

T.C.  
IĞDIR ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE  
BANACH SABİT NOKTA TEORİSİNİ KULLANMA

Hazırlayan  
Serkan DALKILIÇ

Danışman  
Prof. Dr. Elman HAZAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

IĞDIR/2024

Her Hakkı Saklıdır

T.C.  
IĞDIR ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE  
BANACH SABİT NOKTA TEORİSİNİ KULLANMA

Hazırlayan  
Serkan DALKILIÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

IĞDIR

2024

## **TAAHHÜTNAME**

Tez içerisindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

**Serkan DALKILIÇ**



## ÖZET

### ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BANACH SABİT NOKTA TEORİSİNİ KULLANMA

DALKILIÇ Serkan

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Elman HAZAR

Haziran 2024, 38 sayfa

Bu tez çalışmasında, adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü üzerinde, Banach sabit nokta teoreminin kullanımı incelenmiştir. Bunun için adi diferansiyel denklemlerin aranan çözümü, düzgün norm altında ve sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde, kapalı ve sınırlı bir bölgede, uygun bir integral operatörünün sabit noktası olarak gösterilmiş. Daha sonra bu operatör, Banach sabit noktaya dönüştürülerek genellemeler ve tümevarım yöntemi ile denklemin çözümünün, Banach sabit nokta olduğu ortaya konulmuştur.

Tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde adi diferansiyel denklem ve Banach sabit nokta teorisinin kısa özeti anlatılmıştır. İkinci bölümde temel kavram ve teoremler anlatılmıştır. Üçüncü bölümde Banach sabit nokta teorisinin metrik, normlu ve Banach uzaylarında varlığı ve uygulamaları anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ise Banach sabit nokta teorisinin adi diferansiyel denklem sistemleri üzerinde çözümü olduğu uygulamalı olarak gösterilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Metrik Uzay, Normlu Uzay, Banach Uzay, Banach Sabit Nokta, Yakınsaklık, Adi Diferansiyel Denklemler, Cauchy Dizisi.

## ABSTRACT

### ON ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING BANACH FIXED POINT THEORY

DALKILIÇ Serkan

Master Thesis

Department Of Mathematics

Thesis Advisor: Prof.Dr. Elman HAZAR

June, 2024, 38 pages

In this thesis, the use of Banach fixed point theorem on the solution of ordinary differential equation systems is examined. For this purpose, the sought-after solution of ordinary differential equations is represented as a fixed point of an appropriate integral operator in a closed and limited region on the space of continuous functions under the uniform norm. Then, this operator was transformed into a Banach fixed point and it was revealed that the solution of the equation was a Banach fixed point by generalizations and induction method.

The thesis consists of four parts. In the introduction section, a brief summary of the ordinary differential equation and Banach fixed point theory is explained. In the second chapter, basic concepts and theorems are explained. In the third chapter, the existence and applications of Banach fixed point theory in metric, normed and Banach spaces are explained. In the fourth chapter, it is shown practically that Banach fixed point theory has a solution on ordinary differential equations.

**Key Words:** Metrik Space, Norm Space, Banach Space, Banach Fixed Point, Convergence, Differential Equations, Cauchy Sequence.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın tamamlanmasında, yaklaşık üç yıldır değerli bilgilerini bana aktaran, kendisine danıştığım her zaman güler yüzüyle, geniş sabrıyla ve içtenliğiyle yardımda bulunan, matematiksel bilginin dışında çalışmayı, azmi, saygıyı ve dürüstlüğün önemini öğreten, saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Elman HAZAR'a teşekkürü bir borç biliyorum.

Yüksek lisansıma başladığımda tanıştığım, samimi, içten, sevecen ve babacan tavırlarıyla motivasyonumu artıran, çalışmamdaki konuyu, kaynakları ve yöntemleri sabırla bana öğreten, her zaman bana güvenerek bu işi başarabileceğimi söyleyen, umutsuzluğa kapıldığımda her zaman hatırladıkça, başaracağım azmini aşıl原因an, insanın hayatında bir rehber ve model olabilecek, alanında çok iyi bir bilim adamı olan ve hiç bir zaman desteğini esirgemeyen saygıdeğer, kıymetli, canım hocam Prof. Dr. Ali FARAJZADEH'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek lisansıma başladığımda tanıştığım, samimi tavırlarıyla, bana destek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na teşekkürlerimi sunuyorum.

Öğrenciliğimin yanı sıra bana ailem gibi davrandıkları, verdikleri tavsiyeler ve yönlendirmeleri ile birlikte beni koruyup kollayan, danışman bir hocadan ziyade aileden biriymiş gibi davranan her iki hocam Prof. Dr. Elman HAZAR ve Prof. Dr. Ali FARAJZADEH'e ayrıca teşekkür ederim.

Tez çalışmamda bana destek olan, mutsuz ve umutsuz olduğum zamanlarda beni neşelendiren ve hiç bir şekilde desteğini esirgemeyen sevgili eşim Hülya DALKILIÇ'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans çalışmasında bana sabır ve anlayış gösteren sevgili oğlum Muhammed Talha DALKILIÇ ve canım kızım Hatice Kübra DALKILIÇ'a teşekkür ederim.

**Serkan DALKILIÇ**

**IĞDIR/2024**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR .....	v
GİRİŞ .....	1
<b>BİRİNCİ BÖLÜM</b>	
<b>1.TEMEL KAVRAMLAR VE KURAMLAR .....</b>	<b>4</b>
<b>İKİNCİ BÖLÜM</b>	
<b>BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ .....</b>	<b>17</b>
2.1.Sabit Noktanın Varlığı.....	17
2.2.Sabit Noktanın Benzersizliği.....	18
2.3.Metrik Uzaylarda Büzülme Dönüşümleri .....	21
2.4.Ön Teorem.....	21
2.5.Teorem.....	21
2.6.Banach Uzaylarında Sabit Nokta Teoremi .....	21
2.7.Normlu uzaylarda Daralma Eşlemesi.....	23
2.8.Lipschitz Koşulu.....	24
<b>ÜÇÜNCÜ BÖLÜM</b>	
<b>3.ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI.....</b>	<b>25</b>
3.1.Örnek.....	25
3.2.Teorem.....	26
3.3.Picard Teoremi .....	28
3.4.İntegral Denklemlere Uygulaması.....	33
<b>TARTIŞMA VE SONUÇ.....</b>	<b>35</b>
<b>KAYNAKÇA .....</b>	<b>36</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>39</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

- $\mathbb{R}$  ..... Reel sayılar kümesi
- $\mathbb{N}$  ..... Doğal sayılar kümesi
- $\mathbb{C}$  ..... Kompleks (karmaşık) sayılar kümesi
- $l^\infty$  ..... Sınırlı dizi uzayı
- $C[a, b]$  ..... Sürekli fonksiyonlar uzayı
- $B(A)$  ..... Sınırlı fonksiyonlar uzayı
- $l^p$  ..... Sınırlı ve sınırsız dizi uzayları
- $d|_{Y \times Y}$  .....  $d$  tarafından  $Y$  üzerine indirgenen metrik
- $K^c$  .....  $X$ 'in bir  $K$  alt kümesinin tümleyeni
- $\text{int}(M)$  ..... Kümenin iç noktası
- $(X, d)$  ..... Metrik uzay
- $\sup S$  ..... Boş olmayan  $S$  kümesinin en küçük üst sınırı
- $\inf S$  ..... Boş olmayan  $S$  kümesinin en küçük alt sınırı
- $\bar{A}$  .....  $A$  nın kapanış kümesi

## 1.GİRİŞ

Değişimin matematiksel tanımlarında, diferansiyeller ve türevler kullanılır. Çeşitli diferansiyeller, türevler ve fonksiyonlar denklemler yoluyla ilişkilendirilir. Öyle ki diferansiyel denklem dinamik olarak değişen olguları, evrimi ve varyasyonu tanımlayan bir sonuçtur.

Newton, Leibniz, Bernoulli ailesi, Riccati, Clairaut, d'Alembert ve Euler olmak üzere birçok matematikçi diferansiyel denklemler üzerinde çalışmış ve bu alana katkıda bulunmuşlardır. Adi diferansiyel denklemler, tek bir bağımsız değişkene bağlı, diferansiyel olarak ifade edilen denklemlerdir. Bilinmeyenleri bir veya birden fazla fonksiyondan oluşur ve bu fonksiyonların türevlerini içerir.

Birden fazla bağımsız değişkene göre olan diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklem olarak ifade edilir. Daha az yaygın olarak kullanıldıklarından adi diferansiyel denklemler daha çok kullanılır.

Adi diferansiyel denklemler arasında, doğrusal olan diferansiyel denklemler çeşitli nedenlerden dolayı önemli rol oynar.

Fizikte ve uygulamalı matematikte karşılaşılan temel ve özel fonksiyonların çoğu, doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Fiziksel olaylar, doğrusal olmayan denklemlerle modellendiğinde, daha kolay bir çözüm için doğrusal diferansiyel denklemlerle çözüme yaklaşılr. Açıkça çözülebilen, birkaç doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem, genellikle denklemin eşdeğer bir doğrusal adi diferansiyel denkleme dönüştürülmesiyle çözülür.

Banach sabit nokta teoremi ilk kez Polonyalı matematikçi Stefan Banach'ın 1922'de ki doktora tezinde kapsamlı olarak incelenmiş ve adını Stefan Banach'tan almıştır. Steven Banach, modern fonksiyonel analizin kurucusudur ve topolojik vektör uzayları teorisine büyük katkıları olmuştur.

Banach sabit nokta teoremi aynı zamanda daralma haritalama teoremi, büzülme haritalama teoremi veya Banach-Caccioppoli teoremi olarak da bilinir.

Banach sabit nokta teoremi metrik uzaylar teorisinde önemli bir araçtır. Metrik uzayların belirli öz haritaları sabit noktalarının varlığını ve benzersizliğini garanti eder ve bu sabit noktaları bulmak için yapıcı bir yöntem sağlar. Ayrıca Picard'ın ardışık yaklaşımlar yönteminin soyut bir formülizasyonu olarak da gösterilmektedir.

