

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**KÜME DİZİLERİNİN  $\lambda$  – İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI**

**Ayşe EREN**

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

TEMMUZ 2024

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

## KÜME DİZİLERİNİN $\lambda$ – İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI

Tez Yazarı  
Ayşe EREN

Danışman  
Prof. Dr. Mikail ET

TEMMUZ 2024  
ELAZIĞ

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

---

Başlığı: Küme Dizilerinin  $\lambda$  – İstatistiksel Sınırlılığı  
Yazarı: Ayşe EREN  
İlk Teslim Tarihi: 04.06.2024  
Savunma Tarihi: 19.07.2024

---

**TEZ ONAYI**

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mikail ET Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Mahmut IŞIK Harran Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ...../...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

*İmza*

Prof. Dr. Burhan ERGEN  
Enstitü Müdürü

## BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Küme Dizilerinin  $\lambda$  – İstatistiksel Sınırlılığı ” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

19.07.2024

**Ayşe EREN**



# ÖNSÖZ

---

Yüksek Lisans eğitimim süresince derslerime giren bilgi birikimini bize aktaran Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında aldığım eğitime destek olan tüm hocalarıma, danışmanım Prof. Dr. Mikail ET'e, karşılaştığım her problemin çözümünde yardımcı olan hocam Prof. Dr. Emrah YILMAZ'a, eğitimim boyunca beni motive eden destekleyen aileme, eşime ve oğlum Selçuk Eymen'e teşekkür ederim.

**Ayşe EREN**  
ELAZIĞ, 2024



# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	vii
SİMGELER .....	viii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR .....</b>	<b>2</b>
<b>3. <math>\lambda</math>- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....</b>	<b>7</b>
<b>4. KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI.....</b>	<b>11</b>
<b>5. KÜME DİZİLERİNİN <math>\lambda</math> –İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI .....</b>	<b>25</b>
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ	

# ÖZET

---

## Küme Dizilerinin $\lambda$ – İstatistiksel Sınırlılığı

Ayşe EREN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2024, Sayfa: viii + 30

---

Bu tez çalışmasında giriş bölümünde tezin amacı ve konunun gelişimi anlatılmıştır. Çalışmamızın daha anlaşılır olması için gerek duyulan bazı temel kavramlar verilmiştir. Reel sayı dizilerinin  $\lambda$  –istatistiksel yakınsaklığına değinilmiştir. Küme dizileri için Kuratowski istatistiksel yakınsaklık, Wijsman istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ana bölümde ise küme dizilerinin  $\lambda$  –istatistiksel sınırlılığı tanımlanmış, küme dizilerinin  $\lambda$  –istatistiksel yakınsaklığı ve küme dizilerinin  $\lambda$  –istatistiksel sınırlılığı arasındaki bağıntılar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:**  $\lambda$  –İstatistiksel Yakınsaklık, Wijsman  $\lambda$  –İstatistiksel Yakınsaklık, Wijsman Kuvvetli Cesaro Toplanabilirlik, Kuratowski İstatistiksel Yakınsaklık, Hausdorff İstatistiksel Yakınsaklık, Wijsman  $\lambda$  –İstatistiksel Sınırlılık.

# ABSTRACT

---

## $\lambda$ - Statistical Limitation of Cluster Sequences

Ayşe EREN

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

July 2024, Pages: viii + 30

---

In this thesis study, the purpose of the thesis and the development of the subject are explained in the introduction section. Some basic concepts needed to make our study more understandable are given. The  $\lambda$ -statistical convergence of real number sequences is mentioned. For cluster sequences, the concepts of Kuratowski statistical convergence, Wijsman statistical convergence and Hausdorff statistical convergence and the relations between these concepts are given. In the main section, the  $\lambda$ -statistical limitation of cluster sequences is defined, and the relations between the  $\lambda$ -statistical convergence of cluster sequences and the  $\lambda$ -statistical limitation of cluster sequences are given.

**Keywords:**  $\lambda$  –Statistical Convergence, Wijsman Statistical Convergence, Wijsman Strong Cesaro Summability, Kuratowski Statistical Convergence, Hausdorff Statistical Convergence, Wijsman  $\lambda$ -Statistical Boundedness

## SİMGELER

- $d(y, A)$  :  $y$  noktasının  $A$  kümesine uzaklığı  
 $\delta(K)$  :  $K$  Kümesinin doğal yoğunluğu  
 $\{WS\}$  : Wijsman istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi  
 $WS_{\lambda(b)}$  : Wijsman istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi



# 1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk defa Zygmund [16] nın kendi monografisinin ilk baskısında yayınlandı. Klasik yakınsaklık kavramının bir genelleşirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı fonksiyonel analizde ve toplanabilme teorisinde önemli yere sahiptir. İstatistiksel yakınsaklık Fast [12] ve bağımsız olarak Steinhaus [10] tarafından tanımlandı. Schoenberg [11] istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak ifade etti. Daha sonra bu kavram Fridy [6], Connor [4], Savaş [15], Mursaleen [9], Rath ve Tripathy [8], Salat [7], Bhardwaj [5], Çolak [1] Buck [3] gibi birçok bilim insanı tarafından topolojide, ergodic teoride, fourier analiz teorisinde, fonksiyonel analizde, sayılar teorisinde, trigonometrik serilerde, ölçüm teorisinde ve Banach uzaylarında çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık Fridy ve Orhan [14] ve Mursaleen [9] tarafından genelleştirildi. Dizilerin hemem hemen yakınsaklığı fikri Lorentz [17] tarafından tanımlandı. Freedman ve Sember [2] ve Maddox [18] tarafından da birbirlerinden ayrı olarak dizilerin kuvvetli hemen hemen yakınsaklığı kavramına genelleştirildi. İstatistiksel yakınsaklığın bir karakterizasyonu Fridy ve Miller [13] tarafından verilmiş, Mursaleen ve Edely [20] tarafından kavram çift indisli dizilere uygulanmıştır.

Küme dizilerinin limiti Painleve tarafından öğrencisi Zoretti' nin çalışmasını sunmasıyla tanıtılmış, fakat Kuratowski [36] tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu sebepte literatürde Kuratowski limiti olarak adlandırılır. Reel dizilerin yakınsaklığı kavramı birçok araştırmacı tarafından küme dizilerinin yakınsaklığına genişletilmiştir. Bu konudaki çalışmalar başta Beer ([29], [30], [31],[32],[33]) olmak üzere; Wijsman ([22], [23] ) ve birçok matematikçi tarafından günümüze kadar yapılmıştır. Küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı Nuray ve Rhoades [24] tarafından tanımlanmış, Et ve arkadaşları ([26],[27]) tarafından genelleştirilmiştir. Bu çalışmada reel sayı dizileri için Fridy ve Orhan [21] tarafından verilen istatistiksel sınırlılık kavramı küme dizilerine genelleştirilmiş, küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile aralarındaki bağıntı verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1.**  $Y, H$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\| : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \rightarrow \|y\|$  dönüşümü Her  $x, y \in Y$  için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve  $(Y, \|\cdot\|)$  ikilisine de bir normlu uzay denir.

$$N1) \|y\| \geq 0,$$

$$N2) \|\alpha y\| = |\alpha| \cdot \|y\|, \alpha \in K,$$

$$N3) \|y\| = 0 \Leftrightarrow y = \theta,$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ [19].}$$

**Tanım 2.2.**  $Y$  boş olmayan bir küme olsun.  $\mu: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü için

$$M(1) \mu(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$$

$$M(2) \mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$$

$$M(3) \mu(x, y) = \mu(y, x)$$

koşulları sağlanıyorsa  $\mu$  ye  $Y$  üzerinde bir metrik ve  $(\mu, Y)$  ikilisine bir metrik uzay denir ve bu durum  $(Y, p)$  ile gösterilir [28].

