden türeve göre esneklik ve yerel olmamasıdır. Bu türevler kesirli mertebeden oldukları için gerçek verilere klasik türevlere göre daha fazla esneklikle yaklaşabilirler. Tıp, fizik, biyoloji, biyomühendislik, elektrokimya gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok uygulamalı alanında, fiziksel anlamda tam sayılı mertebeden türevlerin ifade edilemediği yerlerde kesir mertebeden türevler hesaplamayı kolaylaştırır ve problemin çeşidine göre en uygun olanı seçilerek yaklaşık çözüm elde edilir. Kesir mertebeden türevli denklemleri çözmek için çok sık kullanılan yöntemlerden biri de Elzaki Homotopi Analiz Yöntemi'dir (Elzaki, 2011; Kim, 2013; Devi, vd., 2017; Kalavathi vd., 2021).

Homotopi Analiz Yöntemi ile ilgili yapılan son çalışmalar 1992 de Shijun Liao tarafından ortaya konmuştur (Liao, 1992; Liao, 1995; Liao, 1997; Liao, 1999; Liao, 2002; Liao, 2003a; Liao, 2003b; Liao, 2004; Liao, 2005; Liao, 2009; Liao,

2012). Homotopi Analiz Yöntemi yardımıyla zor bir lineer olmayan problem çok daha basit alt problemlere dönüştürülerek her bir alt problemin çözümüyle çözüm serisi oluşturulur.

Son yıllarda rastgele diferansiyel denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar; Asai ve Kloeden Stokastik diferansiyel denklemler yardımıyla rastgele adi diferansiyel denklemler için sayısal çözümler elde ettiler (Asai ve Kloeden, 2013). Bekiryazıcı vd., Rastgele Etkiler Altında Dang humması Hastalığının Matematiksel Modellenmesi için çözümler elde ettiler (Bekiryazıcı vd., 2016). Merdan vd., Hepatit C modelinin deterministik kararlılığını ve rastgele davranışını incelemiştir (Merdan vd., 2017a). Merdan vd., Bakteriyel direnç için stokastik ve rastgele modellerin karşılaştırılması yapılmıştır (Merdan vd., 2017b). Anaç vd., Rastgele zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin yeni Sumudu dönüşüm yöntemiyle çözümleri bulunmuştur (Anaç vd., 2020). Bekiryazıcı vd., Kompartmanlı modellere Rastgele diferansiyel dönüşüm yönteminin modifikasyonu uygulanmıştır (Bekiryazıcı vd., 2021).

Elzaki ve Ezaki, Elzaki dönüşümünün matematiksel basitliğine ve temel özelliklerine dayanan klasik Fourier integralinden (Elzaki ve Ezaki, 2011a) Elzaki dönüşüm yöntemini geliştirdiler. Elzaki ve Ezaki, yüksek mertebeden, integro, değişken katsayılı ve katsaysız adi diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklemleri (Elzaki ve Hilal, 2012; Elzaki ve Ezaki, 2011b; Ziane ve Cherif, 2015) çözmek için bu dönüşümü kullanmışlardır. Son yıllarda Elzaki dönüşüm yöntemi ile ilgili yapılan çalışmalar; Devi vd., Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemleri Elzaki dönüşüm yöntemini kullanılarak elde ettiler (Devi vd., 2017). Manjarekar ve Bhadane Yeni genelleştirilmiş kesirli Elzaki-Tarig ve diğer kesirli integral Dönüşümünü kesirli diferansiyel denklemlere uygulamışlardır (Manjarekar ve Bhadane, 2019a). Manjarekar ve Bhadane yeni uyumlu kesirli türevli diferansiyel denklemleri, Elzaki Dönüşüm yöntemi ile çözdüler (Manjarekar ve Bhadane, 2019b). Kalavathi vd., Dejenere Elzaki dönüşümünü ve özelliklerini tanımlamışlar (Kalavathi, vd., 2021).

Son yıllarda Elzaki-Adomian ayrıştırma yöntemi ile ilgili yapılan çalışmalar; Elzaki ve Alkhateeb Sumudu Dönüşümü “Elzaki Dönüşümü” ve Adomian Ayrıştırma Yönteminin Modifikasyonunu tanımlamışlar (Elzaki ve Alkhateeb, 2015). Ige vd., Sinüs-Gordon Denklemlerinin Çözümünde Adomian-Elzaki Dönüşümü Yöntemini kullanmışlar (Ige vd., 2019a). Ige vd., Adomian-Elzaki Dönüşüm yöntemi ile Beşinci Mertebeden KDV denklemlerin Çözümünü

elde ettiler (Ige vd., 2019b). Varsoliwala ve Singh Doymamış topraklarda su sızmasını modelleyen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi, Elzaki-Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile yaklaşık analitik çözümünü elde ettiler (Varsoliwala ve Singh, 2020).

Bu tezde adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemleri, bazı olasılık dağılımları ile rastgele etki terimleri eklenerek rastgele hale dönüştürülmüştür. Mutlak sürekli dağılımlardan literatürde en sık kullanılan Düzgün, Gamma, Normal, Beta, Standart Laplace, Üstel, Üçgensel ve Weibull dağılımları ile rastgele hale dönüştürülen denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri, Adomian Ayrıştırma Yöntemi, Homotopy Analiz Metodu'nun Elzaki Dönüşüm yöntemi ile birlikte kullanıldığı hibrit metotlar olan ED-AAM ve ED-HAM yardımıyla elde edilmiştir. Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristikleri incelenecektir.

### 1.3. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Bu tezde ihtiyaç duyulan bazı kesirli analiz tanımları ve notasyonları bu bölümde tartışılmaktadır (Podlubny, 1999; Miller ve Ross, 1993).

**Tanım 1.3.1.**  $\alpha \geq 0$  Riemann Liouville kesirli integral mertebesi olmak üzere,  $f(t) \in C_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq -1$

$$I_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & \alpha > 0, t > 0 \\ f(t) & , \alpha = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 1.3.2:**  $\alpha > 0$  Caputo kesirli türevin mertebesi olmak üzere  $f(t)$ 'nin Caputo kesirli türevi:

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{p-\alpha-1} f^{(p)}(s) ds, & p-1 < \alpha \leq p \\ \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$D^\alpha$  kesirli türev operatörünün özellikleri:

1.  $D^\alpha I^\alpha f(x, t) = f(x, t)$
2.  $D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}, \alpha > 0$

**Tanım 1.3.3.** Mittag-Leffler fonksiyonu  $E_\alpha(z)$

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{C}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 1.3.4.** Elzaki dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$E[f(t)] = z \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{z}} dt, t \geq 0, k_1 \leq z \leq k_2$$

Elzaki dönüşümünün özellikleri:

1.  $E[k] = kz^2$
2.  $E[t^{n\alpha}] = \Gamma(n\alpha + 1)z^{n\alpha+2}$

**Lemma:** Caputo kesirli türevin Elzaki dönüşümü

$$E[D_t^\alpha f(x, t)] = z^{-\alpha} E[f(x, t)] - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(2-\alpha+k)} f^{(k)}(x, 0), m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır.

#### 1.4. Bazı Olasılık Dağılımları

Bu bölümde tezde kullanılacak bazı olasılık dağılımları hakkında temel bilgiler verilmektedir.

### 1.4.1. Düzgün Dağılım

$X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ise  $X$  rastgele değişkeni  $[c, d]$  kapalı aralığında sürekli düzgün dağılıma sahiptir.

Düzgün dağılıma sahip  $X$  rastgele değişkenin parametreleri,  $X \sim U(\alpha, \beta)$ ' dir.

Düzgün dağılımın,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak,  $X \sim U(\alpha, \beta)$  rastgele değişkenin birinci momenti ve varyansı;

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{Var}[X] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

### 1.4.2. Normal Dağılım

$X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, x \in R$$

ise rastgele değişkenine Normal Dağılıma sahip rastgele değişken denir. Normal dağılıma sahip  $X$  rastgele değişkenin parametreleri  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  dir. Normal dağılımın

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri;

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve varyansı } \text{Var}[X] = \sigma^2$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Buradaki momentler kullanılarak  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkenler için beklenen değer  $E[XY] = E[X]E[Y]$  olur.

### 1.4.3. Beta Dağılımı

**Tanım 1.4.3.1.**  $u$  ve  $v$  değişkenlerinin bütün pozitif değerleri için tanımlanan

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx$$

fonksiyonuna, beta fonksiyonu denir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Ayrıca gösterilebilir ki

$$B(u, v) = B(v, u)$$

ve

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}, u, v > 0$$

dir.

**Tanım 1.4.3.2. (Beta Dağılımı)** Aşağıdaki yoğunluk fonksiyonuna sahip  $X$  rastgele değişkeni, beta dağılımına sahiptir denir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

$$f(x; \varphi, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\varphi, \zeta)} x^{\varphi-1} (1-x)^{\zeta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{aralığın dışında} \end{cases}$$

Burada  $\varphi$  ve  $\zeta$  parametreleri pozitif reel sayılardır. Spesifik olarak,  $\varphi = \zeta = 1$  ise, dikdörtgensel bir dağılım elde edilir.  $\varphi = 1, \zeta = 2$  veya  $\varphi = 2, \zeta = 1$  ise üçgensel dağılım bulunur.

$$f(x; 1, 2) = \begin{cases} 2(1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{Aralığın dışında} \end{cases}$$

$$f(x; 2, 1) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{Aralığın dışında} \end{cases}$$

Beta dağılımına sahip  $X \sim \text{Beta}(\varphi, \zeta)$  rastgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E(X) = \frac{\varphi}{\varphi + \zeta}$$

$$Var(X) = \frac{\varphi \zeta}{(\varphi + \zeta)^2 (\varphi + \zeta + 1)}$$

#### 1.4.4. Standart Laplace Dağılımı

Standart Laplace dağılımı, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(v) = \frac{1}{2} e^{-|v|}, v \in R$$

şeklindedir.  $G$  dağılım fonksiyonu;

$$G(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^v, v \in (-\infty, 0] \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-v}, v \in [0, \infty) \end{cases},$$

$M$  moment çıkarıcı fonksiyonu,

$$M_v(t) = E(e^{tv}) = \frac{1}{1-t^2}, t \in (-1, 1)$$

olarak verilir. Beklenen değer ve varyansı;

$$E(v) = 0 \text{ ve } Var(v) = 2$$

şeklindedir (Khaniyev vd., 2017).

#### 1.4.5. Gamma Dağılımı

$X$  negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun.  $X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \alpha, \beta > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde ise  $X$  rastgele değişkenine  $(\alpha, \beta)$  parametrelili gamma dağılımına sahiptir denir.

Gamma dağılımına sahip  $X$  rastgele değişkenin parametreleri,  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  dir. Gamma dağılımının moment çıkarıcı fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$$

ifadesi bulunur.  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  rastgele değişkeninin, birinci momenti ve varyansı;

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta}, \text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

şeklindedir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

#### 1.4.6. Üstel Dağılım

$X$  rastgele değişkeninin,  $\zeta > 0$  parametre olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\phi(x) = \begin{cases} \zeta e^{-\zeta x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde verilmişse  $X$ 'e üstel dağılmış rastgele değişken,  $\phi(x)$ 'e de üstel dağılım denir.

Bu dağılımın tek parametresi  $\zeta$ 'dir. Bu durumda birikimli dağılım fonksiyonu;

$$\Theta(X) = P(X \leq x) = \int_0^x \zeta e^{-\zeta t} dt = 1 - e^{-\zeta t}$$

$$\Theta(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\zeta t} & , \quad x \geq 0 \\ 1 & , \quad x \rightarrow \infty \end{cases}$$

şeklindedir.

Moment çıkaran fonksiyon tanımı kullanılarak bu dağılımın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{xt} \zeta e^{-\zeta x} dx = \zeta \int_0^\infty e^{(t-\zeta)x} dx \\ &= \frac{\zeta}{t-\zeta} e^{(t-\zeta)x} \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(t-\zeta)x} = 0$  olduğu için;

$$M(t) = \frac{\zeta}{\zeta-t}; \quad t < \zeta \text{ için elde edilir.}$$

Moment çıkarıcı fonksiyon, beklenen değer ve varyans tanımları kullanılarak beklenen değer ve varyans hesaplanabilir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Bu durumda beklenen değer,

$$E(X) = \int_0^{\infty} \zeta x e^{-\zeta x} dx$$

Hesaplamamızda parçalı integral kullanırsak ( $u = x, dv = \zeta e^{-\zeta x}$ )

$$E(X) = -x e^{-\zeta x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\zeta x} dx = \frac{1}{\zeta}$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki şekilde de varyans elde edilir.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \zeta x^2 e^{-\zeta x} dx = \frac{2}{\zeta^2}$$

$E(X^2)$  hesaplanırken de parçalı integral kullanılır. ( $x^2 = u, dv = e^{-\zeta x} dx$ )

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \frac{2}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta^2}$$

### 1.4.7. Üçgensel Dağılım

Genelleştirilmiş üçgensel dağılıma sahip, bir  $X$  rastgele değişkeninin,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x < c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c < x \leq b \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu yukarıda verildiği gibi tanımlanır (Feller, 1968). Burada  $a$  ve  $b$  sırasıyla rastgele değişkenin (olasılık yoğunluk fonksiyonunun) alabileceği en küçük ve en büyük değerlerken,  $c$  dağılımın mod değeridir.

Beklenen değeri ve varyansı;

$$E(X) = \frac{(a + b + c)}{3}, Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

ile verilir.

Üçgensel dağılımın moment çıkarıcı fonksiyonu;

$$M_x(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

#### 1.4.8. Weibull Dağılımı

$X$  negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun.  $X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_x(x; \xi, \zeta) = \begin{cases} \xi \zeta x^{\xi-1} e^{-\zeta x^\xi}, & x \geq 0, \xi > 0, \zeta > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ise  $X$  rastgele değişkenine  $(\xi, \zeta)$  parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir (Weibull, 1951).

Weibull dağılımı için beklenen değer ve varyans şöyle verilir:

$$E(X) = \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{\xi}}} \frac{1}{\xi} \Gamma\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

$$var(X) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\xi}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}{\zeta^{\frac{2}{\xi}}}$$

#### 1.5. Rastgele Diferansiyel Denklemler

Doğada karşılaşılan olayların matematiksel modellemede adi diferansiyel denklemler kullanılarak incelenmesi her zaman uygun olmamaktadır. Rastgele bileşenlere sahip olan olayların incelenmesi için rastgele ve stokastik diferansiyel denklemlerin kullanılması daha iyi sonuçların elde edilmesine yol açmaktadır. Adi diferansiyel denklemler kullanılarak rastgele diferansiyel denklemler üç şekilde elde edilebilmektedir (Soong, 1973): i. Rastgele başlangıç değerlerine sahip diferansiyel denklemler ii. Homojen olmayan kısımları rastgele olan diferansiyel denklemler iii. Katsayıları rastgele olan denklemler. Bir  $Y'(x) = G(Y(x), Z(x), x), x \in T, Y(x_0) = y_0$  diferansiyel denklemi ele alınsın.

**Tanım 1.5.1.**  $Y'(x) = G(Y(x), x), x \in T, Y(x_0) = y_0$  denkleminde tek rastgele bileşen başlangıç koşulu ise bu diferansiyel denklem, rastgele başlangıç koşullarına sahip bir rastgele diferansiyel denklemdir.

## 1.6. Çözüm Yöntemleri

### 1.6.1. Homotopi Analiz Metodu

Örneğin aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemi göz önüne alalım;

$$N[\mathcal{f}(t)] = 0, t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

burada  $N$  lineer olmayan bir operatör olmak üzere (1) denklemi bazı başlangıç değerleri ve sınır koşullarına bağlı bir lineer olmayan denklemdir.

$\mathcal{f}_0, \mathcal{f}$  'in bir başlangıç yaklaşımı ve  $q \in [0,1]$  homotopi parametresi olmak üzere aşağıdaki homotopiyi kuralım (Liao, 1992).

$$H[\Psi(t; q); \mathcal{f}_0(t), H(t), \hbar, q] \equiv (1 - q)L[\Psi(t; q) - \mathcal{f}_0(t)] - q\hbar H(t)N[\Psi(t; q)] \quad (2)$$

Burada  $\hbar \neq 0$  yakınsaklık kontrol parametresi,  $H(t)$  yardımcı fonksiyon,  $q \in [0,1]$  olan çözüm için bir başlangıç yaklaşım parametresi,  $\mathcal{f}_0(t)$  başlangıç veya sınır şartları,  $L$  lineer operatör ve  $N$  lineer olmayan bir operatördür. Şimdi (2) homotopisinin sağ tarafını sıfır yapalım,

$$(1 - q)L[\Psi(t; q) - \mathcal{f}_0(t)] = q\hbar H(t)N[\Psi(t; q)] \quad (3)$$

Denklem (3) sıfırcı dereceden deformasyon denklemi olarak bilinir. Burada  $q = 0$  alınırsa,

$$L[\Psi(t; 0) - \mathcal{f}_0(t)] = 0 \quad (4)$$

olur ve  $\Psi(t; 0)$  başlangıç şartı olan  $\mathcal{f}_0(t)$ 'ye eşit olur.

$$\Psi(t; 0) = \mathcal{f}_0(t) \quad (5)$$

$q = 1$  alınır, (1) denklemini

$$N[\Psi(t; 1)] = 0 \quad (6)$$

olur. Bu bize  $\Psi(t, 1)$  in (1) denkleminin sınır şartını sağlayan  $f(t)$ 'ye eşit olduğunu gösterir.

$$\Psi(t; 1) = f(t) \quad (7)$$

(5) ve (7) gösterir ki  $q$ , 0 ile 1 arasında değiştiğinde  $\Psi(t; q)$  nin,  $f_0(t)$  den problemin çözümü olan  $f(t)$ 'ye ulaştığını gösterir.

$f(t)$  nin  $m$ . mertebeden Taylor serisine açılımı yapılırsa,

$$f_m(t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Psi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (8)$$

bulunur.

$$\Psi(t; q) = \Psi(t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Psi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} q^m = f_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) q^m \quad (9)$$

elde edilir. Burada  $f_m(t)$  in seri olarak hesaplanması çok önemlidir.  $f_m(t)$  yi, seri olarak hesaplamak için (3) denkleminde  $q$ 'ya göre türevi alınır,

$$(1 - q)L\left(\frac{\partial \Psi(t; q)}{\partial q}\right) - L(\Psi(t; q) - f_0(t)) = \hbar H(t)N[\Psi(t; q)] + q\hbar H(t) \frac{\partial N[\Psi(t; q)]}{\partial q} \quad (10)$$

yazılabilir. (10) denkleminde  $q = 0$  alınır ve (5)'in sonucu olarak (8) denklemini verir.

$$L[f_1(t)] = \hbar H(t)N[f_0(t)] \quad (11)$$

Burada  $m \geq 2$  için aşağıdaki denklemi önerilir.

$$(1 - q)L \left( \frac{\partial^m \psi(t; q)}{\partial q^m} \right) - mL \left( \frac{\partial^{m-1} \psi(t; q)}{\partial q^{m-1}} \right) = m \hbar H(t) \frac{\partial^{m-1} N[\psi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} + q \hbar H(t) \frac{\partial^m N[\psi(t; q)]}{\partial q^m} \quad (12)$$

Bu denklemin ispatı tümevarım yöntemi ile kolaylıkla gösterilebilir.

(12) denkleminde  $q = 0$  alınır ve her iki tarafı  $m!$  e bölünürse,

$$(1 - q)L \left[ \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(t; q)}{\partial q^m} - \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \psi(t; q)}{\partial q^{m-1}} \right] \Big|_{q=0} = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\psi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (13)$$

Buradan  $m \geq 2$  için,

$$L[\mathcal{f}_m(t) - \mathcal{f}_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\psi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (14)$$

yazılabilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (15)$$

olarak tanımlanırsa (11) ve (14)'ün sonucu olarak  $m$ . mertebeden deformasyon denkleminin,

$$L[\mathcal{f}_m(t) - \chi_m \mathcal{f}_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\psi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (16)$$

olur. Bu denklem  $m \geq 1$  için geçerlidir.

(16) denkleminde denklemin sağ tarafı  $\mathcal{f}(t)$  ye bağlı olduğu açıktır.  $m$ 'in artan kuvvetlerine göre  $\mathcal{f}_m(t)$  çözümleri elde edilir ki bu  $m$ . mertebeden deformasyon denkleminin çözümüne eşittir.

### 1.6.2. Elzaki Dönüşüm Yöntemi

**Tanım 1.6.2.1.**  $\mathcal{F}(t), t > 0$  için bir fonksiyon olsun.  $\mathcal{F}(t)$ 'nin Elzaki dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(\mathcal{F}(t)) = v \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{v}} \cdot \mathcal{F}(t) dt$$

**Teorem 1.6.2.2.** (Elzaki ve Ezaki, 2011a) Bazı fonksiyonların Elzaki dönüşümleri Tablo 1.'de verilmiştir;

Tablo1. Bazı fonksiyonların Elzaki dönüşümleri

Fonksiyonlar	Elzaki Dönüşümler
$\mathcal{F}(x, t)$	$E(\mathcal{F}(x, t)) = T(x, v)$
$f(x)$	$f(x) \cdot v^2$
$f(x) \cdot t$	$f(x) \cdot v^3$
$f(x) \cdot t^n$	$f(x) \cdot n! v^{n+2}$
$f(x) \cdot e^{at}$	$f(x) \cdot \frac{v^2}{1 - av}$
$f(x) \cdot \cos at$	$f(x) \cdot \frac{v^2}{1 + a^2 v^2}$
$f(x) \cdot \sin at$	$f(x) \cdot \frac{av^3}{1 + a^2 v^2}$

**Teorem 1.6.2.3.** (Elzaki ve Ezaki, 2011d)  $f(x, t)$ 'nin birinci dereceden kısmi türevlerinin Elzaki dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$\text{i) } E \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{1}{v} T(x, s) - v f(x, 0) ,$$

$$\text{ii) } E \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial T(x, v)}{\partial x} , \quad (17)$$

burada  $T(x, v) = E[f(x, t)]$ .

**Teorem 1.6.2.4.** (Elzaki ve Ezaki, 2011d)  $f(x, t)$ 'nin ikinci mertebeden kısmi türevlerinin Elzaki dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$\text{i) } E \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] = \frac{1}{v} T(x, s) - f(x, 0) - v \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t}$$

$$\text{ii) } E \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial^2 T(x, v)}{\partial x^2}$$

$$\text{iii) } E \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v} T(x, v) - v f(x, 0) \right) \quad (18)$$

burada  $T(x, v) = E[f(x, t)]$ .

*İspat.*

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right] &= v \int_0^\infty e^{-\frac{t}{v}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} dt \\ &= v \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} E \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v} T(x, v) - v f(x, 0) \right). \end{aligned}$$

□

**Lemma:**  $f(x, t)$ 'nin  $n$ . Mertebeden kısmi türevlerin dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

$$\text{i) } E \left[ \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right] = \frac{1}{v^n} T(x, v) - \frac{1}{v^{n-2}} f(x, 0) - \frac{1}{v^{n-3}} \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) - \dots - \frac{\partial^{n-2} f}{\partial t^{n-2}}(x, 0) - v \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}}(x, 0)$$

$$\text{ii) } E \left[ \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right] = \frac{\partial^n T(x, v)}{\partial x^n} \quad (19)$$

İspat. i) Tümevarımla ispat yapalım.

$n = 1$  ise

$$E \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{1}{v} T(x, v) - v f(x, 0).$$

Lemma  $n = 1$  için doğrudur.

$n = k$  için Lemma'nın doğru olduğunu varsayıyoruz.

$$E \left[ \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right] = \frac{1}{v^k} T(x, v) - \frac{1}{v^{k-2}} f(x, 0) - \frac{1}{v^{k-3}} \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) - \dots - \frac{\partial^{k-2} f}{\partial t^{k-2}}(x, 0) - v \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}(x, 0)$$

$n = k + 1$  için Lemma'nın doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$E \left[ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}} \right] = v \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{t}{v}} \cdot \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}} dt$$

Kısmi integrasyon yöntemini uygularsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$E \left[ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}} \right] = v \left[ \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{v}} \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right) - \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, 0) + \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{v}} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial t^k} dt \right]$$

$$E \left[ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}} \right] = \frac{1}{v} E \left[ \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right] - v \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, 0)$$

$$= \frac{1}{v} \left[ \frac{1}{v^2} T(x, v) - \frac{1}{v^{k-2}} f(x, 0) - \dots - \frac{\partial^{k-2} f}{\partial t^{k-2}}(x, 0) - v \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \right] - v \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, 0)$$

$$E \left[ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}} \right] = \frac{1}{v^{k+1}} T(x, v) - \frac{1}{v^{k-1}} f(x, 0) - \dots - \frac{1}{v} \frac{\partial^{k-2} f}{\partial t^{k-2}}(x, 0) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}(x, 0) - v \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, 0)$$

**Tanım 1.6.2.5.**  $f(x)$ 'in  $x = x_0$ 'da  $\sigma$  mertebeden lokal kesirli türevi

$$0 < \sigma \leq 1$$

$$f^{(\sigma)}(x) = \left. \frac{d^\sigma f}{dx^\sigma} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\sigma f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^\sigma}$$

Burada  $\Delta^\sigma f(x) - f(x_0) \cong \Gamma(1 + \sigma)[f(x) - f(x_0)]$

$$f^{(\sigma)}(x) \cong \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Gamma(1+\sigma)[f(x) - f(x_0)]}{(x-x_0)^\sigma}$$

$\sigma$  mertebeden lokal kesirli kısmi diferansiyel operatörü şu şekilde verilmiştir (Kolwankar ve Gangal, 1996;1997a;1997b),

$$\frac{\partial^\sigma \omega(x_0, t)}{\partial t^\sigma} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\sigma (\omega(x_0, t) - \omega(x_0 - t_0))}{(t - t_0)^\sigma}$$

Burada  $\Delta^\sigma (U(x_0, t) - U(x_0 - t_0)) \cong \Gamma(1 + \sigma)[U(x_0, t) - U(x_0 - t_0)]$ .