Banach sabit nokta teoremi ile çözülebilen diferansiyel denklemler, başlangıç koşulları olan Cauchy problemi olarak ifade edilen bir diferansiyel denklemden oluşur. Bilim insanları 1890'larda Peanonun çalışmalarından başlayarak, Cauchy problemine sürekli ilgi duymuşlardır. Bu da adi diferansiyel denklemlerin Cauchy problemi ile ilgili incelenmesi önemini artırmıştır. Çünkü kısmi diferansiyel denklemler, standart adi diferansiyel denklemlerin çözücüleri tarafından çözülebilen adi diferansiyel denklemlerin büyük kümelerine dönüştürülebilir.

Özellikle diferansiyel denklemlerin incelenmesinde, Picard-Lindelöf teoremi, bir başlangıç değer probleminin benzersiz bir çözüme sahip olduğu bir dizi koşulu verir. Aynı zamanda Picard'ın varoluş teoremi, Cauchy-Lipschitz teoremi veya varlık ve teklik teoremi olarak da bilinmektedir.

Denklemlerin yaklaşık çözümlerine, bilgisayar yaklaşımları ve sayısal analiz kullanılarak ulaşılır. Ancak başlangıç koşulları veya sınır değerleri verilerek, denklemin çözümünde teklik sağlanır. Başlangıç veya sınır değerleriyle elde edilen çözüme ise özel çözüm denir.

Picard operatörü, düzgün normun neden olduğu metrik ile Banach uzayları üzerinde bir daralmadır. Bu tespit, Banach sabit nokta teoremini uygulayarak operatörün benzersiz bir sabit noktaya sahip olduğu sonucuna varmamızı sağlar.

Sabit bir noktası olmayan bir denklem, kompakt bir uzayda ise sabit bir noktanın varlığını ve benzersizliğini ima eder ve bu noktanın en küçükleyicisi olarak kolayca bulunabilir. dolayısıyla daralma operatörü, kompaktlık nedeniyle var olur ve bir sabit bir noktaya dönüştüğü görülmektedir. Böylece sabit noktanın, herhangi bir yineleme dizisinin sınırı olduğu sonucu ortaya çıkar.

Banach sabit nokta teoreminin uygulanabilmesi için belirli koşullar veya varsayımlar vardır. Ana koşul, metrik uzayın tam olmasıdır. Tamlık, metrik uzayın alt uzayı olan Banach uzaylarında yakınsak Cauchy dizilerin var olmasıdır. Normlu uzaydaki yakınsak Cauchy dizileri metrik uzayı tamlaştırarak Banach uzaylarını oluşturmaktadır. Her Cauchy dizisi, aynı uzay içindeki bir noktaya yakınsar. Bu koşul Banach daralma eşleminin, yinelemeli bir şekilde uygulanmasıyla, Banach uzayındaki noktaların birbirine yaklaştırılmasını sağlar. Bu koşullar karşılanırsa Banach sabit nokta teoremi, verilen haritalama için sabit bir noktanın varlığını ve benzersizliğini garanti eder. Eğer Metrik uzay tam değilse Banach sabit nokta teoremi uygulanamaz.

Tez çalışması, giriş bölümü ile birlikte dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde fonksiyonel analizin temel kavramları üzerinde durulmuştur. Banach sabit nokta teoreminin uygulanabilmesi için gerekli olan tüm kavramlara ikinci bölümde yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Banach sabit noktanın varlığı, Banach sabit noktanın benzersizliği, Banach daralma prensibi, bir fonksiyonun sabit noktalarının varlığı ve tekliği üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde ise Banach sabit nokta teoreminin gerekli şartlar ve uygun koşullar altında adi diferansiyel denklemlere uygulanışı anlatılmıştır.

## BİRİNCİ BÖLÜM

### TEMEL KAVRAMLAR VE KURAMLAR

#### 1.1. Metrik Uzay

$X$  boş olmayan bir küme,  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  metrik ve  $x, y, z \in X$  için

- i.  $d(x, y) \geq 0$
- ii.  $d(x, y) = 0$  ise  $x = y$  dir.
- iii.  $d(x, y) = d(y, x)$  simetri özeliği
- iv.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  üçgen eşitsizliği

Özelliklerini sağlayan  $(X, d)$  ikilisine metrik uzay denir ve  $(X, d)$  ile gösterilir. (Kreyszing, 1978).

##### 1.1.1. Örnek

Tek boyutlu sayı doğrusu  $\mathbb{R}$  olsun.  $d(x, y) = |x - y|$  şeklinde tanımlanan metrik olağan metrik olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

##### 1.1.2. Örnek

Öklid düzlemi  $\mathbb{R}^2$  olsun. Metrik uzay  $x = (\zeta_1, \zeta_2)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2)$  ile yazılan sıralı reel sayı çiftleri kümesinden oluşsun.  $d(x, y) = \sqrt{|\zeta_1 - \eta_1|^2 + |\zeta_2 - \eta_2|^2}$  ile gösterilen metrik iki boyutlu Öklid metriği olarak ifade edilir.  $d_1(x, y) = |\zeta_1 - \eta_1| + |\zeta_2 - \eta_2|$  ile gösterilen metrik ise  $d_1$  metriği veya taksi metriği olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

##### 1.1.3. Örnek

Üç boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{R}^3$  olsun. Bu metrik uzay  $x = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$   $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  gerçekte sayıların sıralı üçlüleri kümesinden oluşsun.  $d(x, y) = \sqrt{(\zeta_1 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \eta_2)^2 + (\zeta_3 - \eta_3)^2}$  ile gösterilen metrik üç boyutlu Öklid metriğini olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

#### 1.1.4.Örnek

Öklid uzayı  $\mathbb{R}^n$ , üniter uzay  $\mathbb{C}^n$ , karmaşık düzlem  $\mathbb{C}$  olsun. Metrik uzay, tüm sıralı reel sayıların kümesi  $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  ve  $(n \geq 0)$  elemanlarından oluşsun,  $d(x, y) = \left(\sqrt{(\zeta_1 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \eta_2)^2 + \dots + (\zeta_n - \eta_n)^2}\right)$  ile gösterilen metrik, karmaşık Öklid uzayı olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

#### 1.1.5.Örnek

$X$  kümesi karmaşık sayıların tüm sınırlı dizilerinin kümesinden oluşsun.  $x = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  için  $|\delta_j| \leq c_x$  dir. Burada  $c_x$ ,  $x$  e bağlı fakat  $j$  ye bağlı olmayan bir gerçekte sayıdır.  $d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\delta_j - \mu_j|$  metriği  $y = (\mu_j) \in X$  ve  $j = \{1, 2, \dots\}$  için  $d(x, y)$  şeklinde ifade edilen  $l^\infty$  metrik uzayı dizi uzayıdır. (Kreyszing, 1978).

#### 1.1.6.Örnek

$X$  kümesi,  $t$  değişkeninin fonksiyonları olan, belirli  $J = [a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan tüm  $x, y$  fonksiyonlarının kümesini oluşturursun.  $d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$  ile gösterilen  $C[a, b]$  metrik uzayı sürekli fonksiyonlar uzayı olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

#### 1.1.7.Örnek

$X$  kümesi için,  $d(x, x) = 0$ ,  $d(x, y) = 1$ ,  $(x \neq y)$  ile gösterilen metrik  $(X, d)$  ayrık metrik uzay olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

#### 1.1.8.Örnek

Karmaşık sayıların, tüm sınırlı veya sınırsız dizilerinden ve  $d$  metriğinden oluşan,

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\delta_j - \mu_j|}{1 + |\delta_j - \mu_j|}$$

ile tanımlanan uzay,  $l^p$  sıralı uzay olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

### 1.1.9.Örnek

Her bir  $x \in B(A)$  ve  $t \in A$  için belirli bir  $A$  kümesi üzerinde tanımlanan sınırlanan bir fonksiyondur.  $d(x, y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)|$  ile gösterilen metrik sınırlı fonksiyonlar uzayı  $B(A)$  olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

### 1.2.Teorem

Bir  $Y \subset X$  kümesini alınsın,  $d$  metriği  $Y \times Y$  ile kısıtlanırsa  $(X, d)$  nin bir alt uzayı olan  $(Y, d)$  elde edilir.  $\tilde{d} = d|_{Y \times Y}$  şeklinde ifade edilen  $\tilde{d}$  'ne,  $d$  tarafından  $Y$  üzerinde indüklenen metrik adı verilir. (Kreyszing, 1978).

### 1.3.Tanım

$(X, \rho_x)$  ve  $(Y, \rho_y)$  iki metrik uzay ve  $f: X \rightarrow Y$  bir dönüşüm olsun. Eğer her  $\forall x, y \in X$  için  $\rho_y(f(x), f(y)) = \rho_x(x, y)$  oluyorsa  $f$ 'ye izometrik veya izomorfi denir.  $(X, \rho_x)$  ve  $(Y, \rho_y)$  uzaylarına da izometrik ya da eş yapıli uzaylar denir. (Mustafa, 2016)

### 1.4.Açık ve Kapalı Küme

#### 1.4.1.Tanım

$(X, d)$  bir metrik uzay olmak üzere  $x_0 \in X$  ve  $r > 0$  alınsın.

1.  $B(x_0, r) := \{x \in X: d(x, x_0) < r\}$  kümesine  $x_0$  merkezli,  $r$  yarıçaplı açık yuvar denir.
2.  $B[x_0, r] := \{x \in X: d(x, x_0) \leq r\}$  kümesine  $x_0$  merkezli,  $r$  yarıçaplı kapalı yuvar denir.
3.  $S(x_0, r) := \{x \in X: d(x, x_0) = r\}$  kümesine  $x_0$  merkezli,  $r$  yarıçaplı küre denir.

Bir metrik uzayda, açık yuvar açık küme ve kapalı yuvar kapalı küme olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

#### 1.4.2.Örnek

$X$  in bir  $K$  alt kümesinin tümleyeni  $X$  te açıksa, yani  $K^c = X - K$  açıksa  $X$  kapalı kümedir. (Kreyszing, 1978).

## 1.5.Komşuluk

### 1.5.1.Tanım

Yarıçapı  $\varepsilon$  olan açık bir  $B(x_0; \varepsilon)$  topuna,  $\varepsilon > 0$  için  $x_0$ 'ın  $\varepsilon$  komşuluğu denir ve  $x_0$ 'ın komşuluğu ile  $X$ 'in bir  $\varepsilon$  komşuluğunu içeren herhangi bir alt kümesi ile ifade edilir. Eğer  $M$ ,  $x_0$ 'ın bir komşuluğu ise  $x_0$ 'a,  $N \subset X$  kümesinin bir iç noktası denir ve  $M^c$  veya  $\text{int}(M)$  ile gösterilir. (Kreyszing, 1978).