**Tanım 2.3.**  $(Y, p)$  bir metrik uzay olsun. Herhangi bir  $y \in Y$  noktası  $Y$  nin boştan farklı bir  $A$  altkümesi için  $y$  nin  $A$  ya olan uzaklığı  $d(y, A) = \inf_{a \in A} p(y, a)$  olarak tanımlanır [24].

**Tanım 2.4.** Tanım kümesi  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  kümesi olan her bir fonksiyona dizi adı verilir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli isimler alırlar. Örneğin; bir dizinin değer kümesi gerçek sayılar kümesi ise gerçek (reel) terimli dizi veya gerçek sayı dizisi denir. Bu dizi

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyondur.

**Tanım 2.5.**  $(Y, \|\cdot\|)$  normlu uzay ve  $y = (y_n)$  de  $Y$  uzayında bir dizi olsun, her  $\varepsilon > 0$  için  $n = n_0$  iken  $\|y_n - y\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı varsa  $y = y_n$  dizisine  $y$  ye yakınsaktır denir.  $y = (y_n)$  dizisi  $y$  ye yakınsak ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  veya  $y_n \rightarrow y$  veya  $y_n \rightarrow y$  biçiminde yazılır [19].

**Tanım 2.6.** Her  $n > 0$  sayısı için  $|y_n| \leq K$  olacak şekilde bir  $K > 0$  sayısı bulunabiliyorsa  $(y_n)$  dizisine sınırlı dizi denir.  $(y_n)$  dizisi yakınsak ise sınırlıdır [18].

**Tanım 2.7.**  $(Y, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $y = (y_n)$  de  $Y$  uzayında bir dizi olsun. her  $\varepsilon > 0$  için  $m, n > n_0$  iken  $\|y_m - y_n\| < \varepsilon$  olacak biçimde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı varsa  $y = (y_n)$  dizisine bir Cauchy dizisi denir [19].

**Tanım 2.8.**  $(Y, \|\cdot\|)$  normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [19].

**Tanım 2.9.** Bir  $Y$  vektör uzayında  $X$  alt kümesini ele alalım.  $x_1, x_2 \in X$  olduğunda

$M = \{x \in X: x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset X$  oluyorsa  $X$  alt kümesine konvektir denir [19].

**Tanım 2.10.**  $(Y, \|\cdot\|)$  normlu uzayı verilsin.  $Y$  üzerinde tanımlı sınırlı tüm lineer fonksiyonların kümesi  $\|f\| = \sup_{y \in Y} \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \sup_{y \in Y, \|y\|=1} |f(y)|$  normu ile normlu uzay oluşturur. Bu uzaya  $Y$  nin sürekli dual uzayı adı verilir ve  $Y'$  ile gösterilir [19].

**Tanım 2.11.**  $(Y, \|\cdot\|)$  normlu uzay ve  $(y_n)$ ,  $Y$  de tanımlı bir dizi olsun. Her  $f \in Y'$  ve  $n \rightarrow \infty$  için  $f(y_n) \rightarrow f(y)$  ise  $(y_n)$  dizisi  $y$  ye zayıf yakınsaktır denir.  $(y_n)$  dizisi  $y$  ye zayıf yakınsak ise  $y_n \xrightarrow{w} y$  biçiminde yazılır.

**Tanım 2.12.** Reel terimli tüm dizilerin kümesi  $V$  ile gösterelim.  $z = (z_k), y = (y_k)$  ve  $\alpha$  bir skaler olmak üzere

$$y + z = (y_k) + (z_k)$$

$$\alpha z = (\alpha z_k)$$

biçiminde gösterilen işlemlerin altında lineer uzaydır.  $V'$  nin her bir altvektör uzayına dizi uzayı adı verilir.

$$l_\infty = \{z = (z_k) : \sup_k |z_k| < \infty\} \text{ sınırlı,}$$

$$c = \left\{ z = (z_k) : \lim_k z_k \text{ mevcut} \right\} \text{ yakınsak ve}$$

$$c_0 = \{z = z_k : \lim_k z_k = 0\} \text{ sıfır diziler uzayı}$$

$$\|z\| = \sup_k |z_k| \text{ normu ile Banach uzayıdır [21].}$$

**Tanım 2.13.**  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesinde  $B$  alt kümesinin doğal yoğunluğu,  $|\{k \leq n : k \in B\}|$  ifadesi  $n$  den büyük olmayan  $B \subset \mathbb{N}$  kümesinin elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(B) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in B\}|$$

biçiminde tanımlanır.  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesinin herhangi sonlu alt kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu aşıkardır.  $B^c = \mathbb{N} - B$  olmak üzere  $\delta(B^c) = 1 - \delta(B)$  dir [6]. Herhangi bir

kümenin doğal yoğunluğunu bir diğer yol ile de şu yolla bulunabilir.  $(b_n)$  pozitif tam sayıların artan dizisi olmak üzere  $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$  olsun.  $B \subset \mathbb{N}$  kümesinin doğal yoğunluğu var ise

$$\delta(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n}$$

şeklindedir.

Örneğin  $B = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$  kümesinin doğal yoğunluğu  $\delta(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = 0$  olarak elde edilir. Burada doğal yoğunluğu 0 olan kümeler ile çalışacağız.

Bir özellik doğal yoğunluğu sıfır olan herhangi bir küme hariç her  $k$  için  $p$  özelliğini sağlıyorsa, bu özellik *hemen hemen her  $k$*  için sağlanıyor denir ve kısaca "*h. h. k.*" şeklinde yazılır.

**Tanım 2.14.**  $c, ac, |ac|$  ve  $l_\infty$  sırasıyla yakınsak, hemen hemen yakınsak, kuvvetli hemen hemen yakınsak ve tüm sınırlı dizilerin kümesini gösterebilir.

$$c \subset ac \subset |ac| \subset l_\infty$$

ilişkisi vardır.

**Tanım 2.15.** Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani h.h.k. için  $|y_k - L| < \varepsilon$  ise  $y = (y_k)$  dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda  $S - \lim y_k = L$  yazılır. Eğer  $L = 0$  ise, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $y = (y_k)$  dizisine istatistiksel sıfır dizisi adı verilir. Bütün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi  $S$  ile, bütün istatistiksel sıfır dizilerin kümesi ise  $S_0$  ile gösterilir [6].

**Örnek 2.1.**  $y = y_k$  dizisi

$$y_k = \begin{cases} 1, & k = b^2 \text{ ise } b = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k \neq b^2 \text{ ise } b = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ile verilsin.

$$|\{k \leq n : y_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : y_l \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Burada görüldüğü gibi  $S - \lim y_k = 0$  olur. Ancak  $(y_k)$  dizisi yakınsak değildir.

**Örnek 2.2.**  $y = y_k$  dizisi

$$y_k = \begin{cases} 1, & k = b^2 & \text{ise } b = 1,2,3,\dots \\ 4, & k \neq b^2 & \text{ise } b = 1,2,3,\dots \end{cases}$$

ile tanımlansın.

$$\delta(\{k \leq n : k = b^2\}) = 0$$

olduğundan  $y = y_k$  dizisi hemen hemen her  $n$  için 4'e yakınsak, yani  $S - \lim y_k = 4$  dir.

**Tanım 2.16.**  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k - y_N| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani hemen hemen her  $k$  için  $|y_k - y_N| < \varepsilon$  olacak biçiminde bir  $N = N(\varepsilon)$  doğal sayısı varsa  $y = (y_k)$  istatistiksel Cauchy dizisidir [6].

**Tanım 2.17.**  $y = (y_k)$  reel ( ya da kompleks) terimli bir dizi ve  $0 < p < \infty$  olsun. Eğer

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^n |y_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde  $L \in \mathbb{C}$  varsa  $y = (y_k)$  dizisi  $L$ 'ye kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir denir.