**Tanım 1.6.2.6.** (Kolwankar ve Gangal, 1996;1997a;1997b)  $\sigma$  mertebeden  $f(x)$ 'in local kesirli integrali aşağıdaki gibi verilmiştir,

$${}_a I_b^{(\sigma)} = \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} \int_a^b f(t) (dt)^\sigma = \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) (\Delta t_j)^\sigma$$

$$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, \Delta t = \max\{\Delta t_0, \Delta t_1, \Delta t_2, \dots\} \text{ ve } [t_j, t_{j+1}], t_0 = a, t_N = b.$$

**Tanım 1.6.2.7.** (Mittag-Leffler, 1903; 1905) Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \Gamma(1+k) = k!$$

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

İki parametrelili fonksiyon için Mittag-Leffler fonksiyonu ise;

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \alpha > 0, \beta > 0$$

**Tanım 1.6.2.8.** (Yang, 2012; He, 2012; Zhao vd., 2014)  $\sigma$  mertebeden yerel kesirli Laplace dönüşümü şu şekilde verilir,

$$L_\sigma\{f(x)\} = \mathcal{F}_\sigma(s) = \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} \int_0^\infty E_\sigma(-s^\sigma x^\sigma) f(x) (dx)^\sigma \quad (20)$$

$L_\sigma\{f(x)\} = \mathcal{F}_\sigma(s)$ , bu yüzden (20)'in ters dönüşümü alınırsa,

$$f(x) = L_\sigma^{-1}\{\mathcal{F}_\sigma(s)\} = \frac{1}{(2\pi)^\sigma} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} E_\sigma(s^\sigma x^\sigma) \mathcal{F}_\sigma(s) (ds)^\sigma,$$

$s^\sigma = \beta^\sigma + i^\sigma \infty^\sigma$ ,  $i^\sigma$  kesirli imajiner kısım ve  $Re(s) = \beta$

**Tanım 1.6.2.9.** (Yang, 2011) Eğer  $L_\sigma\{f(x)\} = \mathcal{F}_\sigma(s)$ , bu yüzden

$$L_\sigma[f^\sigma(x)] = s^\sigma L_\sigma\{f(x)\} - f(0).$$

**Tanım 1.6.2.10.** (Yang, 2011) Eğer  $L_\sigma\{f(x)\} = \mathcal{F}_\sigma(s)$ , ise

$$L_\sigma\{ {}_0I_x^\sigma f(t) f(x) \} = \frac{1}{s^\sigma} L_\sigma\{f(x)\}.$$

**Tanım 1.6.2.11.** (Yang, 2011)  $L_\sigma\{f(x)\} = \mathcal{F}_\sigma(s)$  ve  $L_\sigma\{g(x)\} = G_\sigma(s)$

$$L_\sigma\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{F}_\sigma(z)G_\sigma(z)$$

$$\text{Burada } f(x) * g(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} \int_0^\infty f(t)g(x-t)(dt)^\sigma$$

### 1.6.3. Local Kesirli Elzaki Dönüşüm Metodu (LKED)

Yeni dönüşüm operatörü (Ziane ve Cherif, 2021)  $LFE_\sigma: f(x) \rightarrow T_\sigma(v)$

$$LFE_\sigma\{f(x)\} = LFE_\sigma\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k\sigma}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(1+k\sigma) a_k v^{k\sigma+2\sigma}$$

Örneğin;

$$f(x) = E_\sigma(i^\sigma x^\sigma)$$

$$\begin{aligned}
LFE_{\sigma}\{E_{\sigma}(i^{\sigma} x^{\sigma})\} &= LFE_{\sigma}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k\sigma} x^{k\sigma}}{\Gamma(1+k\sigma)}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(1+k\sigma) \frac{i^{k\sigma}}{\Gamma(1+k\sigma)} v^{k\sigma+2\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{k\sigma} v^{k\sigma+2\sigma}
\end{aligned}$$

ve eğer  $f(x) = \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)}$

$$LFE_{\sigma}\left\{\frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)}\right\} = \Gamma(1+\sigma) \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} v^{\sigma+2\sigma} = v^{3\sigma}$$

**Tanım 1.6.3.1.** (Ziane ve Cherif, 2021)  $\sigma$  mertebeden  $f(x)$ 'in yerel kesirli Elzaki dönüşümü

$$LFE_{\sigma}\{f(x)\} = T_{\sigma}(v) = \frac{v^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} \int_0^{\infty} E_{\sigma}\left(\frac{-x^{\sigma}}{v^{\sigma}}\right) f(x) (dx)^{\sigma}, \quad 0 < \sigma \leq 1$$

Ters dönüşüm aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$LFE_{\sigma}^{-1}\{T_{\sigma}(v)\} = f(x).$$

**Teorem 1.6.3.2.** (Ziane ve Cherif, 2021) Local kesirli türevin Elzaki dönüşümü

Eğer  $LFE_{\sigma}\{f(x)\} = T_{\sigma}(v)$ ,

$$LFE_{\sigma}\{D_{0+}^{\sigma} f(x)\} = \frac{1}{v^{\sigma}} T_{\sigma}(v) - v^{\sigma} f(0), \quad 0 < \sigma \leq 1$$

ve

$$LFE_{\sigma}\{D_{0+}^{n\sigma} f(x)\} = \frac{1}{v^{n\sigma}} T_{\sigma}(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{(k-n+2)\sigma} f_{(0)}^{(k\sigma)}, \quad 0 < \sigma \leq 1$$

**Teorem1.6.3.3.** (Ziane ve Cherif, 2021) Local kesirli integralin Elzaki dönüşümü

$$LFE_{\sigma}\{\mathcal{f}(x)\} = T_{\sigma}(v), \text{ bu yüzden}$$

$$LFE_{\sigma}\{ {}_0I_x^{\sigma} \mathcal{f}(x) \} = v^{\sigma} T_{\sigma}(v).$$

**Teorem1.6.3.4.** (Ahmad vd., 2015; Yang, 2012; Jumarie, 2009) Bazı özel fonksiyonların Local Kesirli Elzaki Dönüşümleri aşağıda verilmiştir;

$$\text{i) } \mathcal{f}(x) = 1, E_{\sigma}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k\sigma}}{\Gamma(1+k\sigma)}$$

$$LFE_{\sigma}\{1\} = T_{\sigma}(v) = \frac{v^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} \int_0^{\infty} E_{\sigma}\left(\frac{-x^{\sigma}}{v^{\sigma}}\right) 1(dx)^{\sigma}$$

$$LFE_{\sigma}\{1\} = \frac{v^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} E_{\sigma}\left(\frac{-x^{\sigma}}{v^{\sigma}}\right) (dx)^{\sigma}$$

$$LFE_{\sigma}\{1\} = \frac{v^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{-1}{v^{\sigma}}} E_{\sigma}\left(\frac{-x^{\sigma}}{v^{\sigma}}\right) \Gamma(1+\sigma) \Big|_0^t$$

$$LFE_{\sigma}\{1\} = v^{\sigma} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} -v^{\sigma} E_{\sigma}\left(\frac{-t^{\sigma}}{v^{\sigma}}\right) + v^{\sigma} E_{\sigma}(0) \right]$$

$$LFE_{\sigma}\{1\} = v^{\sigma} v^{\sigma} = v^{2\sigma}.$$

$$\text{ii) } LFE_{\sigma}\{x^{\sigma}\} = \Gamma(1+\sigma) v^{3\sigma}$$

$$LFE_{\sigma}\left\{\frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)}\right\} = v^{3\sigma}.$$

$$LFE_{\sigma}\{x^{n\sigma}\} = \Gamma(1 + \sigma)v^{2\sigma+n\sigma}.$$

$$\text{iii) } f(x) = E_{\sigma}((ax)^{\sigma})$$

$$LFE_{\sigma}\{E_{\sigma}((ax)^{\sigma})\} = \frac{v^{2\sigma}}{1-(av)^{\sigma}}.$$

$$\text{iv) } f(x) = \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)}E_{\sigma}((ax)^{\sigma})$$

$$LFE_{\sigma}\left\{\frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)}E_{\sigma}((ax)^{\sigma})\right\} = \frac{v^{3\sigma}}{(1-(av)^{\sigma})^2}.$$

#### 1.6.4. Analiz ve Fonsiyonel Analizle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar

**Tanım 1.6.4.1.** Bir metrik uzay, boş olmayan bir  $G$  kümesi ve bir metrik (veya uzaklık)  $d: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonundan oluşan bir  $(G, d)$  çifttir, öyle ki  $G$ 'deki tüm  $x, y, z$  için aşağıdaki koşullar geçerlidir (Maddox, 1970).

- a)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetri)
- c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (üçgen eşitsizliği)

**Tanım 1.6.4.2.**  $G$ , boş olmayan bir küme ve  $K$  ( $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$ ) bir cisim olsun. Eğer  $x, y, z \in G$  ve  $\lambda, \beta \in K$  için

$$\begin{aligned} + : G \times G &\rightarrow G, & (x, y) &\rightarrow x + y \\ \cdot : K \times G &\rightarrow G, & (\lambda, y) &\rightarrow \lambda y \end{aligned}$$

fonksiyonları tanımlansın.  $\forall x, y, z \in G$  ve  $\lambda, \beta \in K$  için

- a)  $x + y = y + x$
- b)  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- c)  $\forall x \in G$  için  $x + 0 = 0 + x = x$  olacak şekilde bir  $0 \in G$  vardır.

d)  $\forall x \in G$  için  $x + (-x) = (-x) + x = \theta$  olacak şekilde bir  $(-x) \in G$  vardır.

e)  $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

f)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

g)  $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$

h)  $1 \cdot x = x$

koşulları sağlanıyorsa o zaman  $G$ 'ye  $K$  cismi üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzay denir. Lineer uzay tanımında  $K$  cismine lineer uzayın skaler cismi,  $K$ 'nin elemanlarına skaler denir.  $G$ 'nin elemanları ise vektör olarak adlandırılır (Maddox, 1970).

**Tanım 1.6.4.3.**  $G$ , boş olmayan bir küme ve  $K(\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C})$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| = G \rightarrow \mathbb{R}$$

Fonksiyonu  $\forall x, y \in G$  ve  $\forall \alpha \in K$  için

a)  $\|x\| \geq 0$

b)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

c)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

d)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlarsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $G$  üzerinde bir norm ve  $(G, \|\cdot\|)$  ikilisine de normlu vektör uzay (normlu uzay) denir (Maddox, 1970).

**Tanım 1.6.4.4.**  $G$  normlu uzay ve  $(u_m)$ ,  $G$ 'de bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $m > m_0$  olduğunda  $\|u_m - u\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $m_0 \in \mathbb{N}$  varsa,  $(u_m)$  dizisine  $G$ 'de yakınsak dizi denir ve  $\lim_m u_m = u$  veya  $u_m \rightarrow u$  şeklinde gösterilir (Kreyszig, 1978).

**Teorem 1.6.4.5.**  $B, \sum_{i=1}^{\infty} u_i$  serisinin tanımlandığı uygun bir  $\|\cdot\|$  normu ile gösterilen bir Banach uzayı olsun ve ilk tahmin  $y_0 = u_0$  'nin  $y(x)$  çözüm topunun içinde kaldığını varsayalım.  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  seri çözümü, (Bildik, 2017)  $\|u_{n+1}\| \leq r \|u_n\|$  olacak şekilde  $r$  varsa yakınsar.

## 2. UYGULAMALAR

### Örnek-2.1.

$\sigma$  mertebeden local kesirli diferansiyel denklem düşünelim.

$$\frac{d^\sigma U(x)}{dx^\sigma} - U(x) = 1, \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (21)$$

başlangıç koşulu  $U(0) = 0$  olan lokal kesirli denklemin çözümünü Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde ediniz.

### Çözüm:

(21) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_\sigma \left\{ \frac{d^\sigma U(x)}{dx^\sigma} \right\} - LFE_\sigma \{U(x)\} = LFE_\sigma \{1\}$$

$$\frac{1}{v^\sigma} LFE_\sigma \{U(x)\} - v^\sigma U(0) - LFE_\sigma \{U(x)\} = v^{2\sigma}$$

$$LFE_\sigma \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^\sigma} - 1 \right\} = v^{2\sigma}$$

$$LFE_\sigma \{U(x)\} = \frac{v^{3\sigma}}{1-v^\sigma} = \frac{v^{2\sigma}}{1-v^\sigma} - v^{2\sigma} \quad (22)$$

elde edilir.

(22) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınır,

$$LFE_\sigma^{-1} \{LFE_\sigma \{U(x)\}\} = LFE_\sigma^{-1} \left\{ \frac{v^{2\sigma}}{1-v^\sigma} \right\} - LFE_\sigma^{-1} \{v^{2\sigma}\}$$

$$U(x) = E_\sigma(x^\sigma) - 1$$

genel çözüm bulunur.

Eğer  $\sigma = 1$  seçilirse,  $U(x) = e^x - 1$ .

## Örnek-2.2.

$$\frac{d^\sigma U(x)}{dx^\sigma} - 3U(x) = 9, \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (23)$$

başlangıç koşulu  $U(0) = 0$  olan lokal kesirli denklemin çözümünü Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde ediniz.

### Çözüm:

(23) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_\sigma \left\{ \frac{d^\sigma U(x)}{dx^\sigma} \right\} - LFE_\sigma 3\{U(x)\} = LFE_\sigma \{9\}$$

$$\frac{1}{v^\sigma} LFE_\sigma \{U(x)\} - v^\sigma U(0) - LFE_\sigma 3\{U(x)\} = 9v^{2\sigma}$$

$$LFE_\sigma \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^\sigma} - 3 \right\} = 9v^{2\sigma}$$

$$LFE_\sigma \{U(x)\} = \frac{9v^{3\sigma}}{1-3v^\sigma} = 3 \left( \frac{v^{2\sigma}}{1-3v^\sigma} - v^{2\sigma} \right) \quad (24)$$

elde edilir.

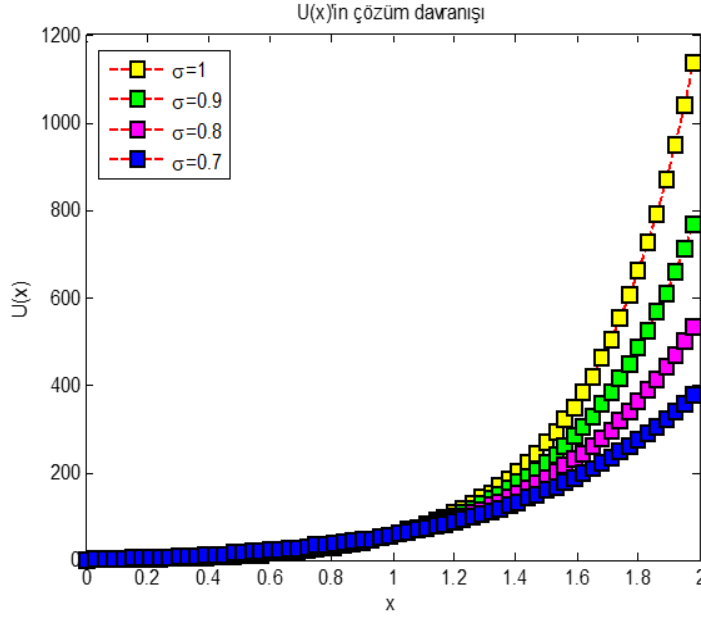
(24) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınır,

$$U(x) = LFE_\sigma^{-1} \left\{ 3 \frac{v^{2\sigma}}{1-3v^\sigma} \right\} - 3LFE_\sigma^{-1} \{v^{2\sigma}\}$$

$$U(x) = 3E_\sigma(3x^\sigma) - 3$$

genel çözüm bulunur.

$$\text{Eğer } \sigma = 1 \text{ seçilirse, } U(x) = 3e^{3x} - 3.$$



Şekil 1.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$  için  $U(x)$ 'in çözüm davranışları

### Örnek-2.3.

$$\frac{d^{2\sigma}U(x)}{dx^{2\sigma}} + U(x) = -\frac{x^\sigma}{\Gamma(1+\sigma)}, \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (25)$$

başlangıç koşulları  $U(0) = 0$ ,  $U^{(\sigma)}(0) = 0$  ile verilen lokal kesirli denklemin çözümünü Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde ediniz.

### Çözüm:

(25) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_\sigma \left\{ \frac{d^{2\sigma}U(x)}{dx^{2\sigma}} \right\} + LFE_\sigma \{U(x)\} = -LFE_\sigma \left\{ \frac{x^\sigma}{\Gamma(1+\sigma)} \right\}$$

$$\frac{1}{v^{2\sigma}} LFE_\sigma \{U(x)\} - U(0) - v^\sigma U^{(\sigma)}(0) + LFE_\sigma \{U(x)\} = -v^{3\sigma}$$

$$LFE_\sigma \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^{2\sigma}} + 1 \right\} = -v^{3\sigma}$$

$$LFE_\sigma \{U(x)\} = -\frac{v^{5\sigma}}{1+v^{2\sigma}} = \frac{v^{3\sigma}}{1+v^{2\sigma}} - v^{3\sigma} \quad (26)$$

elde edilir.

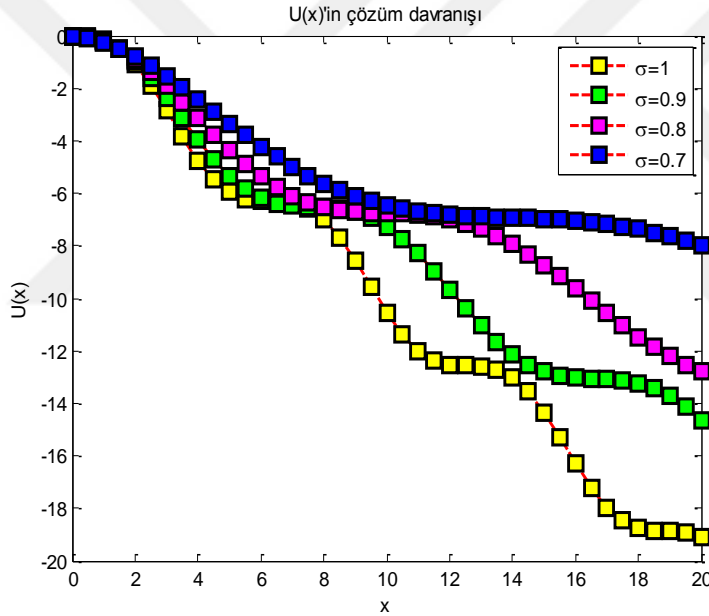
(26) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$U(x) = LFE_{\sigma}^{-1} \left\{ \frac{v^{3\sigma}}{1 + v^{2\sigma}} \right\} - LFE_{\sigma}^{-1} \{v^{3\sigma}\}$$

$$U(x) = \sin_{\sigma}(x^{\sigma}) - \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1 + \sigma)}$$

genel çözüm bulunur.

Eğer  $\sigma = 1$  seçilirse,  $U(x) = \sin(x) - x$ .



Şekil 2.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$  için  $U(x)$ 'in çözüm davranışları

#### Örnek-2.4.

$$\frac{d^{2\sigma}U(x)}{dx^{2\sigma}} + U(x) = 1, \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (27)$$

başlangıç koşulları  $U(0) = 1$ ,  $U^{(\sigma)}(0) = -1$  ile verilen lokal kesirli denklemin çözümünü Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde ediniz.

**Çözüm:**

(27) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^{2\sigma} U(x)}{dx^{2\sigma}} \right\} + LFE_{\sigma} \{U(x)\} = LFE_{\sigma} \{1\}$$

$$\frac{1}{v^{2\sigma}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} - U(0) - v^{\sigma} U^{(\sigma)} U(0) + LFE_{\sigma} \{U(x)\} = v^{2\sigma}$$

$$\frac{1}{v^{2\sigma}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} - 1 + v^{\sigma} + LFE_{\sigma} \{U(x)\} = v^{2\sigma}$$

$$\frac{1}{v^{2\sigma}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} + LFE_{\sigma} \{U(x)\} = v^{2\sigma} - v^{\sigma} + 1$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^{2\sigma}} + 1 \right\} = v^{2\sigma} - v^{\sigma} + 1$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = (v^{2\sigma} - v^{\sigma} + 1) \frac{v^{2\sigma}}{1 + v^{2\sigma}}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{v^{4\sigma} - v^{3\sigma} + v^{2\sigma}}{1 + v^{2\sigma}} = \frac{v^{2\sigma}(v^{2\sigma} + 1)}{1 + v^{2\sigma}} - \frac{v^{3\sigma}}{1 + v^{2\sigma}} \quad (28)$$

elde edilir.

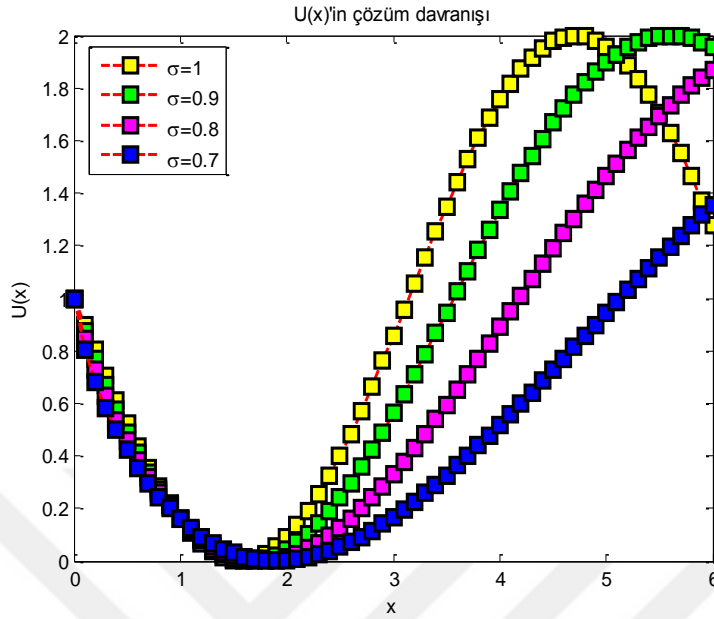
(28) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$U(x) = LFE_{\sigma}^{-1} \{v^{2\sigma}\} - LFE_{\sigma}^{-1} \left\{ \frac{v^{3\sigma}}{1 + v^{2\sigma}} \right\}$$

$$U(x) = 1 - \sin_{\sigma}(x^{\sigma})$$

genel çözüm bulunur.

Eğer  $\sigma = 1$  seçilirse,  $U(x) = 1 - \sin(x)$ .



Şekil 3.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$  için  $U(x)$ 'in çözüm davranışları

**Örnek-2.5.** Aşağıdaki örnek ile başlangıç koşulu ve katsayıları rastgele olan lokal kesirli mertebeden diferansiyel denklemi inceleyelim.

$$\frac{d^{2\sigma}U(x)}{dx^{2\sigma}} + BU(x) = AB, \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (29)$$

başlangıç koşulları  $U(0) = A$ ,  $U^{(\sigma)}(0) = B$  olmak üzere  $A \sim U(\alpha = 2, \beta = 3)$  düzgün dağılım,  $B \sim \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 4)$  beta dağılımına sahip rastgele değişkenleri için, verilen rastgele lokal diferansiyel denklemi Elzaki dönüşüm yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

**Çözüm:**

(29) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^{2\sigma} U(x)}{dx^{2\sigma}} \right\} + BLFE_{\sigma} \{U(x)\} = ABLFE_{\sigma} \{1\}$$

$$\frac{1}{v^{2\sigma}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} - U(0) - v^{\sigma} U^{(\sigma)} U(0) + BLFE_{\sigma} \{U(x)\} = ABv^{2\sigma}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^{2\sigma}} + B \right\} = A + Bv^{\sigma} + ABv^{2\sigma}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{ABv^{4\sigma} + Bv^{3\sigma} + Av^{2\sigma}}{1 + Bv^{2\sigma}}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{Av^{2\sigma}(Bv^{2\sigma}+1)}{1+Bv^{2\sigma}} + \frac{Bv^{3\sigma}}{1+Bv^{2\sigma}} \quad (30)$$

elde edilir.

(30) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$U(x) = ALFE_{\sigma}^{-1} \{v^{2\sigma}\} + BLFE_{\sigma}^{-1} \left\{ \frac{v^{3\sigma}}{1 + Bv^{2\sigma}} \right\}$$

$$U(x) = A + B \sin_{\sigma}(x^{\sigma})$$

elde edilir.