### 1.5.2.Örnek

$(X, d)$  diskre (ayrık) metrik uzay,  $x_0 \in X$  için aşağıdaki kümeleri gösterelim.

1.  $B(x_0, 1/2)$  diskre metrik uzayında,  $d(x, x_0) < 1/2$  olması ancak  $x = x_0$  durumunda gerçekleşir, o zaman

$$\begin{aligned} B(x_0, 1/2) &= \{x \in X: d(x, x_0) < 1/2\} \\ &= \{x_0\} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

2.  $B[x_0, 1/2]$  diskre metrik uzayda  $d(x, x_0) \leq 1/2$  olması ancak  $x = x_0$  durumunda gerçekleşebilir. O halde

$$\begin{aligned} B[x_0, 1/2] &= \{x \in X: d(x, x_0) \leq 1/2\} \\ &= \{x_0\} \end{aligned}$$

3.  $B[x_0, 1]$  diskre metrik uzayda  $x \in X$  için  $d(x, x_0) \leq 1$  olduğundan  $B[x_0, 1] = X$  olur.
4.  $S(x_0, 1)$  diskre metrik uzayda her  $x \neq x_0$  için  $d(x, x_0) = 1$  olduğundan  $S(x_0, 1) = X \setminus \{x_0\}$  elde edilir. (Kreyszing, 1978).

## 1.6.Yakınsaklık

### 1.6.1.Tanım

$(X, d)$  metrik uzayında  $x \in X$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  dizisi mevcutsa yakınsaktır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$  dir.  $x$ 'e  $(x_n)$  dizisinin limiti denir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ile gösterilir.  $(x_n)$  yakınsak değilse ıraksak olarak ifade edilir.

Yakınsak bir dizinin en önemli özelliği limitinin tek ve sınırlı olmasıdır. Boş olmayan bir  $M \subset X$  kümesine, çapının sınırlı olması durumunda  $M$ 'ye sınırlı küme denir.  $\delta(M) = \sup_{x,y \in M} d(x,y)$  sonludur. Eğer karşılık gelen limit nokta kümesi,  $X$ 'in sınırlı bir alt kümesi ise  $X$  teki bir  $(x_n)$  dizisine sınırlı dizi adı verilir. Eğer  $M$  sınırlıysa, o zaman  $M \subset B(x_0; r)$  dir. Burada  $x_0 \in X$  herhangi bir noktadır ve  $r$  yeterince büyük bir reel sayıdır ve bunun tersi de doğrudur. (Kreyszing, 1978).

## 1.7. Cauchy Dizileri

### 1.7.1. Tanım

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $(X, d)$  metrik uzayında bir  $(x_n)$  dizisi olsun.  $\varepsilon > 0$  ve  $N$  pozitif bir tamsayı olmak üzere  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$  ve her  $p, q > N$  ise  $(x_n)$  Cauchy dizisidir. (Mustafa, 2016)

### 1.7.2. Teorem

Bir metrik uzayda, her yakınsak dizi Cauchy dizisidir ve her Cauchy dizisi sınırlıdır. (Mustafa, 2016)

## 1.8. Cauchy Tam Dizisi

$(X, d)$  bir metrik uzay  $x_n, x \in X$  ve  $\varepsilon > 0$  olacak şekilde  $X$ 'de bir Cauchy dizisi olsun.  $f: X \rightarrow X$  ile verilsin.  $x \in X$  ve  $f(x) = x$  olacak şekilde  $x$  bir sabit noktasıdır. Gerçek ya da karmaşık bir sayı dizisi  $(x_n)$ , sırasıyla gerçel  $\mathbb{R}$  doğrusu üzerinde veya karmaşık  $\mathbb{C}$  düzleminde, ancak ve ancak Cauchy yakınsama kriterini karşılıyorsa ve  $\varepsilon > 0$  için  $N = N(\varepsilon)$  mevcut ise  $|x_m - x_n| < \varepsilon$  ve tüm  $m, n > N$  dir.  $|x_m - x_n|$ , gerçel  $\mathbb{R}$  doğrusu,  $\mathbb{C}$  düzlemi üzerinde veya kompleks ise  $d(x_m, x_n)$ ,  $x_m$  nin  $x_n$ 'e uzaklığını ifade eder. Genel uzaylarda yakınsamayan Cauchy dizileri olabilir. Bu uzaylar tamlıktan yoksundur. (Frechet 1906)

## 1.9.Sınırlılık

### 1.9.1.Önerme

$S$ , gerçel sayıların boş olmayan bir alt kümesi olsun.  $\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin en küçük üst sınırı vardır.  $\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan ve üstten sınırlı herhangi bir alt kümesinin, en küçük üst sınırı belirli ve tek olan tüm  $y \in S$  için  $y \leq x$  özellikli bir  $x$  sayısıdır. En küçük üst sınırını  $\sup S$  ile gösterilir. (Sutherland, 2008)

### 1.9.2.Önerme

$S$ , gerçel sayıların boş olmayan bir alt kümesi olsun.  $\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan ve alttan sınırlı bir  $S$  alt kümesinin en büyük alt sınırı vardır.  $\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan ve alttan sınırlı her alt kümesinin, en büyük alt sınırı belirli ve tek olan tüm  $y \in S$  için  $y \geq x$  özellikli bir  $x$  sayısıdır. En büyük alt sınır  $\inf S$  ile gösterilir. (Sutherland, 2008)

### 1.9.3.Lemma

$X = (X, d)$  bir metrik uzay olsun

- i.  $X$ 'de yakınsak bir dizi sınırlıdır ve limiti tektir.
- ii.  $X$ 'de  $x_n \rightarrow x$  ve  $y_n \rightarrow y$  için  $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$  dir.

(Kreyszing, 1978).

### 1.9.4.Örnek

1.  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar kümesinin alt ve üst sınırı yoktur.
2.  $\mathbb{R}_-$  negatif gerçel sayılar kümesinin alt sınırı yoktur, ama 0 bir üst sınırdır.
3.  $(0,1]$  yarı açık aralığı üstten ve alttan sınırlıdır.

(Sutherland, 2008)

### 1.9.5.Önerme

Pozitif tam sayılar kümesi  $\mathbb{N}$  üstten sınırlı değildir. (Sutherland, 2008)

### 1.9.5.İspat

$\mathbb{N}$ 'nin üstten sınırlı olduğunu varsayalım. O zaman, tamlık özelliğine göre  $u = \sup \mathbb{N}$  olacak şekilde bir  $u$  gerçel sayısı vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(n + 1) \in \mathbb{N}$  olduğundan  $n + 1 \leq u$  olur. O zaman  $n \leq u - 1$  dir. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için  $n \leq u - 1$  olacağından  $\mathbb{N}$  için bir üst sınırdır. Bu da  $u$  nun en küçüklüğü ile çelişir ve  $\mathbb{N}$ 'nin üstten sınırlı olmadığını gösterir. (Sutherland, 2008)

### 1.9.6.Teorem

$(X, \rho_x)$  bir metrik uzay,  $A$  kümesi  $X$  kümesinin boş olmayan bir alt kümesi ve  $\bar{A}$  kümesi  $A$  kümesinin kapanış kümesi olsun.

1.  $x \in \bar{A}$  olması için gerekli ve yeter koşul  $x_n \rightarrow x$  ve  $n \rightarrow \infty$  olacak şekilde  $\{x_n\} \subset A$ ,  $n = 1, 2, \dots$  dizisinin var olmasıdır.
2.  $A$  kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul her  $\{x_n\} \in A$  için  $n = 1, 2, \dots$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow x$  için  $x \in A$  olmasıdır.

(Mustafa, 2016)

### 1.10.Tamlık

$(X, d)$  metrik uzayında her Cauchy dizisi  $(X, d)$  metrik uzayının bir elemanına yakınsarsa  $(X, d)$  metrik uzayına tam metrik uzay denir. (Sutherland, 2008)

#### 1.10.1.Teorem

$(X, \rho)$  metrik uzayının tam metrik uzay olması için gerekli ve yeterli koşul  $X$ 'de her yakınsak dizinin bir Cauchy dizisi olmasıdır. (Mustafa, 2016)

#### 1.10.2.Teorem

$(X, \rho_x)$  bir tam metrik uzay ve  $A$  kümesi  $X$  kümesinin boş olmayan bir alt uzayı olsun.  $A$  uzayının tam olması için gerekli ve yeterli koşul  $A$ 'nın  $X$ 'de kapalı bir küme olmasıdır. (Mustafa, 2016)

#### 1.10.3.Tanım

Eğer,  $X$  metrik uzayı içinde bir  $(x_n) \subset X$ ,  $n = 1, 2, \dots$  dizisi mevcut ise  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $\forall x \in X$  için  $\rho(x, x_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$  olacak şekilde  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  sayısının var olmasıdır.  $(X, \rho)$  bir ayrılabilir metrik uzaydır. (Mustafa, 2016)

#### 1.10.4.Örnek

$\mathbb{R}$  sayılar kümesinin alışılmış metriğe göre (mutlak değer metriği) tam olduğunu gösterelim. (Kreyszing, 1978).

#### 1.10.4.Çözüm

$(x_n)$ ,  $\mathbb{R}$ 'de bir Cauchy dizisi olsun.  $(x_n)$  yakınsak alt diziye sahip bir dizi olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla  $\mathbb{R}$  tamdır. (Kreyszing, 1978).

#### 1.10.5.Örnek

$\mathbb{R}^n$  uzayının  $d(x, y) = \left( \sum_{j=1}^n |x_j^{(m)} - x_j^{(r)}|^2 \right)^{1/2}$  ile tanımlı metriğe göre tam olduğunu gösterelim. (Kreyszing, 1978).