Kuvvetli  $p$ -cesàro toplanabilir dizilerin kümesi  $w_p$  ile gösterilir. O halde  $p > 0$  için

$$w_p = \{ y = (y_k) : \exists L \in \mathbb{C} \lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^n |y_k - L|^p = 0 \} \text{ şeklindedir [4].}$$

**Teorem 2.1.**  $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$  olsun. Eğer bir dizi  $L$ 'ye kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirse o zaman bu dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsaktır. Eğer sınırlı bir dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi  $L$ 'ye kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirdir [4].

**İspat:** Eğer bir dizi  $L$ 'ye kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirse, herhangi bir  $y = (y_k) \in w$  ve  $\varepsilon > 0$  için

$$\sum_{k=1}^n |y_k - L|^p \geq |\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p$$

yazılabilir. Buradan, eğer  $y = (y_k)$  dizisi  $L$ 'ye kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirse  $y = (y_k)$  dizisinin  $L$ 'ye istatistiksel yakınsak olduğu ortaya çıkar.

Şimdi  $y = (y_k)$  dizisinin sınırlı ve  $L$ 'ye istatistiksel yakınsak olduğunu varsayalım ve  $K = \|y\|_\infty + |L|$  olsun  $\varepsilon > 0$  ve her  $n > N_\varepsilon$  için

$$n^{-1} |\{k \leq n : |y_k - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}| < \frac{\varepsilon}{2} k^p$$

ve

$$L_n = \{k \leq n : |y_k - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}$$

yazalım, Şimdi  $n > N_\varepsilon$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k - L|^p &= \frac{1}{n} \sum_{k \in L_n} |y_k - L|^p + \sum_{k \notin L_n} |y_k - L|^p \\ &< \frac{1}{n} \left( n \frac{\varepsilon}{2k^p} \right) k^p + \frac{1}{n} (n) \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olup,  $y = (y_k)$  dizisi  $L$ 'ye kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirdir.

### 3. $\lambda$ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, istatistiksel yakınsama kavramını genelleştirmek için  $(V, \lambda)$  - toplanabilirlik kavramından yararlanacağız. Bu yeni yönteme  $\lambda$ -istatistiksel yakınsama adını vereceğiz.  $\lambda$ -istatistiksel olarak yakınsak olan tüm dizilerin kümesini  $S$  ile göstereceğiz. Bu yöntemin istatistiksel yakınsama,  $(C, 1)$  -toplanabilirlik ve kuvvetli  $(V, \lambda)$ -toplanabilirlik ile ilişkisini vereceğiz.

$\lambda = (\lambda_n)$ , pozitif sayıların

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1$$

şartını sağlayan azalmayan bir dizisi olsun. De la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} y_k$$

ve

$$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

için

$$t_n(y) \rightarrow L \quad (n \rightarrow \infty)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda  $y = (y_k)$  dizisinin bir  $L$  sayısına  $(V, \lambda)$ -toplanabilir olduğu söylenir [25]. Eğer her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda_n = n$  ise  $(V, \lambda)$ -toplanabilirlik,  $(C, 1)$ -toplanabilirliğe indirgenir.

Kuvvetli  $(V, \lambda)$ -toplanabilir ve kuvvetli  $(C, 1)$ -toplanabilir dizilerin kümesi sırasıyla

$$[C, 1] := \{ y = (y_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k - L| = 0 \}$$

$$[V, \lambda] := \{ y = (y_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{\lambda_n} |y_k - L| = 0 \}$$

şeklinde tanımlanır ve sırasıyla  $y_k \rightarrow L [C, 1]$  ve  $y_k \rightarrow L [V, \lambda]$  şeklinde gösterilir.

$\lambda = (\lambda_n)$ , pozitif sayıların yukarıdaki şartları sağlayan bir dizisi olsun. İstatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan  $\lambda$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı Mursaleen [9] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı.

**Tanım 3.1.**  $\lambda = (\lambda_n)$ , pozitif sayıların aşağıdaki şartları sağlasın  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

$y_k$  dizisi  $\lambda$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve  $S_\lambda - \lim y = L$  ( $y_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ) yazılır.  $L$  sayısına  $\lambda$ -istatistiksel yakınsak olan tüm dizilerin kümesi  $S_\lambda$  ile gösterilir.

(i)  $\lambda_n = n$  iken  $S_\lambda$  ile  $S$  aynıdır.

(ii)  $\lambda -$  istatistiksel yakınsaklık  $A$ -istatistiksel yakınsaklığın bir özel halidir, yani

$A = (a_{nk})$  matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n} & k \in I_n, \\ 0 & k \notin I_n \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa  $A$ -istatistiksel yakınsaklık  $\lambda -$  istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

Aşağıdaki teorem  $\lambda -$  istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli  $(V, \lambda)$ -toplanabilir diziler arasındaki önemli bir bağıntıyı verir [20].

**Teorem 3.1.**  $\lambda = (\lambda_n)$ , pozitif sayıların yukarıdaki şartları sağlayan bir dizisi olsun. Bu takdirde

(i)  $y_k \rightarrow L[V, \lambda] \Rightarrow y_k \rightarrow L(S_\lambda)$  ve  $[V, \lambda] \subseteq S_\lambda$  kapsaması kesindir,

(ii)  $y \in l_\infty$  ve  $y_k \rightarrow L(S_\lambda)$  ise bu durumda  $y_k \rightarrow L[V, \lambda]$ , eğer  $y = (y_k)$  dizisi sonunda sabit (yani  $n > n_0$  için sabit)  $y_k \rightarrow L(C, 1)$  dir.

(iii)  $S_\lambda \cap l_\infty = l_\infty \cap [V, \lambda]$  dir [20].

**İspat.**

(i)  $\varepsilon > 0$  ve  $y_k \rightarrow L[V, L]$  olsun, bu takdirde

$$\sum_{k \in I_n} |y_k - L| \geq \sum_{k \in I_n, |y_k - L| \geq \varepsilon} \geq \varepsilon |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olup  $y_k \rightarrow L[V, \lambda] \Rightarrow y_k \rightarrow L(S_\lambda)$  dir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için  $y = (y_k)$  dizisini

$$y_k = \begin{cases} k & n - [\sqrt{\lambda_n}] + 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça görüleceği gibi  $y \notin l_\infty$  dir, Diğer taraftan

$$\frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{[\sqrt{\lambda_n}]}{\lambda_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olup  $y_k \rightarrow 0(S_\lambda)$  dir. Fakat

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n |y_k - L| \rightarrow \infty$$

olduğundan  $x_k \not\rightarrow 0[V, \lambda]$  dir.

(ii)  $y_k \rightarrow L(S_\lambda)$  ve  $y \in l_\infty$  verilsin. Her  $k \in \mathbb{N}$  için  $|y_k - L| \leq M$  dir.  $\varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |y_k - L| &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| \geq \varepsilon}} |y_k - L| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| < \varepsilon}} |y_k - L| \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan  $y_k \rightarrow L[V, \lambda]$  elde edilir.

Ayrıca  $y = (y_k)$  dizisi sabit olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - L) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-\lambda_n} (y_k - L) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lambda_n} (y_k - L) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-\lambda_n} |y_k - L| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{\lambda_n} |y_k - L| \\ &\leq \frac{2}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |y_k - L| \end{aligned}$$

olup  $y_k \rightarrow L(C, 1)$  dir.

**Teorem 3.2.**  $S_\lambda \subseteq S \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$  [20].

**İspat.** Verilen  $\varepsilon > 0$  için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \supseteq \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|.$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir.  $n \rightarrow \infty$  için limiti alınırsa  $y_k \rightarrow L(S)$  iken  $y_k \rightarrow L(S_\lambda)$  elde edilir.

Tersine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} = 0$  olsun.  $\frac{\lambda_{n(j)}}{n(j)} < \frac{1}{j}$  olacak şekilde bir  $(n(j))_{j=1}^{\infty}$  alt dizi bulunabilir.

$y = (y_i)$  alt dizisi

$$y_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)}, j = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Açıkça  $x \in [C, 1]$  olup ( Teorem 3.1 ) buradan  $x \in S$  dir. Diğer yandan  $x \notin [V, \lambda]$  olup Teorem 3.1 (ii) den  $x \notin S_{\lambda}$  dir.