Eğer  $\sigma = 1$  seçilirse,  $U(x) = A + B \sin(x)$  tam çözüm elde edilir. Düzgün ve Beta dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E[A] = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{var}[A] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

$$\text{Beta}[B] = \frac{a}{a + b} \quad \text{var}[B] = \frac{ab}{(a + b)^2(a + b + 1)}$$

$U(x)$  çözümünün beklenen değer ve varyansı sırasıyla

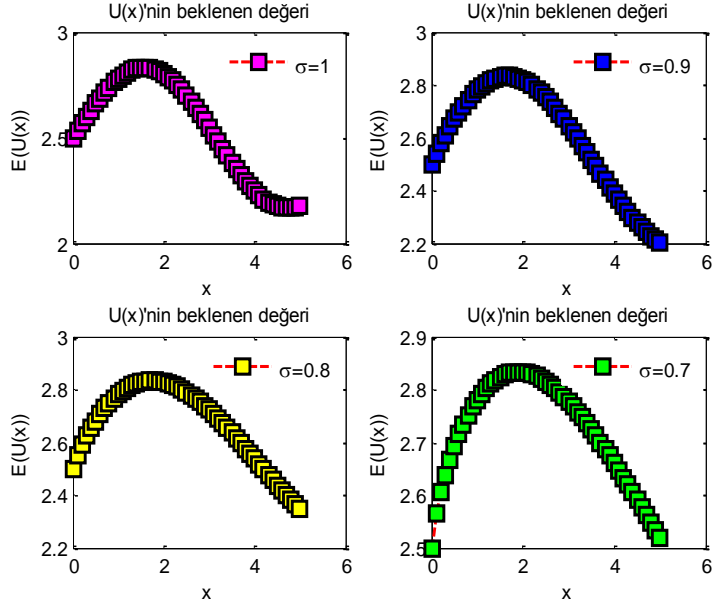
$$\begin{aligned} E[U(x)] &= E[A + B \sin_\sigma(x^\sigma)] = E[A] + \sin_\sigma(x^\sigma) E[B] \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin_\sigma(x^\sigma) \left( \frac{a}{a + b} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[U(x)] &= \text{Var}[A + B \sin_\sigma(x^\sigma)] \\ &= \text{Var}[A] \\ &\quad + \sin_\sigma^2(x^\sigma) \text{Var}[B] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + \frac{\sin_\sigma^2(x^\sigma)(ab)}{(a + b)^2(a + b + 1)} \end{aligned}$$

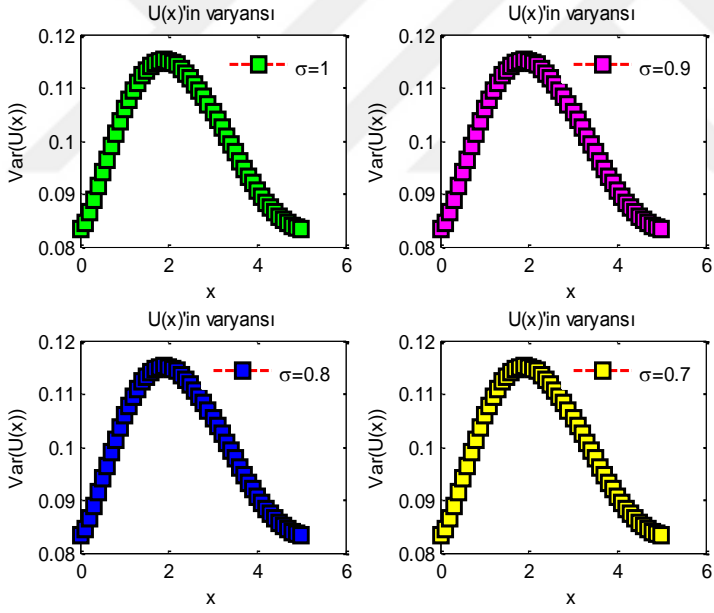
$\alpha = 2, \beta = 3, a = 2, b = 4$  özel değerleri için beklenen değer ve varyans;

$$E[U(x)] = \frac{3 + 2}{2} + \sin_\sigma(x^\sigma) \left( \frac{2}{2 + 4} \right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \sin_\sigma(x^\sigma)$$

$$\text{Var}[U(x)] = \frac{(2 - 3)^2}{12} + \frac{\sin_\sigma^2(x^\sigma)(2 \cdot 4)}{(2 + 4)^2(2 + 4 + 1)} = \frac{1}{12} + \frac{2}{63} \sin_\sigma^2(x^\sigma)$$



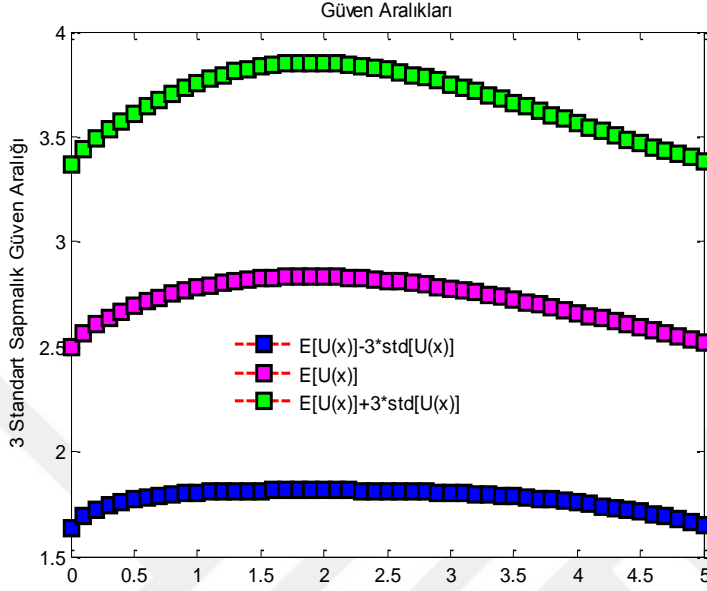
Şekil 4.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $1, \alpha = 2, \beta = 3, a = 2, b = 4$  özel değerleri için beklenen değer



Şekil 5.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $1, \alpha = 2, \beta = 3, a = 2, b = 4$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(u(x)) - 3stdsapma(u(x)), E(u(x)) + 3stdsapma(u(x))]$$



Şekil 6.  $\sigma = 0.9$  ve  $\alpha = 2, \beta = 3, a = 2, b = 4$  özel değerleri için güven aralıkları

### Örnek-2.6.

$$\frac{d^\sigma U(x)}{dx^\sigma} + U(x) = B, \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (31)$$

başlangıç koşulu  $U(0) = A$ , olmak üzere  $A \sim \text{Gamma}(\alpha = 1, \beta = 2)$  gamma dağılımı,  $B \sim \text{Beta}(a = 2, b = 3)$  beta dağılımına sahip rastgele değişkenleri için, verilen rastgele lokal diferansiyel denklemi Elzaki dönüşüm yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

### Çözüm:

(31) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^{\sigma} U(x)}{dx^{\sigma}} \right\} + LFE_{\sigma} \{U(x)\} = LFE_{\sigma} \{B\}$$

$$\frac{1}{v^{\sigma}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} - v^{\sigma} U(0) + LFE_{\sigma} \{U(x)\} = Bv^{2\sigma}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^{\sigma}} + 1 \right\} = Bv^{2\sigma} + Av^{\sigma}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = v^{\sigma} (Bv^{\sigma} + A) \frac{v^{\sigma}}{1 + v^{\sigma}}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = B \frac{v^{3\sigma}}{1 + v^{\sigma}} + A \frac{v^{2\sigma}}{1 + v^{\sigma}}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = -B \left( \frac{v^{2\sigma}}{1 + v^{\sigma}} - v^{2\sigma} \right) + A \frac{v^{2\sigma}}{1 + v^{\sigma}}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = (A - B) \frac{v^{2\sigma}}{1 + v^{\sigma}} + Bv^{2\sigma} \quad (32)$$

elde edilir.

(32) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$U(x) = (A - B)E_{\sigma}((-x)^{\sigma}) + B$$

elde edilir.

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  gamma dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, moment çıkarıcı fonksiyonu (Akdeniz, 2014; Khaniev vd., 2017).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \left( \frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\alpha}$$

$A \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı;

$$E[A] = \frac{\alpha}{\beta}, \text{Var}[A] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

$B \sim \text{Beta}(a, b)$  beta dağılımına sahip rastgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E(B) = \frac{a}{a+b}, \text{Var}(B) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Bu momentleri kullanarak  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkeninin  $E[XY] = E[X]E[Y]$ , beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

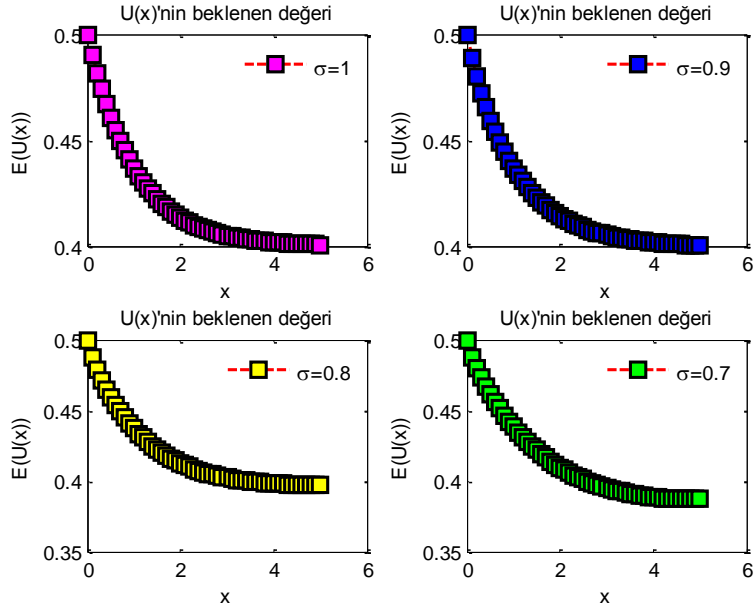
$$\begin{aligned} E[U(x)] &= E[(A - B)E_\sigma((-x)^\sigma) + B] \\ &= E_\sigma((-x)^\sigma)(E(A) - E(B)) + E(B) \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{a+b}\right) E_\sigma((-x)^\sigma) + \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[U(x)] &= \text{Var}[(A - B)E_\sigma((-x)^\sigma) + B] \\ &= E_\sigma((-x)^\sigma)^2(\text{Var}(A) + \text{Var}(B)) + \text{Var}(B) \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\right) E_\sigma((-x)^\sigma)^2 \\ &\quad + \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned}$$

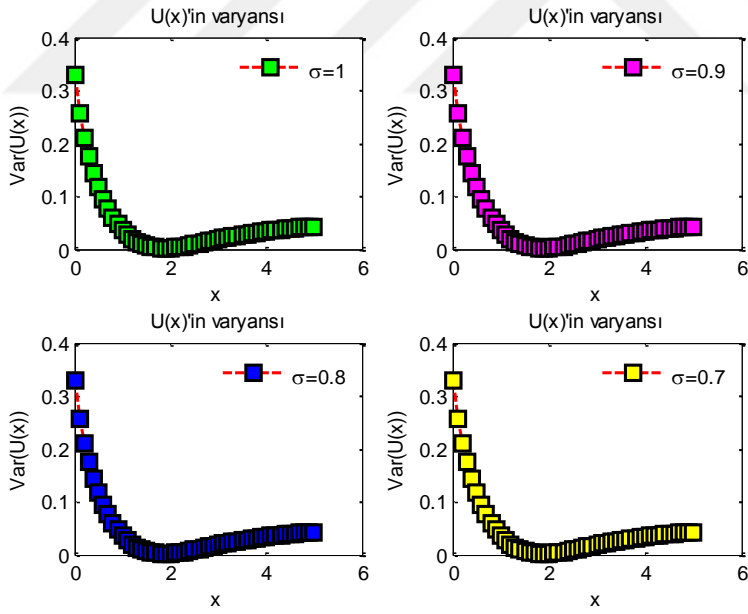
$\alpha = 1, \beta = 2, a = 2, b = 3$  özel değerleri için beklenen değer ve varyans;

$$E[U(x)] = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2+3}\right) E_\sigma((-x)^\sigma) + \frac{2}{2+3} = \frac{1}{10} E_\sigma((-x)^\sigma) + \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[U(x)] &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2.3}{(2+3)^2(2+3+1)}\right) E_\sigma((-x)^\sigma)^2 + \frac{2.3}{(2+3)^2(2+3+1)} = \\ &= \frac{29}{100} E_\sigma((-x)^\sigma)^2 + \frac{1}{25} \end{aligned}$$



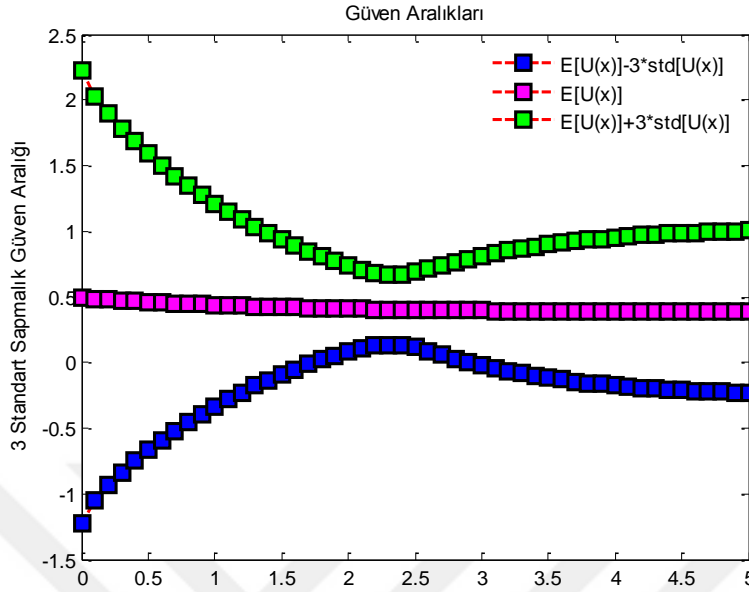
Şekil 7.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$ ,  $\alpha = 1, \beta = 2, a = 2, b = 3$  özel değerleri için beklenen değer



Şekil 8.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$ ,  $\alpha = 1, \beta = 2, a = 2, b = 3$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(u(x)) - 3stdsapma(u(x)), E(u(x)) + 3stdsapma(u(x))]$$



Şekil 9.  $\sigma = 0.9$  ve  $\alpha = 1, \beta = 2, a = 2, b = 3$  özel değerleri için güven aralıkları

### Örnek-2.7.

$$\frac{d^{2\sigma}U(x)}{dx^{2\sigma}} - 4\frac{d^{\sigma}U(x)}{dx^{\sigma}} + 3U(x) = \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)}, \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (33)$$

başlangıç koşulları  $U(0) = A, U^{(\sigma)}(0) = B$  olmak üzere  $A \sim \text{Exp}(\lambda = 2)$  üstel dağılım,  $B \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 4, c = 2)$  üçgensel dağılımına sahip rastgele değişkenleri için, verilen rastgele  $2\sigma$  mertebeden lokal diferansiyel denklemi Elzaki dönüşüm yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

### Çözüm:

(33) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^{2\sigma} U(x)}{dx^{2\sigma}} \right\} - 4LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^{\sigma} U(x)}{dx^{\sigma}} \right\} + 3LFE_{\sigma} \{U(x)\} = LFE_{\sigma} \left\{ \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} \right\}$$

$$\frac{1}{v^{2\sigma}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} - U(0) - v^{\sigma} U^{(\sigma)}(0) - 4 \frac{1}{v^{\sigma}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} + 4v^{\sigma} U(0) + 3LFE_{\sigma} \{U(x)\} = LFE_{\sigma} \left\{ \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} \right\}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^{2\sigma}} - \frac{4}{v^{\sigma}} + 3 \right\} = A + Bv^{\sigma} - 4Av^{\sigma} + v^{3\sigma}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = A + Bv^{\sigma} - 4Av^{\sigma} + v^{3\sigma} \left( \frac{v^{2\sigma}}{1-4v^{\sigma}+3v^{2\sigma}} \right)$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{Av^{2\sigma} + Bv^{3\sigma} - 4Av^{3\sigma} + v^{5\sigma}}{(1-3v^{\sigma})(1-v^{\sigma})}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{Av^{2\sigma} + (B-4A)v^{3\sigma} + v^{5\sigma}}{(1-3v^{\sigma})(1-v^{\sigma})}$$

$$\frac{1}{(1-3v^{\sigma})(1-v^{\sigma})} = \frac{K_1}{(1-3v^{\sigma})} + \frac{K_2}{(1-v^{\sigma})}$$

$$1 = K_1(1-v^{\sigma}) + K_2(1-3v^{\sigma})$$

$$1 = v^{\sigma}(-K_1 - 3K_2) + K_1 + K_2$$

$$K_1 = \frac{3}{2}, \quad K_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1-3v^\sigma)(1-v^\sigma)} = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{(1-3v^\sigma)} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1-v^\sigma)} \right]$$

$$LFE_\sigma\{U(x)\} = \frac{3}{2} \left( \frac{Av^{2\sigma} + (B-4A)v^{3\sigma} + v^{5\sigma}}{(1-3v^\sigma)} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Av^{2\sigma} + (B-4A)v^{3\sigma} + v^{5\sigma}}{(1-v^\sigma)} \right)$$

$$LFE_\sigma\{U(x)\} = \frac{3A}{2} \frac{v^{2\sigma}}{1-3v^\sigma} + \frac{3(B-4A)}{2} \frac{v^{3\sigma}}{1-3v^\sigma} + \frac{3}{2} \frac{v^{5\sigma}}{1-3v^\sigma} - \frac{A}{2} \frac{v^{2\sigma}}{(1-v^\sigma)} - \frac{(B-4A)}{2} \frac{v^{3\sigma}}{(1-v^\sigma)} - \frac{1}{2} \frac{v^{5\sigma}}{(1-v^\sigma)} \quad (34)$$

elde edilir.

(34) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{3A}{2} E_\sigma(3x^\sigma) - \frac{A}{2} E_\sigma(x^\sigma) + \frac{3(B-4A)}{2} LFE_\sigma^{-1} \left\{ -\frac{1}{3} v^{2\sigma} + \frac{1}{3} \frac{v^{2\sigma}}{1-3v^\sigma} \right\} \\ &+ \frac{3}{2} LFE_\sigma^{-1} \left\{ -\frac{1}{3} v^{4\sigma} - \frac{1}{9} v^{3\sigma} - \frac{1}{27} v^{2\sigma} + \frac{1}{27} \frac{v^{2\sigma}}{1-3v^\sigma} \right\} \\ &+ \frac{(4A-B)}{2} LFE_\sigma^{-1} \left\{ -v^{2\sigma} + \frac{v^{2\sigma}}{1-v^\sigma} \right\} \\ &- \frac{1}{2} LFE_\sigma^{-1} \left\{ -v^{4\sigma} - v^{3\sigma} - v^{2\sigma} + \frac{v^{2\sigma}}{1-v^\sigma} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{3A}{2} E_\sigma(3x^\sigma) - \frac{A}{2} E_\sigma(x^\sigma) + \frac{3(B-4A)}{2} \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} E_\sigma(3x^\sigma) \right\} \\ &+ \frac{3}{2} \left\{ -\frac{1}{3} \frac{x^{2\sigma}}{\Gamma(1+2\sigma)} - \frac{1}{9} \frac{x^\sigma}{\Gamma(1+\sigma)} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27} E_\sigma(3x^\sigma) \right\} \\ &+ \frac{(4A-B)}{2} \{-1 + E_\sigma(x^\sigma)\} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ -\frac{x^{2\sigma}}{\Gamma(1+2\sigma)} - \frac{x^\sigma}{\Gamma(1+\sigma)} - 1 + E_\sigma(x^\sigma) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(x) &= E_\sigma(x^\sigma) \left[ -\frac{A}{2} + 2A - \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \right] + E_\sigma(3x^\sigma) \left[ \frac{3A}{2} + \frac{B}{2} - 2A + \frac{1}{18} \right] \\
&\quad + x^{2\sigma} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(1+2\sigma)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(1+2\sigma)} \right] \\
&\quad + x^\sigma \left[ -\frac{1}{6} \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} \right] + 2A - \frac{B}{2} - \frac{1}{18} + \frac{B}{2} - 2A + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$U(x) = E_\sigma(x^\sigma) \left[ \frac{3A}{2} - \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \right] + E_\sigma(3x^\sigma) \left[ -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{1}{18} \right] + \frac{1}{3} \frac{x^\sigma}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{4}{9}$$

elde edilir.

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$  üstel dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, moment çıkaran fonksiyonu (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$A \sim \text{Exp}(\lambda)$  rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı;

$$E[A] = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}[A] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$X \sim \text{Üçg}(a, b, c)$  üçgensel dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, moment çıkaran fonksiyonu (Feller, 1968).

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

$B \sim \text{Üçg}(a, b, c)$  rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı

$$E[B] = \frac{(a+b+c)}{3}, \text{Var}[B] = \frac{a+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$$

Bu momentleri kullanarak  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkeninin  $E[XY] = E[X]E[Y]$ , beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$[U(x)] = E \left[ E_{\sigma}(x^{\sigma}) \left[ \frac{3A}{2} - \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \right] + E_{\sigma}(3x^{\sigma}) \left[ -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{1}{18} \right] + \frac{1}{3} \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{4}{9} \right]$$

$$[U(x)] = E_{\sigma}((x)^{\sigma}) \left[ \frac{3E[A]}{2} - \frac{E[B]}{2} - \frac{1}{2} \right] + E_{\sigma}(3x^{\sigma}) \left[ -\frac{E[A]}{2} + \frac{E[B]}{2} + \frac{1}{18} \right] + \frac{1}{3} \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{4}{9}$$

$$[U(x)] = E_{\sigma}((x)^{\sigma}) \left[ \frac{3}{2\lambda} - \frac{(a + b + c)}{6} - \frac{1}{2} \right] + E_{\sigma}(3x^{\sigma}) \left[ -\frac{1}{2\lambda} + \frac{(a + b + c)}{6} + \frac{1}{18} \right] + \frac{1}{3} \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{4}{9}$$

$$Var[U(x)] = Var \left[ E_{\sigma}(x^{\sigma}) \left[ \frac{3A}{2} - \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \right] + E_{\sigma}(3x^{\sigma}) \left[ -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{1}{18} \right] + \frac{1}{3} \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{4}{9} \right]$$

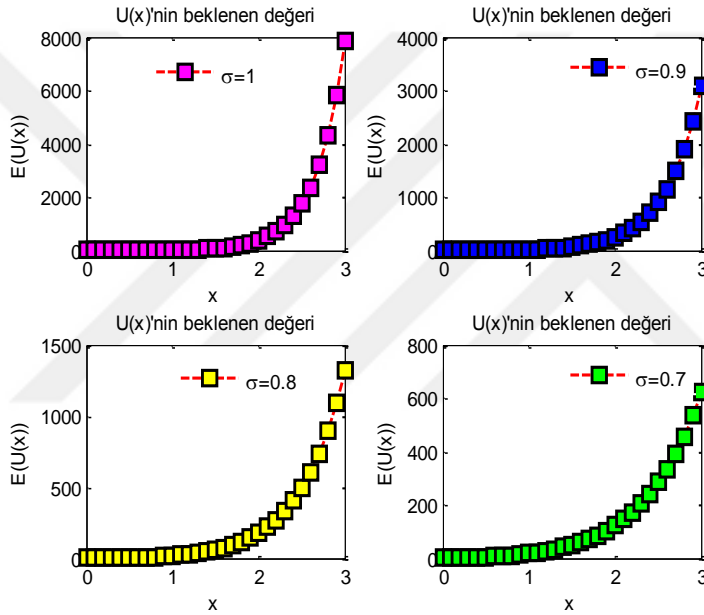
$$Var[U(x)] = E_{\sigma}((x)^{\sigma})^2 \left( \frac{9Var(A)}{4} + \frac{Var(B)}{4} \right) + E_{\sigma}(3x^{\sigma})^2 \left[ \frac{Var(A)}{4} + \frac{Var(B)}{4} \right]$$

$$Var[U(x)] = E_{\sigma}((x)^{\sigma})^2 \left( \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{72} \right) + E_{\sigma}(3x^{\sigma})^2 \left[ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{72} \right]$$

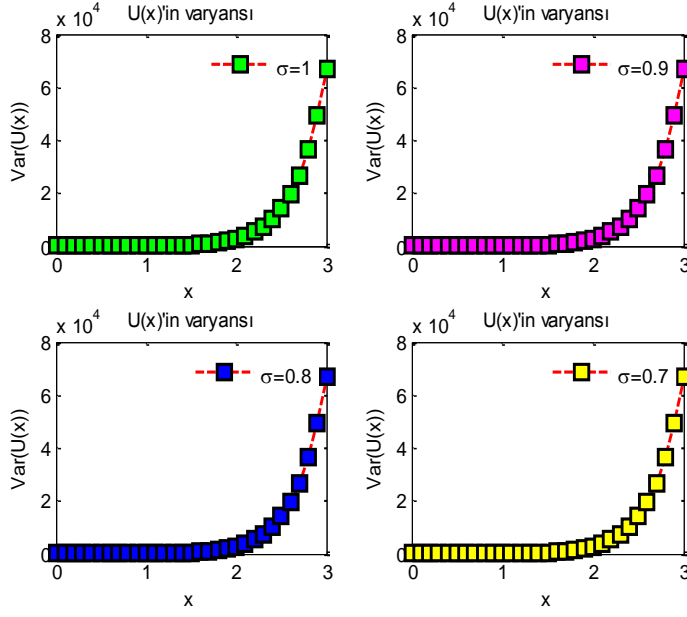
$\lambda = 2, a = 1, b = 4, c = 2$  özel değerleri için beklenen değer ve varyans;

$$\begin{aligned}
E[U(x)] &= E_{\sigma}((x)^{\sigma}) \left[ \frac{3}{2.2} - \frac{(1+2+4)}{6} - \frac{1}{2} \right] \\
&+ E_{\sigma}(3x^{\sigma}) \left[ -\frac{1}{2.2} + \frac{(1+2+4)}{6} + \frac{1}{18} \right] + \frac{1}{3} \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{4}{9} \\
&= \frac{-11E_{\sigma}((x)^{\sigma})}{12} + \frac{35E_{\sigma}(3x^{\sigma})}{36} + \frac{1}{3} \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} + \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[U(x)] &= E_{\sigma}((x)^{\sigma})^2 \left( \frac{9}{4.2^2} + \frac{1^2+4^2+2^2-1.4-1.2-4.2}{72} \right) + E_{\sigma}(3x^{\sigma})^2 \left[ \frac{1}{4.2^2} + \right. \\
&\left. \frac{1^2+4^2+2^2-1.4-1.2-4.2}{72} \right] = \frac{95E_{\sigma}((x)^{\sigma})^2 + 23E_{\sigma}(3x^{\sigma})^2}{144}
\end{aligned}$$



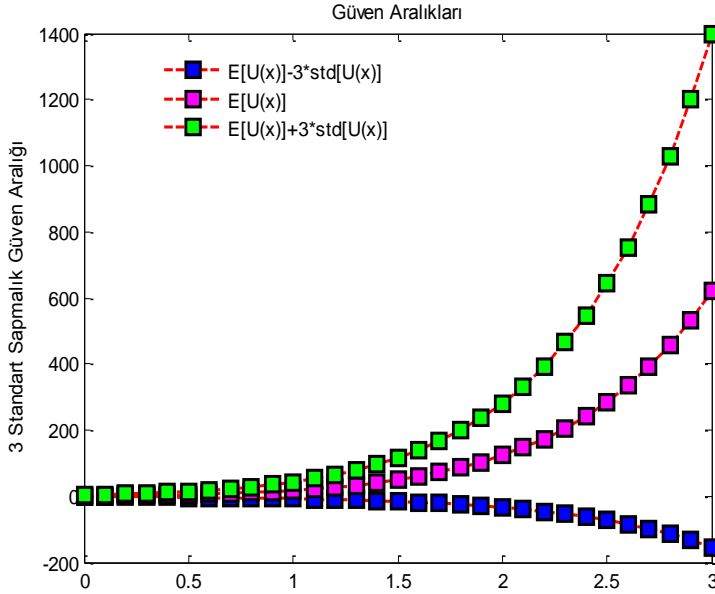
Şekil 10.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$ ,  $\lambda = 2, a = 1, b = 4, c = 2$  özel değerleri için beklenen değer



Şekil 11.  $\sigma = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$   $\lambda = 2, a = 1, b = 4, c = 2$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(u(x)) - 3\text{stdsapma}(u(x)), E(u(x)) + 3\text{stdsapma}(u(x))]$$



Şekil 12.  $\sigma = 0.9$  ve  $\lambda = 2, a = 1, b = 4, c = 2$  özel değerleri için güven aralıkları

## 2.1. Rastgele Bagley-Torvik Tipi Denklemler

Bagley-Torvik denklemi, matematiksel fizik ve matematiksel biyoloji alanlarında kullanılan diferansiyel denklemlerden biridir. Bu denklem, viskoelastik malzemelerin dinamik davranışını modelleme amacı taşır ve özellikle uzun süreli deformasyon ve gevşeme olaylarını incelemek için kullanılır. Bagley-Torvik denklemi, geleneksel diferansiyel denklemlerden farklı olarak kesirli türev içerdiği için özel analitik ve sayısal yöntemlerle çözülür.

Bu bölümde kesirli mertebeden rastgele Bagley-Torvik denklemini ele alalım (Bagley ve Torvik, 1984).

Bagley-Torvik denklemi aşağıdaki gibi ele alınabilir.

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + c D^\sigma u(x) + ku(x) = f(x) \\ u(0) = \delta_0, \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \delta_1 \end{cases} \quad \sigma = \frac{1}{2} \text{ ya da } \sigma = \frac{3}{2}$$

burada  $m, c, k, f(x)$  ve  $u(x)$  sırasıyla kütleyi, sönümü, rijitlik katsayılarını, dış kuvveti ve yer değiştirme fonksiyonunu belirtir.  $\frac{d^\sigma u}{dx^\sigma}$ ,  $\sigma \in (0,2)$  mertebesindeki KT(kesirli türev)'dir. Burada  $\delta_0$  ve  $\delta_1$  reel sabitlerdir.