#### 1.10.5.Çözüm

$x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  verilsin.  $(x_m)$  dizisi  $\mathbb{R}^n$  uzayında bir keyfi Cauchy dizisi olsun. Her  $m \in \mathbb{N}$  için  $x_m \in \mathbb{R}^n$  olup  $x_m = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$  şeklinde gösterime sahip olsun.  $(x_m)$  Cauchy dizisi olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için  $m, r > n_0$  dir.  $\left( \sum_{j=1}^n |x_j^{(m)} - x_j^{(r)}|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0$  vardır. O halde  $j = 1, \dots, n$  için  $|x_j^{(m)} - x_j^{(r)}| < \varepsilon$  sağlanır. Her  $j = 1, \dots, n$  için  $(x_j^{(m)})$  dizisi  $\mathbb{R}$ 'de bir Cauchy dizisidir.  $\mathbb{R}$  tam olduğundan  $(x_j^{(m)}) \rightarrow \alpha_j$  olacak şekilde bir  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  mevcuttur.  $x^{(m)} \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  olduğunu gösterelim. Her  $j = 1, \dots, n$  için  $(x_j^{(m)}) \rightarrow \alpha_j$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için  $m > n_j$  olduğunda  $|x_j^{(m)} - \alpha_j| < \varepsilon/\sqrt{n}$  olacak şekilde bir  $n_j$  sayısı mevcuttur. Şimdi  $n_1 = \max_j n_j$  alırsak, her  $m > n_1$  için  $\left( \sum_{j=1}^n |x_j^{(m)} - \alpha_j|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$  gerçekleşir, dolayısıyla alınan keyfi Cauchy dizisi  $\mathbb{R}^n$ 'de bir limite sahip olduğundan uzay tamdır. (Kreyszing, 1978).

#### 1.10.6.Tanım

$a, b, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ve  $d$ ,  $f(a)$  ile  $f(b)$  arasında olmak üzere  $a \leq c \leq b$  ve  $f(b) = d$  olacak şekilde en az bir  $c$  elemanı varsa  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun ara değer özelliğine sahiptir. (Sutherland, 2008).

## 1.11.Kompaktlık

### 1.11.1.Tanım

$X$  bir metrik uzay ve  $M \subset X$  olmak üzere  $M$  kümesindeki her dizi, limiti  $M$  kümesinde olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahipse  $X$  metrik uzayına kompakttır denir. (Mustafa, 2016)

### 1.11.2.Teorem

Bir metrik uzayın kompakt kümeleri kapalı ve sınırlıdır. (Sutherland, 2008).

### 1.11.3.Örnek

Sonsuz çoklukta, noktadan oluşan bir ayrık (diskre) metrik uzayın kompakt olmayacağını gösterelim.

### 1.11.4.Çözüm

Ayrık (diskre) metrik uzaylarda tanım gereği yakınsak diziler, sonlu terim hariç çakışan diziler olacağından, tüm terimleri birbirinden farklı diziler aldığımızda bu dizi yakınsak alt diziye sahip olamaz. Dolayısıyla sonsuz çoklukta noktadan oluşan bir ayrık (diskre) metrik uzay kompakt olamaz.

### 1.11.5.Örnek

$X$  kompakt bir metrik uzay ve  $M \subset X$  kapalı ise  $M$  de kompakttır.

### 1.11.5.Çözüm

$\{x_n\}$  dizisi  $M$  kümesinde keyfi bir dizi olsun. Bu durumda  $M \subset X$  ve  $X$  kompakt olduğundan  $\{x_n\}$  dizisi limiti  $X$  uzayında olacak biçimde yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu diziye  $\{x_{n_k}\}$  dersek  $x_{n_k} \rightarrow x$  olacak şekilde bir  $x \in X$  mevcuttur. Her  $k$  için  $x_{n_k} \in M$ ,  $x_{n_k} \rightarrow x$  ve  $M$  kapalı olduğundan kompakttır.

### 1.11.6.Teorem

$X$  ve  $Y$  iki metrik uzay ve  $T: X \rightarrow Y$  sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda  $M$  kümesi  $X$  uzayında kompakt ise  $T(M)$  kümesi de  $Y$  uzayında kompakttır. (Kreyszing, 1978).

### 1.11.6.İspat

$M$  kompakt ve  $(y_n)$ ,  $T(M)$  kümesinde bir dizi olsun. Her  $n$  için  $y_n \in T(M)$  olduğundan,  $Tx_n = y_n$  olacak şekilde  $x_n \in M$  mevcuttur.  $M$  kompakt olduğundan  $(x_n)$  dizisi  $x_{n_k} \rightarrow x \in M$  olacak şekilde bir  $(x_{n_k})$  alt dizisine sahiptir.  $T$  sürekli ve  $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$  ve  $x \in M$  olduğundan  $Tx = y \in T(M)$  gerçekleşir. Ayrıca  $(x_{n_k})$  dizisi  $(x_n)$  dizisinin bir alt dizisi olup  $T(M)$ 'de  $y$  noktasına yakınsak olduğundan  $T(M)$  kümesi kompaktır. (Kreyszing, 1978).

### 1.11.7.Tanım

Bir metrik uzayda, kapanışı kapalı olan kompakt kümeye, ön kompakt küme denir.  $(X, \rho)$  metrik uzayında boş olmayan  $M \subset X$  kümesinin ön kompakt olması,  $\overline{M} = M \cup M'$  kümesinin  $X$ 'de kompakt olması anlamına gelir. (Mustafa, 2016).

### 1.11.8.Tanım

Bir metrik uzayın her sonsuz alt kümesi, bu uzayın bir vektörüne yakınsayan bir dizi bulduruyorsa, böyle metrik uzaylara kompakt uzaylar denir. Kompakt uzaylara kısaca kompakt denir. (Kreyszing, 1978).

## 1.12.Normlu Uzay

### 1.12.1.Tanım

Normlu bir  $X$  uzayı üzerinde tanımlanmış bir normu olan bir vektör uzayıdır. Bir vektör uzayı  $X$  üzerinde bir norm,  $X$  üzerinde değeri  $x \in X$  ile gösterilen gerçek değerli bir fonksiyondur.  $X$  üzerinde gerçek değerli bir fonksiyon  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  ye  $X$  üzerinde tanımlansın.  $x, y \in X$  ve her  $\lambda \in K$  için

- i.  $\|x\| \geq 0$
- ii.  $\|x\| = 0$  ise  $x = 0$
- iii.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iv.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Özelliklerini sağlayan  $d(x, y) = \|x - y\|$  ifadesine norm,  $(X, \|\cdot\|)$  ya da normlu uzay denir. Belirli bir normlu uzay  $X$  ten  $Y$  ye kadar olan tüm sınırlı operatörlerin kümesidir. (Kreyszing, 1978).

### 1.13. Normlu Uzaylarda Yakınsaklık

$\langle x_n \rangle$  normlu  $X$  uzayında yakınsak bir dizi olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$  olacak şekilde  $x$  mevcut olsun.  $x_n \rightarrow x$  dir ve  $x$  dizinin, limiti olarak ifade edilir. (Kreyszing, 1978).

### 1.14. Güçlü Yakınsama

Normlu bir  $X$  uzayında  $x \in X$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  dizisi varsa, dizinin güçlü bir şekilde yakınsak veya normda yakınsak olduğu söylenir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ya da  $x_n \rightarrow x$  ile ifade edilir.  $x$ 'e  $(x_n)$  nin kuvvetli limiti denir ve  $(x_n)$  nin  $x$ 'e kuvvetli bir şekilde yaklaştığı söylenir. (Kreyszing, 1978).

### 1.15. Zayıf Yakınsama

Normlu bir  $X$  uzayındaki bir  $(x_n)$  dizisinin her  $f \in X'$  için öyle bir  $x \in X$  varsa, zayıf yakınsak olduğu söylenir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ ,  $x_n \xrightarrow{w} x$  veya  $x_n \rightarrow x$  elemanına  $(x_n)$  nin zayıf limiti denir ve  $(x_n)$  nin  $x$ ' e zayıf yakınsadığını gösterir. (Kreyszing, 1978).

### 1.16. Banach Uzayı

- i. Tam normlu uzay Banach uzay olarak ifade edilir. (Tam, norm tarafından tanımlanan metrikte tamamlanmış anlamına gelir.)
- ii. Normlu uzayda, her Cauchy dizisi yakınsaksa bu normlu uzay Banach uzayı olarak ifade edilir.

Her  $X$  içerisindeki  $(x_n)$  dizisi için  $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$  ve  $m, n \rightarrow \infty$ ,  $\exists x \in X$ ,  $\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  dur.

#### 1.16.1. Örnek

Öklid uzayı  $\mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\delta_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2}$$

(Kreyszing, 1978).

### 1.16.2.Örnek

Üniter uzay  $\mathbb{C}^n$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\zeta_1 - \eta_1|^2 + |\zeta_2 - \eta_2|^2 + \dots + |\zeta_n - \eta_n|^2}$$

(Kreyszing, 1978).

### 1.16.3.Örnek

$\mathbb{R}^3$  Öklid uzayı

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}$$

(Kreyszing, 1978).

### 1.16.4.Örnek

$l^p$  Uzayı

$$\|x\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\delta_j|^p \right)^{1/p}$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\delta_j - \mu_j|^p \right)^{1/p}$$

(Kreyszing, 1978).

### 1.16.5.Örnek

$l^\infty$  Uzayı

$$\|x\| = \sup_j |\delta_j|$$

(Kreyszing, 1978).

### 1.16.6.Örnek

$C[a, b]$  Uzayı

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$$

Burada  $J = [a, b]$  tamlık olarak gösterilmektedir. (Kreyszing, 1978).

### 1.17. Operatör Dizilerinin Yakınsaması

$T_n \in B(X, Y)$  operatör dizileri için, üç tür yakınsaklığın hem teorik hem de pratik değere sahip olduğu ortaya çıkmaktadır. Bunlar,

1.  $B(X, Y)$  normunda yakınsaklık.
2.  $(T_n x)$  in  $Y$  ye güçlü yakınsaması.
3.  $(T_n x)$  in  $Y$  ye zayıf yakınsaması.

Bu yakınsaklıkların açıklaması şu şekildedir.

1.  $(T_n)$ ,  $B(X, Y)$  normunda yakınsaksa, düzgün operatör yakınsaktır.
2.  $(T_n x)$ , her  $x \in X$  için  $Y$  de güçlü bir şekilde yakınsarsa operatör güçlü yakınsaktır.
3.  $(T_n x)$ , her  $x \in X$  için  $Y$  de zayıf bir şekilde yakınsarsa operatör zayıf yakınsaktır.

$T: X \rightarrow Y$  bir operatör olduğuna göre,

1.  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$
2.  $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$  tüm  $x \in X$  için
3.  $|f(T_n x) - f(Tx)| \rightarrow 0$  tüm  $x \in X$  için ve  $f \in Y'$

$T$ 'ye sırasıyla  $(T_n)$  nin düzgün, güçlü ve zayıf operatör limiti denir. (Kreyszing, 1978).