## 4. KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Reel (ya da kompleks) sayı dizilerinin yakınsaklığı kavramı çeşitli yazarlar tarafından küme dizilerinin yakınsaklığına genişletilmiştir. Bu bölümde ele alacağımız üç genişletme Kuratowski [35], Wijsman [22] ve Housdorff'a [34] aittir. Küme dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayacağız ve bazı temel teoremleri vereceğiz. Böylece sayı dizilerinin istatistiksel yakınsamasına karşılık gelen sonuçların genelleştirmesini elde edeceğiz. Bu bölümde verilen sonuçlar Nuray and Rhoades [24] de verilen sonuçlardır.

Gerçek bir  $y = (y_k)$  sayı dizisinin istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limitleri aşağıdaki şekilde tanımlanır [14]. Bir gerçek sayı dizisi  $y = (y_k)$  için  $B_y$  kümesini

$$B_y := \{b \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k > b\}| \neq 0\}$$

benzer şekilde  $A_y$  kümesini

$$A_y := \{\alpha \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k < \alpha\}| \neq 0\}$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer  $x$  bir gerçek sayı dizisi ise,  $x$ 'in istatistiksel üst ve alt limitleri, sırasıyla

$$st - \lim sup y := \begin{cases} \sup B_y, & B_y \neq \emptyset \\ -\infty, & B_y = \emptyset \end{cases}$$

$$st - \lim inf y := \begin{cases} \inf A_y, & A_y \neq \emptyset \\ \infty, & A_y = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Küme dizilerinin limiti Kuratowski tarafından ünlü hale getirilmiş ve bu nedenle Kuratowski dizi limiti olarak adlandırılmıştır.

Bundan sonra  $Y$  ile  $(Y, p)$  metrik uzayını,  $A$  ve  $A_k$  ile de  $Y$  nin boş olmayan kapalı alt kümelerini gözönüne alacağız.

**Tanım 4.1.**  $(Y, p)$  bir metrik uzay ve  $y \in Y$  ve  $A$  da  $Y$  nin boş olmayan herhangi bir kapalı alt kümesi olsun.  $y$  nin  $A$  ya olan uzaklığı  $d(y, A) = \inf_{a \in A} p(y, a)$  ile tanımlanır.

$\{A_k\}$  bir metrik  $(Y, p)$  uzayında kümelerin bir dizisi olsun.  $\{A_k\}$  dizisinin alt ve üst limitini tanımlayalım:

$$\lim inf A_k := \{y \in Y : \exists (a_k) \subset (A_k), a_k \rightarrow y\}$$

ve

$$\lim sup A_k := \{y \in Y : \exists (k_i) \exists (a_{k_i}) \subset (A_{k_i}), a_{k_i} \rightarrow y\}$$

Burada  $(k_i)$  artan bir doğal sayı dizisini gösterir ve bir alt dizinin indeks kümesini temsil eder.

Bir  $\{A_k\}$  alt kümeler dizisinin alt sınırı,  $a_k \in A_k$  elemanlarının dizilerinin limitlerinin kümesi, üst sınır ise bu tür dizilerin limit noktalarının kümesidir. Alt ve üst limitlerin kapalı olduğu açıktır. Açıkça,  $\lim inf A_k \subset \lim sup A_k$  ve  $d(y, A_k) = d(y, \overline{A_k})$  olduğundan,  $\{A_k\}$  alt kümelerinin ve bunların kapanışlarının  $\{A_k\}$  üst limiti ve alt limiti çakışır.

Eğer

$$A = \lim inf A_k = \lim sup A_k = \lim A_k$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin limiti  $Y$  in bir  $A$  alt kümesi olarak tanımlanır. Literatürde bu limit  $\{A_k\}$  nın Painleve-Kuratowski yakınsaklığı, kapalı yakınsaklık veya topolojik yakınsaklık olarak adlandırılır [35].

**Tanım 4.2.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun.  $d_k, d: Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $d(y) := d(y, A)$  ve  $d_k(y) := d(y, A_k)$  ile tanımlanmak üzere her  $y \in Y$  için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k(y) = d(y)$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$  ya Wijsman yakınsak olduğunu söylenir ve  $W - \lim A_k = A$  yazılır.

Örnek olarak,  $(x, y) -$  düzleminde  $A_k = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2xy = 0\}$  dizisini göz önünde bulunduralım.

$A_k = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2xy = 0\} \rightarrow A = \{(x, y) : x = 0\}$ ,  $(k \rightarrow \infty)$  olduğundan, dizi  $x$ - eksenine yakınsar.

**Tanım 4.3.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun.  $d_k(y)$  bir Cauchy dizisi ise  $\{A_k\}$  dizisine Wijsman Cauchy dizisi denir. Bu durumda her  $\varepsilon > 0$  ve her  $y \in Y$  için pozitif bir  $k_0$  tamsayısı vardır, öyle ki tüm  $m, n > k_0$  için  $|d_n(y) - d_m(y)| < \varepsilon$  dir [24].

**Tanım 4.4.**  $Y$  nin kapalı alt kümelerinden oluşan bir  $A_k$  dizisi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} |d_k(y) - d(y)| = 0$$

ise  $Y$  in kapalı bir  $A$  alt kümesine Hausdorff yakınsak olduğu söylenir. Bu durumda  $A = H - \lim A_k$  olarak yazılır.

**Tanım 4.5.**  $(Y, p)$  bir metrik uzay olsun.  $Y$  nin boş olmayan kapalı  $A_k$  alt kümelerinin  $\{A_k\}$  dizisinin istatistiksel alt limiti ve istatistiksel üst limiti aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$st - \lim \inf A_k := \{y \in Y: \exists (a_k) \subset (A_k), st - \lim a_k = y\}$$

$$st - \lim \sup A_k := \{y \in Y: \exists (k_i) \exists (a_{k_i}) \subset (A_{k_i}), st - \lim a_{k_i} = y\}$$

**Tanım 4.6.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun.

$$st - \lim \sup A_k = st - \lim \inf A_k = A$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$  ya Kuratowski yakınsak olduğunu söyleriz. Bu durumda  $st - \lim A_k = A$  yazarız [24].

**Tanım 4.7.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun.  $\{d(y, A_k)\}$  istatistiksel olarak  $d(y, A)$  ya yakınsak ise, yani her  $\varepsilon > 0$  ve her  $y \in Y$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, A)| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

veya

$$|d(y, A_k) - d(y, A)| < \varepsilon \quad (h. h. k.) \quad (4.1)$$

ise  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  ya Wijsman istatistiksel yakınsaktır; Bu durumda  $st - \lim W A_k = A$  yazılır.

Wijsman istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini  $\{WS\}$  ile gösterilir.  $W - \lim A_k = A$  olması durumunda  $st - \lim W A_k = A$  dır, ancak aşağıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere tersinin doğru olduğu söylenemez.

$Y = \mathbb{R}$  olsun ve  $\{A_k\}$  dizisi

$$A_k = \begin{cases} \{y \in \mathbb{R}: 2 \leq y \leq k\}, & k \geq 2 \text{ ve } k \text{ tamsayı ise} \\ \{1\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu dizi Wijsman yakınsak değildir, ancak

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, \{1\})| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

olduğundan  $A = \{1\}$  kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

Bir başka örnek olarak  $Y = \mathbb{R}^2$  ve  $\{A_k\}$  dizisi aşağıdaki şekilde verilsin:

$$A_k := \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{k}, & k \text{ tam kare ise,} \\ (0,0), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu dizi de  $A = \{(0,0)\}$  kümesine Wijsman istatistiksel olarak yakınsaktır ancak Wijsman yakınsak değildir [24].

**Tanım 4.8.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun, her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n: \sup_{y \in Y} |d(y, A_k) - d(y, A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0,$$

veya *h.h.k.* için

$$\sup_{y \in Y} |d(y, A_k) - d(y, A)| < \varepsilon$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $Y$  in kapalı bir  $A$  alt kümesine Hausdorff istatistiksel olarak yakınsaktır denir ve  $A = st_H - \lim A_k$  ile ifade edilir.