### Örnek-2.8.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + D^{\frac{1}{2}} U(x) + U(x) &= \frac{35A}{4} x^{\frac{3}{2}} + \frac{35A\sqrt{\pi}}{32} x^3 + Ax^{\frac{7}{2}} \\ U(0) = 0, \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

başlangıç koşulları, olmak üzere  $A \sim Weibull(\xi = 1, \zeta = 4)$  Weibull dağılımına sahip rastgele değişken için, verilen rastgele  $\frac{1}{2}$  mertebeden lokal türevli Bagley-Torvik diferansiyel denklemini Elzaki dönüşüm yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

**Çözüm:**

(35) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right\} + LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^{\frac{1}{2}} U(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} \right\} + LFE_{\sigma} \{U(x)\} \\ = LFE_{\sigma} \left\{ \frac{35A}{4} x^{\frac{3}{2}} + \frac{35A\sqrt{\pi}}{32} x^3 + Ax^{\frac{7}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} LFE_{\sigma} \{U(x)\} - U(0) - vU'(0) + \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} LFE_{\sigma} \{U(x)\} - v^{\frac{1}{2}} U(0) \\ + LFE_{\sigma} \{U(x)\} = LFE_{\sigma} \left\{ \frac{35A}{4} x^{\frac{3}{2}} + \frac{35A\sqrt{\pi}}{32} x^3 + Ax^{\frac{7}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} + 1 \right\} = \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} v^{\frac{7}{2}} + \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} v^5 + \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} v^{\frac{11}{2}}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{\frac{105A\sqrt{\pi}}{16} v^{\frac{11}{2}} + \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} v^7 + \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} v^{\frac{15}{2}}}{1 + v^{\frac{3}{2}} + v^2}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{\frac{105A\sqrt{\pi}}{16} \left( v^{\frac{11}{2}} + v^7 + v^{\frac{15}{2}} \right)}{1 + v^{\frac{3}{2}} + v^2}$$

$$LFE_{\sigma} \{U(x)\} = \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} v^{\frac{11}{2}} \quad (36)$$

elde edilir.

(36) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$U(x) = \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{7}{2}\right)} x^{\frac{7}{2}}$$

$$U(x) = \frac{105A\sqrt{\pi}}{16} \frac{16}{105\sqrt{\pi}} x^{\frac{7}{2}}$$

$$U(x) = Ax^{\frac{7}{2}}$$

elde edilir.

$X \sim (\xi, \zeta)$  Weibull dağılımına sahip rastgele değişken olsun (Weibull, 1951).

Weibull dağılımı için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(X) = \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{\xi}}} \frac{1}{\xi} \Gamma\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

$$Var(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\xi}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{\zeta^{\frac{2}{\xi}}}$$

Bu momentleri kullanarak  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkeninin  $E[XY] = E[X]E[Y]$ , beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$E[U(x)] = E\left[Ax^{\frac{7}{2}}\right]$$

$$E[U(x)] = E[A]x^{\frac{7}{2}}$$

$$E[U(x)] = \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{\xi}}} \frac{1}{\xi} \Gamma\left(\frac{1}{\xi}\right) x^{\frac{7}{2}}$$

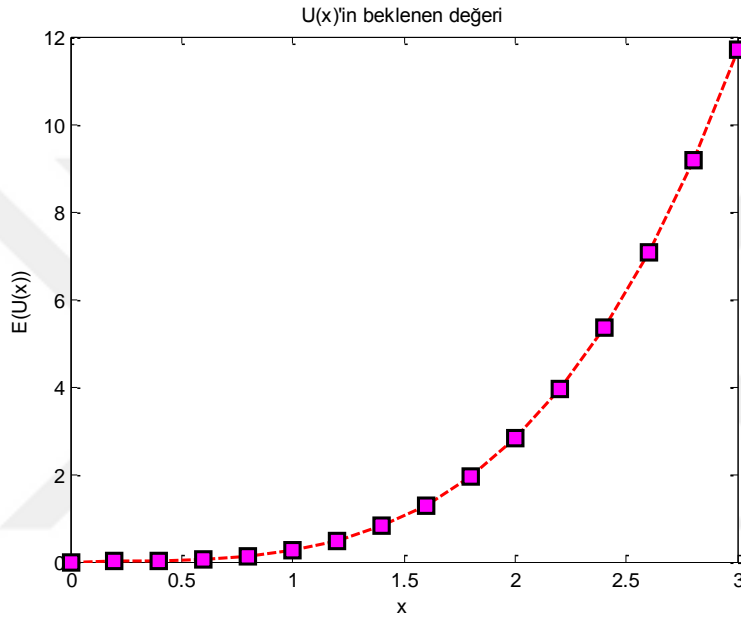
$$Var[U(x)] = Var\left[Ax^{\frac{7}{2}}\right]$$

$$Var[U(x)] = Var[A] \left(x^{\frac{7}{2}}\right)^2$$

$$Var[U(x)] = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\xi}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{\zeta^{\frac{2}{\xi}}} \left(x^{\frac{7}{\xi}}\right)^2$$

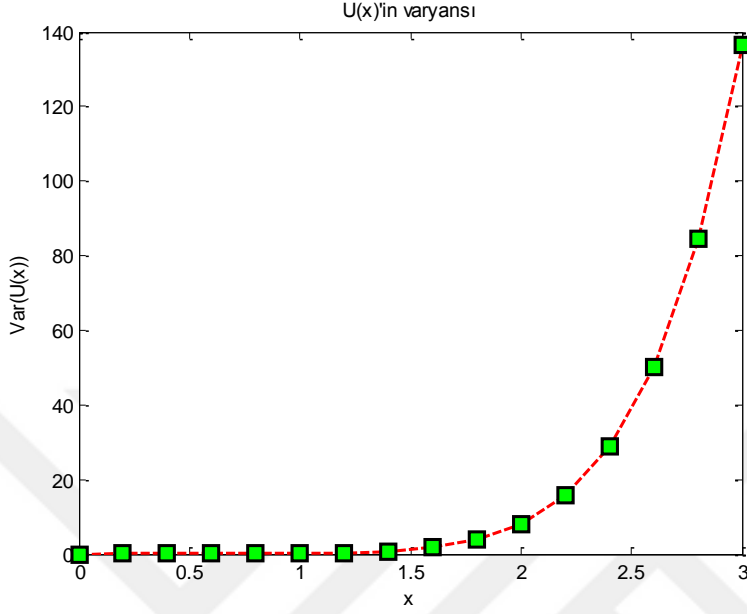
$\xi = 1, \zeta = 4$  özel değerleri için beklenen değer ve varyans;

$$E[U(x)] = \frac{1}{4^{\frac{1}{1}}} \frac{1}{1} \Gamma\left(\frac{1}{1}\right) x^{\frac{7}{1}} = \frac{1}{4} x^7$$



Şekil 13.  $\xi = 1, \zeta = 4$  özel değerleri için beklenen değer

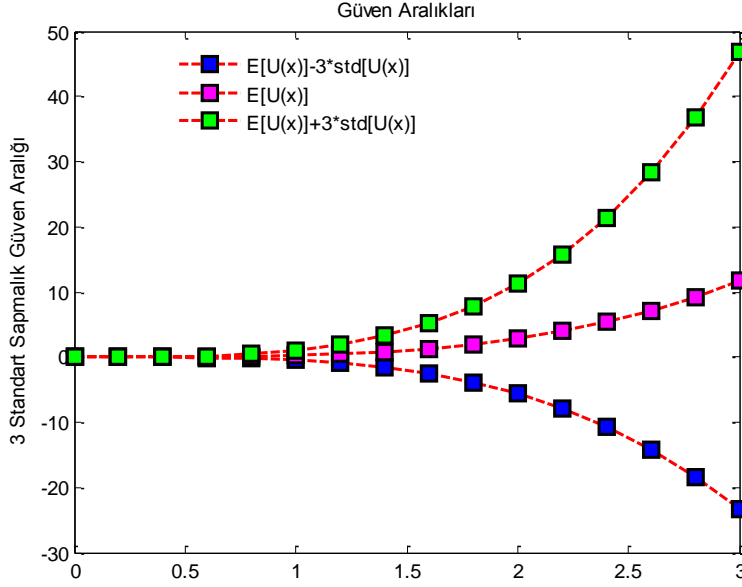
$$Var[U(x)] = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{1}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{1}\right)}{4^{\frac{2}{1}}} x^7 = \frac{1}{16} x^7$$



Şekil 14.  $\xi = 1, \zeta = 4$  özel değerleri için beklenen değer

Güven aralıkları

$$[E(u(x, t)) - 3stdsapma(u(x, t)), E(u(x, t)) + 3stdsapma(u(x, t))]$$



Şekil 15.  $\xi = 1, \zeta = 4$  özel değerleri için güven aralıkları

### Örnek-2.9.

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + D^{\frac{3}{2}} U(x) + U(x) = 12Bx^2 + Bx^4 + \frac{64B}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}$$

$$U(0) = 0, \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (37)$$

başlangıç koşulları, olmak üzere,  $B \sim \text{Laplace}(\mu = 1, b = 3)$  Laplace dağılımına sahip rastgele değişken için, verilen rastgele  $\frac{3}{2}$  mertebeden lokal türevli Bagley-Torvik diferansiyel denklemini Elzaki dönüşüm yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

### Çözüm:

(37) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right\} + LFE_{\sigma} \left\{ \frac{d^{\frac{3}{2}} U(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} \right\} + LFE_{\sigma} \{U(x)\}$$

$$= LFE_{\sigma} \left\{ 12Bx^2 + Bx^4 + \frac{64B}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} LFE_{\sigma}\{U(x)\} - U(0) - vU'(0) + \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} LFE_{\sigma}\{U(x)\} - v^{\frac{3}{2}}U(0) \\ & + LFE_{\sigma}\{U(x)\} = LFE_{\sigma}\left\{12Bx^2 + Bx^4 + \frac{64B}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\right\} \end{aligned}$$

$$LFE_{\sigma}\{U(x)\} \left\{ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} + 1 \right\} = 24Bv^4 + 24Bv^6 + 24Bv^{\frac{9}{2}}$$

$$LFE_{\sigma}\{U(x)\} = \frac{24Bv^6 + 24Bv^8 + 24Bv^{\frac{13}{2}}}{1 + v^{\frac{1}{2}} + v^2}$$

$$LFE_{\sigma}\{U(x)\} = \frac{24B \left( v^6 + v^8 + v^{\frac{13}{2}} \right)}{1 + v^{\frac{1}{2}} + v^2}$$

$$LFE_{\sigma}\{U(x)\} = 24Bv^6 \quad (38)$$

elde edilir.

(38) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$U(x) = 24B \frac{1}{\Gamma(1+4)} x^4$$

$$U(x) = 24B \frac{1}{24} x^4$$

$$U(x) = Bx^4$$

elde edilir.

$X \sim \text{Laplace}(\mu, b)$  Laplace dağılımına sahip rastgele değişken olsun. Laplace dağılımı için moment çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\mu t}}{1 - b^2 t^2}, t \in \left( -\frac{1}{b}, \frac{1}{b} \right)$$

Laplace dağılımı için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = 2b^2.$$

Bu momentleri kullanarak  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkeninin  $E[XY] = E[X]E[Y]$ , beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$E[U(x)] = E[Bx^4]$$

$$E[U(x)] = E[B]x^4$$

$$E[U(x)] = \mu x^4$$

$$Var[U(x)] = Var[Bx^4]$$

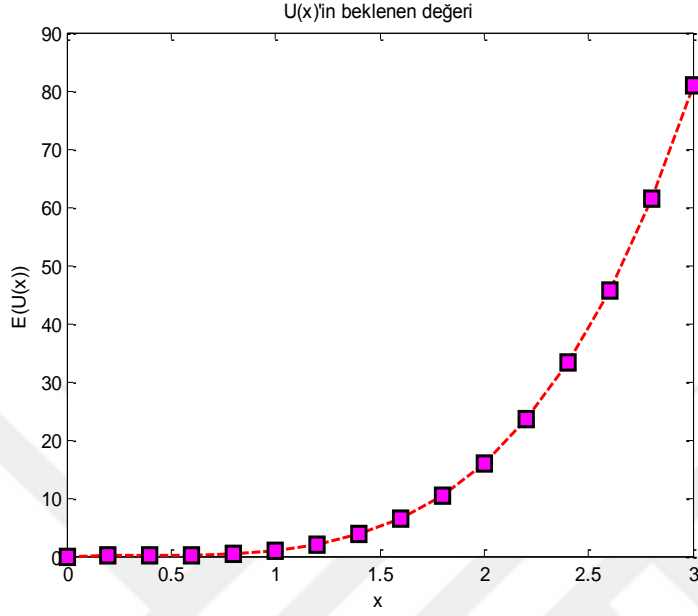
$$Var[U(x)] = Var[B](x^4)^2$$

$$Var[U(x)] = 2b^2(x^4)^2$$

$$Var[U(x)] = 2b^2x^8$$

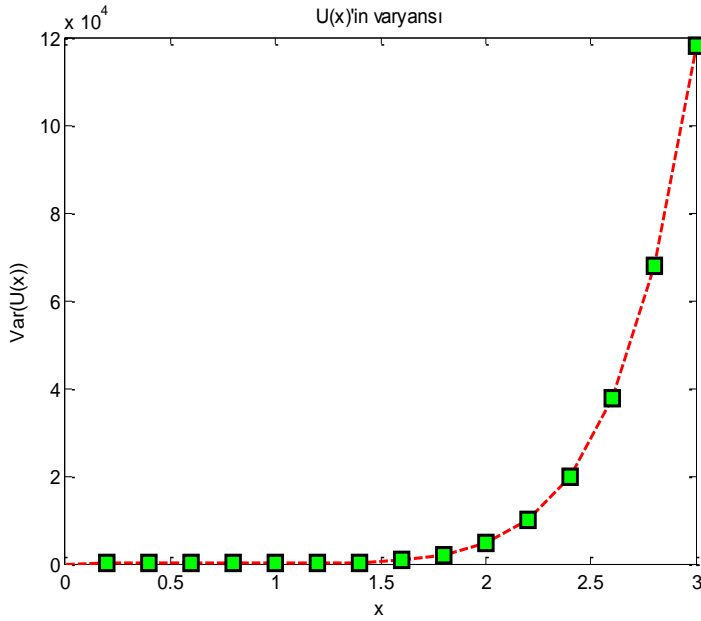
$\mu = 1, b = 3$  özel değerleri için beklenen değer ve varyans;

$$E[U(x)] = x^4$$



Şekil 16.  $\mu = 1, b = 3$  özel değerleri için beklenen değer

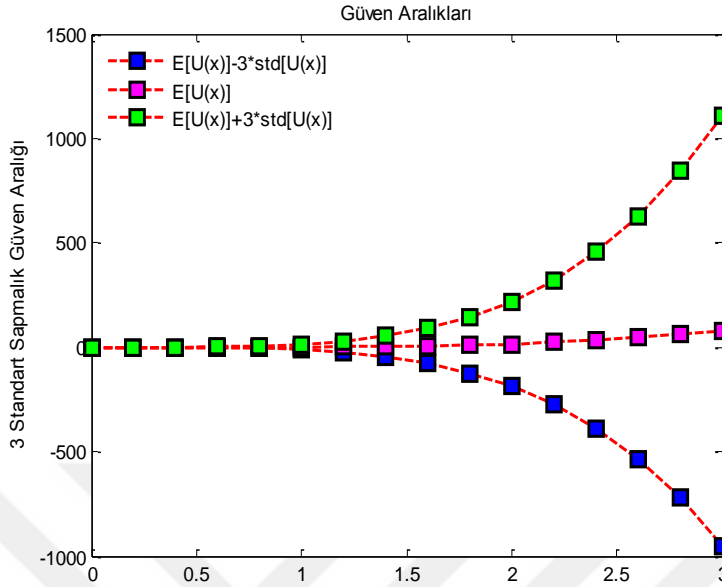
$$Var[U(x)] = 18x^8$$



Şekil 17.  $\mu = 1, b = 3$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(U(x)) - 3stdsapma(U(x)), E(U(x)) + 3stdsapma(U(x))]$$



Şekil 18.  $\mu = 1, b = 3$  özel değerleri için güven aralıkları

### Katsayıları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri

**Örnek-2.10.** Aşağıdaki örnek ile kesirli merteben rastgele adi diferansiyel denklem sisteminin Elzaki Dönüşüm Yöntemi kullanarak çözümünü inceleyelim.

$$D_*^\alpha x(t) = Ax - By$$

$$D_*^\alpha y(t) = -Ax + By \quad (39)$$

$x(0) = 1, y(0) = -1$  başlangıç koşulları olmak üzere,  $A \sim \text{Üstel}(\lambda) \rightarrow A \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$  üstel dağılıma sahip,  $B \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow B \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$  Normal dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Elzaki Dönüşüm Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

**Çözüm:**

(39) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_{\alpha} \left[ \frac{d^{\alpha} x}{dt^{\alpha}} \right] = LFE_{\alpha}[Ax] - LFE_{\alpha}[By]$$

$$LFE_{\alpha} \left[ \frac{d^{\alpha} y}{dt^{\alpha}} \right] = LFE_{\alpha}[-Ax] + LFE_{\alpha}[By]$$

$$\frac{1}{v^{\alpha}} LFE_{\alpha}\{x(t)\} - v^{\alpha} x(0) = ALFE_{\alpha}\{x(t)\} - BLFE_{\alpha}\{y(t)\}$$

$$\frac{1}{v^{\alpha}} LFE_{\alpha}\{y(t)\} - v^{\alpha} y(0) = -ALFE_{\alpha}\{x(t)\} + BLFE_{\alpha}\{y(t)\}$$

$$\left[ \frac{1}{v^{\alpha}} - A \right] LFE_{\alpha}\{x(t)\} + BLFE_{\alpha}\{y(t)\} = v^{\alpha}$$

$$ALFE_{\alpha}\{x(t)\} + \left[ \frac{1}{v^{\alpha}} - B \right] LFE_{\alpha}\{y(t)\} = -v^{\alpha}$$

Cramer yöntemi ile;

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{v^{\alpha}} - A & B \\ A & \frac{1}{v^{\alpha}} - B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LFE_{\alpha}\{x(t)\} \\ LFE_{\alpha}\{y(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{\alpha} \\ -v^{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$LFE_{\alpha}\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} v^{\alpha} & B \\ -v^{\alpha} & \frac{1}{v^{\alpha}} - B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{v^{\alpha}} - A & B \\ A & \frac{1}{v^{\alpha}} - B \end{vmatrix}} = \frac{\frac{v^{\alpha}}{v^{\alpha}} - Bv^{\alpha} + Bv^{\alpha}}{\frac{1}{v^{\alpha}} - \frac{B}{v^{\alpha}} - \frac{A}{v^{\alpha}} + AB - AB} = \frac{1}{\frac{1}{v^{\alpha}} - \frac{B}{v^{\alpha}} - \frac{A}{v^{\alpha}}} \quad (40)$$

elde edilir.

(40) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınır,

$$x(t) = E^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{B}{v^\alpha} - \frac{A}{v^\alpha}} \right]$$

$$x(t) = E^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1-Bv^\alpha-Av^\alpha}{v^{2\alpha}}} \right]$$

$$x(t) = E^{-1} \left[ \frac{v^{2\alpha}}{1-Bv^\alpha-Av^\alpha} \right]$$

$$x(t) = E^{-1} \left[ \frac{(v^\alpha)^2}{1-(A+B)v^\alpha} \right]$$

$x(t) = E_\alpha((A+B)t^\alpha)$  ifadesinde,  $\alpha = 1$  seçilirse  $x(t) = e^{(A+B)t}$  elde edilir.

Taylor serisi açılımı,

$$x(t) = 1 + \frac{(A+B)t}{1!} + \frac{(A+B)^2 t^2}{2!} + \frac{(A+B)^3 t^3}{3!} + O(t^4)$$

elde edilir.

$$LFE_\alpha\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{v^\alpha}-A & v^\alpha \\ A & -v^\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{v^\alpha}-A & B \\ A & \frac{1}{v^\alpha}-B \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{v^\alpha}{v^\alpha} + Av^\alpha - Av^\alpha}{\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{B}{v^\alpha} - \frac{A}{v^\alpha} + AB - AB} = \frac{-1}{\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{B}{v^\alpha} - \frac{A}{v^\alpha}} \quad (41)$$

elde edilir.

(41) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$y(t) = E^{-1} \left[ -\frac{1}{\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{B}{v^\alpha} - \frac{A}{v^\alpha}} \right]$$

$$y(t) = E^{-1} \left[ -\frac{1}{\frac{1-Bv^\alpha-Av^\alpha}{v^{2\alpha}}} \right]$$

$$y(t) = E^{-1} \left[ -\frac{v^{2\alpha}}{1-Bv^\alpha-Av^\alpha} \right]$$

$$y(t) = E^{-1} \left[ -\frac{(v^\alpha)^2}{1-(A+B)v^\alpha} \right]$$

$y(t) = -E_\alpha((A+B)t^\alpha)$  ifadesinde,  $\alpha = 1$  seçilirse  $y(t) = -e^{(A+B)t}$  elde edilir.

$y(t) = -e^{(A+B)t}$  ifadesinin Taylor serisi açılımı

$$y(t) = - \left[ 1 + \frac{(A+B)t}{1!} + \frac{(A+B)^2 t^2}{2!} + \frac{(A+B)^3 t^3}{3!} + O(t^4) \right]$$

elde edilir.  $A \sim \text{Üstel}(\lambda)$  üstel dağılımına sahip rastgele değişken olsun. Üstel dağılımı için moment çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda-t}, t < \lambda$$

Üstel dağılımı için momentler ve varyanslar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(A) = \frac{1}{\lambda}, E(A^2) = \frac{2!}{\lambda^2}, \dots, E(A^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$\text{Var}(A) = \frac{1}{\lambda^2}, \text{Var}(A^2) = \frac{20}{\lambda^4}, \text{Var}(A^3) = \frac{684}{\lambda^6}$$

$B \sim N(\mu, \sigma^2)$  normal dağılımına sahip rastgele değişken olsun. Normal dağılımı için moment çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Normal dağılımı için momentler ve varyanslar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(B) = \mu, E(B^2) = \sigma^2 + \mu^2, E(B^3) = 3\sigma^2\mu + \mu^3, E(B^4)$$

$$= 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4,$$

$$E(B^5) = 15\sigma^4\mu + 10\sigma^2\mu^3 + \mu^5, E(B^6)$$

$$= 15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6$$

$$\text{Var}(B) = \sigma^2, \text{Var}(B^2) = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2, \text{Var}(B^3)$$

$$= 15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4$$

$$\text{Var}[AB^2] = E[A^2]E[B^4] - E[A]^2E[B^2]^2 = \frac{2}{\lambda^2}(3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4) - \frac{1}{\lambda^2}(\sigma^2 + \mu^2)^2$$

Bu momentleri kullanarak  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkeninin  $E[XY] = E[X]E[Y]$ ,  $\text{Var}[XY] = E[X^2]E[Y^2] - E[X]^2E[Y]^2$  beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Beklenen değer ve varyans;

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= E[1] + \frac{t}{1!}E[A + B] + \frac{t^2}{2!}E[A^2 + 2AB + B^2] \\ &\quad + \frac{t^3}{3!}E[A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= 1 + \frac{t}{1!}[E[A] + E[B]] + \frac{t^2}{2!}[E[A^2] + 2E[A]E[B] + E[B^2]] \\ &\quad + \frac{t^3}{3!}[E[A^3] + 3E[A^2]E[B] + 3E[A]E[B^2] + E[B^3]] \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\lambda} + \mu\right)t + \left(\frac{2}{\lambda^2} + \frac{2\mu}{\lambda} + \sigma^2 + \mu^2\right)\frac{t^2}{2} \\ &\quad + \left(\frac{6}{\lambda^3} + \frac{6\mu}{\lambda^2} + \frac{3(\sigma^2 + \mu^2)}{\lambda} + 3\sigma^2\mu + \mu^3\right)\frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Var}[x(t)] = \text{Var}\left[1 + \frac{(A+B)t}{1!} + \frac{(A+B)^2t^2}{2!} + \frac{(A+B)^3t^3}{3!}\right]$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[x(t)] &= \text{Var}[1] + \frac{t^2}{1}(\text{Var}[A] + \text{Var}[B]) \\ &\quad + \frac{t^4}{4}\left(\text{Var}[A^2] + 2\text{Var}[AB] + \text{Var}[B^2]\right) \\ &\quad + \frac{t^6}{36}(\text{var}[A^3] + 3\text{Var}[A^2B] + 3\text{var}[AB^2] + \text{Var}[B^3]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[x(t)] &= \frac{t^2}{\lambda^2} + t^2\sigma^2 + \frac{(10 + 2\lambda^2\sigma^2 + \lambda^2\mu^2 + \sigma^4\lambda^4 + 2\sigma^2\mu^2\lambda^4)t^4}{2\lambda^4} \\
&+ (228 + 5\sigma^4\lambda^4 + 10\sigma^2\mu^2\lambda^4 + \lambda^4\mu^4 + 24\lambda^2\sigma^2 + 20\lambda^2\mu^2 + 5\sigma^6\lambda^6 \\
&+ 12\sigma^4\mu^2\lambda^6 + 3\sigma^2\mu^4\lambda^6) \frac{t^6}{12\lambda^6}
\end{aligned}$$

$\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerler için,

$$\begin{aligned}
E[x(t)] &= 1 + \left(\frac{1}{2} + 3\right)t + \left(\frac{2}{2^2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + 4 + 3^2\right) \frac{t^2}{2} \\
&+ \left(\frac{6}{2^3} + \frac{6 \cdot 3}{2^2} + \frac{3(4+3^2)}{2} + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3^3\right) \frac{t^3}{6} \\
&= 1 + \frac{7}{2}t + \frac{33}{4}t^2 + \frac{117}{8}t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[x(t)] &= \frac{t^2}{2^2} + 4t^2 + \frac{(10 + 2 \cdot 2^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3^2 + 16 \cdot 2^4 + 2 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^4)t^4}{2 \cdot 2^4} \\
&+ (228 + 5 \cdot 16 \cdot 2^4 + 10 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 24 \cdot 2^2 \cdot 4 + 20 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \\
&+ 5 \cdot 64 \cdot 2^6 + 12 \cdot 16 \cdot 3^2 \cdot 2^6 + 3 \cdot 4 \cdot 3^4 \cdot 2^6) \frac{t^6}{12 \cdot 2^6} \\
&= \frac{17t^2}{4} + \frac{743t^4}{16} + \frac{50737t^6}{192}
\end{aligned}$$