## İKİNCİ BÖLÜM

### 2.BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ

Adını Polonyalı matematikçi Stefan Banach'tan almıştır. Bir metrik uzayda belirli koşulları karşılayan bir fonksiyon varsa, fonksiyonu metrik uzaya uyguladığımızda hareket etmeyen en az bir sabit noktanın her zaman olacağını söyler.  $X$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsarsa  $X$  uzayının tamamlanmış olduğu ifade edilir. Banach sabit nokta teoremi, tam bir metrik uzayda fonksiyonun benzersiz bir sabit noktaya sahip olması için yeterli koşulu verir. Bir Banach uzayı  $X$  üzerinde tanımlanan her  $T$  daralma eşleminin kendine özgü bir  $x \in X$  sabit noktası vardır.

#### 2.1.Sabit Bir Noktanın Varlığı

Boş olmayan bir  $X$  kümesinde keyfi bir  $x_0 \in X$  noktası alalım ve  $(x_n)$  dizini tanımlayalım.

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2, \dots, x_n = Tx_{n-1}$$

$$x_2 = TTx_0 = T^2x_0$$

$$x_3 = TT^2x_0 = T^3x_0$$

.

.

.

$$x_n = T^n x_0$$

$m > n$  olsun,  $m = n + p$  diyelim ve  $p = 1, 2 \dots$  alalım,

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &= \|T^{n+p}x_0 - T^n x_0\| = \|T(T^{n+p-1}x_0 - T^{n-1}x_0)\| \\ &\leq K \|T^{n+p-1}x_0 - T^{n-1}x_0\| \end{aligned}$$

$T$  bir daralma eşlemesi olarak bu işlemi  $n - 1$  kez devam ettirildiğinde,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq K^n \|T^p x_0 - x_0\| \quad (2.1)$$

(2.1) eşitsizliği elde edilir.  $n = 0, 1, 2, 3$  ve tümü için  $p$  seçildiğinde,

$$\|T^p x_0 - x_0\| = \|T^p x_0 - T^{p-1}x_0 + T^{p-1}x_0 - T^{p-2}x_0 + T^{p-2}x_0 + Tx_0 - x_0\|$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|T^p x_0 - x_0\| &\leq \|T^p x_0 - T^{p-1} x_0\| + \|T^{p-1} x_0 - T^{p-2} x_0\| + \dots + \|T x_0 - x_0\| \\
\Rightarrow \|T^p x_0 - x_0\| &\leq \|T^{p-1} x_1 - T^{p-1} x_0\| + \|T^{p-2} x_1 - T^{p-2} x_0\| + \|x_1 - x_0\| \\
\Rightarrow \|T^p x_0 - x_0\| &\leq K^{p-1} \|x_1 - x_0\| + K^{p-2} \|x_1 - x_0\| + \dots + K^{p-1} \|x_1 - x_0\| \\
&\Rightarrow \|T^p x_0 - x_0\| \leq (K^{p-1} + K^{p-2} + \dots + 1) \|x_1 - x_0\| \\
&\Rightarrow \|T^p x_0 - x_0\| \leq \frac{1-K^p}{1-K} \|x_1 - x_0\| \tag{2.2}
\end{aligned}$$

$0 < k < 1$  olduğundan  $1 - K^p < 1$  olur. Bu sonucu (2.2) eşitsizliği de kullanarak,

$$\|T^p x_0 - x_0\| \leq \frac{1}{1-k} \|x_1 - x_0\| \tag{2.3}$$

(2.3) eşitsizliği elde edilir. (2.3) eşitsizliği yardımıyla,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq K^n \|T^p x_0 - x_0\| \tag{2.4}$$

(2.4) eşitsizliği dönüşür.  $n \rightarrow \infty$  alındığında  $m = n + p \rightarrow \infty$  olduğundan  $\|x_{n+p} - x_n\| \rightarrow 0$  olur. Bu da  $(x_n)$  dizisinin  $X$ 'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir böylece  $(x_n)$  dizisi yakınsaktır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olacak şekilde  $T$ 'nin sabit noktası alındığında,  $T$  sürekli olacağından,

$$Tx = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$$

dir ve dolayısıyla  $x$ ,  $T$  nin sabit noktası olur.(Kreyszing, 1978).

## 2.2.Sabit Noktanın Benzersizliği

$T$ 'nin başka sabit noktası  $y$  olsun. O zaman  $Ty = y$ ,  $T$  büzülme eşlemesi olarak  $\|Tx - Ty\| \leq K\|x - y\|$  özelliği mevcuttur, ancak  $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$  dir.

$$\therefore Tx = x \text{ ve } Ty = y$$

$$\therefore \|x - y\| \leq K\|x - y\|, \quad 1 \leq K.$$

$0 < K < 1$  olduğundan  $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$  ilişkisi yalnızca  $\|x - y\| = 0$  olduğunda mümkündür.

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

bu da  $T$  nin sabit noktasının tek olduğunun kanıtları. (Kreyszing, 1978).

### 2.2.1.Örnek

$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x) = x^2$  ile tanımlanan  $T$  nin sabit noktasını bulalım. (Soykan, 2012).

### 2.2.1.Çözüm

$T(x) = x^2$  ve  $T(x) = x$  sabit nokta olsun.  $T(x) = x^2 = x$  alındığında,

$$\Rightarrow x^2 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ ya da } x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \text{ ya da } x = 1 \text{ dir.}$$

(Soykan, 2012).

### 2.2.2.Örnek

$T, \mathbb{R}$  nin  $T(x) = x$  ile tanımlanan kendi eşlemesi olsun.  $T(x) = \frac{1}{2}x$  ile verilen  $T$  daralmasının tek bir sabit nokta olduğunu gösterelim.

### 2.2.2.Çözüm

$$T(x) = \frac{1}{2}x$$

$$\therefore T(y) = \frac{1}{2}y$$

$$\therefore \|T(x) - T(y)\| = \left\| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right\| = \|x - y\|$$

$T$  bir daralma eşlemesidir. Banach sabit nokta teoremine göre  $T$  nin tek bir sabit noktası vardır. (Soykan, 2012).

### 2.2.3.Örnek

$T$  nin  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  yi sağladığını gösteren herhangi bir sabit noktası olmadığını gösterelim. (Soykan, 2012).

### 2.2.3.Çözüm

$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bu şekilde tanımlansın.

$$T(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}e^x & x \leq 0 \text{ için} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & x \geq 0 \text{ için} \end{cases}$$

$$T(y) = \begin{cases} y - \frac{1}{2}e^y & y \leq 0 \text{ için} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y & y \geq 0 \text{ için} \end{cases}$$

$x, y \leq 0$  için

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\| x - \frac{1}{2}e^x - y + \frac{1}{2}e^y \right\| = \left\| (x - y) - \frac{1}{2}(e^x - e^y) \right\| \leq \|x - y\|$$

$x, y \geq 0$  için

$$\|T(x) - T(y)\| = \left\| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \right\| = \left\| \frac{1}{2}(x - y) \right\| \leq \|x - y\|$$

$T$  nin sağlandığı görülür.  $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$  dir. Sabit noktanın tanımından  $T(x) = x$  elde edilir.  $x \leq 0$  için

$$T(x) = x = x - \frac{1}{2}e^x \Rightarrow x = x - \frac{1}{2}e^x \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}e^x \Rightarrow e^x = 0 = e^1 \Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

Fakat  $x \leq 0$  olacağından sağlanmaz

$x \geq 0$  için

$$T(x) = x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$$

$x \geq 0$  olduğundan sağlanmaz dolayısıyla

$$T(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}e^x & x \leq 0 \text{ için} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & x \geq 0 \text{ için} \end{cases}$$

ile tanımlanan  $T$ 'nin verilen koşulu (Banach daralma teoremi) karşılayan sabit noktası yoktur.

Benzer şekilde  $T(y) = y$  olsun,  $y \leq 0$  için

$$T(y) = y = y - \frac{1}{2}e^y \Rightarrow y = y - \frac{1}{2}e^y \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}e^y \Rightarrow e^y = 0 = e^1 \Rightarrow y = 1 \text{ dir.}$$

$y \geq 0$  olduğu sağlanamaz. Görülmektedir ki,

$$T(y) = \begin{cases} y - \frac{1}{2}e^y & y \leq 0 \text{ için} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y & y \geq 0 \text{ için} \end{cases}$$

$T'$  nin verilen koşulu (Banach daralma teoremi) karşılayan herhangi bir sabit noktası olmadığı görülmektedir. (Soykan, 2012).

### 2.3. Metrik uzaylarda Büzülme Dönüşümleri

$(X, d)$  bir metrik uzay ve bir  $f: X \rightarrow X$  dönüşümü verilsin. En az bir  $K < 1$  sabiti için  $x, y \in X$  olmak üzere  $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$  oluyorsa  $f$ 'ye  $X$  metrik uzayının bir büzülmesi denir. (Sutherland, 2008).

### 2.4. Ön Teorem

Bir  $X$  metrik uzayında her büzülmesi dönüşümü düzgün süreklidir. (Sutherland, 2008).

### 2.5. Teorem

$X$  bir tam metrik uzay ve  $f: X \rightarrow X$  bir büzülme olsun. O zaman  $f$ ,  $X$  'de bir tek  $p$  sabit noktaya sahiptir. (Sutherland, 2008).

### 2.6. Banach Uzaylarında Sabit Nokta Teoremi

$T$  tam metrik  $X$  uzayında daralma eşlemesi olsun.  $T$  nin tek bir sabit noktası olduğunu kanıtlayalım. Keyfi bir  $x_0 \in X$  ve yineleme dizisi  $(x_n)$  olarak verilsin.

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2, \dots, x_n = Tx_{n-1} \quad (2.6)$$

$$x_2 = TTx_0 = T^2x_0$$

$$x_3 = TT^2x_0 = T^3x_0$$

.