Birçok yakınsama teorisinde, limit değerini kullanmadan yakınsamayı doğrulamak amacıyla kullanılacak kritere sahip olmak arzu edilir. Bu amaçla Cauchy yakınsama kriterinin istatistiksel benzerini tanıtmaya çalışacağız.

**Tanım 4.9.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  ve her  $y \in Y$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, A_N)| \geq \varepsilon\}| = 0.$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir  $N = (N(\varepsilon))$  sayısı varsa  $\{A_k\}$  dizisine Wijsman istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Aşağıdaki teorem Wijsman istatistiksel Cauchy ve Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi veren temel bir teoremdir.

**Teorem 4.1.**  $(Y, p)$  metrik uzayını alalım. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- (i)  $\{A_k\}$  Wijsman istatistiksel yakınsaktır,
- (ii)  $\{A_k\}$  Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir,

(iii) *h. h. k* için  $A_k = B_k$  olacak şekilde Wijsman yakınsak  $\{B_k\}$  dizisi vardır.

**İspat.** (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $st - \lim W A_k = A$  olduğunu varsayalım. (*h. h. k.*) ve  $\varepsilon > 0$  için

$$|d(y, A_k) - d(y, A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer  $N$  sayısı

$$|d(y, A_N) - D(y, A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olarak seçilirse (*h. h. k.*) için

$$|d(y, A_k) - d(y, A_N)| \leq |d(y, A_k) - d(y, A)| + |d(y, A_N) - d(y, A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla  $\{A_k\}$  Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). (ii) nin doğru olduğunu kabul edelim ve

$$J = [d(y, A_N) - 1, d(y, A_N) + 1]$$

aralığı (*h. h. k.*) için  $d(y, A_k)$  yı içeren  $N$  sayısını seçelim.

Şimdi

$$J' = [d(y, A_{N_2}) - \frac{1}{2}, d(y, A_{N_2}) + \frac{1}{2}]$$

aralığı (*h. h. k.*) için  $d(y, A_k)$  yı içeren  $N_2$  sayısını seçmek için (ii) yi uygulayalım.

$$J_1 = J \cap J'$$

aralığı  $d(y, A_k)$  yı kapsar. Çünkü

$$\{k \leq n: d(y, A_k) \notin J \cap J'\} = \{k \leq n: d(y, A_k) \notin J\} \cup \{k \leq n: d(y, A_k) \notin J'\}$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \notin J \cap J'\}|$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \notin J\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \notin J'\}| = 0$$

dır. Bu sebeple  $J_1$ , (*h. h. k.*) için  $d(y, A_k)$  yı içinde bulunduran ve uzunluğu 1'den küçük veya eşit uzunlukta kapalı bir aralıktır. Şimdi bu işlemi (*h. h. k.*) için

$$J'' = [d(y, A_{N_3}) - \frac{1}{4}, d(y, A_{N_3}) + \frac{1}{4}]$$

$d(y, A_k)$  yı içerecek şekilde bir  $N_3$  sayısını seçmek uygulayalım.

$J_2 = J_1 \cup J''$  aralığı (h. h. k.) için  $d(y, A_k)$  yı içerir ve  $J_2$  aralığının uzunluğu  $\frac{1}{2}$  den küçük veya eşittir.

Bu yöntemle devam ederek tümevarımla, her  $m$  için  $J_{m+1} \subset J_m$  olacak biçimde kapalı aralıkların bir  $(J_m)$  dizisini oluştururuz.  $J_m$  nin uzunluğu  $2^{1-m}$  den daha büyük olmadığı görülür ve (h. h. k.) için  $d(y, A_k) \in J_m$  dir. İç içe aralıklar teoreminden

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$$

ifadesine eşit bir  $\mu$  sayısı vardır. (h. h. k.) için  $d(y, A_k) \in J_m$  olduğu gerçeğini kullanarak ( $n > T_m$ ) için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \notin J_m\}| < \frac{1}{m} \quad (4.2)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir  $\{T_m\}$  dizisini bulunabilir. Şimdi  $(A_k)$  nin tüm terimlerinden oluşan ( $k > T_1$ )  $T_m < k \leq T_{m+1}$  olacak şekilde bir  $C = \{C_k\}$  alt dizisi tanımlayalım bu takdirde  $d(y, A_k) \notin J_m$  olur.

Şimdi  $\{B_k\}$  dizisini

$$B_k := \begin{cases} \{n\}, & A_k \text{ c nin bir terimi ise,} \\ A_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durmada  $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$  için  $\lim B_k = \{n\}$  ve  $k > T_m$  ise ya  $A_k$ , yani  $B_k = \{n\}$ , ya da  $B_k = A_k \in J_m$  ve  $|d(y, B_k) - d(y, \{n\})| \leq |J_m| \leq 2^{1-m}$  dir. Ayrıca  $A_k = B_k$  (h. h. k.) olduğu gösterilecektir. Bunun için  $T_m < k < T_{m+1}$  iken

$$\{k \leq n: d(y, A_k) \neq d(y, B_k)\} \subseteq \{k \leq n: d(y, A_k) \notin J_m\}$$

olduğu gösterilmelidir. (4.2) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \neq d(y, B_k)\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \notin J_m\}| < \frac{1}{m}$$

yazılabilir. Bu sebeple  $n \rightarrow \infty$  için limit 0 dır ve  $A_k = B_k$  (h. h. k.) elde edilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Son olarak (iii) nin geçerli olduğunu kabul edelim. Yani (h. h. k.) için  $A_k = B_k$  ve  $\lim B_k = \{\mu\}$  olsun.  $\varepsilon > 0$  ve her  $n$  için

$$\{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, \{\mu\})| \geq \varepsilon\}$$

$$\subseteq \{k \leq n: d(y, A_k) \neq d(y, B_k)\} \cup \{k \leq n: |d(y, B_k) - d(y, \{\mu\})| > \varepsilon\}$$

olur.  $\lim B_k = \{\mu\}$  olduğundan ikinci küme sabit sayıda eleman bulundurur. Örnek olarak  $l = l(\varepsilon)$  olsun. Bu nedenle  $A_k = B_k$  (h. h. k.) olduğundan

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, \{\mu\})| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \neq d(y, B_k)\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{n} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (i) geçerlidir ve ispat tamamlanmıştır.

Aşağıdaki teoremlerde, Wijsman ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık için bir Tauberian şartını verilecektir.

**Teorem 4.2.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun. Eğer  $\{A_k\}$  dizisi

$$st - \lim W A_k = A \text{ ve her } y \in Y \text{ için } \Delta d_k(y) = o\left(\frac{1}{k}\right)$$

koşullarını sağlayan bir diziyse,  $\Delta d_k(y) := d_{k+1}(y) - d_k(y)$  olmak üzere  $W - \lim A_k = A$  dır.