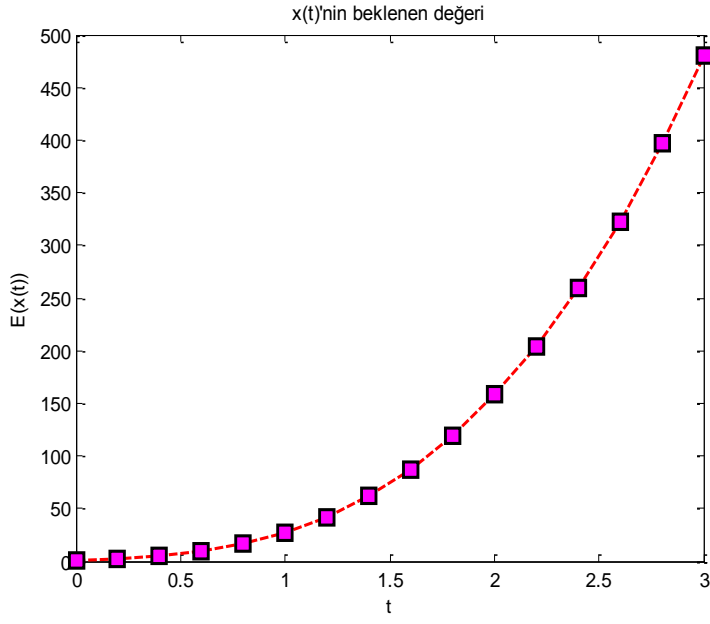
Benzer şekilde yukarıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= E[-x(t)] \\
&= - \left[ 1 + \left(\frac{1}{\lambda} + \mu\right)t + \left(\frac{2}{\lambda^2} + \frac{2\mu}{\lambda} + \sigma^2 + \mu^2\right) \frac{t^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{6}{\lambda^3} + \frac{6\mu}{\lambda^2} + \frac{3(\sigma^2 + \mu^2)}{\lambda} + 3\sigma^2\mu + \mu^3\right) \frac{t^3}{6} \right]
\end{aligned}$$

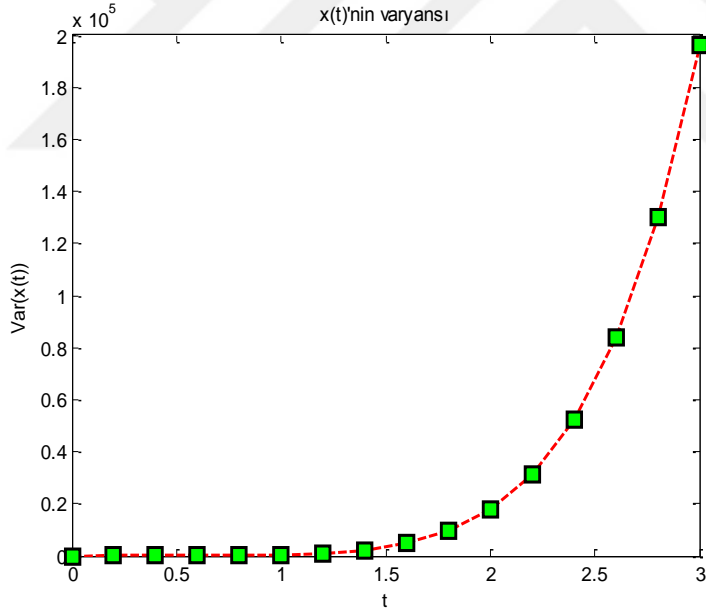
$$\begin{aligned}
Var[y(t)] &= Var[-x(t)] = Var \left[ 1 + \frac{(A+B)t}{1!} + \frac{(A+B)^2 t^2}{2!} + \frac{(A+B)^3 t^3}{3!} \right] \\
&= \frac{t^2}{\lambda^2} + t^2 \sigma^2 + \frac{(10 + 2\lambda^2 \sigma^2 + \lambda^2 \mu^2 + \sigma^4 \lambda^4 + 2\sigma^2 \mu^2 \lambda^4) t^4}{2\lambda^4} \\
&\quad + (228 + 5\sigma^4 \lambda^4 + 10\sigma^2 \mu^2 \lambda^4 + \lambda^4 \mu^4 + 24\lambda^2 \sigma^2 + 20\lambda^2 \mu^2 \\
&\quad + 5\sigma^6 \lambda^6 + 12\sigma^4 \mu^2 \lambda^6 + 3\sigma^2 \mu^4 \lambda^6) \frac{t^6}{12\lambda^6}
\end{aligned}$$

$\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerler için,

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= - \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + 3 \right) t + \left( \frac{2}{2^2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + 4 + 3^2 \right) \frac{t^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{6}{2^3} + \frac{6 \cdot 3}{2^2} + \frac{3(4+3^2)}{2} + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3^3 \right) \frac{t^3}{6} \right] \\
&= - \left[ 1 + \frac{7}{2} t + \frac{33}{4} t^2 + \frac{117}{8} t^3 \right] = -1 - \frac{7}{2} t - \frac{33}{4} t^2 - \frac{117}{8} t^3 \\
Var[y(t)] &= \frac{t^2}{2^2} + 4t^2 + \frac{(10 + 2 \cdot 2^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3^2 + 16 \cdot 2^4 + 2 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^4) t^4}{2 \cdot 2^4} \\
&\quad + (228 + 5 \cdot 16 \cdot 2^4 + 10 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 24 \cdot 2^2 \cdot 4 + 20 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \\
&\quad + 5 \cdot 64 \cdot 2^6 + 12 \cdot 16 \cdot 3^2 \cdot 2^6 + 3 \cdot 4 \cdot 3^4 \cdot 2^6) \frac{t^6}{12 \cdot 2^6} \\
&= \frac{17t^2}{4} + \frac{743t^4}{16} + \frac{50737t^6}{192}
\end{aligned}$$



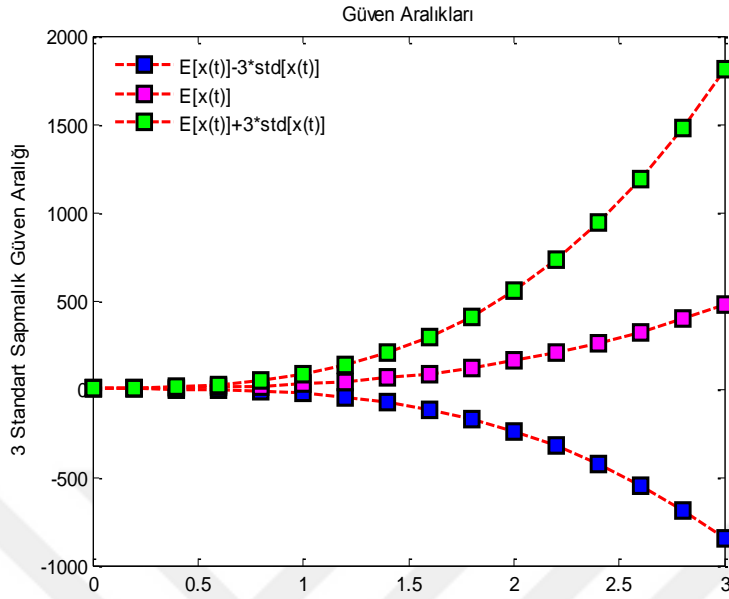
Şekil 19.  $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerleri için beklenen değer



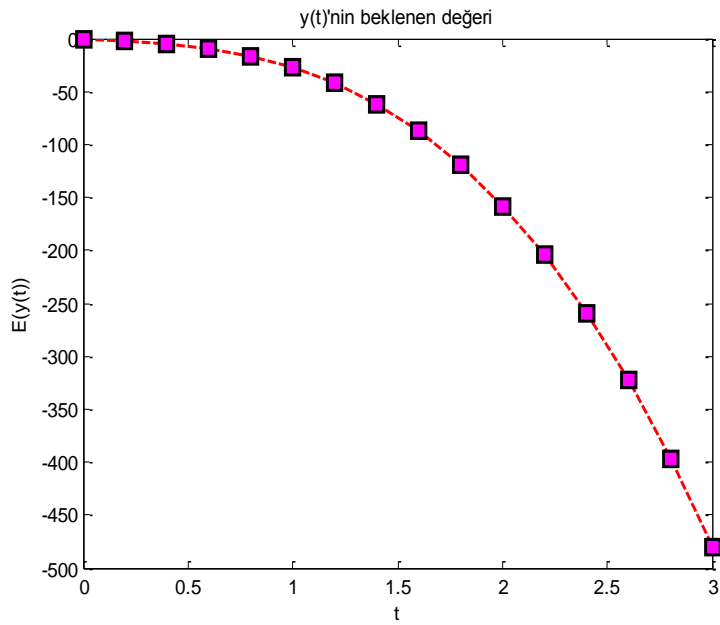
Şekil 20.  $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerleri için varyans

## Güven aralıkları

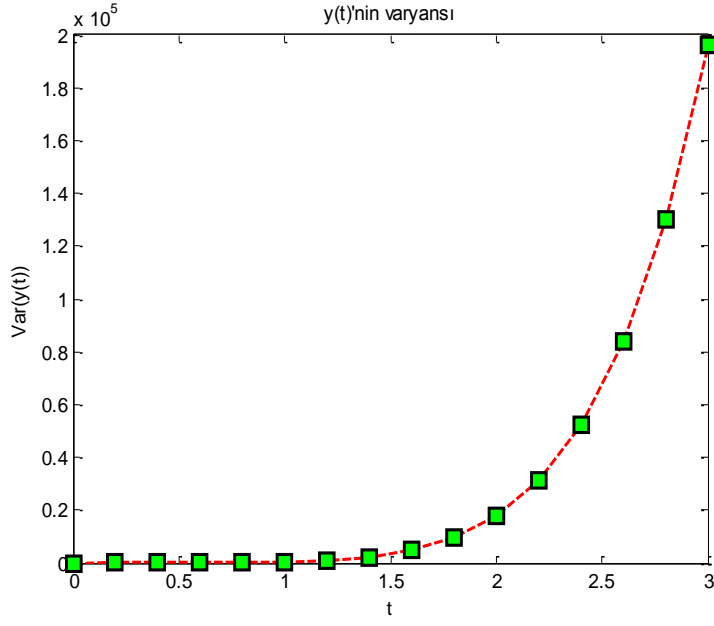
$$[E(x(t)) - 3stdsapma(x(t)), E(x(t)) + 3stdsapma(x(t))]$$



Şekil 21.  $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerleri için güven aralıkları



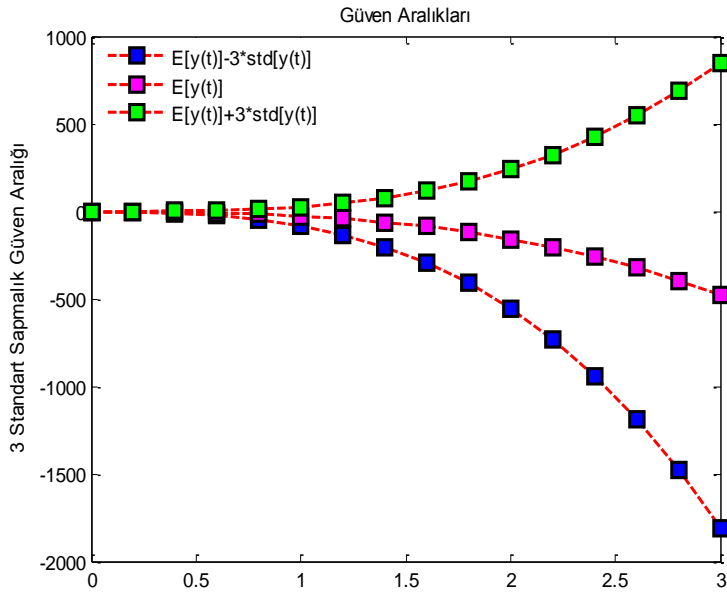
Şekil 22.  $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerleri için beklenen değer



Şekil 23.  $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$$



Şekil 24.  $\lambda = 2, \mu = 3, \sigma^2 = 4$  özel değerleri için güven aralıkları

**Başlangıç Koşulları Rastgele Olan Kesirli Mertebeden Diferensiyel  
Denklem Sistemleri**

**Örnek-2.11.**

$$D_*^\alpha x(t) = 2x + y$$

$$D_*^\alpha y(t) = 7x + 8y \quad (42)$$

$x(0) = A, y(0) = B$  başlangıç koşulları olmak üzere,  $A \sim \text{Beta}(a, b) \rightarrow A \sim \text{Beta}(a = 2, b = 4)$  Beta dağılıma sahip,  $B \sim \text{Gamma}(u, v) \rightarrow B \sim \text{Gamma}(u = 3, v = 1)$  Gamma dağılıma sahip, rastgele değişkenler olmak üzere rastgele Elzaki Dönüşüm Yöntemiyle denkleminin çözüm davranışlarını elde ediniz.

**Çözüm:**

(42) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşüm yöntemi uygulanırsa,

$$LFE_\alpha \left[ \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \right] = LFE_\alpha[2x] + LFE_\alpha[y]$$

$$LFE_\alpha \left[ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} \right] = LFE_\alpha[7x] + LFE_\alpha[8y]$$

$$\frac{1}{v^\alpha} LFE_\alpha\{x(t)\} - v^\alpha x(0) = 2LFE_\alpha\{x(t)\} + LFE_\alpha\{y(t)\}$$

$$\frac{1}{v^\alpha} LFE_\alpha\{y(t)\} - v^\alpha y(0) = 7LFE_\alpha\{x(t)\} + 8LFE_\alpha\{y(t)\}$$

$$\left[ \frac{1}{v^\alpha} - 2 \right] LFE_\alpha\{x(t)\} - LFE_\alpha\{y(t)\} = Av^\alpha$$

$$-7LFE_\alpha\{x(t)\} + \left[ \frac{1}{v^\alpha} - 8 \right] LFE_\alpha\{y(t)\} = Bv^\alpha$$

Cramer yöntemi ile;

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{v^\alpha} - 2 & -1 \\ -7 & \frac{1}{v^\alpha} - 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LFE_\alpha\{x(t)\} \\ LFE_\alpha\{y(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av^\alpha \\ Bv^\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} LFE_\alpha\{x(t)\} &= \frac{\begin{vmatrix} Av^\alpha & -1 \\ Bv^\alpha & \frac{1}{v^\alpha} - 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{v^\alpha} - 2 & -1 \\ -7 & \frac{1}{v^\alpha} - 8 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{Av^\alpha}{v^\alpha} - 8Av^\alpha + Bv^\alpha}{\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{8}{v^\alpha} - \frac{2}{v^\alpha} + 16 - 7} = \frac{A - 8Av^\alpha + Bv^\alpha}{\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{10}{v^\alpha} + 9} = \\ &= \frac{A - 8Av^\alpha + Bv^\alpha}{\frac{1 - 10v^\alpha + 9v^{2\alpha}}{v^{2\alpha}}} = \frac{Av^{2\alpha} - 8Av^{3\alpha} + Bv^{3\alpha}}{1 - 10v^\alpha + 9v^{2\alpha}} = \frac{K_1 v^{2\alpha}}{1 - v^\alpha} + \frac{K_2 v^{2\alpha}}{1 - 9v^\alpha} \end{aligned} \quad (43)$$

Gerekli işlemler yapılırsa,  $K_1 = \frac{7A-B}{8}$ ,  $K_2 = \frac{A+B}{8}$

elde edilir.

(43) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$x(t) = E^{-1} \left[ \frac{\left( \frac{7A-B}{8} \right) v^{2\alpha}}{1 - v^\alpha} + \frac{\left( \frac{A+B}{8} \right) v^{2\alpha}}{1 - 9v^\alpha} \right]$$

$$x(t) = E^{-1} \left[ \frac{\left( \frac{7A-B}{8} \right) v^{2\alpha}}{1 - v^\alpha} \right] + E^{-1} \left[ \frac{\left( \frac{A+B}{8} \right) v^{2\alpha}}{1 - 9v^\alpha} \right]$$

$x(t) = \left( \frac{7A-B}{8} \right) E_\alpha(t^\alpha) + \left( \frac{A+B}{8} \right) E_\alpha(t^{9\alpha})$  ifadesinde,  $\alpha = 1$  seçilirse,

$x(t) = \left(\frac{7A-B}{8}\right) e^t + \left(\frac{A+B}{8}\right) e^{9t}$  elde edilir.

$$LFE_{\alpha}\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{v^{\alpha}}-2 & Av^{\alpha} \\ -7 & Bv^{\alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{v^{\alpha}}-2 & -1 \\ -7 & \frac{1}{v^{\alpha}}-8 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{Bv^{\alpha}}{v^{\alpha}}-2Bv^{\alpha}+7Av^{\alpha}}{\frac{1}{v^{2\alpha}}-\frac{8}{v^{\alpha}}-\frac{2}{v^{\alpha}}+16-7} = \frac{B-2Bv^{\alpha}+7Av^{\alpha}}{\frac{1}{v^{2\alpha}}-\frac{8}{v^{\alpha}}-\frac{2}{v^{\alpha}}+9} =$$

$$\frac{B-2Bv^{\alpha}+7Av^{\alpha}}{\frac{1-10v^{\alpha}+9v^{2\alpha}}{v^{2\alpha}}} = \frac{Bv^{2\alpha}-2Bv^{3\alpha}+7Av^{3\alpha}}{1-10v^{\alpha}+9v^{2\alpha}} = \frac{K_1v^{2\alpha}}{1-v^{\alpha}} + \frac{K_2v^{2\alpha}}{1-9v^{\alpha}} \quad (44)$$

Gerekli işlemler yapılırsa,  $K_1 = \frac{7A+7B}{8}$ ,  $K_2 = \frac{B-7A}{8}$

elde edilir.

(44) eşitliğinde, her iki tarafın ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$y(t) = E^{-1} \left[ \frac{\left(\frac{7A+7B}{8}\right) v^{2\alpha}}{1-v^{\alpha}} + \frac{\left(\frac{B-7A}{8}\right) v^{2\alpha}}{1-9v^{\alpha}} \right]$$

$$y(t) = E^{-1} \left[ \frac{\left(\frac{7A+7B}{8}\right) v^{2\alpha}}{1-v^{\alpha}} \right] + E^{-1} \left[ \frac{\left(\frac{B-7A}{8}\right) v^{2\alpha}}{1-9v^{\alpha}} \right]$$

$y(t) = \left(\frac{7A+7B}{8}\right) E_{\alpha}(t^{\alpha}) + \left(\frac{B-7A}{8}\right) E_{\alpha}(t^{9\alpha})$  ifadesinde,  $\alpha = 1$  seçilirse,

$y(t) = \left(\frac{7A+7B}{8}\right) e^t + \left(\frac{B-7A}{8}\right) e^{9t}$  elde edilir.

$A \sim Beta(a, b)$  beta dağılımına sahip rastgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E(A) = \frac{a}{a+b}, \text{Var}(A) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

$B \sim \text{Gamma}(u, v)$  Gamma dağılımına sahip rastgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$E(B) = \frac{u}{v}, \text{Var}(B) = \frac{u}{v^2}$$

Bu momentleri kullanarak  $X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkeninin  $E[XY] = E[X]E[Y]$ ,  $\text{Var}[XY] = E[X^2]E[Y^2] - E[X]^2E[Y]^2$  beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Beklenen değer ve varyans;

$$E[x(t)] = E_\alpha(t^\alpha)E\left(\frac{7A-B}{8}\right) + E_\alpha(t^{9\alpha})E\left(\frac{A+B}{8}\right)$$

$$E[x(t)] = E_\alpha(t^\alpha) \left[ \frac{1}{8}(7E(A) - E(B)) \right] + E_\alpha(t^{9\alpha}) \left[ \frac{1}{8}(E(A) + E(B)) \right]$$

$$E[x(t)] = E_\alpha(t^\alpha) \left[ \frac{1}{8} \left( 7 \left( \frac{a}{a+b} \right) - \frac{u}{v} \right) \right] + E_\alpha(t^{9\alpha}) \left[ \frac{1}{8} \left( \left( \frac{a}{a+b} \right) + \frac{u}{v} \right) \right]$$

$$E[x(t)] = E_\alpha(t^\alpha) \left[ \frac{7a}{8a+8b} - \frac{u}{8v} \right] + E_\alpha(t^{9\alpha}) \left[ \frac{a}{8a+8b} + \frac{u}{8v} \right],$$

$$\text{Var}[x(t)] = E_\alpha(t^\alpha)^2 \text{Var}\left(\frac{7A-B}{8}\right) + E_\alpha(t^{9\alpha})^2 \text{Var}\left(\frac{A+B}{8}\right)$$

$$\text{Var}[x(t)]$$

$$\begin{aligned} &= E_\alpha(t^\alpha)^2 \left[ \left( \frac{7}{8} \right)^2 \text{Var}(A) + \left( \frac{1}{8} \right)^2 \text{Var}(B) \right] \\ &+ E_\alpha(t^{9\alpha})^2 \left[ \frac{1}{64} \text{Var}(A) + \frac{1}{64} \text{Var}(B) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Var}[x(t)] \\
&= E_{\alpha}(t^{\alpha})^2 \left[ \left( \frac{7}{8} \right)^2 \left( \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \right) + \frac{\left( \frac{1}{8} \right)^2 u}{v^2} \right] \\
&+ E_{\alpha}(t^{9\alpha})^2 \left[ \frac{1}{64} \left( \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \right) + \frac{u}{64v^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Var}[x(t)] \\
&= E_{\alpha}(t^{\alpha})^2 \left[ \frac{49}{64} \left( \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \right) + \frac{u}{64v^2} \right] \\
&+ E_{\alpha}(t^{9\alpha})^2 \left[ \frac{1}{64} \left( \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \right) + \frac{u}{64v^2} \right]
\end{aligned}$$

$a = 2, b = 4, u = 3, v = 1$  özel değerleri için beklenen değer ve varyans;

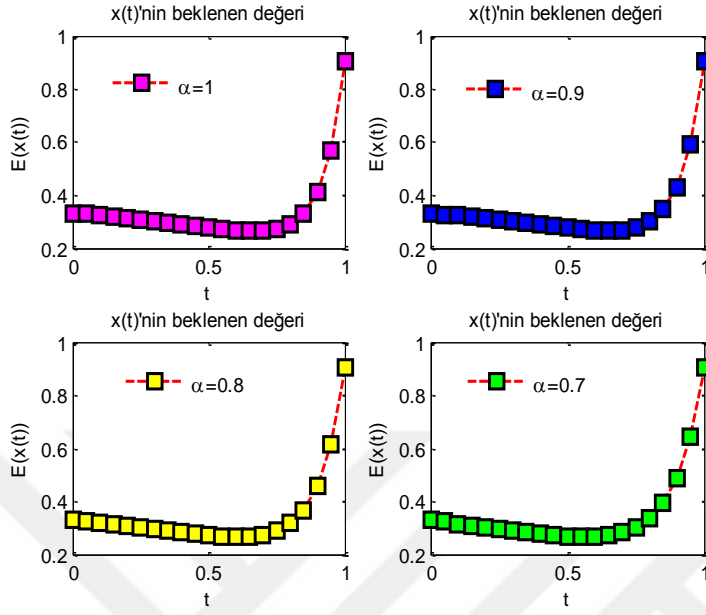
$$E[x(t)] = E_{\alpha}(t^{\alpha}) \left[ \frac{7.2}{8.2 + 8.4} - \frac{3}{8} \right] + E_{\alpha}(t^{9\alpha}) \left[ \frac{2}{8.2 + 8.4} + \frac{3}{8} \right]$$

$$E[x(t)] = E_{\alpha}(t^{\alpha}) \left[ \frac{7}{24} - \frac{3}{8} \right] + E_{\alpha}(t^{9\alpha}) \left[ \frac{1}{24} + \frac{3}{8} \right]$$

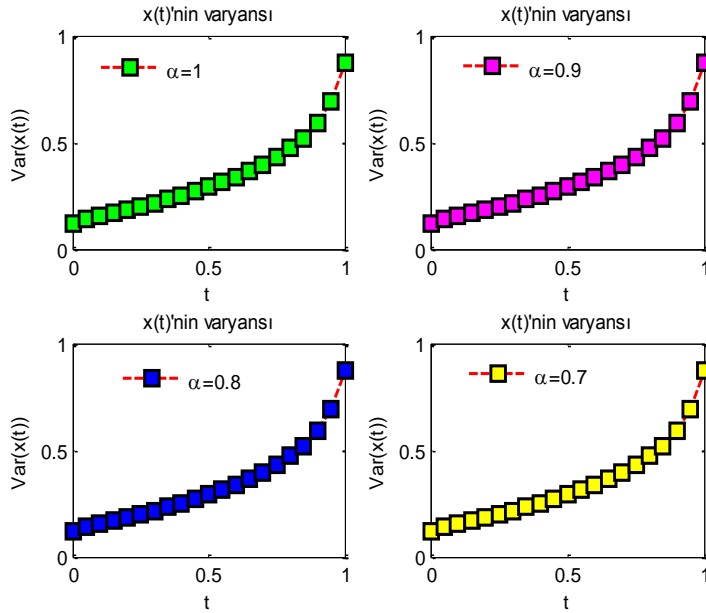
$$E[x(t)] = E_{\alpha}(t^{\alpha}) \left[ -\frac{1}{12} \right] + E_{\alpha}(t^{9\alpha}) \left[ \frac{5}{12} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \text{Var}[x(t)] \\
&= E_{\alpha}(t^{\alpha})^2 \left[ \frac{49}{64} \left( \frac{2.4}{(2+4)^2(2+4+1)} \right) + \frac{3}{64.1} \right] \\
&+ E_{\alpha}(t^{9\alpha})^2 \left[ \frac{1}{64} \left( \frac{2.4}{(2+4)^2(2+4+1)} \right) + \frac{3}{64.1} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Var}[x(t)] = E_{\alpha}(t^{\alpha})^2 \left[ \frac{41}{576} \right] + E_{\alpha}(t^{9\alpha})^2 \left[ \frac{191}{4032} \right]$$



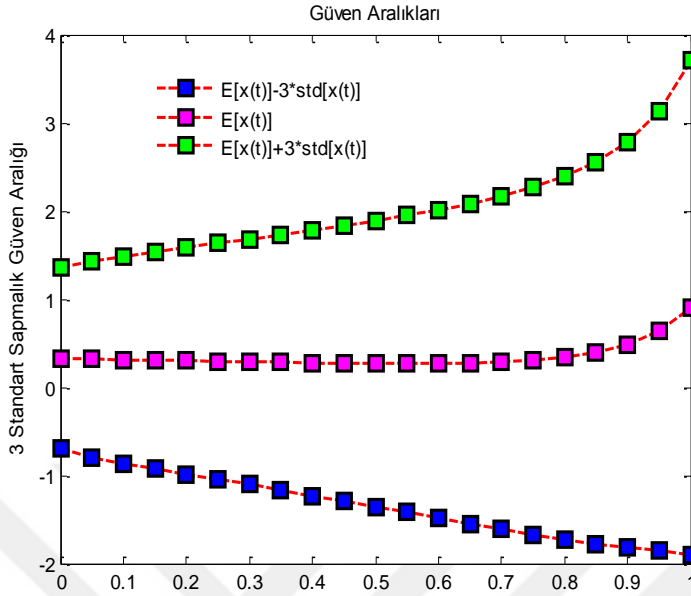
Şekil 25.  $\alpha = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$ ,  $a = 2, b = 4, u = 3, v = 1$  özel değerleri için beklenen değer



Şekil 26.  $\alpha = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$ ,  $a = 2, b = 4, u = 3, v = 1$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(x(t)) - 3stdsapma(x(t)), E(x(t)) + 3stdsapma(x(t))]$$



Şekil 27.  $\alpha = 0.9$  ve  $a = 2, b = 4, u = 3, v = 1$  özel değerleri için güven aralığı

## 2.2. Elzaki Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Bu bölümde kesirli adi diferansiyel denklemler ve denklem sistemlerinin Elzaki-Adomian ayrıştırma yöntemini (Varsoliwala ve Singh, 2020) kullanarak çözümü sunulmaktadır.