.

$$x_n = T^n x_0$$

$(x_n)$  bir cauchy dizisi ve  $n > m$  ise

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ \Rightarrow d(x_{m+1}, x_m) &\leq Kd(x_m, x_{m-1}) \\ \Rightarrow d(x_{m+1}, x_m) &\leq Kd(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ \Rightarrow d(x_{m+1}, x_m) &\leq K^2d(x_{m-1}, x_{m-2}) \end{aligned}$$

bu şekilde  $m$  katına kadar devam edildiğinde,

$$\Rightarrow d(x_{m+1}, x_m) \leq K^m d(x_1, x_0) \quad (2.7)$$

(2.5) elde edilir.  $n > m$  için üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq K^m d(x_0, x_1) + K^{m+1} d(x_0, x_1) + \dots + K^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &= K^m (1 + k + \dots + K^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$k^m \frac{1-k^{n-m}}{1-K} d(x_0, x_1) \quad (2.8)$$

$0 < K < 1$ , olduğundan  $1 - k^{n-m} < 1$  olarak verilsin,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-K} d(x_0, x_1) \quad (2.9)$$

$d(x_0, x_1)$  sabit ve  $0 < K < 1$  olduğundan  $m$  yi yeterince büyük alarak sağ tarafı yeterince küçük yaptığımızda  $(x_n)$ 'nin bir Cauchy dizisi olduğu görülür.  $X$  tam olduğundan  $x_n \rightarrow x$  olacak şekilde  $x \in X$  mevcut olur. Limit  $x$ 'in  $T$  nin bir eşleşmesi olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, Tx) \\ \Rightarrow d(x, Tx) &\leq d(x, x_n) + Kd(x_{n-1}, x) \end{aligned}$$

Olduğu görülür.  $d(x, y) = 0$  olduğundan  $x = y$  olur.  $x_n \rightarrow x$  olacağından  $d(x, x_n) \rightarrow 0$  ve  $d(x_{n-1}, x) \rightarrow 0$  dır.  $d(x, Tx) = 0$  olduğundan  $Tx = x$  dir.  $x$ ,  $T$ 'nin sabit noktasıdır. Şimdi  $x$ 'in  $T$  nin tek sabit noktası olduğunu gösterelim.

$x_1$ ,  $T$  nin ikinci bir noktası olarak verilsin.  $Tx_1 = x_1$  dir.  $d(x, x_1) = d(Tx, Tx_1) \leq kd(x, x_1)$  ve  $k < 1$  olduğundan  $d(x, x_1) = 0$  dir.  $x = x_1$  olduğu için sabit noktanın tekliği kanıtlanmıştır. (Kreyszing, 1978).

### 2.6.1.Örnek

$X = \mathbb{R}$ ,  $\|x\| = x$  ve  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  olan gerçel sayıların Banach uzayı olsun.  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere  $|f'(x)| \leq k < 1$  olacak şekilde  $f(x) = x$  denkleminin çözümü bulalım. (Mustafa, 2016).

### 2.6.1.Çözüm

$x, y \in [a, b]$  ve  $y < z < x$  olsun. Lagrange'in ortalama değer teoremine göre

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = (x - y)f'(z)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |(x - y)f'(z)|$$

$$\therefore |f(x) - f(y)| = |x - y||f'(z)|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

$f$ ,  $[a, b]$  üzerinde kendi içine eşlenen bir daralmadır.  $[a, b]$ ,  $X = \mathbb{R}$ 'nin kapalı bir alt kümesi olduğundan, Banach daralma teoremine göre  $f(x^*) = x^*$  olacak şekilde benzersiz bir  $x^* \in [a, b]$  sabit noktası vardır. Dolayısıyla  $x^*$  sabit noktası  $f(x) = x$  denkleminin bir çözümü olur. (Mustafa, 2016).

### 2.7.Normlu Uzaylarda Daralma Eşlemesi

$X$  bir normlu uzay ve  $T : X \rightarrow X$  olarak verilsin.  $k < 1$  pozitif reel sayısı mevcut ise her  $x, y \in X$  için normlu daralma

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| \quad (2.10)$$

ile gösterilir. (Sutherland, 2008).

## 2.8.Lipschitz Koşulunu

Bir  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ile  $\alpha$  ve  $K$  pozitif gerçel sayıları verilsin. Her  $x, y \in D$  için

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha \quad (2.11)$$

koşulunu sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonu  $D$  üzerinde  $\alpha$ . mertebeden  $K$  sabiti Lipschitz koşulu sağlanır. (Sutherland, 2008).

## 2.9.Önerme

- i.  $f$  fonksiyonu  $D$  üzerinde  $\alpha > 0$  mertebeden Lipschitz koşulunu sağlıyorsa  $D$  üzerinde düzgün süreklidir.
- ii.  $f, [a, b]$ 'da  $\alpha > 1$  mertebeden Lipschitz koşulunu sağlarsa  $[a, b]$ 'da sabittir.
- iii.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, [a, b]$  da sürekli,  $(a, b)$  da türevlenebilir ve her  $x \in (a, b)$  için  $|f'(x)| \leq K$  oluyorsa  $f, [a, b]$ 'da 1. Mertebeden  $K$  sabibiti Lipschitz koşulunu sağlar. (Sutherland, 2008).

## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### 3.BANACH SABİT NOKTA TEOREMİNİN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI

Değişkenler ile türev arasındaki ilişkiyi gösteren denklemlere, diferansiyel denklem adı verilir. Yaklaşık iki bin yıldan fazla tarihe sahip olan ardışık yaklaşımlar yöntemi, ilk defa İtalyan matematikçi Picard tarafından adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için, Cauchy probleminin tahmini çözümü araştırılmıştır. Bu alandaki ilk tahmini sonuç Polonyalı matematikçi Steven Banach'a aittir. Bu alanda yapılan çalışma sonucu "Daralma Dönüşüm Prensipleri" veya "Banach Sabit Nokta Teoremi" olarak ifade edilmektedir. Başlangıç koşulları olan bir diferansiyel denklem Cauchy problemi olarak ifade edildiğinde, problemlerin çözümünün varlığını garanti eden, uygun koşulların bulunması gerekmektedir. Banach sabit nokta teoremi fonksiyon uzaylarıyla bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır ve diferansiyel ve integral denklemlerin çözümleri için, varlık ve teklik teoremlerini verir. Bir diferansiyel denklem için,

$$x' = f(x, t) \quad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.2)$$

başlangıç değer problemi (3.2) başlangıç koşulundan oluşur.  $t_0$  ve  $x_0$  birer gerçel sayıdır. Adi diferansiyel denklemler teorisinde önemli rol oynayan Picard teoremini kanıtlamak için Banach daralma teoremini kullanılır. Picard'ın ardışık yaklaşımlar yöntemi bir  $T$  eşlemesi tanımlayan, integral denklemine dönüştürülerek, Picard teoremin koşulları,  $T$  nin bir daralma ve sabit nokta problemin çözümü olduğu gösterilebilir.

#### 3.1.Örnek

Adi diferansiyel denklemlerde  $f$  üzerinde uygun koşullar altında,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); y(x_0) = y_0 \quad (3.3)$$

başlangıç değer problemi,  $(x_0, y_0)$ 'ın yeterince küçük bir komşuluğunda bir tek çözüme sahip olduğu Cauchy-Picard teoremi ile ifade edilir. (Sutherland, 2008).

### 3.2. Teorem

$f: D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her  $(x, y_1) \in D$  ve en az bir  $K > 0$  için  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$  Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.  $M, |f(x, y)|$  nin  $D$  kümesinde bir üst sınırı olmak üzere  $c = \min\{a, b/M\}$  olarak verilsin. O zaman  $I = [x_0 - c, x_0 + c]$  de, (3.3) denkleminin bir tek  $y$  çözümü vardır. (Sutherland, 2008)

### 3.2. İspat

Banach sabit nokta teoremine, ardışık yaklaşımlar yöntemi ile düzgün yakınsaklık özelliklerini kullanır. Bir  $y$  fonksiyonunun  $I$ 'da, başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için  $y$  nin  $I$ 'da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.4)$$

(3.4) İntegral denkleminin bir çözümünün mevcut olmasının gerekli ve yeterli şart olduğunu gösterelim. Bunun için  $y$  nin bu integral denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.  $y$  ve  $f$  sürekli olduğundan  $f(t, y(t))$ ,  $I$ 'da süreklidir. Böyle bir integralin, diferansiyeli ile  $dy/dx = f(x, y)$  ve  $x = x_0$  koyarak  $y(x_0) = y_0$  buluruz. Tersine,  $y(x)$  in başlangıç problemini sağladığını düşünelim. O zaman  $[x_0, x]$  üzerinde integral olarak her  $x \in I$  için

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.5)$$

olduğu görülür. Analizin temel teoreminden denklemin sol tarafı  $y(x) - y(x_0)$  olur ve buradan  $y(x)$  (3.4) integral denklemini sağlar. İntegral kuralından  $y(x)$ ,  $I$ 'da süreklidir. İntegral denklemine Banach sabit nokta teoremini uygulanır. Önce Cauchy-picard teoreminin,  $c' < \min\{a, b/M, 1/K\}$  olmak üzere asıl ifadesinde  $I$  y1 (olasılıkla ondan daha kısa)  $I' = [x_0 - c', x_0 + c']$  ile değiştirerek daha zayıf bir biçimini ispatlayalım.  $I'$ 'de tanımlı gerçel değerli ve her  $x \in I'$  için  $|y(x) - y_0| \leq b$  koşullu sürekli fonksiyonların uzayını  $X' \subseteq CI'$  ile gösterelim.  $X', CI'$  de kapalıdır. Çünkü eğer bir takım  $x \in I'$  ler için  $|y(x) - y_0| > b$  ise aynı ifade, sup metrik cinsinden  $CI'$  nün  $y(x)$ 'e yeterince yakın bütün fonksiyonları için de doğrudur. Bu  $X'$ 'nün  $CI'$  deki tümleyeninin yine  $CI'$  de açık olmasını gerekli kılar.  $CI'$  tam olduğu için  $X'$  tamdır.  $F: X' \rightarrow X'$  olacak şekilde

$$F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.6)$$

olarak tanımlansın. Öncelikle,  $y \in X'$  için  $F(y) \in X'$  olur. Çünkü integral gereği  $F(y)$ ,  $I'$  de süreklidir ve hatta herhangi bir  $x \in I'$  için

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq c' M \leq b$$

bulunur.  $F$  bir büzülmedir. Çünkü  $y_1, y_2 \in X'$  ise

$$\begin{aligned} d_\infty(y_1, y_2) &= \sup_{|x-x_0| \leq c'} \left| \int_{x_0}^x \{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\} dt \right| \\ &\leq c' K d_\infty(y_1, y_2) \end{aligned}$$