**İspat.**  $\{A_k\}$  nın Wijsman istatistiksel olarak  $A$  ya yakınsak olduğunu kabul edelim.  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  ya Wijsman istatistiksel olduğundan  $W - \lim B_k = A$  ve  $A_k = B_k$  (h. h. k.) olacak şekilde bir  $B_k$  dizisi bulabiliriz. Her  $k$  için

$$m(k) = \max\{i \leq k: A_i = B_i\}$$

olmak üzere  $k = m(k) + p(k)$  yazalım.  $\{i \leq k: A_i = B_i\}$  boş küme ise  $m(k) = -1$  alınır. Bu durum en fazla sonlu sayıda  $k$  için gerçekleşebilir. Şimdi

$$\lim_k \frac{p(k)}{m(k)} = 0 \quad (4.3)$$

olduğu gösterilecektir. Çünkü

$$\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon > 0$$

ise

$$\frac{1}{k} |\{i \leq k: A_i \neq B_i\}| \leq \frac{1}{m(k) + p(k)} p(k) \leq \frac{p(k)}{\frac{p(k)}{\varepsilon} + p(k)} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

olup, sonsuz sayıda  $k$  için  $\frac{p(k)}{m(k)} \geq \varepsilon$  ise (*h. h. k.*) için  $A_k = B_k$  olması durumunda bir çelişki ortaya çıkar. Buradan (4.1) geçerlidir.  $\Delta d_k(y) = O(\frac{1}{k})$  olduğundan öyle bir  $K$  sabiti vardır ki her  $k$  ve  $y \in Y$  için.

$$|\Delta d_k(y)| \leq \frac{K}{k}$$

olur. Bu yüzden

$$\begin{aligned} |d(y, B_{m(k)}) - d(y, A_k)| &= |d(y, A_{m(k)}) - d(y, A_{m(k)+p(k)})| \\ &\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} |\Delta d_i(y)| \leq \frac{p(k)K}{m(k)} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) eşitliğinden faydalanarak, son ifade  $k \rightarrow \infty$  limit 0 olur ve  $W - \lim B_k = A$  olduğundan,  $W - \lim A_k = A$  sonucuna ulaşırız.

**Teorem 4.3.**  $(Y, p)$  bir metrik uzay verilsin.  $\{A_k\}$ ,  $st - \lim_H A_k = A$  olacak şekilde bir dizi ve

$$\sup_{y \in Y} \Delta d_k(y) = O(\frac{1}{k}) \text{ ise } H - \lim A_k = A \text{ şeklindedir [20].}$$

**İspat.**  $\{A_k\}$  dizisini  $A$  kümesine Hausdorff istatistiksel yakınsak olduğunu varsayalım. O halde  $st - \lim_H A_k = A$  ve (*h. h. k.*) için  $B_k = A_k$ ,  $H - \lim B_k = A$  olacak biçimde bir  $\{B_k\}$  dizisi seçilebilir.

Her  $k$  için  $m(k) + p(k)$  ile gösterelim.  $\{i \leq k: B_i = A_i\}$  boş küme ise  $m(k) = -1$  alınır.en fazla sonlu sayıdaki  $k$  sayısı için elde edilebilir. Şimdi

$$\lim_k \frac{p(k)}{m(k)} = 0 \quad (4.4)$$

olduğu gösterilecektir.

$$\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon > 0$$

ise

$$\frac{1}{k} |\{i \leq k: B_i \neq A_i\}| \leq \frac{1}{m(k) + p(k)} p(k) \leq \frac{p(k)}{\frac{p(k)}{\varepsilon} + p(k)} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

olur. Buradan, sonsuz sayıdaki  $k$  için  $\frac{p(k)}{m(k)} \geq \varepsilon$  ise, (*h. h. k. için*)  $B_k = A_k$  olmasıyla bir çelişkiye ulaşılır. Bu durumda (4.1) e benzer olarak

$$\sup_{y \in Y} \Delta d_k(y) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

olduğundan tüm  $k$  sayıları için aşağıdaki biçimde sabit bir  $K$  sayısı vardır.

$$\sup_{y \in Y} \Delta d_k(y) \leq \frac{K}{k}$$

Bu nedenle

$$\begin{aligned} \sup_{y \in Y} |d(y, B_{m(k)}) - d(y, A_k)| &= \sup_{y \in Y} |d(y, A_{m(k)}) - d(y, A_{m(k)+p(k)})| \\ &\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} \sup_{y \in Y} |\Delta d_i(y)| \leq \frac{p(k)K}{m(k)} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. (4.4) eşitliği yardımıyla  $k \rightarrow \infty$  iken 0'a yakınsar. Buradan da  $H - \lim B_k = A$  olduğundan  $H - \lim A_k = A$  sonucuna ulaşılır.

**Teorem 4.4.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun. Eğer  $\{A_k\}$ , Wijsman istatistiksel yakınsak ise  $\{A_k\}$  Kuratowski istatistiksel yakınsaktır .

**İspat.** Sadece

$$st - \lim \sup A_k \subset st - \lim \inf A_k$$

eşitliğini göstermek yeterlidir.  $y \in st - \lim \sup A_k$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun. Wijsman istatistiksel yakınsak bir dizi Wijsman istatistiksel Cauchy dizisi olduğundan (*h. h. k. için*)

$$|d(y, A_k) - d(y, A_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$d(y, A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde  $N$  sayısı bulunabilir, buradan

$$d(y, A_k) \leq d(y, A_N) + |d(y, A_k) - d(y, A_N)| < \varepsilon$$

yazılabilir. Tanıma göre  $y \in st - \lim \inf A_k$  elde edilir ve buradan ispat tamamlanır.

Aşağıda ki Tanım 4.8. ve Tanım 4.9. dan (4.2) ve (4.3) eşitliğini kullanarak ulaşılır.

**Teorem 4.5.**  $(Y, p)$  bir metrik uzay ve  $\{A_k\}$  nın  $Y$  nin boş olmayan herhangi bir kapalı altkümesinde bir dizi olduğunu varsayalım.  $\{A_k\}$  dizisi Hausdorff istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda Wijsman istatistiksel yakınsaktır [24].

Bu bölümde küme dizilerinin Kuratowski Cesaro toplanabilme, Wijsman toplanabilme ve Wijsman kuvvetli toplanabilme kavramlarını tanımlanacaktır. Wijsman istatistiksel yakınsaklık ve Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizileri arasındaki ilişki verilecektir.

$A, A_k \subseteq Y$  olsun.  $\{A_k\}$  dizisinin alt Cesàro limiti ve üst Cesàro limiti

$$(C, 1) - \lim \inf A_k := \{y \in Y : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(y, A_k) = 0\}$$

$$(C, 1) - \lim \sup A_k := \{y \in Y : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(y, A_k) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 4.10.**  $A, A_k \subseteq Y$  olsun.

$$(C, 1) - \lim \inf A_k = (C, 1) - \lim \sup A_k$$

ise  $\{A_k\}$  dizisi Kuratowski Cesàro toplanabilir denir.

**Tanım 4.11.**  $(Y, p)$  metrik uzayı verilsin. Boş olmayan herhangi bir  $A, A_k \subseteq Y$  kapalı alt kümeleri için  $\{d(y, A_k)\}$  kümesi  $d(y, A)$  ya toplanabilir, yani  $y \in Y$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(y, A_k) = d(y, A)$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$  ya Wijsman Cesàro toplanabilir denir.

**Tanım 4.12.**  $(Y, p)$  metrik uzayı verilsin. Boş olmayan  $A, A_k \subseteq Y$  kapalı alt kümeleri için  $\{d(y, A_k)\}$  kümesi  $d(y, A)$  ya kuvvetli toplanabiliyorsa, yani her  $y \in Y$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_k) - d(y, A)| = 0$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$  ya Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilir olduğu söyleriz [24].

**Tanım 4.12.**  $(Y, p)$  metrik uzayı verilsin, boş olmayan  $A, A_k \subseteq Y$  kapalı alt kümeleri için  $\{d(y, A_k)\}$  dizisi  $d(y, A)$  ya kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir ise yani her  $y \in Y$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_k) - d(y, A)|^p = 0.$$

ise  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  ya Wijsman kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirdir [24].

**Teorem 4.6.**  $(Y, p)$  metrik uzayı verilsin.  $p \in \mathbb{R}^+$  ve  $A, A_k \subseteq Y$  kapalı olsun.

(a)  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  kümesine Wijsman kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir ise, bu dizi  $A$  kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

(b)  $\{A_k\}$  dizisi sınırlı ve  $A$  ya Wijsman istatistiksel yakınsak ise,  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  kümesine Wijsman kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilirdir [24].

**İspat.** (a) Herhangi bir  $\{A_k\}$  için, bir  $\varepsilon > 0$  alalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_k) - d(y, A)|^p \geq \varepsilon | \{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, A)|^p \geq \varepsilon \} |$$

olduğundan  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$ 'ya Wijsman istatistiksel yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır.