Kesirli adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verildiğinde

$$D_t^\alpha y(t) = g(t) + Ny(t) + Ry(t), \quad (45)$$

ve  $y(0) = c$  başlangıç koşulu,  $D_t^\alpha \equiv {}^C D_t^\alpha$  bir Caputo kesirli türev operatörü  $0 < \alpha \leq 1$ , N lineer olmayan bir operatör, R lineer bir operatör, g diferansiyel denklemin homojenliğini gösteren bir fonksiyon ve  $y(t)$  denklemin çözümü olsun. Denklem (45)'deki Elzaki dönüşümü kullanılarak,

$$y(v) = v^2 y(0) + v^\alpha E[g(t)] + v^\alpha E[Ny(t)] + v^\alpha E[Ry(t)]. \quad (46)$$

elde edilir.

Daha sonra (46) ifadesinin ters Elzaki dönüşümü alınırsa,

$$y(t) = y(0) + E^{-1}[v^\alpha E[g(t)]] + E^{-1}[v^\alpha E[Ny(t)]] + E^{-1}[v^\alpha E[Ry(t)]]. \quad (47)$$

Adomian ayrıştırma yöntemi  $y$  fonksiyonunun sonsuz bir seriye bölünebileceğini veya ayrıştırılabileceğini varsayar (Adomian, 1988; Al Awadah, 2016).

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots, \quad (48)$$

burada  $y_n$  yinelemeli olarak belirtilebilir. Bu yöntem aynı zamanda lineer olmayan operatör  $Ny$ 'nin sonsuz bir polinom serisine ayrıştırılabileceğini de varsayar.

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (49)$$

burada  $A_n = A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$  tanımlı bir Adomian polinomudur,

$$A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{k=0}^n \lambda^k y_k)]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

burada  $\lambda$  bir parametredir. Adomian polinomu  $A_n$  aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$A_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{d\lambda^0} \left[ N \left( \sum_{k=0}^0 \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0} = N(y_0)$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \frac{d^1}{d\lambda^1} \left[ N \left( \sum_{k=0}^1 \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0} = y_1 N'(y_0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[ N \left( \sum_{k=0}^2 \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0} = y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} N''(y_0)$$

(48) ve (49) ifadesini (47)'te yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = y(0) + E^{-1}[v^{\alpha}E[g(t)]] + E^{-1}[v^{\alpha}E[\sum_{n=0}^{\infty} A_n]] + E^{-1}[v^{\alpha}E[R \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)]] \quad (50)$$

(50) denkleminin aynı mertebeli terimleri eşitlenirse

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) + E^{-1}[v^{\alpha}E[g(t)]], \\ y_1 &= E^{-1}[v^{\alpha}E[A_0]] + E^{-1}[v^{\alpha}E[RY_0]], \\ y_2 &= E^{-1}[v^{\alpha}E[A_1]] + E^{-1}[v^{\alpha}E[RY_1]], \\ y_3 &= E^{-1}[v^{\alpha}E[A_2]] + E^{-1}[v^{\alpha}E[RY_2]], \\ &\vdots \end{aligned} \quad (51)$$

Böylece genel olarak Elzaki-Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak sıradan diferansiyel denklem çözümü (51)'in yinelemeli ilişkisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) + E^{-1}[v^{\alpha}E[g(t)]], \\ y_{n+1} &= E^{-1}[v^{\alpha}E[A_n]] + E^{-1}[v^{\alpha}E[RY_n]], \quad n = 0,1,2, \dots \end{aligned} \quad (52)$$

### Örnek-2.12.

$$D_t^{\alpha}y(t) = -y^2(t) + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = 0 \quad (53)$$

Kesirli mertebeden türevli başlangıç koşulu ile verilen diferansiyel denklemi Elzaki-Adomian ayrıştırma yöntemi yardımıyla çözüyoruz.

### Çözüm:

(53) denkleminde Elzaki-Adomian ayrıştırma yöntemi uygulanırsa,

$$y_0 = y(0) + E^{-1}[v^{\alpha}E[1]]$$

$$y_{n+1} = -E^{-1}[v^{\alpha}E[A_n]]$$

$$y_0 = 0 + E^{-1}[v^\alpha v^2] = E^{-1}[v^{\alpha+2}] = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

$$y_1 = -E^{-1}[v^\alpha E[A_0]]$$

$$A_0 = N(y_0) = y_0^2 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)}$$

$$y_1 = -E^{-1}\left[v^\alpha E\left[\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)}\right]\right]$$

$$y_1 = -E^{-1}\left[v^\alpha \frac{1}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \Gamma(2\alpha + 1) v^{2\alpha+2}\right]$$

$$y_1 = -E^{-1}\left[v^{3\alpha+2} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)}\right]$$

$$y_1 = -\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}$$

$$y_2 = -E^{-1}[v^\alpha E[A_1]]$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0) = 2y_0 y_1 = -\frac{2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{4\alpha}$$

$$y_2 = -E^{-1}\left[v^\alpha E\left[-\frac{2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{4\alpha}\right]\right]$$

$$y_2 = -E^{-1}\left[-v^\alpha \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} E[t^{4\alpha}]\right]$$

$$y_2 = -E^{-1}\left[-v^\alpha \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \Gamma(4\alpha + 1) v^{4\alpha+2}\right]$$

$$y_2 = -E^{-1}\left[-v^{5\alpha+2} \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}\right]$$

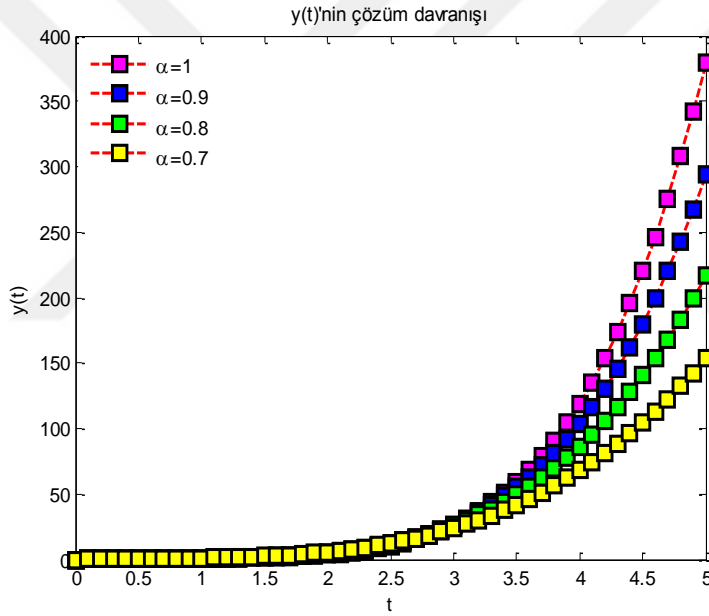
$$y_2 = \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} t^{5\alpha}$$

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

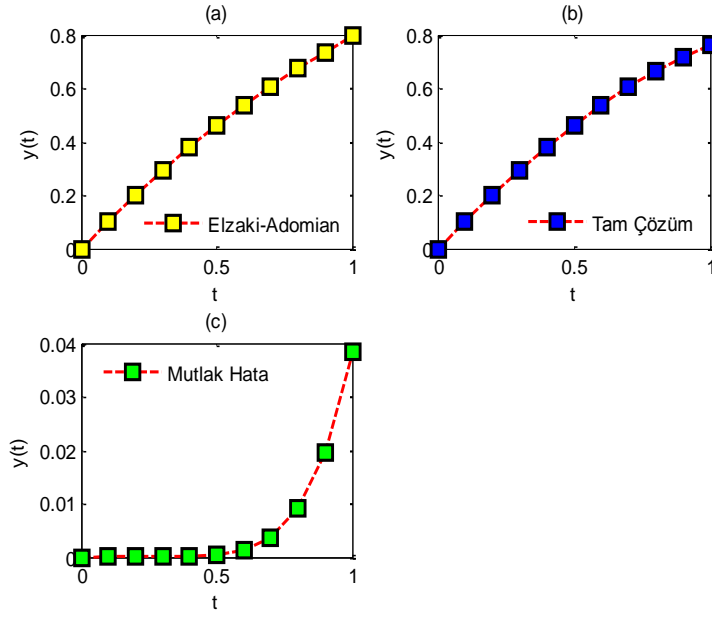
$$y(t)$$

$$= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha} + \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} t^{5\alpha} + \dots$$

çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 28.  $\alpha = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$  için  $y(t)$ 'nin çözüm davranışları



Şekil 29. (a) Elzaki-Adomian (b) tam çözümü  
c) Mutlak hata =  $|y_{tam} - y_{EA}|$   $\alpha = 1$  için

### Örnek-2.13.

$$D_t^\alpha y(t) = y^2(t) + t^2, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = 1 \quad (54)$$

Kesirli mertebeden türevli başlangıç koşulu ile verilen diferensiyel denklemi Elzaki-Adomian ayrıştırma yöntemi yardımıyla çözüyoruz.

### Çözüm:

(54) denklemine Elzaki-Adomian ayrıştırma yöntemi uygulanırsa,

$$y_0 = y(0) + E^{-1}[v^\alpha E[t^2]]$$

$$y_{n+1} = E^{-1}[v^\alpha E[A_n]]$$

$$y_0 = 1 + E^{-1}[v^\alpha \Gamma(3)v^4]$$

$$y_0 = 1 + E^{-1}2[v^{\alpha+4}] = 1 + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}$$

$$y_1 = E^{-1}[v^\alpha E[A_0]]$$

$$A_0 = N(y_0) = y_0^2 = \left(1 + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}\right)^2 = 1 + \frac{4t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{4t^{2\alpha+4}}{\Gamma^2(\alpha+3)}$$

$$y_1 = E^{-1}\left[v^\alpha E\left[1 + \frac{4t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{4t^{2\alpha+4}}{\Gamma^2(\alpha+3)}\right]\right]$$

$$y_1 = E^{-1}\left[v^\alpha E[1] + E\left[\frac{4t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}\right] + E\left[\frac{4t^{2\alpha+4}}{\Gamma^2(\alpha+3)}\right]\right]$$

$$y_1 = E^{-1}\left[v^\alpha \left[v^2 + \frac{4}{\Gamma(\alpha+3)}\Gamma(\alpha+3)v^{\alpha+4} + \frac{4}{\Gamma^2(\alpha+3)}\Gamma(2\alpha+5)v^{2\alpha+6}\right]\right]$$

$$y_1 = E^{-1}\left[v^\alpha \left[v^2 + 4v^{\alpha+4} + \frac{4}{\Gamma^2(\alpha+3)}\Gamma(2\alpha+5)v^{2\alpha+6}\right]\right]$$

$$y_1 = E^{-1}\left[v^{\alpha+2} + 4v^{2\alpha+4} + \frac{4}{\Gamma^2(\alpha+3)}\Gamma(2\alpha+5)v^{3\alpha+6}\right]$$

$$y_1 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4t^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma^2(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)}$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0) = 2y_0 y_1$$

$$A_1 = 2\left(1 + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}\right)\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4t^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma^2(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)}\right)$$

$$y_2 = E^{-1}[v^\alpha E[A_1]]$$

$$y_2 = E^{-1} \left[ v^\alpha E \left[ \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4t^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)} + \frac{8t^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16t^{3\alpha+4}}{\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(\alpha+3)} + \frac{8\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma^2(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16\Gamma(2\alpha+5)t^{4\alpha+6}}{\Gamma^3(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \right] \right]$$

$$y_2 = E^{-1} \left[ v^\alpha \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) v^{\alpha+2} \right. \\ \left. + v^\alpha \frac{4}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)} \Gamma(2\alpha+3) v^{2\alpha+4} \right. \\ \left. + v^\alpha \frac{8}{\Gamma(2\alpha+3)} \Gamma(2\alpha+3) v^{2\alpha+4} \right. \\ \left. + v^\alpha \frac{16}{\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(\alpha+3)} \Gamma(3\alpha+5) v^{3\alpha+6} \right. \\ \left. + v^\alpha \frac{8\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma^2(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \Gamma(3\alpha+5) v^{3\alpha+6} \right. \\ \left. + v^\alpha \frac{16\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma^3(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \Gamma(4\alpha+7) v^{4\alpha+8} \right]$$

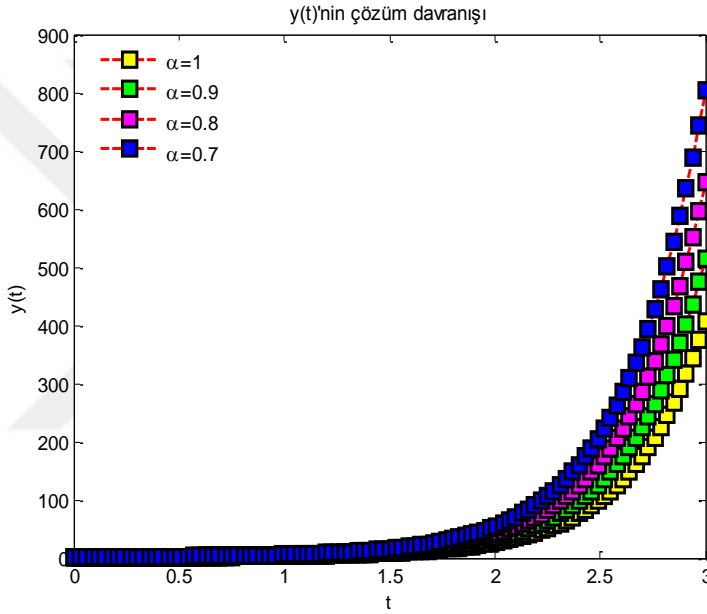
$$y_2 = E^{-1} \left[ 2v^{2\alpha+2} + \frac{4\Gamma(2\alpha+3)v^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)} + 8v^{3\alpha+4} + \frac{16\Gamma(3\alpha+5)v^{4\alpha+6}}{\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(\alpha+3)} \right. \\ \left. + \frac{8\Gamma(2\alpha+5)v^{4\alpha+6}}{\Gamma^2(\alpha+3)} + \frac{16\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)v^{5\alpha+8}}{\Gamma^3(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \right]$$

$$y_2 = \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)} \frac{t^{3\alpha+2}}{\Gamma(3\alpha+3)} + \frac{8t^{3\alpha+2}}{\Gamma(3\alpha+3)} \\ + \frac{16\Gamma(3\alpha+5)}{\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(\alpha+3)} \frac{t^{4\alpha+4}}{\Gamma(4\alpha+5)} + \frac{8\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma^2(\alpha+3)} \frac{t^{4\alpha+4}}{\Gamma(4\alpha+5)} \\ + \frac{16\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)}{\Gamma^3(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \frac{t^{5\alpha+6}}{\Gamma(5\alpha+7)}$$

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & 1 + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4t^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma^2(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \\
& + \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)} \frac{t^{3\alpha+2}}{\Gamma(3\alpha+3)} + \frac{8t^{3\alpha+2}}{\Gamma(3\alpha+3)} \\
& + \frac{16\Gamma(3\alpha+5)}{\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)} \frac{t^{4\alpha+4}}{\Gamma(4\alpha+5)} + \frac{8\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma^2(\alpha+3)} \frac{t^{4\alpha+4}}{\Gamma(4\alpha+5)} \\
& + \frac{16\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)}{\Gamma^3(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)} \frac{t^{5\alpha+6}}{\Gamma(5\alpha+7)}
\end{aligned}$$

çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 30.  $\alpha = 1, 0.9, 0.8$  ve  $0.7$  için  $y(t)$ 'nin çözüm davranışları

### 2.3. Kesirli Elzaki Homotopy Analiz Yöntemi (KEHAY)

Bu bölümde nonlinear Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklem (KDD)'in çözümü için Kesirli Elzaki Homotopy Analiz Yöntemini (KEHAY) (Sachit ve Jassim, 2023) kullanacağız. Aşağıdaki formda bir genel kesirli nonlinear Kesirli Diferansiyel Denklem (KDD)'i düşünelim:

$$D_t^\alpha \Psi(x, t) + R\Psi(x, t) + N\Psi(x, t) = G(x, t), \quad m-1 \leq \alpha \leq m, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (55)$$

$$\Psi(x, 0) = \Psi^{(k)}(x, 0), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m-1 \quad (56)$$

başlangıç koşulları verilsin:

$R \rightarrow$  lineer diferansiyel operatör

$N \rightarrow$  genel nonlineer diferansiyel operatör

$G(x, t) \rightarrow$  kaynak terimi

(55) denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşümü uygulayalım.

$$E[D_t^\alpha \Psi(x, t)] + E[R\Psi(x, t)] + E[N\Psi(x, t)] = E[G(x, t)] \quad (57)$$

Elzaki dönüşümünün diferansiyel özelliği ve başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$\frac{E[\Psi(x, t)]}{z^\alpha} - \sum_{m=0}^{k-1} z^{(z-\alpha+k)} \Psi^{(k)}(x, 0) + E[R\Psi(x, t)] + E[N\Psi(x, t)] = E[G(x, t)] \quad (58)$$

ya da

$$E[\Psi(x, t)] - \sum_{k=0}^{m-1} z^{2+k} \Psi^{(k)}(x, 0) + z^\alpha \{E[R\Psi(x, t)] + E[N\Psi(x, t)] - E[G(x, t)]\} = 0 \quad (59)$$

Nonlineer operatörü tanımlayalım:

$$N[\Phi(x, t; q)] = E[\Phi(x, t; q)] - \sum_{k=0}^{m-1} z^{2+k} \Psi^{(k)}(x, 0) + z^\alpha \{E[R\Phi(x, t; q)] + E[N\Phi(x, t; q)] - E[G(x, t)]\} \quad (60)$$

$q \in [0, 1]$  ve  $\Phi(x, t; q)$   $x, t, q$ 'nin reel fonksiyonu olmak üzere (60) denkleminin sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi denir.

$$(1 - q)E[\Phi(x, t; q) - \Psi_0(x, t)] = qhH(x, t)N[\Phi(x, t; q)] \quad (61)$$

Burada  $h \neq 0$  bir yardımcı parametredir.

$\Psi_0(x, t), \Psi(x, t)$ 'nin ilk tahminidir ve  $\Phi(x, t; q)$  bilinmeyen bir fonksiyondur.

Açıkçası,  $q = 0$  ve  $q = 1$  parametresi sırasıyla

$$\emptyset(x, t; 0) = \Psi_0(x, t), \emptyset(x, t; 1) = \Psi(x, t) \quad (62)$$

sağlar. Böylece  $q$  0'dan 1'e arttıkça  $\emptyset(x, t; q)$  çözümü, ilk tahmin olan  $\Psi_0(x, t)$ 'den  $\Psi(x, t)$  çözümüne değişir.

$q$ 'ya göre Taylor serisinde  $\emptyset(x, t; q)$ 'u genişleterek,

$$\emptyset(x, t; q) = \Psi_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(x, t) q^m \quad (63)$$

sahip oluruz.

$$\Psi_m(x, t) = \left. \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \emptyset(x, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (64)$$

Eğer yardımcı lineer operatör, başlangıç tahmini, bir yardımcı parametre  $h$  ve yardımcı fonksiyon özel olarak seçilebilir.

(63) serisi  $q = 1$ 'de yakınsar, o zaman orijinal lineer olmayan denklemlerin çözümlerinden biri olması gereken

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(x, t) \quad (65)$$

elde ederiz.

Tanım (65) göre, yönetici denklem sıfır dereceli deformasyondan (61) çıkarılabilir.

Vektörleri tanımlayalım:

$$\vec{\Psi}_m(x, t) = \{\Psi_0(x, t), \Psi_1(x, t), \dots, \Psi_m(x, t)\} \quad (66)$$

Sıfır dereceli deformasyon denkleminin (61)  $q$ 'ya göre  $m$  -kez diferansiyel alınıp ve sonra  $m!$  bölünmesi ile ve sonunda  $q = 0$  yerine yazılması ile  $m$ . mertebeden deformasyon denklemini elde ederiz.

$$E[\Psi_m(x, t) - x_m \Psi_{m-1}(x, t)] = hH(x, t)R_m(\vec{\Psi}_{m-1}(x, t)) \quad (67)$$

Ters Elzaki dönüşümlerini uygulayarak,

$$\Psi_m(x, t) = x_m \Psi_{m-1}(x, t) + E^{-1} \left[ hH(x, t)R_m(\vec{\Psi}_{m-1}(x, t)) \right] \quad (68)$$

$$R_m(\vec{\Psi}_{m-1}) = \left. \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\emptyset(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (69)$$

$$\text{ve } X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (70)$$

Bu şekilde  $h = -1$ ,  $m$ . mertebeden  $m \geq 1$  için  $\Psi_m(x, t)$  kolayca elde edilir.

$$\Psi(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(x, t) \quad (71)$$

**Örnek-2.14.** Aşağıdaki örnek ile başlangıç koşulu rastgele olan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi inceleyelim.

$$D_t^\alpha U - U_{xx} - U = 0 \quad (72)$$

Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemin

$$U(x, 0) = A \cos x + B \quad (73)$$

başlangıç koşulu olmak üzere  $A \sim U(\alpha = 1, \beta = 3)$  düzgün dağılım,  $B \sim \text{Beta}(a = 3, b = 2)$  beta dağılımına sahip rastgele değişkenleri için, verilen denklemi Elzaki-Homotopy Analiz Yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini elde edelim.

**Çözüm:**

(72) denkleminde Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{E[U]}{z^\alpha} - \frac{U(x,0)}{z^{\alpha-2}} - E[U_{xx} + U] = 0 \quad (74)$$

bulunur. (74) denklemini  $z^\alpha$  ile çarparsak,

$$E[U] - z^2[A \cos x + B] - z^\alpha E[U_{xx} + U] = 0 \quad (75)$$

elde edilir. Bir nonlinear operatörü tanımlayalım,

$$N[\Phi(x, t; q)] = E[\Phi(x, t; q)] - z^2[A \cos x + B] - z^\alpha E \left[ \frac{\partial^2 \Phi(x, t; q)}{\partial x^2} + \Phi(x, t; q) \right]$$

ve bu yüzden

$$R_m(\vec{\Psi}_{m-1}) = E(\Psi_{m-1}) - (1 - \chi_m)z^2(A\cos x + B) - z^\alpha E[(\Psi_{m-1})_{xx} + \Psi_{m-1}] \quad (76)$$

denkleminin m. mertebeden deformasyon denklemi olmak üzere

$$E[\Psi_m - \chi_m \Psi_{m-1}] = hH(x, t)R_m(\vec{\Psi}_{m-1}) \quad (77)$$

(77) ifadesine Ters Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$\Psi_m = \chi_m \Psi_{m-1} + hE^{-1}[H(x, t)R_m(\vec{\Psi}_{m-1})] \quad (78)$$

$H(x, t) = 1$  seçilir ve  $m = 1, 2, 3, \dots$  için yukarıdaki (78) denklemini çözümlürse,

$$\Psi_0(x, t) = A\cos x + B$$

Başlangıç koşulunu alarak başlayalım,

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \text{ olmak üzere}$$

$m = 1$  için,

$$\Psi_1 = \chi_1 \Psi_0 + hE^{-1}[R_1(\vec{\Psi}_0)]$$

$$\Psi_1 = 0(A\cos x + B)$$

$$+ hE^{-1}[E(\Psi_0) - (1 - \chi_1)z^2(A\cos x + B) - z^\alpha E[(\Psi_0)_{xx} + \Psi_0]]$$

$$\Psi_1 = hE^{-1}[(A\cos x + B)z^2 - z^2(A\cos x + B)] - z^\alpha E[-A\cos x + A\cos x + B]$$

$$\Psi_1 = hE^{-1}[-z^\alpha Bz^2]$$

$$\Psi_1 = -hBE^{-1}[z^{\alpha+2}]$$

$$\Psi_1 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \text{ elde edilir.}$$

$m = 2$  için,

$$\Psi_2 = \chi_2 \Psi_1 + hE^{-1}[R_2(\bar{\Psi}_1)]$$

$$\Psi_2 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$+ hE^{-1}[E(\Psi_1) - (1 - \chi_2)z^2(A\cos x + B) - z^\alpha E[(\Psi_1)_{xx} + \Psi_1]]$$

$$\Psi_2 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + hE^{-1}\left[\left(\frac{-hB}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha+2}\right) - z^\alpha E\left[0 + \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\right]$$

$$\Psi_2 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + hE^{-1}\left[-hBz^{\alpha+2} - z^\alpha\left[\frac{-hB}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha+2}\right]\right]$$

$$\Psi_2 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + hE^{-1}[-hBz^{\alpha+2} + hBz^{2\alpha+2}]$$

$$\Psi_2 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + h\left(-hB\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + hB\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right)$$

$$\Psi_2 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

$m = 3$  için,

$$\Psi_3 = \chi_3 \Psi_2 + hE^{-1}[R_3(\bar{\Psi}_2)]$$

$$\Psi_3 = \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$+ hE^{-1}[E(\Psi_2) - (1 - \chi_3)z^2(A\cos x + B) - z^\alpha E[(\Psi_2)_{xx} + \Psi_2]]$$

$$\begin{aligned}\Psi_3 = & \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ & + hE^{-1} \left[ \frac{-hB}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) z^{\alpha+2} - h^2 \frac{B\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)} \right. \\ & + h^2 \frac{B\Gamma(2\alpha+1)z^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ & \left. - z^\alpha E \left[ \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right] \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3 = & \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{-h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^3Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ & + \frac{h^3Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + E^{-1}[hBz^{2\alpha+2} + h^2Bz^{2\alpha+2} - h^2Bz^{3\alpha+2}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3 = & \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ & + \frac{h^3Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{h^3Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{h^3Bt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\end{aligned}$$

Bulunan  $\Psi_0(x, t), \Psi_1(x, t), \Psi_2(x, t), \Psi_3(x, t)$  değerleri aşağıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) + \Psi_3(x, t) + \dots$$

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) = & A\cos x + B + \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ & + \frac{-hBt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ & + \frac{h^3Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{h^2Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{h^3Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{h^3Bt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\end{aligned}$$

$h = -1$  alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &= A \cos x + B + \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&+ \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&- \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{Bt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}
\end{aligned}$$

$$\Psi(x, t) = A \cos x + B + \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{Bt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

$\alpha = 1, A = 1, B = 1$  seçilerek yakınsaklığı incelersek,  $t = 1, x = 1$  için,

$$r_0: \frac{\|\Psi_1\|}{\|\Psi_0\|} = \frac{\left\| \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\|}{\|A \cos x + B\|} = 0.6492 < 1$$

$$r_1: \frac{\|\Psi_2\|}{\|\Psi_1\|} = \frac{\left\| \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\|}{\left\| \frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\|} = 0.5000 < 1$$

$$r_2: \frac{\|\Psi_3\|}{\|\Psi_2\|} = \frac{\left\| \frac{Bt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right\|}{\left\| \frac{Bt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\|} = 0.3333 < 1$$

⋮

değerleri 1'den küçük olduğundan çözümün yakınsak olduğu görülür.