$c'K < 1$  elde edilir. O zaman  $F$ 'nin tek bir sabit noktaya sahip olduğu görülür ve buda başlangıç değer probleminin  $I'$  de tek sürekli çözümüdür.  $CI$  üzerinde farklı bir metrik kullanarak,  $I$  nin tamamı üzerinden varlık ve tekliği gösterilebilir.  $y_1, y_2 \in CI$  için

$$d(y_1, y_2) = \sup_{x \in I} e^{-K|x-x_0|} |y_1(x) - y_2(x)|$$

tanımlayalım. Herhangi bir  $t \in I$  için

$$e^{-K|t-x_0|} |y_1(t) - y_2(t)| \leq \sup_{x \in I} e^{-K|x-x_0|} |y_1(x) - y_2(x)| = d(y_1, y_2)$$

bulunur ve böylece her  $t \in I$  için

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq d(y_1, y_2) e^{K|t-x_0|}$$

olur. Tüm  $x \in I$  ler için  $e^{-Kc} \leq e^{-K|x-x_0|} \leq 1$  olduğundan  $d$  metriği,  $CI$  daki sup metriğine Lipschitz denktir. Böylece bu metrikle  $CI$  tamdır.  $CI'$  da bütün  $x \in I$  lar için  $|y(x) - y_0| \leq b$  Koşulunu sağlayan,  $y$  lerden oluşan küme  $X \in CI$  olsun.  $X$  kümesi  $CI$  nin kapalı bir alt uzayıdır ve bu yüzden de tamdır. Tekrar aynı şekilde  $F: X \rightarrow X$  olarak tanımlansın ve  $y \in X$  iken  $F(y) \in X$  olacağı gösterilsin. Şimdi  $y_1, y_2 \in X$  için

$$d(F(y_1), F(y_2)) = \sup_{x \in I} e^{-K|x-x_0|} \left| \int_{x_0}^x \{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{x \in I} e^{-K|x-x_0|} \left| \int_{x_0}^x K|y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \\
&\leq d(y_1, y_2) \sup_{x \in I} e^{-K|x-x_0|} \left| \int_{x_0}^x K e^{K|t-t_0|} dt \right| \\
&= d(y_1, y_2) \sup_{x \in I} e^{-K|x-x_0|} (e^{-K|x-x_0|} - 1) \\
&= d(y_1, y_2) \sup_{x \in I} (1 - e^{-K|x-x_0|}) \\
&\leq (1 - e^{-Kc}) d(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,  $1 - e^{-Kc} < 1$  olduğu için  $F$  bir büzülmedir. Bu da (3.3) olarak verilen başlangıç değer probleminin  $I$  üzerinde bir tek çözüme sahip olacağını ispatlar. (Sutherland, 2008).

### 3.3.Picard Teoremi

$f(x, y)$  bir dikdörtgende iki değişkenli sürekli bir fonksiyon olsun.

$A = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  ikinci değişken  $y$  deki lipschitz koşulunu sağlasın.  $(x_0, y_0)$  noktası  $A$  nın herhangi bir iç noktası olsun. O zaman,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.7)$$

diferansiyel denkleminin tek bir çözümü vardır.  $y = g(x)$  alındığında denklemin  $(x_0, y_0)$  noktasından geçtiğini ifade edelim. (Kreyszing, 1978).

### 3.3.İspat

(3.7) diferansiyel denklemi göre  $y = g(x)$  ve  $g(x_0) = y_0$  özelliğini sağladığı düşünüldüğünde (3.7) diferansiyel denkleminin  $x_0$  dan  $x$ 'e integralini alırsa,

$$[y]_{x_0}^x = \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \quad (3.8)$$

(3.8) denklemi elde edilir.

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \quad [\because y = g(x)]$$

$$\Rightarrow g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt$$

olur. Dolayısıyla (3.7) denkleminin tek çözümünün

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \quad (3.9)$$

(3.9) denkleminin eşdeğeri olduğu görülür.  $f(x, y)$ ,  $y$ 'de Lipsicitz koşulunu sağladığından  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq q|y_1 - y_2|$  olacak şekilde  $q > 0$  sabiti vardır.  $(x, y_1), (x, y_2) \in A$  dir.  $f(x, y)$ ,  $\mathbb{R}^2$  kompakt bir  $A$  alt kümesi üzerinde sürekli olduğundan sınırlıdır.  $|f(x, y)| \leq m$  ve  $\forall (x, y) \in A$  olacak şekilde bir  $m$  sabiti vardır.  $p, q < 1$  olduğu varsayılarak pozitif bir  $p$  sabiti ve dikdörtgeni seçilmiş olsun.

$B = \{(x, y) | x_0 - p \leq x \leq x_0 + p, y_0 - pm \leq y \leq y_0 + pm\}$  ile tanımlanan  $A$  kümesinde bulunur.  $[x_0 - p, x_0 + p]$  üzerinde tanımlanan tüm gerçekteğerli sürekli fonksiyonlar  $y = g(x)$  kümesi olan  $X$  olarak verilsin. Öyle ki  $\|g(x) - y_0\| \leq mp$  olduğu görülür.  $X$  Banach uzayı  $C[x_0 - p, x_0 + p]$  nin üst normlu kapalı bir alt kümesidir.

$T: X \rightarrow X$ ,  $Tg = h$  olarak tanımlansın

$$h(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt$$

$$h(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt$$

$$\|h(x) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \right\|$$

$$\Rightarrow \|h(x) - y_0\| \leq \left\| \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \right\|$$

$$\Rightarrow \|h(x) - y_0\| \leq m \int_{x_0}^x dt$$

$$\Rightarrow \|h(x) - y_0\| \leq m(x - x_0) \leq mp$$

$\therefore h(x) \in X$  dir.  $T$  iyi tanımlanmış olup  $y_0 \in X$  olduğundan,

$$\|Tg - Tg_1\| = \|h - h_1\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, g_1(t)) dt \right\| \\
&= \left\| \int_{x_0}^x (f(t, g(t)) - f(t, g_1(t))) dt \right\| \\
&\leq \left\| \int_{x_0}^x f(t, g(t)) - f(t, g_1(t)) dt \right\| \\
&\leq q \int_{x_0}^x \|g(t) - g_1(t)\| dt \\
&= q(x - x_0) \|g - g_1\| \\
&\leq pq \|g - g_1\|
\end{aligned}$$

$\|Tg - Tg_1\| \leq k \|g - g_1\|$  olacak şekilde  $0 < k = pq < 1$  olur, dolayısıyla  $T$ ,  $X$  üzerinde bir daralma eşlemesidir. Banach daralma teoremine göre  $T$ 'nin tek bir  $g^* \in X$  sabit noktası vardır. Bu tek sabit  $g^*$  sabit noktası (3.9) denkleminin bir çözümüdür. (Kreyszing, 1978).

### 3.3.1.Örnek

$K(x, y)$  fonksiyonu  $A$  karesel bölge içinde tanımlı ve ölçülebilir olsun.

$$A = \{(x, y): a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

Ayrıca,

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

olarak verilsin,

$$g(x) \in L_2(a, b)$$

olmak üzere denklem,

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (3.10)$$

yeterince küçük olan her  $\lambda$  parametre değeri  $f(x) \in L_2(a, b)$  olacak şekilde integral denkleminin benzersiz tek çözümünün var olduğunu göstereyim. (Kreyszing, 1978).

### 3.3.1.Çözüm

$x = L_2$  ve  $T$  eşlemesi  $T: L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$  olsun

$$Tf = h$$

$$h(x) = g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

Bu tanım her  $(a, b), h \in L_2$  için geçerlidir.  $g \in L_2(a, b)$  ve  $\lambda$  bir skaler olduğundan

$$\omega(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy \in L_2(a, b)$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliği düşünüldüğünde

$$|\omega(x)| = \left| \int_a^b K(x, y)f(y) dy \right|$$

$$\Rightarrow |\omega(x)| \leq \int_a^b |K(x, y)f(y)| dy$$

$$\Rightarrow |\omega(x)| \leq \left( \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |\omega(x)|^2 \leq \left( \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right) \left( \int_a^b |f(y)|^2 dy \right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b |\omega(x)|^2 dx \leq \int_a^b \left( \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right) dx \int_a^b \left( \int_a^b |f(y)|^2 dy \right) dx$$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy \leq \infty$$

ve

$$\int_a^b \int_a^b |f(y)|^2 dx dy \leq \infty$$

hipotezine göre,

$$\therefore \int_a^b |\omega(x)|^2 dx < \infty$$

olur.

Böylece,

$$\omega(x) = \int_a^b K(x,y)f(x,y)f(y) dy \in L_2(a,b)$$

dir.  $L_2(a,b)$  nin normlu bir Banach uzayı olduğunu bildiğine göre,

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir.  $T$ 'nin bir daralma eşlemesi olduğunu gösterelim.  $\|Tf - Tf_1\| = \|h - h_1\|$  nin var olduğu düşünülürken

$$h_1(x) = g_1(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f_1(y) dy$$

ancak,

$$\|h - h_1\| = \left\| g(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y) dy - g_1(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)f_1(y) dy \right\|$$

$$\Rightarrow \|h - h_1\| = \left\| [g(x) - g_1(x)] + \lambda \int_a^b [K(x,y)\{f(y) - f_1(y)\}] dy \right\|$$

$$\Rightarrow \|h - h_1\| \leq \|g(x) - g_1(x)\| + \left\| \lambda \int_a^b [K(x,y)\{f(y) - f_1(y)\}] dy \right\|$$

$$\Rightarrow \|h - h_1\| \leq \left\| \lambda \int_a^b [K(x,y)\{f(y) - f_1(y)\}] dy \right\|$$

$$\Rightarrow \|h - h_1\| \leq |\lambda| \left( \int_a^b \left\| \int_a^b K(x,y)\{f(y) - f_1(y)\} dy \right\|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|h - h_1\| \leq |\lambda| \left( \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \int_a^b |f(y) - f_1(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

Cauchy –Schwartz-Bunyakowski eşitsizliğini kullanarak

$$\Rightarrow \|h - h_1\| \leq |\lambda| \left( \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \|f - f_1\|$$

dir.

Dolayısıyla,

$$\|Tf - Tf_1\| \leq |\lambda| \left( \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \|f - f_1\|$$

eğer,

$$|\lambda| < \frac{1}{\left( \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2}}$$

$$\|Tf - Tf_1\| \leq K \|f - f_1\|$$

Burada,

$$K = |\lambda| \left( \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2} < 1$$

dolayısıyla  $T$  bir daralmadır ve benzersiz bir sabit noktadır.  $Tf^* = f^*$  olacak şekilde benzersiz bir  $f^* \in L_2(a,b)$  vardır. Bu sabit nokta (3.10) denkleminin benzersiz bir çözümüdür. (Kreysing, 1978).