(b)  $\{A_k\}$  sınırlı ve  $A$  ya Wijsman istatistiksel yakınsak olsun.  $\{A_k\}$  sınırlı bir dizi olduğundan

$$\sup_k |d(y, A_k)| + d(y, A) = M$$

olur.  $\varepsilon > 0$  ve, her  $n > N_\varepsilon$  için

$$\frac{1}{n} | \{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p} \} | < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak biçimde  $N_\varepsilon$  seçilsin.

$$L_n = \{k \leq n: |d(y, A_k) - d(y, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p} \}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_k) - d(y, A)|^p \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k \in L_n} |d(y, A_k) - d(y, A)|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |d(y, A_k) - d(y, A)|^p \right) \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{n} \frac{n\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{n} \frac{n\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılabilir. Buradan  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$  kümesine Wijsman kuvvetli  $p$ -Cesáro toplanabilir olduğu sonucuna ulaşılır.

Reel sayı dizilerinin hemen hemen yakınsaklığı fikri Lorentz [17] tarafından ortaya atıldı. Yıllar içerisinde toplanabilme teorisinde birçok alana uygulandı. Son olarak bu kavram Nuray ve Rhoades [24] tarafından küme dizilerine uygulandı. Bu bölümde Wijsman hemen hemen yakınsak ve Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak küme dizilerinin ilişkisine değinilecektir.

**Tanım 4.13.**  $(Y, p)$  metrik uzayı ve  $A, A_k \subseteq Y$  boştan farklı kapalı alt kümeler verilsin.

Her  $y \in Y$  için  $i$  ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)| = 0$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$ 'ya Wijsman hemen hemen yakınsak olduğunu söylenir [24].

**Tanım 4.14.**  $(Y, p)$  metrik uzayı ve  $A, A_k \subseteq Y$  boştan farklı kapalı alt kümeler verilsin.

Her  $y \in Y$  için  $i$  ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_{k+i}) - d(x, A)| = 0$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$ 'ya Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak olduğu söylenir.

$l_\infty, c, f$  ve  $[f]$  sırasıyla, tüm sınırlı, yakınsak, hemen hemen yakınsak ve kuvvetle hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini gösterebilir.  $c \subset f \subset [f] \subset l_\infty$  bağıntısının sağlandığını göstermek zor değildir [24].

**Tanım 4.15.**  $(Y, p)$  metrik uzayı ve  $A, A_k \subseteq Y$  boştan farklı kapalı alt kümeler verilsin,  $p$  de pozitif bir reel sayı olsun. Her  $y \in Y$  için  $i$  ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)|^p = 0$$

ise  $\{A_k\}$  dizisi  $A$ 'ya Wijsman kuvvetle  $p$  – hemen hemen yakınsaktır [24].

**Tanım 4.16.**  $(Y, p)$  metrik uzayı ve  $A, A_k \subseteq Y$  boştan farklı kapalı alt kümeleri verilsin.

Her  $y \in Y$  için  $i$  ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$  ya Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğu söylenir.

**Teorem 4.7.**  $(Y, p)$  metrik uzayı ve  $A, A_k \subseteq Y$  boştan farklı kapalı alt kümeler,  $y \in Y$  ve  $p$  pozitif bir reel sayı olsun.

(a)  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  kümesine Wijsman kuvvetli  $p$ -hemen hemen yakınsak ise,  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

(b)  $\{A_k\}$  sınırlı bir dizi ve  $A$  kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak ise, o halde  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  kümesine Wijsman kuvvetli  $p$  –hemen hemen yakınsaktır.

**İspat.** (a) Herhangi  $\{A_k\}$  dizisi ve  $\varepsilon > 0$  verilsin.  $\{A_k\}$  dizisinin Wijsman kuvvetli  $p$  –hemen hemen olarak  $A$  kümesine istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Her  $y \in Y$  ve  $p$  reel pozitif sayısı için aşağıdaki eşitsizlik dikkate alınırsa  $\{A_k\}$  dizisinin  $A$  kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

$$\sum_{k=1}^n |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)|^p \geq \varepsilon \quad |\{k \leq n: |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)|^p \geq \varepsilon$$

(b)  $\{A_k\}$  dizisi sınırlı ve Wijsman hemen hemen istatistiksel olarak  $A$  kümesine yakınsak olsun.

$$\sup_k |d(y, A_{k+i})| + d(y, A) = M$$

diyelim.  $\varepsilon > 0$  verilsin ve bütün  $n > N_\varepsilon$  sayıları için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak biçimde bir  $N_\varepsilon$  seçelim

$$L_n = \{k \leq n: |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}$$

diyelim.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)|^p \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k \in L_n} |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |d(y, A_{k+i}) - d(y, A)|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \frac{n\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{n} \frac{n\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  kümesine Wijsman kuvvetli  $p$  – hemen hemen yakınsaktır ve bu ispatı tamamlar.



## 5. KÜME DİZİLERİNİN $\lambda$ – İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup küme dizilerinin  $\lambda$ - istatistiksel sınırlılığı tanımlanacak ve küme dizilerinin  $\lambda$ - istatistiksel yakınsaklığı ile ilişkisi araştırılacaktır. İlk olarak küme dizilerinin  $\lambda$ - istatistiksel sınırlılığını tanımlayarak başlayalım.

**Tanım 5.1.**  $(Y, p)$  metrik uzay,  $\lambda = (\lambda_n)$  ve  $A, A_k \subseteq Y$  boştan farklı kapalı alt kümeleri verilsin.  $K > 0$  ve  $y \in Y$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} (|\{k \in I: d(y, A_k) \geq K\}|) = 0$$

ise  $\{A_k\}$  Wijsman  $\lambda$ - istatistiksel olarak sınırlıdır denir. Tüm Wijsman  $\lambda$ -istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi  $WS_\lambda(b)$  ile gösterilecektir.  $\lambda = n$  ise Wijsman  $\lambda$ - istatistiksel sınırlılık ile Wijsman istatistiksel sınırlılığı çakışır. Tüm Wijsman istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi  $WS(b)$  ile gösterilecektir.

**Teorem 5.1.** Her sınırlı küme dizisi Wijsman  $\lambda$ - istatistiksel sınırlıdır, ancak bunun tersi doğru değildir.

**İspat.**  $\{A_k\}$  sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda her  $k \in \mathbb{N}$  için  $d(y, A_k) \leq K$  olacak şekilde bir  $K > 0$  sayısı vardır. Buradan her  $k \in \mathbb{N}$  için

$$\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\} = 0,$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} (|\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}|) = 0$$

olup  $\{A_k\}$  dizisi Wijsman  $\lambda$ - istatistiksel sınırlıdır.

Tersi için  $\lambda = (n), Y = \mathbb{R}^2$  ve  $\{A_k\}$  dizisini

$$\{A_k\} = \begin{cases} \{(k, k)\}, & k \text{ tam kare ise} \\ \{(0,0)\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.  $\{A_k\}$  dizisi sınırlı değildir ama Wijsman  $\lambda$  – istatistiksel sınırlıdır.

**Teorem 5.2.** Her Wijsman  $\lambda$  – istatistiksel yakınsak dizisi Wijsman  $\lambda$  – istatistiksel sınırlıdır, ancak bunun tersi doğru değildir.

**İspat.**  $\{A_k\}$  dizisi  $A$  kümesine  $\lambda$  – istatistiksel yakınsak olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} (|\{k \in I_n : d(y, A_k) - d(y, A_k) \geq \varepsilon\}|) = 0$$

olacak şekilde bir  $\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Ters üçgen eşitsizliği kullanırsak ve  $\varepsilon = 1$  alınırsa  $K > 0$  sayısı için

$$\{k \in I_n : d(y, A_k) \geq K + 1\} \subset \{k \in I_n : d(y, A_k) - d(y, A_k) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$|\{k \in I_n : d(y, A_k) \geq K + 1\}| \leq |\{k \in I_n : d(y, A_k) - d(y, A_k) \geq \varepsilon\}|$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte  $M = |K| + 1$  yazarsak ve  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} (|\{k \in I_n : d(y, A_k) \geq M\}|) = 0,$$

elde edilir.