$\alpha = 1$  için,

$$\Psi(x, t) = A \cos x + B + Bt + \frac{Bt^2}{2}$$

$$\Psi(x, t) = A \cos x + B \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots \right)$$

$$\Psi(x, t) = A \cos x + B e^t$$

tam çözüm elde edilir.  $A \sim U(\alpha, \beta)$  düzgün dağılım,  $B \sim \text{Beta}(a, b)$  beta dağılımına sahip rastgele değişkenleri için, beklenen değer ve varyansları;

$$E[A] = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{Var}[A] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

$$E[B] = \frac{a}{a + b} \quad \text{Var}[B] = \frac{ab}{(a + b)^2(a + b + 1)}$$

olmak üzere, çözümün beklenen değer ve varyansları sırasıyla,

$$E[\Psi(x, t)] = E[A \cos x + B e^t]$$

$$E[\Psi(x, t)] = E[A \cos x] + E[B e^t]$$

$$E[\Psi(x, t)] = \cos x E[A] + e^t E[B]$$

$$E[\Psi(x, t)] = \cos x \frac{(\alpha + \beta)}{2} + e^t \frac{a}{a + b}$$

$$\text{Var}[\Psi(x, t)] = \text{Var}[A \cos x + B e^t]$$

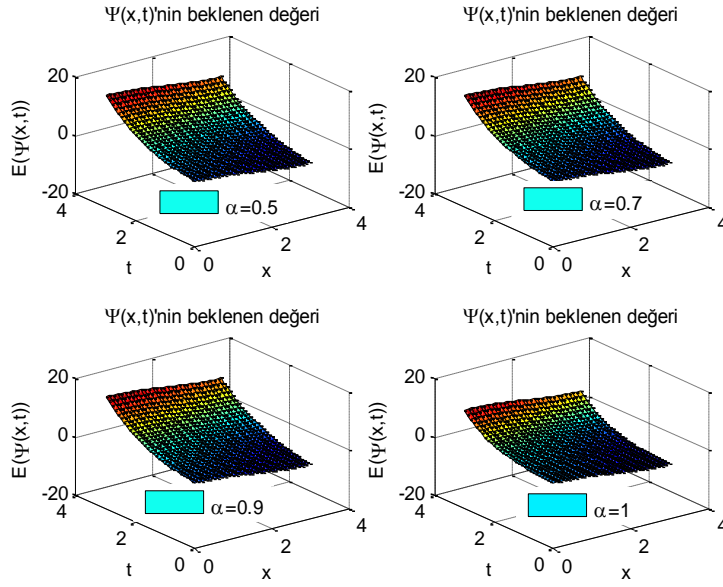
$$\text{Var}[\Psi(x, t)] = \text{Var}[A \cos x] + \text{Var}[B e^t]$$

$$\text{Var}[\Psi(x, t)] = \cos^2 x \text{Var}[A] + e^{2t} \text{Var}[B]$$

$$\text{Var}[\Psi(x, t)] = \cos^2 x \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + e^{2t} \frac{ab}{(a + b)^2(a + b + 1)}$$

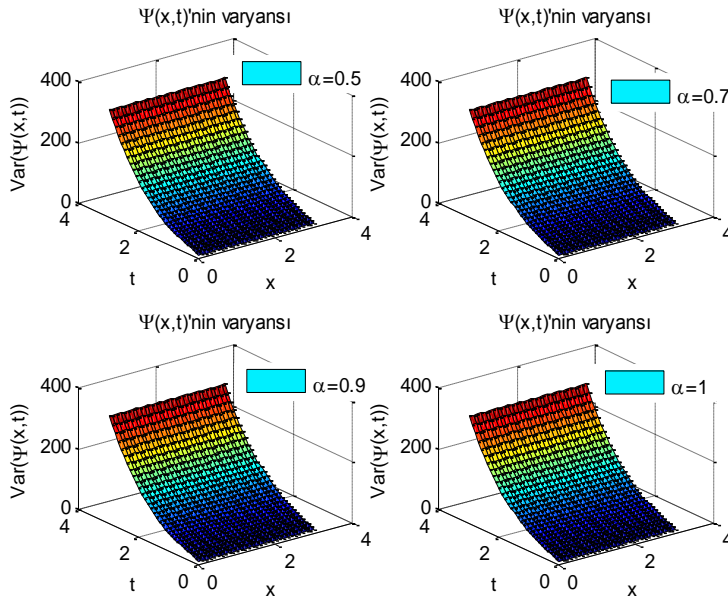
$\alpha = 1, \beta = 3, a = 3, b = 2$  özel değerleri için beklenen değer ve varyans

$$\begin{aligned} E[\Psi(x, t)] &= \cos x \left( \frac{1 + 3}{2} \right) + E_\alpha(t^\alpha) \left( \frac{3}{3 + 2} \right) = 2 \cos x + \frac{3}{5} E_\alpha(t^\alpha) \\ &= 2 \cos x + \frac{3}{5} e^t \end{aligned}$$



Şekil 31.  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  ve  $1$ ,  $\beta = 3$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$  özel değerleri için beklenen değer

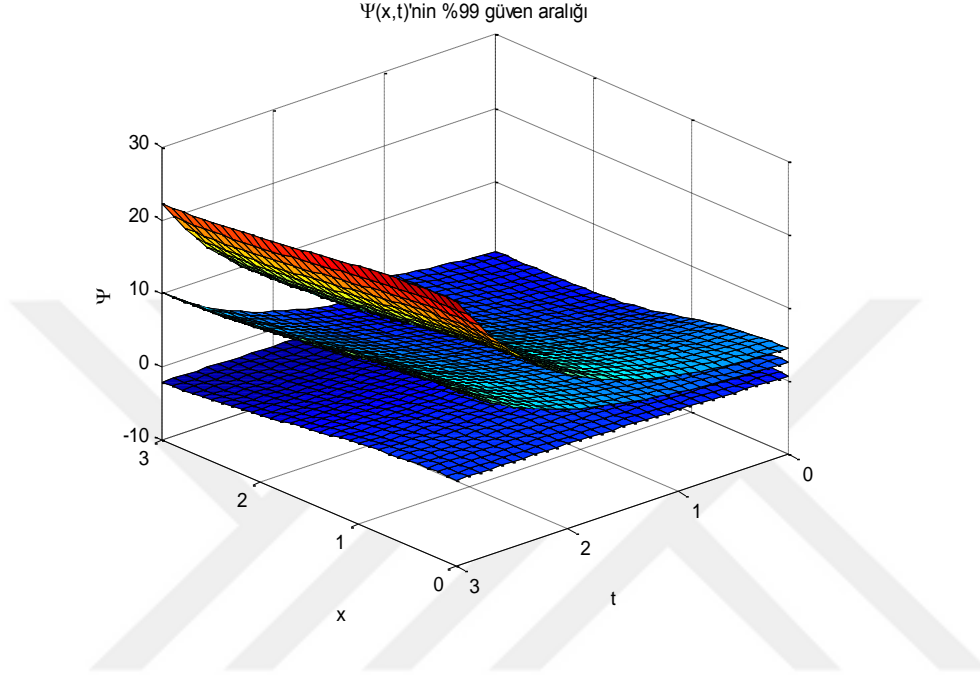
$$\begin{aligned} \text{Var}[\Psi(x, t)] &= \cos^2 x \frac{(1-3)^2}{12} + E_\alpha(t^\alpha)^2 \frac{3.2}{(3+2)^2(3+2+1)} \\ &= \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{E_\alpha(t^\alpha)^2}{25} = \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{e^{2t}}{25} \end{aligned}$$



Şekil 32.  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  ve  $1$ ,  $\beta = 3$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(\Psi(x, t)) - 3stdsapma(\Psi(x, t)), E(\Psi(x, t)) + 3stdsapma(\Psi(x, t))]$$



Şekil 33.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$  özel değerleri için güven aralıkları

**Örnek-2.15.**

$$D_t^\alpha U + UU_x - U + U_x U_{xx} = 0 \quad (79)$$

ile tanımlanan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemin

$$U(x, 0) = A \sin x \quad (80)$$

başlangıç koşulu olmak üzere  $A \sim N(\mu, \sigma^2)$  normal dağılıma sahip rastgele değişkeni için, verilen denklemi Elzaki-Homotopy Analiz Yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

### Çözüm:

(79) denkleminin her iki tarafına Elzaki Dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{E[U]}{z^\alpha} - \frac{U(x,0)}{z^{\alpha-2}} + E[UU_x - U + U_x U_{xx}] = 0 \quad (81)$$

bulunur. (80) koşulunu (81)'te yerine yazalım.

$$E[U] - A \sin x z^2 + z^\alpha E[UU_x - U + U_x U_{xx}] = 0$$

elde edilir. Şimdi bir nonlineer operatörü tanımlayalım,

$$N[\phi(x, t; q)] = E[\phi(x, t; q)] - z^2[A \sin x] \\ + z^\alpha E \left[ \phi(x, t; q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} - \phi(x, t; q) + \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} \right]$$

ve bu yüzden deformasyon denklemi

$$R_m(\vec{\Psi}_{m-1}) = E(\Psi_{m-1}) - (1 - \chi_m)z^2(A \sin x) + z^\alpha E[\Psi_{m-1}\Psi_{(m-1)x} - \\ \Psi_{m-1} + (\Psi_{m-1})_x(\Psi_{m-1})_{xx}] \quad (82)$$

denkleminin m. mertebeden deformasyon denklemi olmak üzere

$$E[\Psi_m - \chi_m \Psi_{m-1}] = hH(x, t)R_m(\vec{\Psi}_{m-1}) \quad (83)$$

(83) ifadesine Ters Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$\Psi_m = \chi_m \Psi_{m-1} + hE^{-1}[H(x, t)R_m(\vec{\Psi}_{m-1})] \quad (84)$$

$H(x, t) = 1$  seçilir ve  $m = 1, 2, 3, \dots$  için yukarıdaki (84) denklemini çözümlürse,

$$\Psi_0(x, t) = A \sin x$$

Başlangıç koşulunu alarak başlayalım,

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \text{ olmak üzere,}$$

$m = 1$  için,

$$\Psi_1 = \chi_1 \Psi_0 + hE^{-1}[R_1(\bar{\Psi}_0)]$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 0(A\sin x) \\ &\quad + hE^{-1}[E(\Psi_0) - (1 - \chi_1)z^2(A\sin x) \\ &\quad + z^\alpha E[\Psi_0(\Psi_0)_x - \Psi_0 + (\Psi_0)_x(\Psi_0)_{xx}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= hE^{-1}[(A\sin x)z^2 - z^2(A\sin x)] \\ &\quad + z^\alpha E[A\sin x + A\cos x - A\sin x + A\cos x(-A\sin x)] \end{aligned}$$

$$\Psi_1 = hE^{-1}[-z^\alpha(A\sin x)z^2]$$

$$\Psi_1 = -h(A\sin x)E^{-1}[z^{\alpha+2}]$$

$$\Psi_1 = -h(A\sin x)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$m = 2$  için,

$$\Psi_2 = \chi_2 \Psi_1 + hE^{-1}[R_2(\bar{\Psi}_1)]$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{-h(A\sin x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad + hE^{-1}[E(\Psi_1) - (1 - \chi_2)z^2(A\sin x) \\ &\quad + z^\alpha E[\Psi_1(\Psi_1)_x - \Psi_1 + (\Psi_1)_x(\Psi_1)_{xx}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 = & \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + hE^{-1} \left[ \frac{-h(Asinx)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) z^{\alpha+2} \right] \\ & + z^\alpha E \left[ \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h(Acosx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right. \\ & \left. - \frac{h(Acosx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2 = & \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ & + hE^{-1} \left[ -h(Asinx)z^{\alpha+2} + \frac{h(Asinx)z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) z^{\alpha+2} \right]\end{aligned}$$

$$\Psi_2 = \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + hE^{-1} [-h(Asinx)z^{\alpha+2} + h(Asinx)z^{2\alpha+2}]$$

$$\Psi_2 = \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

$m = 3$  için,

$$\Psi_3 = \chi_3 \Psi_2 + hE^{-1} [R_3(\vec{\Psi}_2)]$$

$$\begin{aligned}\Psi_3 = & \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ & + hE^{-1} [E(\Psi_2) - (1 - \chi_3)z^2(Asinx) \\ & + z^\alpha E[\Psi_2(\Psi_2)_x - \Psi_2 + (\Psi_2)_x(\Psi_2)_{xx}]]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + hE^{-1} \left[ \frac{-h(Asinx)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) z^{\alpha+2} - \frac{h^2(Asinx)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) z^{\alpha+2} \right. \\
& + \frac{h^2(Asinx)}{\Gamma(2\alpha+1)} \Gamma(2\alpha+1) z^{2\alpha+2} \\
& + z^\alpha E \left[ \left( \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right. \right. \\
& + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \left. \left( \frac{-h(Acosx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Acosx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2(Acosx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right. \\
& - \left. \left( \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right. \\
& + \left. \left( \frac{-h(Acosx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Acosx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Acosx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \left( \frac{h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + hE^{-1} \left[ -h(Asinx)z^{\alpha+2} - h^2(Asinx)z^{\alpha+2} + h^2(Asinx)z^{2\alpha+2} \right. \\
& + \left. z^\alpha E \left[ \frac{h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + hE^{-1} \left[ -h(Asinx)z^{\alpha+2} - h^2(Asinx)z^{\alpha+2} + h^2(Asinx)z^{2\alpha+2} \right. \\
& + \frac{h(Asinx)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) z^{2\alpha+2} + \frac{h^2(Asinx)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) z^{2\alpha+2} \\
& \left. - \frac{h^2(Asinx)}{\Gamma(2\alpha+1)} \Gamma(2\alpha+1) z^{3\alpha+2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3 = & \frac{-h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& - h^2(Asinx) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - h^3(Asinx) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& + h^3(Asinx) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + h^2(Asinx) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + h^3(Asinx) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - h^3(Asinx) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}
\end{aligned}$$

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) + \Psi_3(x, t) + \dots$$

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) = & A(\sin x) - \frac{h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \\
& \frac{h(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{h^2(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{h^3(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{h^3(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \\
& \frac{h^2(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{h^3(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{h^3(Asinx)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \quad (85)
\end{aligned}$$

$h = -1$  alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) = & A(\sin x) + \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \\
& \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \\
& \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \quad (86)
\end{aligned}$$

$$\Psi(x, t) = A(\sin x) + \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

$\alpha = 1, A = 1$  seçilerek yakınsaklığı incelersek,  $t = 1, x = 1$  için,

$$r_0: \frac{\|\Psi_1\|}{\|\Psi_0\|} = \frac{\left\| \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\|}{\|A(\sin x)\|} = 1$$

$$r_1: \frac{\|\Psi_2\|}{\|\Psi_1\|} = \frac{\left\| \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\|}{\left\| \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\|} = 0.5000 < 1$$

$$r_2: \frac{\|\Psi_3\|}{\|\Psi_2\|} = \frac{\left\| \frac{(Asinx)t^{3\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\|}{\left\| \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right\|} = 0.3333 < 1$$

$$r_3: \frac{\|\Psi_4\|}{\|\Psi_3\|} = \frac{\left\| \frac{(Asinx)t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} \right\|}{\left\| \frac{(Asinx)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right\|} = 0.2500 < 1$$

⋮

değerleri 1'den küçük olduğundan çözümün yakınsak olduğu görülür.

$\alpha = 1$  için,

$$\Psi(x, t) = A(\sin x) + A(\sin x)t + \frac{A(\sin x)t^2}{2!} + \frac{A(\sin x)t^3}{3!} + \dots$$

$$\Psi(x, t) = A(\sin x) \left( 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right)$$

$\Psi(x, t) = A \sin x E_t(t^\alpha)$  tam çözüm elde edilir.

$A \sim N(\mu, \sigma^2)$ , normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

olmak üzere, beklenen değer, ikinci moment ve varyansı;

$$E[A] = \mu, \quad E[A^2] = \mu^2 + \sigma^2, \quad \text{var}[A] = \sigma^2$$

eşitlikleri ile verilir. (86) ifadesinin beklenen değeri,

$$E[\Psi(x, t)] = E \left[ A(\sin x) + \frac{(Asinx)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(Asinx)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right]$$

$$[\Psi(x, t)]$$

$$= (\sin x)E[A] + \frac{(\sin x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E[A] + \frac{(\sin x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} E[A] + \frac{(\sin x)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} E[A]$$

+ ...

bulunur ve  $E[A] = \mu$  yerine yazılır ise,

$$E[\Psi(x, t)] = \mu(\sin x) + \mu \frac{(\sin x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \mu \frac{(\sin x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \mu \frac{(\sin x)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots$$

$$E[\Psi(x, t)] = \mu \left[ (\sin x) + \frac{(\sin x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(\sin x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(\sin x)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right]$$

ifadesi elde edilir. (86) ifadesinin varyansı,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Psi(x, t)] &= \text{Var} \left[ A(\sin x) + \frac{(A \sin x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(A \sin x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(A \sin x)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Psi(x, t)] &= (\sin^2 x) \text{Var}[A] + \frac{(\sin^2 x)t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \text{Var}[A] + \frac{(\sin^2 x)t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)^2} \text{Var}[A] \\ &+ \frac{(\sin^2 x)t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \text{Var}[A] + \dots \end{aligned}$$

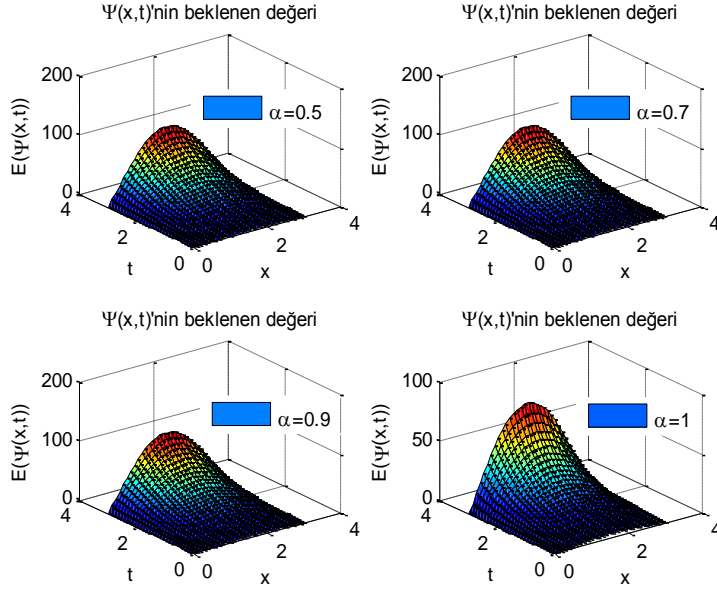
$$\text{Var}[A] = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Psi(x, t)] &= \sigma^2 \left[ (\sin^2 x) + \frac{(\sin^2 x)t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2} + \frac{(\sin^2 x)t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)^2} + \frac{(\sin^2 x)t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak  $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 3)$  seçilirse,

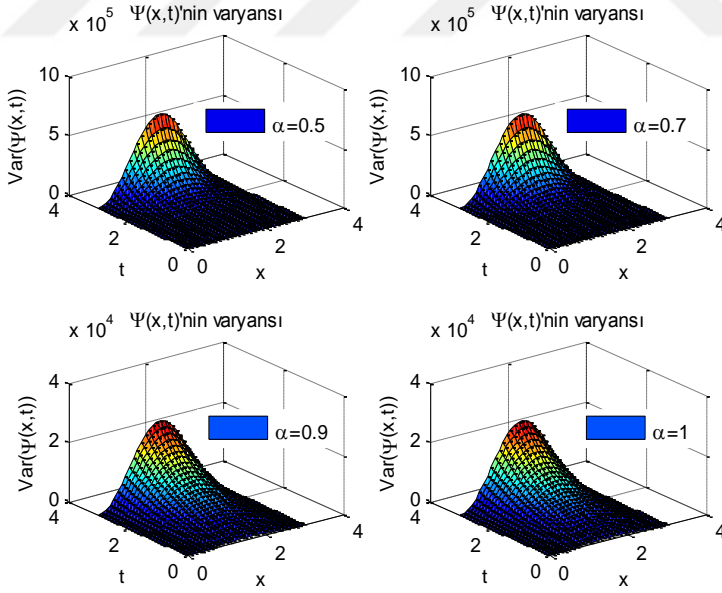
$$E[\Psi(x, t)] = 4(\sin x) \left[ 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right]$$



Şekil 34.  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  ve  $1$ ,  $\mu = 4$  özel değerleri için beklenen değer

$$\text{Var}[\Psi(x, t)]$$

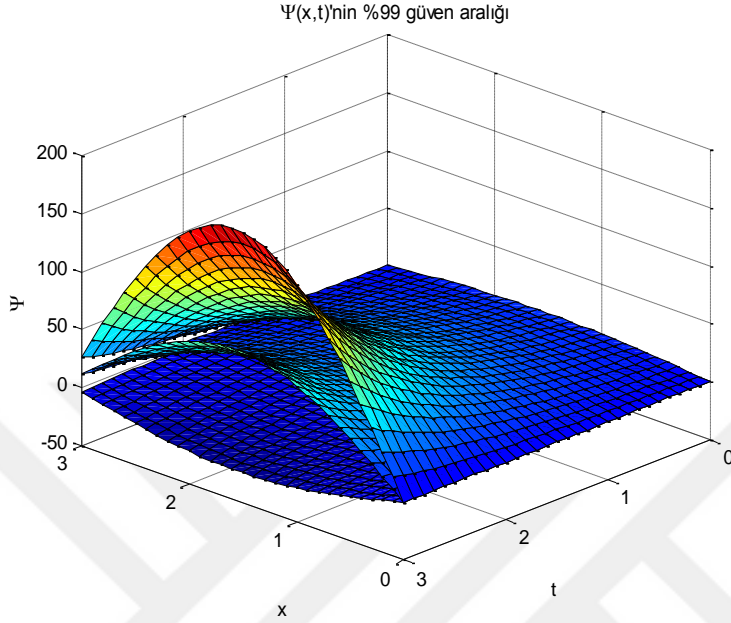
$$= 3(\sin^2 x) \left[ 1 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)^2} + \frac{t^{6\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} + \dots \right]$$



Şekil 35.  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  ve  $1$ ,  $\sigma^2 = 3$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(\Psi(x, t)) - 3stdsapma(\Psi(x, t)), E(\Psi(x, t)) + 3stdsapma(\Psi(x, t))]$$



Şekil 36.  $\alpha = 1$ ,  $\mu = 4$ ,  $\sigma^2 = 3$  özel değerleri için güven aralıkları

**Örnek-2.16.** Aşağıdaki örnek ile katsayıları koşullu rastgele olan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi inceleyelim.

$$D_t^\alpha U - AUU_{xx} - U + AU^2 = 0 \quad (87)$$

başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = A \sinh(x) \quad (88)$$

olmak üzere  $A \sim G(a = 1, b = 3)$  Gamma dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Kesirli mertebeden rastgele kısmi diferansiyel denklemin çözümünü Elzaki-HAM yöntemi ile elde ederek çözüm davranışlarını inceleyiniz.

### Çözüm:

(87) denkleminin her iki tarafına Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{E[U]}{z^\alpha} - \frac{U(x,0)}{z^{\alpha-2}} + E[-AUU_{xx} - U + AU^2] = 0 \quad (89)$$

$$E[U] - z^2[Asinh(x)] + z^\alpha E[-AUU_{xx} - U + AU^2] = 0 \quad (90)$$

Şimdi bir nonlinear operatörü tanımlayalım,

$$\begin{aligned} N[\Phi(x, t; q)] &= E[\Phi(x, t; q)] - z^2[Asinh(x)] \\ &+ z^\alpha E \left[ -A\Phi(x, t; q) \frac{\partial^2 \Phi(x, t; q)}{\partial x^2} - \Phi(x, t; q) + A\Phi(x, t; q)^2 \right] \end{aligned}$$

ve bu yüzden deformasyon denklemi,

$$\begin{aligned} R_m(\vec{\Psi}_{m-1}) &= \\ E(\Psi_{m-1}) - (1 - \chi_m)z^2 Asinh(x) + z^\alpha E[-A\Psi_{m-1}\Psi_{(m-1)xx} - \Psi_{m-1} + \\ A(\Psi_{m-1})^2] & \end{aligned} \quad (91)$$

denkleminin m. mertebeden deformasyon denklemi

$$E[\Psi_m - \chi_m \Psi_{m-1}] = \hbar H(x, t) R_m(\vec{\Psi}_{m-1}) \quad (92)$$

(92) ifadesine Ters Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$\Psi_m = \chi_m \Psi_{m-1} + \hbar E^{-1}[H(x, t) R_m(\vec{\Psi}_{m-1})] \quad (93)$$

$H(x, t) = 1$  seçilirse ve  $m = 1, 2, 3, \dots$  için yukarıdaki (93) denklemini çözelim.