### 3.4. İntegral Denklemlere Uygulaması

Banach sabit nokta teoremini integral denklemlerin varlık ve teklik teoremlerinin kaynağı olarak da gösterelim.

$$(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau = v(t) \quad (3.11)$$

(3.11) İntegral denklemi ikinci türden fredholm denklemi olarak ifade edilir.  $x$  ile ifade edilen  $[a, b]$  üzerinde bilinmeyen bir fonksiyondur.  $\mu$  bir parametredir. (3.11) Denklemin kernel  $k$  si,  $G = [a, b] \times [a, b]$  karesel bölgesi üzerinde ve  $v$ ,  $[a, b]$  üzerinde verilen bir fonksiyondur ve  $C[a, b]$  fonksiyon uzayında olduğu düşünölsün.  $J = [a, b]$  da tanımlanan tüm süreklil fonksiyonların uzayı,  $d$  metriği ile verildiğinde

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

$x(t)$  teriminin varlığı teoremdede gösterildiği gibi yinelemeyi uygulamamızı sağlar. Bu terimi olmayan denklem

$$\int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau = v(t) \quad (3.12)$$

(3.12) ile gösterilen ve birinci türden olsun. Banach teoremi için  $C[a, b]$  nin tam olduğuna dikkat edildiğinde  $v$  fonksiyonu  $C[a, b]$  ve  $k$  nin,  $G$  üzerinde sınırlı bir fonksiyonudur.

$|k(t, \tau)| \leq c$  olarak düşünüldüğünde  $x = Tx$  de yazıldığında

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

(3.13) haline dönüşür.  $v$  ve  $k$  sürekli olduğundan  $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  olacak şekilde  $T$  operatörü tanımlansın.  $\mu$  ye  $T$  nin bir daralma olmasını sağlayacak şekilde bir sınırlama getirildiğinde

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq |\mu| \max_{t \in J} \int_a^b |k(t, \tau)| |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \\ &= |\mu| c \max_{\sigma \in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b d\tau \\ &= |\mu| c d(x, y)(b - a) \end{aligned}$$

$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$  olarak yazıldığında  $\alpha = |\mu|c(b - a)$  olur.  $T$  nin bir daralma haline gelmesi ( $\alpha < 1$ ) görülmektedir dolayısıyla Banach sabit nokta teoremi

$$|\mu| < \frac{1}{c(b - a)}$$

Sonucunu göstermektedir. Böylece, (3.11) olarak verilen denkleminin  $T$  bir çözümdür. (Kreyszing, 1978).

## TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklem sistemlerinin bir çeşidi olan adi diferansiyel denklemlerde Banach sabit nokta teoreminin nasıl kullanıldığı ortaya konulmuştur.

$x' = f(x, y)$  olarak verilen bir adi diferansiyel denklem için,  $f$  fonksiyonu kapalı ve sınırlı bir bölge üzerinde düzgün sürekli ve Banach uzayında sınırlı bir fonksiyon olduğu kabul edilmiştir.

Adi diferansiyel denklemin aranan çözümü, düzgün norm altında sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde, uygun bir integral operatörünün sabit noktası olarak ifade edilmiştir.

Bunun için bir diferansiyel denklemin integral denkleme denk olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Picard teoremi ile ardışık yaklaşımlar sağlanarak bu integral operatörünün benzersiz bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermek, için Banach sabit nokta teoremi kullanılmıştır.

$f$  fonksiyonu sabit bir noktası olmayan ancak, kompakt bir uzayda olan bir fonksiyon ise sabit bir noktasının var olabileceği, bu noktanın da benzersiz olduğu ortaya konulmuştur. Bu sabit noktanın Banach daralma olduğu kolayca gösterilmiştir. Daralma operatörünün kompaktlık nedeniyle var olduğu ve sabit bir noktaya dönüştüğü, herhangi bir yineleme dizisinin sınırı olduğu sonucu ile ispatlanmıştır.

## KAYNAKLAR

- BARTLE Rober G, SHERBERT Donald R. ( 2010),*Introduction to Real Analysisfourth Edition*. Universty of III inois, urbana Champaign,326-329.
- BAYRAKTAR Mustafa,(2006), *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Kitabevi TİC.LTD.ŞTİ.21-28,81,97,173.
- BAYRAMOV Sadi, GÜNDÜZ(Aras),(2004),*Çiğdem, Genel Topoloji*. Çağlayan Kitabevi, 48,63,203,268.
- FABIAN Marian, HABARA Petr, HAJEK Petr, MONTESINOS Vicente, ZIZLER Vaclav,(2010),*Banach Space Theory*. The Basis for linear and nonlinear Analıysis.
- FARAJZADEH P. Ali, (2006), *On The Symmetric Vector Quasi-Equilibrium Problems*, J. Math. Anal. Appl. (322) 1099–1110.
- FARAJZADEH P. Ali, (2016), *Kompakt Olmayan Ve Süreksiz Dönüşümler İçin Sıralı Banach Uzaylarında Ara Değer Teoremi Üzerine*, Semnan Üniversitesi, Uluslararası Doğrusal Olmayan Analiz ve Uygulamalar Dergisi, 295-300.
- FARAJZADEH P. Ali, (2013), *Çok Değerli Haritalamalar İçin Genelleştirilmiş Değişimsel Eşitsizlik Sorunları Üzerine*, Doğrusal Olmayan Analiz ve Optimizasyon Dergisi, Teori ve Uygulamalar (JNAO),37-44.
- FARAJZADEH P. Ali, (2013), *Banach Çerçevesinde Doğrusal Olmayan Küme Değerli Varyasyonel Denklemler İçin Duyarlılık Analizi*, Fonksiyon Uzayları Dergisi, Hindu.
- FARAJZADEH P. Ali, (2008), *Topolojik Vektör Uzaylarında Psödomonoton Ayar Değerli Eşlemeler Hakkında*, Cambridge Üniversitesi Yayınları, ANZIAM Dergisi, 258-265.
- FİTLENAVİNDY Yunike Jemis , Alsitaningtyas, (2019),*Banach Sabit Nokta Teoremi* Yüksek Lisans Tezi, UNDİP.
- GİRGİN Ekber,(2010),*Modüler Uzaylarda Sabit Nokta Teorisi ve Uygulamaları*, Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

- GÜNGÖR Faruk,(2010),*Diferansiyel Denklemler*.İstanbul Tenik Üniversitesi Vakfı,60-62.
- DUMAN Okan,(2019),*Diferansiyel Denklemlerin Varlığı ve Tekliği İle İlgili Çözümler*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi fen Bilimleri Enstitüsü.
- JUNGHEHN Hugo D.,*A Course in Real Analysis*.The George Washington University Washington,DC,USA,231,238,243,248.
- KNAPP Anthony W.,(2016),*Basic Real Analysis Digital second Edition*,Published by teh Author East Setauket,New York,84,88,92,96,100,115.
- KREYSZING Erwin,*Introduction Functional Analysis With Applications*.University of Windor,5-7,18,26,33,59,65,67,92,104,118,301,315-316.
- KUMARESAN S.,(2005)*Topoloji Of Metric Space*.Alpha Science International Ltd. Harrow U.K. Department Of Mathematics University Of Mumbai,Mumbai India,143-147.
- Mr. Andrew of Mathematics,(2011),*Functional Analysis Notes*,Rhodes University,81-82,83-85.
- MUKHERJEA A. and POTHOVEN K.,*Second Editions Real and Functional Analysis Part B*.University of South Florida Tampa Floria,3,14,16-17,34,71,73.
- MUSAYEV Binali, ALP Murat,(2000), *Fonksiyonel ANALİZ*, BALCI Mustafa, Fen Edebiyat fakültesi Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya. 35,63,72,31.
- MUSTAFA Nizamettin, (2016), *Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz*. Fen Edebiyat Bölümü, Kafkas Üniversitesi, Kars, Seçkin, Fen bilimleri, 15,50,83,108,204,254.
- NAGLE R. Kent, SAFF Edward B, SNIDER Arthur David,(2013),*Diferansiyel Denklemlerin Temelleri*. Prof. Dr. Ogün DOĞRU, Nobel Akademi Yayıncılık, 11,12.
- NESİN Ali, (2020), *Analiz IV*, Nesin Yayıncılık A.Ş.153-155.
- NGUVEN Luc, (2018), *Functional Analysis II*. Hılary, 22-29,31-33.

- RAHİMOV Abdulgafur, (2006), *Topolojik Uzaylar*. Seçkin Yayıncılık Sanayi Tic ve A.Ş. 145, 232.
- RASULOV Mahir, SİNSOYSAL Bahaddin, (2014), *Diferansiyel Denklemler Teorisine Giriş*. Beykent Üniversitesi matematik Bölümü, 12.
- REED Michael, SİMON Barry, (1980), *Methods of Modern Mathematical Physics Functional Analysis*. Revised and Enlarged Edition. 150-154, 68-69.
- ROYDEN H.L., FİZPATRİCK P.M., (2009), *Real Analisys Fourt Edition*. College Park, 183, 187, 190, 193, 277.
- RUDİN Walter, *Functional Analysis second Edition*. Professor Of Mathematics University Of Wisconsin, 23, 68, 69, 103, 210.
- SALAMON A., (2016), *Functional Analysis*. Theo Bühler ETC, Dietman, Zürich, 1-4, 14, 17, 46, 53, 331, 277, 60, 65.
- SCHENKER Jeff, *Funtional Analisys (Math 920) Lecture Notes For Spring '08*, Michigan State University.
- SINGER Ivan, (1903), *The theory Of Best Approximation And Functional Analysi Institute of mathematic*. Bucharest Society for Inndustrial and applied Mathematic, Philadelphia, Pennsylvania, 49-51, 30-31.
- SOYKAN Yüksel, (2012), *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık TİC. LTD. ŞTİ. 153, 269.
- SUAREZ Luis Carlos, *Functional Analysis*. 3-9, 11-12.
- SUTHERLAND Wilson A., (2008), *Introduction to Metric & Topological Spaces*. Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR, Yrd. Doç. Dr. Saadet Öykü YURTTAŞ, Oxford University press. 40-53, 177-178, 190-193.