Tersi için  $\lambda = (n)$ ,  $Y = \mathbb{R}^2$  alalım.  $\{A_k\}$  dizisini

$$\{A_k\} = \begin{cases} \{(1,1)\}, & k = 2n \\ \{(-1,-1)\}, & k \neq 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlayalım.  $\{A_k\}$  Wijsman  $\lambda$  – istatistiksel sınırlı ama Wijsman  $\lambda$  – istatistiksel yakınsak değildir.

**Teorem 5.3.**  $(Y, p)$  metrik uzay  $\lambda = (\lambda_n)$  ve  $A, A_k \subseteq Y$  (her  $k$  için) boştan farklı kapalı alt kümeleri verilsin.  $WS(b) \subset WS_\lambda(b)$  olması için gerek ve yeter koşul

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0 \quad (5.1)$$

olmasıdır.

**İspat.** Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\{k \leq n: d(y, A_k) \geq K\} \supset \{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(y, A_k) \geq K\}| &\geq \frac{1}{n} |\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}| \\ &= \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan  $WS(b) \subset WS_\lambda(b)$  dir.

Tersi için  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\frac{\lambda_{n(j)}}{n(j)} < \frac{1}{j}$$

olacak şekilde bir  $(n(j))_{j=1}^\infty$  alt dizisi bulunabilir. Şimdi  $\{A_k\}$  dizisini

$$\{A_k\} = \begin{cases} \{(1,1)\}, & i \in I_{n(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \\ \{(0,0)\}, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.  $\{A_k\} \in WS(b)$  fakat  $\{A_k\} \notin WS_\lambda(b)$  olur.

Aşağıdaki teoremden  $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$  ve  $J_n = [n - \mu_n + 1, n]$  olmak üzere her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda_n \leq \mu_n$  şartını sağlayan  $\lambda = (\lambda_n)$  ve  $\mu = (\mu_n)$  dizileri gözönüne alınca ve  $\lambda -$  istatistiksel sınırlı diziler ile  $\mu -$  istatistiksel sınırlı diziler arasındaki kapsama ilişkisi verilecektir.

**Teorem 5.4.**  $\lambda = (\lambda_n)$  ve  $\mu = (\mu_n)$  dizileri aşağıdaki şartları sağlayan iki dizi olsun. Bu takdirde

$$(i) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0 \tag{5.2}$$

ise  $WS_\mu(b) \subseteq WS_\lambda(b)$ ,

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = 1 \tag{5.3}$$

ise  $WS_\lambda(b) \subseteq WS_\mu(b)$  dir.

**İspat.** (i) Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda_n \leq \mu_n$  olsun ve (5.2) sağlansın.  $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$  ve  $J_n = [n - \mu_n + 1, n]$  olduğundan

$$\{k \in J_n: d(y, A_k) \geq K\} \supseteq \{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\},$$

yazabilir. Buradan

$$\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n: d(y, A_k) \geq K\}| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in J_n: d(y, A_k) \geq K\}|,$$

olup  $WS_\mu(b) \subseteq WS_\lambda(b)$  dir.

(ii)  $\{A_k\} \in WS_\mu(b)$  ve (5.3) ün sağlandığını kabul edelim.  $I_n \subset J_n$  olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n: d(y, A_k) \geq K\}| &= \frac{1}{\mu_n} |\{n - \mu_n + 1 < k \leq n - \lambda_n: d(y, A_k) \geq K\}| \\ &\quad + \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}| \\ &\leq \left( \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} \right) + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}| \\ &\leq \left( \frac{\mu_n}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{\lambda_n} \right) + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}| \\ &\leq \left( \frac{\mu_n}{\lambda_n} - 1 \right) + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n: d(y, A_k) \geq K\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan  $WS_\lambda(b) \subseteq WS_\mu(b)$  elde edilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Çolak, R., On  $\lambda$  –statistical convergence, Conference on Summability and Applications, May 12-13, 2011, Istanbul Turkey.
- [2] Freedman, A. R., Sember, J. J., 1981. Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 5, 293-305.
- [3] Buck, R.C. (1953). Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, 75: 335-46.
- [4] Connor, J. S. (1998). The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences. *Analysis*, 8: 46-63.
- [5] Bhardwaj, V. K., Bala, I., 2007. On Weak Statistical Convergence, *Int. J. Math. and Math. Sci. Vol. Article ID 38530. Applications*, Anamaya Publ. New Delhi, India, 121-129. 47-63.
- [6] Fridy, J., 1985. On Statistical Convergence, *Analysis* 5, 301-313.
- [7] Šalát, T., 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, *Math. Slovaca*, **30**, 139-150
- [8] Rath, D. and Tripathy, B. C., 1994. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, 25(4), 381-386.
- [9] Mursaleen, 2000.  $\lambda$ – Statistical Convergence, *Math. Slovaca*, 50, No. 1, 111 -115.
- [10] Steinhaus, H., 1951. Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.
- [11] Schoenberg, I. J., 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, *Amer. Math. Monthly*, **66**, 361-375.
- [12] Fast, H., 1951. Sur La Convergence Statistique, *Colloq. Math.*, **2**, 241-244.
- [13] Fridy, J. A., Miller, H. I., 1991. A matrix characterization of statistical convergen *Analysis*, 11, 59-66.
- [14] Fridy, J. and Orhan, C., 1997. Statistical limit superior and limit inferior, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(12), 3625-3631.
- [15] Savas, E., 2000. Strong Almost Convergence and Almost  $\lambda$ -Statisticallyn Convergence, *Hokkaido Math. Jour.*, **29**, 531-536.
- [16] Zygmund, A., 1979. *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [17] Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica*, 80: 167-190.
- [18] Maddox, I. J., 1970. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press.
- [19] Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- [20] Mursaleen, M., Edely, O. H. H., 2003. Statistical convergence of double sequences. *J. Math. Anal. Appl.* **288(1)** (2003), 223--231.
- [21] J. A. Fridy and C. Orhan: Statistical limit superior and limit inferior, *Proc. Amer. Math. Soc.* 25(12) (1997) 3625-3631.
- [22] Wijsman, R.A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70: 186–188.
- [23] Wijsman, R.A. (1966). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 123: 32–45.
- [24] Nuray, F. and Rhoades, B. E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici*, 49: 87–99.

- [25] Leindler L., Über die de la Vallée-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1965, 16: 375-387
- [26] M. Et, and M. Arslanoglu, On  $f$  – lacunary statistical convergence of order of sequences of sets, *AIP Conference Proceedings* 2037, 020009 (2018); doi: 10.1063/1.5078464.
- [27] Et, Mikail; Yilmazer, M. Çagri. On deferred statistical convergence of sequences of sets. *AIMS Math.* **5** (2020), no. 3, 2143—2152.
- [28] Bayraktar, M. (2000). Fonksiyonel Analiz. Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- [29] Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 31: 421-432.
- [30] Beer, G. (1987). Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 35: 81-96.
- [31] Beer, G. (1994). Wijsman Convergence: A survey. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2: 77-94.
- [32] Beer, G. (1994). Wijsman convergence of convex sets under renorming. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 22: 207-216.
- [33] Beer, G. (2002). On the compactness theorem for sequences of closed sets. *Mathematica Balkanica*, 16: 327-338.
- [34] Hausdorff, F. (1914). *Grundzuger der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, Preprinted by Chelsea, New York.
- [35] Kuratowski, C. (1966). *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York.

# ÖZGEÇMİŞ

Ayşe EREN

[Redacted]

---

[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]

[Redacted]

---

[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]

[Redacted]

---

[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]

## ARAŞTIRMA DENEYİMİ

---

✓ LATEX, WORD, EXCEL, GEOGEBRA