Başlangıç koşulunu alarak başlayalım,

$$\Psi_0(x, t) = Asinh(x)$$

$m = 1$  için,

$$\Psi_1 = \chi_1 \Psi_0 + \hbar E^{-1}[R_1(\vec{\Psi}_0)]$$

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 0A \sinh(x) \\ &+ hE^{-1} \left[ E(\Psi_0) - (1 - \chi_1)z^2 A \sinh(x) \right. \\ &\left. + z^\alpha E \left[ -A\Psi_0(\Psi_0)_{xx} - \Psi_0 + A\Psi_0^2 \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= hE^{-1} [A \sinh(x)z^2 - z^2 A \sinh(x)] \\ &+ z^\alpha E [-A^3 \sinh^2 x - A \sinh(x) + A^3 \sinh^2 x] \end{aligned}$$

$$\Psi_1 = hE^{-1} [z^{\alpha+2} E(-A \sinh(x))]$$

$$\Psi_1 = AhE^{-1} [-z^{\alpha+2} \sinh(x)] A(-\sinh(x)) E^{-1} [z^{\alpha+2}]$$

$$\Psi_1 = -Ah \sinh(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

$m = 2$  için,

$$\Psi_2 = \chi_2 \Psi_1 + hE^{-1} [R_2(\bar{\Psi}_1)]$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{-Ah \sinh(x) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &+ hE^{-1} \left[ E(\Psi_1) - (1 - \chi_2)z^2 A \sinh(x) \right. \\ &\left. + z^\alpha E \left[ -A\Psi_1(\Psi_1)_{xx} - \Psi_1 + A\Psi_1^2 \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{-Ah \sinh(x) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + hE^{-1} \left[ \frac{-Ah \sinh(x)}{\Gamma(\alpha + 1)} \Gamma(\alpha + 1) z^{\alpha+2} \right] \\ &+ z^\alpha E \left[ -A(A^2 h^2 \sinh^2 x) \left( \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 + \frac{Ah \sinh(x) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right. \\ &\left. + A(A^2 h^2 \sinh^2 x) \left( \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\Psi_2 = \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + hE^{-1} \left[ -Ahsinh(x)z^{\alpha+2} + z^\alpha E \left[ \frac{Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \right]$$

$$\Psi_2 = \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + hE^{-1} \left[ -Ahsinh(x)z^{\alpha+2} + z^\alpha \frac{Ahsinh(x)}{\Gamma(\alpha + 1)} z^{\alpha+2} \Gamma(\alpha + 1) \right]$$

$$\Psi_2 = \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + hE^{-1} [-Ahsinh(x)z^{\alpha+2} + z^{2\alpha+2} Ahsinh(x)]$$

$$\Psi_2 = \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - Ah^2sinh(x)E^{-1}[z^{\alpha+2}] + Ah^2sinh(x)E^{-1}[z^{2\alpha+2}]$$

$$\Psi_2 = \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - Ah^2sinh(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + Ah^2sinh(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

$$\Psi_2 = \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

$m = 3$  için,

$$\Psi_3 = \chi_3 \Psi_2 + hE^{-1} [R_3(\vec{\Psi}_2)]$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ & + hE^{-1} \left[ E(\Psi_2) - (1 - \chi_3)z^2 Asinh(x) \right. \\ & \left. - z^\alpha E[-A\Psi_2(\Psi_2)_{xx} - \Psi_2 + A\Psi_2^2] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + hE^{-1} \left[ -\frac{Ahsinh(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha+2} - \frac{Ah^2sinh(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha+2} \right. \\
& \left. + \frac{Ah^2sinh(x)}{\Gamma(2\alpha+1)}\Gamma(2\alpha+1)z^{2\alpha+2} \right] \\
& - z^\alpha E \left[ -A \left( \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \left( \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right. \\
& \left. - \left( \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right. \\
& \left. + A \left( \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + hE^{-1} [-Ahsinh(x)z^{\alpha+2} - Ah^2sinh(x)z^{\alpha+2} \\
& + Ah^2sinh(x)z^{2\alpha+2}] \\
& - z^\alpha E \left[ \frac{Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + hE^{-1} [-Ahsinh(x)z^{\alpha+2} - Ah^2sinh(x)z^{\alpha+2} \\
& + Ah^2sinh(x)z^{2\alpha+2}] \\
& - z^\alpha \left( \frac{Ahsinh(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha+2} + \frac{Ah^2sinh(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha+2} \right. \\
& \left. - \frac{Ah^2sinh(x)}{\Gamma(2\alpha+1)}\Gamma(2\alpha+1)z^{2\alpha+2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3 &= \frac{-Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&+ hE^{-1}[-Ahsinh(x)z^{\alpha+2} - Ah^2sinh(x)z^{\alpha+2} \\
&+ Ah^2sinh(x)z^{2\alpha+2}] - Ahsinh(x)z^{2\alpha+2} - Ah^2sinh(x)z^{2\alpha+2} \\
&+ Ah^2sinh(x)z^{3\alpha+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3 &= -\frac{Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&- \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^3sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Ah^3sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&- \frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{Ah^3sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{Ah^3sinh(x)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}
\end{aligned}$$

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) + \Psi_3(x, t) + \dots$$

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &= Asinh(x) - \frac{Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \\
&\frac{Ah^2sinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{Ahsinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^2sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Ah^3sinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \\
&\frac{Ah^3sinh(x)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}
\end{aligned} \tag{94}$$

$h = -1$  alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &= Asinh(x) + \frac{Asinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{Asinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Asinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{Asinh(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{Asinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Asinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Asinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{Asinh(x)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{Asinh(x)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}
\end{aligned}$$

$$\Psi(x, t) = A \sinh(x) + A \sinh(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A \sinh(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots$$

$$\Psi(x, t) = A \sinh(x) \left( 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \right)$$

$\alpha = 1, A = 1$  seçilerek yakınsaklığı incelersek,  $t = 1, x = 1$  için,

$$r_0: \frac{\|\Psi_1\|}{\|\Psi_0\|} = \frac{\left\| \frac{(A \sinh x) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\|}{\|A(\sinh x)\|} = 1$$

$$r_1: \frac{\|\Psi_2\|}{\|\Psi_1\|} = \frac{\left\| \frac{(A \sinh x) t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right\|}{\left\| \frac{(A \sinh x) t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\|} = 0.5000 < 1$$

$$r_2: \frac{\|\Psi_3\|}{\|\Psi_2\|} = \frac{\left\| \frac{(A \sinh x) t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right\|}{\left\| \frac{(A \sinh x) t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right\|} = 0.3333 < 1$$

$$r_3: \frac{\|\Psi_4\|}{\|\Psi_3\|} = \frac{\left\| \frac{(A \sinh x) t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \right\|}{\left\| \frac{(A \sinh x) t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right\|} = 0.2500 < 1$$

⋮

değerlerinin 1'den küçük olduğundan çözümün yakınsak olduğu görülür.

$$\Psi(x, t) = A \sinh(x) E_t(t^\alpha) \quad (95)$$

$\alpha = 1$  için

$$\Psi(x, t) = A \sinh(x) e^t \quad (96)$$

$X$  Gamma dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere  $X \sim G(a, b)$ , moment çıkaran fonksiyonu ve momentleri aşağıda verilmiştir (Khaniyev, vd., 2017):

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \left( \frac{b}{b-t} \right)^a.$$

$X \sim G(a, b)$  beklenen değer ve varyansı;

$$E[X] = \frac{a}{b}, Var[X] = \frac{a}{b^2}.$$

$X$  ve  $Y$  bağımsız rastgele değişkenleri için  $E[XY] = E[X]E[Y]$  dir.

(95) eşitliğinin beklenen değer ve varyansı;

$$E[\Psi(x, t)] = E[A \sinh(x) E_t(t^\alpha)]$$

$$E[\Psi(x, t)] = (\sinh x) E_t(t^\alpha) E[A] = \frac{a}{b} (\sinh x) E_t(t^\alpha)$$

ve

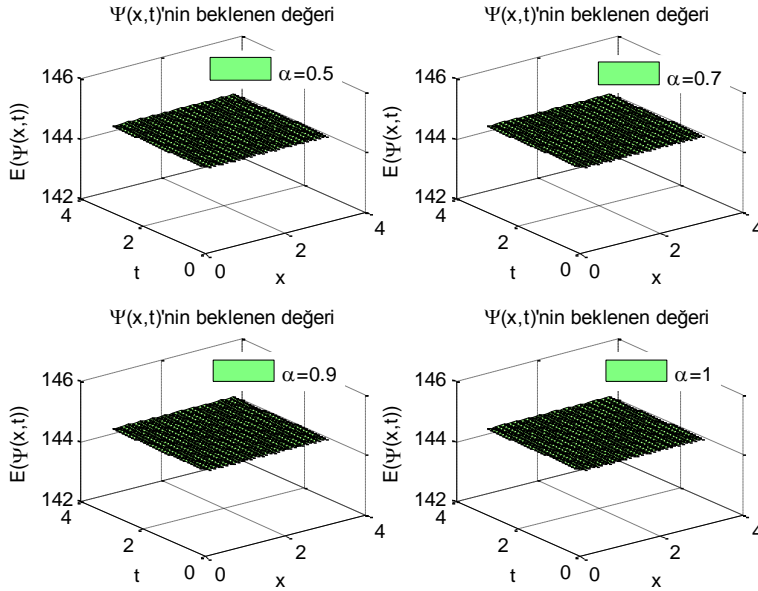
$$Var[\Psi(x, t)] = Var[A \sinh(x) E_t(t^\alpha)]$$

$$Var[\Psi(x, t)] = ((\sinh x) E_t(t^\alpha))^2 var[A] = ((\sinh x) E_t(t^\alpha))^2 \frac{a}{b^2}$$

Özel olarak;

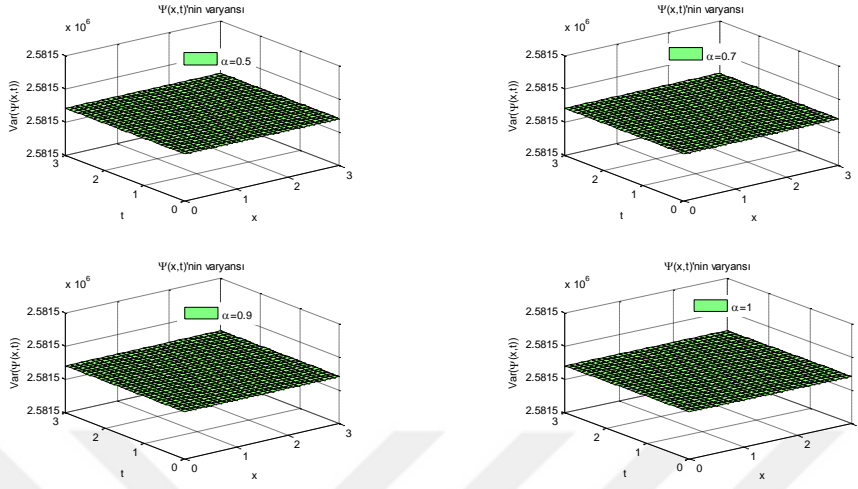
$$A \sim G(a = 1, b = 3)$$

$$E[\Psi(x, t)] = \frac{a}{b} (\sinh x) E_t(t^\alpha) = \frac{1}{3} (\sinh x) E_t(t^\alpha)$$



Şekil 37.  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  ve  $1$  ,  $a = 1$  ,  $b = 3$  özel değerleri için beklenen değer

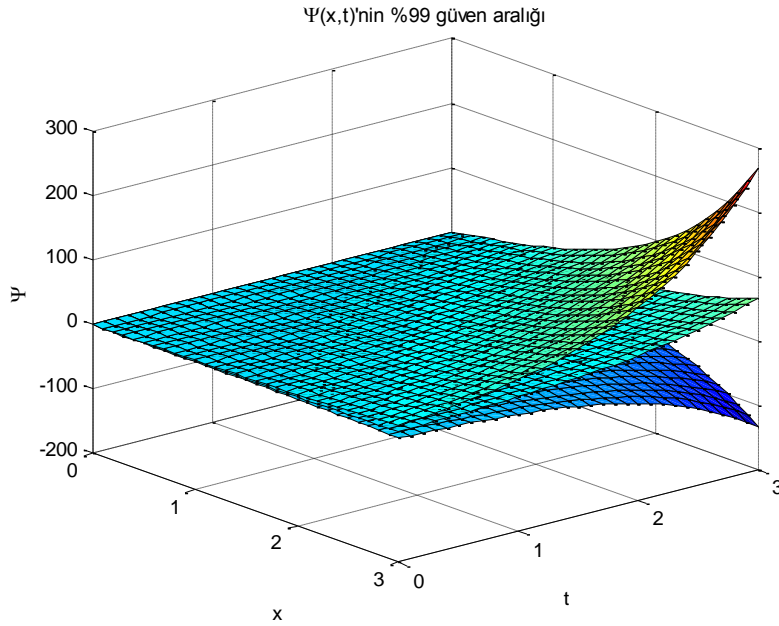
$$\text{Var}[\Psi(x, t)] = ((\sinh x)E_t(t^\alpha))^2 \frac{a}{b^2} = \frac{1}{9} ((\sinh x)E_t(t^\alpha))^2$$



Şekil 38.  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  ve  $1$  ,  $a = 1$  ,  $b = 3$  özel değerleri için varyans

Güven aralıkları

$$[E(\Psi(x, t)) - 3\text{stdsapma}(\Psi(x, t)), E(\Psi(x, t)) + 3\text{stdsapma}(\Psi(x, t))]$$



Şekil 39.  $\alpha = 1$  ,  $a = 1$  ,  $b = 3$  özel değerleri için güven aralıkları

### 3. İRDELEME

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemlerinin yanısıra, kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemleri başlangıç koşulları veya katsayılar rastgele seçilerek, rastgele hale dönüştürülmüşlerdir. Kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemleri rastgele etkiler altında incelenmesi için Normal, Düzgün, Beta, Gamma, Laplace, Üçgensel, Weibull ve Üstel dağılımlarına sahip rastgele etki terimleri kullanılmıştır. Bu rastgele kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri için literatürde çok sık kullanılan yöntemlerden birisi olan Adomian Ayrışım Yöntemi ve Homotopy Analiz Metodu'nun Elzaki Dönüşüm yöntemi ile birlikte kullanıldığı hibrit metotlar olan ED-AAM ve ED-HAM yöntemlerinden istifade edilmiştir. Kesirli türevin farklı değerleri için, elde edilen bu çözümlerin beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanarak Matlab paket programı yardımıyla grafiksel olarak gösterilmiştir.

#### 4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada kesirli ve kesirli mertebeden olmayan adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemleri başlangıç koşulları ya da katsayıları sürekli zamanlı olasılık dağılımları olan Düzgün, Normal, Beta, Üçgensel, Weibull, Gamma, Laplace ve Üstel dağılımlarından herhangi biri seçilerek denklemler rastgele hale dönüştürülmüştür. Bu rastgele hale getirilen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güvenlik aralıkları hesaplanmıştır. Rastgele hale dönüştürülen adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden literatürde çok yaygın olarak kullanılan Adomian Ayrışım Yöntemi ve Homotopy Analiz Metodu'nun Elzaki Dönüşüm yöntemi ile birlikte kullanıldığı hibrit metotlar olan ED-AAM ve ED-HAM yöntemlerinden faydalanılmıştır. Buna ek olarak kesirli türevin farklı değerleri için analizler yapılmıştır. Son olarak elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güven aralıklarının çözüm grafikleri Matlab 2013 paket programı yardımıyla çizilmiştir.

## 5. ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan kesirli ve kesirli olmayan mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ve denklem sistemleri rastgele hale dönüştürülerek olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Rastgele hale getirilen denklemler Elzaki dönüşüm ve HAM yöntemiyle yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir. Rastgele lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemler kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere dönüştürülerek gecikme terimi eklenerek Adomian Ayrışım Yöntemi ve Homotopy Perturbasyon Metodu'nun Sumudu Dönüşüm yöntemi ile birlikte kullanıldığı hibrit metotlar olan SD-AAM ve SD-HPM yöntemleriyle yaklaşık analitik çözümleri bulunabilir. Literatür de çok sık kullanılan homotopy perturbasyon, sumudu, aboodh, diferansiyel dönüşüm ve varyasyonel iterasyon yöntemi yardımıyla yaklaşık analitik çözümler bulunabilir.

## KAYNAKÇA

- Aboodh, K. S. (2013). The new integrale transform "Aboodh transform", *Global journal of pure and applied mathematics*, 9(1), 35-43.
- Ahmad, J., Mohyud-Din, S. T., Srivastava, H. M. ve Yang, X-J. (2015). Analytic solutions of the Helmholtz and Laplace equations by using local fractional derivative operators, *Waves, Wavelets and fractals – Advanced analysis*, 1, 22-26.
- Akdeniz, F. (2014). *Olasılık ve istatistik*, Akademisyen Kitabevi, Ankara, 602s.
- Anaç, H., Merdan, M., ve Kesemen, T. (2020). Solving for the random component time-fractional partial differential equations with the new Sumudu transform iterative method SN Applied Sciences, *Research article*, 2:1112.
- Asai, Y. ve Kloeden, P.E. (2013). Numerical schemes for random ODEs via stochastic differential equations. *Commun. Appl. Anal*, 17(3 & 4), 511–528.
- Bekiryazıcı, Z., Merdan, M. ve Kesemen, T. ve Najmuldeen, M. (2016). Mathematical Modeling of Dengue Disease under Random Effects *Mathematical sciences and applications e-notes*, 4 (2) 58-70.
- Bekiryazıcı, Z., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2021). Modification of the random differential transformation method and its applications to compartmental models, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 50:18, 4271-4292.
- Benzoni, S. (2011). *Analyse de fourier, Universite de lyon, Lyon 1, Camille jordan institute, Saint-Étienne*.
- Bhadane, P. G., Pradhan, V. H. ve Desale, S. V. (2013). Elzaki Transform Solution of One Dimensional Ground Water Recharge through Spreading, *International journal of engineering research and applications*, 3(6), 1607-1610.
- Bildik, N. (2017). General Convergence Analysis for the Perturbation Iteration Technique, *Turk. J. Math. Comput. Sci.* 6, 1–9.
- Devi, A., Roy, P. ve Gill, V. (2017). Solution of ordinary differential equations with variable coefficients using Elzaki transform, *Asian journal of applied science and technology*, 1, 186-194.

- Elzaki, T. M. ve Ezaki, S. M. (2011a). Solution of Integro-Differential Equations by Using Elzaki Transform, *Global journal of mathematical sciences: Theory & Practical* , 3(1), 1-11.
- Elzaki, T. M. ve Ezaki, S. M. (2011b). On the Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation with Variable Coefficients, *Advances in theoretical and applied mathematics*, 6(1), 41-46.
- Elzaki, T. M. ve Ezaki, S. M. (2011c). On the Elzaki Transform and Higher Order Ordinary Differential Equations, *Advances in theoretical and applied mathematics*, 6(1), 107-113.
- Elzaki, T. M. ve Ezaki, S. M. (2011d). On the Elzaki Transform and System of Partial Differential Equations, *Advances in theoretical and applied mathematics*, 6(1), 115-123.
- Elzaki, T.M. (2011). The New Integral Transform "Elzaki Transform", *Global journal of pure and applied mathematics*, 7(1), 57-64.
- Elzaki, T.M. ve Hilal, E. M. A. (2012). Analytical Solution for Telegraph Equation by Modified of Sumudu Transform "Elzaki Transform", *Mathematical theory and modeling*, 2(4), 104-111.
- Elzaki, T. M. ve Alkhateeb, S. A. (2015). Modification of Sumudu Transform "Elzaki Transform" and Adomian Decomposition Method. *Applied mathematical sciences*, vol. 9, no. 13, pp. 603-611.
- Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications*. 3rd Edition, John Wiley, Hoboken.
- Han, X. ve Kloeden, P.E. (2017). *Random ordinary differential equations and their numerical solution*, Springer, Singapore.
- He, J. H. (2012). Asymptotic Methods for Solitary Solutions and Compactons, *Abstract and applied analysis*, Article ID: 916793, 1-130.
- Ige, O. E., Oderinu, R. A. ve Elzaki, T. M. (2019a). Adomian Polynomial and Elzaki Transform Method for Solving Sine-Gordon Equations. *IAENG international journal of applied mathematics*, vol. 49, no. 3, pp. 344-350.

- Ige, O. E., Oderinu, R. A. ve Elzaki, T. M. (2019b). Adomian Polynomial and Elzaki Transform Method of Solving Fifth Order Korteweg-De Vries Equations. *Caspian journal of mathematical sciences*, vol. 8, no. 2, pp. 103-119.
- Jumarie, G. (2009). Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions, *Applied mathematics letters*, 22, 378-385.
- Kalavathi, A., Kohila, T. ve Upadhyaya, L. M. (2021). On the degenerate Elzaki transform, *Bulletin of pure and applied sciences section -e-mathematics & statistics*, 40E(1), 99-107.
- Khan, Z. H. ve Khan, W. A. (2008). N-transform properties and applications, *NUST journal of engineering sciences*, 1, 127-133.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z., ve Kesemen T. (2017). *Olasılık kuramında çözümlü problemler*, Nobel Akademik Yayıncılık.
- Kim, H. J. (2013). The time shifting theorem and the convolution for Elzaki transform, *Global journal of pure and applied mathematics*, 87, 261-271.
- Kolwankar, K.M. ve Gangal, A.D. (1996). Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimension, *Chaos*. 505–513.
- Kolwankar, K.M. ve Gangal, A.D. (1997a). Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives, *Pramana J. Phys.* 49–68.
- Kolwankar, K.M. ve Gangal, A.D. (1997b). Local fractional Fokker–Planck equation, *Phys. Rev. Lett.* 49–52.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley-Sons, Newyork.
- Liao, S. J. (1992). The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. *Ph.D thesis*, Shanghai Jiao Tong University.
- Liao, S. J. (1995). An approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special example. *Int j nonlinear mech*, 30:371–80.

- Liao, S. J. (1997). An approximate solution technique which does not depend upon small parameters (II): an application in fluid mechanics. *Int j nonlinear mech*, 32:815–22.
- Liao, S. J. (1999). An explicit, totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems. *Int j nonlinear mech*, 34(4):759–78.
- Liao, S. J. (2002). Campo A. Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems. *J fluid mech*, 453:411–25.
- Liao, S. J. (2003a). Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method. *Ist. end., chapman and hall, CRC press, boca raton, ISBN-10: 158488407X, pp:336.*
- Liao, S. J. (2003b). On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet. *J. fluid mech.*, 488: 189-212.
- Liao, S. J. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Appl math comput*, 147:499–513.
- Liao, S. J. (2005). A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate. *Int. J. heat mass transfer* 48: 2529-2539.
- Liao, S. J. (2009). Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems, *Commun. Nonlinear sci. numer. simul.* 14: 983–997.
- Liao, S. J. (2012). Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations. *Springer-verlag berlin heidelberg.*
- Lomen, D. (1962). Application of the Mellin Transform to Boundary Value Problems, *Proceedings of the Iowa academy of science*, 69(1), 436-442.
- Maddox, I. J. (1970). *Elements of functional analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mahgob, M. M. A. ve Elzaki, T. M. (2015a). Elzaki Transform and Integro-Differential Equation with a Bulge Function, *IOSR journal of mathematics*, 11(2), 25-28.
- Mahgob, M. M. A. ve Elzaki, T.M. (2015b). Solution of Partial Integro-Differential Equations by Elzaki Transform Method, *Applied mathematical sciences*, 9(6), 295-303.

- Mahgob, M. M. A. (2012). Elzaki Transform and a Bulge Function on Volterra Integral Equations of the Second Kind, *IOSR journal of mathematics*, 11(2), 68-70.
- Mahgoub, M. M. A. ve Sedeeg, A. K. H. (2016). On the Solution of Newell-Whitehead-Segel Equation. *American journal of mathematical and computer modelling*, vol. 1, no. 1, pp. 21-24.
- Maitama, S. ve Zhao, W. (2019). New Integral Transform: Shehu Transform a Generalization of Sumudu and Laplace Transform for Solving differential equations, *International journal of analysis and applications*, 17(2), 167-190.
- Manjarekar, S. D. ve Bhadane, A. P. (2019a). New generalized fractional Elzaki – Tarig and other fractional integral Transform with its applications to fractional differential equations, *International journal of mathematical sciences*, vol. 1
- Manjarekar, S. D. ve Bhadane, A. P. (2019b). Applications of New conformable fractional Elzaki Transformation, *IJRAR*, vol.6(1)
- Merdan, M., Bekiryazıcı, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2017a). *Deterministic stability and random behavior of a hepatitis c model*, PLoS ONE 12(7): e0181571.
- Merdan, M., Bekiryazıcı, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2017b). Comparison of stochastic and random models for bacterial resistance *Advances in difference equations*, 2017:133.
- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley-Interscience, USA.
- Mittag-Leffler, M. G. "Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$ ." *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 137, 554-558, 1903.
- Mittag-Leffler, M. G. "Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene." *Acta math.* 29, 101-181, 1905.
- Mohamed, M. Z. ve Elzaki, T. M. (2020). Applications of new integral transform for linear and nonlinear fractional partial differential equations. *Journal of king saud university – science*, vol. 32, pp. 544-549.

- Negero, N. T. (2016). Zero-Order Hankel Transform Method for Partial Differential Equations, *International journal of modern science and engineering technology*, 3(10), 24-36.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego.
- Sachit, S. A. ve Jassim, H. K. (2023). Solving Fractional PDEs by Elzaki Homotopy Analysis Method *AIP conference proceedings* 2414, 040074.
- Soong, T.T. (1973). *Random differential equations in science and engineering*, Academic Press, 327 sayfa, 1973.
- Spiegel, M. R. (1965). *Theory and problems of laplace transform*, McGraw Hill, New York.
- Torvik, P. J. ve Bagley, R. L. (1984). On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials, *J. Appl. Mech.*, 5, pp. 294–298.
- Varsoliwala, A. C. ve Singh, Dr. T. R. (2020). An approximate analytical solution of nonlinear partial differential equation for water infiltration in unsaturated soils by combined Elzaki Transform and Adomian Decomposition Method. *Journal of physics: Conference Series*, vol. 1473, pp. 012009. doi: 10.1088/1742-6596/1473/1/012009.
- Watugala, G. K. (1993). Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *International journal of mathematical education in science and sechnology*, 24(1), 35-43.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability, *J. Appl. Mech.-Trans. ASME* 18(3), 293-297.
- Yang, X. J. (2011). *Fractional Functional Analysis and Its Applications*, *Asian academic*, Hong Kong.
- Yang, X. J. (2012). *Local Fractional Calculus and Its Applications*, *World scientific publishing*, New York.
- Yang, X. J. (2012). Generalized Sampling Theorem for Fractal Signals, *Advances in digital multimedia*, 1(2), 88-92.

Zafar, Z. U. (2016). ZZ Transform Method, *International journal of advanced engineering and global technology*, 4(1), 1605-1611.

Zhao, C. G., Yang, A. M., Jafari, H. ve Haghbin, A. (2014). The Yang-Laplace Transform for Solving the IVPs with Local Fractional Derivative, *Abstract and applied analysis*, Article ID: 386459, 1-5.

Ziane, D. ve Cherif, M. H. (2015). Resolution of Nonlinear Partial Differential Equations by Elzaki Transform Decomposition Method, *Journal of approximation theory and applied mathematics*, 5, 17-30.

Ziane, D. ve Cherif, M. H. (2021). Local fractional Elzaki transform and its application to local fractional differential equations, *Journal of new results in science*, 10(3) 19-33.

## ÖZGEÇMİŞ

Hilal AYDEMİR . İlk ve orta öğretimini Gazipaşa İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Mareşal Çakmak Anadolu Öğretmen lisesinde tamamladı. 2012 yılında Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğinden mezun olup Gümüşhane'de matematik öğretmeni olarak göreve başladı ve halen bu görevini sürdürmektedir.

